

## **РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, т. 2**

Многочратное рассеяние/ турбулентность / шероховатые поверхности и дистанционное зондирование

Двухтомная монография А. Исимару представляет собой подробное и полное введение в статистическую теорию распространения волн — один из важнейших разделов современной оптики, радиофизики, акустики.

Второй том охватывает теорию многократного рассеяния на облаке дискретных рассеивателей, теорию слабых и сильных флуктуации в сплошных случайных средах, рассеяние волн на шероховатых поверхностях, а также вопросы дистанционного зондирования природных сред. Учитываются такие важные для приложений факторы, как импульсный характер излучения, движение рассеивателей и ограниченность пространственных размеров волнового пучка.

Книга рассчитана на научных работников в области атмосферной оптики, локации, связи, радиоастрономии и акустики. Она может служить учебным пособием для аспирантов и студентов старших курсов.

### **Содержание**

#### **ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ**

<b>Глава 14. Теория многократного рассеяния волн на облаке неподвижных и движущихся рассеивателей и ее связь с теорией переноса</b>	<b>5</b>
14.1. Процессы многократного рассеяния, учитываемые теорией Тверского	6
14.2. Статистическое усреднение для дискретных рассеивателей	11
14.3. Интегральное уравнение Фолди — Тверского для когерентного поля	13
14.4. Интегральное уравнение Тверского для корреляционной функции	15
14.5. Когерентное поле	17
14.6. Падение плоской волны на слой, содержащий рассеиватели, — «полная интенсивность»	20
14.7. Связь между теорией многократного рассеяния и теорией переноса	26
14.8. Приближенные интегральные и дифференциальные уравнения для корреляционной функции	28
14.9. Основные уравнения для движущихся частиц	31
14.10. Флуктуации, обусловленные распределением по размерам	37
Приложение 14А. Пример процесса рассеяния по Тверскому для $N = 3$	39
Приложение 14Б. Оценка многократного интеграла $I$ с помощью метода стационарной фазы	40
Приложение 14В. Оптическая теорема	45
<b>Глава 15. Теория многократного рассеяния волн и распространение импульсов в облаке случайных рассеивателей</b>	<b>48</b>
15.1. Основные уравнения для случая движущихся рассеивателей	48
15.2. Функция взаимной когерентности, угловой спектр и частотный	49

спектр в малоугловом приближении	
15.3. Случай плоской падающей волны	51
15.4. Ограничения на разрешение изображения, налагаемые случайно распределенными рассеивателями	54
15.5. Выходной сигнал приемника при наличии случайно распределенных рассеивателей	59
15.6. Сферическая волна в облаке случайно распределенных частиц	61
15.7. Обратное рассеяние от случайно распределенных рассеивателей	62
15.8. Распространение импульсов в облаке случайно распределенных рассеивателей	67
15.9. Интегральные и дифференциальные уравнения для двухчастотной функции взаимной когерентности	68
15.10. Двухчастотная функция взаимной когерентности для случая плоской волны	70
15.11. Распространение плоской импульсной волны в случае слабых флуктуации	72
15.12. Распространение плоской импульсной волны в случае сильных флуктуации	75

#### ЧАСТЬ IV. ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

<b>Глава 16. Рассеяние волн в случайной сплошной среде и турбулентные среды</b>	<b>80</b>
16.1. Приближение однократного рассеивания и принимаемая мощность	81
16.2. Сечение рассеяния единицы объема стационарной случайной среды	82
16.3. Формула Букера — Гордона	86
16.4. Гауссова модель и колмогоровский спектр	88
16.5. Анизотропная случайная среда	90
16.6. Временные флуктуации рассеянных полей, обусловленные изменением во времени свойств случайной среды	91
16.7. Сильные флуктуации	94
16.8. Рассеяние импульса случайной средой	96
16.9. Сечение рассеяния единицы объема в акустическом случае	96
16.10. Уравнение для узкого пучка	97
<b>Глава 17. Распространение плоской волны в случайной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуации</b>	<b>98</b>
17.1. Уравнения Максвелла для флуктуирующей среды	99
17.2. Борновское приближение и приближение Рытова	101
17.3. Флуктуации уровня и фазы	103
17.4. Случай плоской волны	104
17.5. Прямой и спектральный методы	105
17.6. Спектральные представления флуктуации амплитуды и фазы	106
17.7. Корреляционные функции амплитуды и фазы	108
17.8. Структурные функции амплитуды и фазы	110
17.9. Спектральные и пространственные фильтрующие функции	111

17.10. Статистически однородные случайные среды и спектральная фильтрующая функция	112
17.11. Область применимости геометрической оптики $L \ll l^2/\lambda$	113
17.12. Область $L \gg l^2/\lambda$	117
17.13. Общие свойства флуктуации волн в статистически однородной случайной среде	118
17.14. Статистически однородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции	119
17.15. Однородная и локально однородная турбулентность	120
17.16. Статистически неоднородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции и пространственная фильтрующая функция	124
17.17. Вариации интенсивности турбулентности вдоль трассы распространения	126
17.18. Пределы применимости теории слабых флуктуации	127
17.19. Другие задачи	127
<b>Глава 18. Распространение сферической волны и волнового пучка в турбулентной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуации</b>	<b>129</b>
18.1. Приближение Рытова для сферической волны	129
18.2. Дисперсия для колмогоровского спектра	131
18.3. Корреляционные и структурные функции для колмогоровского спектра	133
18.4. Волновой пучок	133
18.5. Дисперсия для волнового пучка и применимость приближения Рытова	136
18.6. Дистанционное зондирование атмосфер планет	137
18.7. Некоторые близкие задачи	138
<b>Глава 19. Временная корреляция и частотные спектры флуктуации волн в случайной среде и влияние статистической неоднородности случайной среды</b>	<b>141</b>
19.1. Частотные спектры плоской волны	141
19.2. Случай, когда средняя скорость является чисто поперечной, а флуктуации скорости пренебрежимо малы	142
19.3. Частотные спектры с учетом средней и флуктуационной скоростей ветра	146
19.4. Частотные спектры сферической волны	147
19.5. Двухчастотная корреляционная функция	149
19.6. Пересекающиеся пучки	153
19.7. Флуктуации волн в статистически неоднородной случайной среде	154
19.8. Флуктуации волн в локализованной плавно неоднородной случайной среде	155
<b>Глава 20. Сильные флуктуации</b>	<b>160</b>
20.1. Параболическое уравнение	161
20.2. Модель флуктуации показателя преломления	162

20.3. Уравнение для среднего поля и его общее решение	163
20.4. Параболическое уравнение для функции взаимной когерентности	165
20.5. Решения уравнения для функции взаимной когерентности	167
20.6. Примеры функций взаимной когерентности	171
20.7. Функция взаимной когерентности в турбулентной среде	173
20.8. Частотные спектры	175
20.9. Частотная корреляция	178
20.10. Двухчастотная функция взаимной когерентности плоской волны	178
20.11. Форма импульса	181
20.12. Угловой и частотный спектры	182
20.13. Моменты четвертного порядка	184
20.14. Приближение тонкого экрана	187
20.15. Решение в приближении фазового экрана	191
20.16. Приближение фазового экрана для сферических волн	193
20.17. Случай протяженных источников	193
20.18. Протяженная среда	195
20.19. Распространение оптического излучения в турбулентной среде	197
20.20. Модуляционная передаточная функция случайной среды	202
20.21. Адаптивная оптика	208
Приложение 20А	210
Приложение 20Б	212
Приложение 20В	213

## ЧАСТЬ V. РАССЕЯНИЕ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

<b>Глава 21. Рассеяние на шероховатой поверхности</b>	<b>215</b>
21.1. Принимаемая мощность и сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности	217
21.2. Первое приближение метода малых возмущений (горизонтальная поляризация падающей волны)	219
21.3. Сечение рассеяния единичной площадки в первом приближении метода малых возмущений	226
21.4. Статистическое описание шероховатой поверхности	228
21.5. Бистатистическое сечение рассеяния шероховатой поверхности	230
21.6. Влияние нестационарности шероховатой поверхности	233
21.7. Спектры океанических волн	235
21.8. Некоторые другие задачи	235
21.9. Приближение Кирхгофа: рассеяние звуковых волн на шероховатой поверхности	236
21.10. Когерентное поле в приближении Кирхгофа	240
21.11. Сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности	241
21.12. Распределение вероятности рассеянного поля	244
<b>Глава 22. Дистанционное зондирование и методы обращения</b>	<b>246</b>
22.1. Дистанционное зондирование тропосферы	247

22.2. Дистанционное зондирование структурной характеристики $C_n$ , усредненной вдоль трассы	249
22.3. Дистанционное зондирование скорости ветра, усредненной вдоль трассы	250
22.4. Дистанционное зондирование профиля структурной характеристики и некорректно поставленная задача	251
22.5. Обратная задача	257
22.6. Метод сглаживания (регуляризации)	258
22.7. Статистический метод обращения	259
22.8. Метод обращения Бакуса — Гильберта	262
22.9. Дистанционное зондирование геофизических объектов	266
Приложение А. Спектральное представление случайных функций	268
А.1. Комплексные стационарные случайные функции	268
А.2. Вещественные стационарные случайные функции	270
А.3. Однородные комплексные случайные функции	270
А.4. Однородные и изотропные случайные функции	271
А.5. Однородные вещественные случайные функции	273
А.6. Стационарные и однородные случайные функции	273
А.7. Гипотеза замороженности	273
Приложение Б. Структурные функции	275
Б.1. Структурная функция и случайные процессы со стационарными приращениями	275
Б.2. Спектральное представление структурной функции	277
Б.3. Локально однородные и изотропные случайные функции	279
Б.4. Колмогоровский спектр	281
Приложение В. Турбулентность и флуктуации показателя преломления	283
В.1. Ламинарное течение и турбулентность	283
В.2. Развитая турбулентность	284
В.3. Скалярные величины, сохраняющие свое значение в турбулентной атмосфере, а также в нейтральной, стабильной и нестабильной атмосферах	287
В.4. Флуктуации показателя преломления	289
В.5. Структурные функции консервативных примесей и флуктуации показателя преломления	290
В.6. Скорость диссипации энергии $\epsilon$ и энергетический баланс в атмосферной турбулентности	291
В.7. Скорость диссипации флуктуации $N$	293
В.8. Расчет структурной характеристики	293
В.9. Приграничный слой, свободная атмосфера, крупно- и мелкомасштабная турбулентность	294
В.10. Структурная характеристика показателя преломления в приграничном слое	295
В.11. Структурная характеристика $C_n$ для свободной атмосферы	297

V.12. Соотношение между структурной характеристикой $C_n$ и дисперсией флуктуации показателя преломления	298
Приложение Г. Некоторые полезные математические формулы	299
Г.1. Функция Куммера ${}_1F_1(a,c;z)$	299
Г.2. Конфлюэнтная гипергеометрическая функция $\psi(a,c;z)$	299
Г.3. Другие интегралы	300
Литература	301
<b>Предметный указатель</b>	<b>310</b>

Предметный указатель

Адаптивная оптика 208	— — распределения частиц по раз
Амплитуда рассеяния 45	мерам 246
Атмосфера земная 122	— — солнечного ветра 246
— коэффициент преломления 287	— — тропосферы 246
Бакуса — Гильберта метод 262	Диффузная интенсивность 14, 31
Бете — Солпитера уравнение 5, 17, 29, 160	Диффузное поле 217, 227, 241
Биологические среды 80, 215	Доплеровский сдвиг 37, 94, 215
— — распространение акустических волн 98	Закон двух третей 286
Борновское приближение 83, 101	Замороженности гипотеза 92, 141—143, 273
Букера — Гордона формула 86	Зеркальное отражение 216
Вариационные производные 163, 211	Изображений формирование в воде 128
Винера — Хинчина теорема 84, 269	Изопланатическая область 207
Вихрей размер 88	Импульса рассеяние 80, 96
Временная когерентность 197	— уширение 74
— корреляционная функция 141, 143, 219	— форма 181
— — — рассеянного поля 93	Инерционный интервал 89, 120
Временной задержки метод 250, 252	Интенсивность 13, 14, 20, 61
Временные флуктуации 141	— диффузная 14, 31
— — рассеянного поля 91	— когерентная 13, 14, 31, 61
Второй момент 15, 27, 48	— некогерентная 14, 31
Гауссовское случайное поле 162	— обратного рассеяния 65
Гюйгенса — Френеля принцип 160	— полная 13, 20, 31
Дайсона уравнение 5, 17, 160	— средняя 31
Диаграммный метод 5, 17, 160, 217	— флуктуации, насыщение 199
Дисперсия 86, 144, 264, 298	Интервал вязкий 88, 120
— флуктуации углов прихода 140	Кармана спектр 89
— — уровня 131	Кирхгофа приближение 217, 236, 240
Дистанционное зондирование атмосфер планет 137	Когерентное поле 13, 17, 98, 164, 217
— — атмосферы Венеры 159	— — в приближении
— — геофизических объектов 246	Кирхгофа 240
	Когерентности радиус 179
	— степень 151, 250, 252

- ширина полосы 73, 78, 179
- Когерентность пространственная 197
- Когерентные оптические адаптивные методы 209
- Колмогоровский спектр 86, 133, 249, 281
- Корреляции радиус 86, 115, 174
- Корреляционная матрица 260
  - функция 133, 268, 269
  - — амплитуды 108
  - — взаимная 149
  - — флуктуации уровня и фазы 110
- Коэффициент затухания 95
  - усиления приемника и передатчика 81
- Лидары 248
- Логарифмически нормальное распределение 202
- Локаатор звуковой 247
- Лучевая интенсивность 28, 33, 48, 62, 69; 166, 182
  - — зависящая от времени 33, 49
  - — обобщенная 69
  - — обратная 62
  - — прямая 62
  - — частотный спектр 36
- Малоугловое приближение 49, 70, 166
- Малых возмущений метод 217, 219
- Мерцания индекс 190, 192, 199
- Метод наименьших квадратов 255
- Множественного рассеяния теория 5
  - — — связь с теорией переноса 5, 26
  - — эффекты 94
- Модуляционная передаточная функция 56, 59, 202, 204
- Некогерентный источник 172
- Некорректно поставленные задачи 246, 254, 256, 258
- Область применимости геометрической оптики 113 122
- Обратное рассеяние 97
  - — от случайно распределенных рассеивателей 62
- Оптическая передаточная функция 204
  - — теорема 45
- Параболического уравнения метод 160
- Приближение фазового экрана 186
- Пульсары 79, 178, 181
- Пучка дрожание (блуждание) 140, 197
  - радиус 174, 197
  - уширение 174
- Пучки пересекающиеся 141, 153
  - — метод дистанционного зондирования 257
- Пучок волновой 129, 133, 172
  - — коллимированный 134, 135, 174
  - — сфокусированный 134
- Пятнистость 245
- Радиолокаторы 248
  - в астрономии 215
- Радиолокации уравнение 81, 93
- Радиометрические измерения 258, 267
- Радиоокеанография 215
- Размер зоны Френеля 113, 118, 138, 155, 184
- Разрешение изображения 54
  - угловое 59
- Раиса — Накагами распределение 244
- Распределение вероятности интенсивности 201
  - — рассеянного поля 244
- Рассеяние 5
  - однократное 39
- Регуляризации метод 246, 258
- Рэлея гипотеза 221, 236
  - критерий шероховатости поверхности 216
  - распределение 244
  - рассеяние 87, 247
- Рытова метод 101
  - — для сферической волны 129

- Сглаживания метод 246, 258
- Сечение обратного рассеяния
  - радиолокационное 66
- рассеяния акустическое 96
- — бистатическое 218
- — — шероховатой поверхности 230
- — единицы объема 81, 96
- — — слоя рассеивателей 66
- — — шероховатой поверхности 227
- — полное 164
- Сильные флуктуации 94, 119, 160
- Спектр глобальный 156
- локальный 156
- полностью развитой турбулентности 88
- протяженный 177
- угловой 49, 51, 182, 183
- — флуктуации интенсивности 189, 194
- частотный 36, 49, 51, 93, 141, 144, 150, 175, 177, 183, 192
- — лучевой интенсивности 36
- — сферической волны 147
- — уширение 94
- Спектральная плотность 92
- — комплексной фазы 192
- — поля скоростей 96 — — флуктуации интенсивности 189
- Спектральное уширение 219
- Среднее поле 13, 98, 217
- Средняя интенсивность 31
- — на оси пучка 174, 175
- Статистический метод обращения 259
- Структурная функция 110, 257, 290
- — амплитуды 110
- — для колмогоровского спектра 133
- — коэффициента преломления 249, 290
- — спектральное представление 277
- — температуры 249
- — уровня 167
- характеристика 89, 97, 180, 183, 248, 291, 293, 297
- — в атмосфере 89
- — профиль 254
- — скорости 97
- — температуры 97
- — электронной плотности 180
- Тверского интегральное уравнение 5, 15
- теория 6
- Туман 247
- распространение волн 79
- Турбулентность 80, 275
- анизотропная 88
- атмосферы 80
- диагностика 140
- крупномасштабная 294
- локально однородная 120
- межзвездная 178
- мелкомасштабная 294
- океана 80
- экспоненциальный профиль 137
- Ультразвуковое зондирование течения крови 248
- Уравнение для среднего поля 163
- — частотного спектра 36
- переноса излучения 31, 35, 36, 62, 166
- — — для движущихся частиц 32
- — — — зависящей от времени лучевой интенсивности 35
- — для флуктуации интенсивности 36, 190
- Уравнение переноса, использование при дистанционном зондировании 250
- Усредняющее действие апертуры 128, 140, 200
- Фильтрующая функция 11, 112
- — пространственная 111, 112

— — спектральная 111, 112  
Флуктуации диэлектрической  
проницаемости 82  
— коэффициента преломления 283,  
289  
— скорости ветра 146  
Флуктуационное поле 13, 98  
Фолди — Тверского интегральное  
уравнение 13, 14  
Фотография подводная 59  
Функциональные производные 163,  
211  
Функция взаимной когерентности 28,  
34, 48, 62, 77, 165—167, 176,  
204  
— — — в турбулентной среде 173

— — — двухчастотная 68, 69, 70, 77  
— — — зависящая от времени 37  
— — — изображения 207  
— — — плоской волны 175  
— — — сферической волны 171, 175  
Фурутсу — Новикова формула 163  
Характеристическая функция 93  
— — движущихся частиц 35  
— — случайной функции 240  
— — флуктуации скорости 274  
Хойта распределение 245  
Шероховатая поверхность  
двух-масштабная 236  
Эйконала уравнение 116  
Эффективное поле 7  
Яркость источников 194



# Теория многократного рассеяния

---

## Глава 14

### Теория многократного рассеяния волн на облаке неподвижных и движущихся рассеивателей и ее связь с теорией переноса

Как уже говорилось во введении к гл. 7, существуют два основных подхода к задаче о распространении волн в случайном облаке рассеивателей — строгая (аналитическая) теория и теория переноса. Теория переноса, в которой интенсивности волн в случайной среде исследуются с помощью уравнения переноса излучения, описана в гл. 7—13 (том 1).

Строгая теория, называемая также теорией многократного рассеяния, строится на основе фундаментальных дифференциальных уравнений для полей, после чего привлекаются статистические соображения (см. [84, 142], а также прекрасный обзор [15]). Первые исследования многократного рассеяния проведены в работах [126, 227, 298, 299, 319]. Результаты этих работ были обобщены Тверским, который получил замкнутую систему интегральных уравнений. Его теория дает ясную физическую картину процессов многократного рассеяния; именно поэтому первая часть данной главы посвящена выводу интегральных уравнений Тверского (см. работы [25—27, 183, 184, 194, 348—352]).

Диаграммный метод дает систематическое и лаконичное формальное представление всех процессов многократного рассеяния на основе простого использования фейнмановских диаграмм [142, 250, 337]. Этот метод приводит к диаграммной форме уравнения Дайсона для среднего поля и уравнения Бете — Солпитера для корреляционной функции. Следует отметить, однако, что получить явные выражения для операторов, входящих в эти уравнения, не удастся, поэтому приходится прибегать к различным приближениям. Простейшее и наиболее часто используемое из них называется сглаженным приближением первого порядка. Можно

показать [186], что это приближение эквивалентно переходу к интегральным уравнениям Тверского.

В последние годы был проведен ряд исследований по выяснению связи между теорией многократного рассеяния и теорией переноса [11—14, 48, 62—64, 102, 114, 115, 119, 149, 156, 162, 183, 191, 325, 337, 371, 372]. В данной главе мы тоже остановимся на этом вопросе и обсудим связь между теорией Тверского и описанной в гл. 7 теорией переноса.

Движение рассеивателей приводит к тому, что поле становится функцией времени, так что корреляции поля приходится рассматривать не только в пространстве, но и во времени. В данной главе анализируется этот вопрос и выводятся основные уравнения. Решения этих уравнений, описывающие пространственно-временные флуктуации поля, даны в следующей главе.

### 14.1. Процессы многократного рассеяния, учитываемые теорией Тверского

Рассмотрим облако из  $N$  случайно распределенных в объеме  $V$  частиц с координатами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Частицы могут различаться как по форме, так и по размеру. Исследуем скалярное поле  $\psi_a$  в точке  $\mathbf{r}_a$  пространства, не занятого частицами. Оно удовлетворяет волновому уравнению <sup>1)</sup>

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = 0, \quad (14.1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в окружающей частицы среде. Обозначим через  $\phi_i^a$  падающую волну в точке  $\mathbf{r}_a$  в отсутствие частиц <sup>2)</sup>. Поле  $\psi^a$  в  $\mathbf{r}_a$  тогда представляет собой сумму падающей волны  $\phi_i^a$  и вкладов  $U_s^a$  от каждой из  $N$  частиц, расположенных в точках  $\mathbf{r}_s, s = 1, 2, \dots, N$  (рис. 14.1):

$$\psi^a = \phi_i^a + \sum_{s=1}^N U_s^a. \quad (14.2)$$

Здесь  $U_s^a$  — волна в точке  $\mathbf{r}_a$ , рассеянная расположенным в точке  $\mathbf{r}_s$  рассеивателем; ее можно выразить через волну  $\Phi^s$ , падающую на рассеиватель в точке  $\mathbf{r}_s$ , и оператор рассеяния  $u_s^a$  для частицы, расположенной в точке  $\mathbf{r}_s$ , и для точки наблюдения  $\mathbf{r}_a$  (рис. 14.2):

$$U_s^a = u_s^a \Phi^s. \quad (14.3)$$

<sup>1)</sup>  $\psi$  может описывать поле давления в акустическом случае или одну из компонент электрического или магнитного поля.

<sup>2)</sup> Для полей типа  $\phi_i^a$  верхний индекс обозначает точку, в которой рассматривается поле, а нижний — происхождение этого поля.

Заметим, что в общем случае  $u_s^a \Phi^s$  не означает просто произведение  $u_s^a$  на  $\Phi^s$ , а является операторной записью поля в точке  $\mathbf{r}_a$ , обусловленного падением волны  $\Phi^s$  на рассеиватель, находящийся в точке  $\mathbf{r}_s$ . Однако если  $\Phi^s$  можно аппроксимировать

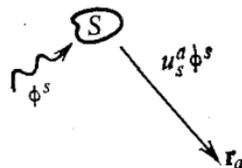
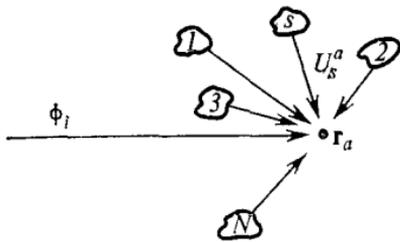


Рис. 14.1. Поле в точке  $\mathbf{r}_a$  равно сумме падающей волны и вкладов от всех  $N$  частиц.

Рис. 14.2. Вклад от  $s$ -й частицы при падении на нее эффективного поля  $\Phi^s$ .

ской волной, которая распространяется в направлении единичного вектора  $\hat{\mathbf{i}}$ ,

$$\Phi^s = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \text{где } \mathbf{k} = k\hat{\mathbf{i}}, \quad (14.4)$$

и если расстояние между  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_a$  велико, то в этом случае можно воспользоваться приближением дальней зоны и представить  $u_s^a$  в виде

$$u_s^a \approx f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (14.5)$$

где  $\hat{\mathbf{0}}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s$ ,  $r = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|$ , а  $f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  — амплитуда рассеяния.

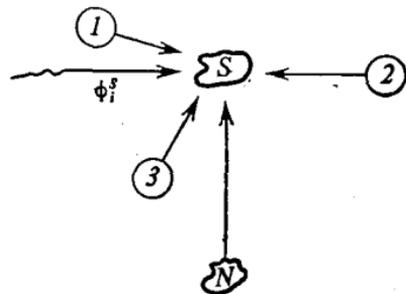


Рис. 14.3. Эффективное поле для  $s$ -й частицы складывается из поля падающей волны и вкладов от всех частиц, за исключением  $s$ -й частицы.

Назовем волну  $\Phi^s$ , падающую на рассеиватель в точке  $\mathbf{r}_s$ , «эффективным полем». Оно состоит из падающей волны  $\phi_i^s$  и поля рассеяния от всех частиц, за исключением рассеивателя в точке  $\mathbf{r}_s$ . Таким образом, можно записать (рис. 14.3)

$$\Phi^s = \phi_i^s + \sum_{t=1, t \neq s}^N U_t^s. \quad (14.6)$$

Уравнения (14.2) и (14.6) образуют фундаментальную пару уравнений

$$\psi^a = \phi_i^a + \sum_{s=1}^N u_s^a \Phi^s, \quad (14.7a)$$

$$\Phi^s = \phi_i^s + \sum_{t=1, t \neq s}^N u_i^s \Phi^t. \quad (14.7б)$$

Величину  $\Phi$  в принципе можно исключить из этих двух уравнений и получить в результате решение  $\psi^a$  для заданной падающей волны  $\phi_i$ . Это можно осуществить, подставив (14.7б) в (14.7a) и повторив этот процесс следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi^a &= \phi_i^a + \sum_{s=1}^N u_s^a \left( \phi_i^s + \sum_{t=1, t \neq s}^N u_i^s \Phi^t \right) = \\ &= \phi_i^a + \sum_{s=1}^N u_s^a \phi_i^s + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N u_s^a u_i^s \phi_i^t + \\ &+ \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \sum_{m=1, m \neq t}^N u_s^a u_i^s u_m^t \phi_i^m + \dots \quad (14.8) \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый член в (14.8). Первый член — это падающая волна  $\phi_i^a$ . Следующий член этого ряда

$$\sum_{s=1}^N u_s^a \phi_i^s \quad (14.8a)$$

учитывает все однократные рассеяния (рис. 14.4, а). Следующая за ним сумма

$$\sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N u_s^a u_i^s \phi_i^t \quad (14.8б)$$

описывает все двукратные рассеяния (рис. 14.4, б).

Третья сумма является тройной. В нее не входят слагаемые с  $t = s$  и  $m = t$ , тогда как член с  $s = m$  в ней присутствует. Эту сумму можно переписать так, чтобы выделить слагаемые с разными  $s$ ,  $t$  и  $m$  и с  $s = m$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \sum_{m=1, m \neq t}^N u_s^a u_i^s u_m^t \phi_i^m = \\ &= \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \sum_{m=1, m \neq t, m \neq s}^N u_s^a u_i^s u_m^t \phi_i^m + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N u_s^a u_i^s u_s^t \phi_i^s. \quad (14.8в) \end{aligned}$$

Первая тройная сумма схематически изображена на рис. 14.4, в. Во второй сумме (14.8в) фигурируют только рассеиватели в точках  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_t$ ; ее графическое изображение дано на рис. 14.4, г.

Таким образом, в общем случае полное поле  $\psi^a$  в точке  $\Gamma_a$ , являющееся суперпозицией падающей волны и всех многократно рассеянных волн, можно разбить на две части:

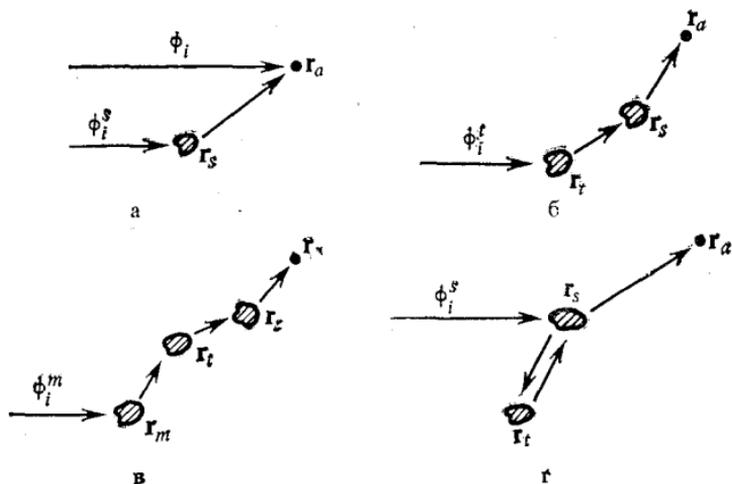


Рис. 14.4. Однократное рассеяние (а), двукратное рассеяние (б), трехкратное рассеяние (в) на различных частицах и трехкратное рассеяние при прохождении волной одной и той же частицы более одного раза (г).

1. Одна часть, описываемая первой суммой (14.8в), содержит все многократно рассеянные волны, учитывающие последовательные рассеяния на разных рассеивателях. Эта часть иллюстри-

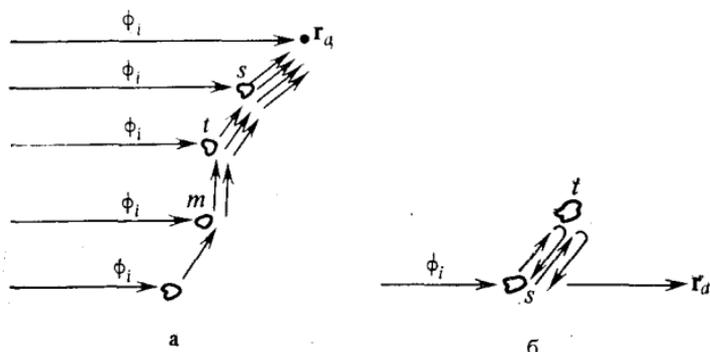


Рис. 14.5. Пути рассеянных волн, проходящие через различные рассеиватели (а), и пути рассеянных волн, проходящие через один и тот же рассеиватель более одного раза (б).

руется на рис. 14.5, а. Отметим, что  $s$  — текущий индекс для всех рассеивателей, так что имеется  $N$  членов с разными  $s$ ; индекс  $t$  отмечает все рассеиватели, за исключением  $s$ , и, таким образом, имеется  $N - 1$  член с разными  $t$ . Аналогично имеется  $N - 2$  члена с разными  $m$ .

2. Другая группа членов описывается второй суммой в (14.8в) и отвечает всем тем траекториям волны, которые проходят через какую-либо частицу больше одного раза. Такая ситуация показана на рис. 14.5, б.

В теории Тверского учитываются все члены, принадлежащие к первой группе (рис. 14.5, а), и отбрасываются члены, относящиеся ко второй (рис. 14.5, б). Очевидно, что первая группа описывает почти все многократно рассеянные волны, и теория Тверского должна давать прекрасные результаты, если обратное рассеяние мало по сравнению с рассеянием в других направлениях.

С математической точки зрения теория Тверского основана на представлении поля в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi^a = & \phi_i^a + \sum_{s=1}^N u_s^a \phi_i^s + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N u_s^a u_t^s \phi_i^t + \\ & + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \sum_{m=1, m \neq t, m \neq s}^N u_s^a u_t^s u_m^t \phi_i^m + \dots \quad (14.9) \end{aligned}$$

В табл. 14.1 дается сравнение числа членов, учитываемых при точном описании процесса многократного рассеяния [уравнение (14.8)] и при описании по Тверскому [уравнение (14.9)]. Ясно, что при больших  $N$  различие между точным описанием и описанием Тверского становится очень малым.

Таблица 14.1

	$E$ [точное уравнение (14.8)]	$T$ [уравнение Тверского (14.9)]	$\frac{E-T}{E}$
$\phi_i^a$ падающее	1	1	0
Однократное рассеяние	$N$	$N$	0
Двукратное рассеяние	$N(N-1)$	$N(N-1)$	0
Трехкратное рассеяние	$N(N-1)^2$	$N(N-1)(N-2)$	$\frac{1}{N-1}$
Четырехкратное рассеяние	$N(N-1)^3$	$N(N-1)(N-2)(N-3)$	$\frac{3N-5}{(N-1)^2}$

Уравнение (14.9), которое называют разложением Тверского, полезно для понимания учитываемых теорией процессов рассеяния, но не удобно для вычисления требуемых величин. Для этой цели Фолди и Тверским были получены замкнутые интегральные уравнения, которые приводятся в следующих разделах.

## 14.2. Статистическое усреднение для дискретных рассеивателей

Рассмотрим случайную функцию  $f$ , которая зависит от параметров всех  $N$  рассеивателей. Этой функцией может быть поле  $\psi$  или произведение полей. Рассмотрим усреднение такой функции по ансамблю. Используя функцию плотности вероятности  $W(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots, \underline{N})$ , среднее значение  $f$  можно записать в виде

$$\langle f \rangle = \int \int \dots \int f W(\underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{s}, \dots, \underline{N}) d\underline{1}, d\underline{2} \dots d\underline{s} \dots d\underline{N}. \quad (14.10)$$

Переменная  $\underline{s}$  описывает все характеристики  $s$ -го рассеивателя: положение  $\mathbf{r}_s$ , форму, ориентацию и диэлектрическую проницаемость. Поэтому можно написать

$$d\underline{s} = d\mathbf{r}_s d\underline{\zeta}_s, \quad (14.11)$$

где  $d\mathbf{r}_s$  — элементарный объем  $dx_s dy_s dz_s$ , а  $d\underline{\zeta}_s$  учитывает все остальные характеристики рассеивателя:

$d\underline{\zeta}_s = d$  (форма  $s$ -го рассеивателя)  $d$  (его ориентация)  $d$  (его размер)  $\dots$

Рассмотрим теперь важный случай, когда концентрация частиц мала, а их размер во много раз меньше расстояния между ними. В этом случае можно пренебречь конечным размером частиц и предположить, что положение и свойства каждой частицы не зависят от расположения и свойств всех других частиц. Это означает также, что все частицы рассматриваются как точечные, а влияние их размеров сказывается только на характеристиках рассеяния. При этих предположениях имеем

$$W(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots, \underline{s}, \dots, \underline{N}) = w(\underline{1}) w(\underline{2}) w(\underline{3}) \dots w(\underline{s}) \dots w(\underline{N}). \quad (14.12)$$

Предположим далее, что все рассеиватели имеют одинаковые статистические характеристики. Тогда, записав

$$w(\underline{s}) = w(\mathbf{r}_s, \underline{\zeta}_s), \quad (14.13)$$

мы можем осуществить интегрирование по всем  $\underline{\zeta}_s$ . В результате получим

$$\langle f \rangle = \int \int \dots \int [f]_{\underline{\zeta}} w(\mathbf{r}_1) w(\mathbf{r}_2) \dots w(\mathbf{r}_s) \dots w(\mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (14.14)$$

где  $[f]_{\underline{\zeta}}$  — среднее значение  $f$ , отвечающее средним характеристикам рассеивателя (форма, ориентация и т. д.). Функцию

плотности вероятности  $\omega(\mathbf{r}_s)$  можно интерпретировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s &= \\ &= \text{вероятность нахождения } s\text{-го рассеивателя в элементарном} \\ &\quad \text{объеме } d\mathbf{r}_s = \\ &= \frac{\text{число рассеивателей в } d\mathbf{r}_s = dx_s dy_s dz_s}{\text{полное число рассеивателей в } V} = \frac{\rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s}{N}, \quad (14.15) \end{aligned}$$

где  $\rho(\mathbf{r}_s)$  — концентрация частиц, т. е. число рассеивателей в единичном объеме. Таким образом, имеем

$$\omega(\mathbf{r}_s) = \rho(\mathbf{r}_s)/N. \quad (14.16)$$

Если концентрация  $\rho(\mathbf{r}_s)$  постоянна в объеме  $V$ , то

$$\rho = N/V \quad \text{и} \quad \omega(\mathbf{r}_s) = 1/V.$$

Среднее значение теперь дается выражением

$$\langle f \rangle = \iint \dots \int [f]_{\xi} \frac{\rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) \dots \rho(\mathbf{r}_N)}{N^N} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (14.17)$$

Если  $[f]_{\xi}$  зависит только от положения  $s$ -го рассеивателя и не зависит от положения других рассеивателей, то, написав  $[f]_{\xi} = f(\mathbf{r}_s)$ , можно проинтегрировать (14.17) по всем  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ , за исключением  $\mathbf{r}_s$ . Замечая, что

$$\int \omega(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1}{N} = 1,$$

получим

$$\langle f(\mathbf{r}_s) \rangle = \int f(\mathbf{r}_s) \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{N} d\mathbf{r}_s. \quad (14.18)$$

Если  $[f]_{\xi}$  зависит от положения двух различных рассеивателей ( $s$ -го и  $t$ -го), то, записав  $[f]_{\xi} = f(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_t)$ , найдем

$$\langle f(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_t) \rangle = \iint f(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_t) \frac{\rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t)}{N^2} d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t. \quad (14.19)$$

Выражения (14.18) и (14.19) можно обобщить на любое число рассеивателей. Эти выражения будут использованы для нахождения статистических средних в последующих разделах<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> При больших концентрациях рассеивателей приходится вводить двухточечную функцию распределения вероятности [28, 353].

### 14.3. Интегральное уравнение Фолди — Тверского для когерентного поля

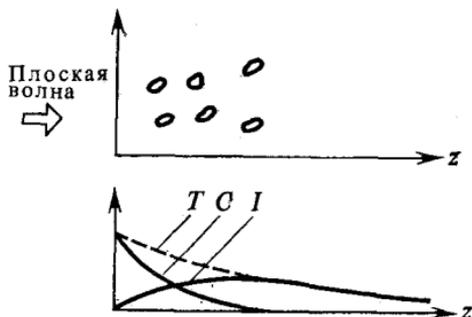
Рассмотрим поле  $\psi^a$  в точке  $\mathbf{r}_a$  случайной среды. Вообще говоря, поле  $\psi^a$  является случайной функцией точки  $\mathbf{r}_a$  и времени, и его можно разбить на среднее поле  $\langle \psi^a \rangle$  и флуктуационное поле  $\psi_f^a$ .

Среднее поле  $\langle \psi^a \rangle$  называют также когерентным полем, а квадрат его амплитуды  $|\langle \psi^a \rangle|^2$  — когерентной интенсивностью. Флуктуационное поле  $\psi_f^a$  называют еще некогерентным полем, и соответственно средний квадрат его амплитуды  $\langle |\psi_f^a|^2 \rangle$  — некогерентной интенсивностью. Полная интенсивность представляет собой средний квадрат амплитуды полного поля  $\langle |\psi^a|^2 \rangle$  и равна сумме когерентной и некогерентной интенсивностей:

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \langle |\langle \psi^a \rangle + \psi_f^a|^2 \rangle = \langle |\psi^a \rangle|^2 + \langle |\psi_f^a|^2 \rangle. \quad (14.20)$$

В качестве примера рассмотрим нормальное падение плоской волны на полубезграничную область со случайными рассеивателями (рис. 14.6). Для детального описания введенных величин

Рис. 14.6. Падение плоской волны на полубезграничную среду, и графики когерентной интенсивности  $C$ , некогерентной интенсивности  $I$  и полной интенсивности  $T$ .



нужно знать полное решение задачи, однако приближенную качественную картину можно получить без сложных расчетов. Так, например, когерентная интенсивность уменьшается из-за рассеяния и поглощения, поэтому можно ожидать, что она будет убывать по закону

$$C = \text{когерентная интенсивность} = \exp(-\rho \sigma_t z), \quad (14.21)$$

где  $\sigma_t$  — сумма сечений рассеяния и поглощения. С другой стороны, рассеянная мощность — это некогерентная мощность, и, следовательно, она дает вклад в полную интенсивность. В результате полная интенсивность  $T$  по существу зависит только от поглощения, так что

$$T = \text{полная интенсивность} \approx \exp(-\rho \sigma_a z). \quad (14.22)$$

Поэтому некогерентную интенсивность  $I$  можно аппроксимировать выражением

$$I \approx \exp(-\rho\sigma_a z) - \exp(-\rho\sigma_t z). \quad (14.23)$$

Эти соотношения являются лишь приближенными, однако они позволяют представить некоторые общие количественные характеристики поля, что и показано на рис. 14.6. Заметим еще, что когерентная и некогерентная интенсивности в теории переноса отвечают ослабленной падающей и диффузной интенсивностям соответственно.

Рассмотрим теперь когерентное поле  $\langle \psi^a \rangle$ , используя теорию Тверского. Будем исходить из разложения (14.9)

$$\begin{aligned} \langle \psi^a \rangle = & \phi_i^a + \sum_{s=1}^N \langle u_s^a \phi_i^s \rangle + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \langle u_s^a u_t^s \phi_i^t \rangle + \\ & + \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \sum_{m=1, m \neq t, m \neq s}^N \langle u_s^a u_t^s u_m^t \phi_i^m \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14.24)$$

Используя формулы (14.18) и (14.19), в пределе  $N \rightarrow \infty$  получим

$$\begin{aligned} \langle \psi^a \rangle = & \phi_i^a + \int u_s^a \phi_i^s \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s + \iint u_s^a u_t^s \phi_i^t \rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t + \\ & + \iiint u_s^a u_t^s u_m^t \phi_i^m \rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t) \rho(\mathbf{r}_m) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t d\mathbf{r}_m + \dots \end{aligned} \quad (14.25)$$

При выводе (14.25) мы использовали соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \langle u_s^a \phi_i^s \rangle &= \sum_{s=1}^N \int (u_s^a \phi_i^s) \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{N} d\mathbf{r}_s = \int u_s^a \phi_i^s \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \\ \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \langle u_s^a u_t^s \phi_i^t \rangle &= \sum_{s=1}^N \sum_{t=1, t \neq s}^N \iint u_s^a u_t^s \phi_i^t \frac{\rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t)}{N^2} d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t = \\ &= \frac{(N-1)}{N} \iint u_s^a u_t^s \phi_i^t \rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t, \end{aligned} \quad (14.26)$$

что в пределе  $N \rightarrow \infty$  дает

$$\iint u_s^a u_t^s \phi_i^t \rho(\mathbf{r}_s) \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_t.$$

Заметим, что разложение (14.25) эквивалентно интегральному уравнению Фолди — Тверского

$$\langle \psi^a \rangle = \phi_i^a + \int u_s^a \langle \psi^s \rangle \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \quad (14.27)$$

поскольку итерирование (14.27) приводит к (14.25).

Интегральное уравнение (14.27) является *основным уравнением* для когерентного поля в теории Тверского. Это уравнение было получено Фолди как некоторая аппроксимация, а Тверской установил его физический смысл, соответствующий проведенному здесь рассмотрению. Таким образом, величина  $\langle \psi^a \rangle$ , определяемая интегральным уравнением (14.27), по существу совпадает со средним значением поля  $\psi^a$ , изображенного на рис. 14.5, а.

#### 14.4. Интегральное уравнение Тверского для корреляционной функции

Тверской получил также интегральное уравнение для интенсивности, согласующееся с интегральным уравнением Фолди — Тверского (14.27) для когерентного поля. В данном разделе мы не будем выводить интегральное уравнение Тверского. Вместо этого мы покажем, исходя из указанного уравнения, что оно согласуется с результатами предыдущих разделов, и поясним его физический смысл.

Интегральное уравнение Тверского можно записать в виде

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle + \int v_s^a v_s^{b*} \langle |\psi^s|^2 \rangle \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \quad (14.28)$$

где  $v_s^a$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$v_s^a = u_s^a + \int u_t^a v_s^t \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_t. \quad (14.29)$$

Два интегральных уравнения (14.28) и (14.29) являются основными уравнениями, определяющими второй момент поля  $\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle$ .

Поясним теперь физический смысл этих уравнений, разлагая их аналогично тому, как это делалось в предыдущих разделах. Рассмотрим сначала уравнение (14.29). Итерируя это уравнение, получим

$$v_s^a = u_s^a + \int u_t^a u_s^t \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_t + \\ + \int u_t^a u_m^t u_s^m \rho(\mathbf{r}_t) \rho(\mathbf{r}_m) d\mathbf{r}_t d\mathbf{r}_m + \dots \quad (14.30)$$

Здесь первый член  $u_s^a$  описывает рассеяние на рассеивателе  $s$ , находящемся в точке  $\mathbf{r}_a$  (рис. 14.7). Второй член в пределе  $N \rightarrow \infty$  принимает вид

$$\int u_t^a u_s^t \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_t = \sum_{t=1, t \neq s}^N \langle u_t^a u_s^t \rangle_s, \quad (14.31)$$

где угловые скобки  $\langle \rangle_s$  означают усреднение по характеристикам рассеивателя  $t$  в предположении, что параметры частицы  $s$

фиксированы. Выражение (14.31) описывает волну, рассеянную сначала частицей  $s$ , а затем частицей  $t$  и достигающую точки  $r_a$ . Третий член описывает распространение волны от частицы  $s$  к частице  $m$ , затем к частице  $t$  и, наконец, в точку  $r_a$ . Таким образом,  $v_s^a$  описывает все процессы многократного рассеяния от частицы  $s$  к точке  $a$  с участием различных рассеивателей, как показано на рис. 14.7.

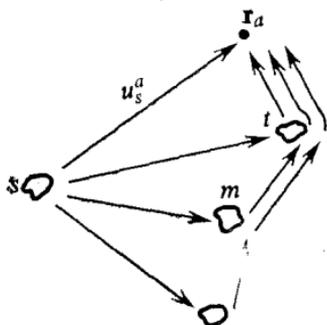


Рис. 14.7. Процессы рассеяния для  $v_s^a$ .

Принтерируем теперь аналогичным образом интегральное уравнение (14.28). В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = & \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle + \int v_s^a v_s^{b*} |\langle \psi^s \rangle|^2 \rho(r_s) dr_s + \\ & + \int v_s^a v_s^{b*} v_t^s v_t^{s*} |\langle \psi^t \rangle|^2 \rho(r_s) \rho(r_t) dr_s dr_t + \\ & + \int v_s^a v_s^{b*} v_t^s v_t^{s*} v_m^t v_m^{t*} |\langle \psi^m \rangle|^2 \rho(r_s) \rho(r_t) \rho(r_m) dr_s dr_t dr_m + \dots \end{aligned} \quad (14.32)$$

Рассмотрим отдельно каждый член (14.32). Первый член  $\langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle$  есть произведение когерентного поля в точке  $a$  на ком-

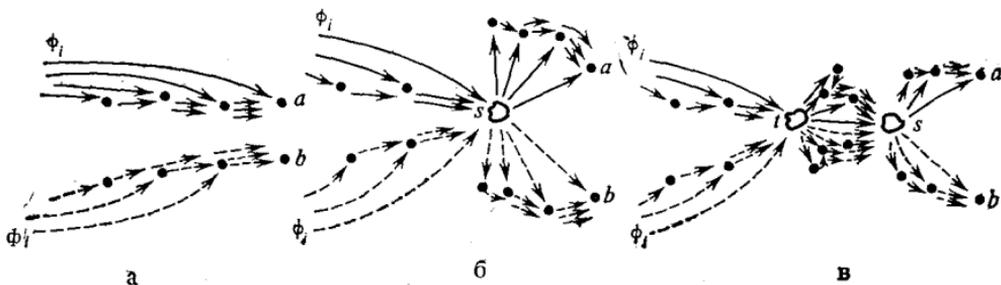


Рис. 14.8. Процессы рассеяния, соответствующие первому (а), второму (б) и третьему (в) членам (14.32).

плексно-сопряженное когерентное поле в точке  $b$ . Поскольку  $\langle \psi^a \rangle$  представляет собой среднее значение поля  $\psi^a$ , которое соответствует сумме всех многократных рассеяний, показанных на рис. 14.5, а, этот член можно изобразить, как показано на рис. 14.8, а,

Следующий член  $\int v_s^a v_s^{b*} |\langle \psi^s \rangle|^2 \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s$  представляет волну в точке  $a$ , порожденную процессом рассеяния  $v_s^a$  (рис. 14.7) когерентного поля в точке  $s$ , и волну в точке  $b$ , обусловленную рассеянием  $v_s^{b*}$  комплексно-сопряженного поля. Этот член показан на рис. 14.8, б.

Аналогичное изображение третьего члена приведено на рис. 14.8, в.

Продолжая этот процесс, можно понять, что интегральное уравнение Тверского можно получить, усредняя произведение полей  $\psi^a$  и  $\psi^{b*}$ , даваемых основными процессами рассеяния (14.9), проиллюстрированными на рис. 14.5, а. В приложении 14А рассмотрен пример таких процессов для  $N = 3$ .

Таким образом, как интегральное уравнение Фолди — Тверского для когерентного поля, так и интегральное уравнение Тверского для интенсивности учитывают одни и те же процессы рассеяния, описываемые выражением (14.9), и поэтому эти уравнения согласуются друг с другом.

Следует заметить, что эти уравнения соответствуют первому сглаженному приближению в более строгих уравнениях Дайсона и Бете — Солпитера, которые можно вывести с помощью диаграммных методов [142]. Более строгие формулировки можно найти в работах [149, 250].

## 14.5. Когерентное поле

Рассмотрим слой толщины  $d$ , содержащий большое число рассеивателей; пусть на него нормально падает плоская волна (рис. 14.9).

Падающая волна единичной амплитуды задается выражением

$$\phi_i(r) = e^{ikz}. \quad (14.33)$$

Вычислим когерентное поле  $\langle \psi \rangle$  внутри слоя, которое удовлетворяет интегральному уравнению Фолди — Тверского

$$\langle \psi^a \rangle = \phi_i^a + \int u_s^a \langle \psi^s \rangle \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s. \quad (14.34)$$

Как отмечалось в разд. 14.1,  $u_s^a$  является оператором, и  $u_s^a \langle \psi^s \rangle$  выражает поле в точке  $\mathbf{r}_a$ , обусловленное рассеянием волны  $\langle \psi^s \rangle$  на рассеивателе в точке  $\mathbf{r}_s$ . Поскольку геометрия слоя и падающей волны не зависит от координат  $x$  и  $y$ , когерентное поле  $\langle \psi \rangle$  также не зависит от  $x$  и  $y$ , так что  $\langle \psi \rangle$  должно соответствовать плоской волне, распространяющейся в направлении  $+z$ .

Рассмотрим величину  $u_s^a \langle \psi^s \rangle$ . Она описывает рассеяние волны  $\langle \psi \rangle$  на отдельном рассеивателе. Если точка  $\mathbf{r}_a$  находится в

дальней зоне по отношению к рассеивателю, находящемуся в точке  $\mathbf{r}_s$ , то приближенно можно записать

$$u_s^a \langle \psi^s \rangle = f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|} \langle \psi^s \rangle, \quad (14.35)$$

где  $\hat{\mathbf{i}}$  — единичный вектор в направлении распространения  $\langle \psi^s \rangle$  (в данном случае  $\hat{\mathbf{i}}$  совпадает с  $\hat{\mathbf{i}}_z$ ), а  $\hat{\mathbf{0}}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s$ .

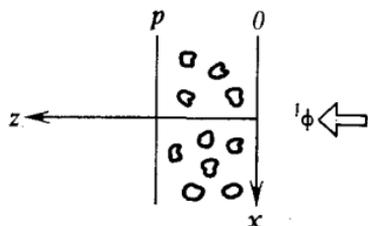


Рис. 14.9. Падение плоской волны на слой толщины  $d$ .

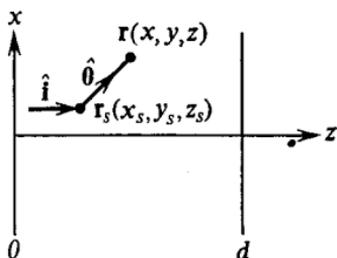


Рис. 14.10. Ориентация векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_s$  из уравнения (14.36).

Используя (14.33) и (14.35), запишем интегральное уравнение (14.34) в виде (рис. 14.10)

$$\langle \psi(z) \rangle = e^{ikz} + \int_0^d dz_s \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dy_s f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} \langle \psi(z_s) \rangle. \quad (14.36)$$

Рассмотрим прежде всего когерентное поле внутри слоя  $0 < z < d$ . Интегрирование по  $x_s$  и  $y_s$  можно выполнить методом стационарной фазы (приложение 14Б, пример I). Стационарная точка определяется уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x_s} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y_s} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = 0,$$

которые дают  $x_{s0} = x$  и  $y_{s0} = y$ . Таким образом, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dy_s f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} = \begin{cases} \frac{2\pi i}{k} \exp[ik(z - z_s)] f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) & \text{при } z_s < z, \\ \frac{2\pi i}{k} \exp[ik(z_s - z)] f(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) & \text{при } z_s > z. \end{cases} \quad (14.37)$$

Используя (14.37), запишем (14.36) в виде

$$\langle \psi(z) \rangle = e^{ikz} + \int_0^z dz_s \frac{2\pi i}{k} \exp[ik(z - z_s)] f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \rho \langle \psi(z_s) \rangle + \\ + \int_z^d dz_s \frac{2\pi i}{k} \exp[ik(z_s - z)] f(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \rho \langle \psi(z_s) \rangle. \quad (14.38)$$

Известно, что для большого рассеивателя размера  $a$  с малой оптической плотностью отношение амплитуды рассеяния вперед к амплитуде рассеяния назад по порядку величины равно  $f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})/f(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \sim (ka)^4$ , а для большого идеального проводника  $f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})/f(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \sim (ka)^2$ . Поэтому вторым интегралом в (14.38) можно пренебречь. Предполагая далее, что плотность  $\rho$  постоянна, запишем (14.38) в виде

$$\langle \psi(z) \rangle = e^{ikz} \left[ 1 + \frac{2\pi i}{k} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \rho \int_0^z \exp(-ikz_s) \langle \psi(z_s) \rangle dz_s \right]. \quad (14.39)$$

Это интегральное уравнение можно решить точно, используя подстановку

$$\langle \psi(z) \rangle = Ae^{iKz}. \quad (14.40)$$

В результате получим

$$A = 1, \quad K = k + \frac{2\pi f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \rho}{k}. \quad (14.41)$$

Решение (14.40), (14.41) означает, что при падении на слой плоской волны среднее поле распространяется в слое с постоянной распространения  $K$ . В более общем случае произвольной падающей на слой волны среднее поле  $\langle \psi \rangle$  можно описать, считая, что оно удовлетворяет волновому уравнению

$$(\nabla^2 + K^2) \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (14.42)$$

где  $K = k + [2\pi f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})/k] \rho$ . Заметим, что амплитуда  $f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})$ , вообще говоря, комплексна даже в случае непоглощающих рассеивателей, поэтому в процессе распространения когерентное поле  $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$  ослабляется. Такое ослабление обусловлено рассеянием и связано с сечением рассеяния. Чтобы пояснить это, рассмотрим когерентную интенсивность для плоской падающей волны. В этом случае имеем

$$|\langle \psi(z) \rangle|^2 = \exp \left\{ - \left[ \frac{4\pi \rho}{k} \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \right] z \right\}. \quad (14.43)$$

Заметим, что, согласно «оптической теореме» (приложение 14В),

$$\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) = \sigma_s + \sigma_a, \quad (14.44)$$

где  $\sigma_s$  — сечение рассеяния, а  $\sigma_a$  — сечение поглощения. Поэтому (14.43) принимает вид

$$|\langle \psi(z) \rangle|^2 = \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)z], \quad 0 < z < d. \quad (14.45)$$

Рассматривая область вне слоя  $z > d$ , подставим (14.40) в (14.39) и заменим верхний предел интеграла на  $d$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \psi(z) \rangle &= \exp[iKd + ik(z-d)], \\ |\langle \psi(z) \rangle|^2 &= \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)d], \quad z > d. \end{aligned} \quad (14.46)$$

Отсюда видно, что когерентная интенсивность ослабляется экспоненциально, причем постоянная ослабления пропорциональна плотности и полному сечению  $\sigma_s + \sigma_a$ .

Следует заметить, что, хотя проведенный в данном разделе анализ относится к случаю падения на слой плоской волны, обобщение такого подхода, даваемое уравнением (14.42), оказывается хорошим приближением для многих практических ситуаций.

## 14.6. Падение плоской волны на слой, содержащий рассеиватели, — «полная интенсивность»

В данном разделе мы рассмотрим полную интенсивность в случае падения на слой плоской волны. Решение этой задачи оказывается далеко не простым. В теории переноса соответствующее решение подробно обсуждалось в гл. 11 с помощью методики, основанной на квадратурной формуле Гаусса. Точное решение интегральных уравнений Тверского (14.28) и (14.29) в литературе до сих пор не описано. Однако Тверской предложил приближенное решение этой задачи, которое оказалось хорошо согласующимся с экспериментальными данными. Мы рассмотрим это решение в данном разделе. Следует подчеркнуть, однако, что, хотя решение уравнения (14.42) дает хорошее приближение для когерентного поля в большинстве практических ситуаций, описать столь же просто полную интенсивность не удастся.

Рассмотрим полную интенсивность  $\langle |\psi^a|^2 \rangle$ , определяемую выражением (14.20). Эта величина удовлетворяет интегральным уравнениям Тверского (14.28) и (14.29):

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = |\langle \psi^a \rangle|^2 + \int |v_s^a|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \quad (14.47)$$

$$v_s^a = u_s^a + \int v_t^a v_s^t \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_t. \quad (14.48)$$

Полезные численные решения (14.47) и (14.48) рассматриваемых в качестве основных уравнений трудно получить без использования некоторых приближений.

Заметим прежде всего, что, хотя  $v_s^a$  представляет собой оператор, мы можем получить приближенное представление этой величины следующим образом. Предположим, что в (14.48) концентрация  $\rho(\mathbf{r}_t)$  постоянна, а  $u_t^a$  дается приближением дальнего поля

$$u_t^a = f(\hat{\mathbf{i}}_{at}, \hat{\mathbf{i}}_{ts}) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_t|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_t|}, \quad (14.49)$$

где  $\hat{\mathbf{i}}_{at}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_t$ , а  $\hat{\mathbf{i}}_{ts}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_s$  (рис. 14.11). Аналогичное представление  $u_s^a$  имеет вид

$$u_s^a = f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|}, \quad (14.50)$$

где  $\hat{\mathbf{0}}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s$ , а  $\hat{\mathbf{i}}_s$  — единичный вектор в направлении распространения полной интенсивности ( $|\psi^s|^2$ ).<sup>1)</sup>

Представим теперь величину  $v_s^t$  из (14.48) в виде

$$v_s^t = u_s^t \xi_{ts}, \quad (14.51)$$

где  $\xi_{ts}$  — некоторая неизвестная функция. Тогда (14.48) примет вид

$$u_s^a \xi_{as} = u_s^a + \int_0^d dz_t \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} dy_t u_t^a u_t^s \xi_{ts} \rho. \quad (14.52)$$

Интеграл в (14.52) можно оценить с помощью метода стационарной фазы (приложение 14Б, пример II):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} dy_t u_t^a u_t^s \xi_{ts} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} dy_t f(\hat{\mathbf{i}}_{at}, \hat{\mathbf{i}}_{ts}) f(\hat{\mathbf{i}}_{ts}, \hat{\mathbf{i}}_s) \frac{\exp[ik(r_1 - r_2)]}{r_1 r_2} \xi_{ts} \approx \\ &\approx f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}}) f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s) \exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|) \frac{4\pi i}{k|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|(\hat{\mathbf{0}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z)} \xi_{ts}, \end{aligned} \quad (14.53)$$

где  $z_s < z_t < z_a$ .

1) Более полное описание  $\hat{\mathbf{i}}_s$  дается в следующем разделе.

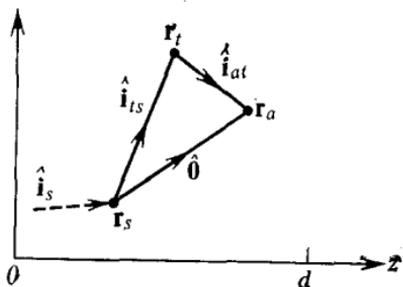


Рис. 14.11. Ориентация векторов  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{r}_t$  и  $\mathbf{r}_s$  из (14.49).

Здесь  $r_1 = |\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_s|$ ,  $r_2 = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_t|$ , а  $\xi_{ts}$  берется в точке стационарной фазы. Пренебрежем теперь вкладом от областей  $z_t < z_s$  и  $z_a < z_t$ . Тогда (14.52) примет вид

$$\xi_{as} = 1 + \frac{2\pi i f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}}) \rho}{k(\hat{\mathbf{0}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z)} \int_{z_s}^{z_a} \xi_{ts} dz_t. \quad (14.54)$$

Отсюда видно, что  $\xi_{ts}$  есть функция от  $z_t$  и  $z_s$ , и мы получаем решение

$$\xi_{as} = \exp[i\Delta_{as}(z_a - z_s)], \quad (14.55)$$

где

$$\Delta_{as} = \frac{2\pi \rho f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}})}{k \cos \theta_{as}}, \quad \text{где} \quad \cos \theta_{as} = \hat{\mathbf{0}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z.$$

Используя (14.51) и (14.56), находим

$$v_s^a = f(\mathbf{0}, \mathbf{i}_s) \frac{\exp(iK|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|}, \quad (14.56)$$

где  $K = k + [2\pi \rho f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}})]/k$ . Из выражения (14.56) видно, что  $v_s^a$  имеет точно такой же вид, как  $u_s^a$ , но вместо постоянной  $k$  в выражении для  $v_s^a$  входит постоянная  $K$ . Это объясняется тем, что  $u_s^a$  описывает распространение излучения от  $s$  к  $a$  в свободном пространстве, тогда как  $v_s^a$  учитывает влияние многократного рассеяния.

Используем теперь (14.47) для нахождения полной интенсивности  $\langle |\psi^a|^2 \rangle$  внутри слоя  $0 < z_a < d$ . Заметим прежде всего, что

$$|v_s^a|^2 = |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s)|^2 \frac{\exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|]}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|^2}, \quad (14.57)$$

поэтому (14.47) принимает вид

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \langle |\psi^a|^2 \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dy_s \int_0^d dz_s |v_s^a|^2 \langle |\psi^a|^2 \rangle \rho. \quad (14.58)$$

Заметим также, что для  $z_a > z_s$ ,  $x_s = (z_a - z_s) \operatorname{tg} \theta_s \cos \phi_s$ ,  $y_s = (z_a - z_s) \operatorname{tg} \theta_s \sin \phi_s$ , и, используя равенства  $dx_s dy_s = r^2 \sec \theta_s d\Omega$ ,  $d\Omega = \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dy_s = \int_0^{\pi/2} d\theta_s \int_0^{2\pi} d\phi_s r^2 \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_s} = \int_{2\pi} r^2 \frac{d\Omega_s}{\cos \theta_s} \quad \text{при} \quad z_a > z_s, \quad (14.59)$$

где  $r = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|$  (рис. 14.12). Поскольку обратное рассеяние предполагается малым, пренебрежем в интеграле областью  $z_a < z_s$ . В результате получим

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = |\langle \psi^a \rangle|^2 + \rho \int_{2\pi} d\Omega_s \int_0^{z_a} dz_s |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s)|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle \sec \theta_s \times \\ \times \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)(z_a - z_s) \sec \theta_s]. \quad (14.60)$$

Заметим, что для случая плоской волны единичный вектор  $\hat{\mathbf{i}}_s$  на-

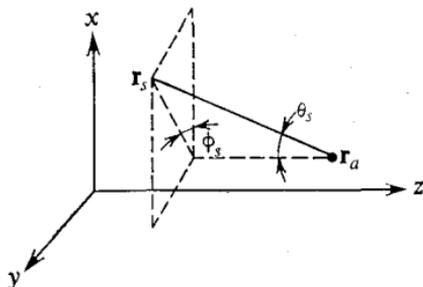


Рис. 14.12. Геометрия углов  $\theta_s$  и  $\phi_s$  для случая (14.59).

правления распространения полной интенсивности  $\langle |\psi^s|^2 \rangle$  параллелен оси  $z$ <sup>1)</sup>:

$$\hat{\mathbf{i}}_s = \hat{\mathbf{i}}_z. \quad (14.61)$$

Будем считать далее, что рассеяние концентрируется главным образом вблизи направления вперед, так что

$$\theta_s \text{ — малый угол, и } \sec \theta_s \approx 1. \quad (14.62)$$

Заметим также, что, поскольку обратное рассеяние мало,

$$\int_{2\pi} d\Omega_s |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_z)|^2 \approx \int_{4\pi} d\Omega_s |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_z)|^2 = \sigma_s. \quad (14.63)$$

При этих условиях получаем

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = |\langle \psi^a \rangle|^2 + \rho \sigma_s \int_0^{z_a} \langle |\psi^s|^2 \rangle \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)(z_a - z_s)] dz_s, \quad (14.64)$$

где когерентная интенсивность  $|\langle \psi^a \rangle|^2$  дается выражением

$$|\langle \psi^a \rangle|^2 = \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)z_a]. \quad (14.65)$$

<sup>1)</sup> В действительности равенство (14.61) является приближенным. Более строгое обсуждение см. в следующем разделе.

Уравнение (14.64) можно решить точно, что дает

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \exp(-\rho \sigma_a z_a) \quad \text{при } 0 < z_a < d. \quad (14.66)$$

Эта величина выражает полную интенсивность внутри слоя, которая зависит только от сечения поглощения  $\sigma_a$  и не зависит от сечения рассеяния  $\sigma_s$ . В частности, в случае непоглощающих рассеивателей сечение  $\sigma_a$  равно нулю, и полная интенсивность постоянна внутри слоя. Этого и следовало ожидать, поскольку если пренебречь обратным рассеянием, то полная мощность должна сохраняться.

Вычислим теперь полную интенсивность вне слоя. Она определяется выражением (14.58), где в интеграл нужно подставить полную интенсивность (14.66). Прежде всего оценим  $v_s^a = u_s^a \xi_{as}$  (14.51) для точки  $\mathbf{r}_a$ , находящейся вне слоя. Подставив (14.55) в интеграл в правой части (14.54), получим

$$\xi_{as} = 1 + \frac{2\pi i f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}}) \rho}{k(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_z)} \int_{z_s}^d \exp[i\Delta_{ts}(z_t - z_s)] dz_t. \quad (14.67)$$

Заметив, что  $\mathbf{r}_t$  есть точка стационарной фазы, и поэтому  $\Delta_{ts} = \Delta_{as} = 2\pi \rho f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}}) / (k \cos \theta_{as})$ , получим  $\xi_{as} = \exp[i\Delta_{as}(d - z_s)]$ . Таким образом, для точки  $\mathbf{r}_a$  вне слоя имеем

$$v_s^a = u_s^a \xi_{as} = f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|} \exp[i\Delta_{as}(d - z_s)] \quad (14.68)$$

и, следовательно,

$$|v_s^a|^2 = |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s)|^2 \frac{\exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)(d - z_s) \sec \theta_{as}]}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|^2}. \quad (14.69)$$

Подставляя (14.69) в (14.58) и используя (14.66), получим для точки  $\mathbf{r}_a$  вне слоя

$$\begin{aligned} \langle |\psi^a|^2 \rangle = & \exp[-\rho(\sigma_a + \sigma_s)d] + \rho \int_{\Omega_r} d\Omega_s \int_0^d dz_s \sec \theta_{as} |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s)|^2 \times \\ & \times \exp[-\rho(\sigma_s + \sigma_a)(d - z_s) \sec \theta_{as} - \rho \sigma_a z_s], \quad (14.70) \end{aligned}$$

где  $\theta_{as}$  — угол между  $\hat{\mathbf{0}}$  и  $\hat{\mathbf{i}}_s = \hat{\mathbf{i}}_z$  (рис. 14.13), а  $\Omega_r$  — телесный угол, в котором принимается излучение.

Выполнив интегрирование по  $z_s$ , получим

$$\begin{aligned} \langle |\psi^a|^2 \rangle = & \exp[-\rho(\sigma_a + \sigma_s)d] + \int_{\Omega_r} d\Omega_s \sec \theta_{as} |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}_s)|^2 \times \\ & \times \frac{\exp(-\rho \sigma_a d) - \exp[-\rho(\sigma_a + \sigma_s)d \sec \theta_{as}]}{(\sigma_s + \sigma_a) \sec \theta_{as} - \sigma_a}. \quad (14.71) \end{aligned}$$

Если угол  $\theta_{as}$  мал, можно положить  $\sec \theta_{as} \approx 1$ . В этом случае

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \exp[-\rho(\sigma_z + \sigma_s)d] + \int_{\Omega_r} d\Omega_s |f(\hat{\theta}, \hat{i}_s)|^2 \frac{\exp(-\rho\sigma_a d)(1 - \exp(-\rho\sigma_s d))}{\sigma_s}. \quad (14.72)$$

Замечая, что  $\sigma_s = \int_{4\pi} d\Omega_s |f(\hat{\theta}, \hat{i}_s)|^2$ , получим решение

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \exp(-\rho\sigma_a d) [\exp(-\rho\sigma_s d) + q(1 - \exp(-\rho\sigma_s d))], \quad (14.73)$$

где величина

$$q = \frac{\int_{\Omega_r} d\Omega_s |f(\hat{\theta}, \hat{i}_s)|^2}{\int_{4\pi} d\Omega_s |f(\hat{\theta}, \hat{i}_s)|^2}$$

описывает долю полной мощности, рассеянную в телесный угол приема  $\Omega_r$  (рис. 14.14).

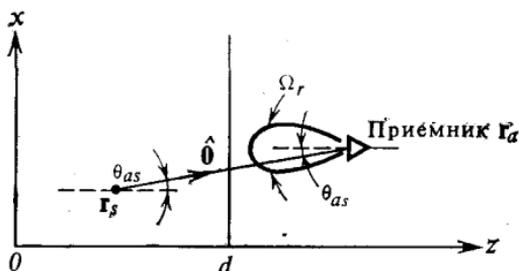


Рис. 14.13. Угол приема  $\theta_{as}$  и  $\Omega_r$  для (14.70).



Рис. 14.14. Часть рассеянной мощности, даваемая множителем  $q$  в (14.73).

Выражение (14.73) является основным и использовалось во многих исследованиях. Типичный график (14.73) приведен на рис. 14.15. При малых  $\rho d$  ( $\rho d < \sigma_s^{-1} \ln q^{-1}$ ) преобладает когерентная интенсивность:

$$\ln \langle |\psi^a|^2 \rangle \approx -(\sigma_a + \sigma_s) \rho d. \quad (14.74)$$

При больших  $\rho d$  доминирует видоизмененная с учетом  $q$  некогерентная интенсивность:

$$\ln \langle |\psi^a|^2 \rangle \approx \ln q - \sigma_a \rho d. \quad (14.75)$$

Заметим, что если  $\Omega_r$  равно  $2\pi$ , то приемник собирает почти всю рассеянную мощность, так что приближенно можно записать

$$\int_{4\pi} d\Omega_s |f(\hat{0}, \hat{i}_s)|^2 \approx \int_{2\pi} d\Omega_s |f(\hat{0}, \hat{i}_s)|^2. \quad (14.76)$$

При этом  $q = 1$  и, таким образом,

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = \exp(-\rho \sigma_a d). \quad (14.77)$$

Выражение (14.73) применимо только в области  $\theta_{as} \approx 0$ . В бо-

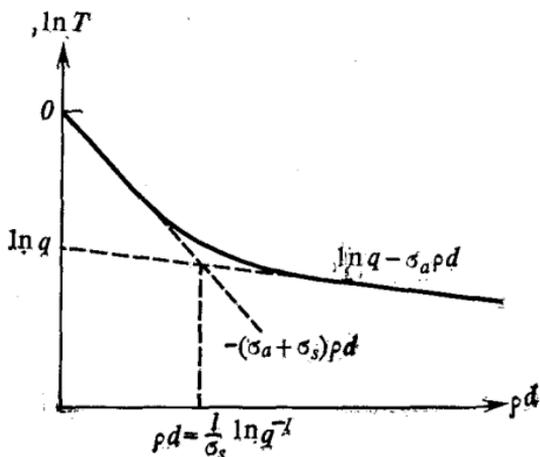


Рис. 14.15. График логарифма полной интенсивности  $T = \langle |\psi^a|^2 \rangle$ , определяемой выражением (14.73).

лее общем случае угловую зависимость полной интенсивности можно вычислить, возвращаясь к выражению (14.71).

## 14.7. Связь между теорией многократного рассеяния и теорией переноса

В разд. 14.6 приведены два интегральных уравнения (14.47) и (14.48) для полной интенсивности. В разд. 7.5 мы вывели интегральные уравнения для интенсивностей с помощью теории переноса. Поскольку эти два подхода относятся к одной и той же задаче о случайных рассеивателях, можно ожидать наличия между ними близкой связи. В данном разделе мы проиллюстрируем эту связь, получив уравнение переноса из интегрального уравнения Тверского при некоторых дополнительных предположениях [183].

Будем исходить из уравнений (14.47) и (14.48):

$$\langle |\psi^a|^2 \rangle = |\langle \psi^a \rangle|^2 + \int |v_s^a|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle \rho(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \quad (14.78)$$

$$v_s^a = u_s^a + \int u_t^a v_s^t \rho(\mathbf{r}_t) d\mathbf{r}_t. \quad (14.79)$$

Заметим прежде всего, что  $v_s^a$  есть оператор, который приближенно выражается согласно (14.56):

$$v_s^a = f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(iK|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|}, \quad (14.80)$$

где  $K = k + [2\pi\rho f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{0}})/k]$ ,  $\text{Im } K = \rho\sigma_t/2$ , а  $\hat{\mathbf{i}}$  — единичный вектор в направлении падения волны. Поскольку (14.80) является оператором, величина  $|v_s^a|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle$  под интегралом в (14.78) не сводится к произведению  $|v_s^a|^2$  на  $\langle |\psi^s|^2 \rangle$ . В действительности  $v_s^a$  описывает рассеянное в направлении  $\hat{\mathbf{0}}$  поле в соответствии с (14.80) для случая, когда спектр мощности  $\langle |\psi^s|^2 \rangle$  направлен вдоль  $\hat{\mathbf{i}}$ , так что величина  $|v_s^a|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle$  должна учитывать вклады со всех направлений падения  $\hat{\mathbf{i}}$ .

Чтобы выразить это на математическом языке, запишем второй момент поля через лучевую интенсивность  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{r}_a) \psi^*(\mathbf{r}_b) \rangle &= \Gamma(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) \approx \\ &\approx \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega, \end{aligned} \quad (14.81)$$

где  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_b)$ ,  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ , а  $K_r$  — действительная часть коэффициента  $K$ , входящего в (14.80). Выражение (14.81) справедливо, когда второй момент поля является медленно меняющейся функцией  $\mathbf{r}$  [12].

Интенсивность  $\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$  дается выражением

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \Gamma(\mathbf{r}, 0) = \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega. \quad (14.82)$$

Заметим, что величину  $\langle |\psi^s|^2 \rangle$  под интегралом в (14.78) нужно разложить в соответствии с (14.82), причем каждая компонента  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  должна давать рассеянное поле в соответствии с (14.80). Таким образом, можно записать

$$|v_s^a|^2 \langle |\psi^s|^2 \rangle = \int |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2 \frac{\exp(-\rho\sigma_t|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|^2} I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}') d\omega', \quad (14.83)$$

где мы заменили  $\hat{\mathbf{0}}$  и  $\hat{\mathbf{i}}$  на  $\hat{\mathbf{s}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}'$  соответственно. Используя фазовую функцию [см. (7.22)]  $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ , определенную как

$$p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \frac{4\pi}{\sigma_t} |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2, \quad (14.84)$$

и среднюю интенсивность

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega \quad (14.85)$$

[см. (7.7)] и учитывая, что когерентная интенсивность  $|\langle \psi^a \rangle|^2$  затухает так же, как и ослабленная падающая интенсивность, мы можем записать (14.78) в виде

$$U(\mathbf{r}_a) = U_{ri}(\mathbf{r}_a) + \int d\mathbf{r}_s \frac{\exp(-\rho\sigma_t |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{4\pi |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|^2} \times \\ \times \int \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \quad (14.86)$$

Это выражение совпадает с выражением (7.41), полученным по теории переноса. Заметим, что основой этой эквивалентности служат приближения (14.80) и (14.81).

Соотношение (14.81) связывает лучевую интенсивность  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  с функцией взаимной когерентности  $\Gamma(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \langle \psi(\mathbf{r}_a) \psi^*(\mathbf{r}_b) \rangle$ . Заметим, что в теории переноса понятие лучевой интенсивности вводится эвристически для описания величины и направления распространения мощности, а не волновых характеристик поля. Однако соотношение (14.81) показывает, что лучевая интенсивность описывает также и волновые характеристики поля посредством функции взаимной когерентности. Таким образом, соотношение (14.81) устанавливает важную связь между теорией переноса и теорией многократного рассеяния. Отметим также, что соотношение (14.81) является лишь приближенным и, строго говоря, оно не совместимо с волновым уравнением (см. также другие работы, посвященные связи между теорией переноса и теорией многократного рассеяния [12, 149, 381]).

## 14.8. Приближенные интегральные и дифференциальные уравнения для корреляционной функции

В разд. 14.4 мы привели интегральные уравнения (14.28) и (14.29) для второго момента  $\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle$ . Используем теперь рассмотренные в предыдущем разделе предположения для получения приближенных представлений этих интегральных уравнений. Воспользовавшись соотношениями (14.80) и (14.81), непосредственно получаем

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle + \Gamma_{fab}, \quad (14.87a)$$

где

$$\Gamma_{fab} = \int \rho d\mathbf{r}_s \frac{\exp(iK|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s| - iK^*|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s||\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s|} \int d\omega' \times \\ \times f(\hat{\mathbf{s}}_a, \hat{\mathbf{s}}') f^*(\hat{\mathbf{s}}_b, \hat{\mathbf{s}}') I'(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (14.87б)$$

а  $\hat{\mathbf{s}}_a$  и  $\hat{\mathbf{s}}_b$  — единичные векторы в направлениях  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s$  соответственно (рис. 14.16). Лучевая интенсивность  $I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}')$  свя-

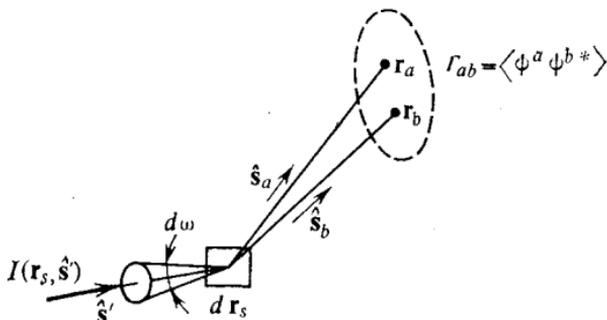


Рис. 14.16. Величины, входящие в выражение (14.87б).

зана с полной интенсивностью  $\langle |\psi^s|^2 \rangle$  соотношением

$$\langle |\psi^s|^2 \rangle = \int I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \quad (14.88)$$

Уравнение (14.87а) представляет собой основное интегральное уравнение для второго момента  $\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle$  и эквивалентно сглаженному приближению первого порядка для уравнения Бете — Солпитера [142, 183].

Уравнение (14.87а) можно преобразовать в приближенное дифференциальное уравнение и показать, что это дифференциальное уравнение совпадает с уравнением переноса (7.24). Для этого поступим следующим образом. Используя суммарные и разностные координаты  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_b)$  и  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ , запишем [см. (10.81)]

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \Gamma_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega, \quad (14.89)$$

где  $K_r$  — действительная часть  $K$ . Определим также когерентную интенсивность  $I_c$  с помощью соотношения

$$\langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle = \int I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega. \quad (14.90)$$

Предположим, что в (14.876) фазу и амплитуду можно аппроксимировать с помощью выражений

$$K|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s| \approx K|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| + (K/2)\mathbf{r}_d \cdot \hat{\mathbf{s}},$$

$$K|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s| \approx K|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| - (K/2)\mathbf{r}_d \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (14.91a)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s||\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s|} \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2}, \quad (14.91b)$$

и положим  $\hat{\mathbf{s}}_a \approx \hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_b \approx \hat{\mathbf{s}}$ , где

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{s}}_a + \hat{\mathbf{s}}_b). \quad (14.91b)$$

Эти приближения справедливы, если  $|\mathbf{r}_d|$  много меньше расстояний  $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|$  и  $|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s|$ . Поскольку величина  $|\mathbf{r}_d|$  ограничивается в основном размером радиуса корреляции поля, эти предположения оправдываются почти для всех точек среды, за исключением малого объема вблизи точки наблюдения.

Используя приближения (14.91), получим

$$\Gamma_{fab} = \int \rho d\mathbf{r}_s \frac{\exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d - \rho\sigma_t |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} \times$$

$$\times \int d\omega' |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2 I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (14.92)$$

Рис. 14.17. Величины, входящие в выражение (14.93).

где  $K_r = \frac{1}{2}(K + K^*)$  и  $\rho\sigma_t = 2 \operatorname{Im} K = = i^{-1}(K - K^*)$ .

Теперь мы можем получить дифференциальное уравнение, используя равенство  $d\mathbf{r}_s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2 d\omega ds$ , где  $ds$  — элемент длины в точке  $\mathbf{r}_s$  в направлении  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_s$  [см. (7.41)]:

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) = I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) +$$

$$+ \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \rho ds \exp(-\rho\sigma_t |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \times$$

$$\times \int d\omega' |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2 I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (14.93)$$

где  $r_0$  и  $ds$  — точка на границе объема и дифференциал длины в точке  $\mathbf{r}_s$  соответственно (рис. 14.17). Сократив в (14.93) общий

множитель  $\exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d)$ , получим уравнение переноса

$$\frac{d}{ds} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\rho\sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega', \quad (14.94a)$$

где  $(\sigma_t/4\pi)p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2$ , а  $I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  совпадает с ослабленной падающей интенсивностью и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds} I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\rho\sigma_t I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (14.94b)$$

Таким образом, в данном разделе мы показали, что уравнения Тверского для многократного рассеяния при некоторых предположениях оказываются эквивалентными уравнению переноса. Заметим, что если найти выражение для лучевой интенсивности  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ , решив уравнение переноса для какой-либо задачи, то второй момент поля  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d)$  можно получить с помощью преобразования

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = \langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega. \quad (14.95)$$

Заметим также, что полная интенсивность  $U_t(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}$  есть сумма когерентной интенсивности  $U_c(\mathbf{r})$  и некогерентной интенсивности  $U_i(\mathbf{r})$ , причем эти величины связаны с лучевыми интенсивностями следующим образом:

$$\begin{aligned} U_t(\mathbf{r}) &= \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega, \\ U_c(\mathbf{r}) &= |\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle|^2 = \int_{4\pi} I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega, \\ U_i(\mathbf{r}) &= \langle |\psi_f(\mathbf{r})|^2 \rangle = \int_{4\pi} I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega. \end{aligned} \quad (14.96)$$

Эти величины в  $4\pi$  раз больше средней интенсивности, когерентной интенсивности и диффузной интенсивности соответственно, определенных в разд. 7.4.

## 14.9. Основные уравнения для движущихся частиц

В предыдущих главах мы считали, что частицы неподвижны, поэтому поле  $\psi(\mathbf{r})$  зависело только от положения  $\mathbf{r}$ . В данном разделе мы допустим, что частицы движутся, и рассмотрим связанные с этим эффекты [183]. При этом поле  $\psi$  становится функцией положения и времени. Мы получим основное интегральное уравнение для этого случая, а также приближенное уравнение, имеющее вид уравнения переноса.

Для описания эффектов, связанных с движением частиц, необходимо пересмотреть понятие статистического усреднения, описанное в разд. 14.2. Рассмотрим две случайные функции  $f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s)$  и  $g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s)$ , которые зависят от характеристик частицы, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$  и находящейся в точке  $\mathbf{r}''_s$  в момент времени  $t''_s$  и в точке  $\mathbf{r}'_s$  в более поздний момент времени  $t'_s$  соответственно (рис. 14.18).

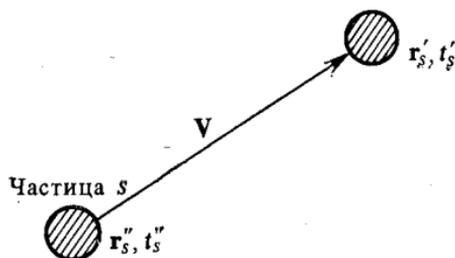


Рис. 14.18. Частица, движущаяся со скоростью  $\mathbf{V}$  от точки  $\mathbf{r}''_s$  в момент времени  $t''_s$  к точке  $\mathbf{r}'_s$  в момент времени  $t'_s$ .

Следуя методике, описанной в разд. 14.2, среднее значение  $f_s g_s$  можно записать как

$$\langle f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \rangle = \int f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \frac{\rho}{N} d\mathbf{r}_s \quad (14.97)$$

при условии, что  $\mathbf{r}'_s$  и  $\mathbf{r}''_s$  связаны соотношением

$$\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}''_s = \mathbf{V} (t'_s - t''_s), \quad (14.98)$$

а  $\mathbf{r}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'_s + \mathbf{r}''_s)$ . При этом мы считаем, что скорость частицы  $\mathbf{V}$  постоянная в течение интервала времени  $t'_s - t''_s$ .

Соотношения (14.97) и (14.98) можно представить в более удобной форме

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{s=1}^N f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) \sum_{s=1}^N g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \right\rangle &= \left\langle \sum_{s=1}^N f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \right\rangle = \\ &= \iint f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \rho(\mathbf{r}_s, t_s) \delta(\mathbf{r}_{sd} - \mathbf{V} t_{sd}) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_{sd}, \quad (14.99) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_{sd} = \mathbf{r}'_s - \mathbf{r}''_s$ ,  $t_{sd} = t'_s - t''_s$ , а  $\rho(\mathbf{r}_s, t_s)$  — значение концентрации  $\rho$  в точке  $\mathbf{r}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'_s + \mathbf{r}''_s)$  в момент времени  $t_s = \frac{1}{2}(t'_s + t''_s)$ . В (14.99) среднее от произведения двух рядов сводится к одному ряду, поскольку корреляция между частицами не учитывается, и

имеется  $N$ , а не  $N^2$  независимых частиц. Заметим, что (14.99) эквивалентно записи

$$\sum_{s=1}^N f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) = \int f_s(\mathbf{r}'_s, t'_s) \rho(\mathbf{r}'_s, t'_s) d\mathbf{r}'_s, \quad (14.100a)$$

$$\sum_{s=1}^N g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) = \int g_s(\mathbf{r}''_s, t''_s) \rho(\mathbf{r}''_s, t''_s) d\mathbf{r}''_s$$

и использованию соотношения

$$\langle \rho(\mathbf{r}'_s, t'_s) \rho(\mathbf{r}''_s, t''_s) \rangle = \rho(\mathbf{r}_s, t_s) \delta(\mathbf{r}_{sd} - \mathbf{V}t_{sd}). \quad (14.100б)$$

Учитывая все эти соотношения, запишем интегральное уравнение Тверского (14.28) в виде

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle + \iint V_{s'}^a V_{s''}^{b*} \langle |\psi^s|^2 \rangle \rho(\mathbf{r}_s, t_s) \times \\ \times \delta(\mathbf{r}_{sd} - \mathbf{V}t_{sd}) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_{sd}, \quad (14.101)$$

где  $\psi^a = \psi(\mathbf{r}_a, t_a)$  есть поле в точке  $\mathbf{r}_a$  в момент времени  $t_a$ , а  $\psi^b = \psi(\mathbf{r}_b, t_b)$ . Индексы  $s'$  и  $s''$  обозначают две точки  $\mathbf{r}'_s$  и  $\mathbf{r}''_s$ , которые одиночная движущаяся частица занимает в моменты времени  $t'_s$  и  $t''_s$ . При этом с учетом времени распространения волны под  $t'_s$  и  $t''_s$  нужно понимать запаздывающие моменты времени:

$$t'_s = t_a - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'_s|}{v_p}, \quad t''_s = t_b - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}''_s|}{v_p}, \quad (14.102)$$

где  $v_p$  — фазовая скорость волны в среде, равная  $\omega/K_r$ .

Запишем (14.101) более подробно:

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle + \Gamma_{fab}, \quad (14.103a)$$

$$\Gamma_{fab} = \int \rho d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_{sd} \delta(\mathbf{r}_{sd} - \mathbf{V}t_{sd}) \frac{\exp(iK|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'_s| - iK^*|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}''_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'_s| |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}''_s|} \times \\ \times \int d\omega f(\hat{\mathbf{s}}_a, \hat{\mathbf{s}}') f^*(\hat{\mathbf{s}}_b, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}', t_s, t_{sd}) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}}' \cdot \mathbf{r}_{sd}), \quad (14.103б)$$

где использованы обозначения  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ ,  $t_d = t_a - t_b$  и  $t = \frac{1}{2}(t_a + t_b)$  (рис. 14.19).

Лучевая интенсивность в (14.103) меняется со временем и связана с вторым моментом поля соотношением

$$\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \psi^*(\mathbf{r}_b, t_b) \rangle = \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega, \\ \langle \psi^a \rangle \langle \psi^{b*} \rangle = \int I_c(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega. \quad (14.104a)$$

Второй момент поля  $\langle \psi^a \psi^{b*} \rangle$  называют также функцией взаимной когерентности

$$\Gamma(\mathbf{r}_a, t_a; \mathbf{r}_b, t_b) = \langle \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \psi^*(\mathbf{r}_b, t_b) \rangle. \quad (14.1046)$$

Время  $t$ , запаздывающее время  $t_s$ , разностное время  $t_d$  в точке наблюдения и разностное время  $t_{sd}$  движения частицы  $s$  на протяжении  $\mathbf{r}_{sd}$  связаны соотношениями

$$t_s = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}{v_p}, \quad \mathbf{r}_{sd} = \mathbf{V} t_{sd}, \quad (14.105a)$$

$$t_{sd} = t_d - \frac{1}{v_p} \frac{\mathbf{r}_d}{2} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{v_p} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}}) t_{sd}. \quad (14.1056)$$

Уравнения (14.103a) и (14.1036) являются основными интегральными уравнениями для случая движущихся частиц.

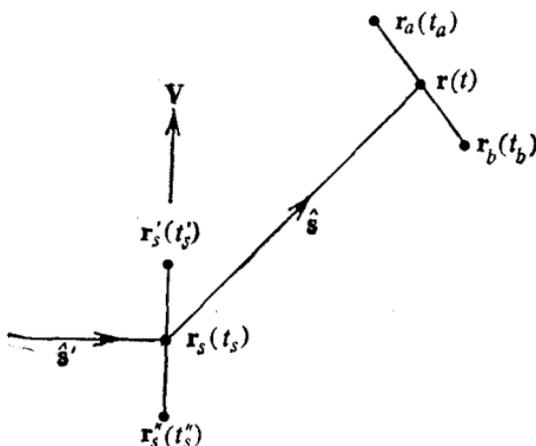


Рис. 14.19. Обозначения, используемые в (14.1036).

Уравнение (14.1036) можно еще более упростить, используя приближения

$$|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'_s| \approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_{sd}) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (14.106a)$$

$$|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}''_s| \approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_{sd}) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (14.1066)$$

$$t_{sd} \approx t_d. \quad (14.106в)$$

Приближения (14.106a) и (14.1066) эквивалентны приближениям (14.91), а (14.106в) справедливо при условии, что скорость частицы  $|\mathbf{V}|$  много меньше скорости распространения волны  $v_p$ , поскольку  $t_d$  по порядку величины равно времени корреляции, а  $|\mathbf{r}_d|$  имеет порядок произведения  $|\mathbf{V}|$  на время корреляции [см. (14.1056)].

С учетом этих приближений выражение (14.103б) принимает вид

$$\Gamma_{fab} = \int \rho dr_s \frac{\exp(iK_r \hat{s} \cdot r_d - iK_r (\hat{s} - \hat{s}') \cdot \mathbf{V} t_{sd} - \rho \sigma_t |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} \times \\ \times \int d\omega' |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 I(\mathbf{r}_s, \hat{s}', t_s, t_{sd}). \quad (14.107)$$

Применяя метод, использованный при выводе (14.94), получим следующее уравнение переноса для меняющейся со временем лучевой интенсивности:

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{s}, t, t_d)}{ds} = -\rho \sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{s}, t, t_d) + \\ + \int \rho F(\hat{s}, \hat{s}', t_d) I(\mathbf{r}, \hat{s}', t, t_d) d\omega', \quad (14.108a)$$

где

$$F(\hat{s}, \hat{s}', t_d) = |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 \exp[-iK_r (\hat{s} - \hat{s}') \cdot \mathbf{V} t_d]. \quad (14.108б)$$

Выражения (14.108a) и (14.108б) задают уравнение переноса для случая частиц, движущихся со скоростью  $\mathbf{V}$ . Заметим, что в этом случае функция рассеяния  $|f(\hat{s}, \hat{s}')|^2$  заменяется на (14.108б).

Если скорость  $\mathbf{V}$  равна сумме средней скорости  $\mathbf{U}$  и флуктуационной скорости  $\mathbf{V}_f$ , то в (14.108б) необходимо произвести усреднение по  $\mathbf{V}_f$ . Разумно считать, что, поскольку лучевая интенсивность  $I$  зависит от вкладов всех частиц рассеивающей среды, она почти не зависит от флуктуационной скорости  $\mathbf{V}_f$ . Приняв это предположение и полагая  $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}_f$ , получим

$$F(\hat{s}, \hat{s}', t_d) = |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 \chi[-K_r (\hat{s} - \hat{s}') t_d] \times \\ \times \exp[-iK_r (\hat{s} - \hat{s}') \cdot \mathbf{U} t_d], \quad (14.108в)$$

где  $\chi$  — характеристическая функция [87], определяемая выражением

$$\chi[-K_r (\hat{s} - \hat{s}') t_d] = \langle \exp[-iK_r (\hat{s} - \hat{s}') \cdot \mathbf{V}_f t_d] \rangle. \quad (14.108г)$$

Соотношения (14.108a) и (14.108в) дают основное уравнение переноса для случая, когда скорость движения частиц содержит среднюю и флуктуационную компоненты.

Например, если флуктуационная скорость  $\mathbf{V}_f$  считается гауссовой с функцией распределения вероятности

$$p(V_f) = (2\pi\sigma_v^2)^{-3/2} \exp(-V_f^2/2\sigma_v^2), \quad (14.109a)$$

где  $\sigma_v^2$  — дисперсия  $V_f$ , то характеристическая функция принимает вид

$$\chi(-K_r (\hat{s} - \hat{s}') t_d) = \exp\left[-\frac{1}{2} (K_r^2 |\hat{s} - \hat{s}'|^2 \sigma_v^2 t_d^2)\right]. \quad (14.109б)$$

До сих пор мы обсуждали уравнения для зависящих от времени функции взаимной когерентности  $\langle \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \psi^*(\mathbf{r}_b, t_b) \rangle$  и лучевой интенсивности  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d)$ . Они описывают корреляцию во времени посредством разностного времени  $t_d$ . Если осуществить преобразование Фурье по  $t_d$ , мы получим частотный спектр. Поэтому введем следующие определения для частотного спектра  $W(\mathbf{r}, t, \Omega)$  и частотного спектра лучевой интенсивности  $W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, \Omega)$ :

$$W(\mathbf{r}, t, \Omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(\mathbf{r}, t_d) \psi^*(\mathbf{r}, t_d) \rangle \exp(i\Omega t_d) dt_d, \quad (14.110a)$$

$$W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, \Omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) \exp(i\Omega t_d) dt_d, \quad (14.110б)$$

где  $\Omega$  — частота, а  $W$  и  $W_I$  связаны соотношением

$$W(\mathbf{r}, t, \Omega) = \int_{4\pi} W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, \Omega) d\omega. \quad (14.111)$$

Заметим, что, хотя  $W$  и  $W_I$  в общем случае являются функциями времени  $t$ , для большинства практических случаев, в которых флуктуации поля стационарны,  $W$  и  $W_I$  не зависят от времени.

Уравнение переноса (14.108a) можно преобразовать в уравнение для частотного спектра, имеющее вид

$$\frac{d}{ds} W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \Omega) = -\rho \sigma_t W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \Omega) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \times \\ \times \left[ \int \rho G(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', \Omega - \Omega') W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \Omega') d\omega' \right], \quad (14.112a)$$

где

$$G(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', \Omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', t_d) \exp(i\Omega t_d) dt_d. \quad (14.112б)$$

Если скорость однородна и не флуктуирует, то, полагая в (14.108б)  $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ , из (14.112a) и (14.112б) получим

$$\frac{d}{ds} W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \Omega) = -\rho \sigma_t W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \Omega) + \\ + \int \rho |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2 W_I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}', \Omega') d\omega', \quad (14.113)$$

где  $\Omega' = \Omega - K_r(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}') \cdot \mathbf{U}$ , что соответствует доплеровскому сдвигу частоты от  $\Omega'$  к  $\Omega$ . При этом волна с частотой  $\Omega'$  падает на частицу в направлении  $\hat{\mathbf{s}}'$ , а рассеянная в направлении  $\hat{\mathbf{s}}$  волна имеет частоту  $\Omega$ . Амплитуда рассеяния  $f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$  описывает

волну, рассеянную в направлении  $\hat{s}$  на частоте  $\Omega$ , когда падающая волна имеет частоту  $\Omega'$  и направление  $\hat{s}'$ , поэтому, строго говоря, следовало бы записать  $f$  как  $f(\hat{s}, \Omega, \hat{s}', \Omega')$ .

Аналогичное уравнение можно записать и для случая, когда скорость  $V$  состоит из среднего значения  $U$  и флуктуационной составляющей  $V_f$ . В этом случае имеем

$$G(\hat{s}, \hat{s}', \Omega) = \frac{4\pi |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2}{[2K_r^2 |\hat{s} - \hat{s}'|^2 \sigma_v^2]^{1/2}} \exp \left\{ - \frac{[\Omega - K_r (\hat{s} - \hat{s}') \cdot U]^2}{2K_r^2 |\hat{s} - \hat{s}'|^2 \sigma_v^2} \right\}. \quad (14.114)$$

Это выражение описывает доплеровский сдвиг, связанный с  $U$ , и уширение спектра, обусловленное флуктуациями скорости.

Заметим, что, хотя уравнение (14.112а) позволяет непосредственно найти  $W$ , часто более удобным оказывается сначала найти уравнение для зависящей от времени лучевой интенсивности или функции взаимной когерентности, а потом получить частотный спектр с помощью преобразования Фурье (14.110а) или (14.110б).

В данном разделе мы показали, что для случая движущихся частиц уравнение переноса можно модифицировать, используя амплитуду рассеяния с учетом временной корреляции (14.108в) в уравнении переноса (14.108а). Заметим, что амплитуда рассеяния с учетом временной корреляции (14.108в) совпадает с (4.48) из разд. 4.5, где нужно положить  $\hat{s} = \hat{0}$ ,  $\hat{s}' = \hat{i}$ ,  $t_d = \tau$  и  $K_r = k$ . Этого и следовало ожидать, поскольку оба выражения относятся к одному и тому же случаю движущихся рассеивателей. Фактически уравнение переноса (14.108а) можно вывести, просто рассмотрев это соответствие. Однако вывод, приведенный в данном разделе, является более строгим и позволяет выявить необходимые аппроксимации.

## 14.10. Флуктуации, обусловленные распределением по размерам

В предыдущем разделе мы предполагали, что все частицы в среде имеют одинаковые размеры. Практически, однако, частицы часто бывают неодинаковы по размерам, которые оказываются распределенными в некотором интервале. Определим функцию распределения вероятности  $W(D)$  того, что размер частицы заключен между  $D$  и  $D + dD$ :

$$W(D) = \frac{n(D)}{\rho}, \quad \text{где} \quad \int_0^{\infty} W(D) dD = 1; \quad (14.115)$$

здесь  $n(D)dD$  — число частиц в единице объема, имеющих размеры между  $D$  и  $D + dD$ , а  $\rho$  — полное число частиц в единице объема, т. е. концентрация частиц:

$$\rho = \int_0^{\infty} n(D) dD. \quad (14.116)$$

Используя эти определения, мы можем обобщить выражение для лучевой интенсивности, полученное для частиц с фиксированной концентрацией  $\rho$  и размером  $D$ , на случай частиц, распределенных по размерам. Среднее значение величины  $f(D)$ , зависящей от размера  $D$ , записывается в виде

$$\langle f(D) \rangle_s = \int_0^{\infty} f(D) W(D) dD. \quad (14.117)$$

Рассмотрим, например, затухание ослабленной падающей интенсивности

$$I_{r_i} = I_0 \exp(-\rho \sigma_i L), \quad (14.118)$$

полученное для частиц с фиксированным размером  $D$  и концентрацией  $\rho$ . Среднее значение постоянной затухания  $\rho \sigma_i$  с учетом распределения по размерам дается выражением

$$\langle \rho \sigma_i \rangle_s = \int_0^{\infty} \rho \sigma_i W(D) dD = \int_0^{\infty} \sigma_i(D) n(D) dD. \quad (14.119)$$

Дисперсия величины  $f(D)$  определяется выражением

$$\sigma_f^2 = \langle [f(D) - \langle f(D) \rangle]^2 \rangle_s = \int_0^{\infty} [f(D) - \langle f(D) \rangle]^2 W(D) dD. \quad (14.120)$$

Если  $f(D)$  является медленно меняющейся монотонной функцией  $D$ , а разброс по размерам невелик, то можно получить приближенное выражение для дисперсии  $\sigma_f^2$  следующим образом. Разложим  $f(D)$  в ряд Тейлора вблизи среднего значения  $D_0 = \langle D \rangle$  и удержим два первых члена этого ряда:

$$f(D) = f(D_0) + (D - D_0) \left. \frac{\partial f}{\partial D} \right|_{D_0} + \dots, \quad (14.121)$$

где  $D_0 = \langle D \rangle = \int_0^{\infty} D W(D) dD$  и  $f(D_0) = \langle f(D) \rangle$ . Подставив (14.121) в (14.120), получим приближенное соотношение

$$\sigma_f^2 \approx \left( \left. \frac{\partial f}{\partial D} \right|_{D_0} \right)^2 \sigma_{D_0}^2, \quad (14.122)$$

где  $\sigma_D^2 = \int_0^\infty (D - D_0)^2 W(D) dD$  — дисперсия распределения по размерам.

Например, для случая  $f = \rho\sigma_t$  дисперсия приближенно выражается как

$$\sigma_f^2 \approx \rho^2 \left| \frac{\partial \sigma_t}{\partial D} \right|_{D_0}^2 \sigma_D^2. \quad (14.123)$$

## Приложение 14А. Пример процесса рассеяния по Тверскому для $N = 3$

В данном приложении мы проиллюстрируем процессы рассеяния некогерентной интенсивности, учитываемые интегральным уравнением Тверского, для случая, когда имеются только три рассеивателя. Всего при участии трех рассеивателей уравнение Тверского учитывает 159 различных процессов (см. [348]).

а. *Процессы однократного рассеяния.* Эти процессы включают три случая ( $s = 1, 2, 3$ ) (рис. 14А.1).

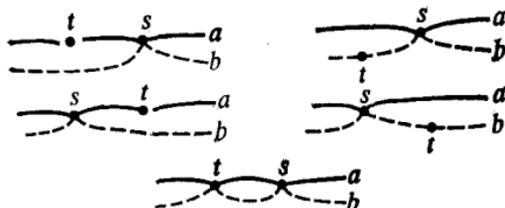
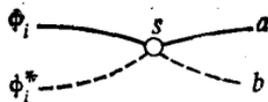


Рис. 14А.1. Однократное рассеяние.

Рис. 14А.2. Двукратное рассеяние.

б. *Процессы двукратного рассеяния.* Как показано ниже, имеются пять различных случаев для каждого  $s$  и  $t$  и шесть различных комбинаций  $s$  и  $t$ , так что всего  $5 \times 6 = 30$  процессов (рис. 14А.2):

$s$	1	1	2	2	3	3
$t$	2	3	1	3	1	2

в. *Процессы трехкратного рассеяния.* Имеются шесть комбинаций  $s, t$  и  $m$ :

$s$	1	1	2	2	3	3
$t$	2	3	1	3	1	2
$m$	3	2	3	1	2	1

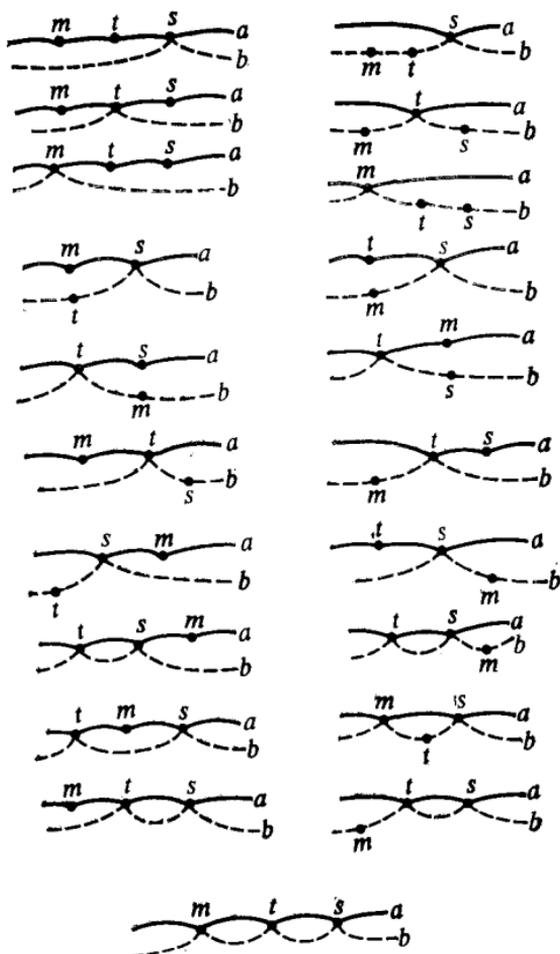


Рис. 14А.3. Трехкратное рассеяние.

Для каждого  $s$ ,  $t$  и  $m$  имеется 21 случай, а всего 126 случаев (рис. 14А.3).

**Приложение 14Б. Оценка многократного интеграла  $I$  с помощью метода стационарной фазы**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N A(x_1 \dots x_N) \exp[if(x_1, x_2, \dots, x_N)], \quad (14Б.1)$$

Прежде всего найдем стационарную точку  $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{N0})$ , координаты которой удовлетворяют  $N$  уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_N} = 0. \quad (14Б.2)$$

Затем разложим  $f$  в ряд вблизи стационарной точки:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}) + \frac{1}{2!} \left[ (x_1 - x_{10}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_{20}) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_N - x_{N0}) \frac{\partial}{\partial x_N} \right]^2 f \Big|_{x_{10}, x_{20}, \dots} + \text{члены высшего порядка.}$$

При этом члены высшего порядка дают малый вклад в интеграл, если вторые производные  $f$  не малы. Предположим далее, что амплитуда  $A(x_1, \dots, x_N)$  есть медленно меняющаяся функция  $x_1, \dots, x_N$ , и используем аппроксимацию

$$A(x_1, \dots, x_N) \approx A(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}).$$

Положив затем  $x_1 - x_{10} = x'_1$ ,  $x_2 - x_{20} = x'_2$ , ..., запишем

$$I = A(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}) \exp[i f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})] \times \times \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_N \exp\left(i \frac{1}{2} [T]\right), \quad (14B.3)$$

где

$$[T] = \left( x'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} + \dots + x'_N \frac{\partial}{\partial x'_N} \right)^2 f.$$

Запишем  $[T]$  в матричном виде

$$[T] = \bar{x} F x, \quad x = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_N \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1N} \\ f_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ f_{N1} & \dots & \dots & f_{NN} \end{bmatrix}, \quad (14B.4)$$

где  $\bar{x}$  — транспонированная матрица  $x$ , а

$$f_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} f \Big|_{x'_1=0, x'_2=0, \dots}$$

Заметим теперь, что с помощью ортогонального преобразования от  $X$  к  $Y^1$ ),  $X = P Y$ , где

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix},$$

<sup>1)</sup> Для случая двух переменных это соответствует повороту системы координат вокруг начала до совпадения с главными осями.

мы можем привести  $[T]$  к диагональному виду:

$$[T] = \tilde{X} F X = \tilde{Y} \tilde{P} F P Y = \tilde{Y} \alpha Y, \quad (14Б.5)$$

где  $\tilde{X}$  — транспонированная матрица  $X$ , а

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N^2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем

$$[T] = \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 + \dots + \alpha_N^2 y_N^2. \quad (14Б.6)$$

Заметим, что якобиан перехода от координат  $x'_1, \dots, x'_N$  к координатам  $y_1, y_2, \dots, y_N$  равен единице:

$$\begin{aligned} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_N &= \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_N)}{\partial(y_1, \dots, y_N)} dy_1 \dots dy_N, \\ \text{якобиан} &= \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_N)}{\partial(y_1, \dots, y_N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x'_N}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial y_N} & \dots & \frac{\partial x'_N}{\partial y_N} \end{vmatrix} = |P| = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_N \exp\left(i \frac{1}{2} [T]\right) &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_N \exp\left(i [\alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 + \dots + \alpha_N^2 y_N^2]\right) &= \\ = \frac{(2\pi)^{n/2} e^{in\pi/4}}{\sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_N^2}}. \quad (14Б.7) \end{aligned}$$

Но, поскольку

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_N^2 = |\alpha| = |\tilde{P} F P| = |\tilde{P}| |F| |P| = |F|,$$

можно записать

$$I = A(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}) \exp[if(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})] \frac{(2\pi)^{N/2} e^{iN\pi/4}}{\sqrt{\Delta}}, \quad (14Б.8)$$

где

$$\Delta = \text{детерминант } F = |F|$$

называют гессианом. Для  $N = 2$  имеем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 A(x_1, x_2) \exp[if(x_1, x_2)] = \\ = A(x_{10}, x_{20}) \exp[if(x_{10}, x_{20})] \frac{(2\pi) e^{i\pi/2}}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}}, \quad (14Б.9)$$

где  $x_{10}, x_{20}$  определяются из условий  $\partial f/\partial x_1 = 0, \partial f/\partial x_2 = 0$

Пример I.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dy_s A(x_s, y_s) \frac{\exp(ik|r_s - r_a|)}{|r_s - r_a|}. \quad (14Б.10)$$

В этом случае

$$f = k \sqrt{(x_s - x_a)^2 + (y_s - y_a)^2 + (z_s - z_a)^2} = kr$$

и стационарная точка  $(x_{s0}, y_{s0})$  удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} = k \frac{\partial r}{\partial x_s} = k \frac{x_s - x_a}{r} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_s} = k \frac{y_s - y_a}{r} = 0. \quad (14Б.11)$$

Поэтому  $x_{s0} = x_a$  и  $y_{s0} = y_a$ . Далее,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2} = k \left( \frac{1}{r} - \frac{(x_s - x_a)^2}{r^3} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_s^2} = k \left( \frac{1}{r} - \frac{(y_s - y_a)^2}{r^3} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial y_s} = k (x_s - x_a) \left( -\frac{1}{r^2} \right) \frac{y_s - y_a}{r},$$

поэтому

$$I \approx A(x_{s0}, y_{s0}) \frac{2\pi i}{k} \exp(ik|z_s - z_a|). \quad (14Б.12)$$

Пример II.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy A(x, y) \frac{\exp[ik(r_1 + r_2)]}{r_1 r_2}, \quad (14Б.13)$$

где  $r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , а  $r_2^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2$ . Стационарная точка  $(x_s, y_s, z)$  определяется условиями

$$f = k(r_1 + r_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = k \left( \frac{x}{r_1} - \frac{(X - x)}{r_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = k \left( \frac{y}{r_1} - \frac{(Y - y)}{r_2} \right) = 0,$$

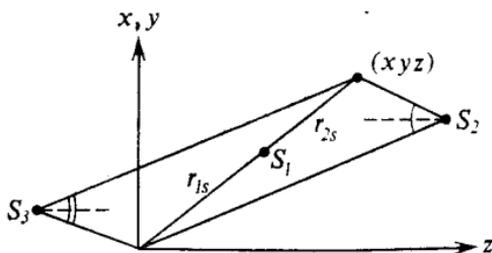


Рис. 14Б.1. Стационарные точки  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  для (14Б.13).

что дает (рис. 14Б.1)

$$\frac{x_s}{X} = \frac{y_s}{Y} = \frac{r_{1s}}{r_{1s} + r_{2s}}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k \left[ \frac{1}{r_1} \left( 1 - \frac{x^2}{r_1^2} \right) + \frac{1}{r_2} \left( 1 - \frac{(x - X)^2}{r_2^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k \left[ \frac{1}{r_1} \left( 1 - \frac{y^2}{r_1^2} \right) + \frac{1}{r_2} \left( 1 - \frac{(y - Y)^2}{r_2^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = k \left[ -\frac{xy}{r_1^3} - \frac{(x - X)(y - Y)}{r_2^3} \right].$$

В стационарной точке получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k \left( \frac{1}{r_{1s}} + \frac{1}{r_{2s}} \right) \left( 1 - \frac{x_s^2}{r_{1s}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k \left( \frac{1}{r_{1s}} + \frac{1}{r_{2s}} \right) \left( 1 - \frac{y_s^2}{r_{1s}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = k \left( \frac{1}{r_{1s}} + \frac{1}{r_{2s}} \right) \left( 1 - \frac{x_s y_s}{r_{1s}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = k^2 \left( \frac{1}{r_{1s}} + \frac{1}{r_{2s}} \right)^2 \left( 1 - \frac{x_s^2 + y_s^2}{r_{1s}^2} \right) =$$

$$= k^2 \left( \frac{1}{r_{1s}} + \frac{1}{r_{2s}} \right)^2 \left( 1 - \frac{X^2 + Y^2}{(r_{1s} + r_{2s})^2} \right) =$$

$$= k^2 \frac{Z_s^2}{(r_{1s} r_{2s})^2}, \quad Z_s^2 = (r_{1s} + r_{2s})^2 - (X^2 + Y^2).$$

Таким образом, получаем

$$I \approx A(x_s, y_s) \frac{\exp[ik(r_{1s} + r_{2s})]}{r_{1s}r_{2s}} \frac{2\pi i}{(kZ_s/r_{1s}r_{2s})} = \\ = A(x_s, y_s) \exp[ik(r_{1s} + r_{2s})] \frac{2\pi i}{kZ_s}. \quad (14Б.14)$$

При  $0 < z < Z$  имеем  $Z_s = Z$ , при  $z < 0$   $Z_s = Z + 2|z|$ , при  $z > Z$   $Z_s = 2z - Z$ .

## Приложение 14В. Оптическая теорема

Рассмотрим плоскую волну единичной амплитуды  $\psi_i$ , падающую на рассеиватель с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . В общем случае (при наличии поглощения)  $\varepsilon(\mathbf{r})$  — комплексная функция. Падающая волна

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}), \quad (14В.1)$$

где  $\hat{\mathbf{i}}$  — единичный вектор в направлении распространения, а  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в свободном пространстве.

Полное поле  $\psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет волновому уравнению

$$[\nabla^2 + k^2\varepsilon(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (14В.2)$$

Прежде всего запишем это уравнение в виде

$$[\nabla^2 + k^2]\psi = -k^2(\varepsilon - 1)\psi$$

и перейдем к интегральному уравнению для  $\psi$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \int_{V'} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} k^2(\varepsilon - 1)\psi(\mathbf{r}') dV'. \quad (14В.3)$$

Рассеянное поле  $u(\mathbf{r})$  дается выражением

$$u(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} k^2(\varepsilon - 1)\psi(\mathbf{r}') dV',$$

которое при больших расстояниях от рассеивателя принимает вид

$$u_s^a = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s|} f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}), \quad (14В.4)$$

где амплитуда рассеяния  $f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  равна

$$f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \int_{V'} \frac{k^2(\varepsilon - 1)}{4\pi} \exp(-ik\hat{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV'.$$

Получим сначала выражение для амплитуды рассеяния вперед  $f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})$ . С этой целью воспользуемся формулой Грина

$$\int_V (v_1 \nabla^2 v_2 - v_2 \nabla^2 v_1) dV = \int_S \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} \right) dS. \quad (14B.5)$$

Выберем поверхность  $S$ , охватывающую рассеиватель, и положим  $v_1 = \psi_i^*$ ,  $v_2 = \psi$ . Тогда получим

$$- \int_{V'} k^2 (\varepsilon - 1) \psi_i^* \psi dV' = \int_S \left( \psi_i^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right) dS. \quad (14B.6)$$

Но, поскольку  $\psi_i^* = \exp(-ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r})$ , левая часть (14B.6) с учетом (14B.4) равна

$$L_1 H_1 = 4\pi f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}). \quad (14B.7)$$

Поэтому <sup>1)</sup>

$$-4\pi \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) = \int_S \operatorname{Im} \left[ \psi_i^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right] dS. \quad (14B.8)$$

Определим теперь сечение поглощения  $\sigma_a$ . Эта величина равна полной поглощенной рассеивателем мощности при падающей волне единичной интенсивности. Определим поток мощности  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \operatorname{Re} (\psi^* \nabla \psi / ik) = \operatorname{Im} (\psi^* \nabla \psi / k). \quad (14B.9)$$

Сечение поглощения записывается в виде

$$\sigma_a = - \int_S \operatorname{Im} \left( \frac{\psi^* \partial \psi / \partial n}{k} \right) dS, \quad (14B.10)$$

где  $\partial/\partial n$  — производная по внешней нормали, а  $S$  — поверхность, охватывающая рассеиватель. При этом  $S$  не обязательно совпадает с поверхностью рассеивателя и может быть выбрана на большом расстоянии от него.

С другой стороны, сечение рассеяния  $\sigma_s$  дается выражением

$$\sigma_s = \int_S \operatorname{Im} \left( \frac{u^* \partial u / \partial n}{k} \right) dS, \quad (14B.11a)$$

которое с учетом (14B.4) можно записать в виде

$$\sigma_s = \int_{4\pi} |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 d\Omega, \quad (14B.11b)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что  $\psi = \psi_i + u$ , и, полагая в (14B.5)  $v_1 = \psi_i^*$ ,  $v_2 = \psi_i$ , имеем

$$\int_S \left( \psi_i^* \frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \psi_i \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right) = 0.$$

где  $\Omega$  — телесный угол ( $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ). Но из (14В.10) следует

$$\sigma_a = -\frac{1}{2ki} \int_S \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) dS, \quad (14В.12а)$$

причем

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} = (\psi_i^* + u^*) \frac{\partial}{\partial n} (\psi_i + u) - (\psi_i + u) \frac{\partial}{\partial n} (\psi_i^* + u^*).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_a &= -\frac{1}{2ki} \int_S \left[ \left( \psi_i^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \psi_i \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) + u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] dS = \\ &= -\frac{1}{k} \int_S \left\{ \operatorname{Im} \left[ \psi_i^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right] + \operatorname{Im} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (14В.12б)$$

Подставляя (14В.8) и (14В.11а) в (14В.12б), получаем

$$\sigma_a = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) - \sigma_s,$$

что завершает доказательство оптической теоремы:

$$\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) = \sigma_s + \sigma_a. \quad (14В.13)$$

# Теория многократного рассеяния волн и распространение импульсов в облаке случайных рассеивателей

В гл. 4—6 мы рассмотрели характеристики случайных волн и распространение импульсов для специального случая «разреженных» распределений рассеивателей. При этом, поскольку концентрация частиц предполагалась малой, можно было использовать приближение однократного рассеяния или незначительную его модификацию (первый порядок теории многократного рассеяния). В гл. 7—13 мы имели дело с более общей ситуацией, когда приближение однократного рассеяния оказывается несправедливым, и использовали при этом теорию переноса.

В гл. 14 рассмотрена теория многократного рассеяния и выведены основные уравнения для корреляционных функций как в случае неподвижных, так и в случае движущихся рассеивателей. Основываясь на изложенной в гл. 14 теории многократного рассеяния, мы можем теперь более детально остановиться на флуктуационных характеристиках волн и описании распространения импульсов в случае сильных флуктуаций.

В данной главе мы прежде всего приведем основные уравнения. Затем мы обсудим корреляционную функцию, угловой спектр и частотный спектр для случая, когда размеры частиц сравнимы с длиной волны или больше ее, дадим общие решения и рассмотрим в качестве примера падение плоской волны. После этого будут рассмотрены ограничения, налагаемые на разрешение изображения при наличии случайных рассеивателей. Наконец, мы проанализируем обратное рассеяние и распространение импульсов в областях с сильными флуктуациями и опишем полезные универсальные характеристики распространяющихся импульсов.

## 15.1. Основные уравнения для случая движущихся рассеивателей

Приведем еще раз основные уравнения для функции взаимной когерентности  $\Gamma$  поля  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в случае хаотически распределенных рассеивателей. Как видно из (14.104) и (14.108), второй момент поля (функция взаимной когерентности) связан с лучевой интенсивностью  $I$  посредством преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}_a, t_a; \mathbf{r}_b, t_b) &= \langle \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \psi^*(\mathbf{r}_b, t_b) \rangle = \\ &= \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\omega. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Зависящая от времени лучевая интенсивность удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d)}{ds} = -\rho\sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) + \int \rho F(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', t_d) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d) d\omega', \quad (15.2)$$

$$F(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', t_d) = |f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')|^2 \chi[-K_r(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}')t_d] \times \times \exp[-iK_r(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}') \cdot \mathbf{U}t_d], \quad (15.3)$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — поле в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ,  $\Gamma$  — функция взаимной когерентности,  $I$  — зависящая от времени лучевая интенсивность,  $K_r$  — действительная часть комплексного волнового числа  $K = k + [2\pi f(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}})\rho]/k$ ,  $\rho$  — концентрация частиц,  $f(\bar{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$  — амплитуда рассеяния,  $\chi$  — характеристическая функция флуктуаций скорости частиц, а  $\mathbf{U}$  — средняя скорость частиц. Уравнение (15.2) совпадает с уравнением переноса, если не считать того, что амплитуда рассеяния (15.3) зависит от времени. Поэтому рассмотренные в предыдущих главах решения можно непосредственно использовать для получения зависящей от времени лучевой интенсивности  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t, t_d)$ . Если лучевая интенсивность найдена, то второй момент поля (функцию взаимной когерентности)  $\Gamma(\mathbf{r}_a, t_a; \mathbf{r}_b, t_b)$  можно получить с помощью преобразования Фурье (15.1). В следующих разделах мы дадим несколько примеров такого решения.

## 15.2. Функция взаимной когерентности, угловой спектр и частотный спектр в малоугловом приближении

Если размеры частиц сравнимы с длиной волны или больше ее, то рассеянная частицами волна ограничивается главным образом областью малых углов вблизи направления вперед, что позволяет упростить уравнение переноса и получить точное общее решение. В этом приближении можно вычислить многие полезные величины. В данном разделе мы дадим общие решения для функции взаимной когерентности, углового спектра и частотного спектра флуктуаций поля в облаке случайных рассеивателей.

Малоугловое приближение обсуждалось в гл. 13. Следуя подходу, развитому в разд. 13.1, и учитывая (13.5), запишем при-

ближенно уравнение переноса в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I(z, \rho, \mathbf{s}, t_d) + \mathbf{s} \cdot \nabla I(z, \rho, \mathbf{s}, t_d) = \\ = -\rho_n \delta_t I(z, \rho, \mathbf{s}, t_d) + \frac{\rho_n \delta_t}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int p(\mathbf{s} - \mathbf{s}', t_d) I(z, \rho, \mathbf{s}', t_d) d\mathbf{s}', \end{aligned} \quad (15.4)$$

где концентрация частиц обозначена через  $\rho_n$ , чтобы избежать путаницы с радиальным вектором  $\rho$ , и

$$\mathbf{s} = l\hat{\mathbf{x}} + m\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r} = \rho + z\hat{\mathbf{z}}, \quad F(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}', t_d) = \frac{\delta_t}{4\pi} p(\mathbf{s} - \mathbf{s}', t_d).$$

Общее решение уравнения (15.4) получено выше в (13.18):

$$\begin{aligned} I(z, \rho, \mathbf{s}, t_d) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\boldsymbol{\kappa} \int d\mathbf{q} \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \rho - i\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}) F_0(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q} + \boldsymbol{\kappa}z) \times \\ \times K(z, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}, t_d), \end{aligned} \quad (15.5)$$

где

$$F_0(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}) = \iint I_0(\rho, \mathbf{s}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{q} + i\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}) d\rho d\mathbf{s},$$

$$K(z, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}, t_d) = \exp \left[ - \int_0^z \rho_n \delta_t \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi} P(\mathbf{q} + \boldsymbol{\kappa}(z - z'), t_d) \right\} dz' \right],$$

$$P(\mathbf{q}, t_d) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{s}, t_d) e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}} d\mathbf{s}.$$

Здесь  $I_0(\rho, \mathbf{s})$  — лучевая интенсивность при  $z = 0$ .

Функция взаимной когерентности в точке  $(z, \rho)$  дается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma(z, \rho, \rho_d, t_d) = \langle \Psi(z, \rho_1, t_1) \Psi^*(z, \rho_2, t_2) \rangle = \\ = \int I(z, \rho, \mathbf{s}, t_d) \exp(iK_r \mathbf{s} \cdot \rho_d) d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (15.6a)$$

где  $\rho = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$ ,  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$  и  $t_d = t_1 - t_2$ .

Формальное решение (15.5) можно выразить также через функцию взаимной когерентности (15.6a). Используя функцию взаимной когерентности при  $z = 0$

$$\Gamma_0(\rho, \rho_d) = \int I_0(\rho, \mathbf{s}) \exp(iK_r \mathbf{s} \cdot \rho_d) d\mathbf{s}, \quad (15.6б)$$

получаем

$$\Gamma(z, \rho, \rho_d, t_d) = \left(\frac{K_r}{2\pi z}\right)^2 \int d\rho' \int d\rho'_d \Gamma_0(\rho', \rho'_d) \exp\left[i \frac{K_r}{z} (\rho - \rho'_d) \cdot (\rho - \rho') - H\right], \quad (15.6в)$$

$$H = \int_0^z \rho_n \sigma_t \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi} P \left[ K_r \rho'_d + K_r (\rho_d - \rho'_d) \frac{z'}{z}, t_d \right] \right\} dz'.$$

Угловой спектр в точке  $(z, \rho)$  дается лучевой интенсивностью

$$I(z, \rho, s, t_d = 0) = I(z, \rho, \hat{l}\mathbf{x} + m\hat{y}, t_d = 0), \quad (15.7)$$

$$l = \sin \theta \cos \phi, \quad m = \sin \theta \sin \phi,$$

где  $\theta$  и  $\phi$  определяются в сферических координатах.

Частотный спектр  $W$  в точке  $(z, \rho)$  определяется выражением

$$W(z, \rho, \rho_d = 0, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, \rho, \rho_d = 0, t_d) \exp(i\omega t_d) dt_d =$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \Gamma(z, \rho, \rho_d = 0, t_d) \cos(\omega t_d) dt_d. \quad (15.8а)$$

Интеграл от частотного спектра по всем частотам равен полной мощности  $P_t$ :

$$P_t(z, \rho) = \Gamma(z, \rho, \rho_d = 0, t_d = 0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(z, \rho, \rho_d = 0, \omega) d\omega = \int_0^{\infty} W(z, \rho, \rho_d = 0, \omega) df, \quad (15.8б)$$

где  $\omega = 2\pi f$ .

В (15.7) мы отождествили лучевую интенсивность с угловым спектром. Заметим, что угловой спектр дается двумерным преобразованием Фурье от функции взаимной когерентности, а частотный спектр (15.8а) — одномерным преобразованием Фурье по времени.

### 15.3. Случай плоской падающей волны

В качестве примера рассмотрим падение плоской волны на облако случайных рассеивателей. В этом случае лучевая интенсивность при  $z = 0$  определяется выражением [см. (13.22)]

$$I_0(\rho, s) = I_0 \delta(s), \quad F_0(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 I_0 \delta(\mathbf{x}). \quad (15.9)$$

Будем считать, что частицы движутся со средней скоростью  $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{x}}$ , а флуктуации скорости описываются дисперсией  $\sigma_v^2$

[см. (14.108) и (14.109)]. Предположим также, что фазовая функция имеет гауссову форму [см. (6.20), (6.21), (6.129) и (13.24)]. Тогда мы имеем следующее выражение для  $F$ :

$$F(\mathbf{s}, t_d) = \frac{\alpha_p \sigma_s}{\pi} \exp \left[ -\alpha_p s^2 - iK_r \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{U} t_d - \frac{K_s^2 s^2 \sigma_s^2 t_d^2}{2} \right], \quad (15.10)$$

где коэффициент  $\alpha_p$  приближенно пропорционален величине  $(D/\lambda)^2$  и становится равным  $2,66 (D/\lambda)^2$ , когда диаметр частиц  $D$  много больше длины волны. Используя (15.5), получаем

$$P(\mathbf{q}, t_d) = \frac{4\pi W_0}{1+A} \exp \left[ -\frac{|\mathbf{q} - K_r \mathbf{U} t_d|^2}{4\alpha_p (1+A)} \right], \quad (15.11)$$

где  $A = K_r^2 \sigma_s^2 t_d^2 / 2\alpha_p$ . Подставляя (15.9) и (15.11) в (15.5), находим

$$I(\mathbf{z}, \mathbf{s}, t_d) = \frac{I_0}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}} K(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t_d),$$

$$\Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t_d) = I_0 K(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t_d) = \quad (15.12)$$

$$= I_0 \exp \left\{ -\rho_n \delta_t z \left[ 1 - \frac{W_0}{1+A} \exp \left( -\frac{|\mathbf{q} - K_r \mathbf{U} t_d|^2}{4\alpha_p (1+A)} \right) \right] \right\}.$$

Заметим, что, поскольку это решение соответствует плоской волне,  $I$  и  $\Gamma$  не зависят от  $\rho$ . Заметим также, что, поскольку  $\Gamma$  и  $I$  связаны соотношением (15.6), функция  $\Gamma$  в (15.12) есть функция взаимной когерентности, а  $\mathbf{q}$  равно  $K_r \rho_d$ , имеем

$$\Gamma(\mathbf{z}, \rho_d, t_d) = \Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t_d) |_{\mathbf{q} = K_r \rho_d}. \quad (15.13)$$

Рассмотрим угловой спектр (15.7). Полагая в (15.12)  $\mathbf{q} = q(\cos \phi' \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi' \hat{\mathbf{y}})$  и  $\mathbf{s} = \sin \theta (\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}})$  и выполняя интегрирование по  $\phi'$ , получаем

$$I(\mathbf{z}, \theta) = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} q dq J_0(q \sin \theta) \exp \left\{ -\rho_n \sigma_t z \left[ 1 - W_0 \exp \left( -\frac{q^2}{4\alpha_p} \right) \right] \right\}. \quad (15.14)$$

Мы можем приближенно оценить (15.14) для случаев малых и больших оптических длин  $\tau = \rho_n \sigma_t z$ . Для малых оптических длин  $\tau < 1$  приближенно имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t_d = 0) &= I_0 \exp \left\{ -\tau \left[ 1 - W_0 \exp \left( -\frac{q^2}{4\alpha_p} \right) \right] \right\} \approx \\ &\approx I_0 \exp(-\tau) \left[ 1 + \tau W_0 \exp \left( -\frac{q^2}{4\alpha_p} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Подставляя (15.15) в (15.14), получаем

$$I(\mathbf{z}, \theta) = I_0 e^{-\tau} [\delta(\theta) + (\alpha_p W_0 \tau / \pi) \exp(-\alpha_p \sin^2 \theta)]. \quad (15.16)$$

Здесь первый член описывает когерентную интенсивность и совпадает с падающей волной (15.9), за исключением фактора ослабления  $\exp(-\tau)$ . Второй член представляет некогерентную интенсивность; величина этого члена растет с ростом  $\tau$ , а угловая ширина совпадает с угловой шириной характеристики рассеяния частицы (15.10). Заметим также, что поток  $F$  дается выражением

$$F(z) = \int I(z, \theta) ds = I_0 e^{-\tau} [1 + W_0 \tau]. \quad (15.17)$$

Это первый член разложения в ряд полного потока

$$F(z) = I_0 \exp(-\rho_n \sigma_a z) = I_0 \exp[-\tau(1 - W_0)]. \quad (15.18)$$

Рассмотрим теперь случай больших оптических длин  $\tau \gg 1$ . В этом случае мы можем приближенно записать

$$\Gamma(z, \mathbf{q}, t_d=0) \approx I_0 \{ \exp(-\tau) + \exp[-\tau(1 - W_0 + W_0 q^2 / 4\alpha_p)] \}. \quad (15.19)$$

Заметим, что в этом приближении первый член дает когерентную интенсивность, а второй — некогерентную интенсивность. Следует заметить также, что при  $q \rightarrow \infty$  (15.14) сводится к когерентной интенсивности, причем приближение (15.19) с этим согласуется, поскольку при  $q \rightarrow \infty$  второй член в (15.19) обращается в нуль.

Подставляя (15.19) в (15.14), получаем

$$I(z, \theta) = I_0 e^{-\tau} \delta(\theta) + I_0 (\alpha_p / \pi W_0 \tau) \exp \{ -\tau(1 - W_0) - [(\alpha_p \sin^2 \theta / W_0 \tau)] \}. \quad (15.20)$$

Это выражение описывает уширение углового спектра некогерентной интенсивности, которое оказывается пропорциональным  $z^{1/2}$  [см. также (13.27)].

Рассмотрим теперь частотный спектр (15.8). Для случая плоской волны из (15.12) имеем

$$W(z, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, t_d) \exp(i\omega t_d) dt_d, \quad (15.21)$$

$$\Gamma(z, t_d) = I_0 \exp \left[ -\tau \left\{ 1 + \frac{W_0}{1+A} \exp \left[ -\frac{(K_r U t_d)^2}{4\alpha_p (1+A)} \right] \right\} \right],$$

где  $U$  — поперечная по отношению к оси  $z$  компонента скорости частицы, а  $A$  дается в пояснении к выражению (15.11).

Рассмотрим в качестве примера случай, когда скорость частицы постоянна, а флуктуации скорости отсутствуют ( $A = 0$ ). В этом случае имеем

$$\Gamma(z, t_d) = I_0 \exp[-\tau \{ 1 + W_0 \exp[-(K_r U t_d)^2 / 4\alpha_p] \}]. \quad (15.22)$$

Сравнивая это выражение с (15.15), замечаем, что если скорость частицы постоянна и имеет поперечную по отношению к  $z$  компоненту  $U$ , то пространственная функция когерентности  $\Gamma(z, \mathbf{q}) = \Gamma(z, K_r \rho_d)$  (15.15) совпадает с временной функцией когерентности (15.22), если положить  $\rho_d = U t_d$ :

$$\Gamma(z, \rho_d) = \Gamma(z, U t_d). \quad (15.23)$$

Частотный спектр  $W(z, \omega)$  из (15.21), где  $A = 0$ , можно вычислить для случаев малых и больших оптических длин. В первом случае, используя (15.15), получаем

$$W(z, \omega) = I_0 \exp(-\tau) \left[ 4\pi\delta(\omega) + \frac{4\tau W_0 \pi^{1/2}}{\omega_c} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \right], \quad (15.24)$$

где  $\omega_c = K_r U / \alpha_p^{1/2}$ . В случае большой оптической длины  $\tau \gg 1$ , используя (15.19), находим

$$W(z, \omega) = I_0 \left\{ 4\pi\delta(\omega) \exp(-\tau) + (4\pi^{1/2}/\omega_c) \exp\left[-\tau(1-W_0) - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right] \right\}, \quad (15.25)$$

где  $\omega_c = (K_r U) [(\tau W_0)^{1/2} / \alpha_p^{1/2}]$ . Первые члены в (15.24) и (15.25) соответствуют когерентному полю, поэтому в них отсутствует уширение по частоте. Действительно, наличие дельта-функции  $\delta(\omega)$  означает отсутствие отклонений от несущей частоты. Вторые члены в (15.24) и (15.25) описывают связанное с некогерентным полем частотное уширение.

#### 15.4. Ограничения на разрешение изображения, налагаемые случайно распределенными рассеивателями

Предположим, что плоская волна, распространяющаяся через облако случайно распределенных рассеивателей, наблюдается посредством формирующего изображение приемника, такого, как линза или параболическая антенна. В отсутствие рассеивателей в фокальной плоскости изображение описывается функцией Эйри. В данном разделе мы рассмотрим влияние рассеивателей на это изображение.

Рассмотрим линзу с круговой апертурой диаметром  $2a$ , которая фокусирует падающую на нее плоскую волну в фокальной плоскости на расстоянии  $f$  (рис. 15.1). Пусть  $\psi(z, \rho')$  — падающая на линзу волна. Поле  $\psi_f(\rho)$  в фокальной плоскости дается формулой Кирхгофа

$$\psi_f(\rho) = \frac{k}{2\pi i} \int_s \frac{\exp(ikr + i\phi)}{r} \psi(z, \rho') d\rho', \quad (15.26)$$

где  $s$  — площадь круговой апертуры линзы, а  $r$  — расстояние между точкой на апертуре и точкой в фокальной плоскости:

$$r = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + f^2]^{1/2}. \quad (15.27)$$

При этом  $\phi$  в (15.26) есть дополнительная фаза, которая вводится фокусирующей линзой.

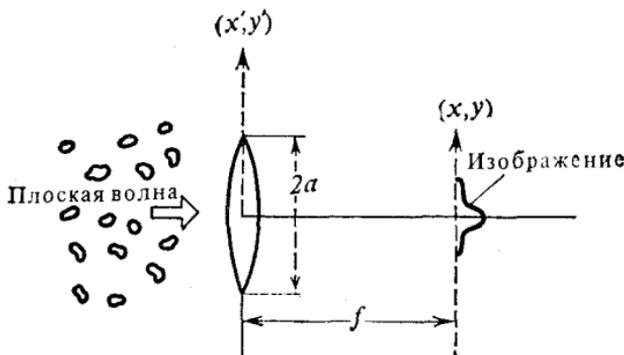


Рис. 15.1. Падение плоской волны, проходящей облако случайно распределенных рассеивателей, на фокусирующую линзу диаметра  $2a$  с фокусным расстоянием  $f$ .

Используем приближение Френеля

$$\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{f} \exp ik \left[ f + \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2f} \right], \quad (15.28)$$

$$\phi \approx -\frac{k}{2f} (x'^2 + y'^2).$$

Тогда для поля в фокальной плоскости получим

$$\psi_f(\rho) = \frac{k}{2\pi f i} \exp \left( ikf + i \frac{k\rho^2}{2f} \right) \int_s \exp \left( i \frac{k}{f} \rho \cdot \rho' \right) \psi(z, \rho') d\rho', \quad (15.29)$$

где  $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$  и  $\rho' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ .

Интенсивность  $P_f(\rho)$  в фокальной плоскости дается выражением

$$P_f(\rho) = \langle \psi_f(\rho) \psi_f^*(\rho) \rangle = \frac{k^2}{(2\pi f)^2} \iint_s \exp \left( i \frac{k}{f} \rho \cdot \rho'_a \right) \Gamma(z, \rho'_a) d\rho'_a d\rho'_c, \quad (15.30)$$

где  $\rho'_a = \rho'_1 - \rho'_2$ ,  $\rho'_c = \frac{1}{2}(\rho'_1 + \rho'_2)$ ,  $d\rho'_a d\rho'_c = d\rho'_1 d\rho'_2$ , так что, согласно (15.12), имеем

$$\Gamma(z, \rho'_a) = \langle \psi(z, \rho'_1) \psi^*(z, \rho'_2) \rangle = I_0 \exp \left\{ -\tau \left[ 1 - W_0 \exp \left( -\frac{K_r^2 \rho_d'^2}{4a_\rho} \right) \right] \right\}. \quad (15.31)$$

Интегрирование в (15.30) выполняется по круговой апертуре радиуса  $a$ . Мы можем переписать (15.30) с помощью функции  $F(\rho)$ , которая определяется как

$$F(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\rho| < a, \\ 0 & \text{при } |\rho| > a. \end{cases} \quad (15.32)$$

При этом можно неограниченно расширить пределы интегрирования, записав

$$P_f(\rho) = \frac{k^2}{(2\pi f)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{k}{f} \rho \cdot \rho'_d\right) \Gamma(z, \rho'_d) F(\rho'_1) F(\rho'_2) d\rho'_d d\rho'_c. \quad (15.33)$$

Интеграл

$$K(\rho'_d) = \iint_{-\infty}^{\infty} F\left(\rho'_c + \frac{\rho'_d}{2}\right) F\left(\rho'_c - \frac{\rho'_d}{2}\right) d\rho'_c \quad (15.34)$$

равен площади пересечения двух кругов радиуса  $a$  с расстоянием между центрами  $\rho'_d$ . Вычисление этого интеграла дает

$$K(\rho'_d) = K(\rho'_d) = \begin{cases} 2a^2 \left[ \arccos \left( \frac{\rho'_d}{2a} \right) - \frac{\rho'_d}{2a} \left( 1 - \frac{\rho'^2_d}{4a^2} \right)^{1/2} \right] & \text{при } \rho'_d < 2a, \\ 0 & \text{при } \rho'_d > 2a. \end{cases} \quad (15.35)$$

Эта функция  $K(\rho'_d)$  равна  $\pi a^2$  при  $\rho'_d = 0$  и переходит в нуль при  $\rho'_d \rightarrow 2a$ .

Подставляя (15.35) в (15.33), мы получаем следующее выражение для распределения интенсивности в фокальной плоскости<sup>1)</sup>:

$$P_f(\rho) = P_f(\rho) = \frac{k^2}{2\pi f^2} \int_0^{2a} \rho'_d d\rho'_d J_0\left(\frac{k\rho}{f} \rho'_d\right) \Gamma(z, \rho'_d) K(\rho'_d), \quad (15.36)$$

где  $\Gamma(z, \rho'_d)$  дается выражением (15.31), а  $K(\rho'_d)$  — выражением (15.35),  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка.

Выражение (15.36) дает общую формулу для распределения интенсивности в фокальной плоскости и может быть рассчитано численно. Заметим также, что в отсутствие рассеивателей

<sup>1)</sup> Эту величину называют также функцией размытия точки (point spread function), а ее фурье-образ есть модуляционная передаточная функция (МПФ) (разд. 20.20).

в (15.30)  $\Gamma = I_0$ , и мы получаем

$$P_a(\rho) = \frac{k^2 I_0}{(2\pi f)^2} \left[ 2\pi \int_0^a J_0\left(\frac{k}{f} \rho \rho'\right) \rho' d\rho' \right]^2 = \\ = \frac{k^2 I_0}{2\pi f^2} \int_0^{2a} \rho'_d d\rho'_d J_0\left(\frac{k\rho}{f} \rho'_d\right) K(\rho'_d) = I_0 \frac{a^2}{\rho^2} J_1^2\left(\frac{k\rho a}{f}\right). \quad (15.37)$$

Это выражение соответствует распределению Эйри для круговой апертуры. Первый нуль этого выражения отвечает значению  $\rho_a = (3,832f)/ka$ .

Для изучения общих характеристик распределения (15.36) рассмотрим случай большой оптической длины ( $\tau \gg 1$ ). При этом воспользуемся выражением (15.19). В результате получим

$$P_f(\rho) = P_c(\rho) + P_i(\rho), \\ P_c(\rho) = I_0 e^{-\tau} (a/\rho)^2 J_1^2(k\rho a/f), \\ P_i(\rho) = \frac{k^2}{2\pi f^2} \int_0^{2a} \rho'_d d\rho'_d J_0\left(\frac{k\rho}{f} \rho'_d\right) \Gamma_i(z, \rho'_d) K(\rho'_d), \quad (15.38)$$

где  $\Gamma_i(z, \rho'_d) = I_0 \exp\{-\tau[1 - W_0 + (W_0 K_r^2 \rho_d'^2 / 4\alpha_p)]\}$ .

В этих соотношениях  $P_c(\rho)$  есть когерентная интенсивность, имеющая вид такого же диска Эйри, что и в случае свободного пространства, за исключением фактора ослабления  $\exp(-\tau)$ . Величина  $P_i(\rho)$  есть некогерентная интенсивность, описывающая многократное рассеяние.

Радиус корреляции волны, падающей на линзу, дается выражением

$$\rho_0 = (4\alpha_p / \tau W_0 K_r^2)^{1/2}. \quad (15.39)$$

Поскольку  $\alpha_p = 2,66(D/\lambda)^2$  для частиц с размером  $D > \lambda$  и  $K_r \approx k$ , корреляционную длину  $\rho_0$  можно аппроксимировать выражением

$$\rho_0 = 0,52D / (\tau W_0)^{1/2} = 0,52D / (\rho_n \sigma_s z)^{1/2}. \quad (15.40)$$

Во многих практических ситуациях радиус корреляции  $\rho_0$  оказывается много меньше размера апертуры  $a$ . В этом случае можно приближенно положить  $K(\rho'_d) \approx K(0) = \pi a^2$  и распространить пределы интегрирования в (15.38) до бесконечности. В результате получим

$$P_i(\rho) = \frac{k^2}{2\pi f^2} \int_0^\infty \rho'_d d\rho'_d J_0\left(\frac{k\rho}{f} \rho'_d\right) \Gamma_i(z, \rho'_d) \pi a^2 = \\ = I_0 (a/\rho_i)^2 \exp[-\tau(1 - W_0) - (\rho^2/\rho_i^2)], \quad (15.41)$$

где  $\rho_i^2 = (K_r f/k)^2 (\tau W_0/\alpha_p) = (f/k)^2 (4/\rho_0^2) = 0,2724 \rho_a^2 (a/\rho_0)^2$ . Это выражение показывает, что некогерентная интенсивность  $P_i(\rho)$  уширяется в фокальной плоскости, причем отношение уширения  $\rho_i$  к размеру диска Эйри  $\rho_a$  пропорционально отношению апертуры  $a$  к радиусу корреляции  $\rho_0$ .

Если радиус корреляции некогерентного поля много больше размера апертуры  $a$ , то  $\Gamma_i$  можно аппроксимировать выражением  $I_0 \exp[-\tau(1 - W_0)]$ , что дает картину, аналогичную диску Эйри:

$$P_i(\rho) = I_0 \exp[-\tau(1 - W_0)] (a/\rho)^2 J_1^2(k\rho a/f). \quad (15.42)$$

Этого и следовало ожидать, поскольку плоская волна с радиусом корреляции  $\rho_0$ , много большим размера апертуры  $a$ , должна давать изображение, незначительно отличающееся от изображения в случае плоской волны с  $\rho_0 \rightarrow \infty$ .

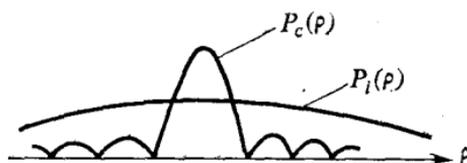


Рис. 15.2. Зависимость интенсивности от расстояния  $\rho$  в фокальной плоскости. Полная интенсивность складывается из когерентной интенсивности  $P_c(\rho)$  и некогерентной интенсивности  $P_i(\rho)$ . С увеличением расстояния распространения некогерентная интенсивность  $P_i$  растет и в конце концов превосходит когерентную интенсивность  $P_c$ . При этом изображение становится неразличимым.

Рассмотрим физический смысл соотношений (15.38) — (15.40). Когерентная интенсивность  $P_c(\rho)$  имеет тот же вид, что и в случае свободного пространства, и поэтому характеризуется теми же параметрами разрешения, что и для свободного пространства. С другой стороны, некогерентная интенсивность  $P_i(\rho)$  существенно уширена (рис. 15.2). До тех пор пока когерентная интенсивность больше некогерентной интенсивности в окрестности фокальной точки  $\rho = 0$ , можно получить относительно хорошее изображение удаленного источника. Однако, когда  $P_i$  становится сравнимой с  $P_c$ , получить хорошее изображение невозможно. Условие  $P_i = P_c$  при  $\rho = 0$  приводит к соотношению

$$(K_r a)^2 / 4\alpha_p = \exp(\tau W_0) / \tau W_0. \quad (15.43)$$

Поскольку  $\alpha_p$  пропорционально  $(D/\lambda)^2$ , где  $D$  — диаметр частицы, левая часть (15.43) пропорциональна величине  $(a/D)^2$ , которая может быть очень большой. Поэтому (15.43) может выполняться только при большой оптической длине. Эта длина аппроксимируется выражением

$$\tau W_0 = \rho_n \sigma_t z W_0 = \rho_n \sigma_s z = \ln B + \ln(\ln B), \quad (15.44)$$

где  $B = (K_r a)^2 / 4\alpha_p$ . Если отношение  $D/\lambda$  велико, то  $\alpha_p$  равно  $2,66 (D/\lambda)^2$ ,  $K_r \approx k$ . При этом

$$B = 3,71 (a/D)^2, \quad (15.45)$$

где  $a$  — радиус апертуры, а  $D$  — диаметр частицы.

В подводной фотографии [107, 252] было обнаружено, что сквозь слой воды большой оптической толщины можно получить четкие фотографии. Согласно только что проведенному анализу, если при фотографировании удаленных объектов в воде использовать большие апертуры, то можно получить довольно четкие изображения вплоть до оптических длин, даваемых выражениями (15.44) и (15.45). При этом ослабление контрастности изображения связано с фоном, обусловленным некогерентной интенсивностью.

Данный анализ был проделан на основе функции размытия точки (15.36). Его можно провести также с помощью модуляционной передаточной функции (МПФ). Поскольку МПФ есть фурье-образ  $P_f(\rho)$ , из (15.33) и (15.36) можно получить, что МПФ пропорциональна  $\Gamma(z, \rho'_d) K(\rho'_d)$ . При анализе МПФ необходимо соблюдать осторожность, поскольку, хотя  $\Gamma(z, \rho'_d)$  уменьшается с ростом  $\rho'_d$ ,  $\Gamma(z, \rho'_d)$  достигает постоянного значения  $I_0 \exp(-\tau)$  при  $\rho'_d \rightarrow \infty$ , которое соответствует когерентной интенсивности. При больших оптических длинах  $\tau$  величина  $I_0 \exp(-\tau)$  может быть мала по сравнению с некогерентной интенсивностью, однако некогерентная интенсивность в фокальной плоскости уширяется, тогда как когерентная интенсивность остается сконцентрированной внутри диска Эйри, поэтому когерентной интенсивностью пренебрегать нельзя. Если анализировать МПФ только для малых  $\rho'_d$  (что соответствует малым пространственным частотам), то мы опишем поведение некогерентной интенсивности, однако это не даст полной информации о разрешении изображения. Это объясняет кажущееся противоречие [107], заключающееся в том, что при больших оптических длинах (15—20) в воде, содержащей рассеиватели, МПФ быстро спадает при малых пространственных частотах как теоретически, так и в эксперименте, но, несмотря на это, можно получить четкие фотографии объектов. При расстояниях больше тех, которые определяются условием (15.43), когерентной интенсивностью можно пренебречь, и разрешение изображения определяется параметром  $\rho_i$  в (15.41), а угловое разрешение дается отношением  $\rho_i/f \approx \lambda/\rho_0$ .

## 15.5. Выходной сигнал приемника при наличии случайно распределенных рассеивателей

Предположим, что плоская волна, прошедшая через облако случайно распределенных рассеивателей, падает на линзу или параболическую антенну. При этом выходной сигнал приемника

будет флукутировать во времени. В данном разделе мы рассмотрим флукутационные характеристики такого сигнала.

Пусть  $A_r(\theta, \phi)$  — эффективная поверхность приемника. Тогда корреляционная функция  $B_v(t_d)$  напряжения на выходе  $V(t)$  имеет вид

$$B_v(t_d) = \langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = \int A_r(\mathbf{s}) I(z, \mathbf{s}, t_d) ds, \quad (15.46)$$

где  $t_d = t_1 - t_2$ ,  $\mathbf{s} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$ ,  $|\mathbf{s}| = \sin \theta$ , а  $I(z, \mathbf{s}, t_d)$  дается выражением (15.12). В (15.46) нормировка напряжения  $V(t)$  выбрана так, что  $B_v(t_d = 0)$  равно принимаемой мощности  $P_r$ :

$$P_r = \langle |V|^2 \rangle = \int A_r(\mathbf{s}) I(z, \mathbf{s}, t_d = 0) ds. \quad (15.47)$$

При этом область изменения  $\mathbf{s}$  ограничивается условием  $0 \leq |\mathbf{s}| \leq \infty$ , что согласуется с малоугловым приближением (15.12).

В качестве примера рассмотрим случай, когда эффективная поверхность приемника аппроксимируется функцией Гаусса

$$A_r(\theta, \phi) = A_{r0} \exp(-\alpha_r s^2), \quad (15.48)$$

где  $\alpha_r = (4 \ln 2) / \theta_b^2 [\theta_b - \text{угловая полуширина пучка, см. (4.14)}]$ . В этом случае получаем

$$B_v(t_d) = \frac{A_{r0}}{4\pi\alpha_r} \int d\mathbf{q} \exp\left(-\frac{q^2}{4\alpha_r}\right) \Gamma(z, \mathbf{q}, t_d), \quad (15.49)$$

где  $\Gamma(z, \mathbf{q}, t_d)$  дается выражением (15.12).

Частотный спектр выходного сигнала  $W_v(\omega)$  определяется выражением

$$W_v(\omega) = \frac{A_{r0}}{4\pi\alpha_r} \int d\mathbf{q} \exp\left(-\frac{q^2}{4\alpha_r}\right) W(z, \mathbf{q}, \omega), \quad (15.50)$$

где  $W(z, \mathbf{q}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, \mathbf{q}, t_d) \exp(i\omega t_d) dt_d$ .

Рассмотрим принимаемую мощность  $P_r$ . Из (15.49) получаем

$$P_r = \frac{A_{r0} I_0}{2\alpha_r} \int_0^{\infty} q dq \exp\left\{-\frac{q^2}{4\alpha_r} - \rho_n \sigma_t z \left[1 - W_0 \exp\left(-\frac{q^2}{4\alpha_p}\right)\right]\right\}. \quad (15.51)$$

Для больших оптических длин  $\tau = \rho_n \sigma_t z \gg 1$  мы можем использовать аппроксимацию (15.19), что дает

$$\begin{aligned} P_r &= P_{rc} + P_{ri}, & P_{rc} &= (A_{r0} I_0) \exp(-\tau), \\ P_{ri} &= (A_{r0} I_0) \frac{\exp[-\tau(1 - W_0)]}{1 + (\tau W_0 \alpha_r / \alpha_p)}. \end{aligned} \quad (15.52)$$

Здесь первый член  $P_{rc}$  — когерентная интенсивность, а второй член  $P_{ri}$  — некогерентная интенсивность. Заметим, что коэффициент  $\alpha_r$  приближенно равен  $(D_r/\lambda)^2$ , где  $D_r$  — диаметр приемной апертуры, а  $\alpha_p$  аппроксимируется выражением  $2,66 (D/\lambda)^2$ , где  $D$  — диаметр частицы. Таким образом, некогерентная интенсивность  $P_{ri}$  имеет вид

$$P_{ri} = (A_{r0}I_0) \frac{\exp(-\rho_n \sigma_a z)}{1 + c (\rho_n \sigma_s z) (D_r/D)^2}, \quad (15.53)$$

где  $c$  — постоянная порядка единицы, величина которой зависит от распределения поля по апертуре приемника и от характеристик частицы. Заметим, что для точечного приемника ( $D_r \rightarrow 0$ ) некогерентная интенсивность  $P_{ri}$  много больше когерентной интенсивности. Однако для больших значений отношения  $D_r/D$  некогерентная интенсивность  $P_{ri}$  может быть значительно меньше. При этом расстояние  $z$ , на котором когерентная интенсивность больше некогерентной, приближенно ограничивается условием

$$\rho_n \sigma_s z < \ln [(D_r/D)^2 \ln (D_r/D)^2]. \quad (15.54)$$

Отсюда видно, что для приемника с большим размером апертуры на выходе преобладает когерентная интенсивность, и флуктуации остаются малыми при большой оптической длине трассы. Как и следовало ожидать, условие (15.54) имеет такой же вид, что и условие (15.44) для разрешения изображения. Следует заметить, что в литературе описан подробный анализ ограничений, налагаемых атмосферными неоднородностями на направленность больших антенн [311].

## 15.6. Сферическая волна в облаке случайно распределенных частиц

Если точечный источник локализован в начале координат, то удобно использовать (15.6в) с функцией взаимной когерентности  $\Gamma_0$  при  $z = 0$  вида

$$\Gamma_0(\rho', \rho'_d) = (2\pi/K_r)^2 \delta(\rho') \delta(\rho'_d). \quad (15.55)$$

Заметим, что в случае свободного пространства ( $H = 0$ ) подстановка (15.55) в (15.6в) дает правильное выражение для функции взаимной когерентности  $\Gamma$  при  $z$ :

$$\Gamma(z, \rho, \rho_d) = z^{-2} \exp[i(K_r/z) \rho \cdot \rho_d]. \quad (15.56)$$

Функция взаимной когерентности при наличии случайных рассеивателей получается подстановкой (15.55) в (15.6в). В резуль-

тате имеем

$$\Gamma(z, \rho, \rho_d, t_d) = z^{-2} \exp[i(K_r/z)\rho \cdot \rho_d - H],$$

$$H = \int_0^z \rho_n \sigma_t \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi} P\left(K_r \rho_d \frac{z'}{z}, t_d\right) \right\} dz'. \quad (15.57)$$

Для характеристики рассеяния вида (15.10) получаем

$$P\left(K_r \rho_d \frac{z'}{z}, t_d\right) = \frac{\sigma_s}{1+A} \exp\left[-\frac{|(K_r \rho_d z'/z) - K_r U t_d|^2}{4\alpha_p(1+A)}\right], \quad (15.58)$$

где  $A$  дается в пояснении к (15.11).

Используя (15.57), легко получить формулы для углового и частотного спектров.

## 15.7. Обратное рассеяние от случайно распределенных рассеивателей

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $z$ , которая падает по нормали на слой с хаотически распределенными рассеивателями. Лучевая интенсивность  $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{d}{ds} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\rho \sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \quad (15.59)$$

При изучении обратного рассеяния удобно разделить лучевую интенсивность на прямую лучевую интенсивность  $I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{z}})$  и обратную лучевую интенсивность  $I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$  [184]:

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \begin{cases} I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) & \text{при } \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0, \\ I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) & \text{при } \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} < 0. \end{cases} \quad (15.60)$$

Используя (15.60), запишем (15.59) в виде следующих двух уравнений. При  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$

$$\frac{d}{ds} I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\rho \sigma_t I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{-2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega', \quad (15.61)$$

где интеграл по  $+2\pi$  обозначает интегрирование по  $\hat{\mathbf{s}}'$  в области  $\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ , а интеграл по  $-2\pi$  — интегрирование по области

$\hat{s}' \cdot \hat{z} < 0$ . Аналогично при  $\hat{s} \cdot \hat{z} < 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = & -\rho\sigma_t I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{-2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega' + \\ & + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \end{aligned} \quad (15.62)$$

Рассмотрим теперь решение уравнений (15.61) и (15.62) с помощью итераций:  $I_{+n}$  и  $I_{-n}$ . Замечая, что  $n$ -я итерация для  $I_+$  порождается  $(n-1)$ -й итерацией для  $I_-$ , запишем (15.61) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I_{+n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = & -\rho\sigma_t I_{+n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{+n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \\ & + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{-2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{-(n-1)}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \end{aligned} \quad (15.63)$$

Аналогично (15.62) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I_{-n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = & -\rho\sigma_t I_{-n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{-2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{-n}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \\ & + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{+(n-1)}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \end{aligned} \quad (15.64)$$

В качестве первого приближения положим  $I_{-0}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') = 0$  в (15.63) и получим уравнение переноса для  $I_+ = I_{+1}$

$$\frac{d}{ds} I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\rho\sigma_t I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \quad (15.65)$$

Уравнение первого приближения для обратной интенсивности  $I_- = I_{-1}$  получается подстановкой  $I_{+1}$  в (15.64):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = & -\rho\sigma_t I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{-2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \\ & + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{+2\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \end{aligned} \quad (15.66)$$

Уравнения (15.65) и (15.66) являются основными уравнениями для прямой и обратной лучевых интенсивностей первого приближения.

Рассмотрим малоугловое приближение для двух основных уравнений (15.65) и (15.66). При этом (15.65) переходит в урав-

нение (15.4), общее решение которого записано в виде (15.5а). Для (15.66), замечая, что  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} < 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I_-(z, \rho, \mathbf{s}) + \mathbf{s} \circ \nabla_t I_-(z, \rho, \mathbf{s}) = & -\rho_n \sigma_t I_-(z, \rho, \mathbf{s}) + \\ & + \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int p(\mathbf{s} - \mathbf{s}') I_-(z, \rho, \mathbf{s}') ds' + Q, \quad (15.67) \\ Q = & \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int_{2\pi} p(\mathbf{s} - \mathbf{s}') I_+(z, \rho, \mathbf{s}') ds', \end{aligned}$$

где концентрация частиц обозначена через  $\rho_n$ , чтобы избежать путаницы с радиальным вектором  $\rho$ .

В качестве примера рассмотрим случай падения плоской волны на слой. При этом прямая интенсивность  $I_+$  дается полученным выше выражением (15.12). Подставим это выражение в (15.67) и вычислим  $Q$ . Интегрирование в выражении для  $Q$  выполняется при  $\hat{\mathbf{s}}'$ , направленном вперед ( $\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ ), а  $\mathbf{s}$  — в обратном направлении ( $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{z}} < 0$ ). Во многих практических ситуациях частицы оказываются распределенными по размерам и обладают некоторым поглощением. В этом случае картина обратного рассеяния медленно меняется с изменением угла. Поэтому имеет смысл аппроксимировать  $p(\mathbf{s} - \mathbf{s}')$  постоянной:

$$p(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \frac{\sigma_b}{\sigma_t}, \quad (15.68)$$

где  $\sigma_b = 4\pi |f(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})|^2$  — сечение обратного рассеяния.

Подставляя (15.68) в (15.67) и используя выражение (15.12) для  $I_+$ , в случае неподвижных рассеивателей получаем

$$Q = (\rho_n \sigma_b / 4\pi) I_0 K(z, \mathbf{q} = 0) = (\rho_n \sigma_b / 4\pi) I_0 \exp(-\rho_n \sigma_a z). \quad (15.69)$$

Для движущихся рассеивателей имеем

$$Q = \frac{\rho_n \sigma_b}{4\pi} I_0 \exp \left[ -\rho_n \sigma_t z \left\{ 1 - \frac{W_0}{1+A} \exp \left[ -\frac{K_r U t_d}{4\alpha_p (1+A)} \right] \right\} \right]. \quad (15.70)$$

Рассмотрим решение для случая неподвижных рассеивателей. Используя (15.69), мы можем получить точное решение уравнения (15.67) для плоской волны. Заметим, что в этом случае в (15.67)  $\nabla_t = 0$ . Взяв далее преобразование Фурье

$$F(z, \mathbf{q}) = \int I_-(z, \mathbf{s}) e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}} ds, \quad (15.71)$$

получим

$$-\frac{\partial}{\partial z} F + \rho_n \sigma_t \left( 1 - \frac{P(\mathbf{q})}{4\pi} \right) F = -\frac{\rho_n \sigma_b}{4\pi} I_0 \exp(-\rho_n \sigma_a z) (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}). \quad (15.72)$$

Это уравнение нетрудно решить, что дает

$$I_-(z, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F e^{is \cdot q} d\mathbf{q} = \left( \frac{\rho_n \sigma_b I_0}{4\pi} \right) \int_0^d \exp(-2\rho_n \sigma_a z) dz = \\ = \left( \frac{\rho_n \sigma_b I_0 d}{4\pi} \right) \left[ \frac{1 - \exp(-2\rho_n \sigma_a d)}{2\rho_n \sigma_a d} \right], \quad (15.73)$$

где  $d$  — толщина слоя (рис. 15.3).

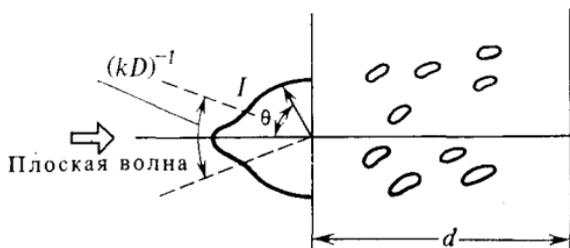


Рис. 15.3. Обратное рассеяние на облаке случайно распределенных рассеивателей. Интенсивность для  $\theta > (kD)^{-1}$  дается выражением (15.73), а интенсивность для  $\theta < (kD)^{-1}$  — выражением (15.76).

Выражение (15.73) можно сравнить с решением в приближении однократного рассеяния  $I_s$  (первое приближение теории многократного рассеяния)

$$I_s = \frac{\rho_n \sigma_b I_0}{4\pi} \int_0^d \exp(-2\rho_n \sigma_t z) dz = \\ = \left( \frac{\rho_n \sigma_b I_0 d}{4\pi} \right) \left[ \frac{1 - \exp(-2\rho_n \sigma_t d)}{2\rho_n \sigma_t d} \right]. \quad (15.74)$$

Отметим существенное различие между решением с учетом многократного рассеяния (15.73) и решением первого приближения (15.74).

Выражение (15.73) справедливо для области  $\theta > (kD)^{-1}$ , где  $D$  — размер частицы, а  $|s| = \sin \theta$  (рис. 15.3). Известно также [97, 371]<sup>1)</sup>, что в области  $\theta < (kD)^{-1}$  интенсивность обратного рассеяния  $I_b$  дается выражением

$$I_b = 2I_- - I_s. \quad (15.75)$$

Физически это означает, что интенсивность обратного рассеяния  $I_m$ , связанную с многократным рассеянием, нужно учитывать

<sup>1)</sup> Более строгое описание интенсивности рассеяния назад требует использования четвертых моментов поля.

дважды, поскольку при обратном рассеянии один и тот же путь используется два раза, однако обратное рассеяние, связанное с интенсивностью рассеяния первого порядка  $I_s$ , нужно считать только один раз (рис. 15.4). Поэтому при  $\theta < (kD)^{-1}$  можно записать

$$I_b = 2I_m + I_s = 2(I_m + I_s) - I_s = 2I_- - I_s = \left(\frac{\rho_n \sigma_b I_0 d}{4\pi}\right) [2f_- - f_s], \quad (15.76)$$

где

$$f_- = \frac{1 - \exp(-2\rho_n \sigma_a d)}{2\rho_n \sigma_a d}, \quad f_s = \frac{1 - \exp(-2\rho_n \sigma_t d)}{2\rho_n \sigma_t d}.$$

При  $\theta > (kD)^{-1}$   $I_b = I_-$  (рис. 15.5).

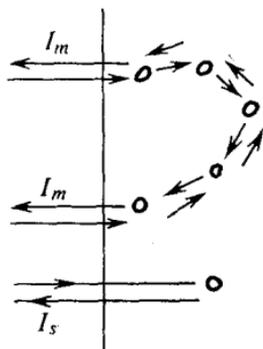


Рис. 15.4. Интенсивность многократного рассеяния  $I_m$  необходимо учитывать дважды, а интенсивность однократного рассеяния — только один раз.

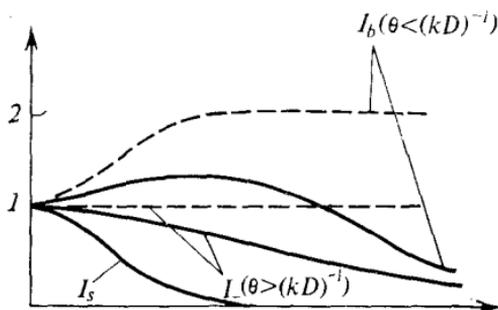


Рис. 15.5. Интенсивность обратного рассеяния, нормированная на величину  $\rho_b I_0 d / 4\pi$ . Сплошные кривые соответствуют наличию поглощения, а штриховые — случаю непоглощающих частиц.

Сечение обратного рассеяния  $\sigma$  на единицу поверхности содержащего рассеиватели слоя толщины  $d$  определяется выражением

$$\sigma = \frac{4\pi I_b}{I_0} = (\rho_n \sigma_b d) [2f_- - f_s]. \quad (15.77)$$

В литературе описаны измерения радиолокационного сечения обратного рассеяния от облаков [6, 51, 76, 257]. Было отмечено, что теория однократного рассеяния не объясняет экспериментальных данных. Однако сравнение описанной в данном разделе теории многократного рассеяния с экспериментом не проводилось.

## 15.8. Распространение импульсов в облаке случайно распределенных рассеивателей

В разд. 5.1 и 5.2 мы рассмотрели общие формулы для случая распространения импульса в случайно-неоднородной среде. Второй момент комплексной огибающей  $B_u$  дается выражением

$$B_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \Gamma \exp(-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2), \quad (15.78)$$

где  $U_i(\omega)$  — спектр комплексной огибающей импульса на входе,

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (15.79)$$

а  $\Gamma$  — двухчастотная функция когерентности.

Интенсивность  $P(t)$  импульса на выходе определяется выражением

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \Gamma_0 \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (15.80)$$

где  $\Gamma_0$  — значение  $\Gamma$  при  $t_1 = t_2$ .

Во многих практических ситуациях двухчастотная функция когерентности есть медленно меняющаяся функция  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$  и  $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , поэтому можно считать, что  $\Gamma$  является функцией только от  $t_d$  и  $\omega_d$ . В этом случае говорят о стационарном в широком смысле некоррелированном рассеянии. При этом (15.80) можно выразить в виде свертки, содержащей интенсивность на входе  $I_i(t)$ :

$$I_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (15.81)$$

и функцию отклика  $G(t)$  на входной дельта-импульс.

Для того чтобы найти функцию отклика  $G(t)$ , положив сначала в (15.81)  $I_i(t) = \delta(t)$ , получим

$$\int d\omega_c U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) = \frac{1}{2\pi}. \quad (15.82)$$

Подставляя это соотношение в (15.80), находим

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega_d \Gamma_0(\omega_d) \exp(-i\omega_d t). \quad (15.83)$$

Для интенсивности  $I_i(t)$  общего вида из (15.81) можно получить

$$\int d\omega_c U_i(\omega_1) \dot{U}_i^*(\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int I_i(t) \exp(i\omega_d t) dt. \quad (15.84)$$

Подставляя это выражение в (15.80) и используя (15.83), получаем свертку

$$I(t) = \int G(t-t') I_i(t') dt'. \quad (15.85)$$

Отсюда видно, что отклик на произвольный импульсный входной сигнал легко получить, если известна функция отклика  $G(t)$ , даваемая выражением (15.83).

Полная мощность импульса на выходе  $E_o$  дается выражением

$$E_o = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt. \quad (15.86)$$

Используя (15.83), получаем

$$E_o = \Gamma_0(\omega_d = 0) E_i, \quad E_i = \int_{-\infty}^{\infty} I_i(t) dt. \quad (15.87)$$

Из (15.87) видно, что  $\Gamma_0$  при  $\omega_d = 0$  дает отношение полной мощности на выходе к полной мощности на входе. Например, для плоской волны  $\Gamma_0(\omega_d = 0)$  должно быть равно единице, если отсутствует поглощение, а обратное рассеяние не учитывается.

## 15.9 Интегральные и дифференциальные уравнения для двухчастотной функции взаимной когерентности

В предыдущем разделе мы дали краткую сводку общих результатов для распространения импульсов в среде со случайными неоднородностями. При этом ключевым вопросом является вычисление двухчастотной функции взаимной когерентности  $\Gamma$ . Интегральное уравнение для  $\Gamma$  можно получить, следуя подходу, развитому в разд. 14.8 и 14.9.

Запишем  $\Gamma$  в виде суммы когерентной части  $\Gamma_c$  и некогерентной части  $\Gamma_i$ :

$$\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_i. \quad (15.88)$$

Когерентная часть  $\Gamma_c$  определяется выражением

$$\Gamma_c = \langle H(\omega_1, \mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle H^*(\omega_2, \mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (15.89)$$

где  $H(\omega, \mathbf{r}, t)$  — значение поля в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  для случая, когда на входе имеется гармонический сигнал, пропор-

циональный  $\exp(-i\omega t)$  (разд. 5.1). Когерентное поле  $\langle H \rangle$  удовлетворяет волновому уравнению

$$(\nabla^2 + K_l^2)\langle H_l \rangle = 0, \quad l = 1, 2,$$

$$K_l = k_l + [2\pi\rho f_l(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})]/k_l, \quad \langle H_l \rangle = \langle H(\omega_l, \mathbf{r}, t_l) \rangle. \quad (15.90)$$

Для того чтобы найти  $\Gamma_i$ , определим сначала обобщенную лучевую интенсивность  $I$ :

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) =$$

$$= \int I(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}_c, \hat{\mathbf{s}}, t_1, t_2) \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}_d) d\Omega, \quad (15.91)$$

где  $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ ,  $\mathbf{r}_d = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,  $K_r = \text{Re} \frac{1}{2}(K_1 + K_2^*)$ , а  $d\Omega$  — элемент телесного угла для направления, определяемого единичным вектором  $\hat{\mathbf{s}}$ . Будем считать, что скорость частиц  $\mathbf{V}$  много

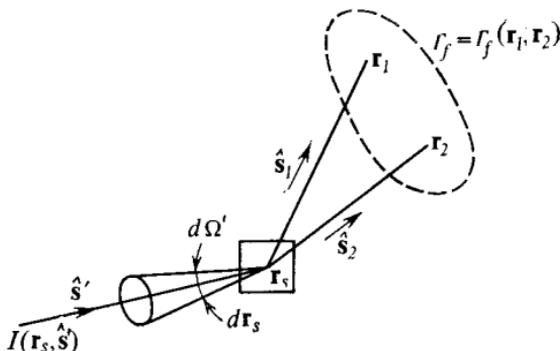


Рис. 15.6. Величины, входящие в выражение (15.92).

меньше скорости распространения волны. Следуя методу разд. 14.8, получим [176, 186]

$$\Gamma_i = \int \rho d\mathbf{r}_s \{ [\exp(iK_1 R_1 - iK_2^* R_2)] / R_1 R_2 \} \times \\ \times \int d\Omega' f_1 f_2 \exp(iK_r \hat{\mathbf{s}}' \cdot \mathbf{V} t_d), \quad (15.92)$$

где

$$R_1 = \left| \mathbf{r}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{V} t_d - \mathbf{r}_s \right|, \quad R_2 = \left| \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{V} t_d - \mathbf{r}_s \right|, \quad t_d = t_1 - t_2,$$

$$f_1 = f_1(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}'), \quad f_2 = f_2(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}'), \quad I = I(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{s}}', t_1, t_2),$$

$d\Omega'$  — элемент телесного угла в направлении  $\hat{\mathbf{s}}'$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_2$  — единичные векторы направлений  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s$  соответственно (рис. 15.6).

Выражения (15.88)–(15.92) дают основное интегральное уравнение для двухчастотной функции взаимной когерентности  $\Gamma$ .

Общее решение этого уравнения неизвестно. Однако можно получить более простое приближенное дифференциальное уравнение, справедливое для случая, когда размеры частиц сравнимы с длиной волны или больше ее. В этом случае волны рассеиваются главным образом в направлении вперед, и можно использовать малоугловое приближение (разд. 15.2).

Дифференциальное уравнение для двухчастотной функции взаимной когерентности  $\Gamma$  в двух точках  $(\rho_1, z)$  и  $(\rho_2, z)$ , в поперечной плоскости ( $z_1 = z_2 = z$ ) и в два момента времени  $t_1$  и  $t_2$  можно получить, используя параболическое приближение для  $\exp(iK_1 R_1)/R_1$  и считая, что амплитуда рассеяния  $f$  зависит только от  $s - s'$ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{K_{r1}} \nabla_1^2 - \frac{1}{K_{r2}} \nabla_2^2 \right] - i(K_1 - K_2^*) - P(\rho_d - \mathbf{V}t_d) \right\} \Gamma = 0, \quad (15.93)$$

где

$$P(\rho_d) = \int \rho_n f_1(\mathbf{s}) f_2^*(\mathbf{s}) \exp(-iK_r \mathbf{s} \cdot \rho_d) d\mathbf{s},$$

$$K_1 = k_1 + \frac{2\pi\rho_n f_1(0)}{k_1}, \quad K_2 = k_2 + \frac{2\pi\rho_n f_2(0)}{k_2},$$

$$K_{r1} = \text{Re}(K_1), \quad K_{r2} = \text{Re}(K_2), \quad \rho_d = \rho_1 - \rho_2, \quad t_d = t_1 - t_2,$$

$f_1(\mathbf{s})$  — амплитуда рассеяния одиночной частицы для частоты  $\omega_1$  в направлении  $(\theta, \phi)$  при падении волны в направлении  $(\theta = 0, \phi = 0)$ , а  $\mathbf{s} = \hat{l}\mathbf{x} + m\hat{y} = \sin\theta \cos\phi\hat{x} + \sin\theta \sin\phi\hat{y}$ . Аналогично  $f_2(\mathbf{s})$  — амплитуда рассеяния для частоты  $\omega_2$ . Операторы  $\nabla_1^2$  и  $\nabla_2^2$  — двумерные лапласианы по координатам  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. Концентрация частиц обозначена через  $\rho_n$ , чтобы избежать путаницы с радиальным вектором  $\rho$ .

Уравнение (15.93) есть основное дифференциальное уравнение в малоугловом приближении.

### 15.10. Двухчастотная функция взаимной когерентности для случая плоской волны

Уравнение (15.93) было решено точно для случая  $\omega_1 = \omega_2$ . Однако аналитическое решение для случая  $\omega_1 \neq \omega_2$  не найдено. В данном разделе мы проанализируем специальный случай распространения плоской волны в направлении  $z$ .

Для случая плоской волны  $\Gamma$  не зависит от  $\rho_c = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$  и (15.93) принимает вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{K_{r1} - K_{r2}}{2K_{r1}K_{r2}} \nabla_d^2 - i(K_1 - K_2^*) - P(\rho_d - \mathbf{V}t_d) \right] \Gamma = 0, \quad (15.94)$$

где  $\nabla_d^2$  — лапласиан по координатам  $\rho_d$ .

Для большинства практических случаев различие между  $K_r$  и  $k$  весьма незначительно, а разность частот  $\omega_1 - \omega_2$  много меньше несущей частоты  $\omega_0$ . Поэтому можно использовать приближения

$$K_{r1} \approx k_1, \quad K_{r2} \approx k_2, \quad K_{r1}K_{r2} \approx k_1k_2 \approx k^2, \quad (15.95)$$

где  $k = \omega_0/c$ .

Заметим также, что в случае больших частиц амплитуда рассеяния  $f$  приближенно пропорциональна  $k$ . Фактически, как показано в (6.21), для  $a_0 \gg \lambda$  (где  $a_0$  — радиус частиц) имеем

$$f(0) = \frac{ia_0}{\sin \theta} J_1(ka \sin \theta) \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2} (ika_0^2). \quad (15.96)$$

Поскольку отношение  $f/k$  почти не зависит от  $k$ , можно записать

$$i(K_1 - K_2^*) = i(K_{r1} - K_{r2}) - \rho_n \sigma_t \approx i(k_1 - k_2) - \rho_n \sigma_t, \quad (15.97)$$

где полное сечение  $\sigma_t$  берется на несущей частоте.

При вычислении функции  $P(\rho_d)$  можно использовать аппроксимацию

$$f_1(\mathbf{s}) f_2^*(\mathbf{s}) \approx (1 - k_d^2/4k^2) |f(\mathbf{s})|^2, \quad (15.98)$$

где  $k_d = k_1 - k_2$ , а  $f(\mathbf{s})$  берется на частоте  $\omega_0$ . Величину  $|f|^2$  можно аппроксимировать гауссовой функцией [см. (6.20)]:

$$|f(\mathbf{s})|^2 = \frac{\alpha_p}{\pi} \sigma_s \exp(-\alpha_p s^2), \quad (15.99)$$

где  $\sigma_s$  — сечение рассеяния, взятое на частоте  $\omega_0$ ,  $\alpha_p = 2,77/\theta_{pb}^2$ , а  $\theta_{pb}$  — угловая полуширина индикатрисы рассеяния отдельной частицы. Из (15.93) получаем

$$P(\rho_d) = \rho_n \sigma_s (1 - k_d^2/4k^2) \exp(-k^2 \rho_d^2/4\alpha_p) \approx \approx \rho_n \sigma_s \exp(-k^2 \rho_d^2/4\alpha_p). \quad (15.100)$$

Подставим теперь (15.95), (15.97) и (15.100) в (15.94). При этом запишем

$$\Gamma = \Gamma_1 \exp(ik_d z - \rho_n \sigma_d z). \quad (15.101)$$

В результате получим следующее уравнение для  $\Gamma_1$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + ia \nabla_d^2 + \rho_n \sigma_s - P(\rho_d) \right] \Gamma_1 = 0, \quad (15.102)$$

где  $a = k_d/2k^2$ . Граничное условие в случае падения плоской волны при  $z = 0$  есть

$$\Gamma_1 = 1 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (15.103)$$

Уравнения (15.101) и (15.102) вместе с граничным условием (15.103) дают полное математическое описание двухчастотной функции взаимной когерентности.

В общем случае решение (15.102) можно получить численно. Однако более поучительно найти приближенное аналитическое решение. Этим мы займемся в следующих разделах.

### 15.11. Распространение плоской импульсной волны в случае слабых флуктуаций

Рассмотрим волну на относительно короткой дистанции, когда когерентная интенсивность преобладает над некогерентной интенсивностью. Для этой области запишем

$$\Gamma_1 = \exp(\psi). \quad (15.104)$$

Подставляя это выражение в (15.102), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi + ia(\nabla_d^2 \psi + \nabla_d \psi \cdot \nabla_d \psi) + \rho_n \sigma_s - P(\rho_d) = 0. \quad (15.105)$$

Величина  $\psi$  есть четная функция от  $\rho_d$ , и  $\nabla_d^2 \psi$  в общем случае имеет максимум при  $\rho_d = 0$  и спадает к нулю при  $\rho_d \rightarrow \infty$ , в то время как  $|\nabla_d \psi|^2$  равно нулю вблизи  $\rho_d = 0$  и при  $\rho_d \rightarrow \infty$ . Поэтому можно ожидать (и это подтверждается численными расчетами), что на коротких расстояниях нелинейный член  $|\nabla_d \psi|^2$  будет много меньше, чем  $\nabla_d^2 \psi$ , и им можно пренебречь. Таким образом, приближенно имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi + ia\nabla_d^2 \psi + \rho_n \sigma_s - P(\rho_d) = 0. \quad (15.106)$$

Граничное условие для  $\psi$  имеет вид  $\psi(z=0) = 0$ . Уравнение (15.106) можно решить точно с помощью преобразования Фурье

$$\psi(z, \mathbf{s}) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \psi(z, \rho_d) \exp(iks \cdot \rho_d) d\rho_d, \quad (15.107)$$

где в соответствии с (15.95) мы положили  $K_r \approx k$ . При этом получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi - iak^2 s^2 \psi + \rho_n \sigma_s k^2 \delta(ks) - \rho_n f_1(\mathbf{s}) f_2^*(\mathbf{s}) = 0. \quad (15.108)$$

Это уравнение легко решается, что дает

$$\begin{aligned} \psi(z, \rho_d) = & -\rho_n \sigma_s z + \int ds \exp(-iks \cdot \rho_d) \times \\ & \times \rho_n f_1(\mathbf{s}) f_2(\mathbf{s}) \int_0^z dz' \exp(iak^2 s^2 z'). \end{aligned} \quad (15.109)$$

Двухчастотная функция взаимной когерентности (15.101) с учетом (15.100), (15.104) и (15.109) записывается в виде [186]

$$\begin{aligned} \Gamma(z, \rho_d = 0, \omega_d) &= A(z, \omega_d) \exp[ik_d z + i\phi(z, \omega_d)], \\ A(z, \omega_d) &= \exp\{-\rho_n \sigma_t z [1 - (W_0/x) \operatorname{arctg} x]\}, \\ \phi(z, \omega_d) &= (\rho_n \sigma_t z / 2) [(W_0/x) \ln(1 + x^2)], \end{aligned} \quad (15.110)$$

где

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{\sigma_s}{\sigma_t} = \text{альбе́до одиночной частицы}, \\ x &= k_d z / 2\alpha_p = \omega_d / \omega_r, \quad \omega_r = 2\alpha_p c / z, \quad k_d = \omega_d / c. \end{aligned}$$

Выражение (15.110) можно использовать в случае, когда оптическая длина меньше примерно трех. Если же оптическая длина много больше единицы, то пренебрегать нелинейным членом

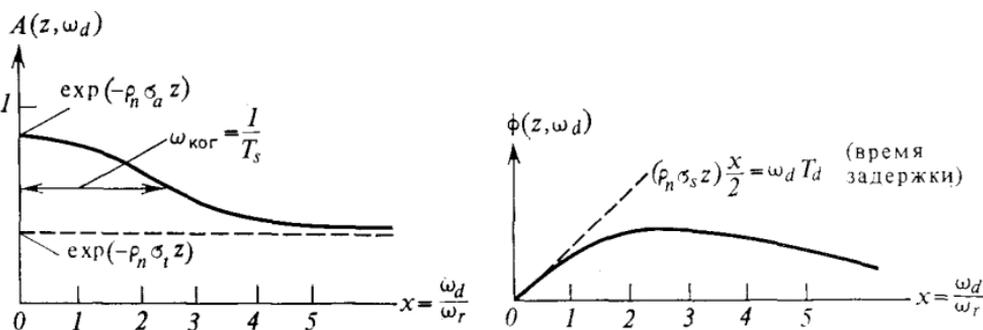


Рис. 15.7. Амплитуда  $A(z, \omega_d)$  и фаза  $\phi(z, \omega_d)$  двухчастотной функции взаимной когерентности в случае слабых флуктуаций.

в (15.105) нельзя, и нужно использовать какие-либо другие подходы. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

Проанализируем теперь решение (15.110). Общий характер поведения амплитуды  $A(z, \omega_d)$  и фазы  $\phi(z, \omega_d)$  изображен на рис. 15.7. Заметим, что при  $\omega_d \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow \exp(-\rho_n \sigma_t z)$ , а  $\phi \rightarrow 0$ . Эти предельные значения соответствуют когерентной части  $\Gamma_c$ . Запишем

$$\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_i, \quad \Gamma_c = \exp(-\rho_n \sigma_t z). \quad (15.111)$$

Тогда  $\Gamma_i \rightarrow 0$  при  $\omega_d \rightarrow \infty$ . Ширину полосы когерентности  $\omega_{\text{ког}}$  (рис. 15.7) для некогерентной части  $\Gamma_i$  можно аппроксимировать, используя разложение  $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + \dots$ . В результате получаем

$$\omega_{\text{ког}} \approx [3/\rho_n \sigma_s z]^{1/2}, \quad \omega_r = [3/\rho_n \sigma_s]^{1/2} (2\alpha_p c / z^{3/2}), \quad (15.112)$$

где величина  $\rho_n \sigma_s z$  порядка единицы. Если  $\rho_n \sigma_s z$  много меньше единицы, то ширина полосы  $\omega_{\text{ког}}$  аппроксимируется выражением

$$\omega_{\text{ког}} \approx 5\omega_r = 10\alpha_p c / z. \quad (15.113)$$

Величина, обратная ширине полосы  $\omega_{\text{ког}}$ , описывает временное уширение импульса:

$$T_s = \frac{1}{\omega_{\text{ког}}}. \quad (15.114)$$

На рис. 15.7 показано также поведение фазы как функции  $x = \omega_d/\omega_r$ . При малых  $x$  фаза  $\phi(z, \omega_d)$  есть  $(\rho_n \sigma_s z)(x/2)$ . Эта линейная часть фазы описывает время задержки импульса  $T_d$ :

$$T_d = \rho_n \sigma_s z / 2\omega_r = \rho_n \sigma_s z^2 / 4\alpha_p c. \quad (15.115)$$

При  $\omega_d = 0$   $\Gamma = \exp(-\rho_n \sigma_a z)$ , что согласуется с условием сохранения энергии (15.87).

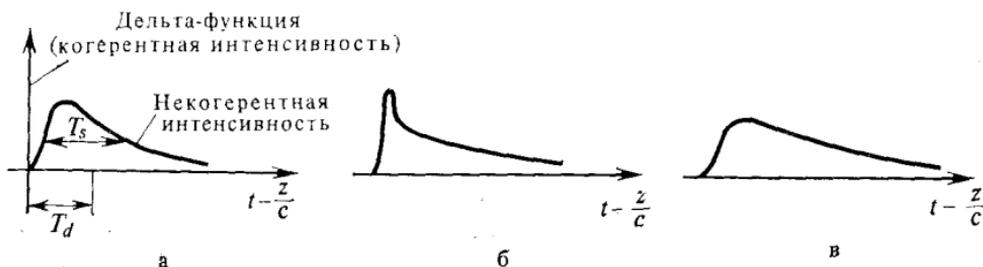


Рис. 15.8. *а* — импульсный отклик, состоящий из когерентной (дельта-функция) и некогерентной частей. *б* — если ширина входного импульса меньше величины, обратной ширине полосы когерентности, то когерентную интенсивность все еще можно отличить от некогерентной интенсивности. *в* — если ширина входного импульса больше величины, обратной ширине полосы когерентности, то когерентная и некогерентная интенсивности неразличимы.

Интенсивность импульса на выходе  $I(t)$  дается сверткой (15.85), где функция импульсного отклика  $G(t)$  дается преобразованием Фурье (15.83):

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, \omega_d) \exp \left[ i \phi(z, \omega_d) - i \omega_d \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] d\omega_d. \quad (15.116)$$

Общий вид формы импульсного отклика показан на рис. 15.8, *а*. Заметим, что импульсный отклик состоит из когерентной (дельта-функция) и некогерентной частей. Некогерентная часть характеризуется временем задержки  $T_d$  и временем уширения  $T_s$ . Если входной импульс короче, чем  $T_s$ , то когерентная часть выходного импульса почти совпадает по форме с входным импульсом, а некогерентная часть уширяется (рис. 15.8, *б*). Если длительность входного импульса больше  $T_s$ , то форма выходного импульса близка к форме входного (рис. 15.8, *в*).

## 15.12. Распространение плоской импульсной волны в случае сильных флуктуаций

Как указывалось в предыдущем разделе, если оптическая длина  $\rho_n \sigma_i z$  много больше единицы, то в (15.105) нелинейный член отбрасывать нельзя. При этом нужно вернуться к уравнению (15.102). Используя (15.100), запишем (15.102) в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + ia \nabla_d^2 + \rho_n \sigma_s [1 - \exp(k^2 \rho_d^2 / 4\alpha_p)] \right\} \Gamma_1 = 0. \quad (15.117)$$

Можно показать [176, 230, 231, 314], что если оптическая длина  $\rho_n \sigma_i z$  много больше единицы, то некогерентная часть  $\Gamma_{1i}$  преобладает над когерентной частью  $\Gamma_{1c}$  и удовлетворяет следующему уравнению, которое получается, если экспоненту в (15.117) разложить в ряд, удержав первые два члена:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + ia \nabla_d^2 + b \rho_d^2 \right) \Gamma_{1i} = 0, \quad (15.118)$$

где  $a = k_d / 2k^2$  и  $b = \rho_n \sigma_s k^2 / 4\alpha_p$ .

Перейдем в (15.118) к безразмерным координатам, полагая

$$z/L = z', \quad \rho_d / \rho_0 = \rho'_d, \quad (15.119)$$

где  $L$  — длина распространения ( $0 \leq z' \leq 1$ ). Величина  $\rho_0$  выбирается так, чтобы уравнение (15.118) приняло вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z'} + i(\omega_d / \omega_{\text{ког}}) \nabla_{d'}^2 + \rho'^2_d \right] \Gamma_{1i} = 0. \quad (15.120)$$

Для получения (15.120) положим

$$\rho_0 = (4\alpha_p / \rho_n \sigma_s z k^2)^{1/2}, \quad (15.121)$$

$$\omega_{\text{ког}} = 8\alpha_p c / \rho_n \sigma_s z^2. \quad (15.122)$$

Радиус  $\rho_0$  совпадает с радиусом корреляции (15.39).

Уравнение (15.120) можно решить точно следующим способом [321]. Предположим, что  $\Gamma_{1i}$  имеет вид

$$\Gamma_{1i} = [f(z')]^{-1} \exp[g(z') \rho'^2_d], \quad (15.123)$$

где  $f(z)$  и  $g(z)$  есть функции только от  $z$ . Подставляя это выражение в (15.120), получим

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z'} + i4\alpha g + \left[ \frac{\partial g}{\partial z'} + i4\alpha g^2 + 1 \right] \rho'^2_d = 0, \quad (15.124)$$

где  $\alpha = \omega_d / \omega_{\text{ког}}$ . Мы замечаем, что первые два члена зависят только от  $z$  и не зависят от  $\rho'_d$ . Поэтому потребуем выполнения

условий

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z'} + i4\alpha g = 0, \quad (15.125)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z'} + i4\alpha g^2 + 1 = 0. \quad (15.126)$$

Граничные условия для этих уравнений имеют вид

$$g(z') = 0, \quad (15.127)$$

$$f(z') = 1 \quad (15.128)$$

при  $z' = 0$ .

Уравнение (15.126) есть уравнение Риккати; оно легко решается с учетом (15.127):

$$g(z') = -\frac{\operatorname{tg} [(i4\alpha)^{1/2} z']}{(i4\alpha)^{1/2}}. \quad (15.129)$$

Используя это выражение, из (15.125) можно найти  $f$ :

$$f(z') = \cos [(i4\alpha)^{1/2} z']. \quad (15.130)$$

Окончательно решение для  $z' = 1$  выражается в виде

$$\Gamma_{1i} = \frac{1}{\cos (i4\alpha)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{\operatorname{tg} (i4\alpha)^{1/2}}{(i4\alpha)^{1/2}} \rho_d'^2 \right], \quad (15.131)$$

где  $\alpha = \omega_d / \omega_{\text{кор}}$ . Это решение для случая  $\rho_d = 0$  приведено на рис. 15.9.

Выражение (15.131) представляет собой точное выражение для двухчастотной функции взаимной когерентности, удовлетворяющей уравнению (15.120). Рассмотрим теперь случай импульсной волны. Функция импульсного отклика  $G(t)$  имеет вид

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ -i\omega_d \left( t - \frac{z}{c} \right) \right]}{\cos (i4\alpha)^{1/2}} d\omega_d = \frac{\omega_{\text{кор}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (-i\alpha T)}{\cos (i4\alpha)^{1/2}} d\alpha, \quad (15.132)$$

где  $T = \omega_{\text{кор}}(t - z/c)$ .

Рассмотрим подынтегральное выражение в (15.132). Поскольку косинус — четная функция, подынтегральное выражение не имеет в плоскости комплексного  $\alpha$  точек ветвления. Полюсы этого выражения  $\alpha = \alpha_n$  определяются из условия

$$(i4\alpha)^{1/2} = (2n + 1)(\pi/2), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.133)$$

Таким образом, имеется ряд полюсов двойной кратности

$$\alpha_n = \frac{[(2n + 1)(\pi/2)]^2}{4i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15.134)$$

поскольку полюсы при  $n = -1, -2, \dots$  совпадают с полюсами при  $n = 0, 1, \dots$

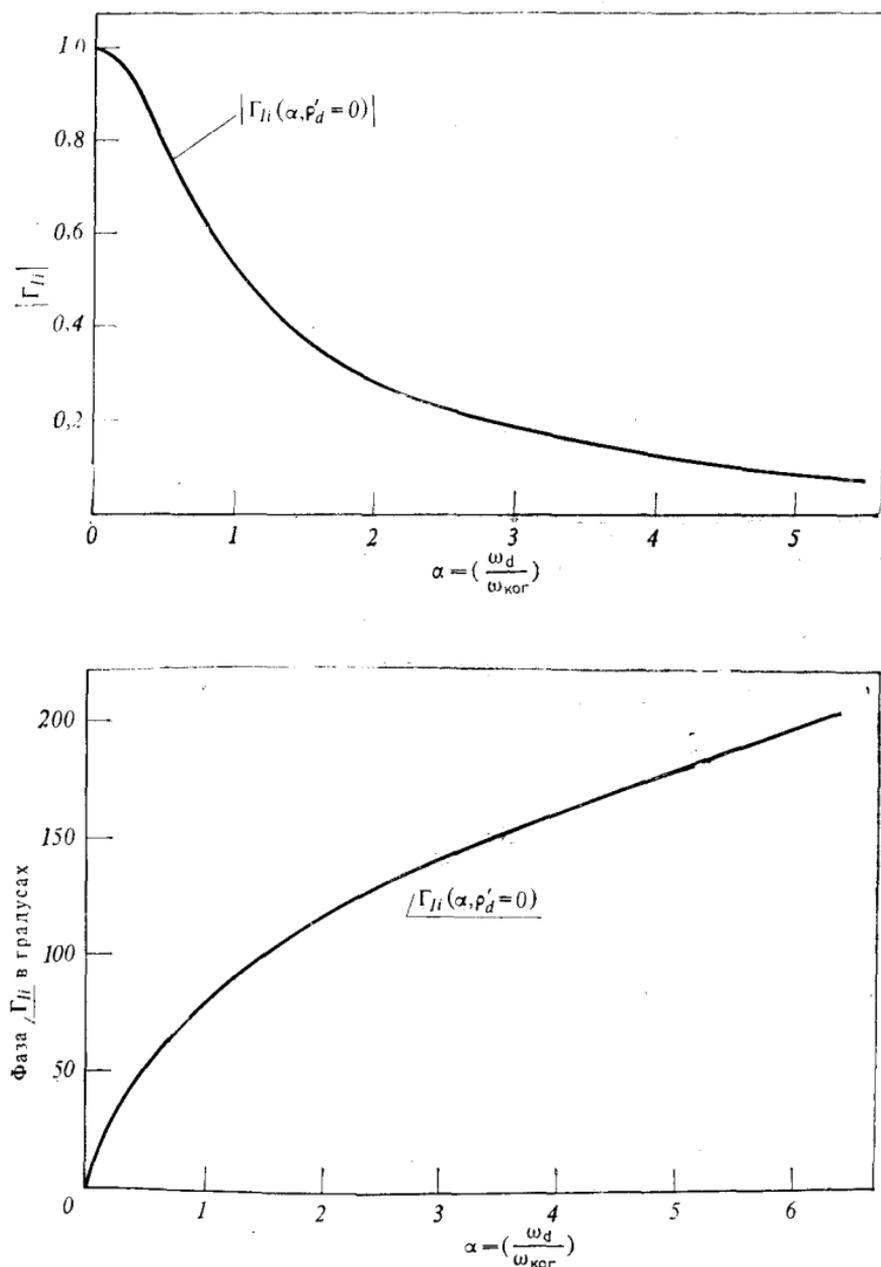


Рис. 15.9. Общий вид двухчастотной функции взаимной когерентности в зависимости от отношения  $\omega_d/\omega_{кор}$  в случае сильных флуктуаций.

Все эти полюсы лежат в нижней полуплоскости комплексного  $\alpha$  на мнимой оси. Поэтому для  $t - z/c < 0$  контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости, что, как и следовало ожидать, дает нуль:

$$G(t) = 0 \quad \text{при} \quad t - z/c < 0. \quad (15.135)$$

Для случая  $t - z/c > 0$  контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости и получить для интеграла выражение

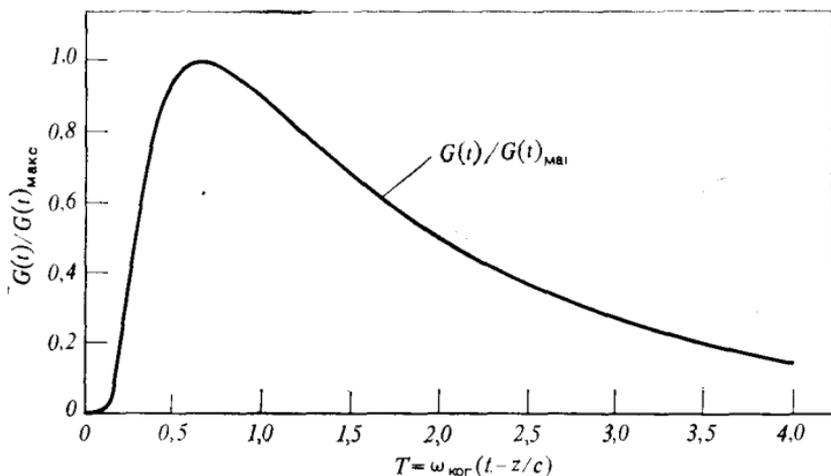


Рис. 15.10. Общий вид импульсного отклика.

в виде ряда вычетов в полюсах подынтегрального выражения. При этом

$$G(t) = -2\pi i \sum_{n \neq 0}^{\infty} \text{вычетов}. \quad (15.136)$$

Вычисление вычетов не представляет затруднений и приводит к выражению

$$G(t) = \left[ \frac{\pi \omega_{\text{кор}}}{4} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n \exp \left\{ - \left[ (2n+1) \frac{\pi}{4} \right]^2 T \right\}, \quad (15.137)$$

где  $T = \omega_{\text{кор}}(t - z/c)$ . Функция импульсного отклика  $G(t)$  (15.137) показана на рис. 15.10.

Заметим, что приведенные на рис. 15.9 и 15.10 графики имеют универсальный вид и применимы ко многим физическим ситуациям. Параметр  $\omega_{\text{кор}}$  (15.122) определяет ширину полосы когерентности. Это выражение нужно сравнить с (15.113) и (15.112).

В итоге можно записать следующие выражения для ширины полосы когерентности:

$$\omega_{\text{ког}} \approx \begin{cases} \frac{10\alpha_p c}{z} & \text{при } \rho_n \sigma_s z < 1, \\ \left[ \frac{3}{\rho_n \sigma_s z} \right]^{1/2} \frac{2\alpha_p c}{z} & \text{при } \rho_n \sigma_s z \sim 1, \end{cases} \quad (15.138)$$

$$\omega_{\text{ког}} = \frac{8\alpha_p c}{\rho_n \sigma_s z} \quad \text{при } \rho_n \sigma_s z \gg 1.$$

Время задержки  $T_d$  для случая слабых флуктуаций дается выражением (15.115). Из рис. 15.9 ясно, что выражение

$$T_d = \rho_n \sigma_s z^2 / 4\alpha_p c \quad (15.139)$$

остается применимым и в случае сильных флуктуаций, причем максимальное значение достигается примерно при  $1/4 T_d$ .

Проведенный в данном и предыдущем разделах анализ применим к случаю распространения миллиметровых и оптических импульсов в дожде и тумане. Рассмотрим, например, короткий оптический импульс при длине волны  $\lambda = 0,6943$  мкм (рубиновый лазер) с длительностью порядка наносекунд в случае типичного тумана ( $\rho_n = 10^8$  м<sup>-3</sup>, средний диаметр  $D = 9$  мкм; см. разд. 3.2.2). Используя приближения  $\alpha_p = 2,66 (D/\lambda)^2$  и  $\sigma_s \approx \sigma_t \approx 2\pi(D/2)^2$ , из (15.138) получим следующее выражение для ширины полосы когерентности  $\omega_{\text{ког}}$ :

$$\omega_{\text{ког}} = 8\alpha_p c / \rho_n \sigma_s z^2 = (8,43 \cdot 10^{13}) / z^2,$$

где  $\rho_n \sigma_s z \gg 1$ . Например, при  $z = 5$  км имеем  $\omega_{\text{ког}} = 3,37 \cdot 10^6$ , и уширение импульсного отклика равно 0,3 мкс. Экспериментальные данные подтверждают этот вывод [59, 186].

Математическое описание и методика, рассмотренные в данном разделе, применимы также к случаю распространения импульсов в турбулентной среде (гл. 20) и использовались при изучении уширения импульсов от пульсаров.

# IV Волны в случайной сплошной среде и турбулентность

---

## Глава 16

### Рассеяние волн в случайной сплошной среде и турбулентные среды

Случайные среды можно подразделить на случайные дискретные рассеиватели, случайные сплошные среды и шероховатые поверхности. Гл. 12—15 были посвящены проблеме распространения и рассеяния волн в облаке случайных рассеивателей. В гл. 16—20 мы рассмотрим задачу о распространении и рассеянии волн в случайной сплошной среде.

В этой книге случайная сплошная среда определяется как среда, диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  представляет собой непрерывную случайную функцию пространственных координат и времени. Примерами такой среды являются турбулентность атмосферы и океана и биологические среды.

Рассматриваемую задачу удобно разбить на две части: рассеяние волн и распространение волн в пределах прямой видимости. Данная глава посвящена задаче о рассеянии, а последующие главы относятся к задаче о распространении в пределах прямой видимости.

В данной главе приводится общее выражение для рассеянной мощности в приближении однократного рассеяния [24—26, 29, 39—43, 105, 263, 264, 284, 315, 317, 322, 323, 362, 376, 377]. Оно применимо для многих практических задач, таких, как тропосферная загоризонтная связь, рассеяние на турбулентных следах и факелах самолетов и ракет, а также исследование турбулентности прозрачного воздуха [279]. Временные изменения свойств среды приводят к изменениям во времени рассеянного поля. Этот вопрос рассматривается в данной главе наряду с рассеянием импульса в случайной среде.

### 16.1. Приближение однократного рассеяния и принимаемая мощность

Рассмотрим случайную среду, облучаемую излучателем. Излучаемая волна частично рассеивается случайными неоднородностями среды, и эта рассеянная волна регистрируется приемником (рис. 16.1). Найдем связь между принимаемой мощностью и характеристиками случайной среды.

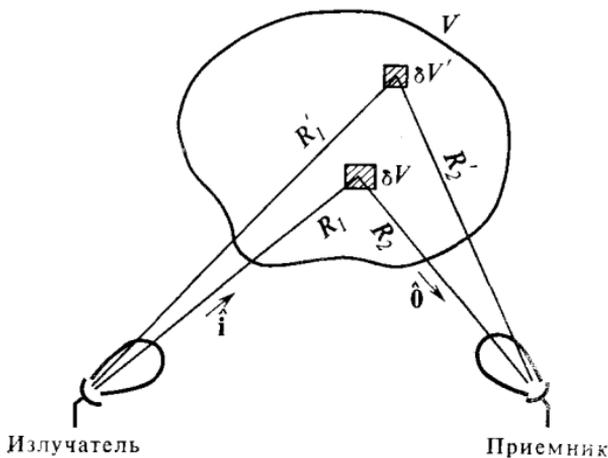


Рис. 16.1. Расположение излучателя, приемника и случайной среды.

Рассмотрим элемент объема  $\delta V$  в случайной среде. Предположим, что флуктуации свойств среды настолько слабы, что падающая на объем  $\delta V$  волна почти не отличается от падающей волны в отсутствие случайной среды. Если мощность, рассеянную объемом случайной среды  $\delta V$ , можно выразить через эквивалентное сечение рассеяния единицы объема  $\sigma(\hat{\theta}, \hat{i})$ , то принимаемая мощность  $P_r$  будет определяться уравнением радиолокации (разд. 4.1)

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2 G_t(\hat{i}) G_r(\hat{\theta})}{(4\pi)^2 R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\theta}, \hat{i}) \delta V, \quad (16.1)$$

где  $P_t$  — излучаемая мощность, а  $G_t$  и  $G_r$  — коэффициенты усиления передатчика и приемника в направлениях  $\hat{i}$  и  $-\hat{\theta}$  соответственно.

Элемент объема  $\delta V$  выбирается достаточно малым, чтобы падающую волну в пределах  $\delta V$  можно было считать плоской<sup>1)</sup>. В то же время объем  $\delta V$  необходимо брать достаточно большим,

<sup>1)</sup> Для этого необходимо, чтобы  $D$  было мало по сравнению с размером зоны Френеля  $(\lambda R_1)^{1/2}$ .

чтобы его размер  $D$  ( $\delta V \sim D^3$ ) был много больше радиуса корреляции среды. При этом предположении поля, рассеянные различными элементами объема  $\delta V$  и  $\delta V'$  (рис. 16.1), не коррелированы между собой, и поэтому нужно складывать не рассеянные поля, а мощности, рассеянные каждым из элементов объема. Тогда для полной принимаемой мощности имеем

$$\frac{P_r}{P_t} = \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^2 R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) dV. \quad (16.2)$$

Отсюда ясно, что задача сводится к нахождению сечения рассеяния единицы объема  $\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$  случайной среды. В следующем разделе мы рассмотрим эту задачу.

## 16.2. Сечение рассеяния единицы объема стационарной случайной среды

Рассмотрим случайную среду в элементе объема  $\delta V$ . Она характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ , являющейся случайной функцией времени и координат<sup>1)</sup>. Запишем ее в виде суммы среднего значения  $\langle \epsilon \rangle$  и флуктуаций:

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \langle \epsilon(\mathbf{r}, t) \rangle [1 + \epsilon_1(\mathbf{r}, t)], \quad (16.3)$$

где  $\epsilon_1$  — флуктуации с нулевым средним значением:

$$\langle \epsilon_1 \rangle = 0, \quad (16.4)$$

а угловые скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение по ансамблю. При этом показатель преломления можно записать в виде

$$n(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0} = \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle [1 + n_1(\mathbf{r}, t)], \quad (16.5)$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума, а  $n_1$  — флуктуации. В случае малых флуктуаций приближенно имеем

$$\epsilon_1(\mathbf{r}, t) \approx 2n_1(\mathbf{r}, t). \quad (16.6)$$

В данном разделе мы будем предполагать, что диэлектрическая проницаемость остается постоянной в течение времени наблюдения, так что ее можно считать не зависящей от времени. Кроме того, будем считать, что средняя диэлектрическая проницаемость постоянна и совпадает с диэлектрической проницаемостью вакуума:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 [1 + \epsilon_1(\mathbf{r})], \quad n(\mathbf{r}) = 1 + n_1(\mathbf{r}). \quad (16.7)$$

<sup>1)</sup> Более точное определение меняющейся во времени случайной диэлектрической проницаемости дано в разд. 16.6.

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну единичной амплитуды, падающую на элемент объема  $\delta V$  случайной среды (рис. 16.2).

Следуя процедуре, аналогичной той, которая описана в разд. 2.4 [выражение (2.20)], находим рассеянное в направлении  $\hat{\theta}$  поле  $\mathbf{E}_s$  на расстоянии  $R$  от начальной точки  $Q_0$ :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}}) [\exp(ikR)]/R,$$

$$\mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{\delta V} \{ -\hat{\theta} \times [\hat{\theta} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \} \epsilon_1(\mathbf{r}') \exp(-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\theta}) dV', \quad (16.8)$$

где  $\mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}})$  — амплитуда рассеяния, а  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$  — полное поле в точке  $\mathbf{r}'$  при единичной амплитуде падающей волны.

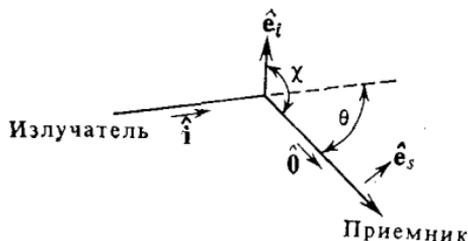
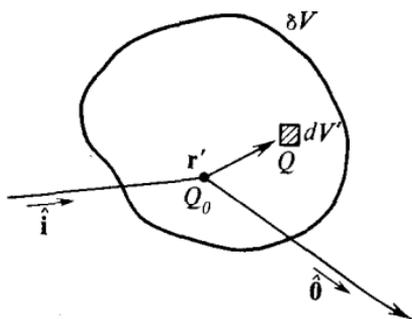


Рис. 16.2. Рассеивающий объем  $\delta V$ , освещаемый плоской волной, падающей в направлении  $\hat{\mathbf{i}}$ . Рассеянное поле наблюдается в направлении  $\hat{\theta}$ .

Рис. 16.3. Векторы и углы, входящие в (16.9).

Принимая флуктуации  $\epsilon_1$  малыми, воспользуемся борновским приближением, в соответствии с которым поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$  совпадает с полем падающей волны  $\hat{\mathbf{e}}_i \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}')$ , где  $\hat{\mathbf{e}}_i$  — единичный вектор, описывающий поляризацию. Тогда получим

$$\mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}}) = \hat{\mathbf{e}}_s \sin \chi \frac{k^2}{4\pi} \int_{\delta V} \epsilon_1(\mathbf{r}') \exp(ik_s \cdot \mathbf{r}') dV', \quad (16.9a)$$

где  $\hat{\mathbf{e}}_s \sin \chi = -\hat{\theta} \times (\hat{\theta} \times \hat{\mathbf{e}}_i)$ , а  $\chi$  — угол между направлением поляризации  $\hat{\mathbf{e}}_i$  падающей волны и направлением наблюдения  $\hat{\theta}$  (рис. 16.3). Вектор  $\mathbf{k}_s$  определяется как

$$\mathbf{k}_s = k(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\theta}), \quad k_s = 2k \sin(\theta/2). \quad (16.9б)$$

Следовательно, дифференциальное сечение рассеяния единицы объема среды в соответствии с (2.4) есть

$$\sigma(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}}) = |\mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}})|^2 / \delta V. \quad (16.10a)$$

Заметим, однако, что  $\mathbf{f}$  — случайная функция, поскольку  $\varepsilon_1(\mathbf{r}')$  случайна. Поэтому в (16.10а) следует перейти к усредненным по ансамблю величинам:

$$\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = (1/\delta V) \langle \mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \rangle. \quad (16.10б)$$

Подставляя (16.9) в (16.10б), получаем

$$\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^4 \sin^2 \chi}{(4\pi)^2 \delta V} \int_{\delta V} \int_{\delta V} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}'_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}'_2) \rangle \exp[i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)] dV'_1 dV'_2, \quad (16.11)$$

где  $dV'_1$  и  $dV'_2$  — элементы объема в точках  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$  соответственно.

Если среда предполагается статистически однородной и изотропной [87, 122, 155, 327], то корреляционная функция  $\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}'_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}'_2) \rangle$  зависит только от абсолютного значения разности  $r_d = |\mathbf{r}_d| = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|$ :

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}'_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}'_2) \rangle = B_\varepsilon(r_d) = 4B_n(r_d), \quad \langle n_1(\mathbf{r}'_1) n_1(\mathbf{r}'_2) \rangle = B_n(r_d). \quad (16.12)$$

Рассмотрим интеграл, входящий в (16.11), пользуясь формулой (16.12):

$$\int_{\delta V} \int_{\delta V} B_n(r_d) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_d) dV'_1 dV'_2. \quad (16.13а)$$

Перейдем от переменных  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$  к разностной  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$  и суммарной  $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)$  переменным. Учитывая, что размер объема  $\delta V$  намного больше, чем радиус корреляции среды, а величина  $B_n(r_d)$  пренебрежимо мала при значениях  $r_d$  много больше радиуса корреляции, можно вместо (16.13а) записать

$$\int_{\delta V} dV_c \int_{\infty} dV_d B_n(r_d) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_d), \quad (16.13б)$$

где  $dV_c$  и  $dV_d$  — элементы объема для переменных  $\mathbf{r}_c$  и  $\mathbf{r}_d$  соответственно, а пределы интегрирования по  $\mathbf{r}_d$  взяты бесконечными.

Заметим теперь, что, согласно теореме Винера — Хинчина, фурье-образ корреляционной функции  $B_n(\mathbf{r}_d)$  представляет собой спектральную плотность  $\Phi_n(\mathbf{K})$ :

$$\Phi_n(K) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\infty} B_n(\mathbf{r}_d) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_d) dV_d. \quad (16.14а)$$

Следовательно, интеграл (16.13б) пропорционален фурье-образу  $B_n$ , взятому при  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_s$ . Отметим также, что, поскольку  $B_n$

зависит только от модуля  $r_d$ , функция  $\Phi_n$  тоже зависит только от длины вектора  $\mathbf{K}$ :

$$\Phi_n(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\infty} B_n(\mathbf{r}_d) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_d) dV_d. \quad (16.146)$$

Используя (16.136) и (16.146), из формулы (16.11) находим

$$\sigma(\mathbf{0}, \mathbf{i}) = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(k_s), \quad (16.15)$$

где  $k_s = 2k \sin(\theta/2)$ .

Выражение (16.15) представляет собой основное выражение для сечения рассеяния единицы объема случайной среды. Исследуем это выражение.

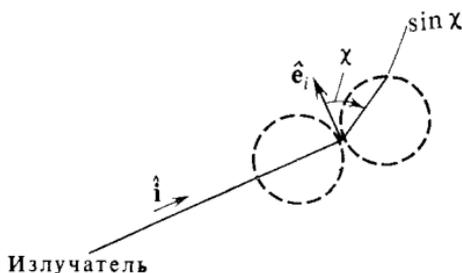


Рис. 16.4. Диаграмма направленности диполя, входящая в дифференциальное сечение рассеяния.

Во-первых, заметим, что множитель  $\sin^2 \chi$  соответствует диаграмме направленности диполя. Падающая волна создает в случайной среде эквивалентный дипольный излучатель с диаграммой вида  $\sin \chi$  (рис. 16.4).

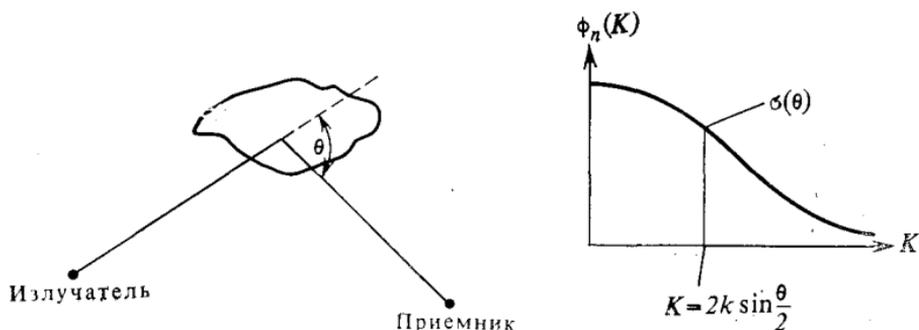


Рис. 16.5. Дифференциальное сечение рассеяния пропорционально спектральной плотности, вычисленной в точке  $2k \sin(\theta/2)$ .

Заметим также, что сечение рассеяния  $\sigma$  пропорционально спектральной плотности  $\Phi_n$  показателя преломления, взятой в точке  $k_s$ . Таким образом, если спектральная плотность известна, то сечение рассеяния в заданном направлении  $\theta$  определяется ее значением, взятым при  $k_s = 2k \sin(\theta/2)$  (рис. 16.5).

### 16.3. Формула Букера — Гордона

В формуле (16.15) сечение рассеяния  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  записано через спектральную плотность  $\Phi_n(k_s)$  флуктуаций показателя преломления. Для описания практических ситуаций имеется несколько моделей  $\Phi_n$ . Мы рассмотрим три наиболее важные из них: а) модель Букера — Гордона, б) гауссову модель и в) колмогоровский спектр.

Букер и Гордон [42, 43] предложили модель, основанную на предположении, что корреляционная функция является экспоненциальной:

$$B_n(r_d) = \langle n_1^2 \rangle \exp(-r_d/l). \quad (16.16)$$

В этой модели случайная среда характеризуется двумя величинами: дисперсией  $\langle n_1^2 \rangle$  и расстоянием  $l$ . Расстояние  $l$  называется

радиусом корреляции, поскольку в пределах этого расстояния корреляционная функция убывает в  $e$  раз по сравнению со своим значением при  $r_d = 0$ , и, следовательно, он указывает приблизительно интервал, внутри которого свойства среды коррелированы. Радиус корреляции  $l$  называют также масштабом турбулентности, так как он характеризует некоторый средний размер турбулентных образований, или вихрей. Отметим, что такой выбор корреляционной функции сделан не на основе анализа физических свойств среды, а из соображений простоты

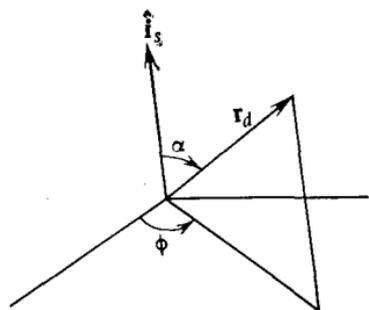


Рис. 16.6. Система координат, используемая в (16.14б) и (16.17).

математических выкладок. Что касается колмогоровского спектра, обсуждаемого ниже, то он опирается на фактические свойства турбулентности.

Найдем спектральную плотность  $\Phi_n(K)$ , воспользовавшись формулой (16.14б). Чтобы вычислить этот интеграл, удобно перейти к сферической системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_s = k_s \hat{\mathbf{i}}_s$  (рис. 16.6). Тогда имеем

$$\Phi_n(k_s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_n(r_d) \exp(-ik_s r_d \cos \alpha) r_d^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\phi \, dr_d. \quad (16.17)$$

Выполняя интегрирование по  $\alpha$  и  $\phi$ <sup>1)</sup>, получаем

$$\Phi_n(k_s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty B_n(r_d) 4\pi \frac{\sin k_s r_d}{k_s} r_d dr_d. \quad (16.18)$$

Подставив соотношение (16.16) в (16.18), найдем<sup>2)</sup>

$$\Phi_n(k_s) = \frac{\langle n_1^2 \rangle l^3}{[1 + (k_s l)^2]^2} \left( \frac{1}{\pi^2} \right). \quad (16.19)$$

Таким образом, сечение рассеяния  $\sigma$  дается выражением

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{k^4 l^3 \sin^2 \chi \langle n_1^2 \rangle}{[1 + 4k^2 l^2 \sin^2(\theta/2)]^2}. \quad (16.20)$$

Это основная формула Букера — Гордона, содержащая два параметра среды: дисперсию  $\langle n_1^2 \rangle$  и радиус корреляции  $l$ . Заметим, что если радиус корреляции мал по сравнению с длиной волны, т. е.  $k_s l \ll 1$ , то

$$\sigma(\theta) \approx (2/\pi) k^4 l^3 \sin^2 \chi \langle n_1^2 \rangle \quad (16.21)$$

и, следовательно, рассеяние изотропно, а сечение рассеяния обратно пропорционально  $\lambda^4$ . Этот случай соответствует рэлеевскому рассеянию и лежит в основе объяснения голубого цвета неба, данного Рэлеем [45].

Если радиус корреляции намного больше длины волны, как это обычно имеет место при тропосферном распространении, то

$$\sigma(\theta) \approx \frac{\sin^2 \chi \langle n_1^2 \rangle}{8\pi l \sin^4(\theta/2)}, \quad (16.22)$$

откуда видно, что  $\sigma$  не зависит от частоты, и рассеяние имеет острую направленность вперед.

Для тропосферного распространения дисперсия флуктуаций показателя преломления по порядку величины равна  $[\langle n_1^2 \rangle]^{1/2} = 10^{-6}$ , а радиус корреляции  $l$  приблизительно равен 50 м (от 20 до 130 м).

<sup>1)</sup> Заметим, что  $\int \exp(Z \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = -\frac{\exp(Z \cos \alpha)}{Z}$ .

<sup>2)</sup> Заметим, что  $\int_0^\infty e^{-Z\rho} \rho d\rho = -\frac{e^{-Z\rho}}{Z} \rho \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-Z\rho}}{Z} d\rho = \frac{1}{Z^2}$ .

## 16.4. Гауссова модель и колмогоровский спектр

Во многих практических ситуациях при описании случайной среды в качестве более удобной аппроксимации может служить гауссова корреляционная функция

$$B_n(r_d) = \langle n_1^2 \rangle \exp(-r_d^2/l^2). \quad (16.23)$$

Используя формулу (16.18), нетрудно найти

$$\Phi_n(k_s) = \frac{\langle n_1^2 \rangle l^3}{8\pi \sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(k_s l)^2}{4}\right], \quad (16.24)$$

$$\sigma(\theta) = \frac{\langle n_1^2 \rangle k^4 l^3}{4 \sqrt{\pi}} \sin^2 \chi \exp\left[-\frac{(k_s l)^2}{4}\right]. \quad (16.25)$$

Указанные две модели — экспоненциальная и гауссова — не могут полностью объяснить особенности явлений рассеяния в турбулентности атмосферы и океана. Колмогоров на основе физического рассмотрения турбулентности получил спектр полностью развитой турбулентности. Более подробно этот спектр рассматривается в приложении В. Здесь мы даем лишь краткое описание колмогоровского спектра.

Согласно теории Колмогорова, турбулентные вихри можно характеризовать двумя масштабами: внешним масштабом турбулентности  $L_0$  и внутренним масштабом (называемым также микромасштабом) турбулентности  $l_0$ . Поэтому мы разобьем всю область изменения масштабов турбулентных вихрей на три интервала:

а. *Энергетический интервал* (размер вихря больше  $L_0$ ). Турбулентные вихри с размерами, лежащими в этом интервале, приобретают энергию за счет ветрового сноса и градиента температуры. В общем случае турбулентность в этом интервале анизотропна (рис. 16.7). Спектр в нем зависит от условий возникновения турбулентности в каждом конкретном случае, поэтому общей формулы, описывающей свойства турбулентности в этом интервале, не существует.

б. *Инерционный интервал* ( $L_0 >$  размера вихря  $> l_0$ ). В этом интервале кинетическая энергия вихрей превышает энергию диссипации из-за вязкости, и турбулентность имеет существенно изотропный характер. Спектр пропорционален  $K^{-11/3}$ , где  $K = 2\pi/(\text{размер вихря})$ .

в. *Вязкий интервал* ( $l_0$  больше размера вихря). В этом интервале диссипация энергии из-за вязкости превосходит кинетическую энергию, поэтому спектр очень мал.

Рассматривая эти три области, запишем колмогоровский спектр следующим образом. В энергетическом интервале

( $0 \leq K < 2\pi/L_0$ ) спектр неизвестен. В инерционном интервале имеем

$$\Phi_n(K) = 0,033C_n^2 K^{-11/3} \quad \text{при} \quad 2\pi/L_0 < K < 2\pi/l_0 \quad (16.26)$$

и в вязком интервале —

$$\Phi_n(K) = 0 \quad \text{при} \quad 2\pi/l_0 < K,$$

где  $C_n$  называется структурной характеристикой (рис. 16.8).

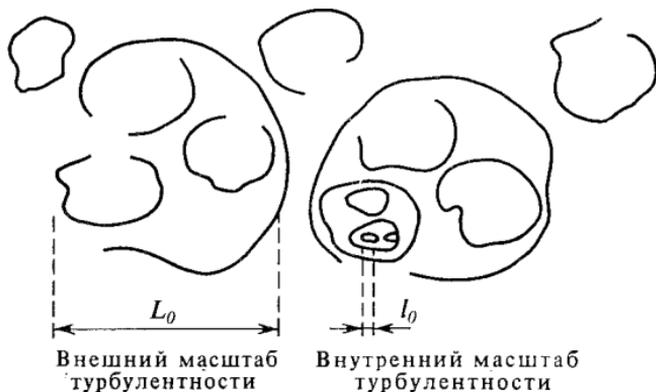


Рис. 16.7. Турбулентные вихри; показаны внешний и внутренний масштабы.



Рис. 16.8. Колмогоровский спектр, описывающий спектральную плотность флуктуаций показателя преломления.

В целях математического удобства эти три интервала часто объединяют при помощи одной формулы

$$\Phi_n(K) = 0,033C_n^2 (K^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} \exp(-K^2/K_m^2), \quad (16.27)$$

где  $K_m = 5,92/l_0$ . Спектр, описываемый формулой (16.27), иногда называют спектром Кармана.

Заметим здесь, что, хотя формула (16.27) описывает полный спектр, тем не менее в энергетическом интервале ее следует рассматривать только как некоторое приближение, поскольку в общем случае спектр в этом интервале анизотропен и зависит от того, как происходит передача энергии турбулентности. Отметим также, что теория Колмогорова опирается на понятие локально однородной среды, тогда как мы рассматривали всюду статистически однородную среду. Это несущественное различие объясняется в приложении Б, разд. Б.3. Здесь же достаточно отметить, что до тех пор, пока  $k_s$  лежит в инерционном и вязком интервалах, этим различием можно пренебрегать.

Значение структурной постоянной в атмосфере порядка  $10^{-7} \text{ м}^{-1/3}$  в случае сильной турбулентности и порядка  $10^{-9} \text{ м}^{-1/3}$  в случае слабой турбулентности.

## 16.5. Анизотропная случайная среда

Если случайная среда статистически однородна и анизотропна, то в формуле (16.15) для сечения рассеяния спектральная

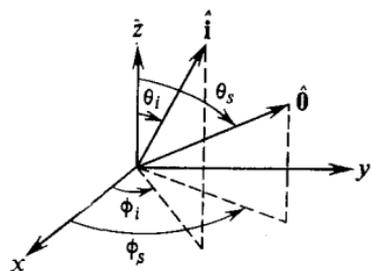


Рис. 16.9. Взаимное расположение трех осей координат  $(x, y, z)$ , радиусы корреляции вдоль которых различны, направления падающей волны  $\hat{\mathbf{i}}$  и направления наблюдения  $\hat{\mathbf{o}}$ .

плотность  $\Phi_n$  должна быть вычислена не в точке  $|\mathbf{k}_s|$ , а в точке  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{o}}) = \mathbf{k}_s$ . Следовательно, имеем

$$\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(\mathbf{k}_s). \quad (16.28)$$

Рассмотрим анизотропную случайную среду с радиусами корреляции, различными в разных направлениях. Будем описывать такую среду корреляционной функцией вида

$$B_n(\mathbf{r}_d) = \langle n_1^2 \rangle \exp[-(x^2/l_1^2) - (y^2/l_2^2) - (z^2/l_3^2)], \quad (16.29)$$

где  $\mathbf{r}_d = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ , а  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  — радиусы корреляции в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 16.9). Подставляя (16.29) в формулу (16.14а) и вычисляя значение спектра в точке  $\mathbf{k}_s$ , получаем

$$\Phi_n(\mathbf{k}_s) = (\langle n_1^2 \rangle l_1 l_2 l_3 / 8\pi \sqrt{\pi}) \exp\left[-\frac{1}{4}(k_s^2 l_1^2 + k_s^2 l_2^2 + k_s^2 l_3^2)\right],$$

$$\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(\mathbf{k}_s), \quad (16.30)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_s &= k_{s1}\hat{x} + k_{s2}\hat{y} + k_{s3}\hat{z}, \\ k_{s1} &= k(\sin\theta_i \cos\phi_i - \sin\theta_s \cos\phi_s), \\ k_{s2} &= k(\sin\theta_i \sin\phi_i - \sin\theta_s \sin\phi_s), \\ k_{s3} &= k(\cos\theta_i - \cos\theta_s). \end{aligned}$$

В ионосфере и тропосфере турбулентность часто бывает анизотропной, и радиус корреляции в горизонтальном направлении значительно больше вертикального радиуса корреляции. Поэтому для описания влияния анизотропии можно воспользоваться формулой (16.30). Спектр типа колмогоровского для анизотропной турбулентности получить трудно, поскольку он применим только для хорошо развитой изотропной турбулентности в инерционном интервале. Тем не менее может оказаться полезным записать колмогоровский спектр в анизотропной форме. Для анализа влияния анизотропии можно воспользоваться следующей приближенной формулой:

$$\Phi_n(\mathbf{k}_s) = 0,033C_n^2(k_{s1}^2 l_1^2 + k_{s2}^2 l_2^2 + k_{s3}^2 l_3^2 + 1)^{-1/6} (l_1 l_2 l_3)^{1/6}. \quad (16.31)$$

Величины  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  можно рассматривать как внешние масштабы турбулентности в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

### 16.6. Временные флуктуации рассеянных полей, обусловленные изменением во времени свойств случайной среды

До сих пор мы предполагали, что случайная среда не меняется во времени и характеризуется только флуктуациями диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1(\mathbf{r})$ . В данном разделе мы обобщим наши результаты на случай, когда диэлектрическая проницаемость меняется во времени. В этом случае формулы (16.7) следует заменить формулами

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 [1 + \epsilon_1(\mathbf{r}, t)], \quad n(\mathbf{r}, t) = 1 + n_1(\mathbf{r}, t). \quad (16.32)$$

Мы предположим здесь, что диэлектрическая проницаемость является медленной функцией времени, так что ее можно считать постоянной в течение периода несущей частоты<sup>1)</sup>.

Если предположить, что среда стационарна во времени и статистически однородна в пространстве, то корреляционную функ-

<sup>1)</sup> В действительности, если среда движется со значительной скоростью, диэлектрическую проницаемость нельзя определить просто выражением (16.32) и необходимо рассматривать уравнения Максвелла в движущейся среде.

цию можно представить в виде (приложение А, разд. А.7)

$$B_n(\mathbf{r}, \tau) = \langle n_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, t + \tau) n_1(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ = \iint d\mathbf{K} d\omega U(\mathbf{K}, \omega) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + i\omega\tau), \quad (16.33)$$

где  $U(\mathbf{K}, \omega)$  — четырехмерная спектральная плотность. Выражение (16.33) можно также записать в виде

$$B_n(\mathbf{r}, \tau) = \int d\mathbf{K} \Phi_n(\mathbf{K}, \tau) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} = \int d\omega W_n(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega\tau}, \quad (16.34)$$

где  $\Phi_n$  можно назвать меняющейся во времени пространственной спектральной плотностью, а  $W_n$  — меняющимся в пространстве частотным спектром.

Предположим, что случайная среда движется со скоростью  $\mathbf{V}$  без изменения своей пространственной структуры, причем скорость  $\mathbf{V}$  остается почти постоянной в течение времени корреляции рассеянного поля. Тогда флуктуации  $n_1$  должны зависеть от  $\mathbf{r}$  и  $t$  следующим образом:

$$n_1(\mathbf{r}, t + \tau) = n_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau, t). \quad (16.35)$$

Это соотношение выполняется для  $\tau$ , малых по сравнению с наблюдаемым временем корреляции. Обычно это условие называют условием локальной заморозенности.

В предположении (16.35) получаем

$$\langle n_1(\mathbf{r}_1, t_1) n_1(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \langle n_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{V}t_1) n_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{V}t_2) \rangle = \\ = B_n(\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau), \quad (16.36)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $\tau = t_1 - t_2$ .

Представим теперь (16.36) в виде

$$B_n(\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau) = \int d\mathbf{K} \Phi_n(\mathbf{K}) \exp[-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau)], \quad (16.37)$$

где  $\Phi_n(\mathbf{K})$  — спектральная плотность флуктуаций среды в системе координат, движущейся вместе со средой.

Сравнивая (16.37) с (16.34), находим

$$\Phi_n(\mathbf{K}, \tau) = \Phi_n(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}\tau}. \quad (16.38)$$

Соотношения (16.37) и (16.38) справедливы при условии, что скорость постоянна. Если же скорость состоит из средней скорости  $\mathbf{V}_0$  и флуктуаций  $\mathbf{V}_f$ , то (16.36) и (16.37) следует усреднить по флуктуациям скорости. В результате получим

$$\langle n_1(\mathbf{r}_1, t_1) n_1(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \int d\mathbf{K} \Phi_n(\mathbf{K}, \tau) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}), \\ \Phi_n(\mathbf{K}, \tau) = \Phi_n(\mathbf{K}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_0\tau) \chi(\mathbf{K}\tau), \quad (16.39)$$

где  $\chi$  — характеристическая функция [см. формулу (4.50)], определяемая как

$$\chi(\mathbf{K}\tau) = \langle \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_f \tau) \rangle. \quad (16.40)$$

Если флуктуации скорости считать гауссовыми с плотностью распределения вероятности

$$p(\mathbf{V}_f) = (1/2\pi\sigma_v^2)^{3/2} \exp(-|\mathbf{V}_f|^2/2\sigma_v^2) \quad (16.41a)$$

и дисперсией  $\sigma_v^2$ , то характеристическая функция (16.40) примет вид

$$\chi(\mathbf{K}\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2}(K^2\sigma_v^2\tau^2)\right]. \quad (16.41b)$$

Используя это соотношение и следуя процедуре, описанной в разд. 4.5, получаем уравнение радиолокации для случайной среды, свойства которой меняются во времени. Временная корреляционная функция рассеянного поля  $E_s$  в этом случае определяется формулой

$$\frac{1}{2\eta_0} \langle E_s(t+\tau) E_s^*(t) \rangle = P_t \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^2 R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) dV, \quad (16.42)$$

где  $\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — характеристический импеданс свободного пространства, а

$$\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(\mathbf{k}_s) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}_0 \tau) \chi(\mathbf{k}_s \tau). \quad (16.43)$$

Тогда для частотного спектра имеем

$$\begin{aligned} W_s(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle E_s(t+\tau) E_s^*(t) \rangle d\tau = \\ &= 2\eta_0 P_t \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^2 R_1^2 R_2^2} W_\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) dV, \end{aligned} \quad (16.44)$$

где

$$W_\sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \sigma(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) d\tau. \quad (16.45)$$

Здесь мы определили спектр в соответствии с условием, что при вещественной корреляционной функции  $B(\tau)$  он имеет вид

$$W(\omega) = 4 \int_0^{\infty} \cos \omega\tau B(\tau) d\tau. \quad (16.46)$$

В качестве примера рассмотрим гауссовы флуктуации скорости, описываемые формулами (16.41а) и (16.41б). Тогда получим

$$W_{\sigma}(\mathbf{0}, \mathbf{i}, \omega) = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(k_s) \frac{2\sqrt{2\pi}}{k_s^2 \sigma_v^2} \exp\left[-\frac{(\omega + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}_0)^2}{2k_s^2 \sigma_v^2}\right]. \quad (16.47)$$

Отсюда видно, что постоянная скорость  $\mathbf{V}_0$  приводит к доплеровскому сдвигу  $\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}_0$ , а флуктуации скорости вызывают уширение частотного спектра (рис. 16.10). Заметим, что формула (16.47)

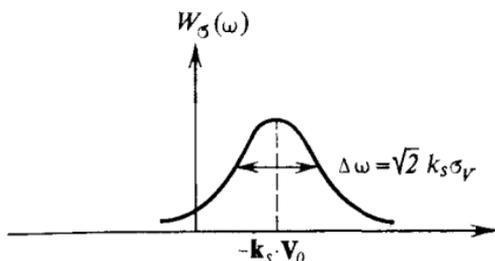


Рис. 16.10. Частотный спектр, характеризуемый доплеровским сдвигом  $-\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}_0$  и частотным уширением  $\Delta\omega$ .

описывает лишь спектр флуктуаций, так что точка  $\omega = 0$  на рис. 16.10 соответствует несущей частоте  $f_0$ . Укажем также, что доплеровский сдвиг равен

$$f_d = -f_0(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}}) \cdot \mathbf{V}_0, \quad (16.48)$$

а уширение спектра  $\Delta f$  дается выражением

$$\Delta f = [\sqrt{2} \sin(\theta/2)](\sigma_v/c). \quad (16.49)$$

## 16.7. Сильные флуктуации

До сих пор мы предполагали, что флуктуации свойств среды малы, так что можно было пользоваться приближением однократного рассеяния. В некоторых практически интересных случаях это предположение не выполняется и необходимо учитывать эффекты многократного рассеяния.

Мы не будем вдаваться здесь в детальное обсуждение проблемы сильных флуктуаций, поскольку она рассматривается ниже в гл. 20, а рассмотрим лишь модификацию первого порядка приближения однократного рассеяния.

В приближении однократного рассеяния поле, падающее на рассеивающую случайную среду, предполагается равным полю падающей волны в свободном пространстве. Приближение первого порядка теории многократного рассеяния учитывает затухание падающей волны, обусловленное флуктуациями в среде.

Вместо формулы (16.2) в этом приближении имеем

$$\frac{P_r}{P_t} = \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{(4\pi)^2 R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(-\tau_1 - \tau_2) dV, \quad (16.50)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются как

$$\tau_1 = \int_0^{R_1} \alpha(R') dR' \quad \text{и} \quad \tau_2 = \int_0^{R_2} \alpha(R'') dR'' \quad (16.51)$$

и представляют собой полное затухание вдоль трасс от излучателя до элемента объема  $dV$  и от  $dV$  до приемника соответственно. Коэффициент затухания  $\alpha(R')$  включает диэлектрические потери в среде  $\alpha_e$  и величину  $\alpha_r$ , связанную со случайностью среды:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_r, \quad (16.52)$$

$$\alpha_e = k\varepsilon_i \varepsilon_r^{-1/2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i. \quad (16.53)$$

Коэффициент экстинкции  $\alpha_r$  получается в результате вычисления полной рассеянной мощности путем интегрирования  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  в (16.15) по полному телесному углу  $4\pi$ :

$$\alpha_r = \int_{4\pi} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) d\Omega. \quad (16.54)$$

В случае электромагнитной волны, используя (16.15) и замечая, что

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = (k_s dk_s d\phi)/k^2, \quad k_s = 2k \sin(\theta/2),$$

получаем

$$\alpha_r = 4\pi^2 k^2 \int_0^{2k} \left[ 1 - \frac{k_s}{k} + \frac{1}{4} \left( \frac{k_s}{k} \right)^3 \right] \Phi_n(k_s) k_s dk_s, \quad (16.55)$$

где мы воспользовались равенством

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \chi d\phi = 2\pi \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right).$$

В случае скалярной волны диаграмма направленности диполя  $\sin^2 \chi$  в сечении рассеяния  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  отсутствует, поэтому имеем

$$\alpha_r = 4\pi^2 k^2 \int_0^{2k} \Phi_n(k_s) k_s dk_s. \quad (16.56)$$

Коэффициент экстинкции  $\alpha_r$ , определяемый формулами (16.55) и (16.56), связан с флуктуациями в среде; в гл. 20 будет показано (см. [194, 196]), что он совпадает с коэффициентом экстинкции, который получается из более строгого рассмотрения случая сильных флуктуаций.

## 16.8. Рассеяние импульса случайной средой

В гл. 5 рассмотрена задача рассеяния импульса облаком случайно распределенных рассеивателей. Математические соотношения для случая рассеяния импульса сплошной случайной средой получаются из формул, приведенных в гл. 5, путем надлежащих замен.

Корреляционная функция выходного импульса, определяемая формулами (5.31) и (5.32), применима и для сплошной случайной среды, если величины  $\rho\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в формуле (5.31) заменить следующими величинами:

$$\begin{aligned} \rho\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) &\rightarrow 4\pi\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \quad \text{в формуле (16.15),} \\ \gamma_1 \text{ и } \gamma_2 &\rightarrow \tau_1 \text{ и } \tau_2 \quad \text{в формуле (16.51).} \end{aligned}$$

Поскольку после проведения этих замен все математические соотношения гл. 5 справедливы и для сплошной случайной среды, а подробный анализ рассеяния импульса дан в гл. 5, мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

## 16.9. Сечение рассеяния единицы объема в акустическом случае

В отличие от сечения рассеяния для электромагнитных волн  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ , приведенного в (16.15), сечение рассеяния единицы объема случайной среды в акустическом случае (см. [91, 337]; более строгая теория дана в работе [374]) определяется выражением

$$\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = 2\pi k^4 \cos^2 \theta \Phi_n(k_s), \quad (16.57)$$

где  $\Phi_n$  — спектральная плотность флуктуаций эквивалентного акустического показателя преломления, а  $k_s = 2k \sin(\theta/2)$ . Спектральная плотность  $\Phi_n(k_s)$  дается выражением

$$\Phi_n(k_s) = (1/c_0^2) E(k_s) \cos^2(\theta/2) + (1/4T_0^2) \Phi_T(k_s), \quad (16.58)$$

где  $c_0$  и  $T_0$  — средние значения скорости звука (в м/с) и температуры (в К) соответственно. Величины  $E$  и  $\Phi_T$  (спектральные плотности поля скоростей и поля температур соответственно) определяются формулами

$$E(k_s) = 0,061 C_v^2 k_s^{-11/3}, \quad \Phi_T(k_s) = 0,033 C_T^2 k_s^{-11/3}, \quad (16.59)$$

где  $C_v$  и  $C_T$  — структурные характеристики флуктуаций скорости и температуры соответственно. Типичные значения этих постоянных лежат в следующих пределах:

$$C_T = 10^{-3} - 10^{-1} \text{ град/м}^{1/3}, \quad C_v = 10^{-2} - 1 \text{ м}^2/\text{с},$$

$$c_0 = 340 \text{ м/с}, \quad T_0 = 288 \text{ К}.$$

Заметим, что, как следует из формулы (16.57), рассеяние под углом  $\theta = 90^\circ$  отсутствует. Кроме того, из формулы (16.58) следует, что первое слагаемое в ней при  $\theta = 180^\circ$  (обратное рассеяние) обращается в нуль, поэтому флуктуации скорости  $E(k_s)$  не влияют на обратное рассеяние. Для рассеяния волн радио- и оптического диапазонов типичное значение  $C_n$  в атмосфере меняется в пределах  $10^{-7} - 10^{-9} \text{ м}^{-1/3}$ . Для рассеяния акустических волн типичное значение  $C_n$  может быть от  $10^{-3}$  до  $10^{-6} \text{ м}^{-1/3}$ . Следовательно, сечение рассеяния акустических волн на несколько порядков превышает сечение рассеяния волн радио- и оптического диапазонов. Благодаря такому большому различию акустическое рассеяние оказывается более чувствительным с точки зрения обнаружения атмосферной турбулентности. Однако из-за столь сильного рассеяния акустические волны испытывают большое затухание на коротких трассах и не могут проникать далеко в атмосферу.

## 16.10. Уравнение для узкого пучка

В разд. 4.3 мы вывели уравнение для узкого пучка в случае рассеяния на облаке случайно распределенных частиц. Оно непосредственно применимо и для сплошной случайной среды. Из формулы (4.16) имеем (рис. 4.3, а)

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2 G_t^2(\hat{\mathbf{i}}) G_r^2(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) V_c, \quad (16.60)$$

где диаграммы направленности  $G_t$  и  $G_r$  могут быть выражены через эффективные площади апертур (4.20) или через ширины лучей (4.22). Сечение рассеяния  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$  дается формулой (16.15) или (16.57). Величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  отвечают  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , определенным в (16.51), а общий объем  $V_c$  дается формулой (4.17).

Мощность обратного рассеяния от случайной среды, расположенной в пределах от  $R = R_1$  до  $R_2$ , дается формулой (4.19):

$$\frac{P_r}{P_t} = (2,855 \cdot 10^{-4}) \lambda^2 G_t^2(\hat{\mathbf{i}}) \theta_1 \phi_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})}{R^2} \exp(-2\gamma) dR. \quad (16.61)$$

В случае прямоугольного импульса длительности  $T_0$  разность  $R_2 - R_1$  следует принять равной длине радиолокационного элемента разрешения:  $R_2 - R_1 = cT_0/2$ , где  $c$  — скорость распространения волны.

## Распространение плоской волны в случайной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуаций

В предыдущей главе мы рассмотрели рассеяние волны в случайной среде. В данной и последующих главах мы будем иметь дело с задачей о распространении волн в случайной среде в пределах прямой видимости <sup>1)</sup>.

В отличие от задач рассеяния при распространении в пределах прямой видимости наблюдаемая волна всегда является суперпозицией падающей и рассеянной волн, поэтому необходимо рассматривать когерентное (среднее) поле и некогерентное (флуктуационное) поле. Примерами распространения в пределах прямой видимости являются распространение микроволнового и оптического излучения в атмосферной турбулентности и распространение акустических волн в биологической среде.

При падении электромагнитной волны на турбулентную среду амплитуда и фаза этой волны претерпевают флуктуации, обусловленные флуктуациями показателя преломления среды.

Настоящая глава посвящена анализу характеристик плоской волны, распространяющейся в такой турбулентной среде. Благодаря относительной математической простоте решение задачи о распространении плоской волны позволяет без излишних усложнений выявить некоторые общие соотношения между параметрами волны и флуктуирующей среды. В последующих главах мы обобщим эти результаты на другие типы волн, такие, как сферическая волна и ограниченный волновой пучок.

В данной главе нас будут интересовать в основном корреляционные функции и дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы волны. Особое внимание мы уделим их зависимости от частоты, длины трассы и параметров турбулентности. Дальнейшие главы посвящены другим аспектам флуктуаций волн, а именно нахождению структурных функций, временным флуктуациям и анализу частотных спектров.

Если для заданной длины трассы интенсивность турбулентности ниже определенного уровня, то возможны некоторые математические упрощения; в такой ситуации обычно говорят о приближении «слабых флуктуаций». Данная глава посвящена имен-

---

<sup>1)</sup> К наиболее важным монографиям по этому вопросу относятся книги В. И. Татарского [336, 337] и Л. А. Чернова [70]; имеются также обзорные статьи [52, 225, 328]. См. также гл. 6 данной монографии, посвященную распространению в пределах прямой видимости в облаке случайно распределенных рассеивателей.

но такому случаю слабых флуктуаций. Для многих приложений, относящихся к распространению микроволнового излучения в земной атмосфере, это приближение оказывается справедливым на расстояниях до нескольких десятков километров. Между тем для оптических частот это расстояние обычно ограничивается несколькими километрами. Вне этих областей приходится иметь дело с «сильными флуктуациями», которые рассматриваются в гл. 20.

Мы будем широко пользоваться спектральными представлениями случайных функций, которые имеют определенные преимущества по сравнению с другими подходами; кроме того, они обычно применяются при описании турбулентности.

Во многих прикладных задачах необходимо учитывать изменения интенсивности турбулентности вдоль трассы распространения волны. Этот вопрос обсуждается в разд. 17.17.

При распространении радиоволн через ионосферу наблюдалось их мерцание в диапазоне частот от 10 МГц до 6 ГГц. Обзор современного состояния исследований ионосферных мерцаний дан в работах [82, 294].

## 17.1 Уравнения Максвелла для флуктуирующей среды

В турбулентной среде относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  и показатель преломления  $n$  меняются от точки к точке и во времени. Однако в общем случае эти изменения нельзя предсказать; более того, даже если бы они и были известны, практически невозможно описать их значения во все моменты времени и во всех точках пространства. Поэтому среду необходимо описывать статистически и искать статистические закономерности поведения волны в такой среде.

В соответствии с этим диэлектрическую проницаемость следует задавать как случайную функцию положения и времени:

$$\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{r}, t) = n^2(\mathbf{r}, t). \quad (17.1)$$

Вначале мы будем предполагать, что  $\epsilon_r$  является функцией только  $\mathbf{r}$  и не зависит от времени:

$$\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \quad (17.2)$$

Это означает, что волна сохраняет свою частоту и здесь не рассматриваются частотный сдвиг и спектр. Частотные спектры исследуются отдельно в гл. 19.

Запишем уравнения Максвелла для среды, описываемой формулой (17.2):

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (17.3)$$

где принята зависимость от времени вида  $\exp(-i\omega t)$ . Объединяя эти два уравнения, получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Замечая, что  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  и  $\nabla \cdot [\epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0$ , находим

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E} - \nabla \left( \frac{\nabla \epsilon_r}{\epsilon_r} \cdot \mathbf{E} \right) = 0. \quad (17.4)$$

Для показателя преломления это уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - 2\nabla \left( \frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{E} \right) = 0. \quad (17.5)$$

Показатель преломления  $n$  можно представить в виде суммы среднего значения  $\langle n \rangle$  и флуктуаций  $n_1$ . Тогда  $y$ -компонента второго члена в (17.5) порядка  $k_0^2 E_y + k_0^2 2n_1 E_y$ , в то время как последний член порядка  $(2n_1/l_0^2) E_y$ . Здесь  $l_0$  — радиус корреляции флуктуаций показателя преломления  $n_1$ , а ось  $x$  выбрана в направлении распространения волны. Отсюда ясно, что последним членом в (17.5) можно пренебречь, если длина волны  $\lambda$  много меньше, чем радиус корреляции случайной среды  $l_0$ . Укажем, что отбрасывание последнего члена в (17.5) означает пренебрежение деполяризацией (поляризационные эффекты рассмотрены в работах [329, 332]).

Рассмотрим теперь распространение волны в направлении оси  $x$ . Компонента электрического поля вдоль оси  $y$   $U(\mathbf{r}) = E_y(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) U(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.6)$$

Показатель преломления  $n$  флуктуирует около среднего значения  $\langle n \rangle$ . Используя среднее волновое число  $k^2 = k_0^2 \langle n \rangle^2$ , можно записать

$$[\nabla^2 + k^2 (1 + n_1)^2] U(\mathbf{r}) = 0, \quad (17.7)$$

где  $n_1$  — флуктуации показателя преломления.

В случае слабых флуктуаций требуется найти приближенное решение уравнения (17.7) для малых  $n_1$ . Это можно сделать двумя способами. Один из них основан на разложении в ряд самого поля:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots, \quad (17.8)$$

а другой — на разложении в ряд показателя экспоненты:

$$U = \exp(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots). \quad (17.9)$$

Разложение (17.8) представляет собой борновское приближение, а разложение (17.9) называется приближением Рытова. В следующем разделе рассмотрены первые приближения этих разложений.

## 17.2. Борновское приближение и приближение Рытова

### 17.2.1. Борновское приближение

Запишем уравнение (17.7) в виде

$$(\nabla^2 + k^2)U = -k^2 \delta n U, \quad \delta n = (1 + n_1)^2 - 1 = 2n_1 + n_1^2. \quad (17.10)$$

Это уравнение можно свести к следующему интегральному уравнению для  $U$ :

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + k^2 \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta n(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV', \quad (17.11)$$

где  $U_0(\mathbf{r})$  — поле в отсутствие флуктуаций ( $\delta n = 0$ ), а

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (17.12)$$

Если подставить в интеграл  $U_0$ , то получится первая итерация  $U_1$ , которую обычно называют борновским приближением. Повторяя итерирование, можно получить выражение для  $U$  в виде ряда. Первая итерация  $U_1$  уже использовалась нами при анализе задач рассеяния.

### 17.2.2. Приближение Рытова

Поле  $U(\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$U(\mathbf{r}) = e^{\psi(\mathbf{r})} \quad (17.13)$$

и искать решение для  $\psi(\mathbf{r})$  в виде ряда. Этот подход, известный под названием метода Рытова, широко используется в задачах распространения в пределах прямой видимости. Это связано с тем, что, во-первых, он упрощает процедуру нахождения как амплитудных, так и фазовых флуктуаций, и, во-вторых, дает экспоненциальное представление для поля, которое лучше описывает распространение волны, чем представление в виде алгебраического ряда, используемого в методе Борна. Имеется ряд теоретических и экспериментальных подтверждений [54, 55, 135, 195] того, что в задачах распространения в пределах прямой видимости первое приближение Рытова является более точным, чем борновское приближение.

Используя формулу (17.13), находим

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \nabla \cdot (U \nabla \psi) = U [\nabla \psi \cdot \nabla \psi + \nabla^2 \psi],$$

так что уравнение (17.10) принимает вид

$$\nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \psi + k^2 (1 + \delta n) = 0. \quad (17.14)$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно  $\nabla \psi$  и называется уравнением Риккати.

В отсутствие флуктуаций ( $\delta n = 0$ ) имеем

$$\nabla^2 \psi_0 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 + k^2 = 0. \quad (17.15)$$

Вычитая (17.15) из (17.14) и полагая

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad (17.16)$$

получаем

$$\nabla^2 \psi_1 + 2 \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 = - (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 + k^2 \delta n). \quad (17.17)$$

Учитывая тождество

$$\nabla^2 (U_0 \psi_1) = (\nabla^2 U_0) \psi_1 + 2 U_0 \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 + U_0 \nabla^2 \psi_1,$$

левую часть уравнения (17.17) можно записать в виде

$$\nabla^2 \psi_1 + 2 \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 = (1/U_0) [\nabla^2 (U_0 \psi_1) + k^2 U_0 \psi_1],$$

что приводит к следующему уравнению для величины  $U_0 \psi_1$ :

$$(\nabla^2 + k^2) (U_0 \psi_1) = (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 + k^2 \delta n) U_0.$$

Это неоднородное волновое уравнение, которое можно свести к интегральному уравнению для  $\psi_1$ :

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{U_0(\mathbf{r})} \int_{V'} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 + k^2 \delta n) U_0(\mathbf{r}') dV'. \quad (17.18)$$

Воспользовавшись методом итераций, можно получить решение уравнения (17.18) в виде ряда. Полагая под знаком интеграла  $\psi_1 = 0$ , найдем первую итерацию

$$\psi_{10}(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{U_0(\mathbf{r})} \int_{V'} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta n(\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') dV', \quad (17.19)$$

которая представляет собой первое приближение Рытова и широко используется в теории слабых флуктуаций.

Первое приближение Рытова можно записать в виде

$$U(\mathbf{r}) = \exp(\psi_0 + \psi_{10}) = U_0(\mathbf{r}) \exp[\psi_{10}(\mathbf{r})]. \quad (17.20)$$

Укажем, что если экспоненту в (17.20) разложить в ряд, то первые два члена, имеющие вид  $U_0(\mathbf{r}) [1 + \psi_{10}(\mathbf{r})]$ , совпадут с

первым борновским приближением. Между тем выражение (17.20) содержит больше членов, чем первое борновское приближение, поэтому приближение Рытова обычно считается более точным по сравнению с борновским приближением.

Представление  $\psi_1$  в виде итерационного ряда может быть найдено из следующего уравнения, получающегося из (17.18) и (17.19):

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \psi_{10}(\mathbf{r}) + \frac{1}{U_0(\mathbf{r})} \int_{V'} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \nabla \psi_1(\mathbf{r}') \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') dV'. \quad (17.21)$$

Подставляя  $\psi_{10}$  под знаком интеграла, приходим к следующей итерации. Продолжая эту процедуру, можно найти выражение для  $\psi_1$  в виде ряда.

### 17.3. Флуктуации уровня и фазы

Рассмотрим сначала первое приближение Рытова для слабо-турбулентной среды. В этом случае удобно использовать приближенное равенство

$$\delta n = 2n_1 + n_1^2 \approx 2n_1 \quad (17.22)$$

и записать

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) \exp[\psi_1(\mathbf{r})], \quad (17.23a)$$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int_{V'} h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}') dV', \quad (17.23б)$$

где

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2k^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') / U_0(\mathbf{r}). \quad (17.23в)$$

Соотношение (17.23б) устанавливает связь поля  $\psi_1(\mathbf{r})$  с флуктуациями показателя преломления  $n_1(\mathbf{r})$ .

Найдем теперь выражения для амплитуды  $A$  и фазы  $S$  поля  $U(\mathbf{r})$ . Полагая

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{iS(\mathbf{r})}, \quad U_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) \exp[iS_0(\mathbf{r})], \quad (17.24)$$

получаем

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \chi + iS_1 = \ln(A/A_0) + i(S - S_0). \quad (17.25)$$

Вещественная часть  $\psi_1$ , обозначенная через  $\chi$ , представляет собой так называемые флуктуации уровня. Мнимая часть, обозначенная через  $S_1$ , описывает флуктуации фазы. В данной главе мы исследуем статистические характеристики  $\chi$  и  $S_1$  для плоской волны. Следует отметить, что  $\chi$  отличается от флуктуаций амплитуды  $(A - \langle A \rangle) / \langle A \rangle$ , где  $\langle A \rangle$  — средняя амплитуда. Величина  $\chi$  отличается и от флуктуаций логарифма амплитуды  $\ln A$ :  $\ln A - \langle \ln A \rangle$ . Однако при  $|\chi| \ll 1$  величина  $\chi$  приближенно равна  $(A - A_0) / A_0$ .

## 17.4. Случай плоской волны

Рассмотрим теперь распространение плоской волны, падающей на турбулентную среду с границей при  $x = 0$  (рис. 17.1). Точку наблюдения возьмем на расстоянии  $L$  от плоскости  $x = 0$ . В случае плоской волны в отсутствие случайной среды падающая волна имеет вид

$$U_0(\mathbf{r}) = e^{ikx}. \quad (17.26)$$

Подставляя (17.26) в (17.23б) и (17.23в), получаем выражение для  $\psi_1$ . Дальнейшие математические выкладки можно зна-

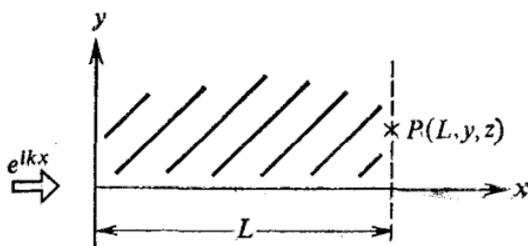


Рис. 17.1. Падение плоской волны на случайную среду [ $P(L, y, z)$  — точка наблюдения].

чительно упростить, если сделать несколько разумных предположений. Во-первых, предположим, что обратное рассеяние пренебрежимо мало, так что интегрирование в (17.23б) ограничено пределами от  $x = 0$  до  $x = L$ . Заметим также, что основной вклад в  $\psi_1(\mathbf{r})$  дает область  $y' \sim y$  и  $z' \sim z$  и, следовательно,  $|y' - y|$  и  $|z' - z|$  предполагаются малыми по сравнению с расстоянием  $|x - x'|$ . Это заведомо верно при  $\lambda < l_0$ , поскольку в этом случае рассеяние на неоднородности размером  $l_0$  сосредоточено в направлении вперед внутри угла порядка  $\lambda/l_0$ . Условие  $\lambda < l_0$  может оказаться слишком жестким, однако оно может быть смягчено для случаев сферической волны и волнового пучка.

В этих предположениях имеем

$$\psi_1(L, y, z) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' h(L - x', y - y', z - z') n_1(x', y', z'), \quad (17.27a)$$

где

$$h(L - x', y - y', z - z') = \frac{k^2}{2\pi} \frac{1}{(L - x')} \exp\left[i \frac{k}{2} \frac{(y' - y)^2 + (z' - z)^2}{L - x'}\right]. \quad (17.27б)$$

Это выражение получается путем приближенной замены  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  в (17.23в) выражением

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \left\{ \exp\left[ ik\left( (x - x') + \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2}{2(x - x')} \right) \right] \right\} / 4\pi(x - x'). \quad (17.27в)$$

Выражения (17.27а) и (17.27б) являются исходными для дальнейшего анализа флуктуаций амплитуды и фазы плоской волны.

## 17.5. Прямой и спектральный методы

Дальнейшие вычисления на основе формулы (17.27а) можно вести одним из двух способов: прямым путем или при помощи спектрального метода. Прямые вычисления могут быть выполнены следующим образом. Выпишем действительную и мнимую части (17.27а)

$$\chi(\mathbf{r}) = \int h_r(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}') dV', \quad S_1(\mathbf{r}) = \int h_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}') dV' \quad (17.28а)$$

и образуем корреляционные функции

$$B_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad B_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle S_1(\mathbf{r}_1) S_1(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (17.28б)$$

которые могут быть представлены в виде

$$B_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int dV'_1 \int dV'_2 h_r(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) h_r(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) B_n(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2), \quad (17.29)$$

где  $B_n(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \langle n_1(\mathbf{r}'_1) n_1(\mathbf{r}'_2) \rangle$  — корреляционная функция флуктуаций показателя преломления.

Вычисляя интеграл в (17.29), можно найти корреляционную функцию флуктуаций амплитуды  $B_\chi$  для заданной  $B_n$ .

Однако такой прямой подход обычно оказывается менее удобным, чем спектральный метод, описанный в следующем разделе. Это связано с тем, что интеграл в (17.29) обычно очень трудно вычислить, и интегрирование оказывается возможным только для корреляционной функции  $B_n$  специального вида. Даже в этом частном случае для получения окончательных выражений требуются сложные математические выкладки.

С другой стороны, спектральный подход часто упрощает математические выкладки и, кроме того, позволяет сформировать новый полезный взгляд на рассматриваемые вопросы. Такая ситуация аналогична существованию двух подходов к решению нестационарных задач — прямого временного метода и метода, основанного на использовании частотного спектра.

## 17.6. Спектральные представления флуктуаций амплитуды и фазы

Рассмотрим основное соотношение (17.27а) и представим его в спектральной форме. Предположим здесь, что  $n_1$  — вещественное однородное и изотропное случайное поле. Можно пытаться представить  $n_1$  в виде трехмерного спектра. Однако это оказывается неудобным, поскольку следует ожидать, что волна  $\psi_1$  будет однородной и изотропной только в плоскости  $yz$ , и ее двумерные корреляционные характеристики будут сильно зависеть от двумерных корреляционных характеристик  $n_1$  в плоскости  $yz$ ,

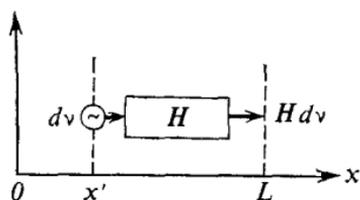


Рис. 17.2. Случайная амплитуда на выходе  $\psi_1$  определяется как произведение  $H$  и случайной амплитуды флуктуаций показателя преломления  $dv$ .

но лишь очень слабо — от радиуса корреляции  $n_1$  в направлении оси  $x$ . Поэтому как  $n_1$ , так и  $\psi_1$  необходимо представить в двумерном спектральном виде в плоскости  $yz$ .

В соответствии с этим запишем <sup>1)</sup>

$$n_1(x, \rho) = \int e^{i\mathbf{x} \cdot \rho} dv(x, \mathbf{x}), \quad (17.30)$$

где  $\mathbf{x} = K_y \hat{y} + K_z \hat{z}$  и  $\rho = y \hat{y} + z \hat{z}$ . Подставив это выражение в (17.27) и проведя интегрирование по  $\rho' = y' \hat{y} + z' \hat{z}$ , получим

$$\psi_1(L, \rho) = \int_0^L dx' \int e^{i\mathbf{x} \cdot \rho} H(L - x', \mathbf{x}) dv(x', \mathbf{x}), \quad (17.31)$$

где  $H$  — фурье-образ от  $h$ , определяемый выражением

$$H(L - x', \mathbf{x}) = \int d\rho e^{-i\mathbf{x} \cdot \rho} h(L - x', \rho) = ik \exp\left[-i \frac{(L - x')}{2k} \mathbf{x}^2\right], \quad (17.32)$$

где  $d\rho = dy dz$  и  $\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2 = K_y^2 + K_z^2$ . Выражение (17.31) показывает, что спектр показателя преломления  $dv$  в плоскости  $x'$  путем умножения на  $H$  преобразуется к случайной амплитуде  $Hdv$  флуктуаций  $\psi_1$ . Полные флуктуации  $\psi_1$  представляют собой сумму всех вкладов от области, лежащей между  $x' = 0$  и  $x' = L$ . Поэтому функция  $H$  описывает эффекты, происходящие при распространении волны от  $x'$  до  $L$ . Такая ситуация аналогична цепи, показанной на рис. 17.2, где спектр показателя преломления  $dv$

<sup>1)</sup> О спектральном представлении случайных функций см. в приложении А.

играет роль входного сигнала,  $H$  — характеристика цепи, а выход  $Hdv$  является случайной амплитудой для  $\psi_1$ .

Найдем теперь флуктуации уровня и фазы, являющиеся вещественной и мнимой частями  $\psi_1(L, y, z)$ . Поскольку, вообще говоря, величина  $dv$  комплексна и ее вещественная и мнимая части точно не известны, брать вещественную и мнимую части от выражения (17.31) нецелесообразно. Вместо этого мы воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned}\chi(L, \rho) &= \frac{1}{2} [\psi_1(L, \rho) + \psi_1^*(L, \rho)], \\ S_1(L, \rho) &= 1/2i [\psi_1(L, \rho) - \psi_1^*(L, \rho)]\end{aligned}\quad (17.33)$$

и выразим  $\psi_1^*$  в таком же спектральном виде, как и  $\psi_1$ . Тогда для  $\psi_1^*$  получим

$$\psi_1^*(L, \rho) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix' \cdot \rho} H^*(L - x', \kappa) dv^*(x', \kappa). \quad (17.34)$$

Чтобы преобразовать это выражение к виду (17.31), положим  $\kappa \rightarrow -\kappa$  и заметим, что в силу вещественности  $n_1$  [см. приложение А, (А.34)]

$$dv(x', \kappa) = dv^*(x', -\kappa) \quad (17.35)$$

и что  $H$  — четная функция  $\kappa$ :

$$H(L - x', -\kappa) = H(L - x', \kappa). \quad (17.36)$$

Поэтому имеем

$$\psi_1^*(L, \rho) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix' \cdot \rho} H^*(L - x', -\kappa) dv(x', \kappa). \quad (17.37)$$

Объединяя теперь формулы (17.31) и (17.37), находим  $\chi$  и  $S_1$ :

$$\chi(L, \rho) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix' \cdot \rho} H_r(L - x', \kappa) dv(x', \kappa), \quad (17.38)$$

$$S_1(L, \rho) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix' \cdot \rho} H_i(L - x', \kappa) dv(x', \kappa), \quad (17.39)$$

где  $H_r$  и  $H_i$  — вещественная и мнимая части  $H$ :

$$H_r(L - x', \kappa) = k \sin \left[ \frac{(L - x')}{2k} \kappa^2 \right], \quad (17.40)$$

$$H_i(L - x', \kappa) = k \cos \left[ \frac{(L - x')}{2k} \kappa^2 \right]. \quad (17.41)$$

Выражения (17.38) и (17.39) вместе с выражениями (17.40) и (17.41) описывают флуктуации амплитуды и фазы в спектральном представлении.

## 17.7. Корреляционные функции амплитуды и фазы

Рассмотрим теперь корреляционные функции амплитуды и фазы в плоскости  $x = L$ . Из формулы (17.38) имеем

$$B_\chi(L; \rho_1, \rho_2) = \langle \chi(L, \rho_1) \chi(L, \rho_2) \rangle = \langle \chi(L, \rho_1) \chi^*(L, \rho_2) \rangle. \quad (17.42)$$

Воспользовавшись соотношением [см. приложение А, (А.21)]

$$\langle d\nu(x', \kappa) d\nu^*(x'', \kappa') \rangle = F_n(|x' - x''|, \kappa) \delta(\kappa - \kappa') d\kappa d\kappa', \quad (17.43)$$

где  $\delta(\kappa - \kappa') = \delta(K_y - K'_y) \delta(K_z - K'_z)$ ,  $d\kappa = dK_y dK_z$  и  $d\kappa' = dK'_y dK'_z$ , и положив  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ , получим

$$B_\chi = \int_0^L dx' \int_0^L dx'' \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa \cdot \rho} H_r(L - x', \kappa) H_r^*(L - x'', \kappa) F_n(|x' - x''|, \kappa) d\kappa. \quad (17.44)$$

Поскольку подынтегральное выражение содержит спектр  $F_n$ , зависящий от разностной координаты  $x' - x''$ , удобно перейти от

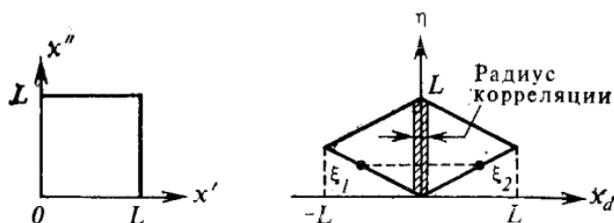


Рис. 17.3. Область интегрирования по  $x'$  и  $x''$  и соответствующая ей область интегрирования по  $x_d$  и  $\eta$ .

интегрирования по  $x'$  и  $x''$  к интегрированию по разностной координате  $x_d = x' - x''$  и координате центра тяжести  $\eta = \frac{1}{2}(x' + x'')$ :

$$\int_0^L dx' \int_0^L dx'' = \int_0^L d\eta \int_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} dx_d, \quad (17.45)$$

где  $\xi_1(\eta)$  и  $\xi_2(\eta)$  показаны на рис. 17.3. В результате в подынтегральное выражение в (17.44) войдет спектр показателя преломления  $F_n(|x_d|, \kappa)$ . Ясно, что спектр  $F_n$  заметно отличен от нуля только при значениях  $|x_d|$ , не превышающих радиуса корреляции флуктуаций показателя преломления (заштрихованная область на рис. 17.3). Поэтому пределы интегрирования  $\xi_1(\eta)$  и

$\xi_2(\eta)$  могут быть распространены до бесконечности, причем вносимая при этом ошибка будет мала, т. е.

$$\int_0^L dx' \int_0^L dx'' f \approx \int_0^L d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dx_d f, \quad (17.46)$$

если  $|f| \approx 0$  при  $x_d > l$  (радиус корреляции) и  $l \ll L$ .

Заметим, что  $H_r$  является медленно меняющейся функцией  $x'$  и ее приближенно можно заменить значением в точке  $\eta$ :

$$H_r(L - x', \kappa) \approx H_r(L - \eta, \kappa). \quad (17.47)$$

Отметим, кроме того [см. приложение А, (А.27)], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_d F_n(|x_d|, \kappa) = 2\pi \Phi_n(x). \quad (17.48)$$

Используя (17.46) — (17.48), мы можем записать формулу (17.44) в виде

$$B_\chi = 2\pi \int_0^L d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cdot \rho} H_r^2(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (17.49)$$

Поскольку  $B_\chi$  является функцией поперечного расстояния  $\rho$ , в (17.49) удобно перейти к интегрированию в цилиндрических координатах. Для этого положим  $\kappa_y = \kappa \cos \phi$ ,  $\kappa_z = \kappa \sin \phi$  и  $y_d = \rho \cos \phi'$ ,  $z_d = \rho \sin \phi'$ . Используем далее функцию Бесселя нулевого порядка  $J_0$ :

$$\iint d\kappa e^{ix \cdot \rho} = \int_0^{\infty} \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} d\phi \exp[i\kappa \rho \cos(\phi - \phi')] = 2\pi \int_0^{\infty} \kappa d\kappa J_0(\kappa \rho). \quad (17.50)$$

Мы использовали здесь также тот факт, что  $H_r$  и  $\Phi_n$  не зависят от  $\phi$ .

В соответствии с (17.50) формула (17.49) принимает вид

$$B_\chi(L, \rho) = (2\pi)^2 \int_0^L d\eta \int_0^{\infty} \kappa d\kappa J_0(\kappa \rho) H_r^2(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa). \quad (17.51)$$

Аналогичная процедура может быть проведена и для корреляционной функции фазы  $B_S(L, \rho)$ , для которой  $H_r$  следует заменить на  $H_i$ :

$$\begin{aligned} B_S(L, \rho) &= \langle S_1(L, \rho_1) S_1(L, \rho_2) \rangle = \\ &= (2\pi)^2 \int_0^L d\eta \int_0^{\infty} \kappa d\kappa J_0(\kappa \rho) H_i^2(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa). \end{aligned} \quad (17.52)$$

Подобным образом найдем и взаимную корреляционную функцию флуктуаций уровня и фазы:

$$B_{\chi S}(L, \rho) = \langle \chi(L, \rho_1) S_1(L, \rho_2) \rangle = \\ = (2\pi)^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\rho) H_r(L - \eta, \kappa) H_i(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa). \quad (17.53)$$

Эти три выражения для корреляционных функций являются основными в теории слабых флуктуаций.

Рассмотрим вопрос о сходимости интегралов в (17.51) — (17.53). Заметим, что при  $\kappa \rightarrow 0$   $H_r^2 \rightarrow \kappa^4$  и  $H_i^2 \rightarrow \text{const}$ . Поэтому если спектральная плотность  $\Phi_n$  ведет себя как  $\kappa^p$  при малых  $\kappa$ , то интеграл в выражении для  $B_\chi$  сходится при  $p > -6$ , тогда как сходимость интегралов в  $B_S$  и  $B_{\chi S}$  требует, чтобы выполнялись условия  $p > -2$  и  $p > -4$  соответственно. Колмогоровский спектр для турбулентности в инерционном интервале имеет  $p = -11/3$  [см. приложение Б, (Б.33)], и она является не однородной, а локально однородной. Заметим, что даже в случае локально однородной турбулентности  $B_\chi$  остается конечной, поэтому корреляционная функция амплитуды существует. С другой стороны, если  $\Phi_n$  имеет вид  $\kappa^{-11/3}$ , то корреляционная функция фазы не существует.

## 17.8. Структурные функции амплитуды и фазы

В предыдущем разделе мы нашли корреляционную функцию в случае, когда флуктуации показателя преломления однородны и изотропны. Рассмотрим теперь структурные функции амплитуды и фазы (см. приложение Б), определяемые выражениями

$$D_\chi(L, \rho) = \langle [\chi(L, \rho_1) - \chi(L, \rho_2)]^2 \rangle, \\ D_S(L, \rho) = \langle [S_1(L, \rho_1) - S_1(L, \rho_2)]^2 \rangle, \quad (17.54)$$

где  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ .

В случае однородной и изотропной случайной среды, следуя процедуре, описанной в предыдущем разделе, получаем

$$D_\chi(L, \rho) = 8\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa [1 - J_0(\kappa\rho)] H_r^2(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa), \\ D_S(L, \rho) = 8\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa [1 - J_0(\kappa\rho)] H_i^2(L - \eta, \kappa) \Phi_n(\kappa). \quad (17.55)$$

Рассмотрим сходимость этих интегралов. При малых  $\kappa$   $H_r^2 \rightarrow \kappa^4$  и  $H_i^2 \rightarrow \text{const}$ , поэтому для спектров  $\Phi_n \sim \kappa^p$  при малых  $\kappa$  функция  $B_\chi$  существует при  $p > -8$ , тогда как  $B_S$  существует при

$\rho > -4$ . Это означает, что, даже если среда локально однородна и форма спектра  $\Phi_n$  такова, что корреляционная функция не существует (например,  $\rho = -11/3$ ), тем не менее структурная функция конечна. Поэтому структурная функция фазы  $D_S$  часто используется при изучении турбулентности.

## 17.9. Спектральные и пространственные фильтрующие функции

Три основных выражения (17.51) — (17.53) имеют общий вид

$$B(L, \rho) = \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa F(\eta, \kappa, \rho) \Phi_n(\kappa). \quad (17.56)$$

Спектральная плотность флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(\kappa)$  в этом выражении берется в точке  $\eta$  и может меняться вдоль трассы распространения волны. Чтобы учесть этот факт, следует записать более общее выражение, а именно:

$$B(L, \rho) = \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa F(\eta, \kappa, \rho) \Phi_n(\eta, \kappa). \quad (17.57)$$

Здесь мы пренебрегаем изменением  $\Phi_n$  в поперечном направлении. Это допустимо (разд. 19.8) до тех пор, пока поперечное изменение пренебрежимо мало на расстояниях порядка  $\sqrt{\lambda L}$ . Функция  $F(\eta, \kappa, \rho)$  вырезает некоторую часть спектра  $\Phi_n$  при формировании корреляционной функции  $B$ , поэтому ее называют фильтрующей функцией [179, 180]. Часто бывает удобно рассматривать следующие два частных случая.

### 17.9.1. Спектральная фильтрующая функция

Если  $\Phi_n$  не зависит от координаты  $\eta$ , то можно записать

$$\begin{aligned} B(L, \rho) &= \int_0^\infty \kappa d\kappa \left[ \int_0^L d\eta F(\eta, \kappa, \rho) \right] \Phi_n(\kappa) = \\ &= 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\rho) f(\kappa) \Phi_n(\kappa). \end{aligned} \quad (17.58a)$$

Аналогично для структурных функций имеем

$$D(L, \rho) = 4\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa [1 - J_0(\kappa\rho)] f(\kappa) \Phi_n(\kappa). \quad (17.58б)$$

Функцию  $f(x)$  можно назвать спектральной фильтрующей функцией, поскольку она выделяет некоторую часть из спектра  $\Phi_n$ . Фильтрующая функция  $f(x)$  может быть легко найдена. Для флуктуаций уровня

$$f_x(x) = 1 - \frac{\sin(x^2 L/k)}{x^2 L/k}, \quad (17.59a)$$

для флуктуаций фазы

$$f_s(x) = 1 + \frac{\sin(x^2 L/k)}{x^2 L/k}, \quad (17.59б)$$

а для взаимных флуктуаций уровня и фазы

$$f_{xs}(x) = \frac{\sin^2(x^2 L/2k)}{x^2 L/2k}. \quad (17.59в)$$

### 17.9.2. Пространственная фильтрующая функция

В некоторых случаях спектр  $\Phi_n$  можно представить в виде произведения функции от  $\eta$  и функции от  $x$ :

$$\Phi_n(\eta, x) = \Phi_{n1}(\eta) \Phi_{n2}(x). \quad (17.60)$$

Функция  $\Phi_{n1}(\eta)$  характеризует изменение интенсивности флуктуаций показателя преломления вдоль трассы и пропорциональна дисперсии флуктуаций показателя преломления в точке  $\eta$ . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} B(L, \rho) &= \int_0^L d\eta \left[ \int_0^\infty x dx F(\eta, x, \rho) \Phi_{n2}(x) \right] \Phi_{n1}(\eta) = \\ &= \int_0^L d\eta G(\eta, \rho) \Phi_{n1}(\eta). \end{aligned} \quad (17.61)$$

Функция  $G(\eta, \rho)$  вырезает значения  $\Phi_{n1}(\eta)$  на различных участках трассы и подчеркивает или, наоборот, подавляет влияние различных участков случайной среды вдоль трассы. По этой причине  $G(\eta, \rho)$  может быть названа пространственной фильтрующей функцией.

### 17.10 Статистически однородные случайные среды и спектральная фильтрующая функция

Если случайную среду считать статистически однородной, то спектр  $\Phi_n$  является функцией только  $x$  и можно воспользоваться формулами (17.58), (17.59). Рассмотрим фильтрующие функции. Вид фильтрующих функций  $f_x(x)$ ,  $f_s(x)$  и  $f_{xs}(x)$  показан на

рис. 17.4. Заметим, что  $f_x(x)$  подчеркивает ту часть спектра  $\Phi_n(x)$ , в которой  $x \geq \sqrt{2\pi}/\sqrt{\lambda L}$ . Пространственное волновое число  $x = 2\pi/(\text{радиус корреляции})$ ; следовательно, физический смысл  $f_x(x)$  состоит в том, что на флуктуации амплитуды влияют в основном неоднородности размера  $\sqrt{\lambda L}$  и меньше. Для флуктуаций фазы ситуация иная, поскольку  $f_s(x)$  подчеркивает вклад от области  $x \leq \sqrt{2\pi}/\sqrt{\lambda L}$ . Это означает, что флуктуации фазы подвержены влиянию со стороны неоднородностей всех масштабов, в особенности со стороны неоднородностей размера  $\sqrt{\lambda L}$  и больше.

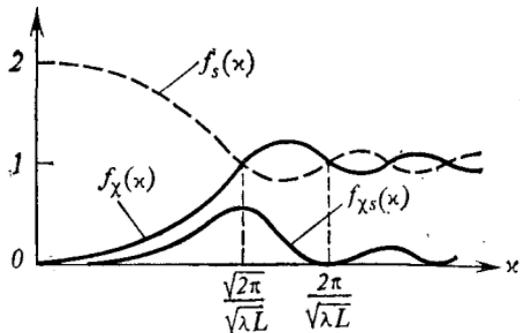


Рис. 17.4. Общий вид фильтрующих функций.

Из вышесказанного следует, что флуктуационные характеристики существенно зависят от того, оказывается ли радиус корреляции  $l$  много меньше или больше, чем размер зоны Френеля  $\sqrt{\lambda L}$ . В следующих разделах мы исследуем характерные особенности флуктуаций в этих двух различных областях.

### 17.11 Область применимости геометрической оптики $L \ll l^2/\lambda$

Рассмотрим сначала случай  $L \ll l^2/\lambda$ . Спектральная плотность  $\Phi_n(x)$  и фильтрующие функции  $f_x(x)$  и  $f_s(x)$  ведут себя, как показано на рис. 17.5, и полный спектр для корреляционной функции амплитуды равен произведению  $f_x$  и  $\Phi_n$ , а для корреляционной функции фазы — произведению  $f_s$  и  $\Phi_n$ . Заметим, что  $\Phi_n(x)$  простирается до  $x \approx 2\pi/l$  и пренебрежимо мала при  $x \gg \gg 2\pi/l$ .

Ясно поэтому, что детальное поведение  $f_x$  и  $f_s$  в области, лежащей за  $x \approx 2\pi/l$ , не влияет на полный спектр; следовательно, в этой области можно использовать приближенные выражения для  $f_x$  и  $f_s$ :

$$f_x(x) \approx 1 - \frac{(x^2 L/k) - \frac{1}{6}(x^2 L/k)^3 + \dots}{(x^2 L/k)} = \frac{1}{6}(x^2 L/k)^2, \quad (17.62)$$

$$f_s(x) \approx 2, \quad (17.63)$$

В результате при  $L \ll l^2/\lambda$  для корреляционных функций имеем

$$B_\chi(L, \rho) = \frac{\pi^2 L^3}{3} \int_0^\infty \kappa^5 J_0(\kappa \rho) \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (17.64)$$

$$B_S(L, \rho) = 4\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa J_0(\kappa \rho) \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (17.65)$$

Исследуем формулу (17.64). Из нее сразу же следует: а)  $B_\chi(L, \rho)$  не зависит от частоты ( $k$ ), б)  $B_\chi(L, \rho)$  пропорционально  $L^3$ , в) поскольку под интегралом стоит  $\kappa^5$ , поведение спек-

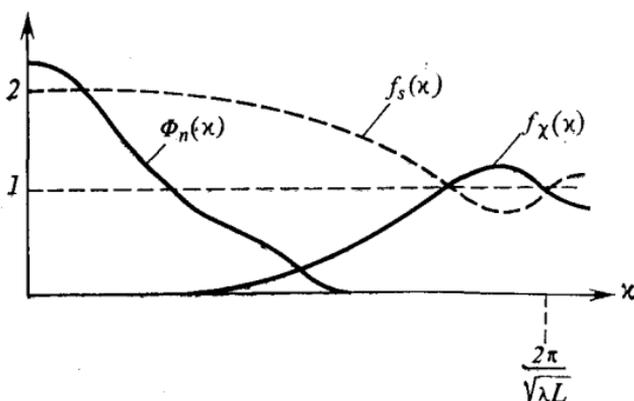


Рис. 17.5. Фильтрующие функции и спектральная плотность  $\Phi_n$  флуктуаций показателя преломления в области применимости геометрической оптики.

тра  $\Phi_n$  в области малых  $\kappa$  ( $\ll 2\pi/l$ ) не оказывает заметного влияния на  $B_\chi$  и г) так как максимум  $f_\chi \Phi_n$  лежит при  $\kappa > 2\pi/l$ , радиус корреляции  $B_\chi$  должен быть меньше радиуса корреляции  $n_1$ .

Из формулы (17.65) вытекают следующие свойства корреляционной функции фазы: а) пропорциональность квадрату частоты ( $k^2$ ), б) пропорциональность длине трассы  $L$ , в) зависимость от поведения спектра  $\Phi_n(\kappa)$  во всей области и г) ее радиус корреляции совпадает с радиусом корреляции показателя преломления.

Если известна корреляционная функция флуктуаций показателя преломления  $B_n(r_d)$ , то вместо (17.65) можно записать другое выражение. Заметим, что [см. приложение А, (А.28)]

$$\Phi_n(\kappa) = \frac{1}{2\pi^2 \kappa} \int_0^\infty B_n(r_d) r_d \sin(\kappa r_d) dr_d.$$

Подставляя эту формулу в (17.65) и используя соотношение [245]

$$\int_0^{\infty} J_0(x\rho) \sin(xr_d) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho > r_d, \\ \frac{1}{\sqrt{r_d^2 - \rho^2}} & \text{при } \rho < r_d, \end{cases} \quad (17.66)$$

получаем

$$B_S(L, \rho) = 2k^2L \int_0^{\infty} B_n(r_d) \frac{r_d dr_d}{\sqrt{r_d^2 - \rho^2}} = 2k^2L \int_0^{\infty} B_n(\sqrt{\rho^2 + x^2}) dx. \quad (17.67)$$

Средний квадрат флуктуаций фазы равен

$$B_S(L, 0) = \langle S_1^2 \rangle = 2k^2L \langle n_1^2 \rangle L_n, \quad (17.68)$$

где

$$L_n = \int_0^{\infty} \frac{B_n(x)}{B_n(0)} dx = \frac{1}{\langle n_1^2 \rangle} \int_0^{\infty} B_n(x) dx$$

называется интегральным масштабом и может рассматриваться как определение «радиуса корреляции».

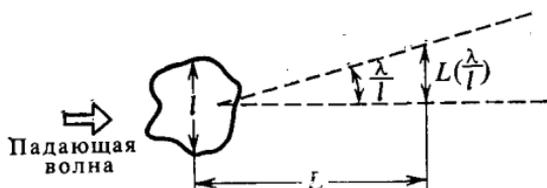


Рис. 17.6. Волна, рассеянная неоднородностью размера  $l$ , сосредоточена в основном внутри конуса с углом, равным  $\lambda/l$ .

Формулы (17.64) и (17.65) могут быть получены также на основе геометрической оптики. Мы дадим здесь этот вывод в краткой форме.

При падении волны на объект размера  $l$  дифрагированная волна сосредоточена в основном внутри конуса с углом раствора  $\lambda/l$ , и, следовательно, на расстоянии  $L$  дифрагированная волна сконцентрирована в области с поперечным размером  $(\lambda/l)L$  (рис. 17.6). До тех пор пока этот размер меньше размера неоднородности  $l$ , т. е.  $L\lambda/l \ll l$ , дифракционные эффекты малы, и приближение геометрической оптики хорошо описывает поле.

Поэтому, хотя формулы (17.64) и (17.65) получены из волнового уравнения, можно ожидать, что в области  $L \ll l^2/\lambda$  приближение геометрической оптики приведет к тем же результатам. И это действительно так.

Мы не собираемся приводить подробный вывод этих формул. Укажем лишь некоторые хорошо известные соотношения, которые были использованы. Запишем

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{iS(\mathbf{r})}, \quad (17.69)$$

где  $A(\mathbf{r})$  — амплитуда, а  $S(\mathbf{r})$  — фаза. В приближении геометрической оптики  $S(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению [45]

$$|\nabla S|^2 = k^2 n^2, \quad (17.70)$$

называемому уравнением эйконала. Его решение имеет вид

$$S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}_0) = k \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} n ds, \quad (17.71)$$

где интегрирование ведется вдоль луча. Амплитуда  $A(\mathbf{r})$  дается формулой

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_0) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\nabla^2 S}{kn} ds\right). \quad (17.72)$$

Выражения (17.71) и (17.72) не содержат полной информации, если траектория луча неизвестна. Однако в случае слабонеоднородной случайной среды траекторию луча можно аппроксимировать прямой линией, совпадающей с осью  $x$ . Следовательно, интеграл  $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} ds$  можно заменить на  $\int_{x_0}^x dx'$ . В этом приближении для фазовых флуктуаций имеем

$$S_1(L, y, z) = S(L, y, z) - kx = k \int_0^L n_1(x', y', z') dx', \quad (17.73)$$

а для флуктуаций уровня —

$$\chi(L, y, z) = -\frac{1}{2k} \int_0^L \nabla^2 S dx', \quad (17.74)$$

где мы положили  $n \approx 1$ . Замечая, что

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x'^2} S dx' = \int_0^L k \frac{\partial n_1}{\partial x'} dx' = kn_1(L) - kn_1(0)$$

и полагая эту величину равной нулю, получаем

$$\chi(L, y, z) = -\frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^x d\xi \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) n_1(\xi, y, z). \quad (17.75)$$

Выражения (17.73) и (17.75) часто используются в качестве исходных при вычислении корреляционных функций.

Мы не будем здесь этого делать, а лишь отметим, что, если применить спектральные методы к (17.73) и (17.75), можно получить формулы, тождественные (17.64) и (17.65).

### 17.12. Область $L \gg l^2/\lambda$

Поведение спектральной плотности  $\Phi_n(x)$  и фильтрующих функций  $f_s(x)$  и  $f_x(x)$  для этого случая показано на рис. 17.7. Из этого рисунка видно, что

$$f_x(x) \approx f_s(x) \approx 1, \quad (17.76)$$

поэтому корреляционные функции принимают вид

$$B_x(L, \rho) = B_s(L, \rho) =$$

$$= 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty x dx J_0(x\rho) \Phi_n(x). \quad (17.77)$$

Отметим, что они в точности равны половине корреляционной функции фазы, получающейся в геометрикооптическом приближении. Если известна корреляционная функция  $B_n(\mathbf{r})$ , то аналогично тому, как это делалось при выводе формулы (17.67), можно найти

$$B_x(L, \rho) = B_s(L, \rho) = k^2 L \int_0^\infty B_n(\sqrt{\rho^2 + x^2}) dx. \quad (17.78)$$

Хотя (17.78) дает одинаковые выражения для  $B_x$  и  $B_s$ , необходимо помнить, что это соответствует некоторому приближению, и между  $B_x$  и  $B_s$  имеется важное различие. Это различие связано с тем, что, хотя при  $x \neq 0$   $f_x(x) \approx f_s(x)$ , тем не менее  $f_x(0) = 0$ , тогда как  $f_s(0) = 2$ . Вследствие этого корреляционная функция уровня должна менять знак, в то время как корреляционная функция фазы остается знакопостоянной. Доказательство этого факта может быть получено из общей формулы (17.56). Поскольку она имеет вид преобразования Фурье — Бесселя, можно записать обратное преобразование

$$2\pi^2 k^2 L f_x(x) \Phi_n(x) = \int_0^\infty \rho d\rho J_0(x\rho) B_x(L, \rho).$$

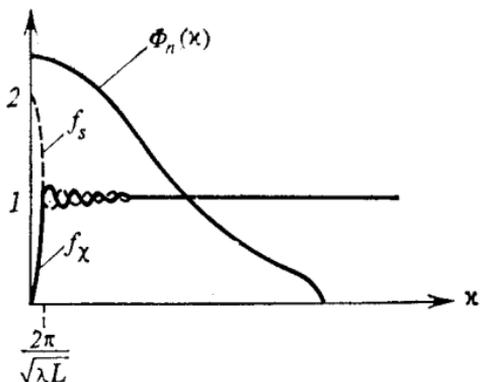


Рис. 17.7. Фильтрующие функции и спектральная плотность  $\Phi_n$  в области  $L \gg l^2/\lambda$ .

Заметим, что, поскольку  $f_x(0) = 0$ ,

$$\int_0^{\infty} \rho d\rho B_x(L, \rho) = 0. \quad (17.79)$$

Соотношение (17.79) означает, что интеграл от корреляционной функции по поперечной плоскости обращается в нуль, вследствие чего корреляционная функция уровня  $B_x(L, \rho)$  должна быть отрицательной в некоторой области значений  $\rho$ .

Соотношение (17.79), очевидно, не справедливо для корреляционной функции фазы  $B_s(L, \rho)$ , так как  $f_s(0)$  не обращается в нуль.

### 17.13. Общие свойства флуктуаций волн в статистически однородной случайной среде

В предыдущих двух разделах мы привели общие формулы для корреляционных функций  $B_x$  и  $B_s$  в двух разных областях. При  $L \ll l^2/\lambda$  получаются формулы (17.64) и (17.65), а при  $L \gg l^2/\lambda$  — формула (17.77).

Эти формулы описывают некоторые свойства, являющиеся общими для всех волновых флуктуационных явлений независимо от вида корреляционной функции. Если радиус корреляции много меньше, чем размер зоны Френеля  $\sqrt{\lambda L}$ , то дисперсии уровня и фазы всегда равны между собой и пропорциональны квадрату частоты  $k^2$  и длине трассы  $L$ , т. е.

$$\sigma_x^2 = \sigma_s^2 \sim k^2 L, \quad (17.80)$$

где  $\sigma_x^2 = B_x(L, 0)$  — дисперсия уровня, а  $\sigma_s^2 = B_s(L, 0)$  — дисперсия фазы. С другой стороны, если радиус корреляции  $l$  много больше размера зоны Френеля, то  $\sigma_x^2$  не зависит от частоты и пропорциональна  $L^3$ , а  $\sigma_s^2$  удваивается по сравнению со значением (17.80), так что

$$\sigma_x^2 \sim L^3, \quad \sigma_s^2 \sim 2k^2 L. \quad (17.81)$$

Эти соотношения иллюстрируются на рис. 17.8. Физически это означает, что на малых расстояниях изменения амплитуды несущественны, в то время как фаза заметно меняется с расстоянием, проходимым волной. По мере увеличения расстояния амплитудные флуктуации нарастают, и в конечном счете амплитудные и фазовые флуктуации становятся одинаковыми. Этот факт иллю-

стрируется на рис. 17.9, где показано поле  $U = U_0 + U_f$  в комплексной плоскости и даны флуктуации амплитуды и фазы. Показана также область сильных флуктуаций, в которой среднее

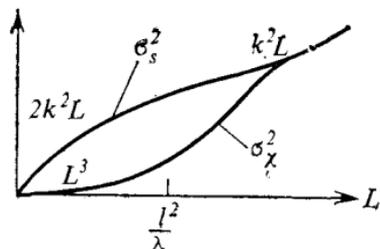


Рис. 17.8. Поведение дисперсии уровня  $\sigma_\chi^2$  и дисперсии фазы  $\sigma_S^2$ .

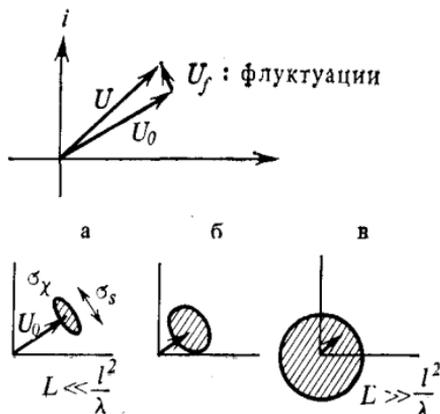


Рис. 17.9. Область применимости геометрической оптики  $\sigma_\chi \ll \sigma_S$  (а); область, в которой  $L \gg l^2/\lambda$  ( $\sigma_\chi \approx \sigma_S$ ) (б); область сильных флуктуаций (в).

(когерентное) поле пренебрежимо мало, и полное поле практически некогерентно. Этот случай рассматривается в гл. 20.

### 17.14. Статистически однородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции

Во многих практических задачах вид корреляционной функции не известен. В этих условиях ее часто аппроксимируют гауссовой функцией. Представим корреляционную функцию в виде

$$\langle n_1(\mathbf{r}_1) n_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle n_1^2 \rangle \exp(-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2/l^2). \quad (17.82)$$

Спектральная плотность для нее [приложение А, (А.33)]

$$\Phi_n(\kappa) = (\langle n_1^2 \rangle l^3 / 8\pi \sqrt{\pi}) \exp(-\kappa^2 l^2 / 4). \quad (17.83)$$

Подставляя эту формулу в (17.64), (17.65) и (17.77), получаем при  $L \ll l^2/\lambda$

$$B_\chi(\rho) = \langle n_1^2 \rangle (8 \sqrt{\pi}/3) (L/l)^3 {}_1F_1(3, 1; -\rho^2/l^2), \quad (17.84a)$$

$$B_S(\rho) = \langle n_1^2 \rangle k^2 L l \sqrt{\pi} \exp(-\rho^2/l^2), \quad (17.84б)$$

а при  $L \gg l^2/\lambda$

$$B_\chi(\rho) = B_S(\rho) = \langle n_1^2 \rangle \frac{1}{2} k^2 L l \sqrt{\pi} \exp(-\rho^2/l^2). \quad (17.85)$$

При выводе (17.84а) мы воспользовались формулой из работы [245] [см. приложение Г, (Г.1)]

$$\int_0^{\infty} \kappa^{\mu} J_{c-1}(\kappa \rho) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa = \frac{\Gamma[(i+\mu)/2] \kappa_m^{(\mu+c)}}{4^{c/2} \rho^{1-c} \Gamma(c)} {}_1F_1\left(\frac{\mu+c}{2}, c; -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right), \quad (17.86)$$

которая справедлива при  $\mu + c > 0$ .

## 17.15. Однородная и локально однородная турбулентность

Флуктуации волн в однородной и локально однородной турбулентности хорошо исследованы [336, 337], поэтому в данном разделе мы ограничимся лишь сводкой результатов с кратким объяснением их вывода.

Как уже говорилось в разд. 16.4, форма спектра  $\Phi_n(\kappa)$  характеризуется наименьшим размером неоднородностей  $l_0$ , называемым внутренним масштабом, и наибольшим размером  $L_0$ , называемым внешним масштабом турбулентности (рис. 17.10). Область спектра  $\Phi_n(\kappa)$ , в которой  $\kappa < 2\pi/L_0$ , называется энергетическим интервалом. Вид спектра в этой области зависит от конкретного механизма образования турбулентности, поэтому спектр не имеет здесь универсальной формы и, как правило,

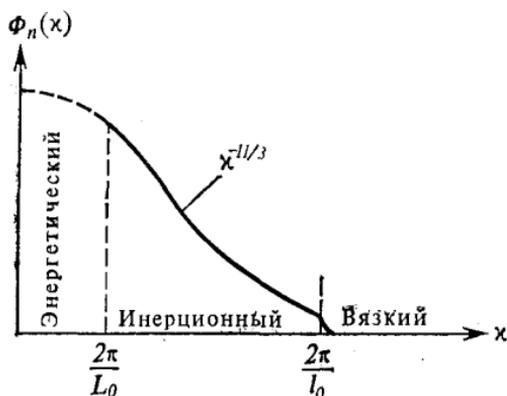


Рис. 17.10. Колмогоровский спектр.

анизотропен. Область между  $2\pi/L_0$  и  $2\pi/l_0$  называется инерционным интервалом. В этой области кинетическая энергия вихрей преобладает над энергией диссипации, и спектр должен иметь общий вид

$$\Phi_n(\kappa) \sim \kappa^{-11/3}. \quad (17.87)$$

Область, в которой  $\kappa > 2\pi/l_0$ , называется вязким интервалом; здесь энергия диссипации превышает кинетическую энергию, и, следовательно, в этой области сосредоточена очень малая энергия. В математической форме можно записать

$$\Phi_n(\kappa) = \begin{cases} 0,033C_n^2 \kappa^{-11/3} & \text{при } 2\pi/L_0 < \kappa < 2\pi/l_0, \\ 0 & \text{при } 2\pi/l_0 < \kappa. \end{cases} \quad (17.88)$$

Можно объединить эти два равенства, записав

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2 \kappa^{-1/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) \quad \text{при} \quad 2\pi/L_0 < \kappa, \quad (17.89)$$

где  $\kappa_m = 5,92/l_0$ .

Несмотря на то что в соответствии со сказанным выше спектр в энергетическом интервале не может быть описан в рамках изотропной модели, из соображений математического удобства для

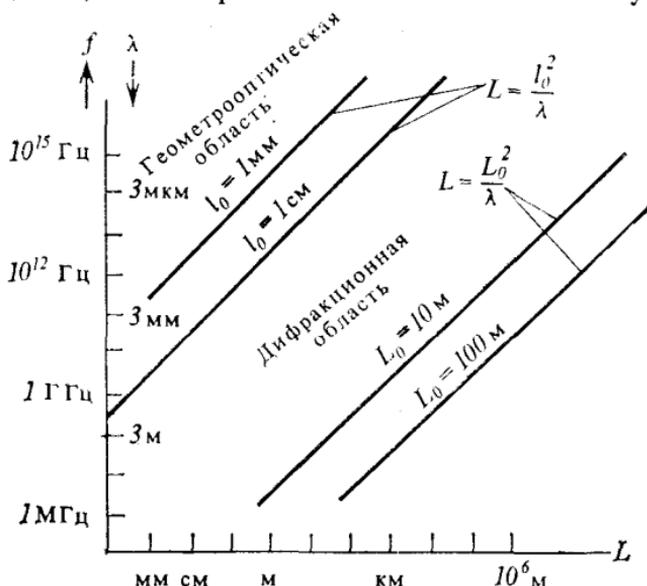


Рис. 17.11. Область применимости геометрической оптики и дифракционная область в земной атмосфере.

описания турбулентности во всей области изменения часто используют спектр вида

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2 (\kappa_L^2 + \kappa^2)^{-1/6} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (17.90)$$

где  $\kappa_L = 1/L_0$ .

Рассмотрим полный спектр, представляющий собой произведение  $f_\chi(\kappa)$  [или  $f_s(\kappa)$ ] и  $\Phi_n(\kappa)$ . Ясно, что это произведение ведет себя совершенно различным образом в зависимости от соотношения между величинами  $2\pi/\sqrt{\lambda L}$ ,  $2\pi/l_0$  и  $2\pi/L_0$ . Величина  $2\pi/\sqrt{\lambda L}$  может быть больше, чем  $2\pi/l_0$ , может лежать в интервале между  $2\pi/L_0$  и  $2\pi/l_0$  или может быть меньше, чем  $2\pi/L_0$ . Эти три случая отвечают следующим областям изменения расстояния  $L$ :

$$L < l_0^2/\lambda \quad (\text{область применимости геометрической оптики}) \quad (17.91a)$$

$$l_0^2/\lambda < L < L_0^2/\lambda \quad (\text{дифракционная область}), \quad (17.91b)$$

$$L_0^2/\lambda < L. \quad (17.91b)$$

В земной атмосфере внутренний масштаб  $l_0$  порядка нескольких миллиметров, а внешний масштаб  $L_0$  порядка 10—100 м. Границы этих областей, конечно, не являются строго определенными, однако рис. 17.11 дает некоторое представление о порядке величины расстояния  $L$  на различных частотах.

Подставив (17.88), (17.89) или (17.90) в общую формулу (17.58), получим выражения для  $B_\chi$ ,  $B_S$  и  $B_{\chi S}$ . Ниже мы дадим краткую сводку этих результатов.

### 17.15.1. Область $L \ll l_0^2/\lambda$

Это область применимости геометрической оптики, обсуждавшаяся в разд. 17.10, так что можно воспользоваться формулами (17.64) и (17.65).

Поскольку в (17.64) под знаком интеграла стоит множитель  $\kappa^5$ , спектральная плотность  $\Phi_n(\kappa)$  не вносит вклада в амплитудные флуктуации  $B_\chi$  при малых  $\kappa$ . Поэтому мы используем для  $\Phi_n$  формулу (17.89) и значение интеграла (17.86). В результате получим

$$\begin{aligned} B_\chi(L, \rho) &= 0,033C_n^2(\pi^2 L^3/6) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \kappa_m^{7/3} F_1\left(\frac{7}{6}, 1; -\kappa_m^2 \rho^2/4\right) = \\ &= 0,0504C_n^2 L^3 \kappa_m^{7/3} F_1\left(\frac{7}{6}, 1; -\kappa_m^2 \rho^2/4\right). \end{aligned} \quad (17.92)$$

Для корреляционной функции фазы нельзя использовать формулы (17.88) или (17.89) при малых  $\kappa$ . Однако можно воспользоваться формулами (17.90) и (17.65), что дает

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= B_S(L, 0) = 4\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_0^2}\right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) = \\ &= 0,6514C_n^2 k^2 L L_0^{5/3} \psi\left(1, \frac{1}{6}; 1/\kappa_m^2 L_0^2\right), \end{aligned} \quad (17.93)$$

где  $\psi(a, b, z)$  — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, являющаяся независимой по отношению к функции Куммера. Здесь мы использовали значение интеграла [3]

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt = \Gamma(a) \psi(a, b; z), \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (17.94)$$

Замечая, что  $\kappa_m^2 L_0^2 \gg 1$ , и используя асимптотическое выражение для  $\psi^1$ , получаем

$$\sigma_S^2 = 0,7817C_n^2 k^2 L L_0^{5/3}. \quad (17.95)$$

<sup>1)</sup>  $\psi(a, b; z) \rightarrow z^{-a}$  при больших значениях  $|z|$ .

17.15.2. Область  $l_0^2/\lambda \ll L \ll L_0^2/\lambda$ 

Эта область является дифракционной, поэтому, вообще говоря, на флуктуации параметров волны влияет как  $l_0$ , так и  $L_0$ . Для амплитудных флуктуаций фильтрующая функция  $f_\chi \sim \chi^2$  при малых  $\chi$ , поэтому влияние внешнего масштаба  $L_0$  пренебрежимо мало. Если  $L \gg l_0^2/\lambda$ , то при любых  $\chi$  можно использовать

$$\Phi_n(\chi) = 0,033C_n^2 \chi^{-11/3}, \quad (17.96)$$

что дает выражение

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2 &= 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \chi d\chi f_\chi(\chi) \Phi_n(\chi) = \\ &= 0,033C_n^2 \pi^2 k^{7/6} L^{11/6} \left[ -\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \right] \frac{6}{11} \cos(5\pi/12) = 0,307C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \end{aligned} \quad (17.97)$$

полученное Татарским [336] [см. также приложение Г, (Г.10)].

В отличие от геометрикооптического случая (17.92), где  $\sigma_\chi^2$  не зависит от  $k$  и пропорциональна  $L^3$ , в дифракционной области  $\sigma_\chi^2$  пропорциональна  $\chi^{7/6}$  и  $L^{11/6}$ . Эти показатели степени ( $7/6$  и  $11/6$ ) прямо связаны с видом колмогоровского спектра  $\chi^{-11/3}$ , вследствие чего они часто используются для подтверждения его справедливости.

Используя (17.89), можно учесть влияние внутреннего масштаба. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2 &= 0,033\pi^2 C_n^2 k^2 L \left[ -\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \right] \times \\ &\times \left\{ -\chi_m^{-5/3} + \frac{6}{11} \frac{k}{L} \operatorname{Im} \left[ \exp\left(i\frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{L}{k} + i\frac{1}{\chi_m^2}\right)^{11/6} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.98)$$

Для корреляционной функции  $B_\chi(L, \rho)$  имеем

$$B_\chi(L, \rho) = \sigma_\chi^2 b_\chi(L, \rho), \quad b_\chi(L, \rho) = \frac{B_1 - B_2}{1 - B_3}. \quad (17.99)$$

где

$$B_1 = {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\chi_m^2 \rho^2/4\right),$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{6}{11} \left(\frac{L\chi_m^2}{k}\right)^{5/6} \operatorname{Im} \left[ \exp\left(i\frac{\pi}{12}\right) \left(1 + i\frac{k}{L\chi_m^2}\right)^{11/6} \times \right. \\ &\quad \left. \times {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1; -i\frac{\rho^2}{4} \frac{k}{L} \left(1 + i\frac{k}{L\chi_m^2}\right)^{-1}\right) \right], \end{aligned}$$

$$B_3 = \frac{6}{11} \left(\frac{L\chi_m^2}{k}\right)^{5/6} \operatorname{Im} \left[ \exp\left(i\frac{\pi}{12}\right) \left(1 + i\frac{k}{L\chi_m^2}\right)^{11/6} \right].$$

Из этого выражения видно, что радиус корреляции зависит как от  $\sqrt{\lambda L}$ , так и от  $l_0$ . Численные расчеты показывают, что радиус корреляции порядка  $\sqrt{\lambda L}$  и слабо зависит от  $l_0$ .

Вычисление интегралов при выводе (17.98) и (17.99) осуществлено на основе формулы <sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{\sin(Ax^2)}{Ax^2} \right] x^{n+1} \exp(-Bx^2) dx = \\ = \frac{\Gamma(n/2)}{2} \left\{ \frac{n}{2} B^{-(n/2+1)} - \frac{1}{A} \operatorname{Im} \left[ \exp\left(i \frac{n\pi}{4}\right) (A + iB)^{-n/2} \right] \right\}, \quad (17.100)$$

которая справедлива при  $n > -6$ .

Фильтрующая функция  $f_s(x)$  для фазовых флуктуаций становится близкой к 2 при значениях  $x$ , лежащих в энергетическом интервале ( $< 2\pi/L_0$ ), поэтому можно ожидать, что вихри размера  $L_0$  или больше оказывают влияние на вид корреляционной функции фазы. В этом интервале турбулентность, вообще говоря, анизотропна, и форма спектра зависит от того, как эта турбулентность образуется. Поэтому оказывается невозможным получить общее выражение для корреляционной функции фазы. Между тем флуктуации фазы представляют интерес с точки зрения исследования параметров крупномасштабной турбулентности. Во многих практических случаях измеряют разность фаз в двух точках или в два момента времени. При этом используется не корреляционная, а структурная функция.

## 17.16. Статистически неоднородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции и пространственная фильтрующая функция

Как отмечалось в разд. 17.9.2, случайная среда может быть статистически неоднородной, и тогда необходимо учитывать изменения флуктуационных характеристик показателя преломления вдоль трассы распространения. Предположим, что дисперсия  $\sigma_n^2 = \langle n_1^2 \rangle$  не постоянна, а меняется вдоль трассы распространения. Кроме того, будем считать, что корреляционная функция имеет гауссов вид. Тогда

$$\langle n_1(\mathbf{r}_1) n_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \left\langle n_1^2 \left( \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \right\rangle \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{l^2}\right), \quad (17.101)$$

<sup>1)</sup> Чтобы получить эту формулу, нужно положить в (17.86)  $s = 1$ ,  $p = 0$  и  $\mu = n + 1$ . Тогда (17.100) вычисляется почленно. Каждый член имеет смысл только при  $n > -2$  и расходится при  $n = -2, -4, -6, \dots$ . Однако оказывается, что сумма двух членов не имеет особенностей при  $n = -2$  и  $n = -4$ , так что сумма в (17.100) имеет смысл при  $n > -6$ . Такая процедура называется аналитическим продолжением.

где дисперсия  $\langle n_1^2 \rangle$  зависит от суммарной координаты, а  $l$  — радиус корреляции.

Спектральная плотность может быть легко вычислена [см. приложение А, (А.33)]:

$$\Phi_n(x) = \frac{\langle n_1^2(\eta) \rangle l^3}{8\pi \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 l^2}{4}\right). \quad (17.102)$$

Подставляя ее в (17.51), получаем выражение вида (17.61)

$$B_x(L, \rho) = \int_0^L d\eta G_x(\eta, \rho) \langle n_1^2(\eta) \rangle. \quad (17.103)$$

Аналогично находим  $B_S$  и  $B_{xS}$  с  $G_S$  и  $G_{xS}$  соответственно под знаком интеграла. Пространственная фильтрующая функция при этом имеет вид

$$\begin{aligned} G_x(\eta, \rho) &= \frac{\sqrt{\pi} k^2 l^3}{2} \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa \rho) \sin^2\left(\frac{L-x'}{2k} \kappa^2\right) \exp\left(-\frac{\kappa^2 l^2}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} k^2 l^3}{8} \left\{ \left[ \frac{1}{A} {}_1F_1\left(1, 1; -\frac{\rho^2}{4A}\right) \right] - \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{B} {}_1F_1\left(1, 1; -\frac{\rho^2}{4B}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17.104)$$

где  $A = l^2/4$ ,  $B = l^2/4 - i(L - \eta)/k$ , а  ${}_1F_1(a, b; z)$  — функция Куммера<sup>1)</sup>. При выводе этой формулы мы использовали (17.86) при  $\mu = c = 1$ . Аналогично в случае пространственной фильтрующей функции для фазовых флуктуаций имеем

$$\begin{aligned} G_S(\eta, \rho) &= \frac{\sqrt{\pi} k^2 l^3}{8} \left\{ \left[ \frac{1}{A} {}_1F_1\left(1, 1; -\frac{\rho^2}{4A}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{B} {}_1F_1\left(1, 1; -\frac{\rho^2}{4B}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17.105)$$

а для взаимной корреляции —

$$G_{xS}(\eta, \rho) = \frac{\sqrt{\pi} k^2 l^3}{8} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{B} {}_1F_1\left(1, 1; -\frac{\rho^2}{4B}\right) \right]. \quad (17.106)$$

Рассмотрим эти фильтрующие функции в двух предельных случаях и найдем выражения для дисперсий флуктуаций при  $\rho = \rho_1 - \rho_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} B_x(L, 0) &= \langle \chi^2 \rangle = \sigma_x^2, & B_S(L, 0) &= \langle S_1^2 \rangle = \sigma_S^2, \\ B_{xS}(L, 0) &= \langle \chi S_1 \rangle = \sigma_{xS}^2. \end{aligned} \quad (17.107)$$

<sup>1)</sup> Функцию  ${}_1F_1(1, 1, z)$  можно выразить также через интегральную показательную функцию [3].

а. Случай  $l \ll \sqrt{\lambda L}$ . В этом случае имеем

$$\sigma_x^2 = \sigma_S^2 = \frac{\sqrt{\pi} k^2 l}{2} \int_0^L d\eta \langle n_1^2(\eta) \rangle, \quad (17.108)$$

$$\sigma_{xS}^2 = \frac{\sqrt{\pi} k^2 l^3}{8} \int_0^L d\eta \frac{(L - \eta)/k}{(l/2)^4 + [(L - \eta)/k]^2} \langle n_1^2(\eta) \rangle.$$

б. Случай  $l \gg \sqrt{\lambda L}$ . В этом случае имеем

$$\sigma_x^2 = \frac{8\sqrt{\pi}}{l^3} \int_0^L (L - \eta)^2 \langle n_1^2(\eta) \rangle, \quad \sigma_S^2 = \sqrt{\pi} k^2 l \int_0^L d\eta \langle n_1^2(\eta) \rangle, \quad (17.109)$$

$$\sigma_{xS}^2 = \frac{2\sqrt{\pi} k}{l} \int_0^L d\eta (L - \eta) \langle n_1^2(\eta) \rangle.$$

## 17.17. Вариации интенсивности турбулентности вдоль трассы распространения

В разд. 17.15 предполагалось, что турбулентность однородна и изотропна. Между тем вполне понятно, что турбулентность может быть однородной и изотропной только в пределах трассы длиной порядка внешнего масштаба турбулентности  $L_0$ . Следует ожидать, что при вертикальном распространении волны в атмосфере интенсивность турбулентности принимает совершенно отличающиеся значения в двух различных точках трассы, отстоящих одна от другой на расстояние, превышающее  $L_0$ . В случае распространения на заданной высоте над земной поверхностью интенсивность турбулентности может быть приближенно одинаковой вдоль трассы.

Эту ситуацию можно описать, представив спектр показателя преломления в виде

$$\Phi_n(x, \mathbf{r}) = C_n^2(\mathbf{r}) \Phi_n^{(0)}(x), \quad (17.110)$$

$$\Phi_n^{(0)}(x) = 0,033x^{-11/3} \text{ в инерционном интервале.}$$

Структурная характеристика  $C_n$  считается здесь функцией координаты.

В случае распространения плоской волны  $C_n(\mathbf{r})$  можно считать функцией только расстояния  $x$ . Этот случай рассматривается в разд. 17.9.2. Используя (17.110) и осуществляя интегри-

рование в формуле (17.61), получаем из (17.51) выражение

$$\sigma_x^2 = 0,563k^{7/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) (L - \eta)^{5/6}, \quad (17.111)$$

которое справедливо при  $\lambda L \ll l_0^2$ .

Если условие  $\lambda L \ll l_0^2$  не выполнено, то необходимо учитывать влияние внутреннего масштаба с использованием формулы (17.89). Тогда находим

$$B_x(L, \rho) = 0,033\pi^2 k^{7/6} L^{11/6} \left[ -\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \right] \frac{1}{L} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) G_x(\eta),$$

где

$$G_x(\eta) = \operatorname{Re} \left\{ D^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\rho^2/4D\right) - \right. \\ \left. - A^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\rho^2/4A\right) \right\}, \\ D = i(1 - \eta/L) + (k/L)(1/\kappa_m^2), \quad A = (k/L)(1/\kappa_m^2). \quad (17.112)$$

Заметим, что при  $\rho = 0$   ${}_1F_1(a, b; 0) = 1$ , поэтому имеем [179, 190]

$$G_x(\eta) = \operatorname{Re} \{ D^{5/6} - A^{5/6} \}. \quad (17.113)$$

## 17.18. Пределы применимости теории слабых флуктуаций

Область применимости первого приближения Рытова, используемого в этой главе, определяется из того условия, что дисперсия уровня мала по сравнению с единицей и не превышает 0,2—0,5:

$$\sigma_x^2 < 0,2 - 0,5. \quad (17.114)$$

Хотя это требование имеет смысл для амплитудных флуктуаций, обычно считается, что теория слабых флуктуаций пригодна для описания фазовых флуктуаций и вне области, определяемой условием (17.114). Фактически приближение Рытова для фазовых флуктуаций оказывается справедливым в области сильных флуктуаций, где соответствующее приближение для флуктуаций уровня становится неприменимым [15].

## 17.19. Другие задачи

Флуктуациям волн, распространяющихся в пределах прямой видимости, посвящено большое количество исследований. В работах многих авторов рассматриваются вопросы влияния случай-

ных сред на характеристики каналов связи [52, 81, 150, 174, 197, 198]. Значительное число исследований посвящено флуктуациям микроволнового излучения в турбулентной атмосфере [73, 235, 263, 264, 267, 377] и в атмосферах планет [384, 385, 387]. Обширные исследования проведены по изучению распространения оптического излучения в атмосфере [44, 46, 67, 88, 124, 131—134, 136, 138, 168, 187, 259, 288, 300, 306, 396]. Другие исследования охватывают такие вопросы, как усредняющее действие апертуры и предельная разрешающая способность [80, 130, 131, 170, 175, 193, 343], распределение вероятностей флуктуаций [369], мерцания волн от радиозвезд [218, 295], влияние турбулентности на работу радиолокатора с синтезированной апертурой [289] и формирование изображений в воде [398].

# Распространение сферической волны и волнового пучка в турбулентной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуаций

В гл. 17 рассмотрены флуктуации плоской волны в случайной среде. Между тем на практике часто оказывается необходимым принимать во внимание взаимное расположение излучателя и приемника, который может находиться в ближней или дальней зоне по отношению к излучателю.

Рассмотрим излучающую апертуру диаметра  $D$ . Если случайная среда, лежащая между излучателем и приемником, сосредоточена в основном в дальней зоне излучателя, то излучение можно приближенно представить в виде сферической волны. С другой стороны, если случайная среда находится в ближней зоне излучателя, то необходимо учитывать пространственную ограниченность волны. Этот случай часто реализуется при анализе распространения оптического излучения. В данной главе мы рассмотрим задачу о распространении сферической волны и волнового пучка в случайной среде.

## 18.1. Приближение Рытова для сферической волны

Как показано в разд. 17.3, первая итерация приближения Рытова имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) \exp[\psi_1(\mathbf{r})], \quad \psi_1(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r}) + iS_1(\mathbf{r}), \quad (18.1a)$$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int_{V'} h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}') dV', \quad (18.1b)$$

где

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2k^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') / U_0(\mathbf{r}), \quad (18.1в)$$

$U_0(\mathbf{r})$  — поле падающей волны в отсутствие турбулентной среды и  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — функция Грина свободного пространства.

Рассмотрим сферическую волну, излучаемую из начала координат  $U_0(\mathbf{r}) = (1/4\pi r) \exp(ikr)$ . Поскольку рассеяние происходит в направлениях, близких к оси  $x$  (разд. 17.4), для  $U_0(\mathbf{r})$  и  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  можно воспользоваться следующими приближенными выражениями:

$$U_0(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi x} \exp\left[ik\left(x + \frac{\rho^2}{2x}\right)\right],$$

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx \frac{1}{4\pi|x - x'|} \exp\left\{ik\left[(x - x') + \frac{|\rho - \rho'|^2}{2(x - x')}\right]\right\}, \quad (18.2)$$

где  $\rho = y\hat{y} + z\hat{z}$  и  $\rho' = y'\hat{y} + z'\hat{z}$ .

Подставляя (18.2) в (18.1в), получаем

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{k^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma(x-x')} \exp\left[i \frac{k}{2} \frac{|\rho' - \gamma\rho|^2}{\gamma(x-x')}\right], \quad (18.3)$$

где  $\gamma = x'/x$ .

Заметим, что при  $\gamma = 1$  (18.3) переходит в соответствующее выражение для плоской волны. Укажем также, что величина  $\rho' - \gamma\rho$  описывает расходимость волны при распространении от  $x'$  до  $x$  (рис. 18.1).

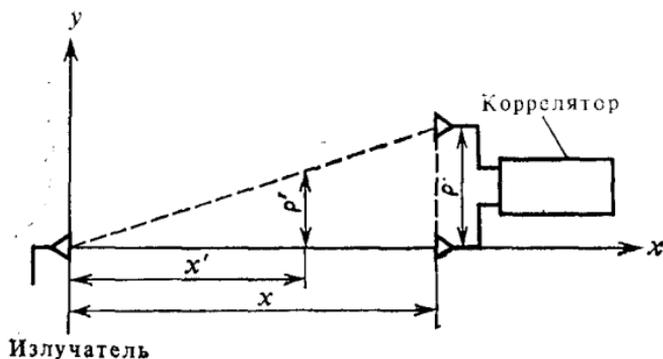


Рис. 18.1. Сферическая волна; показано соответствие между  $\rho'$  и  $(x'/x)\rho$ .

Поскольку формула (18.3) может быть получена путем замены в соответствующей формуле для плоской волны (17.27б)  $\rho$  на  $\gamma\rho$  и  $x - x'$  на  $\gamma(x - x')$ , приходим к выводу, что все результаты, относящиеся к случаю плоской волны, переходят в результаты для сферической волны, если сделать замену

$$\rho \rightarrow \gamma\rho \quad \text{и} \quad x - x' \rightarrow \gamma(x - x'). \quad (18.4)$$

Поэтому из формул (17.51) — (17.53) находим следующие выражения для корреляционных функций:

$$B_x(L, \rho) = \langle \chi(L, \rho_1) \chi(L, \rho_2) \rangle = (2\pi^2) \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\gamma\rho) |H_r|^2 \Phi_n(\kappa), \quad (18.5)$$

где

$$|H_r|^2 = k^2 \sin^2 \left[ \frac{\gamma(L-\eta)}{2k} \kappa^2 \right], \quad \gamma = \frac{\eta}{L}, \quad \rho = |\rho_1 - \rho_2|;$$

$$B_S(L, \rho) = \langle S_1(L, \rho_1) S_1(L, \rho_2) \rangle =$$

$$= (2\pi)^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\gamma\rho) |H_i|^2 \Phi_n(\kappa), \quad (18.6)$$

где

$$|H_i|^2 = k^2 \cos^2 \left[ \frac{\gamma(L-\eta)}{2k} \kappa^2 \right],$$

и

$$\begin{aligned} B_{\chi_S}(L, \rho) &= \langle \chi(L, \rho_1) S_1(L, \rho_2) \rangle = \\ &= (2\pi)^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\gamma\rho) H_r H_i \Phi_n(\kappa), \end{aligned} \quad (18.7)$$

где

$$H_r H_i = \frac{k^2}{2} \sin \left[ \frac{\gamma(L-\eta)}{k} \kappa^2 \right].$$

Структурные функции определяются формулами

$$\begin{aligned} D_\chi(L, \rho) &= \langle |\chi(L, \rho_1) - \chi(L, \rho_2)|^2 \rangle = \\ &= 8\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa [1 - J_0(\kappa\gamma\rho)] |H_r|^2 \Phi_n(\kappa), \end{aligned} \quad (18.8)$$

$$\begin{aligned} D_S(L, \rho) &= \langle |S_1(L, \rho_1) - S_1(L, \rho_2)|^2 \rangle = \\ &= 8\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa [1 - J_0(\kappa\gamma\rho)] |H_i|^2 \Phi_n(\kappa). \end{aligned} \quad (18.9)$$

## 18.2. Дисперсия для колмогоровского спектра

Рассмотрим дисперсию флуктуаций уровня для случая, когда спектр флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(\kappa)$  является колмогоровским. Удобно рассмотреть три случая: а)  $l_0^2/\lambda \ll L_S \ll \ll L_0^2/\lambda$ , б)  $L_S \sim L_0^2/\lambda$  и в)  $L_S \sim l_0^2/\lambda$ , где  $L_S = (\eta/L)(L-\eta)$ , а  $\eta$  — расстояние от излучателя до среды<sup>1)</sup>.

а. В случае, когда дистанция  $L_S$  лежит в пределах  $l_0^2/\lambda \ll \ll L_S \ll L_0^2/\lambda$ , основной вклад во флуктуации амплитуды дает инерционный интервал ( $1/L_0 \ll \kappa \ll 1/l_0$ ) спектра  $\Phi_n(\kappa)$ . Поэтому воспользуемся формулой

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2(\eta) \kappa^{-11/3}. \quad (18.10)$$

Подставляя (18.10) в (18.5) и полагая  $\rho = 0$ , находим дисперсию

$$\sigma_\chi^2 = 0,563 k^{7/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) \left[ \frac{\eta(L-\eta)}{L} \right]^{5/6}. \quad (18.11a)$$

<sup>1)</sup> Поскольку основной вклад во флуктуации принимаемой волны вносит область вблизи средней точки ( $\eta = L/2$ ),  $L_S$  порядка  $L$  (или  $L/4$ ),

Если структурная постоянная  $C_n^2$  не меняется вдоль трассы, то имеем

$$\sigma_x^2 = 0,124 C_n^2 k'^{1/6} L^{11/6}. \quad (18.116)$$

б. В случае  $L_S \sim L_0^2/\lambda$  формула (18.10) непригодна. Здесь необходимо учитывать влияние внешнего масштаба. Один из удобных способов такого учета состоит в использовании модифицированного спектра Кармана, определяемого выражением

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2(\eta) (\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6}. \quad (18.12)$$

Подставляя (18.12) в (18.5), получаем

$$\sigma_x^2 = 0,326 k^2 \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) L_0^{5/3} \left[ \frac{6}{5} - \operatorname{Re} \psi \left( 1, \frac{1}{6}; i \frac{\gamma(L-\eta)}{kL_0^2} \right) \right]. \quad (18.13)$$

в. В случае  $L_S \sim l_0^2/\lambda$  нельзя пренебрегать влиянием внутреннего масштаба. Поэтому воспользуемся спектром вида

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2(\eta) \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (18.14)$$

где  $\kappa_m = 5,91/l_0$ ; в результате получим

$$\sigma_x^2 = 2,1755 k'^{1/6} L^{5/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) G_x(\eta), \quad (18.15)$$

где

$$G_x(\eta) = \operatorname{Re} \{ D^{5/6} - A^{5/6} \}, \quad D = i\gamma \frac{(L-\eta)}{L} + \left( \frac{k}{L} \right) \frac{1}{\kappa_m^2}, \quad A = \left( \frac{k}{L} \right) \frac{1}{\kappa_m^2}.$$

Рассмотрим теперь дисперсию фазовых флуктуаций  $\sigma_S^2$ . В этом случае нельзя использовать выражение (18.10), так как оно приводит к расходящемуся интегралу. Это связано с большим влиянием энергетического интервала спектра  $\Phi_n(\kappa)$  на фазовые флуктуации и, следовательно, с важной ролью внешнего масштаба. Поэтому необходимо воспользоваться формулой (18.12). В результате получим

$$\sigma_S^2 = 0,326 k^2 \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) L_0^{5/3} \left[ \frac{6}{5} + \operatorname{Re} \psi \left( 1, \frac{1}{6}; i \frac{\gamma(L-\eta)}{kL_0^2} \right) \right]. \quad (18.16)$$

### 18.3. Корреляционные и структурные функции для колмогоровского спектра

Корреляционная функция амплитуды для спектра (18.10) имеет вид

$$B_x(L, \rho) = 2,1755k^{1/6}L^{5/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) G_x(\eta, \rho), \quad (18.17)$$

где

$$G_x(\eta, \rho) = \text{Re} \left[ D_1^{5/6} F_1 \left( -\frac{5}{6}, 1; i \frac{k\gamma\rho^2}{4(L-\eta)} \right) \right].$$

Заметим, что при  $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$   $G_x$  стремится к  $G_x(\eta, \rho) = 1,063 (k\gamma^2/4L)^{5/6} \rho^{5/3}$ .

Рассмотрим теперь структурные функции  $D_x$  и  $D_s$ . Используя спектр (18.10), находим [179, 180]

$$\left. \begin{matrix} D_x \\ D_s \end{matrix} \right\} = 2,1755k^{1/6}L^{5/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) G_d(\eta, \rho), \quad (18.18)$$

$$G_d(\eta, \rho) = 0,6697 \left( \frac{k}{L} \right)^{5/6} (\gamma\rho)^{5/3} \pm \pm 2D^{5/6} \left[ 1 - {}_1F_1 \left( -\frac{5}{6}, 1; -\frac{(\gamma\rho)^2}{4D} \left( \frac{k}{L} \right) \right) \right],$$

где  $D = i\gamma(1 - \eta/L)$ , а верхний и нижний знаки отвечают  $D_x$  и  $D_s$  соответственно. Заметим, что при  $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$  для структурной функции фазы  $G_d$  переходит в  $G_d(\eta, \rho) \rightarrow 1,339 (k/L)^{5/6} (\gamma\rho)^{5/3}$ .

При  $C_n^2(\eta) = \text{const}$  структурная функция фазы для  $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$  имеет вид

$$D_s(L, \rho) = 1,0924k^2LC_n^2\rho^{5/3}. \quad (18.19)$$

### 18.4. Волновой пучок

Рассмотрим сначала волновой пучок в свободном пространстве. Будем считать, что на апертуре ( $x = 0$ ) распределение амплитуды имеет гауссов вид с шириной пучка  $W_0$ , а распределение фазы — квадратичный вид с радиусом кривизны  $R_0$ . Такое фазовое распределение отвечает пучку, сфокусированному в плоскости  $x = R_0$  (рис. 18.2).

Следовательно, в плоскости  $x = 0$  поле определяется выражением

$$U_0(0, \rho) = \exp \left[ - (1/W_0^2 + ik/2R_0) \rho^2 \right]. \quad (18.20a)$$

Для удобства запишем его в виде

$$U_0(0, \rho) = \exp\left[-\frac{1}{2}(k\alpha)\rho^2\right], \quad (18.206)$$

где  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = (\lambda/\pi W_0^2) + i(1/R_0)$ . В произвольной точке  $(x, \rho)$  поле волнового пучка равно [179, 180]

$$U_0(x, \rho) = \frac{1}{1 + i\alpha x} \exp\left[ikx - \frac{k\alpha}{2} \frac{\rho^2}{(1 + i\alpha x)}\right]. \quad (18.21)$$

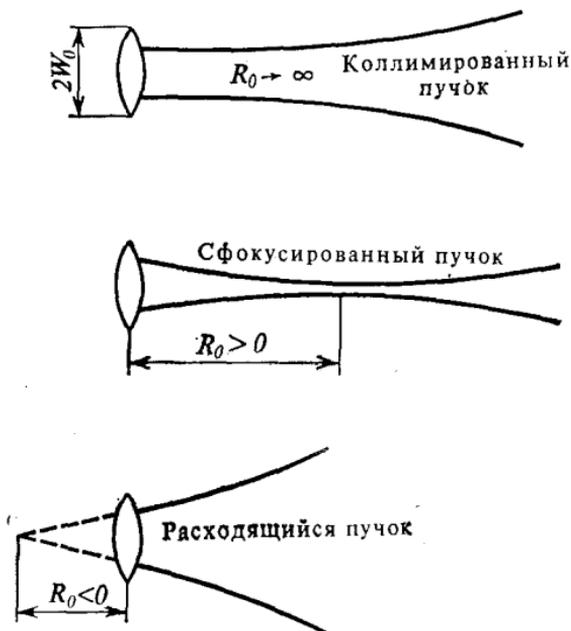


Рис. 18.2. Волновой пучок.

Это выражение справедливо на расстояниях

$$x \ll \pi^3 W_0^4 / \lambda^3. \quad (18.22)$$

Условие (18.22) выполняется практически всегда. Поэтому мощность в точке  $(x, \rho)$  есть

$$|U_0(x, \rho)|^2 = (W_0^2/W^2) \exp(-2\rho^2/W^2), \quad (18.23a)$$

где  $W$  — размер пучка на расстоянии  $x$ , который определяется выражением

$$W^2 = W_0^2 [(1 - \alpha_i x)^2 + (\alpha_r x)^2]. \quad (18.23б)$$

Полная излучаемая мощность не должна зависеть от расстояния и дается выражением

$$P_t = 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho |U_0(x, \rho)|^2 = \frac{\pi}{2} W_0^2. \quad (18.23в)$$

Отметим, что для коллимированного пучка

$$R_0 \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_i = 0. \quad (18.24)$$

Для расходящегося и сфокусированного пучков имеем соответственно

$$R_0 < 0 \text{ и } R_0 > 0. \quad (18.25)$$

Если пучок сфокусирован в точку наблюдения, то  $x = R_0$  и  $\alpha_i x = 1$ .

Подставив теперь (18.21) в (18.1в), получим

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{k^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma(x-x')} \exp\left[i \frac{k}{2} \frac{|\rho' - \gamma\rho|^2}{\gamma(x-x')}\right], \quad (18.26)$$

где  $\gamma = (1 + i\alpha x')/(1 + i\alpha x)$ . Заметим, что при  $\gamma = 1$  (18.26) переходит в формулу для плоской волны, а при  $\gamma = x'/x$  — в формулу для сферической волны. Случаю плоской волны отвечает  $\alpha \rightarrow 0$  ( $W_0 \rightarrow \infty$  и  $R_0 \rightarrow \infty$ ), а случаю сферической волны —  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $W_0 \rightarrow 0$  и  $R_0 \rightarrow \infty$ ). Отметим, что  $\gamma$  в (18.26) комплексна, поэтому процедура нахождения корреляционных и структурных функций должна быть соответствующим образом модифицирована: Подробности этой процедуры описаны в ряде работ [179, 180]. Приведем здесь общие выражения для корреляционных функций, дисперсий и структурных функций:

$$B_\chi = B_\chi(L, \rho_1, \rho_2) = \langle \chi(L, \rho_1) \chi(L, \rho_2) \rangle, \\ B_S = B_S(L, \rho_1, \rho_2) = \langle S_1(L, \rho_1) S_1(L, \rho_2) \rangle, \quad (18.27a)$$

$$\sigma_\chi^2(L, \rho) = B_\chi(L, \rho, \rho), \quad \sigma_S^2(L, \rho) = B_S(L, \rho, \rho), \quad (18.27б)$$

$$D_\chi(L, \rho_1, \rho_2) = \langle |\chi(L, \rho_1) - \chi(L, \rho_2)|^2 \rangle, \\ D_S(L, \rho_1, \rho_2) = \langle |S_1(L, \rho_1) - S_1(L, \rho_2)|^2 \rangle, \quad (18.27в)$$

$$\left. \begin{aligned} B_\chi(L, \rho_1, \rho_2) \\ B_S(L, \rho_1, \rho_2) \end{aligned} \right\} = \\ = \operatorname{Re} \left\{ 4\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa \frac{1}{2} J_0(\kappa P) |H|^2 \pm J_0(\kappa Q) H^2 \right\} \Phi_n(\eta, \kappa), \quad (18.28a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\chi^2(L, \rho) \\ \sigma_S^2(L, \rho) \end{aligned} \right\} = 2\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa [I_0(2\gamma_i \kappa \rho) |H|^2 \pm \operatorname{Re}(H^2)] \Phi_n(\eta, \kappa), \quad (18.28б)$$

где  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя,

$$\left. \begin{aligned} D_\chi(L, \rho_1, \rho_2) \\ D_S(L, \rho_1, \rho_2) \end{aligned} \right\} = 4\pi^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \kappa d\kappa \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{1}{2} I_0(2\gamma_i \kappa \rho_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} I_0(2\gamma_i \kappa \rho_2) - J_0(\kappa P) \right] |H|^2 \pm [1 - J_0(\kappa Q)] H^2 \right\} \Phi_n(\eta, \kappa). \quad (18.28в)$$

В этих формулах верхний и нижний знаки отвечают верхней и нижней функциям соответственно. Здесь использованы следующие обозначения:

$$P = [(\gamma\gamma_1 - \gamma^*\gamma_2)^2 + (\gamma z_1 - \gamma^*z_2)^2]^{1/2}, \quad Q = \gamma [(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$$

$$|H|^2 = k^2 \exp\left[-\frac{\gamma_i(L - \eta)}{k} \kappa^2\right], \quad H^2 = -k^2 \exp\left[-i\frac{\gamma(L - \eta)}{k} \kappa^2\right],$$

$$\gamma = (1 + i\alpha\eta)/(1 + i\alpha L) = \gamma_r - i\gamma_i,$$

$$\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \rho_1 = (y_1^2 + z_1^2)^{1/2}, \quad \rho_2 = (y_2^2 + z_2^2)^{1/2},$$

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = \lambda/\pi W_0^2 + i1/R_0.$$

### 18.5. Дисперсия для волнового пучка и применимость приближения Рытова

Дисперсия флуктуаций уровня на оси  $\rho = 0$  получается из формулы (18.286). Имеем

$$\sigma_x^2 = 2,1755k^{7/6}L^{5/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) G_x(\eta), \quad (18.29)$$

$$G_x(\eta) = \text{Re} [\gamma(1 - \eta/L)]^{5/6} - [\gamma_i(1 - \eta/L)]^{5/6}.$$

Выражения для дисперсий коллимированного и расходящегося пучков аналогичны соответствующим выражениям для плоской и сферической волн. Для сфокусированного пучка дисперсия в фокусе значительно меньше, что указывает на ослабление мерцаний. Однако из эксперимента следует, что ослабление мерцаний либо отсутствует, либо не поддается измерению. Частично это расхождение может быть связано с ограниченностью области применимости формулы (18.29). Приближение Рытова справедливо только при

$$\sigma_x^2 < 0,2 - 0,5. \quad (18.30)$$

Это условие выполняется для коллимированного и расходящегося пучков. Между тем для сфокусированного пучка, как показано в недавно опубликованной работе [185], условие применимости, дополнительное по отношению к (18.30), имеет вид

$$1,36C_n^2k^{7/6}L^{11/6} \left[ \frac{\alpha_r L}{(\alpha_r L)^2 + (1 - \alpha_i L)^2} \right]^{5/6} \ll 1. \quad (18.31)$$

Для пучка, сфокусированного в точку наблюдения ( $L = R_0$ ), (18.31) принимает вид

$$0,762C_n^2k^2LW_0^{5/3} \ll 1. \quad (18.32)$$

Это условие является существенно более жестким, чем (18.30), и в практических случаях, как правило, не выполняется.

Условие применимости приближения Рытова относится к флуктуациям уровня. В то же время имеется подтверждение того, что приближение Рытова для фазовых флуктуаций справедливо и вне области слабых флуктуаций (18.30). Фактически приближение Рытова оказывается применимым даже в области сильных флуктуаций [15].

## 18.6. Дистанционное зондирование атмосфер планет

В качестве примера рассмотрим задачу о дистанционном зондировании параметров турбулентности атмосферы планеты при помощи метода радиопросвечивания космического зонда [165, 384, 385, 387]. Предположим, что космический аппарат находится на расстоянии  $L_1$  от ближайшей к планете точки, лежащей

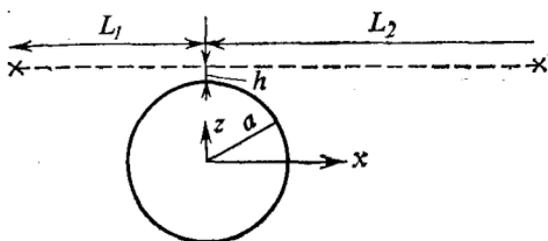


Рис. 18.3. Дистанционное зондирование атмосферы планеты методом радиопросвечивания.

на траектории луча, а Земля — на расстоянии  $L_2$  (рис. 18.3). Будем считать также, что структурная характеристика  $C_n^2(r)$  является функцией расстояния от центра планеты  $r$  и может быть аппроксимирована экспоненциальным профилем с высотным масштабом  $H$ :

$$C_n^2(r) = C_{n0}^2 \exp[-(r - a)/H], \quad (18.33)$$

где  $C_{n0}^2$  — значение структурной характеристики при  $r = a$ .

Траектория луча есть  $z = a + h$  и  $y = 0$  (рис. 18.3). Поэтому имеем

$$r = [x^2 + (a + h)^2]^{1/2}. \quad (18.34)$$

Поскольку случайная среда сосредоточена в основном вблизи планеты, можно принять  $|x| \ll a + h$ , так что приближенно имеем

$$r = (a + h) + x^2/2(a + h). \quad (18.35)$$

Предположим теперь, что  $L_s = L_1 L_2 / L$  лежит в интервале  $l_0^2 / \lambda \ll L_s \ll L_0^2 / \lambda$ , поэтому мы можем воспользоваться формулой (18.11a). Тогда получим

$$\sigma_x^2 = 0,563 k^{1/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) \left[ \frac{\eta(L-\eta)}{L} \right]^{1/6}, \quad (18.36)$$

где

$$C_n^2(\eta) = C_{n0}^2 \exp \left[ -\frac{h}{H} - \frac{(\eta - L_1)^2}{2(a+h)H} \right].$$

Принимая, что  $A^2 = 2(a+h)H \ll L_s^2$ , можно использовать приближенное равенство

$$\int d\eta \exp \left[ -\frac{(\eta - L_1)^2}{A^2} \right] f(\eta) d\eta \approx (\pi)^{1/2} A f(L_1). \quad (18.37)$$

В результате получаем

$$\sigma_x^2 = 0,563 k^{1/6} [C_{n0}^2 \exp(-h/H)] [2\pi(a+h)H]^{1/2} [(L_1 L_2)/(L_1 + L_2)]^{1/6}. \quad (18.38)$$

Это выражение справедливо при  $l_0^2 / \lambda \ll L_1 L_2 / (L_1 + L_2) \ll L_0^2 / \lambda$ . Если расстояние  $L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$  становится большим, чем  $L_0^2 / \lambda$  или  $HL_0 / \lambda$ , то френелевский размер  $[\lambda(L_1 L_2)/(L_1 + L_2)]^{1/2}$  оказывается порядка или больше  $H$ , и необходимо учитывать влияние неоднородности в направлении оси  $z$ . Этот вопрос обсуждается в разд. 19.8.

## 18.7. Некоторые близкие задачи

Распространение сферической волны и волнового пучка в случайной среде исследовалось во многих работах. В этом разделе мы наметим пути развития этих исследований и рассмотрим некоторые другие близкие задачи.

Первая теоретическая работа по волновым пучкам была выполнена Коном и Татарским [213] и относится к коллимированному пучку. Впоследствии Шмельцер [304], Фрид и Сидман [139], Киношита и др. [205] и Исимару [179, 180] провели обширные исследования распространения как сфокусированного, так и коллимированного пучков. Гербхардт и Коллинз [153] рассмотрели среднее значение флуктуаций уровня на основе второго приближения метода Рытова.

Дисперсия флуктуаций уровня, определяемая формулой (18.29), была рассчитана Фридом и Сидманом (рис. 18.4). Дисперсия для коллимированного пучка при приближении размера апертуры к нулю ( $\alpha_r x \rightarrow \infty$ ) стремится к значению дисперсии

для сферической волны, а при возрастании размера апертуры до бесконечности ( $\alpha_r x \rightarrow 0$ ) — к значению дисперсии для плоской волны. Эта закономерность подтверждена экспериментально Хмелевцовым и Цвюком [204].

Показано, что для сфокусированного пучка дисперсия очень мала при больших апертурах ( $\alpha_r x \ll 1$ ) (рис. 18.4). Для подтверждения такого уменьшения мерцаний, предсказываемого формулой (18.29), было проведено несколько экспериментальных исследований [200, 201]. Однако оказалось, что экспериментальное значение дисперсии ближе к значению дисперсии для коллимированного пучка, чем к значению, даваемому формулой

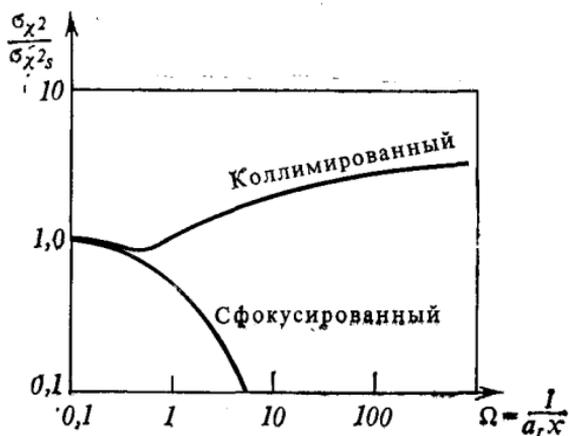


Рис. 18.4. Дисперсия флуктуаций уровня волнового пучка  $\sigma_{\chi^2}$ , нормированная на дисперсию уровня сферической волны  $\sigma_{\chi^2_{сф}}$ , как функция  $\Omega = 1/(\alpha_r x) = \pi W_0^2 / \lambda x$ .

(18.29). Дальнейшие исследования [185] показали, что, хотя дисперсия на оси пучка существенно уменьшается, тем не менее вне оси сфокусированного пучка она становится большой, и условие (18.30), примененное к дисперсии вне оси пучка, приводит к области применимости, определяемой (18.31). В пределах этой области средняя интенсивность волнового пучка в случайной среде приблизительно равна [185]

$$\langle I(L, \rho) \rangle = \langle |U(L, \rho)|^2 \rangle = \frac{W_0^2}{W_b^2} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W_b^2}\right), \quad (18.39)$$

$$W_b^2 = W^2 / (1 - f), \quad W^2 = W_0^2 [(\alpha_r L)^2 + (1 - \alpha_i L)^2],$$

$$f = 1,36 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left[ \frac{\alpha_r L}{(\alpha_r L)^2 + (1 - \alpha_i L)^2} \right]^{5/6}.$$

В работе Бака [60] приведены экспериментальные результаты, полученные для пучка, сфокусированного в точку наблюдения.

В этой работе показано, что при фиксированной длине трассы и на заданной частоте с увеличением размера излучающей апертуры  $W_0$  размер пучка  $W_b$  сначала убывает, достигает некоторого минимума, а затем начинает возрастать. Кроме того, было отмечено, что размер пучка  $W_b$  растет с увеличением длины трассы  $L$  по закону, немного более быстрому, чем линейный. Эти результаты могут быть объяснены на основе формулы (18.39), записанной для сфокусированного пучка ( $\alpha_i L = 1$ ). Результаты других экспериментальных исследований, относящихся к волновым пучкам, представлены в работах [140, 147]. В работе [104] проведены теоретические и экспериментальные исследования различных характеристик волновых пучков. Дрожание пучка и подавление такого дрожания при помощи быстро следящего излучателя рассмотрены в работе [106]. Среди других исследований по распространению волновых пучков можно указать на работы [166, 203, 210, 211, 271]. В работах [69, 212] рассмотрено распространение сферической волны; в работе [68] результаты этих исследований используются для диагностики турбулентности. Конечный размер приемной апертуры ослабляет флуктуации принятого сигнала. Этот эффект, называемый усредняющим действием апертуры, исследовался во многих работах [133, 242, 337, 343].

Кон и Татарский [213] получили выражения для угла прихода  $\Delta\alpha$  в случае слабых флуктуаций. Если волна падает на плоскость  $x = \text{const}$  под углом  $\Delta\alpha$  к оси  $x$ , то разность фаз  $\Delta S_1$  в двух точках, разнесенных на расстояние  $\rho$  в этой плоскости, есть  $\Delta S_1 = (k\rho)\Delta\alpha$ . Поэтому дисперсия флуктуаций угла прихода определяется выражением

$$\langle(\Delta\alpha)^2\rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} D_S(\rho)/k^2\rho^2, \quad (18.40)$$

где  $D_S(\rho) = \langle(\Delta S_1)^2\rangle$  — структурная функция фазы. Теоретические результаты Кона и Татарского экспериментально подтверждены в работе [44]. В этой главе мы рассмотрели теорию слабых флуктуаций сферической волны и волновых пучков. Сильные флуктуации обсуждаются в гл. 20.

# Временная корреляция и частотные спектры флуктуаций волн в случайной среде и влияние статистической неоднородности случайной среды

В гл. 17 и 18 мы предполагали, что флуктуации показателя преломления являются случайными функциями только координат и не зависят от времени. Во многих прикладных задачах это предположение не выполняется. Так, например, атмосферная турбулентность постоянно находится в движении, поэтому распространяющаяся через нее волна флуктуирует во времени.

Статистическое описание временных флуктуаций волны в движущейся случайной среде может быть дано на основе временных корреляционных функций или частотных спектров. В этой главе мы рассмотрим теорию временных флуктуаций и частотные спектры. Помимо флуктуаций на одной рабочей частоте, будет исследована корреляция флуктуаций на двух частотах. Мы рассмотрим также корреляцию двух пересекающихся пучков. В рассмотрение включен, кроме того, вопрос о влиянии статистической неоднородности случайной среды.

## 19.1. Частотные спектры плоской волны

Рассмотрим сначала плоскую волну, падающую на случайную среду, характеризуемую флуктуациями показателя преломления  $n_1(\mathbf{r}, t)$ . Предположим, что среда движется со скоростью ветра  $\mathbf{V}$ , которая выражается в виде суммы средней скорости  $\mathbf{U}$  и флуктуаций скорости  $\mathbf{V}_f$ :

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}_f. \quad (19.1)$$

Будем считать, что скорость ветра является медленной функцией времени. Например, для турбулентности положим, что вихри некоторого размера  $l$  не меняют заметно своей формы в течение времени, требуемого для перемещения этих вихрей на расстояние  $l$ . Это означает, что среда считается «замороженной» и сносится ветром без изменения ее внутренней структуры. Такое предположение соответствует гипотезе Тейлора о замороженной турбулентности; для атмосферной турбулентности обычно считается, что оно выполнено. Это условие «замороженности» записывается в виде

$$n_1(\mathbf{r}, t) = n_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t, 0). \quad (19.2)$$

Флуктуации плоской волны даются таким же выражением, как и в статическом случае, с тем лишь отличием, что необхо-

дим ввести условие (19.2):

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0(\mathbf{r}) \exp[\psi_1(\mathbf{r}, t)], \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) = \int dV' h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}', t). \quad (19.3)$$

Используя (19.2) и записывая  $\mathbf{r}' - \mathbf{V}t = \mathbf{r}''$ , получаем

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \int dV' h(\mathbf{r} - \mathbf{V}t - \mathbf{r}'') n_1(\mathbf{r}'', 0). \quad (19.4)$$

Сравнивая (19.4) с аналогичной формулой для рассмотренного выше статического случая

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int dV' h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_1(\mathbf{r}'), \quad (19.5)$$

замечаем, что в подынтегральном выражении  $\mathbf{r}$  просто заменяется на  $\mathbf{r} - \mathbf{V}t$ . Мы воспользуемся этим соответствием в последующих разделах.

## 19.2. Случай, когда средняя скорость является чисто поперечной, а флуктуации скорости пренебрежимо малы

Рассмотрим сначала простейший случай, когда флуктуационная составляющая скорости  $\mathbf{V}_f$  пренебрежимо мала по сравнению со средней скоростью  $\mathbf{U}_t$ , причем  $\mathbf{U}_t$  является чисто поперечной по отношению к направлению распространения волны. В этом случае выражение (19.4) принимает вид

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \int dV' h(\mathbf{r} - \mathbf{U}_t t - \mathbf{r}'') n_1(\mathbf{r}'', 0), \quad \mathbf{U}_t = U_2 \hat{\mathbf{y}} + U_3 \hat{\mathbf{z}}. \quad (19.6)$$

От интегрирования по  $\mathbf{r}'$  можно перейти к интегрированию по  $\mathbf{r}''$ , так как пределы интегрирования по  $x', y', z'$  и по  $x'', y'', z''$  совпадают:

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \int dV'' h(\mathbf{r} - \mathbf{U}_t t - \mathbf{r}'') n_1(\mathbf{r}'', 0). \quad (19.7)$$

Сравнивая (19.7) с выражением (19.5) для статического случая, замечаем, что  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  совпадает с  $\psi_1$  из (19.5), если  $\mathbf{r}$  заменить на  $\mathbf{r} - \mathbf{U}_t t$ :

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r} - \mathbf{U}_t t). \quad (19.8)$$

Таким образом, флуктуации для этого случая могут быть получены из известных результатов для статического случая при помощи простой замены  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r} - \mathbf{U}_t t$ . Физический смысл (19.8) состоит в том, что в предположении замороженной турбулентности

среда движется в поперечном направлении со скоростью  $U_t$  и флуктуации в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  совпадают с флуктуациями в точке  $\mathbf{r} - U_t t$  в момент  $t = 0$  (рис. 19.1).

Здесь необходимо отметить, что такой параллельный сдвиг флуктуаций со скоростью ветра имеет место только в случае плоской волны. Для сферической волны и волнового пучка значение сдвига зависит от расстояния до источника.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию  $B_\chi$  флуктуаций уровня  $\chi$  в двух различных точках в плоскости  $x = L$  и в два различных момента времени:

$$B_\chi(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \chi(\mathbf{r}_1, t_1) \chi(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (19.9)$$

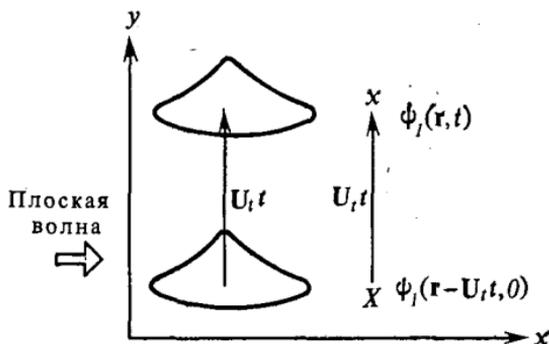


Рис. 19.1. Параллельный сдвиг флуктуаций волны в пространстве и времени.

где  $\mathbf{r}_1 = L\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$  и  $\mathbf{r}_2 = L\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$ . Эта корреляционная функция получается при помощи (19.8) из соответствующей формулы для стационарного случая путем замены  $y_d$  и  $z_d$  на  $y_d - U_2\tau$  и  $z_d - U_3\tau$ , где  $y_d = y_1 - y_2$ ,  $z_d = z_1 - z_2$  и  $\tau = t_1 - t_2$ :

$$B_\chi(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = B_\chi(L, y_d - U_2\tau, z_d - U_3\tau) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa\rho) f_\chi(\kappa) \Phi_n(\kappa), \quad (19.10)$$

где

$$f_\chi(\kappa) = 1 - \sin(\kappa^2 L/k)/(\kappa^2 L/k),$$

$$\rho = [(y_d - U_2\tau)^2 + (z_d - U_3\tau)^2]^{1/2}.$$

Следовательно, временная корреляционная функция  $B_\chi(L, \tau)$  в одной точке ( $y_d = 0$  и  $z_d = 0$ ) равна

$$B_\chi(L, \tau) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa U_t \tau) f_\chi(\kappa) \Phi_n(\kappa), \quad (19.11)$$

где  $(U_2^2 + U_3^2)^{1/2}$  — среднее значение поперечной скорости ветра. Заметим здесь, что корреляционная функция  $B_\chi(L, \tau)$  в заданной точке  $(L, 0, 0)$  совпадает с пространственной корреляционной функцией в двух точках с разнесением  $\rho$  в один момент времени  $B_\chi(L, \rho)$ , если заменить  $U_t \tau$  на  $\rho$ . Это соответствие между временем и пространством ( $U_t \tau \sim \rho$ ) является, конечно, прямым следствием гипотезы о замороженной турбулентности.

Частотный спектр  $W_x(\omega)$  является фурье-образом корреляционной функции (19.11):

$$W_x(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_x(L, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} B_x(L, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (19.12)$$

Заметим, что интеграл от частотного спектра  $W_x(\omega)$  пропорционален дисперсии:

$$\sigma_x^2 = B_x(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega. \quad (19.13)$$

Формула (19.12) допускает дальнейшее упрощение, если воспользоваться следующим значением определенного интеграла:

$$\int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) J_0(\kappa U_t \tau) d\tau = \begin{cases} [(\kappa U_t)^2 - \omega^2]^{1/2} & \text{при } \kappa U_t > \omega, \\ 0 & \text{при } \kappa U_t < \omega. \end{cases} \quad (19.14)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} W_x(\omega) &= 8\pi^2 k^2 L \int_{\omega/U_t}^{\infty} \kappa d\kappa f_x(\kappa) \Phi_n(\kappa) [(\kappa U_t)^2 - \omega^2]^{1/2} = \\ &= \frac{8\pi^2 k^2 L}{U_t} \int_0^{\infty} f_x(\kappa) \Phi_n(\kappa) d\kappa', \quad \kappa = \left(\kappa'^2 + \frac{\omega^2}{U_t^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Аналогично находим частотный спектр фазы путем замены  $f_x(\kappa)$  в (19.15) на  $f_s(\kappa)$ .

Из формулы (19.15) следует, что частотный спектр  $W_x(\omega)$  связан с той частью спектра показателя преломления, которая лежит правее  $\kappa = \omega/U_t$ . Это означает, что спектр  $W_x(\omega)$  содержит информацию о свойствах спектра показателя преломления в области значений  $\kappa$ , больших, чем  $\omega/U_t$ . Таким образом, оказывается возможным определение формы спектра  $\Phi_n(\kappa)$  по временным спектрам.

Вычислим спектр амплитуды  $W_x(\omega)$  с использованием колмогоровского спектра  $\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-11/3}$ . Выражение (19.15) может быть записано через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию  $\psi(a, c; z)$  [181]. В результате находим

$$W_x(\omega) = \frac{8\pi^2}{U_t} (0,033 C_n^2) k^{2/3} L^{7/3} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{-8/3} [A - B], \quad (19.16)$$

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}, \quad B = \text{Im} \left\{ \left(\frac{\omega_t}{\omega}\right)^2 \exp\left(-i \frac{\omega^2}{\omega_t^2}\right) \psi\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; -i \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2\right] \right\},$$

где  $\omega_t = U_t(k/L)^{1/2}$ ,

Частота  $\omega_t$  имеет важный смысл. При  $\omega < \omega_t$  спектр  $W_\chi(\omega)$  остается постоянным, а при  $\omega > \omega_t$   $W_\chi(\omega)$  убывает как  $\omega^{-8/3}$ . Эти два асимптотических значения даются выражениями

$$W_\chi^0(\omega) \rightarrow 0,85 \frac{C_n^2 k^{-2/3} L^{7/3}}{U_t} = 2,765 \frac{\sigma_\chi^2}{\omega_t} \quad \text{при } \omega \rightarrow 0, \quad (19.17)$$

$$W_\chi^\infty(\omega) \rightarrow 2,19 \frac{C_n^2 k^{2/3} L^{1/3}}{U_t} \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{-8/3} = 7,13 \frac{\sigma_\chi^2}{\omega_t} \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{-8/3} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty, \quad (19.18)$$

где  $\sigma_\chi^2 = 0,307 C_n^2 k^{1/6} L^{11/6}$  — дисперсия флуктуаций уровня. Заметим, что эти два асимптотических выражения совпадают при  $\omega = 1,43\omega_t$ . Форма спектра  $W_\chi(\omega)$  показана на рис. 19.2.

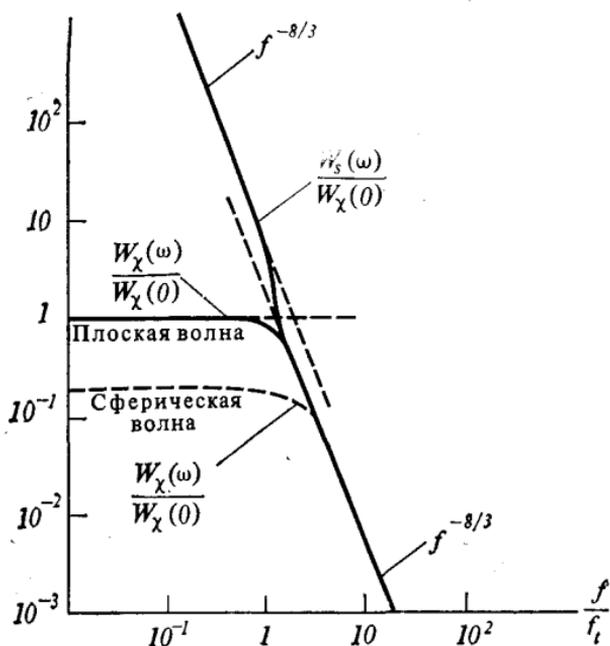


Рис. 19.2. Частотные спектры флуктуаций уровня  $W_\chi(\omega)$  и фазы  $W_S(\omega)$  плоской и сферической волн, нормированные на  $W_\chi(0)$ .

Спектр фазы  $W_S(\omega)$  дается тем же выражением (19.16) с той лишь разницей, что знак минус перед вторым слагаемым следует заменить на знак плюс. Асимптотически выражения для спектра фазы имеют вид

$$W_S(\omega) \rightarrow 2W_\chi^\infty(\omega) \quad \text{при } \omega \rightarrow 0, \quad (19.19)$$

$$W_S(\omega) \rightarrow W_\chi^0(\omega) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty, \quad (19.20)$$

Эти две асимптотики с законом спада  $f^{-5/3}$  справедливы до тех пор, пока  $\omega/U_t$  в (19.15) лежит между  $2\pi/L_0$  и  $2\pi/l_0$ . Для  $f/f_t$  это требование имеет вид

$$\sqrt{\lambda L}/L_0 < f/f_t < \sqrt{\lambda L}/l_0, \quad (19.21)$$

поэтому отличие фактического спектра от этих асимптотических значений указывает на влияние внешнего и внутреннего масштабов турбулентности.

### 19.3. Частотные спектры с учетом средней и флуктуационной скоростей ветра

Учтем теперь среднюю скорость ветра и ее флуктуации. В этом случае необходимо осуществить усреднение по флуктуациям скорости  $V_f$ . Спектральную плотность для стационарного случая  $\Phi_n(\kappa)$  следует при этом заменить на спектральную плотность  $\Phi_n(\kappa, \tau)$ , зависящую от времени. Этот вопрос рассматривается в приложении А, разд. А.7. Имеем

$$\Phi_n(\kappa, \tau) = \Phi_n(\kappa)\chi(-\kappa\tau); \quad (19.22)$$

здесь  $\chi(-\kappa\tau)$  — характеристическая функция флуктуаций скорости  $V_f$ , которая определяется выражением

$$\chi(-\kappa\tau) = \int \exp(-i\kappa \cdot V_f\tau) p(V_f) dV_f, \quad (19.23)$$

где  $p(V_f)$  — плотность распределения вероятности для  $V_f$ . Таким образом, временная корреляционная функция  $B_\chi(L, \tau)$  есть

$$B_\chi(L, \tau) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa J_0(\kappa U_t \tau) f_\chi(\kappa) \Phi_n(\kappa, \tau), \quad (19.24)$$

где  $U_t$  — поперечная скорость ветра, а продольная компонента средней скорости  $U$  на  $B_\chi(L, \tau)$  не влияет.

В случае гауссова распределения  $p(V_f)$  с дисперсией  $\sigma_v^2$  частотный спектр  $W_\chi(\omega)$  имеет вид

$$W_\chi(\omega) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \kappa d\kappa f_\chi(\kappa) \Phi_n(\kappa) I(\kappa, \omega), \quad (19.25)$$

$$I(\kappa, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty J_0(\kappa U_t \tau) \exp[-(\kappa^2 \sigma_v^2 \tau^2 / 2) - i\omega\tau] d\tau. \quad (19.26)$$

В общем случае (19.25) нельзя записать в более простом виде. Однако можно найти асимптотическое значение при  $\omega \rightarrow 0$ ,

Если  $\omega \rightarrow 0$ , то интеграл в (19.26) вычисляется:

$$I(\kappa, 0) = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{1/2}}{\kappa\sigma_v} \exp\left(-\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right) I_0\left(\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right). \quad (19.27)$$

Подставляя это выражение в (19.25) и используя формулу

$$\int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin(A\kappa^2)}{A\kappa^2}\right] \kappa^{n+1} d\kappa = -\frac{\Gamma(n/2) \sin(n\pi/4)}{2A^{n/2+1}}, \quad (19.28)$$

справедливую при  $-2 > n > -6$ , получаем

$$\begin{aligned} W_\chi(0) &= 1,067 \frac{C_n^2 k^{7/3} L^{7/3}}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right) I_0\left(\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right) = \\ &= 4,913 \frac{\sigma_\chi^2}{\omega_f} \exp\left(-\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right) I_0\left(\frac{U_t^2}{4\sigma_v^2}\right), \end{aligned} \quad (19.29)$$

где  $\omega_f = \sqrt{2}\sigma_v \sqrt{k/L}$ . Заметим, что при  $\sigma_v \rightarrow 0$  (19.29) переходит в выражение для  $W_\chi^0(\omega)$  (19.17). Чтобы найти асимптотику (19.25) при  $\omega \rightarrow \infty$ , заметим, что при  $\omega \rightarrow \infty$  основной вклад в  $W_\chi$  в (19.26) вносит область вблизи  $\tau = 0$ , так что  $J_0(\kappa U_t \tau)$  приближенно можно заменить на  $\exp[-(\kappa U_t \tau/2)^2]$ . В результате получим

$$I(\kappa, \omega) \approx \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa(U_t^2 + 2\sigma_v^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{\kappa^2(U_t^2 + 2\sigma_v^2)}\right]. \quad (19.30)$$

Заметим, что выражение (19.30) имеет максимум в области, где  $\kappa^2(U_t^2 + 2\sigma_v^2) \approx 2\omega^2$ , поэтому при  $\omega \rightarrow \infty$  необходимо рассматривать только большие значения  $\kappa$ . Следовательно, можно приближенно положить  $f_\chi(\kappa) \approx 1$ . С учетом сказанного имеем

$$W_\chi^\infty(\omega) = 6,723 (\sigma_\chi^2/\omega_{tf}) (\omega/\omega_{tf})^{-1/3}, \quad (19.31)$$

где

$$\omega_{tf} = (U_t^2 + 2\sigma_v^2)^{1/2} (k/L)^{1/2}. \quad (19.32)$$

Поскольку при выводе (19.30) использовались приближения, формула (19.31) при  $\sigma_v \rightarrow 0$  не переходит в точности в (19.18). Следует ожидать, что если вместо (19.30) воспользоваться точным выражением, то в (19.31) войдет коэффициент 7,13 вместо 6,723.

## 19.4. Частотные спектры сферической волны

Общая формула (19.15) для частотного спектра флуктуаций уровня применима и для случая сферической волны, если воспользоваться следующей фильтрующей функцией  $f_\chi(\kappa)$  для сфе-

рической волны:

$$f_x(x) = \frac{1}{L} \int_0^L d\eta \left[ 1 - \cos \left( \frac{\eta}{L} \frac{(L-\eta)}{k} x^2 \right) \right]. \quad (19.33)$$

Нетрудно найти асимптотические значения  $W_x(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ . Рассмотрим сначала случай  $\omega \rightarrow 0$ . В этом случае имеем

$$W_x(0) = \frac{2\pi k^2 L}{U_t} \int_0^\infty f_x(x) \Phi_n(x) dx. \quad (19.34)$$

Проинтегрируем сначала (19.34) по  $x$ . Прежде чем интегрировать по  $\eta$ , заметим, что различие между случаями сферической и плоской волн состоит в том, что в случае сферической волны под интегралом стоит  $(\eta/L)(L-\eta)$ , а в случае плоской волны —  $L-\eta$ . Следовательно, это различие полностью определяется значениями следующих двух интегралов:

$$I_{\text{сф}} = \int_0^L \left[ \frac{\eta}{L} (L-\eta) \right]^{(n-1)/2} d\eta = L^{(n-1)/2} \frac{\{\Gamma[(n+1)/2]\}^2}{\Gamma(n+1)} \quad \text{для сферической волны,} \quad (19.35a)$$

$$I_{\text{пл}} = \int_0^L (L-\eta)^{(n-1)/2} d\eta = L^{(n-1)/2} \left( \frac{2}{n+1} \right) \quad \text{для плоской волны,} \quad (19.35b)$$

где  $n = 11/3$  для колмогоровского спектра.

Таким образом, спектр сферической волны  $W_{x \text{ сф}}(0)$  получается путем умножения спектра плоской волны  $W_{x \text{ пл}}(0)$  на отношение значений (19.35a) и (19.35b):

$$W_{x \text{ сф}}(0) = W_{x \text{ пл}}(0) \left\{ \frac{n+1}{2} \frac{[\Gamma((n+1)/2)]^2}{\Gamma(n+1)} \right\}, \quad (19.36)$$

откуда для колмогоровского спектра с  $n = 11/3$  находим

$$W_{x \text{ сф}}(0) = 0,622 (\sigma_{x \text{ пл}}^2 / \omega_t) = 1,540 (\sigma_{x \text{ сф}}^2 / \omega_t), \quad (19.37)$$

где  $\sigma_{x \text{ пл}}^2$  и  $\sigma_{x \text{ сф}}^2$  — дисперсии для плоской и сферической волн соответственно, равные

$$\sigma_{x \text{ пл}}^2 = 0,307 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad \sigma_{x \text{ сф}}^2 = 0,124 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (19.38)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  можно приближенно положить  $f_x = 1$ , так как  $(x'^2 + \omega^2/U_t^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ , и, следовательно, при  $\omega \rightarrow \infty$  спектр  $W(\omega)$

становится тождественным спектру плоской волны:

$$W_{\chi \text{ сф}}^{\infty}(\omega) = W_{\chi \text{ пл}}^{\infty}(\omega) = 7,13 \frac{\sigma_{\chi \text{ пл}}^2}{\omega_t} \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{-5/3} = 17,65 \frac{\sigma_{\chi \text{ сф}}^2}{\omega_t} \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{-5/3}. \quad (19.39)$$

Спектр фазы  $W_S(\omega)$  для сферической волны можно получить, если учесть, что при  $\kappa \rightarrow 0 f_S(\kappa) \rightarrow 2$ , а при  $\kappa \rightarrow \infty f_S(\kappa) \rightarrow 1$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} W_{S \text{ сф}}(\omega) \rightarrow 2W_{\chi \text{ сф}}^{\infty}(\omega) &= \\ &= 35,31 (\sigma_{\chi \text{ сф}}^2/\omega_t) (\omega/\omega_t)^{-5/3} \quad \text{при } \omega \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (19.40)$$

$$\begin{aligned} W_{S \text{ сф}}(\omega) \rightarrow W_{\chi \text{ сф}}^{\infty}(\omega) &= \\ &= 17,65 (\sigma_{\chi \text{ сф}}^2/\omega_t) (\omega/\omega_t)^{-5/3} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (19.41)$$

Эти спектры для сферических волн показаны на рис. 19.2.

## 19.5. Двухчастотная корреляционная функция

До сих пор мы рассматривали временную корреляцию и частотные спектры монохроматической волны, распространяющейся в движущейся случайной среде. В этом разделе мы рассмотрим взаимную корреляцию и взаимные спектры двух волн на двух различных частотах, которые представляют интерес для некоторых приложений. Так, например, в 1974 г. в США был запущен космический аппарат «Маринер-10» в сторону Венеры. При подлете к Венере с него через атмосферу Венеры в сторону Земли посылались сигналы в X- и S-диапазонах [387]. Флуктуационные характеристики таких сигналов содержат важную информацию о мелкомасштабной структуре турбулентности атмосферы Венеры, которая расширяет наши знания о циркуляции и динамике атмосферы [157, 165].

Рассмотрим две волны на двух частотах  $f_1$  и  $f_2$  ( $k_1 = 2\pi f_1/c$  и  $k_2 = 2\pi f_2/c$ ). Запишем поле на частоте  $f_1$  в точке  $\mathbf{r}_1$  в момент времени  $t_1$  и поле на частоте  $f_2$  в точке  $\mathbf{r}_2$  в момент времени  $t_2$  [см. (19.3)]:

$$U(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) = U_0(k_1, \mathbf{r}_1) \exp[\psi_1(k_1, \mathbf{r}_1, t_1)], \quad (19.42)$$

$$U(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) = U_0(k_2, \mathbf{r}_2) \exp[\psi_2(k_2, \mathbf{r}_2, t_2)]. \quad (19.43)$$

Флуктуации уровня  $\chi$  и фазы  $S_1$  равны

$$\psi_1(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) = \chi(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) + iS_1(k_1, \mathbf{r}_1, t_1), \quad (19.44)$$

$$\psi_2(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) = \chi(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) + iS_1(k_2, \mathbf{r}_2, t_2). \quad (19.45)$$

Рассмотрим теперь корреляционную функцию амплитуды  $B_\chi$ , корреляционную функцию фазы  $B_S$  и взаимную корреляционную функцию  $B_{\chi S}$  амплитудных и фазовых флуктуаций. Они определяются как

$$B_\chi(k_1, \mathbf{r}_1, t_1; k_2, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \chi(k_1, \mathbf{r}, t_1) \chi(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (19.46a)$$

$$B_S(k_1, \mathbf{r}_1, t_1; k_2, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle S_1(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) S_1(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (19.46б)$$

$$B_{\chi S}(k_1, \mathbf{r}_1, t_1; k_2, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \chi(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) S_1(k_2, \mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (19.46в)$$

В заданной точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  эти выражения определяют временные корреляционные функции. Во многих прикладных задачах флуктуационные характеристики можно считать стационарными, поэтому корреляционные функции зависят только от разности времен  $\tau = t_1 - t_2$ . В этих предположениях в формулы (19.46a) — (19.46в) входят соответственно

$$B_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau), \quad B_S(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) \quad \text{и} \quad B_{\chi S}(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau).$$

Фурье-образы этих корреляционных функций представляют собой частотные спектры:

$$W_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (19.47a)$$

$$W_S(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_S(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (19.47б)$$

$$W_{\chi S}(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_{\chi S}(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (19.47в)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$B_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (19.48a)$$

Аналогичные выражения можно записать для  $B_S$  и  $B_{\chi S}$ . Заметим, что если в (19.48a) положить  $\tau = 0$ , то мы получим

$$B_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, 0) = \frac{1}{4\pi} \int W_\chi(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (19.48б)$$

откуда следует, что интеграл от спектра по всем частотам дает корреляционную функцию на двух частотах  $k_1$  и  $k_2$  в один момент времени.

Общие выражения для корреляционных функций  $B$  и спектров  $W$  получены в работе [181]. Здесь мы приведем следующие

выражения:

$$B_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) = 2\pi^2 k_1 k_2 \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^L d\eta g_x(\kappa, \eta) J_0(\kappa V \tau) \Phi_n(\kappa), \quad (19.49a)$$

$$B_S(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) = 2\pi^2 k_1 k_2 \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^L d\eta g_S(\kappa, \eta) J_0(\kappa V \tau) \Phi_n(\kappa), \quad (19.49б)$$

$$B_{xS}(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau) = 2\pi^2 k_1 k_2 \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^L d\eta g_{xS}(\kappa, \eta) J_0(\kappa V \tau) \Phi_n(\kappa), \quad (19.49в)$$

где

$$g_x(\kappa, \eta) = \operatorname{Re}[h_1 h_2^* - h_1 h_2], \quad g_S(\kappa, \eta) = \operatorname{Re}[h_1 h_2^* + h_1 h_2],$$

$$g_{xS}(\kappa, \eta) = -\operatorname{Im}[h_1 h_2^* + h_1 h_2],$$

$$h_1 = \exp\left[-i \frac{\gamma(L-\eta)}{2k_1} \kappa^2\right], \quad h_2 = \exp\left[-i \frac{\gamma(L-\eta)}{2k_2} \kappa^2\right].$$

Здесь  $\gamma = 1$  отвечает случаю плоской волны, а  $\gamma = \eta/L$  — случаю сферической волны,  $\mathbf{r}$  соответствует точке  $x = L$ ,  $y = z = 0$ , а  $V$  — величина поперечной скорости ветра.

Частотные спектры могут быть найдены с использованием формулы (19.47):

$$W_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) = 8\pi^2 k_1 k_2 \int_{\omega/V}^\infty \kappa d\kappa \int_0^L d\eta g_x(\kappa, \eta) \Phi_n(\kappa) [(kV)^2 - \omega^2]^{-1/2}. \quad (19.50)$$

Если скорость ветра  $V$  и спектр  $\Phi_n$  являются функциями положения  $\eta$ , то формула (19.50) остается справедливой, если заменить в ней  $V$  на  $V(\eta)$ , а  $\Phi_n(\kappa)$  на  $\Phi_n(\kappa, \eta)$ . Спектры  $W_S$  и  $W_{xS}$  получаются из (19.50), если под знаком интеграла подставить  $g_S$  и  $g_{xS}$ . Общие формулы для волновых пучков получены Исимару [181].

В общем случае взаимная корреляционная функция  $B_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \tau)$  не обязательно является четной функцией, поэтому взаимный спектр  $W_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega)$  может быть комплексным, так что

$$W_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) = C_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega) - iQ_x(k_1, k_2, \mathbf{r}, \omega), \quad (19.51)$$

где  $C_x$  и  $Q_x$  — вещественная и мнимая части спектра соответственно. Тогда можно ввести степень когерентности, определяемую как

$$\operatorname{coh}_x(k_1, k_2, \omega) = \frac{C_x^2(k_1, k_2, \omega) + Q_x^2(k_1, k_2, \omega)}{W_x(k_1, k_1, \omega) W_x(k_2, k_2, \omega)}. \quad (19.52)$$

Рассмотрим случай плоской волны. Тогда имеем

$$g_x(x, \eta) = \cos \left[ \frac{(L - \eta) x^2}{2} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \right] - \cos \left[ \frac{(L - \eta) x^2}{2} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \right]. \quad (19.53)$$

Подставляя эту формулу в (19.50), находим взаимный спектр  $W_x(k_1, k_2, \omega)$ . Асимптотический вид для  $\text{coh}_x$  в (19.52) может быть найден в случае, когда спектральная плотность  $\Phi_n(x)$  описывается колмогоровским спектром:

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3}. \quad (19.54)$$

Подставляя (19.53), (19.54) и (19.50) в формулу (19.52), получаем

$$\text{coh}_x(k_1, k_2, 0) = \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{(n-1)/2} \left[ \left( \frac{1 + k_1/k_2}{2} \right)^{(n-1)/2} - \left( \frac{1 - k_1/k_2}{2} \right)^{(n-1)/2} \right]^2, \quad (19.55)$$

где  $n = 11/3$ .

Степень когерентности фазы  $\text{coh}_s(k_1, k_2, \omega)$  может быть вычислена на основе формул (19.50) и (19.52) путем замены  $g_x$  на

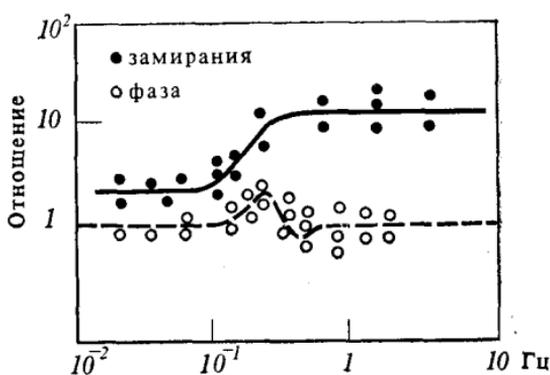
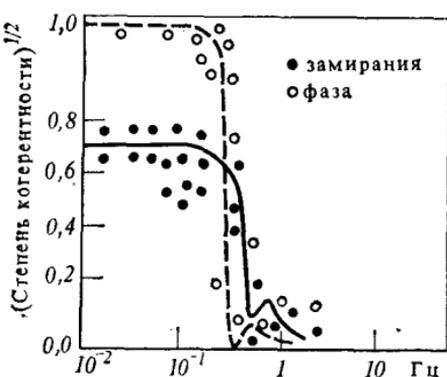


Рис. 19.3. Теоретические и экспериментальные кривые для степени когерентности уровня (замирания)  $\text{coh}_x(k_1, k_2, \omega)$  и фазы  $\text{coh}_s(k_1, k_2, \omega)$ . Здесь  $k_1 = 2\pi f_1/c$ ,  $k_2 = 2\pi f_2/c$  и  $f_1 = 34,52$  ГГц,  $f_2 = 9,6$  ГГц.

Рис. 19.4. Теоретические и экспериментальные кривые для отношения спектров уровня (замирания)  $W_x(k_1, k_2, \omega)/W_x(k_2, k_2, \omega)$  и отношения спектров фазы  $w_s(k_1, k_1, \omega)/w_s(k_2, k_2, \omega)$ , где  $w_s(k, k, \omega) = W_s(k, k, \omega)/(kL)^2$ .

$g_s$ . В пределе  $\omega \rightarrow 0$  находим  $\text{coh}_s(k_1, k_2, 0) \rightarrow 1$ . На рис. 19.3 показан общий вид степени когерентности. Сравнение этих результатов с экспериментальными данными, полученными для частот 9,6 и 34,52 ГГц и при длине трассы 64,25 км, указывает на прекрасное согласие [181, 189, 190]. На рис. 19.4 показаны отношения спектров уровня  $W_x(k, k, \omega)$  и спектров фазы  $W_s(k, k,$

$\omega)/(k^2L^2)$  на частотах 34,52 и 9,6 ГГц и соответствующие экспериментальные данные. См. также другие исследования частотных спектров [72, 246, 247].

## 19.6. Пересекающиеся пучки

Рассмотрим два излучателя, расположенные в точках  $\rho_{t1}$  и  $\rho_{t2}$  в плоскости  $x = 0$  (рис. 19.5). Они работают на двух различных частотах ( $k_1$  и  $k_2$ ). В плоскости  $x = L$  имеются два приемника в точках  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , которые принимают сигналы на частотах  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Поскольку они реагируют только на частоты  $k_1$  и  $k_2$ , корреляция между флуктуациями в точках  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определяется только пересекающимися пучками  $b$  и  $c$  на рис. 19.5. Но

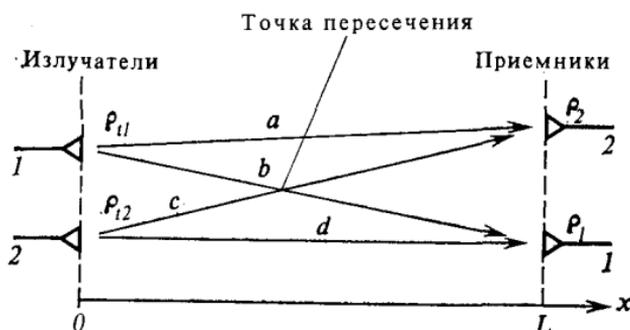


Рис. 19.5. Два пересекающихся волновых пучка.

если  $k_1 = k_2$ , то приемник в точке  $\rho_1$  принимает волны, приходящие по путям  $b$  и  $d$ . Аналогично волна в точке  $\rho_2$  состоит из волн, пришедших вдоль  $a$  и  $c$ . Поэтому корреляция полей в точках  $\rho_1$  и  $\rho_2$  содержит корреляции между  $a$  и  $b$ , между  $a$  и  $d$ , между  $b$  и  $c$ , а также между  $b$  и  $d$ . Однако если расстояние  $|\rho_1 - \rho_2|$  намного превышает радиус корреляции (приблизительно равный  $\sqrt{\lambda L}$ ), то корреляции между различными путями, за исключением пересекающихся путей  $b$  и  $c$ , пренебрежимо мала. Пересекающиеся пути приводят к довольно сильной корреляции, поскольку они проходят через общую область случайной среды в точке пересечения. Эта корреляция между пересекающимися пучками использовалась для исследования параметров турбулентности в точке пересечения [123, 370]. В этом разделе мы рассмотрим корреляцию между путями  $b$  и  $c$ . Корреляции между другими путями могут быть проанализированы аналогичным образом.

Рассмотрим поле в точке  $x = L$  и  $\rho_1$ , связанное с излучателем, работающим на частоте  $k_1$  и расположенным в точке  $x = 0$  и  $\rho_{t1}$ . В этом случае можно воспользоваться формулами (18.3)

и (19.49) и записать

$$\psi_1(k_1, \mathbf{r}_1, t_1) = \int dV' h(k, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, t_1) n_1(\mathbf{r}'_1, 0), \quad (19.56)$$

где

$$h(k_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, t_1) = \frac{k_1^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma(L-x')} \exp \left[ i \frac{k_1}{2} \frac{|\rho'_1 - \rho_{t1} + \mathbf{V}t_1 - \gamma(\rho_1 - \rho_{t1})|^2}{\gamma(L-x')} \right],$$

$\mathbf{r}_1 = (L, \rho_1)$ ,  $\mathbf{r}'_1 = (x', \rho'_1)$ , а  $\mathbf{V}$  — поперечная скорость ветра. Заметим, что единственное различие между этим случаем и случаем  $\rho_{t1} = \rho_{t2} = 0$  состоит в том, что  $\gamma\rho_1$  следует в дальнейшем заменить на  $\gamma(\rho_1 - \rho_{t1}) + \rho_{t1}$ . Тогда для корреляционной функции  $B_x$  при  $x = L$  имеем

$$B_x(k_1, k_2, \rho_1, \rho_2, \tau) = \langle \chi(k_1, \rho_1, t_1) \chi(k_2, \rho_2, t_2) \rangle = 2\pi^2 k_1 k_2 \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^L d\eta g_x(\kappa, \eta) J_0(\kappa P) \Phi_n(\kappa), \quad (19.57)$$

где  $P = |\rho_t + \gamma(\rho - \rho_t) + \mathbf{V}\tau|$ ,  $\rho_\tau = \rho_{t1} - \rho_{t2}$ ,  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ ,  $\gamma = \eta/L$ , а  $g_x$  дается формулой (19.49). Формулу (19.57) можно обобщить на случай изменений скорости ветра  $\mathbf{V}$  и спектральной плотности  $\Phi_n$  вдоль трассы распространения, считая, что  $\mathbf{V}$  и  $\Phi_n$  являются функциями положения:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\eta)$  и  $\Phi_n = \Phi_n(\eta, \kappa)$ . Таким образом, по измерениям корреляционной функции  $B_x$  можно найти  $\mathbf{V}(\eta)$  и  $\Phi_n(\eta, \kappa)$ .

Предположим, что два излучателя расположены в точках  $\rho_{t1} = (0, 0, 0)$  и  $\rho_{t2} = (0, d_t, 0)$ , а два приемника — в точках  $\rho_1 = (L, d_r, 0)$  и  $\rho_2 = (L, 0, 0)$ . Тогда точка пересечения находится при

$$\eta = [d_r/(d_t + d_r)] L. \quad (19.58)$$

Заметим, что при  $\tau = 0$  в этой точке пересечения  $P$  становится равным нулю. Это означает, что в точке пересечения подынтегральная функция  $J_0(\kappa P)$  достигает максимума и случайная среда в окрестности точки пересечения дает наибольший вклад в корреляцию принимаемого сигнала. Этот факт используется при дистанционном зондировании среды в точке пересечения.

## 19.7. Флуктуации волн в статистически неоднородной случайной среде

При исследовании распространения волн в случайной среде обычно предполагалось, что структурная характеристика  $S_n$  может меняться в зависимости от расстояния вдоль трассы распространения, но не зависит от координаты в направлении, перпен-

дикулярном направлении распространения. Это предположение, как правило, оказывается допустимым, так как основной вклад в флуктуации параметров волны вносит пространственная область с поперечными размерами порядка радиуса зоны Френеля  $(\lambda L)^{1/2}$ , и обычно в пределах этого поперечного масштаба среда считается однородной. Между тем возможны ситуации, когда поперечный масштаб изменения свойств среды сравним с радиусом зоны Френеля, и тогда необходимо учитывать влияние на флуктуационные характеристики волн изменений свойств среды в поперечном направлении. Эта задача рассматривается в следующем разделе.

Другое обычно используемое предположение состоит в том, что распространение волн происходит вдоль прямого луча, и искривление этого луча пренебрежимо мало. Оно справедливо в большинстве практически интересных случаев. Однако возможны ситуации, когда это искривление является существенным. К ним относятся, например, использование метода радиопросвечивания для зондирования атмосфер планет и флуктуации звука в неоднородной океанской воде. Искривление луча влияет на фазу и амплитуду таким образом, что эквивалентный радиус зоны Френеля меняется. Влияние такого изменения радиуса зоны Френеля было отмечено в экспериментах по радиопросвечиванию атмосфер планет [125].

## 19.8 Флуктуации волн в локализованной плавно неоднородной случайной среде

При анализе распространения волн в случайной среде обычно предполагается, что среда является статистически однородной. Но в некоторых случаях, как, например, при вертикальном распространении в атмосфере, случайная среда не является статистически однородной, а меняется в зависимости от высоты. В этих случаях принимают, что  $C_n^2$  является функцией высоты.

Существуют другие ситуации, когда свойства среды плавно меняются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. Примером может служить распространение волны через ракетный след, который ограничен и локализован. Другим примером служит линия радиосвязи между космическим кораблем и Землей, когда трасса распространения проходит через тонкий слой турбулентной атмосферы планеты. Вообще говоря, если среда однородна в поперечном направлении  $(y, z)$  на расстоянии порядка радиуса зоны Френеля  $(\lambda L)^{1/2}$ , то можно пренебречь изменением свойств среды вдоль  $y$  и  $z$  и учитывать изменение структурной характеристики только в направлении распространения  $x$ , полагая  $C_n^2 = C_n^2(x)$ .

Если же среда заметно меняется в поперечном направлении на расстоянии порядка радиуса зоны Френеля  $(\lambda L)^{1/2}$ , то необходимо разработать метод, позволяющий учесть влияние этих неоднородностей. В этом разделе мы рассмотрим метод, первоначально предложенный Сильверманом [316] и обобщенный Исимару [182, 384].

Предположим, что корреляционная функция  $B_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  флуктуаций показателя преломления  $n_1$  является произведением медленно меняющейся дисперсии  $B_n^g(\mathbf{r}_c)$  и коэффициента корреляции  $B_n^l(\mathbf{r}_d)$ . Дисперсия  $B_n^g(\mathbf{r}_c)$  является функцией только координаты центра тяжести  $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$  и характеризует «глобальное» изменение свойств случайной среды. Коэффициент корреляции  $B_n^l(\mathbf{r}_d)$  является функцией только разностной координаты  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и характеризует «локальное» поведение среды:

$$B_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_n^g(\mathbf{r}_c) B_n^l(\mathbf{r}_d). \quad (19.59)$$

Соответствующий спектр  $\Phi_n(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$  имеет вид <sup>1)</sup>

$$\Phi_n(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint B_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (19.60)$$

Замечая, что

$$\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{r}_c + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{r}_d, \quad (19.61)$$

где  $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2$  и  $\mathbf{K}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) &= \Phi_n^g(\mathbf{K}_d) \Phi_n^l(\mathbf{K}_c), \\ \Phi_n^g(\mathbf{K}_d) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_n^g(\mathbf{r}_c) \exp(i\mathbf{K}_d \cdot \mathbf{r}_c) d\mathbf{r}_c, \\ \Phi_n^l(\mathbf{K}_c) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_n^l(\mathbf{r}_d) \exp(i\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{r}_d) d\mathbf{r}_d. \end{aligned} \quad (19.62)$$

Нам понадобятся также соотношения, связывающие двумерные глобальный и локальный спектры  $F_n^g(x_c, \boldsymbol{\kappa}_d)$  и  $F_n^l(x_d, \boldsymbol{\kappa}_c)$  и трехмерные глобальный и локальный спектры  $\Phi_n^g(\mathbf{K}_d)$  и  $\Phi_n^l(\mathbf{K}_c)$ . Имеем

$$\begin{aligned} B_n^g(x_c, \boldsymbol{\rho}_c) &= \int \exp(i\boldsymbol{\kappa}_d \cdot \boldsymbol{\rho}_c) F_n^g(x_c, \boldsymbol{\kappa}_d) d\boldsymbol{\kappa}_d, \\ B_n^l(x_d, \boldsymbol{\rho}_d) &= \int \exp(i\boldsymbol{\kappa}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_d) F_n^l(x_d, \boldsymbol{\kappa}_c) d\boldsymbol{\kappa}_c, \\ F_n^g(x_c, \boldsymbol{\kappa}_d) &= \int \exp(iK_{d1}x_c) \Phi_n^g(K_{d1}, \boldsymbol{\kappa}_d) dK_{d1}, \\ F_n^l(x_d, \boldsymbol{\kappa}_c) &= \int \exp(iK_{c1}x_d) \Phi_n^l(K_{c1}, \boldsymbol{\kappa}_c) dK_{c1}, \end{aligned} \quad (19.63)$$

<sup>1)</sup> Более строго спектральные разложения рассмотрены в работе [182].

где  $\mathbf{r}_c = x_c \hat{\mathbf{x}} + \rho_c$ ,  $\mathbf{r}_d = x_d \hat{\mathbf{x}} + \rho_d$ ,  $\mathbf{K}_c = K_{c1} \hat{\mathbf{x}} + \kappa_c$  и  $\mathbf{K}_d = K_{d1} \hat{\mathbf{x}} + \kappa_d$ . Поскольку  $F_n^g$  и  $F_n^l$  являются одномерными фурье-образами  $\Phi_n^g$  и  $\Phi_n^l$ , можно представить  $\Phi_n^g$  и  $\Phi_n^l$  также в виде одномерных обратных фурье-образов  $F_n^g$  и  $F_n^l$ . В частности, имеет место следующее полезное соотношение:

$$\Phi_n(0, \kappa_c) = \frac{1}{2\pi} \int F_n^l(x_d, \kappa_c) dx_d. \quad (19.64)$$

Соотношения (19.60) — (19.64) являются основными соотношениями, устанавливающими связь между корреляционной функцией (19.59) и спектром  $\Phi_n$ . Заметим, что если среда статистически однородна, то величина  $B_n^g(\mathbf{r}_c)$  постоянна и, следовательно,  $\Phi_n^g = (B_n^g) \delta(\mathbf{K}_d)$ .

Исследуем теперь распространение волн в такой среде. В случае плоской волны приближение Рытова для поля  $U(\mathbf{r})$  имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) \exp[\chi(\mathbf{r}) + iS_1(\mathbf{r})],$$

$$\chi(L, \rho) = \int_0^L dx' \iint \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \rho) H_r(L - x', \boldsymbol{\kappa}) dv(x', \boldsymbol{\kappa}), \quad (19.65)$$

$$S_1(L, \rho) = \int_0^L dx' \iint \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \rho) H_i(L - x', \boldsymbol{\kappa}) dv(x', \boldsymbol{\kappa}),$$

где

$$H_r(L - x', \boldsymbol{\kappa}) = k \sin \frac{(L - x')}{2k} \boldsymbol{\kappa}^2, \quad H_i(L - x', \boldsymbol{\kappa}) = k \cos \frac{(L - x')}{2k} \boldsymbol{\kappa}^2.$$

Рассмотрим далее корреляционную функцию амплитуды

$$B_x(L, \rho_1, \rho_2) = \langle \chi(L, \rho_1) \chi(L, \rho_2) \rangle. \quad (19.66)$$

Используя (19.65), получаем

$$B_x(L, \rho_1, \rho_2) = \int_0^L dx_c \int d\boldsymbol{\kappa}_d \int d\boldsymbol{\kappa}_c \exp(i\boldsymbol{\kappa}_d \cdot \rho_c + i\boldsymbol{\kappa}_c \cdot \rho_d) \times \\ \times H_{r1} H_{r2} F_n^g(x_c, \boldsymbol{\kappa}_d) 2\pi \Phi_n^l(\boldsymbol{\kappa}_c), \quad (19.67)$$

где

$$H_{r1} = H_r \left( L - x_c, \boldsymbol{\kappa}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_d \right), \quad H_{r2} = H_r \left( L - x_c, \boldsymbol{\kappa}_c - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_d \right),$$

$F_n^g(x_c, \boldsymbol{\kappa}_d)$  — двумерный спектр, определенный в (19.63).

Используя (19.63), можно записать (19.67) в виде свертки:

$$B_x(L, \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx_c \int d\rho'_c B_n^g(x_c, \rho'_c) G_x(x_c, \rho_c - \rho'_c, \rho_d),$$

где

$$G_x(x_c, \rho_c - \rho'_c, \rho_d) = \int d\kappa_d \int d\kappa_c \exp[i\kappa_d \cdot (\rho_c - \rho'_c) + i\kappa_c \cdot \rho_d] H_{r_1} H_{r_2} \Phi_n(\kappa_c). \quad (19.68)$$

Это основное выражение для корреляционной функции  $B_x$  в случае среды с плавно меняющейся дисперсией  $B_n^g(x_c, \rho_c)$ . Из (19.67) имеем также

$$H_{r_1} H_{r_2} = \frac{k^2}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{(L-x_c)}{k} \kappa_c \cdot \kappa_d \right] - \cos \left[ \frac{(L-x_c)}{k} \left( \kappa_c^2 + \frac{\kappa_d^2}{4} \right) \right] \right\}. \quad (19.69)$$

Для колмогоровского спектра имеем

$$B_n^g(\mathbf{r}_c) = 0,033 C_n^2(\mathbf{r}_c), \quad \Phi_n(\kappa_c) = (\kappa_c^2 + 1/L_0^2)^{-1/6}. \quad (19.70)$$

Медленно меняющаяся дисперсия дается функцией  $B_n^g(\mathbf{r}_c)$ .

Например, если плоская волна падает на объем случайной среды с поперечным размером  $b$ , то дисперсия  $\sigma_x^2$  пропорциональна  $L^{5/6}$  при длине трассы распространения  $L \ll L_0^2/\lambda$ . Этот

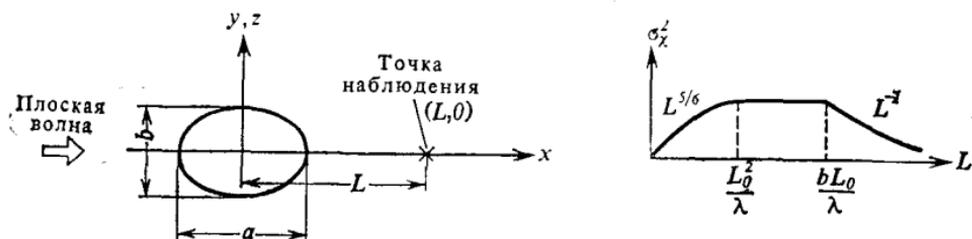


Рис. 19.6. Турбулентная среда со структурной характеристикой  $C_n^2(x_c, \rho_c)$ , определяемой формулой (19.71), и дисперсия флуктуаций уровня как функция  $L$ .

результат совпадает с результатом для случая обычной статистически однородной среды. Однако в области  $L_0^2/\lambda \ll L \ll bL_0/\lambda$  дисперсия  $\sigma_x^2$  практически постоянна, а при  $L \gg bL_0/\lambda$  убывает как  $L^{-2}$ . Если плоская волна падает на случайную среду со структурной постоянной, меняющейся по закону

$$C_n^2(x_c, \rho_c) = C_{n0}^2 \exp(-x_c^2/a^2 - \rho_c^2/b^2), \quad (19.71)$$

то дисперсия в точке  $(L, 0, 0)$  равна (рис. 19.6)

$$\sigma_x^2(L, 0) = 0,563 k^{7/6} L^{5/6} \sqrt{\pi a} C_{n0}^2 \quad (19.72a)$$

в области  $L \ll L_0^2/\lambda$ ,

$$\sigma_x^2(L, 0) = 0,391k^2L_0^{5/3} \sqrt{\pi a} C_{n0}^2 \quad (19.726)$$

в области  $L_0^2/\lambda \ll L \ll bL_0/\lambda$  и

$$\sigma_x^2(L, 0) = 0,104k^4L_0^{11/3}L^{-2}\pi^{3/2}ab^2C_{n0}^2 \quad (19.72в)$$

в области  $bL_0/\lambda \ll L$ . Этот результат был использован при дистанционном зондировании атмосферы Венеры в эксперименте с радиопросвечиванием при помощи космического корабля «Маринер» (подробности см. в работах [182, 385]). Кроме того, был исследован частотный спектр флуктуаций, связанных с движением космического корабля.

Чтобы перейти к случаю сферической волны [182], необходимо заменить  $\rho$  и  $L - x_c$  в формулах для плоской волны на  $(x_c/L)\rho$  и  $(x_c/L)(L - x_c)$  соответственно. В результате получим

$$B_x(L, \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx_c \int d\rho'_c B_n^g(x_c, \rho'_c) G_x,$$

$$G_x = \int d\kappa_d \int d\kappa_c \exp\left[i\kappa_d \cdot \left(\frac{x_c}{L} \rho_c - \rho'_c\right) + i\kappa_c \cdot \frac{x_c}{L} \rho_d\right] H_{r1} H_{r2} \Phi'_n(\kappa_c), \quad (19.73)$$

$$H_{r1} H_{r2} = \frac{k^2}{2} \left\{ \cos \left[ \left( \frac{x_c}{L} \right) \frac{(L - x_c)}{k} \kappa_c \cdot \kappa_d \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[ \left( \frac{x_c}{L} \right) \frac{(L - x_c)}{k} \left( \kappa_c^2 + \frac{\kappa_d^2}{4} \right) \right] \right\}.$$

## Сильные флуктуации

В гл. 16—19 рассмотрена теория слабых флуктуаций. Вообще говоря, эта теория верна только в тех случаях, когда дисперсия уровня не превышает значения 0,2—0,5. Для колмогоровского спектра  $\Phi_n(\chi) = 0,033C_n^2\chi^{-1/3}$  это условие имеет вид

$$\sigma_\chi^2 = 0,307C_n^2k^{7/6}L^{1/6} < 0,2 - 0,5. \quad (20.1)$$

Если дисперсия уровня превышает это предельное значение, то говорят о «сильных» флуктуациях. Например, в земной атмосфере значение  $C_n$  меняется от  $10^{-9} \text{ м}^{-1/3}$  при слабой турбулентности до  $10^{-7} \text{ м}^{-1/3}$  при сильной. Поэтому при описании распространения СВЧ-излучения в земной атмосфере можно ограничиться теорией слабых флуктуаций, которая оказывается пригодной почти для любых расстояний, встречающихся в практических приложениях. Однако для оптического излучения указанный предел флуктуации уровня превышает уже на расстояниях в несколько километров. Границы применимости теории слабых флуктуаций нарушаются и при распространении волн СВЧ-диапазона на очень большие расстояния (например, при распространении через ионосферу и солнечную корону).

Для анализа сильных флуктуаций предложено несколько различных подходов, в том числе метод фейнмановских диаграмм [15, 95, 142, 337], метод интегрального уравнения [56—58], включая уравнения Дайсона и Бете — Солпитера, использование обобщенного принципа Гюйгенса — Френеля [10, 75, 120, 211, 243, 397—400], метод параболического уравнения [38, 104, 148, 172, 173, 313, 337, 372].

Как было показано [328, 397], в отношении вторых моментов все эти методы при некоторых предположениях эквивалентны друг другу. Поэтому мы будем рассматривать здесь второй момент на основе метода параболического уравнения.

Для моментов четвертого порядка к простым результатам приводит метод Гюйгенса — Френеля [10, 74]. Однако эквивалентность этого метода с другими не установлена. Отметим, что методом параболического уравнения были получены уравнения для моментов любого порядка, и в настоящее время этот метод считается более обоснованным, чем все остальные. Однако точных решений уравнений для моментов, за исключением моментов

второго порядка, не получено, и проблема их решения представляет собой наиболее важную и до сих пор нерешенную задачу теории сильных флуктуаций.

## 20.1. Параболическое уравнение

Рассмотрим волну  $u(\mathbf{r})$ , распространяющуюся в случайной среде с относительной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_r(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon_r \rangle [1 + \varepsilon_1(\mathbf{r})]. \quad (20.2)$$

Вводя волновое число, отвечающее среднему значению диэлектрической проницаемости:

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \langle \varepsilon_r \rangle = k_0^2 \langle \varepsilon_r \rangle, \quad (20.3)$$

запишем волновое уравнение для скалярного поля  $u(\mathbf{r})$ :

$$[\nabla^2 + k^2(1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}))] u(\mathbf{r}) = 0. \quad (20.4)$$

При выводе параболического уравнения мы исходим из того факта, что при распространении волны вдоль оси  $x$  ее фаза по существу изменяется как  $ikx$ . Поэтому если представить поле в виде

$$u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) e^{ikx}, \quad (20.5)$$

то амплитуда  $U(\mathbf{r})$  должна быть медленно меняющейся функцией координаты  $x$ . Подставив (20.5) в (20.4), найдем точное уравнение для  $U(\mathbf{r})$ :

$$2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} + \nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = 0. \quad (20.6a)$$

Поскольку  $U(\mathbf{r})$  — медленно изменяющаяся функция координаты  $x$  и характерным масштабом ее изменения является масштаб неоднородности среды  $l$ , оказывается, что при  $l \gg \lambda$  выполняется неравенство

$$|k \partial U / \partial x| \gg |\partial^2 U / \partial x^2|. \quad (20.6b)$$

Поэтому оператор  $\nabla^2$  в (20.6) можно заменить на оператор Лапласа, действующий по поперечным координатам,  $\nabla_i^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ . В результате получаем следующее параболическое уравнение для  $U(\mathbf{r})$ :

$$2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} + \nabla_i^2 U(\mathbf{r}) + k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = 0. \quad (20.7)$$

Уравнение (20.7) является исходным для дальнейшего анализа. В последующих разделах мы будем исследовать среднее поле и его высшие моменты.

## 20.2. Модель флуктуаций показателя преломления

Анализ сильных флуктуаций основан на следующих трех важных положениях:

а) справедливость выведенного выше параболического уравнения;

б) предположение о гауссовости случайного поля флуктуаций  $\varepsilon_1$ , в силу чего его свойства полностью описываются корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{r}') \rangle; \quad (20.8)$$

в) предположение о дельта-коррелированности поля  $\varepsilon_1(\mathbf{r})$  вдоль направления распространения волны (вдоль оси  $x$ ):

$$\langle \varepsilon_1(x, \rho) \varepsilon_1(x', \rho') \rangle = \delta(x - x') A(\rho - \rho'). \quad (20.9)$$

Предположение (20.9) основано на том, что хотя корреляция диэлектрической проницаемости в поперечном направлении  $\rho$  существенно влияет на поперечную корреляцию поля, ее продольная корреляция оказывает лишь малое влияние на флуктуационные характеристики поля. Фактически это предположение уже использовалось при анализе метода Рытова, когда мы заменяли  $H_r$  в точках  $x'$  и  $x''$  на  $H_r$  в точке  $\frac{1}{2}(x' + x'')$ .

Связь между функцией  $A(\rho - \rho')$  и спектром флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(\mathbf{x})$  можно найти следующим образом. Запишем корреляционную функцию в спектральной форме

$$B_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 4B_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \iiint \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{K}, \quad (20.10)$$

где  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) = 4\Phi_n(\mathbf{K})$  и  $d\mathbf{K} = dK_1 dK_2 dK_3 = dK_1 d\mathbf{x}$ . Производя обратное преобразование Фурье с учетом (20.9), получаем

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint A(\rho - \rho') \exp[i\mathbf{x} \cdot (\rho - \rho')] d(\rho - \rho'). \quad (20.11)$$

Выражение (20.11) представляет собой двумерный фурье-образ. Взяв обратное преобразование, найдем

$$A(\rho) = 2\pi \int \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \rho} d\mathbf{x}. \quad (20.12)$$

В случае изотропной турбулентности

$$A(\rho) = (2\pi)^2 \int_0^\infty J_0(x\rho) \Phi_\varepsilon(x) x dx. \quad (20.13)$$

Можно установить также связь между  $A(\rho)$  и корреляционной функцией  $B_\varepsilon(x, \rho)$ . Она имеет вид

$$A(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x, \rho) dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} B_n(x, \rho) dx. \quad (20.14)$$

### 20.3. Уравнение для среднего поля и его общее решение

Усредним параболическое уравнение (20.7) по статистическому ансамблю:

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} \langle U(\mathbf{r}) \rangle + \nabla_t^2 \langle U(\mathbf{r}) \rangle + k^2 \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (20.15)$$

Если последнее слагаемое в этом уравнении удастся выразить через среднее поле, т. е. представить его в виде

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = g(\mathbf{r}) \langle U(\mathbf{r}) \rangle, \quad (20.16)$$

то мы получим дифференциальное уравнение для  $\langle U(\mathbf{r}) \rangle$ .

Найдем явный вид функции  $g(\mathbf{r})$  в (20.16). Прежде всего заметим, что поле  $U(\mathbf{r})$  представляет собой функционал<sup>1)</sup> от  $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ , и воспользуемся следующей формулой, справедливой для гауссова случайного поля  $\varepsilon_1(\mathbf{r})$  и функционала  $U(\mathbf{r})$  от него (см. приложение 20Б):

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \int dV' \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta U(\mathbf{r})}{\delta \varepsilon_1(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (20.17)$$

где величина  $\delta U / \delta \varepsilon_1$  называется функциональной или вариационной, производной (см. приложение 20А). Формулу (20.17) называют иногда формулой Фурутцу — Новикова. Используя предположение (20.9) о дельта-коррелированности, из (20.17) находим

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \iint d\rho' A(\rho - \rho') \left\langle \frac{\delta U(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x, \rho')} \right\rangle. \quad (20.18)$$

В приложении 20В показано, что

$$\frac{\delta U(x, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} = \frac{ik}{4} \delta(\rho - \rho') U(x, \rho'), \quad (20.19a)$$

$$\frac{\delta U^*(x, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} = -\frac{ik}{4} \delta(\rho - \rho') U^*(x, \rho'). \quad (20.19б)$$

Подставляя (20.19а) в (20.18), получаем

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{ik}{4} A(0) \langle U(x, \rho) \rangle. \quad (20.20)$$

<sup>1)</sup> Функционалом называется величина, зависящая от функции  $\varepsilon(\mathbf{r})$  (см. приложение 20А). Напротив, функция — это величина, зависящая от числовой переменной.

Таким образом, уравнение (20.15) принимает вид

$$\left[ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_t^2 + \frac{ik^3}{4} A(0) \right] \langle U(x, \rho) \rangle = 0. \quad (20.21)$$

Вместе с граничным условием при  $x = 0$

$$\langle U(0, \rho) \rangle = U_0(\rho) \quad (20.22)$$

уравнение (20.21) полностью определяет когерентное поле  $\langle U(x, \rho) \rangle$ .

Решение уравнения (20.21) легко найти, положив

$$\langle U(x, \rho) \rangle = f(x, \rho) \exp(-\alpha_0 x), \quad (20.23)$$

где

$$\alpha_0 = k^2 A(0)/8 = 2\pi^2 k^2 \int_0^\infty \Phi_n(x) x dx. \quad (20.24)$$

Подставляя (20.23) в (20.21), получаем

$$[2ik\partial/\partial x + \nabla_t^2] f(x, \rho) = 0. \quad (20.25)$$

Уравнение (20.25) — это параболическое уравнение, описывающее распространение поля в свободном пространстве (при  $\epsilon_1 = 0$ ), так что функцию  $f(x, \rho)$  можно рассматривать как поле в свободном пространстве без флуктуаций. Обозначая поле в свободном пространстве через  $U_0(x, \rho)$ , т. е. полагая  $f(x, \rho) = U_0(x, \rho)$ , получаем окончательное решение

$$\langle U(x, \rho) \rangle = U_0(x, \rho) \exp(-\alpha_0 x). \quad (20.26)$$

Таким образом, когерентная интенсивность определяется выражением

$$|\langle U(x, \rho) \rangle|^2 = |U_0(x, \rho)|^2 \exp(-2\alpha_0 x). \quad (20.27)$$

Отметим, что параметр  $2\alpha_0$ , определяемый (20.24), по величине равен полному сечению рассеяния единичного объема турбулентной среды, даваемому формулой (16.56).

В общем случае параметр  $\alpha_0$  связан с корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления  $B_n(\mathbf{r})$  соотношением (20.14):

$$\alpha_0 = k^2 \int_0^\infty B_n(x) dx = k^2 \sigma_n^2 L_n, \quad (20.28)$$

где  $\sigma_n^2 = \langle n_1^2 \rangle$  — дисперсия показателя преломления, а  $L_n$  — интегральный масштаб случайной среды:

$$L_n = \int_0^\infty B_n(x) dx / B_n(0). \quad (20.29)$$

Для колмогоровского спектра

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2(\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (20.30)$$

где  $\kappa_m = 5,92/l_0$ , имеем

$$\alpha_0 = 0,033\pi^2 C_n^2 k^2 L_0^{5/3} \psi\left[1, \frac{1}{6}; (\kappa_m L_0)^{-2}\right]. \quad (20.31)$$

Здесь  $\psi(a, b; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода, независимая от функции Куммера. Поскольку  $\kappa_m L_0 = 5,92L_0/l_0$ ,  $(\kappa_m L_0)^{-2} \ll 1$ , можно воспользоваться формулой

$$\psi(a, b; z) \rightarrow \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} \quad \text{при} \quad \text{Re } b < 1, \quad |z| \ll 1.$$

В результате получаем

$$\alpha_0 = 0,391C_n^2 k^2 L_0^{5/3}. \quad (20.32)$$

## 20.4. Параболическое уравнение для функции взаимной когерентности

Рассмотрим теперь второй момент

$$\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \langle U(x, \rho_1) U^*(x, \rho_2) \rangle, \quad (20.33)$$

который называют также функцией взаимной когерентности [167, 337].

При выводе уравнения для  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$  мы будем исходить из параболического уравнения (20.7)

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} U(x, \rho_1) + \nabla_{t_1}^2 U(x, \rho_1) + k^2 \varepsilon_1(x, \rho_1) U(x, \rho_1) = 0. \quad (20.34)$$

Умножим его на  $U^*(x, \rho_2)$  и запишем в следующем виде:

$$2ik \frac{\partial U_1}{\partial x} U_2^* + \nabla_{t_1}^2 U_1 U_2^* + k^2 \varepsilon_1(x, \rho_1) U_1 U_2^* = 0, \quad (20.35)$$

где  $U_1 = U(x, \rho_1)$ ,  $U_2 = U(x, \rho_2)$ , а  $\nabla_{t_1}^2$  — оператор Лапласа, действующий по координате  $\rho_1$ . Возьмем далее комплексно-сопряженное с (20.34) уравнение, заменим в нем  $\rho_1$  на  $\rho_2$  и умножим на  $U_1$ :

$$-2ik \frac{\partial U_2^*}{\partial x} U_1 + \nabla_{t_2}^2 U_2^* U_1 + k^2 \varepsilon_1(x, \rho_2) U_2^* U_1 = 0. \quad (20.36)$$

Вычитая (20.36) из (20.35) и усредняя, получаем

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) + (\nabla_{t_1}^2 - \nabla_{t_2}^2) \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) + k^2 \langle [\varepsilon_1(x, \rho_1) - \varepsilon_1(x, \rho_2)] U(x, \rho_1) U^*(x, \rho_2) \rangle = 0, \quad (20.37)$$

Можно показать, что последнее слагаемое в (20.37) пропорционально  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$ . Для доказательства этого утверждения воспользуемся формулой (20.18) и запишем

$$\langle \varepsilon_1(x, \rho_1) Z(x, \rho_1, \rho_2) \rangle = \int d\rho'_1 A(\rho_1 - \rho'_1) \left\langle \frac{\delta Z(x, \rho_1, \rho_2)}{\delta \varepsilon_1(x, \rho'_1)} \right\rangle, \quad (20.38)$$

где  $Z(x, \rho_1, \rho_2) = U(x, \rho_1) U^*(x, \rho_2)$ . Используя (20.19а) и (20.19б), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z(x, \rho_1, \rho_2)}{\delta \varepsilon_1(x, \rho')} &= \frac{\delta U(x, \rho_1)}{\delta \varepsilon_1(x, \rho')} U^*(x, \rho_2) + U(x, \rho_1) \frac{\delta U^*(x, \rho_2)}{\delta \varepsilon_1(x, \rho')} = \\ &= \frac{ik}{4} [\delta(\rho_1 - \rho') U(x, \rho') U^*(x, \rho_2) - \delta(\rho_2 - \rho') U(x, \rho_1) U^*(x, \rho')]. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Усредняя (20.39) и подставляя результат в (20.38), находим

$$\langle \varepsilon_1(x, \rho_1) Z(x, \rho_1, \rho_2) \rangle = \frac{ik}{4} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] \Gamma(x, \rho_1, \rho_2). \quad (20.40)$$

Поменяв в (20.38)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  местами и осуществив операцию комплексного сопряжения, получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(x, \rho_2) Z^*(x, \rho_2, \rho_1) \rangle &= \langle \varepsilon_1(x, \rho_2) Z(x, \rho_1, \rho_2) \rangle = \\ &= -\frac{ik}{4} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] \Gamma(x, \rho_1, \rho_2). \end{aligned} \quad (20.41)$$

Подставив (20.40) и (20.41) в (20.37), получим дифференциальное уравнение для функции когерентности

$$\left\{ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + (\nabla_{i_1}^2 - \nabla_{i_2}^2) + \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] \right\} \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = 0. \quad (20.42)$$

Аналогично можно найти дифференциальное уравнение для  $\langle U(x, \rho_1) U(x, \rho_2) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \left\{ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + (\nabla_{i_1}^2 + \nabla_{i_2}^2) - \frac{ik^3}{2} [A(0) + A(\rho_1 - \rho_2)] \right\} \times \\ \times \langle U(x, \rho_1) U(x, \rho_2) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (20.43)$$

Уравнения (20.42) и (20.43) являются основными дифференциальными уравнениями для вторых моментов поля.

Между функцией взаимной когерентности  $\Gamma$  в сплошной случайной среде и лучевой интенсивностью  $I$  в случайном облаке рассеивателей имеется тесная связь. Показано [183], что уравнение переноса излучения в малоугловом приближении (13.5) эквивалентно параболическому уравнению (20.42), причем имеет

место следующее соответствие:

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \int I(x, \rho_c, s) \exp(iks \cdot \rho_d) ds, \quad (20.44)$$

$$2\pi k^4 \Phi_n(\kappa) = \rho_n |f(s)|^2 = \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} p(s), \quad \kappa = ks.$$

## 20.5. Решения уравнения для функции взаимной когерентности

В данном разделе мы найдем сначала выражение для функции взаимной когерентности в случае плоской падающей волны, а затем — в общем случае.

В случае плоской волны функция  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$  должна зависеть только от  $x$  и  $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$ . Если при  $x = 0$  волна когерентна, то

$$\Gamma(0, \rho_1 - \rho_2) = 1, \quad (20.45)$$

так что решение уравнения (20.42) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) &= \exp\left\{-\frac{k^2}{4}[A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)]x\right\} = \\ &= \exp\left\{-k^2 x \int_{-\infty}^{\infty} [B_n(\eta, 0) - B_n(\eta, \rho)] d\eta\right\}. \end{aligned} \quad (20.46a)$$

Используя формулу (20.13), выражению (20.46a) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \rho) &= \exp\left\{-\frac{1}{2} D(x, \rho)\right\}, \\ D(x, \rho) &= 8\pi^2 k^2 x \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned} \quad (20.46b)$$

Заметим, что структурные функции флуктуаций уровня и фазы, вычисленные в приближении Рытова, равны (гл. 17)

$$\begin{aligned} D_x(x, \rho) &= 2[B_x(x, 0) - B_x(x, \rho)] = \\ &= 4\pi^2 k^2 x \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \left[1 - \frac{\sin(\kappa^2 x/k)}{\kappa^2 x/k}\right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \end{aligned} \quad (20.47)$$

$$\begin{aligned} D_S(x, \rho) &= 2[B_S(x, 0) - B_S(x, \rho)] = \\ &= 4\pi^2 k^2 x \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \left[1 + \frac{\sin(\kappa^2 x/k)}{\kappa^2 x/k}\right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Отсюда видно, что функция  $D(x, \rho)$  в формуле (24.46б) совпадает с суммой  $D_x$  и  $D_S$ :

$$D(x, \rho) = D_x(x, \rho) + D_S(x, \rho). \quad (20.49)$$

Функция  $D(x, \rho)$  называется структурной функцией комплексной фазы.

Рассмотрим теперь общее решение уравнения (20.42), удовлетворяющее при  $x = 0$  граничному условию

$$\Gamma(0, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_0(\rho_1, \rho_2). \quad (20.50)$$

Учитывая, что функцию взаимной когерентности  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$  удобнее описывать, используя разностную координату  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$  и координату центра тяжести  $\rho_c = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ , преобразуем уравнение (20.42) к новым координатам. Мы замечаем, что <sup>1)</sup>

$$\nabla_{t_1}^2 - \nabla_{t_2}^2 = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y_c \partial y_d} + \frac{\partial^2}{\partial z_c \partial z_d} \right),$$

где  $\rho_c = y_c \hat{y} + z_c \hat{z}$  и  $\rho_d = y_d \hat{y} + z_d \hat{z}$ , так что (20.42) можно представить в следующем виде:

$$\left\{ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y_c \partial y_d} + \frac{\partial^2}{\partial z_c \partial z_d} \right) + \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\rho_d)] \right\} \times \\ \times \Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = 0. \quad (20.51)$$

По сравнению со случаем плоской волны общий случай характеризуется наличием второго слагаемого в этом уравнении. Рассмотрим теперь преобразование Фурье по координатам  $\rho_c$  и  $\rho_d$ :

$$M(x, \kappa_d, \kappa_c) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \Gamma(x, \rho_c, \rho_d) \times \\ \times \exp(-i\rho_d \cdot \rho_c - i\kappa_c \cdot \rho_d) d\rho_c d\rho_d, \quad (20.52)$$

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \iint M(x, \kappa_d, \kappa_c) \exp(i\kappa_d \cdot \rho_c + i\kappa_c \cdot \rho_d) d\kappa_d d\kappa_c. \quad (20.53)$$

Выполняя такое преобразование Фурье уравнения (20.21), получаем

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} M(x, \kappa_d, \kappa_c) - 2\kappa_d \cdot \kappa_c M(x, \kappa_d, \kappa_c) + \\ + \frac{ik^3}{2} \int d\kappa'_c F_A(\kappa_c - \kappa'_c) M(x, \kappa_d, \kappa'_c) = 0, \quad (20.54)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_c} \frac{\partial y_c}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial y_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_c} + \frac{\partial}{\partial y_d} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_c} - \frac{\partial}{\partial y_d}.$$

где

$$F_A(\kappa_c) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int [A(0) - A(\rho_d)] \exp(-i\kappa_c \cdot \rho_d) d\rho_d = \\ = \delta(\kappa_c) A(0) - 2\pi\Phi_e(\kappa_c)$$

представляет собой фурье-образ от  $A(0) - A(\rho_d)$ . Последнее слагаемое в (20.54) получено с учетом того факта, что оно является фурье-образом произведения двух функций:  $A(0) - A(\rho_d)$  и  $\Gamma(x, \rho_c, \rho_d)$ .

В уравнении (20.54) второе слагаемое содержит множитель  $\kappa_d$ . Это слагаемое можно исключить, введя новую функцию

$$M(x, \kappa_d, \kappa_c) = M_0(x, \kappa_d, \kappa_c) \exp[-i(\kappa_d \cdot \kappa_c/k)x]. \quad (20.55)$$

Тогда для новой функции  $M_0$  получим более простое уравнение

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} M_0(x, \kappa_d, \kappa_c) - \frac{ik^3}{2} \int d\kappa'_c F_A(\kappa_c - \kappa'_c) \times \\ \times \exp\left[\frac{i\kappa_d \cdot (\kappa_c - \kappa'_c)}{k} x\right] M_0(x, \kappa_d, \kappa'_c) = 0. \quad (20.56)$$

Выполним теперь обратное преобразование Фурье уравнения (20.56) по  $\kappa_c$ :

$$\Gamma_0(x, \kappa_d, \rho_d) = \int M_0(x, \kappa_d, \kappa_c) \exp(i\kappa_c \cdot \rho_d) d\kappa_c. \quad (20.57)$$

В результате получим уравнение

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_0(x, \kappa_d, \rho_d) + \frac{ik^3}{2} \left[ A(0) - A\left(\rho_d + \frac{\kappa_d x}{k}\right) \right] \Gamma_0(x, \kappa_d, \rho_d) = 0, \quad (20.58)$$

решение которого есть

$$\Gamma_0(x, \kappa_d, \rho_d) = \\ = \Gamma_0(0, \kappa_d, \rho_d) \exp\left\{-\int_0^x \frac{k^2}{4} \left[ A(0) - A\left(\rho_d + \frac{\kappa_d x'}{k}\right) \right] dx'\right\}. \quad (20.59)$$

Окончательное выражение для  $\Gamma(x, \rho_c, \rho_d)$  можно получить, выполнив обратное преобразование Фурье соотношения (20.57) и используя определение (20.55) и (20.53):

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \iint M_0(x, \kappa_d, \kappa_c) \times \\ \times \exp\left(-i \frac{\kappa_d \cdot \kappa_c}{k} x + i\kappa_d \cdot \rho_c + i\kappa_c \cdot \rho_d\right) d\kappa_d d\kappa_c. \quad (20.60)$$

С использованием (20.57) это дает

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \rho_c, \rho_d) &= \int \Gamma_0\left(x, \kappa_d, \rho_d - \frac{\kappa_d x}{k}\right) \exp(i\kappa_d \cdot \rho_c) d\kappa_d = \\ &= \int \Gamma_0\left(0, \kappa_d, \rho_d - \frac{\kappa_d x}{k}\right) \exp\left\{i\kappa_d \cdot \rho_d - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \frac{k^2}{4} \left[ A(0) - A\left(\rho_d - \frac{\kappa_d}{k}(x-x')\right) \right] dx'\right\} d\kappa_d, \end{aligned} \quad (20.61)$$

где  $\Gamma_0(0, \kappa_d, \rho_d)$  определяется значением  $\Gamma$  при  $x = 0$ :

$$\Gamma(0, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_0(0, \rho_c, \rho_d),$$

$$\Gamma_0(0, \kappa_d, \rho_d) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma_0(0, \rho_c, \rho_d) \exp(-i\kappa_d \cdot \rho_c) d\rho_c. \quad (20.62)$$

Соотношение (20.61) вместе с граничным значением (20.62) представляет собой общее решение уравнения (20.51).

Вместо переменной интегрирования  $\kappa_d$  в (20.61) можно использовать  $\rho'_d = \rho_d - \kappa_d x/k$  и представить  $\Gamma(x, \rho_c, \rho_d)$  в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \rho_c, \rho_d) &= \\ &= \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \int d\rho'_c \int d\rho'_d \Gamma(0, \rho'_c, \rho'_d) \exp\left[i\frac{k}{x}(\rho_d - \rho'_d) \cdot (\rho_c - \rho'_c) - H\right], \end{aligned} \quad (20.63)$$

где

$$\begin{aligned} H &= \frac{k^2}{4} \int_0^x \left\{ A(0) - A\left[\rho'_d + (\rho_d - \rho'_d) \frac{x'}{x}\right] \right\} dx' = \\ &= 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \\ \rho &= \left| \rho'_d + (\rho_d - \rho'_d) \frac{x'}{x} \right|. \end{aligned}$$

Отметим, что  $\Gamma(0, \rho'_c, \rho'_d)$  есть не что иное, как функция взаимной когерентности поля в двух точках  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$  плоскости  $x = 0$ ,

причем  $\rho'_1 = \rho'_c + \frac{1}{2} \rho'_d$ ,  $\rho'_2 = \rho'_c - \frac{1}{2} \rho'_d$ , а  $\Gamma(x, \rho_c, \rho_d)$  — функция

взаимной когерентности поля в точках  $\rho_1 = \rho_c + \frac{1}{2} \rho_d$  и  $\rho_2 =$

$= \rho_c - \frac{1}{2} \rho_d$  в плоскости  $x$ . Отметим еще, что  $\exp\left[i\frac{k}{x}(\rho_d - \rho'_d) \cdot (\rho_c - \rho'_c)\right]$

представляет собой параболическое (френелевское) разложение функции  $\exp[i\kappa r_1 - i\kappa r_2]$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точечных источников, расположенных в точках  $(0, \rho'_1)$  и  $(0, \rho'_2)$  до соответствующих точек наблюдения  $(x, \rho_1)$  и  $(x, \rho_2)$ . Функция  $H$  связана со структурной функцией  $D$  сфе-

рических волн. Рассмотрим две сферические волны в точках  $(x, \rho_1)$  и  $(x, \rho_2)$ , излученные источниками в точках  $(0, \rho'_1)$  и  $(0, \rho'_2)$  соответственно. Обозначим уровни и фазы этих волн через  $\chi_1$  и  $\chi_2$  и  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Тогда функция  $H$ , входящая в выражение (20.63), равна <sup>1)</sup>

$$H = \frac{1}{2} D, \quad D = D_\chi + D_S, \quad D_\chi = \langle |\chi_1 - \chi_2|^2 \rangle, \quad D_S = \langle |S_1 - S_2|^2 \rangle. \quad (20.64)$$

## 20.6. Примеры функций взаимной когерентности

В данном разделе мы рассмотрим ряд примеров.

а. *Сферическая волна.* Сферическая волна задается равенством

$$u_0(\mathbf{r}) = e^{ikr}/r. \quad (20.65)$$

В параболическом приближении (20.65) принимает вид

$$u_0(\mathbf{r}) = U_0(x, \rho) \exp(ikx), \quad U_0(x, \rho) = \frac{1}{x} \exp\left(i \frac{k|\rho|^2}{2x}\right). \quad (20.66)$$

Граничное условие при  $x = 0$  для функции когерентности сферической волны можно записать, используя дельта-функции:

$$\Gamma(0, \rho'_c, \rho'_d) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \delta(\rho'_c) \delta(\rho'_d). \quad (20.67)$$

Отметим, что в свободном пространстве ( $H = 0$ ) подстановка (20.67) в (20.63) приводит к правильному результату для функции взаимной когерентности:

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{x^2} \exp\left(i \frac{k|\rho_1|^2}{2x} - i \frac{k|\rho_2|^2}{2x}\right) = \frac{1}{x^2} \exp\left(i \frac{k}{x} \rho_c \cdot \rho_d\right). \quad (20.68)$$

В случайной среде для функции взаимной когерентности сферической волны получаем следующее выражение:

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{x^2} \exp\left(i \frac{k}{x} \rho_c \cdot \rho_d - H\right), \quad (20.69)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{k^2}{4} \int_0^x \left[ A(0) - A\left(\rho_d \frac{x'}{x}\right) \right] dx' = \\ &= 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty \left[ 1 - J_0\left(\kappa \rho_d \frac{x'}{x}\right) \right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Она совпадает со структурной функцией двух пересекающихся сферических волн, рассмотренной в разд. 19.6. Отметим, что  $\rho'_d + (\rho_d - \rho'_d)(x'/x)$  в  $H$  совпадает с  $\rho_z + \gamma(\rho - \rho_z)$  в (19.57).

б. *Волновой пучок.* При  $x = 0$  волновой пучок задается формулой (разд. 18.4)

$$U_0(\rho) = \exp\left(-\frac{1}{2} k \alpha \rho^2\right), \quad \alpha = \alpha_r + i\alpha_i = \frac{\lambda}{\pi W_0^2} + \frac{1}{R_0}. \quad (20.70)$$

В соответствии с этим функция взаимной когерентности при  $x = 0$  равна

$$\begin{aligned} \Gamma(0, \rho'_c, \rho'_d) &= \exp\left[-\frac{k\alpha}{2} \rho_1'^2 - \frac{k\alpha^*}{2} \rho_2'^2\right] = \\ &= \exp\left\{-k\left[\alpha_r\left(\rho_c'^2 + \frac{1}{4}\rho_d'^2\right) + i\alpha_i\rho_c' \cdot \rho_d'\right]\right\}. \end{aligned} \quad (20.71)$$

Используя (20.62), запишем

$$\Gamma_0(0, \kappa_d, \rho_d) = \frac{1}{4\pi k \alpha_r} \exp\left[-k\alpha_r \frac{\rho_d^2}{4} - \frac{|\kappa_d + k d_i \cdot \rho_d|^2}{4k\alpha_r}\right]. \quad (20.72)$$

Поставив этот результат в (20.61), получим

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \frac{W_0^2}{8\pi} \int d\kappa_d \exp[-a\rho_d^2 - b\kappa_d^2 + c\rho_d \cdot \kappa_d + i\kappa_d \cdot \rho_c - H], \quad (20.73)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2W_0^2} \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_r^2}\right), \quad b = \frac{W^2}{8} = \frac{W_0^2}{8} [(a_r x)^2 + (1 - \alpha_i x)^2], \\ c &= \frac{1}{2} \left[\alpha_r x - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} (1 - \alpha_i x)\right], \quad H = \frac{k^2}{2} \int_0^x \left[A(0) - A\left(\rho_d + \frac{\kappa_d x'}{k}\right)\right] dx'. \end{aligned}$$

в. *Некогерентный источник.* Если источник полностью некогерентен, то при  $x = 0$  имеем [37]

$$\Gamma(0, \rho'_c, \rho'_d) = \frac{4\pi^2}{k^2} I(\rho'_c) \delta(\rho'_d), \quad (20.74)$$

где через  $I(\rho_c)$  обозначена интенсивность волны в точке  $\rho_c$ . Подставляя (20.74) в (20.63), получаем

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{x^2} \int d\rho'_c I(\rho'_c) \exp\left[i\frac{k}{x} \rho_d \cdot (\rho_c - \rho'_c) - H\right], \quad (20.75)$$

$$H = \frac{k^2}{4} \int_0^x \left\{A(0) - A\left(\rho_d \frac{x'}{x}\right)\right\} dx'.$$

## 20.7. Функция взаимной когерентности в турбулентной среде

В турбулентной среде флуктуации показателя преломления можно приближенно описать модифицированным спектром Кармана

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2(\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (20.76)$$

где  $\kappa_m = 5,92/l_0$ . Вычислим функцию  $H$ , используя этот спектр:

$$\begin{aligned} H &= \frac{k^2}{4} \int_0^x \{A(0) - A(\rho)\} dx' = \\ &= 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned} \quad (20.77)$$

Можно показать [185], что имеют место следующие приближенные равенства:

$$A(0) - A(\rho) = \begin{cases} 6,56C_n^2 \frac{\rho^2}{l_0^{1/3}} & \text{при } \rho < l_0, \end{cases} \quad (20.78a)$$

$$A(0) - A(\rho) = \begin{cases} 5,83C_n^2 \rho^{5/3} & \text{при } l_0 < \rho < L_0, \end{cases} \quad (20.78б)$$

$$A(0) - A(\rho) = \begin{cases} 3,127C_n^2 L_0^{5/3} & \text{при } L_0 < \rho, \end{cases} \quad (20.78в)$$

причем каждое из них справедливо при выполнении соответствующего ограничения на длину пути распространения:

$$x \gg x_i, \quad (20.79a)$$

$$x_i \gg x \gg x_c, \quad (20.79б)$$

$$x_c \gg x, \quad (20.79в)$$

где  $x_i = [0,39C_n^2 k^2 l_0^{1/3}]^{-1}$  и  $x_c = [0,39C_n^2 k^2 L_0^{5/3}]^{-1}$ . Для волнового пучка на расстоянии  $x \gg x_i$  нужно использовать (20.78a). В результате получим [185]

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = (W_0/W)^2 \exp[-2\rho_c^2/W^2 - \rho\rho_d^2 + i2q\rho_d \cdot \rho_c], \quad (20.80a)$$

где

$$W^2 = W_0^2 [(\alpha_r x)^2 + (1 - \alpha_i x)^2] + 4,38C_n^2 l_0^{-1/3} x^3,$$

$$\rho = \frac{1}{2W_0^2} \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_r^2}\right) + \beta x - \frac{2}{W^2} F^2,$$

$$q = \frac{2}{W^2} F, \quad F = \frac{\alpha_r x}{2} \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_r^2}\right) - \frac{\alpha_i}{2\alpha_r} + \beta \frac{x^2}{k},$$

$$\beta = 1,64k^2 C_n^2 l_0^{-1/3}.$$

В случае волнового пучка при  $x_i \gg x \gg x_c$  расчеты следует проводить на основании формулы (20.73) с функцией  $H$  вида

$$H = 1,46 \int_0^x k^2 C_n^2 \left| \rho_d - \frac{\alpha_d}{k} x' \right|^{1/3} dx'. \quad (20.806)$$

В приложениях чаще всего приходится сталкиваться именно с этим случаем. На рис. 20.1 показан пример зависимости средней

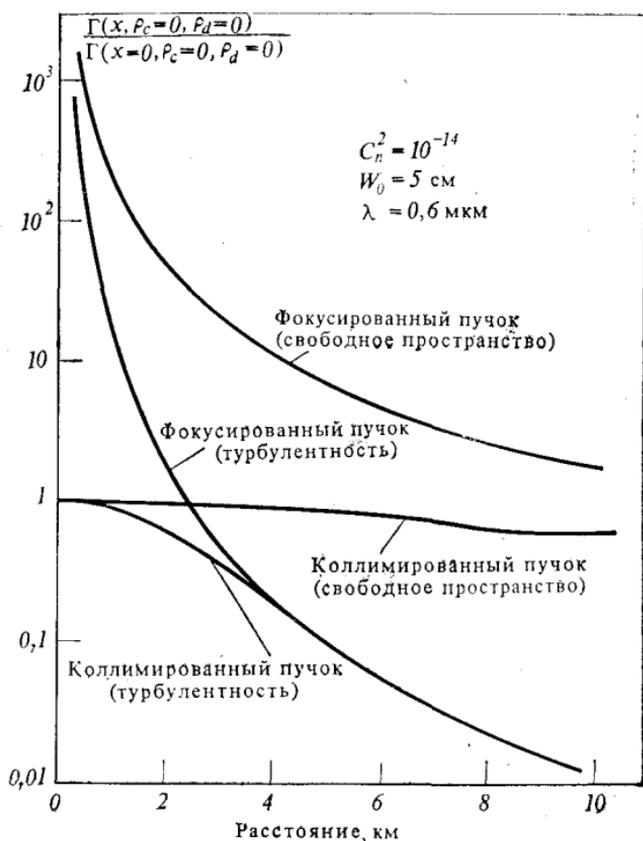


Рис. 20.1. Зависимость средней интенсивности  $\langle I(x, \rho_c=0) \rangle = \Gamma(x, \rho_c=0, \rho_d=0)$  на оси коллимированного и фокусируемого пучков от расстояния.

интенсивности на оси пучка от расстояния. Видно, что в турбулентной среде интенсивность уменьшается значительно быстрее, чем в свободном пространстве, а также то, что интенсивность волны в фокусируемом пучке сравнивается с интенсивностью в коллимированном пучке, причем влияние фокусировки исчезает уже на небольших расстояниях.

На рис. 20.2 показаны уширение и радиус корреляции поля коллимированного пучка. На расстоянии 0,5 км уширение пучка

пренебрежимо мало, а радиус корреляции порядка  $\sqrt{\lambda L}$ . На расстоянии 5 км пучок существенно уширяется, а радиус корреляции становится много меньше  $\sqrt{\lambda L}$ .

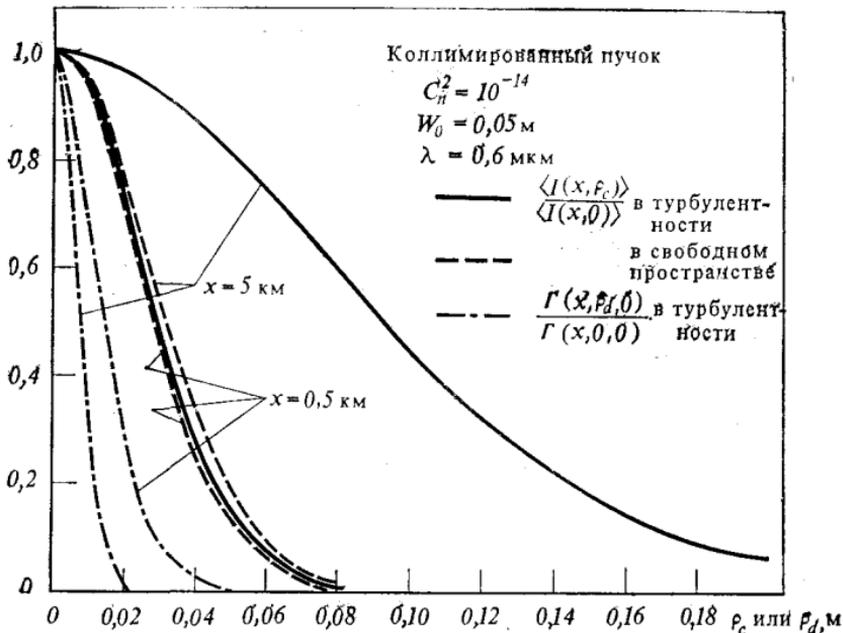


Рис. 20.2. Зависимость нормированной средней интенсивности  $\langle I(x, \rho_c) \rangle$  от поперечной координаты  $\rho_c$  и зависимость нормированной функции когерентности  $\Gamma(x, \rho_d, \rho_c = 0)$  на оси пучка от разнесения  $\rho_d$ .

Функция взаимной когерентности плоской волны при  $x_i \gg \gg x \gg x_c$  равна

$$\Gamma(x, \rho_d) = \exp(-1,46k^2 x C_n^2 \rho_d^{5/3}). \quad (20.81a)$$

Для сферической волны имеем

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d) = (1/x^2) \exp(i(k/x) \rho_c \cdot \rho_d - 0,547k^2 x C_n^2 \rho_d^{5/3}). \quad (20.81b)$$

## 20.8. Частотные спектры

В гл. 19 рассмотрены временные флуктуации и спектры волны в случае, когда случайная среда перемещается из-за ветра. Там показано, что если скорость ветра параллельна направлению распространения волны, то он почти не влияет на временные флуктуации; напротив, если скорость ветра перпендикулярна к траектории волны, то ветер оказывает самое непосредственное влияние на временные флуктуации волны. В данном разделе мы будем считать, что скорость ветра  $V$  перпендикулярна к траек-

тории волны, и воспользуемся гипотезой «замороженности» Тейлора, согласно которой неоднородности не меняют форму за время их перемещения на расстояние порядка своего размера. С учетом этих предположений параболическое уравнение (20.42) принимает вид

$$\left\{ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_{t_1}^2 - \nabla_{t_2}^2 + \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2 - \mathbf{V}\tau)] \right\} \Gamma(x, \rho_1, \rho_2, \tau) = 0, \quad (20.82)$$

где

$$\Gamma(x, \rho_1, \rho_2, \tau) = \langle U(x, \rho_1, t + \tau) U^*(x, \rho_2, t) \rangle.$$

Решение уравнения (20.82) совпадает с (20.61) или (20.63), если  $A(\rho)$  заменить на  $A(\rho - \mathbf{V}\tau)$ .

В случае сферической волны решение получается из (20.69) и имеет вид

$$\Gamma(x, \rho_c, \rho_d, \tau) = (1/x^2) \exp(i(k/x) \rho_c \cdot \rho_d - H). \quad (20.83)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{k^2}{4} \int_0^x \left[ A(0) - A\left(\rho_d \frac{x'}{x} - \mathbf{V}\tau\right) \right] dx' = \\ &= 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty \left[ 1 - J_0\left(\kappa \left| \rho_d \frac{x'}{x} - \mathbf{V}\tau \right| \right) \right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned}$$

На оси  $x$  при  $\rho_c = \rho_d = 0$  имеем

$$\Gamma(x, 0, 0, \tau) = (1/x^2) \exp(-H), \quad (20.84)$$

$$H = 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa V\tau)] \Phi(\kappa) \kappa d\kappa.$$

Функцию взаимной когерентности (20.84) можно представить в виде суммы когерентной ( $\Gamma_c$ ) и некогерентной ( $\Gamma_i$ ) частей. Когерентная часть  $\Gamma_c$  — это когерентная интенсивность, определяемая формулой (20.27) и не зависящая от  $\tau$ :

$$\Gamma_c(x, 0, 0, \tau) = \frac{1}{x^2} \exp(-2\alpha_0 x), \quad 2\alpha_0 = 4\pi^2 k^2 \int_0^x dx' \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (20.85)$$

Поэтому

$$\Gamma(x, 0, 0, \tau) = \Gamma_c + \Gamma_i, \quad \Gamma_i(x, 0, 0, \tau) = x^{-2} [\exp(-H) - \exp(-2\alpha_0 x)]. \quad (20.86a)$$

Отметим, что при  $\tau \rightarrow \infty$   $\Gamma_i \rightarrow 0$ ,

При сильной турбулентности на достаточно больших расстояниях  $x$  когерентная часть  $\Gamma_c$  становится пренебрежимо малой, и мы приближенно имеем

$$\Gamma(x, 0, 0, \tau) \approx \frac{1}{x^2} \exp \left[ -1,46k^2 (V\tau)^{5/3} \int_0^x C_n^2(x') dx' \right]. \quad (20.866)$$

Рассмотрим теперь частотный спектр сферической волны. Выполняя преобразование Фурье в (20.86), получаем

$$\begin{aligned} W_f(x, \omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, 0, 0, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = W_{fc}(x, \omega) + W_{fi}(x, \omega), \\ W_{fc}(x, \omega) &= \frac{4\pi}{x^2} \exp(-2\alpha_0 x) \delta(\omega), \\ W_{fi}(x, \omega) &= \frac{2}{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-H) - \exp(-2\alpha_0 x)] e^{-i\omega\tau} dt. \end{aligned} \quad (20.87)$$

Отметим, что в (20.87)  $\omega$  — отклонение частоты от рабочей (не-сущей) частоты  $\omega_0$  ( $k = \omega_0/c$ ). Отметим также, что когерентная интенсивность  $\Gamma_c$  порождает спектр, имеющий вид дельта-функции и сосредоточенный при  $\omega = 0$ , откуда следует, что когерентное поле представляет собой монохроматическую волну частоты  $\omega_0$ . Некогерентная часть  $\Gamma_i$  имеет протяженный спектр  $W_{fi}$  [см. (20.87)].

В случае волнового пучка временную зависимость можно получить из (20.73), изменив  $H$  следующим образом:

$$H = \frac{k^2}{4} \int_0^x \left[ A(0) - A \left( \rho_d + \frac{x dx'}{k} - V\tau \right) \right] dx'. \quad (20.88)$$

На оси пучка ( $\rho_c = \rho_d = 0$ ) имеем

$$\Gamma(x, 0, 0, \tau) = \Gamma_c + \Gamma_i,$$

$$\Gamma_c = \frac{W_0^2}{8\pi} \int d\kappa_d \exp[-b\kappa_d^2 - 2\alpha_0 x] = \frac{W_0^2}{W^2} \exp(-2\alpha_0 x), \quad (20.89)$$

$$\Gamma_i = \frac{W_0^2}{4\pi} \int d\kappa_d \exp(-b\kappa_d^2) [\exp(-H) - \exp(-2\alpha_0 x)].$$

Частотные спектры  $\Gamma_c$  и  $\Gamma_i$  определяются выражениями

$$W_{fc}(x, \omega) = \frac{W_0^2}{W^2} \exp(-2\alpha_0 x) \delta(\omega), \quad W_{fi}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (20.90)$$

## 20.9. Частотная корреляция

Функция взаимной когерентности  $\Gamma$  двух волн на разных частотах  $k_1 = \omega_1/c$  и  $k_2 = \omega_2/c$  определяется равенством [176, 186, 229, 231, 232, 238, 315, 356]:

$$\begin{aligned} \langle u(x, \rho_1, t + \tau, k_1) u^*(x, \rho_2, t, k_2) \rangle &= \\ &= \langle U(x, \rho_1, t + \tau, k_1) U^*(x, \rho_2, t, k_2) \rangle \exp[-i\omega_1(t + \tau) + i\omega_2 t] = \\ &= \Gamma(x, \rho_1, \rho_2, \tau, k_1, k_2) \exp[-i\omega_1(t + \tau) + i\omega_2 t]. \end{aligned} \quad (20.91)$$

Используя процедуру, описанную в разд. 20.4, получим для  $\Gamma$  параболическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left[ 2i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k_1} \nabla_{i_1}^2 - \frac{1}{k_2} \nabla_{i_2}^2 + \frac{i}{4} \{ k_1^2 A_1(0) + k_2^2 A_2(0) - \right. \\ \left. - k_1 k_2 [A_1(\rho_d - \mathbf{V}\tau) + A_2(\rho_d - \mathbf{V}\tau)] \} \right] \Gamma = 0, \end{aligned} \quad (20.92)$$

где  $A_1(\rho)$  выражается через спектральную плотность  $\Phi_{n1}$  флуктуаций показателя преломления на частоте  $\omega_1$ :

$$A_1(\rho) = 16\pi^2 \int_0^\infty J_0(k\rho) \Phi_{n1}(k) k dk, \quad (20.93)$$

а  $A_2(\rho)$  определяется такой же формулой с заменой  $\Phi_{n1}$  на  $\Phi_{n2}$  — спектральную плотность, отвечающую частоте  $\omega_2$ .

Двухчастотная функция когерентности  $\Gamma$  играет важную роль в задаче распространения широкополосных импульсов. Она важна также при анализе влияния межзвездной турбулентности на форму излученного пульсаром импульса. Общее решение уравнения (20.92) до сих пор не найдено. В случае плоской волны удается несколько упростить задачу. Этот результат приводится в следующем разделе.

## 20.10. Двухчастотная функция взаимной когерентности плоской волны

В случае плоской волны операторы  $\nabla_{i_1}$  и  $\nabla_{i_2}$  в (20.92) совпадают и равны  $\nabla_i$ . В турбулентной среде приближенно имеем [см. (20.786)]

$$A(0) - A(\rho) = 5,83 C_n^2 \rho^{5/3}. \quad (20.94)$$

Используя обозначения  $k_d = k_1 - k_2$ , положим теперь

$$\Gamma = \Gamma_1 \exp[-(k_d^2/8) A(0) z]. \quad (20.95)$$

С использованием (20.94) получим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + ia \nabla_i^2 + bc \rho^\nu \right] \Gamma_1 = 0, \quad (20.96)$$

где

$$a = \frac{k_d/2}{k_c^2 - (k_d/2)^2} \approx \frac{k_d/2}{k^2}, \quad b = \frac{1}{4} [k_c^2 - (k_d/2)^2] \approx k^2/4,$$

$$k_c = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \approx k, \quad k_d = k_1 - k_2, \quad c = 5,83C_n^2, \quad \nu = 5/3.$$

Приближенные значения  $a$  и  $b$  пригодны для описания большинства встречающихся в приложениях ситуаций. В этих формулах  $k$  — это волновое число, отвечающее несущей или центральной частоте.

Далее введем в (20.96) безразмерные переменные  $z/L = z'$  и  $\rho/\rho_0 = \rho'$  (15.119), где  $L$  — протяженность турбулентной среды ( $0 \leq z' \leq 1$ ), а  $\rho_0$  — радиус когерентности. Тогда получим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z'} + i \left( \frac{k_d}{k_{\text{кор}1}} \right) \nabla'^2 + \rho'^\nu \right] \Gamma_1 = 0, \quad (20.97)$$

где  $\rho_0 = (5,83C_n^2 L k^2/4)^{-3/5}$  и  $k_{\text{кор}1} = 0,31k/\sigma_\chi^{12/5}$ . Радиус когерентности  $\rho_0$  — это такое расстояние  $\rho$ , на котором взаимная функция когерентности (20.46б) уменьшается в  $e$  раз по сравнению с ее значением при  $\rho = 0$ . Отметим, что для турбулентной среды (20.46б) переходит в

$$\Gamma(x, \rho) = \exp[-(\rho/\rho_0)^{5/3}]. \quad (20.98)$$

Другая введенная величина  $k_{\text{кор}1}$  представляет собой волновое число, отвечающее ширине полосы когерентности, а через  $\sigma_\chi^2$  обозначена дисперсия флуктуаций уровня плоской волны:

$$\sigma_\chi^2 = 0,307C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (20.99)$$

Для ширины полосы когерентности  $f_{\text{кор}1}$  можно написать следующее выражение:

$$f_{\text{кор}1} = 0,31f/\sigma_\chi^{12/5} = 1,28fC_n^{-12/5} k^{-7/5} L^{-11/5}. \quad (20.100)$$

Отсюда следует, что в неионизованной турбулентной среде ширина полосы когерентности пропорциональна  $f^{-2/5}$ .

Рассмотрим случай ионизованной плазмы. Ее относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  дается формулой

$$\epsilon_r = 1 - (\omega_p/\omega)^2, \quad (20.101)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота, определяемая выражением

$$\omega_p^2 = e^2 N_e / m \epsilon_0. \quad (20.102)$$

Здесь  $N_e$  — концентрация электронов ( $\text{м}^{-3}$ ),  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона, а  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума. Для флуктуаций относительной диэлектрической проницаемости имеем

$$\epsilon_r = \langle \epsilon_r \rangle (1 + \epsilon_1), \quad \langle \epsilon_r \rangle = 1 - \left\langle \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right\rangle, \quad \epsilon_1 = - \frac{e^2}{m \epsilon_0 \langle \epsilon_r \rangle} \frac{\delta N_e}{\omega^2}. \quad (20.103)$$

Отсюда следует, что поскольку  $\langle \epsilon_r \rangle$  лишь слабо зависит от частоты  $\omega$ , то флуктуации коэффициента преломления  $n_1$  ( $= \epsilon_1/2$ )

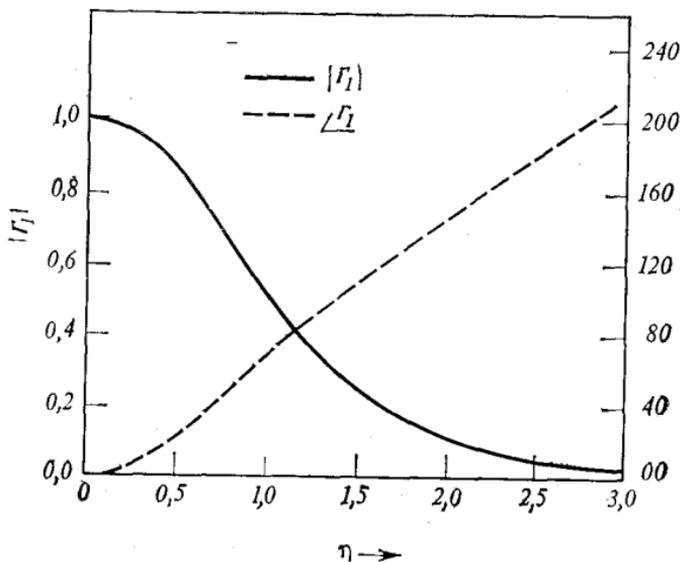


Рис. 20.3. Численное решение уравнения для  $\Gamma_1$  в зависимости от  $\eta = (k_d/k_{\text{кор}})^{5/11}$  при  $\rho = 0$ .

меняются приблизительно пропорционально  $\omega^{-2}$ . Поскольку структурная характеристика  $C_n^2$  пропорциональна  $\langle n_1^2 \rangle$ , имеем

$$C_n^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{e^2}{m \epsilon_0 \langle \epsilon_r \rangle} \right]^2 \frac{1}{\omega^4} C_N^2, \quad (20.104)$$

где  $C_N$  — структурная характеристика флуктуаций электронной концентрации. Подставляя (20.104) в (20.100), получаем

$$f_{\text{кор}1} \sim C_N^{-12/5} f^{22/5} L^{-11/5}. \quad (20.105)$$

Уширение импульса обратно пропорционально полосе когерентности, поэтому

$$\text{уширение импульса} \sim \lambda^{22/5}. \quad (20.106)$$

Было показано, что длительность импульсов от пульсаров имеет зависимость от длины волны, близкую к (20.106). На рис. 20.3 приведены результаты численного решения уравнения (20.97).

Перепишем (20.95) в виде

$$\Gamma = \Gamma_1(k_d/k_{\text{ког}1}, \rho/\rho_0) \exp(-k_d^2/k_{\text{ког}2}^2), \quad (20.107)$$

где  $k_{\text{ког}2} = k/(\alpha_0 L)^{1/2}$ , а  $\alpha_0$  определено формулой (20.24). Из этой записи видно, что если оптический путь  $2\alpha_0 L$  сравним с единицей, то  $k_{\text{ког}2} < k_{\text{ког}1}$ , так что в этом случае уширение импульса определяется величиной  $k_{\text{ког}2}$ . С другой стороны, на больших расстояниях  $k_{\text{ког}2} > k_{\text{ког}1}$ , и характеристики импульса определяются величиной  $k_{\text{ког}1}$ . Заметим, что  $k_{\text{ког}1}$  пропорционально  $L^{-11/5}$ , в то время как  $k_{\text{ког}2}$  пропорционально  $L^{-1/2}$ .

Имеются обширные исследования по влиянию неоднородностей межзвездной среды на форму излучаемых пульсарами радиоимпульсов [1, 113, 222, 230, 231, 314, 355, 379, 380] (см. также дополнительную библиографию по распространению импульсного излучения в случайных средах [53, 59, 110, 151, 209, 258, 287, 312]).

## 20.11. Форма импульса

Известно [176, 321], что интенсивность выходного сигнала  $I(t)$  выражается через интенсивность входного импульса  $I_i(t)$  с помощью свертки [см. (15.85)]:

$$I(t) = \int G(t-t') I_i(t') dt', \quad (20.108)$$

где  $G(t)$  — отклик на входной дельта-импульс. Отклик  $G(t)$  представляет собой фурье-образ двухчастотной функции когерентности  $\Gamma$ :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega_d \Gamma(\omega_d) \exp(-i\omega_d t). \quad (20.109)$$

Поскольку  $\Gamma$  дается формулой (20.107),  $G(t)$  можно представить в виде свертки

$$G(t) = \int I_1(t-t') I_2(t') dt', \quad (20.110)$$

где

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_1(\omega_d) \exp\left[i\omega_d \left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right] d\omega_d,$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-\frac{k_d^2}{k_{\text{ког}2}^2}\right) \exp\left[i\omega_d \left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right] d\omega_d.$$

На рис. 20.4 приведен результат численного расчета  $I_1(t - z/c_0)$  в зависимости от приведенного времени  $(t - z/c_0)/T_1$ , где  $T_1 =$

$= \omega_{\text{ког}}^{-1}$ . Интеграл для  $I_2(t - z/c_0)$  легко вычисляется, причем оказывается, что  $I_2(t - z/c_0)$  имеет форму гауссова импульса.

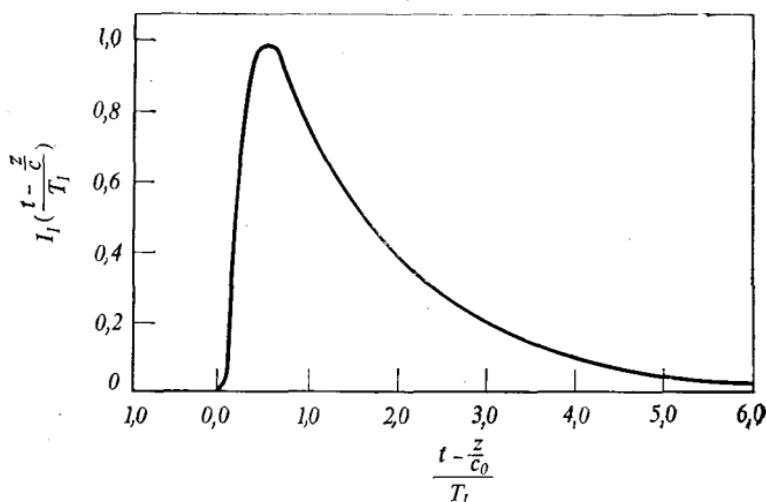


Рис. 20.4. Форма импульса  $I_1$ , являющегося откликом на входной дельта-импульс.

Влияние  $I_1$  и  $I_2$  на длительность импульса рассматривается в конце предыдущего раздела.

## 20.12. Угловой и частотный спектры

Функция взаимной когерентности в случае плоской волны дается выражением (20.46б). Используя формулу (20.78б), справедливую для турбулентности, перепишем (20.46б) в виде

$$\Gamma(x, \rho) = \exp[-(\rho/\rho_0)^{5/3}], \quad (20.111)$$

где  $\rho_0 = [1,46C_n^2 k^2 x]^{-3/5}$ .

Угловой спектр интенсивности  $\Gamma(x, \theta)$  определяется как фурье-образ функции взаимной когерентности  $\Gamma(x, \rho)$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \theta) &= \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \Gamma(x, \rho) \exp(-ik\rho \cdot \theta) d\rho = \\ &= \frac{k^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}\right] J_0(k\rho\theta) \rho d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi\theta_c^2} \int_0^\infty \exp(-t^{5/3}) J_0\left(\frac{\theta}{\theta_c} t\right) t dt, \end{aligned} \quad (20.112)$$

где  $\theta_c = (k\rho_0)^{-1}$ . График этой функции приведен на рис. 20.5.

Вычислим теперь частотный спектр  $W(\omega)$ . Обозначая через  $V$  скорость ветра, поперечную по отношению к направлению распространения волны, получаем

$$W(\omega) = 2 \int \Gamma(x, V\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \\ = \frac{2}{\omega_c} \int \exp(-t^{5/3}) \exp\left(-i\frac{1}{\omega_c}t\right) dt, \quad (20.113)$$

где  $\omega_c = V/\rho_0$ . График этой функции также приведен на рис. 20.5.

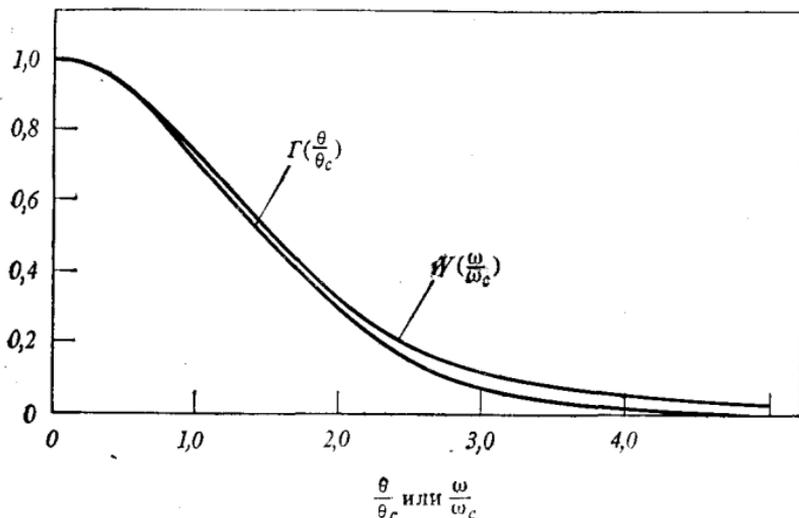


Рис. 20.5. Угловой спектр  $\Gamma(\theta/\theta_c)$  и частотный спектр  $W(\omega/\omega_c)$ .

Отметим, что ширина частотного спектра характеризуется величиной

$$\omega_c = V/\rho_0 = V [1,46C_n^2 k^2 x]^{3/5}. \quad (20.114)$$

Если структурная характеристика  $C_n^2$  меняется вдоль трассы распространения, то

$$\omega_c = V \left[ \int_0^L 1,46C_n^2(x) k^2 dx \right]^{3/5}. \quad (20.115)$$

В качестве примера рассмотрим частотный спектр флуктуаций СВЧ-сигнала космического корабля, распространяющегося через околосолнечную турбулентную плазму. Внешний масштаб турбулентности околосолнечной плазмы оценивается по меньшей

мере в  $10^6$  км [389]<sup>1)</sup>. Поскольку зона Френеля  $(\lambda L)^{1/2}$  на расстоянии 1 а. е.<sup>2)</sup> составляет на частоте 2 ГГц примерно 150 км, можно использовать формулу (20.115). Если предположить, что структурная характеристика зависит только от расстояния до Солнца, то

$$C_n^2(r) = C_n^2[(r_0^2 + x^2)^{1/2}], \quad (20.116)$$

где  $r_0$  — прицельное расстояние траектории волны (кратчайшее расстояние между траекторией и Солнцем), равное  $r_0 = (1 \text{ а. е.}) \sin \varepsilon$ . Угол  $\varepsilon$  называют углом элонгации источника (рис. 20.6). Под  $V$  нужно понимать поперечную компоненту  $V_t$  солнечного ветра. Частотный спектр (20.113) и (20.115) СВЧ-излучения, распространяющегося через около-

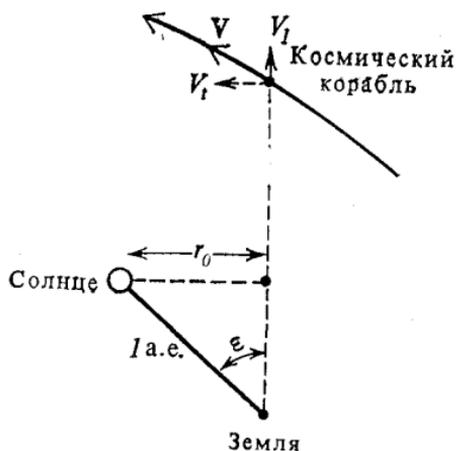


Рис. 20.6. Взаимное положение Солнца, Земли и космического корабля и определение угла элонгации  $\varepsilon$ .

солнечную турбулентную плазму, подтвержден экспериментально [388, 389].

### 20.13. Моменты четвертого порядка

Уравнение параболического типа для моментов более высокого порядка можно вывести различными способами [57, 58, 148, 167, 313, 337]. Оно имеет следующий вид:

$$\left[ 2ik \frac{\partial}{\partial x} + (\Delta_1 + \dots + \Delta_n - \Delta'_1 - \dots - \Delta'_m) + \frac{ik^3}{4} F_{nm} \right] \Gamma_{nm} = 0, \quad (20.117)$$

где

$$\Gamma_{nm} = \langle U(x, \rho_1) \dots U(x, \rho_n) U^*(x, \rho'_1) \dots U^*(x, \rho'_m) \rangle,$$

а  $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta'_1, \dots, \Delta'_m$  — поперечные лапласианы, действующие по координатам  $\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_1, \dots, \rho'_m$  соответственно. Функция  $F_{nm}$  определяется выражением

$$F_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A(\rho_i - \rho'_k) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m A(\rho'_k - \rho'_l). \quad (20.118)$$

<sup>1)</sup> См. также обзор работ советских авторов [239].

<sup>2)</sup> Астрономическая единица (а. е.) — среднее расстояние между Землей и Солнцем (149 598 000 км).

Однако общее решение этого уравнения до сих пор не найдено даже в случае четвертых моментов; исключением являются некоторые приближенные решения [116, 337].

Рассмотрим момент четвертого порядка

$$\Gamma_4 = \langle U(x, \rho_1) U(x, \rho_2) U^*(x, \rho'_1) U^*(x, \rho'_2) \rangle. \quad (20.119)$$

Проведем следующую замену независимых переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho'_1 + \rho'_2), & \rho &= \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2, \\ \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 + \rho'_1 - \rho'_2), & \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 - \rho'_1 + \rho'_2). \end{aligned} \quad (20.120)$$

Тогда уравнение (20.117) примет вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{k} (\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\rho} + \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2}) + Q \right] \Gamma_4 = 0, \quad (20.121)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi k^2}{4} \left[ H\left(\mathbf{r}_1 + \frac{\rho}{2}\right) + H\left(\mathbf{r}_2 - \frac{\rho}{2}\right) + H\left(\mathbf{r}_2 + \frac{\rho}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + H\left(\mathbf{r}_2 - \frac{\rho}{2}\right) - H(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - H(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right], \\ H(\rho) &= \frac{1}{\pi} [A(0) - A(\rho)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь распространение в случайной среде плоской волны. Поле такой волны не должно зависеть от координаты центра тяжести  $\mathbf{R}$ , так что  $\nabla_{\mathbf{R}} = 0$ . Поскольку оператор  $\nabla_{\rho}$  при этом выпадает из уравнения,  $\rho$  становится параметром и его можно положить равным нулю. В этом случае концы векторов  $\rho_1, \rho_2, \rho'_1$  и  $\rho'_2$  оказываются расположенными в вершинах параллелограмма (рис. 20.7), а уравнение (20.121) принимает вид

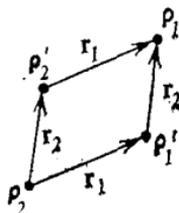


Рис. 20.7. Расположение векторов  $\rho_1, \rho_2, \rho'_1$  и  $\rho'_2$ .

наты центра тяжести  $\mathbf{R}$ , так что  $\nabla_{\mathbf{R}} = 0$ . Поскольку оператор  $\nabla_{\rho}$  при этом выпадает из уравнения,  $\rho$  становится параметром и его можно положить равным нулю. В этом случае концы векторов  $\rho_1, \rho_2, \rho'_1$  и  $\rho'_2$  оказываются расположенными в вершинах параллелограмма (рис. 20.7), а уравнение (20.121) принимает вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2} + Q \right] \Gamma_4 = 0, \quad (20.122)$$

где  $Q = D'(\mathbf{r}_1) + D'(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} D'(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} D'(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Через  $D'(\mathbf{r})$  здесь обозначена производная структурной функции комплексной

фазы (20.49) по координате  $x$ :

$$D'(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} D(x, \mathbf{r}) = 8\pi^2 k^2 \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa r)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa = 2,92 C_n^2 k^2 r^{5/3}. \quad (20.123)$$

Последнее выражение в (20.123) получено для турбулентной среды, когда справедливо приближение (20.786).

В случае падения плоской волны граничное условие для  $\Gamma_4$  при  $x = 0$  имеет вид  $\Gamma_4 = 1$ . Уравнение (20.122) и это граничное условие составляют математическую формулировку рассматриваемой задачи.

Исследуем некоторые общие свойства момента четвертого порядка  $\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , удовлетворяющего уравнению (20.122). Прежде всего, поскольку  $D'(\mathbf{r})$  — четная функция  $|\mathbf{r}|$ , функция  $Q$  в уравнении (20.122) не изменяется при перестановке местами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Поэтому

$$\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_4(x, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (20.124)$$

Второй момент интенсивности

$$\langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle = \langle U(x, \rho_1) U^*(x, \rho_1) U(x, \rho_2) U^*(x, \rho_2) \rangle. \quad (20.125)$$

Эта величина совпадает с моментом четвертого порядка  $\Gamma_4$  при  $\rho_1 = \rho'_1$  и  $\rho_2 = \rho'_2$ , так что

$$\Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, 0) = \langle I(x, \rho_2 + \mathbf{r}_1) I(x, \rho_2) \rangle. \quad (20.126)$$

Таким образом, корреляционная функция интенсивности  $B_I$  равна

$$B_I = \langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle - \langle I \rangle^2 = \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, 0) - \Gamma_2(x, 0)^2, \quad (20.127)$$

где  $\Gamma_2(x, \rho)$  — момент второго порядка (20.466).

Заметим также, что при  $|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$  точки  $\rho_1$  и  $\rho'_2$  удаляются от точек  $\rho'_1$  и  $\rho_2$  на бесконечное расстояние и корреляция полей в этих двух группах точек исчезает. Поэтому в пределе  $|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \langle U(x, \rho_1) U^*(x, \rho'_2) \rangle \langle U(x, \rho_2) U^*(x, \rho'_1) \rangle = \\ &= \Gamma_2(x, \mathbf{r}_1) \Gamma_2(x, \mathbf{r}_1)^* = |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_1)|^2. \end{aligned} \quad (20.128)$$

Можно показать также [337], что корреляционная функция интенсивности  $B_I$  удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_I(x, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = 0, \quad (20.129)$$

являющемуся следствием закона сохранения энергии плоской волны.

## 20.14. Приближение тонкого экрана

Уравнение (20.122) для момента четвертого порядка подробно исследовано в двух предельных случаях. Один из них называется приближением тонкого (или фазового) экрана. В этом случае предполагается, что случайная среда сосредоточена в пределах «тонкого экрана» и действие этого тонкого экрана сводится к модуляции фазы прошедшей через него волны. Другой предельный случай называют случаем протяженной среды. Он отвечает предположению, что однородная среда заполняет все пространство.



Рис. 20.8. Геометрия задачи о тонком (фазовом) экране.

Приближение фазового экрана широко использовалось в астрономии [251, 292, 297, 301, 340]. В этом приближении предполагается, что интенсивность флуктуаций параметров среды достаточно велика, чтобы вызвать сильные флуктуации волны, но толщина слоя достаточно мала, так что в плоскости экрана имеется только фазовая модуляция волны. Дальше эта модулированная по фазе волна распространяется в свободном пространстве; при этом на некотором расстоянии  $L$  от экрана возникают флуктуации интенсивности (рис. 20.8).

Обозначим  $\Gamma_4$  через  $\Gamma$  и представим в виде

$$\Gamma = \exp(\psi). \quad (20.130)$$

Подставляя (20.130) в (20.122), получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i}{k} [\nabla_{r2} \psi \cdot \nabla_{r1} \psi + \nabla_{r2} \cdot \nabla_{r1} \psi] + Q = 0. \quad (20.131)$$

Интегрирование по  $x$  дает

$$\psi = -Qx + \frac{i}{k} \int_0^x [\nabla_{r2} \psi \cdot \nabla_{r1} \psi + \nabla_{r2} \cdot \nabla_{r1} \psi] dx. \quad (20.132)$$

В случае тонкого экрана толщины  $\Delta x$  величину  $\psi$  можно разложить в ряд Тейлора

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\Delta x)^n \quad (20.133)$$

и получить рекуррентные формулы для  $a_n$ . Ясно, что второе слагаемое в (20.132) в случае тонкого экрана имеет порядок не ниже  $(\Delta x)^2$ , поэтому приближенно получаем

$$\psi = -Q \Delta x. \quad (20.134)$$

Таким образом, момент четвертого порядка  $\Gamma$  в выходной плоскости экрана ( $x = 0$ ) равен

$$\Gamma_0 = \exp(\psi),$$

$$\psi = - \left[ D(\mathbf{r}_1) + D(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} D(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right], \quad (20.135)$$

$$D(\mathbf{r}) = 2,92 C_n^2 k^2 r^{5/3} (\Delta x).$$

Рассмотрим далее четвертый момент поля при распространении волны в свободном пространстве от  $x = 0$  до  $x = L$ . В свободном пространстве уравнение (20.122) принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2} \right) \Gamma = 0. \quad (20.136)$$

Проведем в этом уравнении преобразование Фурье по переменным  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Полагая

$$M(x, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Gamma \exp(-i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r}_2), \quad (20.137)$$

получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{k} \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_2 \right) M(x, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = 0. \quad (20.138)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$M(L, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = M(0, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) \exp[-(i/k) \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_2 L], \quad (20.139)$$

где через  $M(0, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$  обозначен фурье-образ  $\Gamma$  при  $x = 0$  ( $\Gamma_0$ ) [см. (20.135)]:

$$M(0, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp(\psi) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r}_2). \quad (20.140)$$

Осуществив в (20.139) обратное преобразование Фурье по  $\boldsymbol{\kappa}_1$  и  $\boldsymbol{\kappa}_2$ , получим выражение для четвертого момента  $\Gamma(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . После интегрирования по  $\boldsymbol{\kappa}_1$  и  $\boldsymbol{\kappa}_2$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \int d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \exp \left[ i \frac{k}{L} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) + \psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \right]. \end{aligned} \quad (20.141)$$

С другой стороны, можно провести интегрирование по  $\kappa_2$  и  $\mathbf{r}_2'$  и обозначить  $\kappa_1 = \kappa$ . Тогда получим

$$\Gamma(L, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int d\kappa \exp(i\kappa \cdot \mathbf{r}_1) S(L, \kappa, \mathbf{r}_2),$$

$$S(L, \kappa, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}_1' \exp\left[-i\kappa \cdot \mathbf{r}_1' + \psi\left(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2 - \frac{\kappa L}{k}\right)\right], \quad (20.142)$$

где  $\psi$  определено формулой (20.135).

Поскольку второй момент интенсивности равен  $\Gamma(L, \mathbf{r}_1, 0)$  [см. (20.126)], функция  $S(L, \kappa, 0)$  есть не что иное, как спектральная плотность флуктуаций интенсивности. Выражение (20.142) для  $S$  было получено различными авторами [292, 297]. Поскольку функция  $S$  является фурье-образом второго момента интенсивности, она описывает и угловое распределение интенсивностей волн, приходящих с различных направлений. Поэтому  $S(L, \kappa, 0)$  часто называют угловым спектром флуктуаций интенсивности. В этом случае удобно использовать переменную  $\kappa = k\theta$ , где  $\theta$  — двумерный вектор, компонентами которого являются направляющие косинусы. Если направление волны, приходящей в точку наблюдения, определяется единичным вектором  $\hat{\mathbf{i}} = l\hat{\mathbf{x}} + m\hat{\mathbf{y}} + n\hat{\mathbf{z}}$ , то  $\theta = m\hat{\mathbf{y}} + n\hat{\mathbf{z}}$ .

Окончательные результаты часто удобно и поучительно представлять в безразмерном виде. Такое представление можно получить следующим образом. Из (20.135) видно, что все функции  $D$  имеют общий множитель. Поэтому положим

$$D(\mathbf{r}) = (\kappa_0 r)^{5/3} = l^{5/3}, \quad (20.143)$$

где  $\kappa_0 = [2,92C_n^2 k^2 \Delta x]^{3/5}$ . Вводя безразмерный волновой вектор  $\kappa_n = \kappa/\kappa_0$ , запишем

$$S(L, \kappa_n, 0) = \frac{1}{(2\pi\kappa_0)^2} \int dt \exp[-i\kappa_n \cdot \mathbf{t} + \psi], \quad (20.144)$$

$$\psi = -\left[l^{5/3} + (\alpha\kappa_n)^{5/3} - \frac{1}{2}|\mathbf{t} + \alpha\kappa_n|^{5/3} - \frac{1}{2}|\mathbf{t} - \alpha\kappa_n|^{5/3}\right],$$

где  $\alpha = (\kappa_0^2 L)/k$ . Заметим, что для численных расчетов можно использовать формулы

$$\int dt = \int_0^\infty t dt \int_0^{2\pi} d\phi, \quad \kappa_n \cdot \mathbf{t} = \kappa_n t \cos \phi,$$

$$|\mathbf{t} + \alpha\kappa_n|^{5/3} = [t^2 + \alpha^2\kappa_n^2 + 2\alpha t\kappa_n \cos \phi]^{5/6}.$$

Отметим еще, что при  $\kappa_n \rightarrow 0$  интеграл расходится и  $S$  стремится к функции  $(1/\kappa_0^2)\delta(\kappa_n) = \delta(\kappa)$ , описывающей спектр квадрата средней интенсивности  $\langle I \rangle^2 = 1$  [см. (20.127) и (20.1506)].

Выше мы отметили, что спектр интенсивности  $S$  выражается через два безразмерных параметра  $\kappa_n$  и  $\alpha$ . Для выяснения смыс-

ла параметра  $\alpha$  проанализируем решение задачи о фазовом экране в приближении Рытова. Из (17.111) имеем

$$\sigma_x^2 = 0,563k^{7/6} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) (L - \eta)^{5/6}. \quad (20.146)$$

В случае тонкого экрана можно записать

$$C_n^2(\eta) = C_n^2(\Delta x) \delta(\eta). \quad (20.147)$$

Тогда для  $\sigma_x^2$  в приближении Рытова получаем

$$\sigma_x^2 = 0,563k^{7/6} C_n^2(\Delta x) L^{5/6}. \quad (20.148)$$

Теперь легко проверить, что параметр  $\alpha$  связан с  $\sigma_x^2$  соотношением

$$\alpha = [5,2\sigma_x^2]^{6/5}, \quad (20.149)$$

так что спектр интенсивности  $S$  можно выразить через  $\sigma_x^2$ .

Общие выражения для второго момента интенсивности  $\Gamma(L, \mathbf{r}_1, 0)$  в (20.126), корреляционной функции интенсивности  $B_I$  и дисперсии флуктуаций интенсивности  $\sigma_I^2$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma(L, \mathbf{r}_1, 0) &= \int d\mathbf{x} \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_1) S(L, \mathbf{x}, 0) = \\ &= \kappa_0^2 \int d\mathbf{x}_n \exp(i\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{r}_n) S(L, \mathbf{x}_n, 0), \end{aligned} \quad (20.150a)$$

$$B_I(L, \mathbf{r}_1) = \kappa_0^2 \int d\mathbf{x}_n [\exp(i\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{r}_n) S(L, \mathbf{x}_n, 0) - \langle I \rangle^2 \delta(\mathbf{x}_n)], \quad (20.150б)$$

$$\sigma_I^2 = \kappa_0^2 \int d\mathbf{x}_n [S(L, \mathbf{x}_n, 0) - \langle I \rangle^2 \delta(\mathbf{x}_n)], \quad (20.150в)$$

где

$$\mathbf{r}_n = \kappa_0 \mathbf{r}_1.$$

Заметим, что поскольку интенсивность падающей волны принимается единичной, то  $\langle I \rangle^2 = 1$ . Индекс мерцаний  $m^2$  равен

$$m^2 = \frac{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle}{\langle I \rangle} = \sigma_I^2. \quad (20.151)$$

Рассмотрим теперь частотный спектр  $\mathcal{W}(x, \omega)$  флуктуаций интенсивности  $I - \langle I \rangle$ . Обозначая через  $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{y}}$  скорость ветра, из (20.150б) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(L, \omega) &= 2 \int B_I(L, \mathbf{V}\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \\ &= 4\pi\kappa_0^2 \int d\mathbf{x}_n [\delta(\kappa_0\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}_n - \omega) S(L, \mathbf{x}_n, 0) - \delta(\mathbf{x}_n) \delta(\omega)] = \\ &= \frac{4\pi\kappa_0}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[ S\left(L, \frac{\omega}{\omega_0} \hat{\mathbf{y}} + q\hat{\mathbf{z}}, 0\right) - \delta(q) \delta(\omega) \right], \end{aligned} \quad (20.152)$$

где использованы следующие обозначения:  $\kappa_n = (\omega/\omega_0)\hat{y} + q\hat{z}$  и

$$\omega_0 = \kappa_0 V = [2,92 C_n^2 k^2 \Delta x]^{3/5} V. \quad (20.153)$$

Отметим, что частотный спектр  $W$  выражается через безразмерную частоту  $\omega/\omega_0$  и параметр  $\alpha$  (или  $\sigma_\chi^2$ ).

Для вычисления  $W(L, \omega)$  заметим, что функция  $S$  содержит слагаемое  $\delta(\kappa_n) \delta(\omega)$ , которое взаимно уничтожается со вторым слагаемым подынтегрального выражения, и  $S$  зависит только от  $|\kappa_n|$ . Поэтому при  $\omega \neq 0$  имеем

$$W(L, \omega) = \frac{8\pi\kappa_0}{V} \int_0^\infty dq S\left(L, \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + q^2\right]^{1/2}, 0\right), \quad (20.154)$$

где  $S$  определяется формулами (20.144) и (20.145). При  $\omega = 0$   $S$  содержит  $\delta(q)$ , которая, как показано в (20.152), уничтожается; поэтому интегрирование в (20.154) следует начинать с  $0+$ , исключая тем самым точку  $q = 0$ . С другой стороны, можно вычислить (20.154) при  $\omega \neq 0$  и затем перейти к пределу при  $\omega \rightarrow 0$ .

## 20.15. Решение в приближении фазового экрана

Рассмотрим спектр флуктуаций интенсивности  $S(L, \kappa, 0)$  (20.142):

$$S(L, \kappa, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \exp\left[-i\kappa \cdot \mathbf{r}' + \psi\left(\mathbf{r}', -\frac{\kappa L}{k}\right)\right], \quad (20.155)$$

где функция  $\psi$  определена выражением (20.135). С другой стороны, для  $S$  можно воспользоваться выражением (20.144). Рассмотрим два предельных случая (20.144):  $|\alpha\kappa_n| \gg t$  и  $|\alpha\kappa_n| \ll t$ . Поскольку область значений  $|t|$ , дающих основной вклад в интеграл, ограничена неравенством  $|t| \leq |\kappa_n|^{-1}$ , указанные предельные случаи соответствуют  $|\kappa| \gg (k/L)^{1/2}$  и  $|\kappa| \ll (k/L)^{1/2}$ .

При  $|\kappa| \gg (k/L)^{1/2}$  в (20.135) имеем  $|\mathbf{r}_1| \ll |\mathbf{r}_2|$  и, следовательно,  $D(\mathbf{r}_2) \approx D(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \approx D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Тогда получаем

$$\psi(\mathbf{r}', -\kappa L/k) \approx -D(\mathbf{r}'). \quad (20.156)$$

При этом спектральная плотность  $S$  определяется выражением

$$S(L, \kappa, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \exp[-i\kappa \cdot \mathbf{r}' - D(\mathbf{r}')]. \quad (20.157)$$

Эта формула имеет такой же вид, как (20.112), поэтому  $S$  выражается через безразмерный волновой вектор  $\kappa_n$  следующим образом:

$$S(L, \kappa_n, 0) = \frac{1}{(2\pi\kappa_0)^2} \int_0^\infty t dt J_0(\kappa_n t) \exp(-t^{5/3}). \quad (20.158)$$

Полученное выражение справедливо при  $\alpha \kappa_n \gg \kappa_n^{-1}$ . Поскольку в области сильных флуктуаций ( $\sigma_\chi^2 \gg 1$ )  $\alpha \gg 1$ , это выражение применимо для большей части значений  $\kappa_n$ .

При  $|\kappa| \ll (k/L)^{1/2}$  выполняется условие  $|\mathbf{r}_1| \gg |\mathbf{r}_2|$ , так что можно воспользоваться разложением  $\psi$  из (20.135) в ряд Тейлора по  $\mathbf{r}_2 = \kappa L/k$  вблизи нуля:

$$\psi = - \left[ D(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1})^2 D(\mathbf{r}_1) + \dots \right]. \quad (20.159)$$

Представим далее  $\exp(\psi)$  в следующем виде:

$$e^\psi = \exp \left[ - D(\mathbf{r}_2) \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1})^2 D(\mathbf{r}_1) + \dots \right] \quad (20.160)$$

и заметим, что

$$D(\mathbf{r}_1) = 4\pi k^2 (\Delta x) \int [1 - \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_1)] \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}, \quad (20.161)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1})^2 D(\mathbf{r}_1) = 2\pi k^2 (\Delta x) \int (\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa})^2 \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_1) \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}.$$

Подставляя (20.160) и (20.161) в (20.142) и производя интегрирование по  $\mathbf{r}_1$ , окончательно получаем

$$S(L, \boldsymbol{\kappa}, 0) = \delta(\boldsymbol{\kappa}) + \kappa^4 (L/k)^2 \Phi_S(\boldsymbol{\kappa}) \exp[-D(\kappa L/k)], \quad (20.162)$$

где через  $\Phi_S(\boldsymbol{\kappa})$  обозначена спектральная плотность комплексной фазы, пропорциональная спектральной плотности флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa})$ :

$$D(\mathbf{r}_1) = 2 \int [1 - \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_1)] \Phi_S(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}, \quad \Phi_S(\boldsymbol{\kappa}) = 2\pi k^2 (\Delta x) \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}). \quad (20.163)$$

Соотношения (20.157) и (20.162) согласуются с результатами других авторов [117, 292, 297].

Рассмотрим теперь индекс мерцания  $m^2$ , определяемый формулой (20.151). При сильных флуктуациях, когда  $\alpha \gg 1$ , для большинства значений  $\kappa_n$  применима формула (20.157). Исключение представляет случай малых  $\kappa_n$ , когда можно использовать формулу (20.162). Интегрируя (20.162) по  $\kappa_n$  в окрестности нуля, получаем единицу. Интегрирование (20.157) по  $\kappa_n$  также дает единицу:

$$\int S(L, \boldsymbol{\kappa}, 0) d\boldsymbol{\kappa} = \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}') \exp[-D(\mathbf{r}')] = 1. \quad (20.164)$$

Отсюда получаем:  $m^2 \rightarrow 1$  при  $\sigma_\chi^2 \rightarrow \infty$ .

Приближенное выражение для частотного спектра  $W(L, \omega)$  (20.154) можно найти, если подставить (20.158) в (20.154) и вы-

полнить интегрирование по  $q$ , используя формулу Сонина [245]. В результате получим

$$W(L, \omega) = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\infty} dt \exp(-t^{5/3}) \cos\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) t\right], \quad (20.165)$$

где  $\omega_0$  определяется формулой (20.153):

$$\omega_0 = \kappa_0 V = [2,92 C_n^2 k^2 \Delta x]^{3/5} V = [5,2 \sigma_{\kappa}^2]^{3/5} (k/L)^{1/2} V. \quad (20.166)$$

## 20.16. Приближение фазового экрана для сферических волн

В гл. 8 исследовались параметры сферической волны в случае слабых флуктуаций, и был сделан вывод (18.4), что результаты для сферической волны могут быть получены из соответствующих результатов для плоской волны путем замены

$$\rho \rightarrow (x'/x) \rho, \quad x - x' \rightarrow (x'/x)(x - x'). \quad (20.167)$$

Поскольку в приближении фазового экрана предполагается, что случайная среда сосредоточена в одной плоскости, нетрудно видеть, что величинам  $x$  и  $x'$  соответствуют  $L_1$  и  $L_1 + L_2$ , где  $L_1$  — расстояние от источника до экрана, а  $L_2$  — расстояние от экрана до точки наблюдения. Далее, поскольку волна распространяется вдоль траекторий  $L_1$  и  $L_2$  в свободном пространстве, можно надеяться, что замена (20.167) справедлива и в приближении фазового экрана [292].

Таким образом, в приближении фазового экрана результаты для сферической волны получаются из соответствующих результатов для плоской волны с помощью замены

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \text{ и } \mathbf{r}_2 &\rightarrow \frac{L_1}{L_1 + L_2} \mathbf{r}_1 \text{ и } \frac{L_1}{L_1 + L_2} \mathbf{r}_2, \\ L &\rightarrow \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}, \quad \kappa \rightarrow \frac{L_1 + L_2}{L_1} \kappa. \end{aligned} \quad (20.168)$$

Например, формула (20.144) дает спектральную плотность интенсивности сферической волны, если использовать следующие значения параметров:

$$\alpha = \frac{\kappa_0^2 L_1 L_2}{(L_1 + L_2) k}, \quad \kappa_n = \frac{(L_1 + L_2)}{L_1} \frac{\kappa}{\kappa_0}. \quad (20.169)$$

## 20.17. Случай протяженных источников

В предыдущих разделах мы рассматривали флуктуации интенсивности плоской волны, прошедшей через тонкий слой случайно-неоднородной среды. Этот случай эквивалентен задаче об

излучении точечного источника, расположенного на бесконечно большом расстоянии от экрана. В задачах астрономии часто требуется рассматривать источники с конечным угловым размером. Конечность размера источника приводит в общем к уменьшению мерцаний. Например, звезды мерцают значительно сильнее, чем планеты. В данном разделе мы выведем формулу [61, 297, 301], которая демонстрирует этот эффект.

Рассмотрим интенсивность  $I(L, \rho)$ , порождаемую плоской волной единичной амплитуды. В точке  $(L, \rho)$  интенсивность  $I_\theta(L, \rho)$

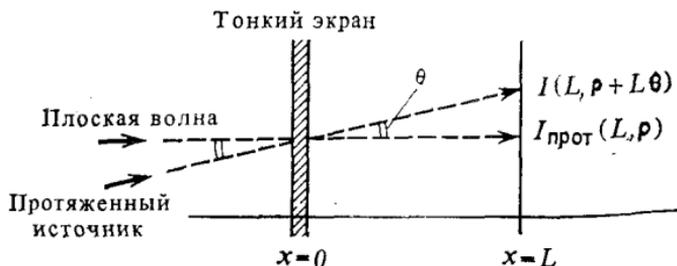


Рис. 20.9. Интенсивность волны от протяженного источника в точке  $(L, \rho)$  равна интенсивности плоской волны в точке  $(L, \rho + L\theta)$ .

волны, возбуждаемой в направлении  $\theta$  протяженным источником единичной амплитуды, при  $|\theta| \ll 1$  должна приблизительно совпадать с интенсивностью  $I(L, \rho + L\theta)$ , прошедшей через тот же самый участок случайной среды плоской волны в точке  $(L, \rho + L\theta)$  (рис. 20.9). Если обозначить через  $b(\theta)$  яркость излучения источника в направлении  $\theta$ , то интенсивность волны от протяженного источника  $I_{\text{прот}}(L, \rho)$  в точке  $(L, \rho)$  можно представить в виде

$$I_{\text{прот}}(L, \rho) = \int d\theta b(\theta) I_\theta(L, \rho) = \int d\theta b(\theta) I(L, \rho + L\theta). \quad (20.170)$$

Отсюда для второго момента интенсивности имеем

$$\Gamma_{\text{прот}}(L, \rho_1 - \rho_2) = \int d\theta d\theta' b(\theta) b(\theta') \Gamma(L, \rho_1 - \rho_2 + L(\theta - \theta')), \quad (20.171)$$

где

$$\Gamma_{\text{прот}}(L, \rho_1 - \rho_2) = \langle I_{\text{прот}}(L, \rho_1) I_{\text{прот}}(L, \rho_2) \rangle, \\ \Gamma(L, \rho_1 - \rho_2 + L(\theta - \theta')) = \langle I(L, \rho_1 + L\theta) I(L, \rho_2 + L\theta') \rangle.$$

Рассмотрим теперь угловой спектр флуктуаций интенсивности

$$S_{\text{прот}}(L, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma_{\text{прот}}(L, \rho) \exp(-i\kappa \cdot \rho) d\rho. \quad (20.172)$$

После подстановки (20.171) в (20.172) легко видеть, что

$$S_{\text{прот}}(L, \kappa) = |B(\kappa L)|^2 S(L, \kappa), \quad (20.173)$$

где

$$B(\kappa L) = \int d\theta b(\theta) \exp(i\kappa \cdot \theta L),$$

$$S(L, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma(L, \rho) \exp(-i\kappa \cdot \rho) d\rho.$$

Мы получили основное соотношение, связывающее угловой спектр  $S_{\text{прот}}$  флуктуаций интенсивности волны от протяженного источника с угловым спектром  $S$  флуктуаций интенсивности плоской волны<sup>1)</sup> и распределением яркости источника  $b(\theta)$ . Впервые это соотношение было получено независимо Коэном и Солпитером. Из него следует, что в случае протяженного источника функция  $B(\kappa L)$  может быть существенно отличной от нуля лишь в пределах некоторой определенной области значений  $|\kappa|$ , так что и спектр  $S_{\text{прот}}$  также будет сосредоточен в некоторой ограниченной области  $\kappa$ . Это означает, что угловой спектр флуктуаций интенсивности протяженного источника сосредоточен в более узком телесном угле, чем спектр точечного источника, и, следовательно, временной спектр также ограничен более узкой полосой частот, что приводит к ослаблению мерцаний.

## 20.18. Протяженная среда

Проблеме моментов четвертого порядка в протяженной среде посвящено большое количество работ. В настоящее время имеются решения этой проблемы, основанные на приближенных методах, развитых в работах [116, 167, 337]. Поскольку эти методы хорошо описаны в литературе, мы приведем здесь лишь краткое их изложение.

В случае плоской волны в протяженной среде нужно исходить из уравнения (20.122). Используя спектр  $S(x, \kappa, \mathbf{r}_2)$  [см. (20.142)]

$$\Gamma(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int d\kappa \exp(i\kappa \cdot \mathbf{r}_1) S(x, \kappa, \mathbf{r}_2) \quad (20.174)$$

и полагая  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ , преобразуем уравнение (20.122) к виду [337]

$$\frac{\partial}{\partial x} S + \frac{\kappa}{x} \cdot \nabla_r S + D'(\mathbf{r}) S = G(x, \kappa, \mathbf{r}), \quad (20.175)$$

$$G(x, \kappa, \mathbf{r}) = 4\pi k^2 \int [1 - \exp(i\kappa' \cdot \mathbf{r})] \Phi_n(\kappa') S(x, \kappa - \kappa', \mathbf{r}) d\kappa'.$$

<sup>1)</sup> Отметим, что  $S(L, \kappa)$  — спектр флуктуаций интенсивности плоской волны, который обсуждался в разд. 20.14 [см. формулы (20.142) и (20.144)].

Здесь использовано соотношение (20.123)

$$D(\mathbf{r}') = 4\pi k^2 \int [1 - \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})] \Phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (20.176)$$

Граничное условие  $\Gamma = 1$  при  $x = 0$  в данном случае принимает вид

$$S(0, \mathbf{x}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (20.177)$$

Татарский показал [337], что уравнение (20.175) можно свести к интегральному уравнению для  $S(x, \mathbf{x}, \mathbf{r})$ , которое решается методом итераций. Однако из-за сложности этого уравнения относительно простое выражение получается лишь для первой итерации.

Для нахождения первой итерации Татарский использует в интегральном уравнении спектр падающей волны  $S = \delta(\mathbf{x})$ . Такой подход применим только для малых  $x$  и неприменим для больших  $x$ . Фэнт [116], напротив, использует тот факт, что при больших  $x$  [см. (20.128)]

$$\Gamma(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \begin{cases} |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_1)|^2 & \text{при } \mathbf{r}_2 \rightarrow \infty, \\ |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_2)|^2 & \text{при } \mathbf{r}_1 \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (20.178)$$

и вычисляет первую итерацию, полагая в интегральном уравнении

$$\Gamma(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_1)|^2 + |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_2)|^2. \quad (20.179)$$

Такой подход должен давать хороший результат на больших расстояниях.

Другие итерационные решения и приближенные выражения для угловых спектров в различных областях  $|\mathbf{x}|$  приведены в обзоре [292].

Для анализа флуктуаций волн в протяженной среде используется также метод, основанный на применении «обобщенного принципа Гюйгенса — Френеля» [74, 117, 120, 401]. В соответствии с этим принципом поле  $U(x, \rho)$  в точке  $(x, \rho)$  связано с полем  $U_0(\rho')$  на границе  $(0, \rho')$  с помощью следующей формулы, обобщающей формулу Гюйгенса — Френеля:

$$U(x, \rho) = \frac{k \exp(ikx)}{2\pi ix} \int d\rho' U_0(\rho') \exp\left[i \frac{k|\rho - \rho'|^2}{2x} + \psi(x, \rho, \rho')\right], \quad (20.180)$$

где  $\psi(x, \rho, \rho') = \chi(x, \rho, \rho') + iS_1(x, \rho, \rho')$ , а  $\chi$  и  $S_1$  — флуктуации уровня и фазы сферической волны, распространяющейся из точки  $(0, \rho')$  в точку  $(x, \rho)$ .

На основе формулы (20.180) были рассчитаны вторые и четвертые моменты. Показано, что получаемые таким способом ре-

зультаты для вторых моментов совпадают с точным решением параболического уравнения. Результаты для четвертых моментов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако соответствие между обобщенным методом Гюйгенса — Френеля и методом параболического уравнения пока не установлено. Исключение представляет случай фазового экрана [117].

Анализ сильных флуктуаций интенсивности можно проводить также с помощью диаграммного метода, базирующегося на применении фейнмановских диаграмм, используемых в квантовой теории поля. Такой подход выявляет связь различных процессов рассеяния и оказывается полезным для понимания сущности теории многократного рассеяния. Эти вопросы рассматриваются в ряде отличных обзоров [142, 250, 337], к которым мы и отсылаем читателя.

## 20.19. Распространение оптического излучения в турбулентной среде

При оптической связи через атмосферу случайные флуктуации показателя преломления оказывают влияние на характеристики распространяющегося светового пучка. Они приводят к уширению пучка, к ослаблению временной и пространственной когерентности, к блужданию пучка и к замираниям интенсивности принимаемого сигнала. В данном разделе мы остановимся на некоторых важных результатах, опубликованных в сборнике [330] (см. [34, 35, 49, 77, 78, 85, 86, 95—100, 104, 115, 116, 167, 177, 202, 206—208, 223, 224, 238, 241—244, 249, 261, 292, 302, 305, 338, 344, 396, 402, 403]).

а. *Ширина пучка при кратковременном и длительном усреднении.* Поместив фотографическую пластинку в турбулентную среду и регистрируя на ней пятно от светового пучка, мы увидим следующее. На сравнительно небольшом расстоянии от источника форма пучка в турбулентной среде может по существу оставаться такой же, как в свободном пространстве, но из-за случайных пульсаций турбулентной среды световое пятно будет блуждать по пластинке. Поэтому, если время экспозиции мало по сравнению с характерным временем  $\Delta t$  блуждания пучка, равного по порядку величины (размер пучка)/(скорость ветра), то размер пучка будет по существу таким же, как в свободном пространстве. Радиус  $\rho_s$  такого пучка называют шириной пучка при кратковременном усреднении. Если же время экспозиции значительно превосходит  $\Delta t$ , то регистрируемое на пластинке изображение пучка будет зависеть не только от ширины пучка при кратковременном усреднении, но и от блужданий центра тяжести пучка  $\rho_c$ . Получаемый при этом радиус пучка  $\rho_L$  называют ши-

риной пучка при длительном усреднении. Он связан с  $\rho_S$  и  $\rho_c$  соотношением

$$\langle \rho_L^2 \rangle = \langle \rho_S^2 \rangle + \langle \rho_c^2 \rangle. \quad (20.181)$$

Ширина пучка при длительном усреднении математически определяется выражением

$$\langle \rho_L^2 \rangle = \frac{\int \langle I(x, \rho) \rangle \rho^2 d\rho}{\int \langle I(x, \rho) \rangle d\rho}, \quad (20.182)$$

где  $\langle I(x, \rho) \rangle = \Gamma(x, \rho, 0)$  дается формулой (20.73). Центр тяжести  $\rho_c$  пучка определяется выражением

$$\rho_c = \frac{\int I(x, \rho) \rho d\rho}{\int \langle I(x, \rho) \rangle d\rho}. \quad (20.183)$$

Поэтому

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{\iint \langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle (\rho_1 \cdot \rho_2) d\rho_1 d\rho_2}{\left[ \int \langle I(x, \rho) \rangle d\rho \right]^2}. \quad (20.184)$$

Имеются некоторые приближенные расчеты этих величин. Заметим, что величина  $W^2$  в (20.80) при  $x \gg x_i$  эквивалентна ширине  $\langle \rho_L^2 \rangle$ :

$$\langle \rho_L^2 \rangle = \frac{W_0^2}{2} [(\alpha_r x)^2 + (1 - \alpha_i x)^2] + 2,2 C_n^2 l_0^{-1/3} x^3. \quad (20.185)$$

При  $x \ll x_i$ , как было показано [116],

$$\langle \rho_L^2 \rangle = \frac{W_0^2}{2} [(\alpha_r x)^2 + (1 - \alpha_i x)^2] + \frac{4x^2}{k^2 \rho_0^2}, \quad (20.186)$$

где

$$\rho_0 = \left[ 1,46 k^2 x C_n^2 \left( \frac{3}{8} \right) \right]^{-3/5}. \quad (20.187)$$

Формулы для ширины пучка при кратковременном усреднении в различных случаях приведены в работе [116].

На большом расстоянии от источника пучок уже не блуждает как целое. Он распадается на множество случайно расположенных пятен. В этом случае при длительной экспозиции получается то же изображение, что и при кратковременной экспозиции, но более размытое, причем радиусы их приблизительно одинаковы. Из (20.181) видно, что в области сильных флуктуаций  $\langle \rho_c^2 \rangle$  должно быть много меньше  $\langle \rho_L^2 \rangle$  или  $\langle \rho_S^2 \rangle$ .

б. *Насыщение флуктуаций интенсивности.* Метод Рытова в области слабых флуктуаций дает для флуктуаций интенсивности плоской волны следующее значение:

$$\sigma_{\ln I}^2 = \langle (\ln I - \langle \ln I \rangle)^2 \rangle = 4\sigma_{\chi}^2 = 1,23C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (20.188)$$

Эта величина неограниченно возрастает при увеличении  $L$  или  $C_n$ . Ясно, однако, что флуктуации интенсивности не могут возрасти до бесконечности. Мы уже отмечали, что индекс мерцаний  $m^2$  в случае фазового экрана при  $\sigma_{\chi}^2 \rightarrow \infty$  должен приближаться к единице [см. (20.164)]. Этот факт был известен в астрофизике



Рис. 20.10. Зависимость измеренной дисперсии флуктуаций интенсивности от значения дисперсии, вычисленного по методу Рытова.

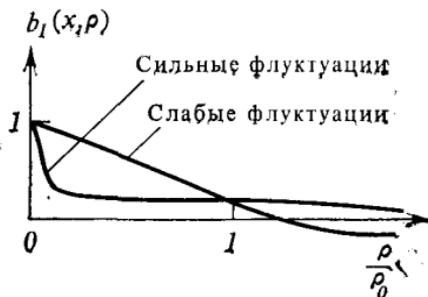


Рис. 20.11. Корреляционная функция интенсивности. В случае слабых флуктуаций радиус корреляции равен  $\rho_0$ ; в случае сильных флуктуаций радиус корреляции уменьшается и появляется длинный хвост.

[297], а при распространении света в земной атмосфере эффект насыщения впервые наблюдали Грачева и Гурвич [160]. С тех пор было опубликовано значительное число экспериментальных и теоретических работ, посвященных этому вопросу [89, 95, 200, 203, 204].

Общие свойства индекса мерцаний  $\sigma_I^2$  в зависимости от индекса мерцаний в приближении Рытова  $4\sigma_{\chi}^2$  приведены на рис. 20.10. Здесь показан не график дисперсии  $\ln I$ , а график дисперсии флуктуаций интенсивности  $I$

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (20.189)$$

как функции дисперсии, получаемой методом Рытова

$$4\sigma_{\chi}^2 = 1,23C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (20.190)$$

Некоторые вопросы, связанные с указанным насыщением, обсуждаются в разд. 20.18.

Рассмотрим теперь корреляцию интенсивностей. Коэффициент корреляции  $b_I(x, \rho_1, \rho_2)$  определяется выражением

$$b_I(x, \rho_1, \rho_2) = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}, \quad (20.191)$$

где  $I_1 = I(x, \rho_1)$  и  $I_2 = I(x, \rho_2)$ . График функции  $b_I(x, \rho)$  ( $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$ ) для плоской волны приведен на рис. 20.11. В области слабых флуктуаций радиус корреляции  $\rho_0$  определяется как

$$\rho_0 = [1,46k^2 x C_n^2]^{-3/5}. \quad (20.192)$$

В области сильных флуктуаций корреляции характеризуются малым радиусом корреляции и длинным хвостом.

в. *Усредняющее действие апертуры* [242, 329, 337]. Рассмотренные в предыдущем разделе флуктуации интенсивности  $\sigma_I^2$  относятся к случаю, когда наблюдение осуществляется при помощи точечного приемника. Если же приемник имеет некоторый конечный размер, то флуктуации усредняются по площади приемной апертуры и вследствие этого уменьшаются. Это явление называют усредняющим действием апертуры.

Рассмотрим мощность  $P$ , принимаемую апертурой  $A$ . Она равна

$$P = \int_A I(x, \rho) d\rho. \quad (20.193)$$

Тогда дисперсия флуктуаций мощности

$$\sigma_P^2 = \int_A d\rho_1 \int_A d\rho_2 [\langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle - \langle I(x, \rho_1) \rangle \langle I(x, \rho_2) \rangle]. \quad (20.194)$$

В случае круглой апертуры диаметра  $D$  формула (20.194) принимает вид (разд. 15.4)

$$\sigma_P^2(D) = \pi D^2 \int_0^D B_I(\rho) K(\rho) \rho d\rho, \quad (20.195)$$

где

$$K(\rho) = \{\arccos(\rho/D) - (\rho/D)[1 - (\rho^2/D^2)]^{1/2}\},$$

$$B_I(\rho) = \langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle - \langle I(x, \rho_1) \rangle \langle I(x, \rho_2) \rangle, \quad \rho = |\rho_1 - \rho_2|.$$

Для точечного источника, полагая в (20.195)  $B_I(\rho) = B_I(0)$ , находим

$$\sigma_P^2(0) = \frac{(\pi D^2)^2}{16} B_I(0). \quad (20.196)$$

Отношение  $\sigma_p^2(D)$  к  $\sigma_p^2(0)$  характеризует уменьшение флуктуаций интенсивности при увеличении размера апертуры:

$$G(D) = \frac{\sigma_p^2(D)}{\sigma_p^2(0)} = \frac{16}{\pi D^2} \int_0^D \frac{B_I(\rho)}{B_I(0)} K(\rho) \rho d\rho. \quad (20.197)$$

График этой функции приведен на рис. 20.12. Из этого графика следует, что в области слабых флуктуаций существенное уменьшение флуктуаций мощности имеет место, когда размер апертуры превышает радиус корреляции поля  $(\lambda\chi)^{1/2}$ . В области силь-

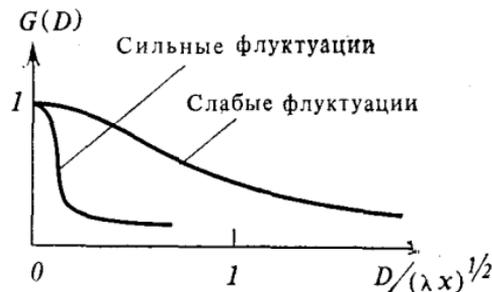


Рис. 20.12. Влияние усредняющего действия апертуры. Отношение флуктуаций мощности на апертуре размера  $D$  к флуктуациям мощности в точечном приемнике  $G(D)$ .

ных флуктуаций флуктуации мощности ослабевают, если размер апертуры  $D$  превосходит значение  $0,36 (\lambda\chi)^{1/2} [\sigma_{IR}^2]^{-3/5}$ , где  $\sigma_{IR}^2$  — дисперсия флуктуаций интенсивности, рассчитанная в приближении Рытова и равная  $4\sigma_\chi^2$  [см. (20.190)].

г. *Распределение вероятности интенсивности* [96, 146, 331]. Показано, что в области слабых флуктуаций, где дисперсия уровня, вычисленная по методу Рытова мала,  $\sigma_\chi^2 \ll 1$ , распределение вероятностей близко к логарифмически нормальному. Это означает, что уровень  $\chi$  распределен по нормальному закону. Если случайная величина  $z$  имеет нормальное распределение, то среднее значение от  $\exp(z)$  дается выражением

$$\langle \exp(z) \rangle = \exp \left[ \langle z \rangle + \frac{1}{2} \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle \right]. \quad (20.198)$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \langle \exp(4\chi) \rangle = \exp [4 \langle \chi \rangle + 8 \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle], \\ \langle I \rangle^2 &= \exp [4 \langle \chi \rangle + 4 \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle]. \end{aligned} \quad (20.199)$$

Отсюда получаем

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = \exp [4 \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle] - 1. \quad (20.200)$$

В приближении Рытова

$$\langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle = 0,307 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6},$$

и, следовательно, можно вычислить  $\sigma_I^2$ .

В области  $0,3 < \sigma_{IR}^2 < 25$ , где  $\sigma_{IR}^2$  в соответствии с методом Рытова берется равным  $4\sigma_\chi^2$ , распределение вероятностей не является ни логарифмически нормальным, ни рэлеевским. В области  $25 < \sigma_{IR}^2 < 100$  распределение вероятности, по-видимому, логарифмически нормальное. Наконец, при  $\sigma_{IR}^2 \rightarrow \infty$  распределение вероятности должно приближаться к рэлеевскому [116].

## 20.20. Модуляционная передаточная функция случайной среды<sup>1)</sup>

В разд. 15.4 обсуждался вопрос о разрешении изображения, формируемого линзой при падении на нее плоской волны, прошедшей через случайное облако рассеивателей. Используя функцию размытия точки, мы показали, что с увеличением оптического пути в среде когерентная составляющая интенсивности в плоскости изображения уменьшается, а некогерентная — возрастает. В данном разделе дается более полное описание задачи восстановления изображения, основанное на введении понятия модуляционной передаточной функции.

Рассмотрим некогерентный источник с интенсивностью  $I_0(\rho_0)$ , расположенный в плоскости предмета. Излучение от этого предмета распространяется через случайную среду, занимающую слой толщины  $L$ , и падает на линзу диаметра  $D$ . Изображение с интенсивностью  $I_i(\rho_i)$  наблюдается в плоскости изображения, расположенной на расстоянии  $d$  за линзой (рис. 20.13).

Мы хотим найти интегральную связь между интенсивностью изображения  $I_i$  и интенсивностью объекта  $I_0$ , которая имела бы вид

$$I_i(\rho_i) = \int P(\rho_i, \rho_0) I_0(\rho_0) d\rho_0. \quad (20.201)$$

Функция  $P(\rho_i, \rho_0)$  называется функцией размытия точки и представляет собой отклик всей формирующей изображение системы в случае, когда интенсивность предмета описывается дельта-функцией [ $I_0(\rho_0) = \delta(\rho_0 - \rho'_0)$ ]. Вообще говоря,  $P(\rho_i, \rho_0)$  является функцией двух переменных  $\rho_i$  и  $\rho_0$ , но, как будет показано ниже, при использовании в плоскости предмета эквивалентного

<sup>1)</sup> О модуляционной передаточной функции (МПФ) см. [45, 158, 236, 266, 274]. О влиянии атмосферы на МПФ см. (79, 133, 177, 214, 243, 307—309, 339). О применениях в астрономии см. [395].

вектора  $\rho'_0$ , связанного с  $\rho_0$  соотношением

$$\rho'_0 = -(d/L) \rho_0, \quad (20.202)$$

учитывающим увеличение и переворот изображения в линзе, и при выборе расстояния  $d$ , удовлетворяющего формуле линзы

$$1/L + 1/d = 1/f_0 \quad (20.203)$$

( $f_0$  — фокусное расстояние линзы), функция размытия точки  $P$  становится функцией разности  $\rho_i - \rho'_0$ . Формирующая изображе-

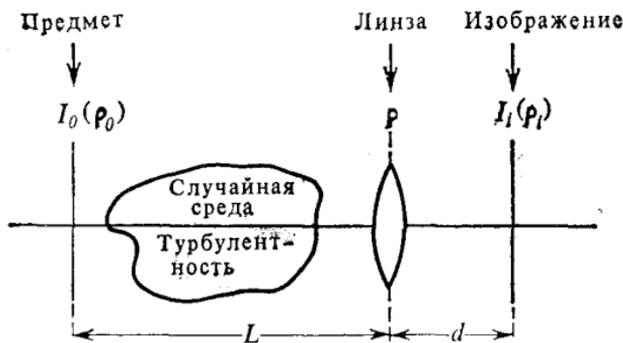


Рис. 20.13. Взаимное расположение плоскости предмета, линзы и плоскости изображения.

ние система, для которой  $P = P(\rho_i - \rho'_0)$ , называется *изопланатической*. В этом случае формулу (20.201) можно записать в виде

$$I_i(\rho_i) = \int P(\rho_i - \rho'_0) I_0(\rho'_0) d\rho'_0. \quad (20.204)$$

Выполним преобразование Фурье этой свертки:

$$G_i(\mathbf{f}) = M(\mathbf{f}) G_0(\mathbf{f}). \quad (20.205)$$

Здесь  $G_i$  и  $G_0$  — нормированные спектры:

$$G_i(\mathbf{f}) = \frac{\int I_i(\rho_i) \exp(i2\pi\mathbf{f} \cdot \rho_i) d\rho_i}{\int I_i(\rho_i) d\rho_i}, \quad (20.206)$$

$$G_0(\mathbf{f}) = \frac{\int I_0(\rho'_0) \exp(i2\pi\mathbf{f} \cdot \rho'_0) d\rho'_0}{\int I_0(\rho'_0) d\rho'_0}, \quad (20.207)$$

а  $M(\mathbf{f})$  — нормированный фурье-образ  $P$ :

$$M(\mathbf{f}) = \frac{\int P(\rho) \exp(i2\pi\mathbf{f} \cdot \rho) d\rho}{\int P(\rho) d\rho}. \quad (20.208)$$

Функцию  $M(\mathbf{f})$  называют оптической передаточной функцией, а ее модуль  $|M(\mathbf{f})|$  — модуляционной передаточной функцией (МПФ). Пространственная частота  $\mathbf{f}$  измеряется в периодах на единицу длины (обычно в периодах на 1 мм). Можно использовать и частоту  $\mathbf{f}' = \mathbf{f}d$ . В этом случае  $\mathbf{f}'$  представляет собой угловую частоту и измеряется в периодах на радиан поля зрения.

Вернемся к задаче, представленной на рис. 20.13. Предположим, что используется тонкая линза, так что она осуществляет преобразование фазы, описываемое множителем

$$\exp[-i(k/2f_0)\rho^2], \quad (20.209)$$

где  $\rho$  — радиус-вектор в плоскости линзы, а  $f_0$  — фокусное расстояние линзы. Поле за линзой равно падающему на нее полю  $U(\rho)$  с учетом дополнительной фазы (20.209):  $U(\rho)\exp[-i(k/2f_0)\rho^2]$ . Это поле распространяется на расстояние  $d$ . Используя формулу Кирхгофа и френелевское приближение (разд. 15.4), получим, что поле  $U_i(\rho_i)$  в плоскости изображения равно

$$U_i(\rho_i) = \frac{k \exp(ikd)}{2\pi id} \int_s U(\rho) \exp\left[\frac{ik|\rho_i - \rho|^2}{2d} - \frac{ik\rho^2}{2f_0}\right] d\rho, \quad (20.210)$$

где интегрирование проводится по апертуре линзы  $s$ . Интенсивность  $I_i(\rho_i)$  в плоскости изображения дается формулой

$$I_i(\rho_i) = \langle |U_i(\rho_i)|^2 \rangle = \frac{k^2}{(2\pi d)^2} \int_s \int_s \Gamma(\rho_1, \rho_2) \exp(i\phi_1) d\rho_1 d\rho_2, \quad (20.211)$$

где

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2) = \langle U(\rho_1)U^*(\rho_2) \rangle, \quad \phi_1 = -\frac{ik\rho_i \cdot \rho_d}{d} - \frac{ik}{2L}(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

При выводе использована формула (20.203) и введено обозначение  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$ .

Функция взаимной когерентности  $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$  поля излучения протяженного источника с интенсивностью  $I_0(\rho_0)$  приведена выше [формула (20.75)]; она имеет вид

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{L^2} \int d\rho_0 I_0(\rho_0) \exp(i\phi_2 - H) d\rho_0, \quad (20.212)$$

$$\phi_2 = -\frac{ik\rho_0 \cdot \rho_d}{L} + \frac{ik}{2L}(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

Функция  $H = H(\rho_d)$  приведена в (20.75) и равна  $D/2$ , где  $D$  — структурная функция комплексной фазы сферической волны (20.64):

$$H(\rho_d) = \frac{1}{2} D(\rho_d) = 4\pi^2 k^2 \int_0^L dx' \int_0^\infty \left[1 - J_0\left(\kappa\rho_d \frac{x'}{L}\right)\right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (20.213a)$$

В случае турбулентной среды имеем [см. (20.816)]

$$H(\rho_d) = 0,547 k^2 C_n^2 L \rho_d^{5/3}. \quad (20.2136)$$

Объединяя (20.211) и (20.212), запишем

$$I_i(\rho) = \int P(\rho_i, \rho_0) I_0(\rho_0) d\rho_0,$$

$$P(\rho_i, \rho_0) = C \int_s \int_s \exp \left[ -ik\rho_d \cdot \left( \frac{\rho_0}{L} + \frac{\rho_i}{d} \right) - H(\rho_d) \right] d\rho_1 d\rho_2, \quad (20.214)$$

где  $C = k^2 / (4\pi^2 d^2 L^2)$ . Функция  $P(\rho_i, \rho_0)$  в (20.214) не удовлетворяет условию изопланатичности. Однако видно, что изображение увеличено и перевернуто линзой. Поэтому в плоскости объекта целесообразно использовать вектор  $\rho'_0$  (20.202). Тогда условие изопланатичности будет удовлетворено:

$$P = P(\rho_i - \rho'_0) = C \int_s \int_s \exp \left[ -\frac{ik\rho_d \cdot (\rho_i - \rho'_0)}{d} - H(\rho_d) \right] d\rho_1 d\rho_2. \quad (20.215)$$

Если используется круглая линза с апертурой диаметра  $D$ , то формулу (20.215) можно преобразовать, введя единичную функцию на круге [см. (20.195)]

$$\text{circ}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho \leq 1, \\ 0 & \text{при } \rho > 1. \end{cases} \quad (20.216)$$

В результате получим

$$P(\rho_i - \rho'_0) = \frac{C\pi D^2}{4} \int \exp \left[ -\frac{ik\rho_d \cdot (\rho_i - \rho'_0)}{d} - H(\rho_d) \right] K\left(\frac{\rho_d}{D}\right) d\rho_d, \quad (20.217)$$

где

$$K\left(\frac{\rho_d}{D}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \left( \frac{\rho_d}{D} \right) - \left( \frac{\rho_d}{D} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\rho_d}{D} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} & \text{при } \rho_d \leq D, \\ 0 & \text{при } \rho_d > D. \end{cases}$$

Заметим, что соотношение (20.217) имеет вид фурье-образа, поэтому, учтя (20.208), найдем следующее выражение для оптической передаточной функции:

$$M(\mathbf{f}) = \exp[-H(\lambda d\mathbf{f})] K(\lambda d\mathbf{f}/D), \quad (20.218a)$$

где использована замена  $2\lambda\mathbf{f} = k\rho_d/d$ . С другой стороны, можно использовать угловую частоту  $\mathbf{f}' = d\mathbf{f}$ . Тогда

$$M(\mathbf{f}') = \exp[-H(\lambda\mathbf{f}')] K(\lambda\mathbf{f}'/D). \quad (20.2186)$$

Исследуем функцию  $M(f)$ . Отметим, что в отсутствие случайной среды  $H = 0$  и  $M(f) = K(\lambda df/D)$ . Отсюда следует, что  $K(\lambda df/D)$  представляет собой модуляционную передаточную функцию формирующей изображение системы с круглой апертурой диаметра  $D$ . Она определяется следующим образом:

$$K\left(\frac{f}{f_c}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos\left(\frac{f}{f_c}\right) - \left(\frac{f}{f_c}\right) \left[1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2\right]^{1/2} \right\} & \text{при } f \leq f_c, \\ 0 & \text{при } f > f_c, \end{cases} \quad (20.219)$$

где  $f_c = D/\lambda d$  — пространственная частота обрезания этой апертуры. Формулу (20.219) можно записать также, используя угловую частоту  $f'/f'_c = f/f_c$ . В этом случае угловая частота обрезания  $f'_c$  определяется выражением  $f'_c = D/\lambda$  (рис. 20.14).

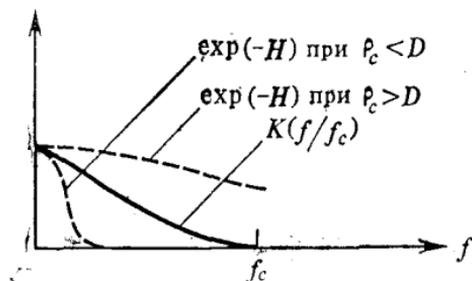


Рис. 20.14. МПФ круглой апертуры диаметра  $D$   $K(f/f_c)$  ( $f_c = D/\lambda d$  — частота обрезания) и МПФ всей системы  $\exp(-H)K$  ( $\rho_c$  — радиус когерентности волны вблизи приемника).

Влияние случайной среды описывается множителем  $\exp[-H]$ . Заметим, что  $L^{-2} \exp[-H]$  представляет собой функцию взаимной когерентности сферической волны. В случае турбулентной среды из (20.213б) имеем

$$\begin{aligned} \exp[-H] &= \exp\left[-0,547k^2 C_n^2 L (\lambda df)^{5/3}\right] = \\ &= \exp\left[-\left(\frac{D}{\rho_c}\right)^{5/3} \left(\frac{f}{f_c}\right)^{5/3}\right], \end{aligned} \quad (20.220)$$

где  $\rho_c = (0,547k^2 C_n^2 L)^{-3/5}$ . Эта функция также изображена на рис. 20.14. Отметим, что при  $\rho_c < D$  основную роль играют эффекты, обусловленные турбулентностью, а при  $\rho_c > D$  МПФ практически совпадает с МПФ апертуры.

Часто удобнее интенсивность предмета  $I_0(\rho_0)$  выражать в виде функции угловой переменной  $\theta = \rho_0/L$  (рис. 20.15). Поскольку  $G_0(f)$  — фурье-образ  $I_0(\rho_0)$ , положим  $\rho'_0 = -d\rho_0/L$  и получим

$$G_0(f') = \frac{\int I_0(\theta) \exp(-i2\pi f' \cdot \theta) d\theta}{\int I_0(\theta) d\theta}. \quad (20.221)$$

Заметим еще, что  $G_i(f)$  определяется выражением (20.206).

В данном разделе мы показали, что модуляционная передаточная функция случайной среды и формирующей изображение системы есть произведение функции взаимной когерентности в точке  $\rho_a = \lambda f'$  [см. (20.220)] и модуляционной передаточной функции апертуры (20.219).

Модуляционная передаточная функция является мерой модуляции на выходе формирующей изображение системы. Предположим, например, что интенсивность предмета синусоидально мо-

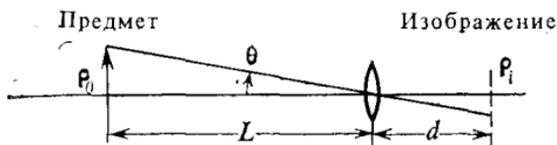


Рис. 20.15. Интенсивность предмета как функция угла  $\theta = \rho/L$ .

дулирована в одном направлении с единичной глубиной модуляции. Выбирая направление распространения в качестве оси  $x$ , запишем

$$I_0(\theta) = 1 + \cos(2\pi N\theta_2), \quad \theta = \theta_2\hat{y} + \theta_3\hat{z}. \quad (20.222)$$

Интенсивность изображения в этом случае пропорциональна

$$I_i(\rho_i) \sim 1 + M(N) \cos(2\pi Ny_i/d), \quad (20.223)$$

где  $M(N) = M(f)$  при  $f' = N\hat{y}$  и  $\rho_i = y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$ . Таким образом, оказывается возможным определять МПФ по измерению модуляции изображения объекта с определенной периодической структурой [266].

Здесь мы рассматривали вопрос о формировании изображения некогерентного предмета. Если предмет является когерентным или частично когерентным, то, используя аналогичную методику, можно установить связь между функцией взаимной когерентности изображения и функцией взаимной когерентности предмета. Но в этом случае [307, 308] условие изопланатичности выполняется только для предметов, расположенных в пределах некоторой малой области плоскости предмета. Тогда говорят, что объект находится в изопланатической области.

Только что рассмотренная МПФ является МПФ при длительном усреднении. Это связано с тем, что при получении выражения для интенсивности изображения мы использовали усреднение по статистическому ансамблю, которое соответствует записи изображения с большим временем экспозиции. Если же используется кратковременная экспозиция, то наклон волнового фронта вызывает смещение изображения, но не влияет на резкость изображения. Поэтому наклон волнового фронта не дает вклада в

МПФ при кратковременном усреднении. Приближенное выражение для МПФ при кратковременном усреднении имеет вид [133]

$$M(f') = \begin{cases} \exp \left\{ -H(f') \left[ 1 - (f'/f'_c)^{1/3} \right] \right\} K(f'/f'_c) & \text{при } D \gg (L\lambda)^{1/2}, \\ \exp \left\{ -H(f') \left[ 1 - \frac{1}{2} (f'/f'_c)^{1/3} \right] \right\} K(f'/f'_c) & \text{при } D \ll (L\lambda)^{1/2}. \end{cases} \quad (20.224)$$

Отсюда видно, что уменьшение времени экспозиции сказывается на увеличении амплитуды МПФ, особенно для значений  $f'$ , близких к частоте обрезания  $f'_c$ , за счет чего и улучшается резкость изображения.

Мерой качества системы, формирующей изображение, является величина

$$R = \int df M(f), \quad (20.225)$$

где  $M(f)$  определено в (20.218а). Эта величина представляет собой полосу пропускания пространственных частот случайной среды и формирующей изображение системы. Влияние на нее внешних масштабов и малых времен экспозиции подробно исследовано [79, 133].

## 20.21. Адаптивная оптика

В этой главе мы довольно подробно рассмотрели влияние случайной среды (или турбулентной атмосферы) на характеристики распространяющихся в ней волн. Как показано в разд. 20.20, изображение, передаваемое через атмосферу, размывается в основном из-за искажения фазового фронта. В последние годы предпринимались серьезные попытки, направленные на создание адаптивных оптических систем, способных компенсировать искажения фазового фронта, и, таким образом, приблизиться к дифракционному пределу разрешения, несмотря на мешающее действие турбулентной среды (см. общие обзоры [137, 163]; см. также J. Opt. Soc. Am., special issue «Adaptive Optics», March 1977). В данном разделе мы дадим краткое описание некоторых типичных методов и приведем ряд литературных ссылок.

Адаптивные оптические системы измеряют в реальном времени соответствующие фазовые искажения и вносят управляемый фазовый сдвиг. Последнее обычно осуществляется с помощью решетки из подвижных зеркал, приводимых в движение пьезоэлектриком. Опишем вкратце некоторые типичные методы адаптивной оптики.

а. *Многоэлементный когерентный оптический гетеродинный приемник* [137]. Искажение волнового фронта вдоль большой

приемной апертуры приводит к ухудшению отношения сигнал/шум, обусловленному случайной интерференцией полей на различных частях апертуры. Если апертуру разбить на ряд малых апертур (элементов), то в пределах каждого элемента получившейся решетки существенных искажений фазового фронта не будет. Разности фаз между выходными сигналами отдельных элементов можно измерить и затем использовать их в управляемых фазовращателях элементов для когерентного суммирования выходных сигналов (рис. 20.16).

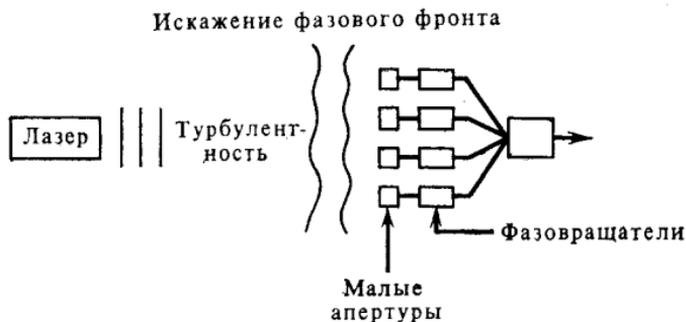


Рис. 20.16. В пределах каждой малой апертуры искажения волнового фронта малы. Разность фаз между ними измеряется для управления фазовращателями.

В работе [391] предложена более сложная система на основе сдвигового интерферометра.

б. *Приемник с дрожащими элементами* [137]. В таком приемнике также используется решетка из отдельных элементов, которыми могут быть, например, зеркала на основании из пьезоэлектрика. Каждый элемент ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) «дрожит» на своей частоте  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Сдвинутый по фазе оптический сигнал фокусируется на отверстии малого диаметра, где наблюдается сигнал частоты  $\omega_i$ , используемый для компенсации обусловленного турбулентностью фазового набега на элементе  $i$ . Таким образом, достигается почти дифракционный предел качества изображения (рис. 20.17).

в. *Увеличение резкости изображения* [108, 266]. Вместо использования решеток с дрожащими элементами можно измерять резкость изображения и использовать эту информацию для управления фазой каждого элемента. Типичная схема такой установки аналогична изображенной на рис. 20.17. В качестве меры резкости можно использовать интеграл по фокальной плоскости от квадрата интенсивности. Такая методика рассматривалась в применении к астрономии.

г. *КОАМ (когерентные оптические адаптивные методы)* [49, 281—283]. На рис. 20.18 схематически показана система с дрожащими элементами на основе КОАМ. Каждый передающий эле-

мент дрожит на своей частоте  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), так что фаза каждого элемента меняется на малую величину ( $\pm 10^\circ$ ) с частотой  $\omega_i$ . Поэтому дифракционная картина вблизи мишени также будет меняться с частотой  $\omega_i$ . Если на мишени имеется яркая точка (так называемая «блестящая точка»), то интенсивность

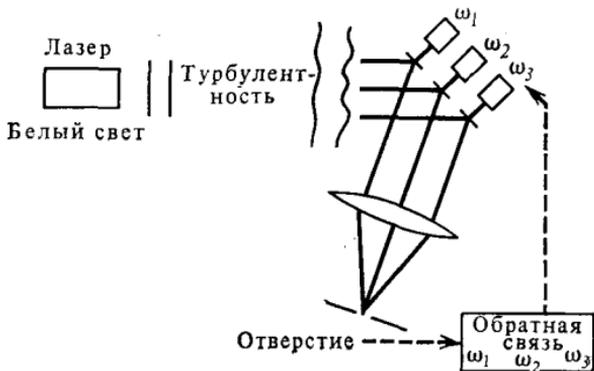


Рис. 20.17. Приемник с дрожащими элементами.

света, отраженного этой блестящей точкой, будет модулирована с частотой  $\omega_i$ . Эта модуляция измеряется и используется для управления фазовращателем соответствующего элемента. В результате оказывается, что фронт излучаемой волны заранее ис-

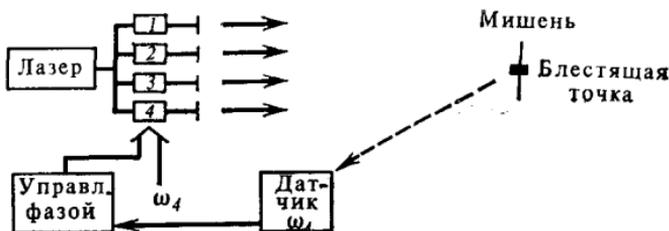


Рис. 20.18. Система с дрожащими элементами, основанная на КОАМ.

кажется таким образом, чтобы максимизировать ее интенсивность в блестящей точке. При использовании указанного метода волна у мишени имеет такой вид, как если бы она распространялась в свободном пространстве. Был предложен еще один аналогичный метод, в котором используются деформируемые зеркала [47, 291].

## Приложение 20А

1. *Функционалы* [154]. Функционалом называется величина, зависящая от функции. Типичным примером функционала является поле  $u(\mathbf{r})$ , которое зависит от флуктуаций диэлектриче-

ской проницаемости  $\varepsilon(r')$  и которое можно представить в виде

$$u(\varepsilon) = \int F(r', \varepsilon) dr'. \quad (20A.1)$$

2. *Функциональная производная* [154] (или вариационная производная). Рассмотрим одномерный случай

$$u(\varepsilon) = \int_a^b F(x, \varepsilon) dx. \quad (20A.2)$$

Проварьируем  $\varepsilon$  на величину  $\delta\varepsilon$  в окрестности точки  $x_0$  и рассмотрим соответствующую вариацию  $u$  (рис. 20A.1). Далее рассмотрим отношение

$$\frac{u(\varepsilon + \delta\varepsilon) - u(\varepsilon)}{\Delta\sigma}, \quad (20A.3)$$

где через  $\Delta\sigma$  обозначена площадь заштрихованной области, равная  $(\delta\varepsilon)\Delta x$ .

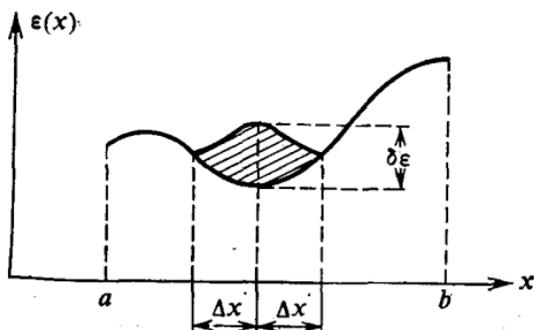


Рис. 20A.1. К определению функциональной производной.

В пределе при  $\Delta\sigma \rightarrow 0$  приходим к определению функциональной производной:

$$\frac{\delta u}{\delta\varepsilon} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{u(\varepsilon + \delta\varepsilon) - u(\varepsilon)}{\Delta\sigma}. \quad (20A.4)$$

Замечая, что

$$u(\varepsilon + \delta\varepsilon) - u(\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \Delta x \delta\varepsilon, \quad (20A.5)$$

находим

$$\frac{\delta u}{\delta\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}. \quad (20A.6)$$

В более общем случае, когда

$$u(\varepsilon) = \int_a^b F(x, \varepsilon, \varepsilon') dx, \quad (20A.7)$$

имеем

$$\frac{\delta \mu}{\delta \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'}. \quad (20A.8)$$

## Приложение 20Б

Для доказательства формулы Фурутцу — Новикова [268]

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \int dV' \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta U(\mathbf{r})}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (20Б.1)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{r})$  — гауссово случайное поле с  $\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle = 0$ , разложим функционал  $U(\mathbf{r})$  в функциональный ряд Тейлора:

$$U(\varepsilon) = U(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n \times \\ \times \left| \frac{\delta^n U}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \delta \varepsilon(\mathbf{r}_n)} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \dots \varepsilon_n(\mathbf{r}_n). \quad (20Б.2)$$

Умножим этот ряд на  $\varepsilon(\mathbf{r})$  и усредним результат. Заметим, что среднее от произведения четного числа случайных гауссовых величин равно сумме произведений средних значений всех возможных парных комбинаций, а среднее значение произведения нечетного числа таких величин равно нулю [253]. Поэтому

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_n) \rangle = \\ = \sum_{\alpha=1}^n \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}_\alpha) \rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_{\alpha-1}) \varepsilon(\mathbf{r}_{\alpha+1}) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_n) \rangle = \\ = n \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_2) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_n) \rangle. \quad (20Б.3)$$

Подставляя этот результат в (20Б.2), получаем

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) U(\varepsilon) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}_1) \rangle}{(n-1)!} \int \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n \times \\ \times \left| \frac{\delta^n U}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \delta \varepsilon(\mathbf{r}_n)} \right|_{\varepsilon=0} \langle \varepsilon(\mathbf{r}_2) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_n) \rangle. \quad (20Б.4)$$

С другой стороны, вычисляя функциональную производную от (20Б.2), находим

$$\left\langle \frac{\delta U}{\delta \varepsilon} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int \dots \int d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n \times \\ \times \left| \frac{\delta^n U}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}) \dots \delta \varepsilon(\mathbf{r}_n)} \right|_{\varepsilon=0} \langle \varepsilon(\mathbf{r}_2) \dots \varepsilon(\mathbf{r}_n) \rangle, \quad (20Б.5)$$

где мы использовали симметрию  $U$  по всем  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Подставляя это выражение в правую часть (20Б.1), замечаем, что (20Б.1) совпадает с (20Б.4).

## Приложение 20В

Для вычисления  $\delta U/\delta \varepsilon$  получим сначала выражение для  $U(\mathbf{r})$ , для чего проинтегрируем (20.7) по  $x$  от  $x = 0$  до  $x$ :

$$2ikU(x, \rho) - 2ikU(0, \rho) + \nabla_t^2 \int_0^x U(\xi, \rho) d\xi + k \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \rho) U(\xi, \rho) d\xi = 0. \quad (20В.1)$$

Применим теперь к (20В.1) оператор функциональной производной:

$$2ik \frac{\delta U(x, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} + \nabla_t^2 \frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} \int_0^x U(\xi, \rho) d\xi + k^2 \frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} \times \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \rho) U(\xi, \rho) d\xi = 0 \quad (20В.2)$$

и перейдем к пределу при  $x' \rightarrow x$ .

Покажем, что второе слагаемое в (20В.2) обращается в нуль. Как видно из (20В.1), поле в точке  $(x, \rho)$  зависит от неоднородности  $\varepsilon_1(x', \rho')$  в области  $x' < x$ . Физически это означает, что в области  $x' > x$  обратное рассеяние на  $\varepsilon_1(x', \rho')$  отсутствует. Считая это предположение выполненным, имеем

$$\frac{\delta U(x, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} = 0 \quad \text{при } x' > x. \quad (20В.3)$$

Таким образом,

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} \int_0^x U(\xi, \rho) d\xi = \int_{x'}^x \frac{\delta U(\xi, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} d\xi, \quad (20В.4)$$

и при  $x' \rightarrow x$  эта величина стремится к нулю.

Последнее слагаемое в (20В.2) требует дополнительного анализа, связанного с наличием в подынтегральном выражении множителя  $\varepsilon_1(\xi, \rho)$ . Запишем это слагаемое, используя функцию единичного скачка  $H(\xi)$ :

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 1/2 & \text{при } \xi = 0, \\ 1 & \text{при } \xi > 0 \end{cases} \quad (20В.5)$$

и дельта-функцию  $\delta(\rho - \rho'')$ :

$$k^2 \frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} \int_0^\infty d\xi \iint_{-\infty}^\infty dy'' dz'' [H(x - \xi) \delta(\rho - \rho'') \varepsilon_1(\xi, \rho'')] U(\xi, \rho''). \quad (20B.6)$$

Как показано в приложении 20A, функциональная производная от функционала вида

$$I(x) = \int_a^b F(x, \xi, \varepsilon_1(\xi)) d\xi \quad (20B.7)$$

равна

$$\frac{\delta I(x)}{\delta \varepsilon_1(x')} = \frac{\partial F(x, x', \varepsilon_1(x'))}{\partial \varepsilon_1(x')}. \quad (20B.8)$$

Используя эту формулу, представим (20B.6) в виде

$$k^2 H(x - x') \delta(\rho - \rho') U(x', \rho') + k^2 \int_0^\infty d\xi \iint_{-\infty}^\infty dy'' dz'' [H(x - \xi) \delta(\rho - \rho'') \varepsilon_1(\xi, \rho'')] \frac{\delta U(\xi, \rho'')}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')}. \quad (20B.9)$$

При  $x' \rightarrow x$  второе слагаемое в (20B.9) обращается в нуль в силу предположения (20B.3), а первое слагаемое становится равным

$$\frac{k^2}{2} \delta(\rho - \rho') U(x, \rho'). \quad (20B.10)$$

Подставляя (20B.10) в (20B.2), получаем

$$\frac{\delta U(x, \rho)}{\delta \varepsilon_1(x', \rho')} = \frac{ik}{4} \delta(\rho - \rho') U(x, \rho'). \quad (20B.11)$$

# Рассеяние на шероховатой поверхности и дистанционное зондирование

## Глава 21

### Рассеяние на шероховатой поверхности

Большинство естественных и биологических поверхностей в той или иной степени шероховаты. Шероховатость поверхностей оказывает влияние на характеристики распространения и рассеяния волн. Например, характеристики волны, распространяющейся над такой поверхностью, отличаются от аналогичных характеристик в случае распространения над гладкой поверхностью. При падении на шероховатую поверхность волна не только отражается в зеркальном направлении, но и рассеивается во всех других направлениях. Если шероховатая поверхность движется, то в спектре рассеянной волны содержатся компоненты, смещенные на доплеровскую частоту.

Имеется широкий круг инженерных и научных задач, для решения которых необходимо глубокое понимание характеристик рассеяния волн шероховатыми поверхностями. Примером может служить радиосвязь через океан, на которую воздействуют неровности поверхности океана. В радиоокеанографии радиолокационные отражения от морской поверхности используются для определения характеристик волнения океана [333]. В радиоастрономии анализируют волны, рассеянные поверхностями планет, и делают выводы о свойствах этих поверхностей. В биологии шероховатые границы между различными органами и тканями оказывают влияние на характеристики распространения и рассеяния волны. Еще одним примером служит влияние отклонений поверхности на качество зеркальных антенн [311].

При исследовании рассеяния на шероховатой поверхности важно понимать, что степень шероховатости поверхности зависит от длины волны и от направления распространения и рассеяния волны. Рассмотрим падение волны на шероховатую поверхность

(рис. 21.1). В случае идеально гладкой поверхности происходит зеркальное отражение двух лучей, причем отраженные лучи синфазны и угол отражения равен углу падения  $\theta_i$ . Если же поверхность шероховатая, то лучи перестают быть синфазными: между ними возникает разность фаз

$$\Delta\phi = 2kh \cos \theta_i. \quad (21.1)$$

Если эта разность фаз мала по сравнению с  $2\pi$ , то поверхность можно считать «гладкой». Если же эта разность фаз не мала, то из-за интерференции отражение в зеркальном направлении ослабляется, и некоторая доля энергии волны рассеивается

Рис. 21.1. Критерий Рэлея шероховатости поверхности.

в других направлениях. Рэлей использовал критерий, согласно которому поверхность считается шероховатой, если разность фаз (21.1) больше  $\pi/2$ , и гладкой, если она меньше  $\pi/2$ . Для высоты  $h$  критерий Рэлея принимает вид

$$h \geq \lambda / (8 \cos \theta_i). \quad (21.2)$$

В статистическом смысле используемая здесь высота  $h$  — это стандарт отклонения высот шероховатой поверхности.

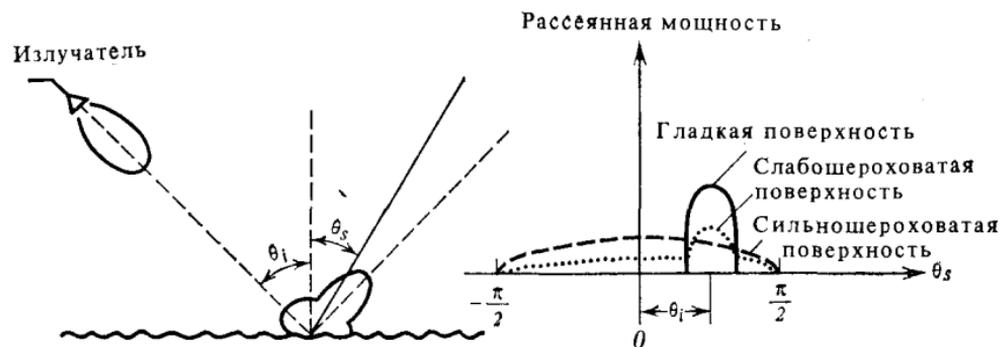


Рис. 21.2. Общие характеристики волн, рассеянных от шероховатой поверхности.

Прежде чем перейти к детальному математическому анализу, полезно рассмотреть некоторые общие характеристики рассеяния на шероховатой поверхности. Предположим, что излученная волна падает на поверхность (рис. 21.2). В случае гладкой поверхности отраженная волна с точностью до коэффициента отражения совпадает с волной, излученной тем же излучателем из зер-

кальной точки. Если поверхность слабошероховатая, то отраженная волна немного ослабляется из-за рассеяния, а мощность, соответствующая этому ослаблению, рассеивается в других направлениях. Мощность отраженной волны называют иногда зеркальной компонентой, а мощность рассеянной волны — диффузной компонентой. Зеркальное отражение от шероховатой поверхности отвечает когерентной мощности в случайной среде, а его мощность равна квадрату когерентного (среднего) поля. Диффузная компонента соответствует некогерентному полю в случайной среде. В случае сильношероховатой поверхности зеркальная (когерентная) компонента исчезает почти совсем, и главную роль играет диффузное (некогерентное) поле (рис. 21.2).

В настоящее время имеется два общих подхода к исследованию задач рассеяния на шероховатых поверхностях: «метод малых возмущений» и «приближение Кирхгофа». Метод малых возмущений<sup>1)</sup> пригоден для описания поверхностей с малыми неровностями, причем наклоны поверхности должны быть, вообще говоря, меньше единицы. Приближение Кирхгофа<sup>2)</sup> применимо для поверхностей с радиусами кривизны, значительно превышающими длину волны. В данной главе мы дадим начальные сведения об этих методах.

### 21.1. Принимаемая мощность и сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности

Рассмотрим передатчик, излучающий волну, которая падает на шероховатую поверхность (рис. 21.3). Принимаемая когерентная мощность  $P_{r \text{ ког}}$  равна мощности, зеркально отраженной от гладкой поверхности, которая ослабляется на величину мощности, рассеянной в других направлениях. Поэтому можно записать (рис. 21.3, а)

$$\frac{P_{r \text{ ког}}}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_t G_r}{(R_1 + R_2)^2} R_f^2 |\chi|^2, \quad |\chi|^2 \leq 1. \quad (21.3)$$

Здесь  $R_f^2$  — коэффициент отражения по мощности от гладкой поверхности, а  $|\chi|^2$  описывает влияние шероховатости.

Рассмотрим теперь диффузную (некогерентную) компоненту. Удобнее всего ее выразить через сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности. Отметим очевидную анало-

<sup>1)</sup> Метод малых возмущений использовался Рэлеем и был обобщен Райсом [293]. См. работы [16—18, 83, 127, 164, 215—217, 357—361, 390].

<sup>2)</sup> См. работу [30]; см. также более ранние работы по рассеянию на шероховатой поверхности [5, 24, 26, 347]. О связанной с этой проблемой задаче рассеяния на периодической поверхности см. [92, 365, 366, 404]. О диаграммном методе см. [93].

гию этой величины с сечением рассеяния единичного объема случайной среды, о котором шла речь в предыдущих главах.

Рассмотрим падение в направлении  $\hat{\mathbf{i}}$  плоской волны единичной амплитуды на участок  $\Delta S$  поверхности. Если через  $E_s$  обозначить поле рассеянной в направлении  $\hat{\mathbf{0}}$  волны на достаточно большом расстоянии  $R$ , то бистатистическое сечение рассеяния пло-

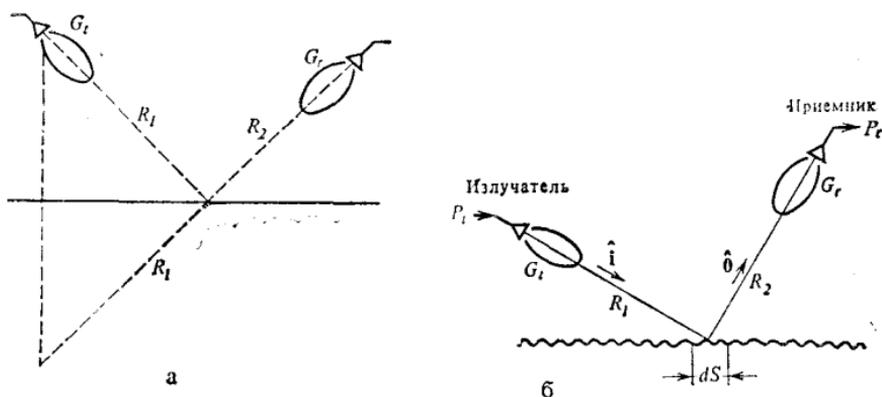


Рис. 21.3. Рассеяние от гладкой поверхности (а) и от шероховатой поверхности (б).

щадки  $\Delta S$  равно  $4\pi R^2 |E_s|^2$ , так что сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности определяется выражением

$$\sigma = \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{4\pi R^2 \langle |E_s|^2 \rangle}{\Delta S}. \quad (21.4)$$

Если излучатель и приемник расположены в дальней по отношению друг к другу зоне, то мощность  $P_r$  некогерентного рассеяния определяется уравнением радиолокации (рис. 21.3, б)

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int \frac{G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) ds, \quad (21.5)$$

где  $P_t$  — мощность излучения, а  $G_t$  и  $G_r$  — диаграммы направленности по мощности передатчика и приемника соответственно.

Отметим, что при таком подходе площадка  $\Delta S$ , фигурирующая в (21.4), должна быть настолько малой, чтобы падающую волну в ее пределах можно было считать почти плоской, и в то же время достаточно большой, чтобы учесть все статистические свойства шероховатой поверхности. В частности, размер площадки  $\Delta S$  должен значительно превышать радиус корреляции высот.

Отметим также, что если свойства поверхности медленно меняются во времени, то (21.5) можно модифицировать и записать

В виде

$$\frac{B_s(\tau)}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int \frac{G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) ds, \quad (21.6a)$$

где через  $B_s(\tau)$  обозначена временная корреляционная функция выходного напряжения приемника, пропорциональная корреляционной функции поля  $E_r$  на приемнике:

$$B_s(\tau) = \frac{\langle E_r(t+\tau) E_r^*(t) \rangle}{\langle |E_r|^2 \rangle} P_r. \quad (21.6b)$$

Сечение  $\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$  определяется выражением

$$\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \frac{4\pi R^2 \langle E_s(t+\tau) E_s^*(t) \rangle}{\Delta S}, \quad (21.7)$$

где  $E_s$  — рассеянное поле при падающей волне единичной амплитуды.

Проведя преобразование Фурье по  $\tau$ , получим формулу для частотного спектра принимаемой волны

$$\frac{W_s(\omega)}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int \frac{G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{R_1^2 R_2^2} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) ds, \quad (21.8)$$

где

$$W_s(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Через  $\omega$  в (21.8) обозначено отклонение частоты от несущей  $\omega_0$ , так что формула (21.8) описывает уширение спектра. Заметим, что выше мы предположили, что отклонение частоты  $\omega$  много меньше несущей частоты  $\omega_0$ . Это предположение справедливо почти для всех практических приложений.

## 21.2. Первое приближение метода малых возмущений (горизонтальная поляризация падающей волны)

В разд. 21.1 мы отметили, что при исследовании рассеяния на шероховатой поверхности центральной задачей является нахождение сечения рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности. В данном разделе мы дадим вывод выражения для сечения рассеяния на основе метода малых возмущений. Этот метод применим для описания слабошероховатых поверхностей, характерные особенности которых перечислены ниже.

Пусть высота неровностей поверхности задается уравнением

$$z = \zeta(x, y). \quad (21.9a)$$

Выберем плоскость  $z = 0$  так, чтобы уравнение (21.9а) описывало отклонение от средней высоты:

$$\langle \zeta(x, y) \rangle = 0. \quad (21.9б)$$

Тогда метод малых возмущений оказывается применимым, если разность фаз, обусловленная вариациями высот, мала по сравнению с  $2\pi$ , а наклоны поверхности много меньше единицы. Математически эти условия можно записать в следующем виде:

$$|k\zeta \cos \theta_i| \ll 1, \quad (21.10а)$$

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \ll 1. \quad (21.10б)$$

Рассмотрим сначала небольшой участок  $\Delta S$  шероховатой поверхности. Пусть участок  $\Delta S$  представляет собой квадрат со сто-

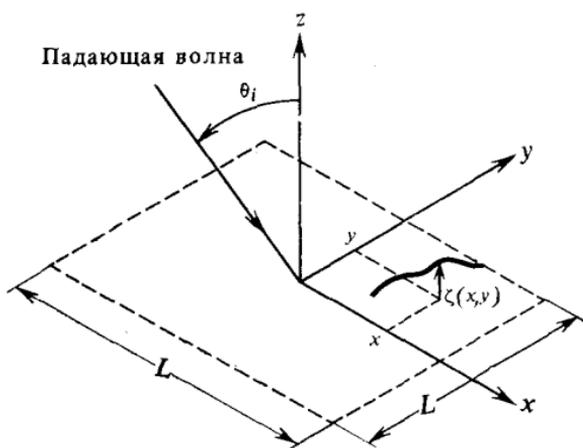


Рис. 21.4. Участок шероховатой поверхности  $\Delta S$  размера  $L$ . Высота поверхности равна  $\zeta(x, y)$ .

роной  $L$  (рис. 21.4). Предположим, что падающая волна поляризована в горизонтальном направлении и плоскость падения совпадает с плоскостью  $xz$ . Предположим также, что шероховатая поверхность является идеально проводящей.

В этом случае падающая волна имеет только одну компоненту

$$E_{yi}(x, z) = \exp(i\beta x - i\gamma z), \quad (21.11)$$

где  $\beta = k \sin \theta_i$  и  $\gamma = k \cos \theta_i$ . Если бы поверхность была гладкой, то отраженная волна имела бы вид

$$E_{yr}(x, z) = -\exp(i\beta x + i\gamma z). \quad (21.12)$$

При отражении от шероховатой поверхности полное поле представляет собой сумму выражений (21.11) и (21.12) плюс еще

поле волны, рассеянной на шероховатой поверхности. Поскольку площадь рассматриваемого участка поверхности равна  $L^2$ , рассеянное поле всегда можно представить в виде двойного ряда Фурье по  $x$  и  $y$  с периодом разложения  $L$ :

$$E_y(x, z) = E_{yi}(x, z) + E_{yr}(x, z) + E_{ys}(x, z), \quad (21.13a)$$

$$E_{ys}(x, z) = \sum_m \sum_n B_{mn} E(v + m, n; z), \quad (21.13б)$$

$$E(v + m, n; z) = \exp[i(2\pi/L)(v + m)x + i(2\pi/L)ny + ib(m + v, n)z],$$

$$\beta = k \sin \theta_i = (2\pi/L)v. \quad (21.13в)$$

Поскольку  $E_y$  удовлетворяет волновому уравнению, функция  $b(m + v, n)$  должна удовлетворять уравнению

$$[(2\pi/L)(v + m)]^2 + (2\pi n/L)^2 + [b(m + v, n)]^2 = k^2. \quad (21.14)$$

Ряд Фурье (21.13б)—(21.13в) называется разложением по пространственным гармоникам.

Заметим, что в (21.13в) содержится множитель  $\exp(ibz)$  характеризующий волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$ , но нет множителя  $\exp(-ibz)$ , описывающего волну, распространяющуюся в обратном направлении. Строго говоря, выражение (21.13в) не совсем верно, так как в области между максимумами и минимумами шероховатой поверхности рассеянное поле должно складываться из волн, бегущих как в направлении  $+z$ , так и в направлении  $-z$ . Поэтому в точном решении должно присутствовать дополнительное слагаемое, пропорциональное  $\exp(-ibz)$ . Численные исследования показывают [127], однако, что выражение (21.13в) дает хорошее приближение, если только наклоны поверхности не превышают значения порядка 0,4. В практических задачах это условие обычно выполняется. Предположение, что рассеянное поле можно разложить только по волнам вида (21.23в), бегущим в положительном направлении  $z$ , называется гипотезой Рэлея.

Остальные компоненты рассеянного поля имеют вид

$$E_x(x, z) = \sum_m \sum_n A_{mn} E(v + m, n; z), \quad (21.15)$$

$$E_z(x, z) = \sum_m \sum_n C_{mn} E(v + m, n; z). \quad (21.16)$$

$A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  следует рассматривать как неопределенные коэффициенты. Если какие-либо два из них известны, то третий коэффициент можно найти из уравнения  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ :

$$(2\pi/L)(v + m)A_{mn} + (2\pi n/L)B_{mn} + b(v + m, n)C_{mn} = 0. \quad (21.17)$$

Рассмотрим граничные условия. Обозначим через  $\hat{\mathbf{N}}$  единичный вектор нормали к поверхности. Тогда тангенциальная компонента поля  $\mathbf{E}$  определяется выражением

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} - \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}). \quad (21.18)$$

Поэтому граничное условие  $\mathbf{E}_t = 0$  на поверхности дается двумя уравнениями, получающимися в результате приравнивания нулю  $x$ - и  $y$ -компонент (21.18):

$$E_x - N_x(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}) = 0, \quad (21.19a)$$

$$E_y - N_y(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}}) = 0. \quad (21.19б)$$

Уравнение для  $z$ -компоненты (21.18) является линейной комбинацией уравнений (21.19a) и (21.19б). Это следует из условия  $\mathbf{E}_t \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ .

Единичный вектор нормали  $\hat{\mathbf{N}}$  связан с уравнением поверхности  $\zeta(x, y)$  соотношениями

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{N_x}{N_z}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{N_y}{N_z}. \quad (21.20)$$

Замечая, что  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 1$ , получаем

$$\hat{\mathbf{N}} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[ -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (21.21)$$

Теперь мы получили общие выражения для полей (21.13), (21.15) и (21.16) с неопределенными коэффициентами  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  и граничные условия (21.19a) и (21.19б). Найти аналитическое решение, используя эти граничные условия, вообще говоря, не удастся. Однако в первом приближении метода малых возмущений можно получить простое решение.

При использовании метода малых возмущений решение получается в результате приравнивания всех членов первого порядка по степеням малого параметра  $\epsilon$ . Этим параметром может служить высота неровностей поверхности, измеренная в длинах волн, или наклон поверхности:

$$\epsilon \sim |k\zeta| \sim \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|. \quad (21.22)$$

Разлагая  $\hat{\mathbf{N}}$  в (21.21) в ряд по степеням  $\epsilon$ , получаем

$$N_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} + O(\epsilon^3), \quad N_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} + O(\epsilon^3), \quad N_z = 1 + O(\epsilon^2). \quad (21.23)$$

Используя (21.23), разложим граничные условия (21.19a) и (21.19б) по степеням  $\epsilon$  и сохраним члены низшего порядка:

$$E_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} E_z = 0, \quad (21.24a)$$

$$E_y + \frac{\partial \zeta}{\partial y} E_z = 0. \quad (21.24б)$$

Из (21.16) следует, что в случае горизонтальной поляризации падающей волны для гладкой поверхности ( $k\xi \rightarrow 0$ )  $E_z$  обращается в нуль, так что порядок  $E_z$  не ниже  $\epsilon$ . Тогда из (21.24) следует

$$E_z \sim \epsilon, \quad E_x \sim \epsilon^2, \quad E_y \sim \epsilon^2. \quad (21.25)$$

В случае вертикальной поляризации  $E_z \rightarrow \text{const}$  для гладкой поверхности ( $k\xi \rightarrow 0$ ), так что из (21.24) получаем

$$E_z \sim \text{const}, \quad E_x \sim \epsilon, \quad E_y \sim \epsilon. \quad (21.26)$$

Рассмотрим теперь выражения (21.13), (21.15) и (21.16) для  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$ . На поверхности  $z = \zeta(x, y)$  функцию  $E(v + m, n; z)$  можно разложить в ряд по степеням  $\epsilon$ :

$$E(v + m, n; \zeta) = E(v + m, n; 0)(1 + ib\zeta + \dots). \quad (21.27)$$

Коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  также разложим в ряды по степеням  $\epsilon$ :

$$A_{mn} = A_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)} + \dots, \quad (21.28)$$

где  $A_{mn}^{(1)}$  порядка  $\epsilon$ ,  $A_{mn}^{(2)}$  порядка  $\epsilon^2$  и т. д. Разложения  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  по степеням  $\epsilon$  имеют аналогичный вид. Заметим, что при переходе к гладкой поверхности ( $\zeta \rightarrow 0$ ) все пространственные гармоники обращаются в нуль, так что коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  порядка  $\epsilon$  или выше.

Используя приведенные разложения, запишем общие выражения для  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  на поверхности  $z = \zeta(x, y)$  в виде рядов по степеням  $\epsilon$ :

$$E_x = \sum_m \sum_n [A_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)} + \dots] E(v + m, n; 0)(1 + ib\zeta + \dots), \quad (21.29)$$

$$E_y = 2i(\gamma\zeta + \dots)e^{i\beta x} + \sum_m \sum_n [B_{mn}^{(1)} + B_{mn}^{(2)} + \dots] E(v + m, n; 0)(1 + ib\zeta + \dots), \quad (21.30)$$

$$E_z = \sum_m \sum_n [C_{mn}^{(1)} + C_{mn}^{(2)} + \dots] E(v + m, n; 0)(1 + ib\zeta + \dots). \quad (21.31)$$

Подставляя (21.29) и (21.31) в (21.24а) и приравнивая нулю коэффициенты при первой степени  $\epsilon$ , получаем

$$\sum_m \sum_n A_{mn}^{(1)} E(v + m, n; 0) = 0. \quad (21.32)$$

Поскольку выражение (21.32) представляет собой ряд Фурье по  $x$  и  $y$ , все входящие в него коэффициенты должны обращаться в нуль:

$$A_{mn}^{(1)} = 0. \quad (21.33)$$

Аналогично можно приравнять нулю коэффициенты при вторых степенях  $\varepsilon$  и получить соотношение для коэффициентов второго порядка [16, 18, 357—359]. Однако нас интересует только решение в первом порядке, и мы не будем заниматься подробным анализом решений второго и более высоких порядков.

Подставим далее (21.30) и (21.31) в (21.24б). В результате найдем следующее соотношение между высотой  $\zeta$  и  $B_{mn}^{(1)}$ :

$$2i\gamma\zeta e^{i\beta x} + \sum_m \sum_n B_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; 0) = 0. \quad (21.34)$$

Разложим теперь высоту поверхности  $\zeta = \zeta(x, y)$  в двойной ряд Фурье:

$$\zeta(x, y) = \sum_m \sum_n P(m, n) \exp\left(i \frac{2\pi m}{L} x + i \frac{2\pi n}{L} y\right). \quad (21.35)$$

Тогда первое слагаемое в (21.34) примет вид

$$2i\gamma\zeta e^{i\beta x} = 2i\gamma \sum_m \sum_n P(m, n) E(\nu + m, n; 0). \quad (21.36)$$

Подставляя (21.36) в (21.34), получаем

$$B_{mn}^{(1)} = -2i\gamma P(m, n). \quad (21.37)$$

Используя (21.17), находим

$$C_{mn}^{(1)} = \frac{(2i\gamma)(2\pi n/L)}{b} P(m, n). \quad (21.38)$$

Таким образом, решение в первом порядке метода малых возмущений имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_s, \quad (21.39)$$

где  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{H}_i$  — поля падающей волны,  $\mathbf{E}_r$  и  $\mathbf{H}_r$  — поля отраженной от гладкой поверхности волны, а поля  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  описывают влияние шероховатой поверхности:

$$\begin{aligned} E_{iy} + E_{ry} &= 2i \sin \gamma z e^{i\beta x}, & E_{sx} &= 0, \\ E_{sy} &= \sum_m \sum_n B_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), & & \\ E_{sz} &= \sum_m \sum_n C_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z). & & \end{aligned} \quad (21.40a)$$

Соотношения для компонент магнитного поля получаются из уравнения Максвелла  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$  и (21.40a):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (H_{ix} + H_{rx}) &= -\frac{2\gamma \cos \gamma z}{k} e^{i\beta x}, \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (H_{iz} + H_{rz}) &= \frac{2i\beta \sin \gamma z}{k} e^{i\beta x}, \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sx} &= \sum_m \sum_n D_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sy} &= \sum_m \sum_n E_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sz} &= \sum_m \sum_n F_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \end{aligned} \quad (21.40б)$$

где

$$\begin{aligned} D_{mn}^{(1)} &= \left(\frac{2i\gamma}{bk}\right) \left\{ \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + b^2 \right\} P(m, n), \\ E_{mn}^{(1)} &= \left(\frac{-2i\gamma}{bk}\right) \left(\frac{2\pi n}{L}\right) \left[\frac{2\pi}{L}(\nu + m)\right] P(m, n), \\ F_{mn}^{(1)} &= -\left(\frac{2i\gamma}{k}\right) \left[\frac{2\pi}{L}(\nu + m)\right] P(m, n). \end{aligned}$$

Уравнения (21.39) и (21.40) дают в первом порядке метода малых возмущений полное решение для поля, рассеянного шероховатой поверхностью при падении на нее горизонтально поляризованной волны. Высота неровностей поверхности описывается двойным рядом Фурье (21.35) с коэффициентами  $P(m, n)$ .

В случае вертикально поляризованной падающей волны описанная процедура приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} E_{ix} + E_{rx} &= -2i \cos \theta_i \sin \gamma z e^{i\beta x}, \\ E_{iz} + E_{rz} &= 2 \sin \theta_i \cos \gamma z e^{i\beta x}, \\ E_{sx} &= \sum_m \sum_n A_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \quad E_{sy} = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \\ E_{sz} &= \sum_m \sum_n C_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \end{aligned} \quad (21.41)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (H_{iy} + H_{ry}) &= -2 \cos \gamma z, \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sx} &= \sum_m \sum_n D_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sy} &= \sum_m \sum_n E_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{sz} &= \sum_m \sum_n F_{mn}^{(1)} E(\nu + m, n; z), \end{aligned}$$

где

$$A_{mn}^{(1)} = 2i \left[ k \cos^2 \theta_i - \left( \frac{2\pi m}{L} \right) \sin \theta_i \right] P(m, n),$$

$$B_{mn}^{(1)} = -2i \left( \frac{2\pi n}{L} \right) \sin \theta_i P(m, n),$$

$$C_{mn}^{(1)} = -\frac{1}{b} \left[ \frac{2\pi(\nu + m)}{L} A_{mn}^{(1)} + \frac{2\pi n}{L} B_{mn}^{(1)} \right],$$

$$D_{mn}^{(1)} = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{2\pi n}{L} \right) C_{mn}^{(1)} - b B_{mn}^{(1)} \right],$$

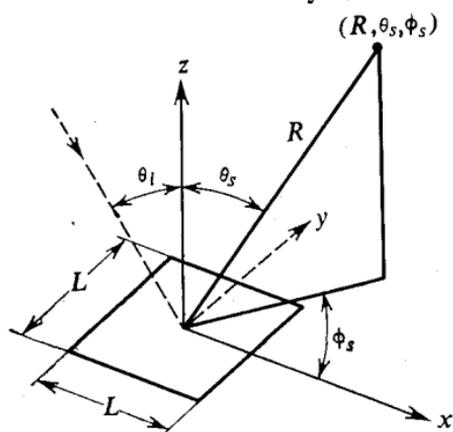
$$E_{mn}^{(1)} = \frac{1}{k} \left[ b A_{mn}^{(1)} - \frac{2\pi m}{L} C_{mn}^{(1)} \right],$$

$$F_{mn}^{(1)} = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{2\pi m}{L} \right) B_{mn}^{(1)} - \left( \frac{2\pi n}{L} \right) A_{mn}^{(1)} \right].$$

Заметим, что приведенное решение справедливо не только для шероховатой поверхности, но и для любой детерминированной поверхности с периодом  $L$ .

### 21.3. Сечение рассеяния единичной площадки в первом приближении метода малых возмущений

В предыдущем разделе мы получили в первом приближении метода малых возмущений выражение для поля над участком  $\Delta S = L^2$  шероховатой поверхности. Это поле порождает рассеянные во всех направлениях волны. Рассмотрим поле в направлении  $(\theta_s, \phi_s)$  на расстоянии  $R$  от этого участка поверхности (рис. 21.5). Выберем  $R$  так, чтобы точка наблюдения находилась в дальней зоне площадки  $\Delta S$ :



$$R \gg L^2/\lambda \quad \text{и}$$

$$L \gg \text{радиуса корреляции.}$$

Рис. 21.5. Рассеяние волны на шероховатой поверхности площади  $L^2$ . Направление падающей волны  $(\theta_i, 0)$ , направление рассеянной волны (в дальней зоне)  $(\theta_s, \phi_s)$ .

Рассмотрим поле в точке  $(R, \theta_s, \phi_s)$ . Вообще говоря, оно должно состоять из когерентной и некогерентной частей. В первом приближении метода малых возмущений когерентное поле просто равно полю, отраженному от идеально гладкой поверхности, так что принимаемая когерентная мощность  $P_{r \text{ ког}}$  (21.3) равна

$$\frac{P_{r \text{ ког}}}{P_i} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_i G_r}{(R_1 + R_2)^2} |R_f|^2, \quad (21.42)$$

где  $|R_f|^2$  — коэффициент отражения (по мощности) поверхности. Заметим, что в первом порядке метода малых возмущений множитель  $\chi$ , фигурирующий в (21.3), просто равен единице.

Некогерентное (диффузное) поле порождается рассеянной на шероховатой поверхности частью поля, которая определяется коэффициентами  $A_{mn}^{(1)}, B_{mn}^{(1)}, \dots$ . Чтобы получить выражение для некогерентного поля в точке  $(R, \theta_s, \phi_s)$ , необходимо связать поле в дальней зоне с полем на поверхности  $\Delta S$ . В общем случае поле в точке  $\mathbf{r}$ , возбуждаемое полем в точках  $\mathbf{r}'$  на поверхности  $s$ , имеет вид [335]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \int_s [\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' + \\ &\quad + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \int_s [\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \int_s [\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' - \\ &\quad - \frac{i}{\omega \mu_0} \nabla \times \nabla \times \int_s [\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \end{aligned} \quad (21.43)$$

где

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Выберем точку наблюдения  $\mathbf{r}$  в дальней зоне площадки  $s$  и примем, что площадка  $s$  совпадает с участком  $\Delta S = L^2$  поверхности при  $z = 0$ . Тогда поле в дальней зоне в точке  $(R, \theta_s, \phi_s)$  определяется полями  $E_x, E_y, H_x$  и  $H_y$  на поверхности  $\Delta S$ :

$$E_\theta = \frac{ik}{4\pi R} e^{ikR} I_\theta, \quad E_\phi = \frac{ik}{4\pi R} e^{ikR} I_\phi,$$

$$\begin{aligned} I_\theta &= \int_{\Delta S} [-(E_x \cos \phi_s + E_y \sin \phi_s) + \\ &\quad + Z_0(H_x \sin \phi_s - H_y \cos \phi_s) \cos \theta_s] \exp(-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_s) dx' dy', \\ I_\phi &= \int_{\Delta S} [(E_x \sin \phi_s - E_y \cos \phi_s) \cos \theta_s + \\ &\quad + Z_0(H_x \cos \phi_s + H_y \sin \phi_s)] \exp(-ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'_s) dx' dy', \end{aligned} \quad (21.44)$$

где

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_s = x' \sin \theta_s \cos \phi_s + y' \sin \theta_s \sin \phi_s, \quad Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}.$$

Используя величины, введенные в (21.44), можно определить сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхно-

сти следующим образом. Рассмотрим решение (21.40), отвечающее горизонтально поляризованной падающей волне. Тогда сечение рассеяния единичной площади при условии, что принимается только волна с горизонтальной поляризацией, будет равно

$$\sigma_{\text{ГГ}} = \frac{4\pi |E_{\phi}|^2 R^2}{|E_{in}|^2 L^2} = \frac{k^2 I_{\phi} I_{\phi}^*}{4\pi L^2}. \quad (21.45a)$$

Первый индекс означает, что приемник принимает горизонтально поляризованные волны, а второй индекс отмечает горизонтальную поляризацию падающей волны. Если приемник принимает только волну с вертикальной поляризацией  $E_{\theta}$ , то аналогичным образом имеем

$$\sigma_{\text{ВГ}} = k^2 I_{\theta} I_{\theta}^* / 4\pi L^2. \quad (21.45б)$$

В этих выражениях при вычислениях  $I_{\phi}$  и  $I_{\theta}$  нужно использовать формулы (21.40).

При вертикальной поляризации падающей волны нужно использовать формулы (21.41). Имеем

$$\sigma_{\text{ГВ}} = k^2 I_{\phi} I_{\phi}^* / 4\pi L^2, \quad (21.45в)$$

$$\sigma_{\text{ВВ}} = k^2 I_{\theta} I_{\theta}^* / 4\pi L^2. \quad (21.45г)$$

Для шероховатых поверхностей  $I_{\phi}$  и  $I_{\theta}$  представляют собой случайные функции, поэтому нужно брать их средние значения по ансамблю. Например,

$$\sigma_{\text{ГГ}} = (k^2 \langle I_{\phi} I_{\phi}^* \rangle) / 4\pi L^2, \quad \sigma_{\text{ВГ}} = (k^2 \langle I_{\theta} I_{\theta}^* \rangle) / 4\pi L^2. \quad (21.46)$$

Для вычисления усредненных по ансамблю величин в (21.46) необходимо использовать статистическое описание шероховатых поверхностей. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

## 21.4. Статистическое описание шероховатой поверхности

До сих пор мы совсем не говорили о статистике, поэтому приведенное выше описание справедливо как для детерминированных, так и для шероховатых поверхностей. Высота неровностей поверхности задавалась в виде двойного ряда Фурье

$$\zeta(x, y) = \sum_m \sum_n P(m, n) \exp\left(i \frac{2\pi m}{L} x + i \frac{2\pi n}{L} y\right). \quad (21.47)$$

Поскольку  $\zeta(x, y)$  — случайная функция, коэффициенты  $P(m, n)$  являются случайными величинами. Предположим, что коэффициенты  $P(m, n)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $P(m, n)$  — случайная величина с нулевым средним значением и

2)  $P(m, n)$  при разных пространственных частотах не коррелированы.

На математическом языке это можно записать следующим образом:

$$\langle P(m, n) \rangle = 0, \\ \langle P(m, n) P^*(m', n') \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq m' \text{ и } n \neq n', \\ \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{4} W\left(\frac{2\pi m}{L}, \frac{2\pi n}{L}\right) & \text{при } m = m' \text{ и } n = n'. \end{cases} \quad (21.48a)$$

Кроме того, поскольку высота  $\xi$  является вещественной функцией, коэффициенты  $P(m, n)$  удовлетворяют условию

$$P(m, n) = P^*(-m, -n). \quad (21.48б)$$

Функция  $W(p, q)$ , где  $p = 2\pi m/L$ ,  $q = 2\pi n/L$ , называется спектральной плотностью высот шероховатой поверхности и представляет собой фурье-образ корреляционной функции высот поверхности. Для доказательства этого утверждения рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle \xi(x_1, y_1) \xi(x_2, y_2) \rangle = \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \langle P(m, n) P^*(m', n') \rangle \times \\ \times \exp\left[i\frac{2\pi}{L}(mx_1 - m'x_2) + i\frac{2\pi}{L}(ny_1 - n'y_2)\right] = \\ = \sum_m \sum_n \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{4} W(p, q) \exp[ip(x_1 - x_2) + iq(y_1 - y_2)], \quad (21.49)$$

где  $p = 2\pi m/L$  и  $q = 2\pi n/L$ . Устремляя  $L$  к бесконечности, преобразуем этот ряд к интегралу<sup>1)</sup>

$$\langle \xi(x_1, y_1) \xi(x_2, y_2) \rangle = \\ = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq W(p, q) \exp[ip(x_1 - x_2) + iq(y_1 - y_2)]. \quad (21.50)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что соотношения  $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(n) e^{i(2\pi/L)nx}$  и  $c(n) = L^{-1} \int_0^L f(x) e^{-i(2\pi/L)nx} dx$  можно свести к формулам преобразования Фурье, положив  $(2\pi/L)n \rightarrow \omega$ ,  $2\pi/L \rightarrow d\omega$ ,  $L \rightarrow \infty$ . В результате такого предельного перехода получим  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [(L/2\pi) c(n)] e^{i\omega x} d\omega$ ,  $(L/2\pi) c(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ .

Переход от суммирования к интегрированию возможен в связи с тем, что размер  $L$  во много раз превосходит радиус корреляции. Спектральная плотность  $W(p, q)$  — вещественная положительная функция  $p$  и  $q$ , а поскольку  $\zeta$  — тоже вещественная функция, то  $W(p, q)$  является четной функцией  $p$  и  $q$ . Обращая (21.50), находим

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_d \int_{-\infty}^{\infty} dy_d \langle \zeta(x_1, y_1) \zeta(x_2, y_2) \rangle \exp(-ipx_d - iqy_d), \quad (21.51)$$

где  $x_d = x_1 - x_2$  и  $y_d = y_1 - y_2$ .

Как видно из соотношения (21.50), корреляционная функция зависит только от разностей  $x_d$  и  $y_d$ , так что при выполнении предположения (21.48а) шероховатая поверхность оказывается статистически однородной. Отметим, что (21.48а) эквивалентно спектральному представлению однородной случайной функции (см. приложение А). Физический смысл спектральной плотности  $W(p, q)$  следующий:  $W(p, q) dp dq$  есть количество спектральных компонент шероховатой поверхности с пространственными волновыми числами от  $p$  до  $p + dp$  в направлении  $x$  и от  $q$  до  $q + dq$  в направлении  $y$ .

## 21.5. Бистатистическое сечение рассеяния шероховатой поверхности

Рассчитаем сечение рассеяния (21.46) в случае падения волны с горизонтальной поляризацией, используя приведенное в предыдущем разделе статистическое описание шероховатой поверхности. Подставим  $E_s$  и  $H_s$  из (21.40) в (21.44) и выразим параметры  $I_\theta$  и  $I_\phi$  в виде рядов Фурье, содержащих множители  $P(m, n)$ . Учитывая, что в выражения для  $E_{sx}$ ,  $E_{sy}$ ,  $H_{sx}$  и  $H_{sy}$  всегда входят комбинации  $P(m, n)E(v + m, n; z)$ , можно записать

$$\left. \begin{matrix} I_\theta \\ I_\phi \end{matrix} \right\} = \int_{\Delta S} dx' dy' \sum_m \sum_n \left\{ \begin{matrix} f_\theta(m, n) \\ f_\phi(m, n) \end{matrix} \right\} P(m, n) \exp(ip'x' + iq'y'), \quad (21.52)$$

где

$$p' = \frac{2\pi}{L}(v + m) - k \sin \theta_s \cos \phi_s, \quad q' = \frac{2\pi}{L}n - k \sin \theta_s \sin \phi_s,$$

$$f_\theta = -[e_x \cos \phi_s + e_y \sin \phi_s] + (h_x \sin \phi_s - h_y \cos \phi_s) \cos \theta_s,$$

$$f_\phi = (e_x \sin \phi_s - e_y \cos \phi_s) \cos \theta_s + (h_x \cos \phi_s + h_y \sin \phi_s),$$

$$e_x = \frac{A_{mn}^{(1)}}{P(m, n)}, \quad e_y = \frac{B_{mn}^{(1)}}{P(m, n)}, \quad h_x = \frac{D_{mn}^{(1)}}{P(m, n)}, \quad h_y = \frac{E_{mn}^{(1)}}{P(m, n)}.$$

Рассмотрим теперь величину  $\langle I_\phi I_\phi^* \rangle$ . Используя (21.48а), получаем

$$\langle I_\phi I_\phi^* \rangle = \int dx' \int dy' \int dx'' \int dy'' \sum_m \sum_n |f_\phi(m, n)|^2 \times \\ \times \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{4} W\left(\frac{2\pi m}{L}, \frac{2\pi n}{L}\right) \exp(ip'x_d + iq'y_d), \quad (21.53)$$

где  $x_d = x' - x''$  и  $y_d = y' - y''$ . Отметим, что

$$\int dx' \int dx'' = \int dx_d \int dx_c,$$

где  $x_c = \frac{1}{2}(x' + x'')$  и  $y_c = \frac{1}{2}(y' + y'')$ . Отметим также, что

$$\int \exp(iKx_d) dx_d \rightarrow 2\pi\delta(K) \quad \text{при } L \rightarrow \infty.$$

Переходя от двойной суммы в (21.53) к интегралам, находим

$$\langle I_\phi I_\phi^* \rangle = L^2 \int dp \int dq |f_\phi(p, q)|^2 \frac{1}{4} W(p, q) (2\pi)^2 \delta(p') \delta(q'), \quad (21.54)$$

где

$$p = \frac{2\pi m}{L}, \quad q = \frac{2\pi n}{L}, \quad \beta = k \sin \theta_i = \frac{2\pi}{L} v, \\ p' = p + \beta - k \sin \theta_s \cos \phi_s, \quad q' = q - k \sin \theta_s \sin \phi_s.$$

Вычисляя интегралы в (21.54) и подставляя результат в (21.46), получаем

$$\sigma_{\text{гр}} = \frac{\pi k^2}{4} |f_\phi(p, q)|^2 W(p, q), \quad (21.55)$$

где

$$p = k \sin \theta_s \cos \phi_s - k \sin \theta_i, \quad q = k \sin \theta_s \sin \phi_s. \quad (21.56)$$

Аналогично имеем

$$\sigma_{\text{вг}} = \frac{\pi k^2}{4} |f_\theta(p, q)|^2 W(p, q). \quad (21.57)$$

В случае падающей волны с вертикальной поляризацией в формуле (21.44) нужно использовать поля (21.41). В результате найдем

$$\sigma_{\text{гв}} = \frac{\pi k^2}{4} |f_\phi(p, q)|^2 W(p, q), \quad (21.58)$$

$$\sigma_{\text{вв}} = \frac{\pi k^2}{4} |f_\theta(p, q)|^2 W(p, q). \quad (21.59)$$

Выражения для  $f_\theta$  и  $f_\phi$  легко найти из формул (21.52). Например, в случае горизонтально поляризованной падающей волны

$$f_\phi = (e_x \sin \phi_s - e_y \cos \phi_s) \cos \theta_s + (h_x \cos \phi_s + h_y \sin \phi_s). \quad (21.60)$$

Из (21.33), (21.37) и (21.406) получаем

$$e_x = 0, \quad e_y = -2i\gamma, \quad h_x = \left(\frac{2i\gamma}{bk}\right)(q^2 + b^2), \quad h_y = \left(-\frac{2i\gamma}{bk}\right)q(p + \beta), \quad (21.61)$$

где  $\gamma = k \cos \theta_i$ ,  $\beta = k \sin \theta_i$ ,  $p + \beta = k \sin \theta_s \cos \phi_s$ ,  $q = k \sin \theta_s \sin \phi_s$  и  $b = k \cos \theta_s$ . Подставляя (21.61) в (21.60), находим

$$f_\phi = 4ik \cos \theta_i \cos \theta_s \cos \phi_s. \quad (21.62)$$

Таким образом, в соответствии с (21.55) имеем

$$\sigma_{\Gamma\Gamma} = 4\pi k^4 \cos^2 \theta_i \cos^2 \theta_s \cos^2 \phi_s W(p, q). \quad (21.63)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ВГ}} &= 4\pi k^4 \cos^2 \theta_i \sin^2 \phi_s W(p, q), \\ \sigma_{\text{ГВ}} &= 4\pi k^4 \cos^2 \theta_s \sin^2 \phi_s W(p, q), \\ \sigma_{\text{ВВ}} &= 4\pi k^4 (\sin \theta_i \sin \theta_s - \cos \phi_s)^2 W(p, q), \end{aligned} \quad (21.64)$$

где спектр  $W(p, q)$  вычисляется при  $p = k \sin \theta_s \cos \phi_s - k \sin \theta_i$ ,  $q = k \sin \theta_s \sin \phi_s$ .

В случае обратного рассеяния ( $\theta_s = \theta_i$ ,  $\phi_s = \pi$ ) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma\Gamma} &= 4\pi k^4 \cos^4 \theta_i W(-2k \sin \theta_i, 0), \quad \sigma_{\text{ВГ}} = 0, \quad \sigma_{\text{ГВ}} = 0, \\ \sigma_{\text{ВВ}} &= 4\pi k^4 (1 + \sin^2 \theta_i)^2 W(-2k \sin \theta_i, 0). \end{aligned} \quad (21.65)$$

Физический смысл (21.65) состоит в том, что интенсивность обратного рассеяния пропорциональна величине спектральной компоненты шероховатой поверхности, отвечающей волновому числу  $p = -2k \sin \theta_i$ . Это означает, что рассеяние в обратном направлении происходит на спектральной компоненте с таким периодом  $d$  в направлении  $x$ , что

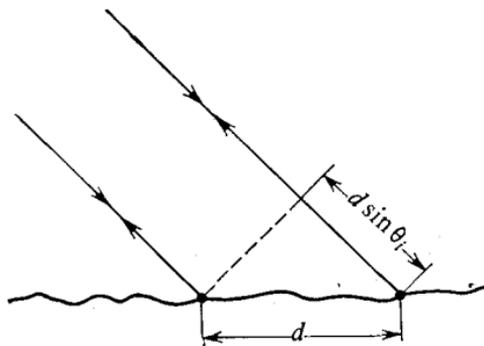
$$p = 2\pi/d = -2k \sin \theta_i. \quad (21.66)$$

Рис. 21.6. Обратное рассеяние обусловлено той компонентой пространственного спектра, период  $d$  которой удовлетворяет условию  $2d \sin \theta_i = \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны.

равна  $2\pi$  (рис. 21.6). Аналогично этому в общем случае соотношения

$$p = k \sin \theta_s \cos \phi_s - k \sin \theta_i, \quad q = k \sin \theta_s \sin \phi_s$$

означают, что рассеяние происходит на тех спектральных компонентах, для которых периоды  $d_1$  (вдоль оси  $x$ ) и  $d_2$  (вдоль оси



у) таковы, что разность фаз между двумя лучами, приходящими на поверхность на расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  и рассеиваемыми в направлении  $(\theta_s, \phi_s)$ , равна  $2\pi$ . Это соотношение совпадает с условием Брэгга для дифракции рентгеновских лучей на кристалле.

Приведенный здесь анализ можно обобщить на случай рассеяния волн на шероховатой границе раздела. Обозначив через  $\epsilon_r$  комплексную относительную диэлектрическую проницаемость среды под границей раздела, получим [296, 356]

$$\sigma_{rr} = 4\pi k^4 \cos^2 \theta_i \cos^2 \theta_s |\alpha_{rr}|^2 W(p, q), \quad (21.67)$$

где

$$\alpha_{rr} = - \frac{(\epsilon_r - 1) \cos \phi_s}{[\cos \theta_i + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\cos \theta_s + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}.$$

Выражения для  $\sigma_{вг}$ ,  $\sigma_{гв}$  и  $\sigma_{вв}$  получаются из (21.67) заменой  $\alpha_{rr}$  на  $\alpha_{вг}$ ,  $\alpha_{гв}$  и  $\alpha_{вв}$  соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha_{вг} &= - \frac{(\epsilon_r - 1)(\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2} \sin \phi_s}{[\cos \theta_i + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\epsilon_r \cos \theta_s + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}, \\ \alpha_{гв} &= \frac{\sin \phi_s (\epsilon_r - 1)(\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2}}{[\epsilon_r \cos \theta_i + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\cos \theta_s + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}, \\ \alpha_{вв} &= \frac{(\epsilon_r - 1)[\epsilon_r \sin \theta_i \sin \theta_s - \cos \phi_s (\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2} (\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}{[\epsilon_r \cos \theta_i + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\epsilon_r \cos \theta_s + (\epsilon_r - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]} \end{aligned} \quad (21.68)$$

## 21.6. Влияние нестационарности шероховатой поверхности

В разд. 21.4 мы привели статистическое описание стационарной шероховатой поверхности, т. е. поверхности, характеристики которой не меняются во времени. В данном разделе мы обобщим полученные результаты на случай нестационарной шероховатой поверхности. Заметим, что каждая пространственная гармоника в разложении (21.47) может перемещаться с некоторой определенной фазовой скоростью. Например, гравитационная волна на поверхности океана в глубоком месте распространяется с фазовой скоростью  $v_p = \sqrt{gl/2\pi}$ , где  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> — гравитационная постоянная, а  $l$  — длина волны. Угловая частота, соответствующая этой фазовой скорости, равна

$$\omega_r = (2\pi/l) v_p = [g(2\pi/l)]^{1/2}. \quad (21.69)$$

Рассмотрим разложение (21.47) по пространственным гармоникам высоты шероховатой поверхности. Поскольку волновые числа в  $x$ - и  $y$ -направлениях каждой гармоники равны соответ-

венно  $2\pi m/L$  и  $2\pi n/L$ , угловая частота  $\omega_{mn}$  этой гармоники в случае гравитационных волн равна

$$\omega_{mn} = \left\{ g \left[ (2\pi m/L)^2 + (2\pi n/L)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (21.70)$$

Поэтому высоту шероховатой поверхности как функцию  $x$ ,  $y$  и  $t$  можно представить в виде

$$\xi(x, y, t) = \sum_m \sum_n P(m, n) \exp \left( i \frac{2\pi m}{L} x + i \frac{2\pi n}{L} y - i \omega_{mn} t \right). \quad (21.71)$$

Поскольку высота  $\xi(x, y, t)$  является вещественной функцией, кроме выполнения условия (21.48) нужно потребовать еще, чтобы частота  $\omega_{mn}$  была нечетной функцией  $m$  и  $n$ :

$$\omega_{-m, -n} = -\omega_{m, n}. \quad (21.72)$$

Тогда корреляционную функцию (21.50) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \xi(x_1, y_1, t_1) \xi(x_2, y_2, t_2) \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq W(p, q) \exp(ipx_d + i q y_d - i \omega_r \tau), \end{aligned} \quad (21.73)$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ . Спектральная плотность  $W(p, q)$  — четная функция  $p$  и  $q$ . Отметим, что выражение (21.71) описывает поверхность, перемещающуюся в направлении положительных  $x$ , если частота  $\omega_{mn}$  положительна, и в направлении отрицательных  $x$ , если  $\omega_{mn}$  отрицательна. Поэтому для океанических волн, перемещающихся в направлении  $+x$ ,

$$\omega_r = [g(p^2 + q^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (21.74a)$$

а для волн противоположного направления

$$\omega_r = -[g(p^2 + q^2)^{1/2}]^{1/2}. \quad (21.74b)$$

Отметим, что единственное различие между (21.73) и не зависящей от времени корреляционной функцией (21.50) состоит в том, что в (21.73)  $W(p, q)$  заменяется на  $W(p, q) \exp(-i\omega_r \tau)$ . Поэтому нестационарное сечение рассеяния определяется выражением

$$\sigma = (\pi k^2/4) |f(p, q)|^2 W(p, q) \exp(-i\omega_r \tau). \quad (21.75)$$

Частотный спектр сечения рассеяния (21.8) равен

$$\sigma(\omega) = (\pi k^2/4) |f(p, q)|^2 W(p, q) \cdot 4\pi d(\omega + \omega_r), \quad (21.76)$$

где через  $\omega$  обозначено отклонение частоты от несущей  $\omega_0$ , величина  $\omega_r$  определена в (21.74) а  $p$  и  $q$  даются формулой (21.56).

Например, сечение обратного рассеяния (21.65) имеет частотный спектр

$$\sigma_{гг}(\omega) = 4\pi k^4 \cos^4 \theta_i W(-2k \sin \theta_i, 0) 4\pi \delta(\omega + \omega_r),$$

где  $\omega_r$  определено в (21.74).

На основании этого анализа были проведены обширные теоретические и экспериментальные исследования рассеяния от поверхности океана [16, 357, 358].

## 21.7. Спектры океанических волн

Неровности на поверхности океана вызываются ветрами. Можно выделить следующие два основных типа океанических волн: а) полностью развитое волнение и б) мертвую зыбь [16, 164, 361]. В первом случае, для того чтобы волнение приняло развитой характер, необходимо наличие ветров в течение нескольких часов, предшествующих наблюдению. Вообще говоря, в случае ветров со скоростью 20—30 узлов для полного развития океанических волн с длиной волны 20—200 м требуется несколько часов. Во втором случае океанические волны, приходящие в точку наблюдения, возбуждаются в других местах и в другое время. Такие волны называются мертвой зыбью.

Для полностью развитого волнения океана, порожденного ветром со скоростью  $U$  (м/с), Филлипс и Мунк предложили эмпирический спектр вида

$$W(p, q) = \begin{cases} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi(p^2 + q^2)^2} & \text{при } (p^2 + q^2)^{1/2} > \frac{g}{U^2}, \\ 0 & \text{при } (p^2 + q^2)^{1/2} < \frac{g}{U^2}. \end{cases} \quad (21.77)$$

Изучались и другие спектры, включая степенной, и исследовалась их связь со скоростью ветра [219, 360, 361].

## 21.8. Некоторые другие задачи

Выше мы получили выражения для сечений рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности при различных поляризациях падающей волны. Наряду с рассеянием представляют интерес две другие важные задачи: а) распространение вдоль шероховатой поверхности и б) прохождение волны через шероховатую границу раздела. Обе задачи допускают решение в приближении метода малых возмущений.

В данной главе мы рассматривали рассеяние только электромагнитных волн. Однако метод возмущений в равной степени применим и к акустическим задачам. Если шероховатая поверх-

ность является границей раздела двух жидкостей (например, граница между водой и воздухом), то в качестве неизвестной величины выступает акустический потенциал или акустическое давление. Если же поверхность представляет собой границу между жидкостью и твердым веществом, то приходится рассматривать скалярный и векторный потенциалы.

Если поверхность представляет собой суперпозицию двух шероховатых поверхностей, то говорят о двухмасштабной шероховатой поверхности. Примером такой поверхности служат океанические волны с большой длиной волны, на которые наложена капиллярная рябь с малой длиной волны. Поскольку эти два типа неровностей в статистическом смысле практически независимы друг от друга, сечение рассеяния двухмасштабной шероховатой поверхности можно с хорошей точностью представить в виде суммы сечений рассеяния, отвечающих разным типам шероховатости. Рассеяние на двухмасштабных шероховатых поверхностях широко изучалось в литературе [145, 280].

Упомянем также ранние исследования рассеяния на шероховатых поверхностях [5, 24, 26, 347] и более поздние работы [143, 144, 215]. Связь между приближением Кирхгофа (которое рассматривается в следующем разделе) и методом малых возмущений обсуждалась в ряде работ [228, 361]. Добавим еще обширную литературу, относящуюся к гипотезе Рэлея [22, 65, 66, 254, 256].

## 21.9. Приближение Кирхгофа: рассеяние звуковых волн на шероховатой поверхности

До сих пор мы исследовали решение задачи о рассеянии волн на шероховатой поверхности в первом приближении метода малых возмущений. В этом приближении мощность когерентной волны равна мощности волны, отраженной от гладкой поверхности, а некогерентная мощность выражается через сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности. Если высоты поверхности становятся немалыми по сравнению с длиной волны, то когерентная мощность уменьшается, а некогерентная (диффузная) — возрастает. В настоящее время не существует теории, на основе которой можно было бы описать рассеяние на сильно шероховатых поверхностях. Однако если поверхность искривлена плавно, так что радиусы ее кривизны значительно превосходят длину волны, то можно воспользоваться приближением Кирхгофа, в рамках которого удастся получить относительно простое решение задачи.

Рассмотрим падение акустической волны на шероховатую поверхность (рис. 21.7), разделяющую две жидкости (например,

воздух и воду). Выберем оси координат так, чтобы плоскость  $xz$  совпадала с плоскостью падения. Тогда давление в падающей волне

$$p_i(\mathbf{r}) = \exp(i\beta x - i\gamma z) = \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}), \quad (21.78)$$

где  $\mathbf{k}_i = k \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - k \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} = \beta \hat{\mathbf{x}} - \gamma \hat{\mathbf{z}}$ , а  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ . Будем измерять высоту поверхности от ее среднего значения, так что

$$\langle \zeta(x, y) \rangle = 0. \quad (21.79)$$

Рассмотрим поле  $p(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}$ , возбуждаемое полем  $p(\mathbf{r}')$  на шероховатой поверхности  $S$ . В случае электромагнитных волн решение этой задачи дается формулами (21.43). Для скалярных волн имеет место следующая эквивалентная формула, основанная на теореме Грина:

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \left[ p(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds', \quad (21.80)$$

где  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] / (4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ,  $\partial/\partial n'$  — производная по нормали, а нормаль  $n'$  направлена в сторону полупространства, содержащего точку  $\mathbf{r}$ .

Выберем точку наблюдения  $\mathbf{r}(R, \theta_s, \phi_s)$  в дальней зоне относительно поверхности  $S$ . Тогда функцию Грина (в 21.80) приближенно можно представить в виде

$$G_0 \approx \frac{\exp(ikR - i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}')}{4\pi R}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial n'} \approx G_0 \frac{\partial(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}')}{\partial n'} = -i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{N}} G_0, \quad (21.81)$$

где  $\hat{\mathbf{N}}$  — единичный вектор нормали к поверхности и

$$\mathbf{k}_s = (k \sin \theta_s \cos \phi_s) \hat{\mathbf{x}} + (k \sin \theta_s \sin \phi_s) \hat{\mathbf{y}} + (k \cos \theta_s) \hat{\mathbf{z}}.$$

В (21.80) поле  $p(\mathbf{r}')$  и его нормальная производная  $\partial p(\mathbf{r}')/\partial n'$  на поверхности неизвестны, и для их точного определения требуется решение граничной задачи. В предыдущих разделах описано такое решение с применением метода малых возмущений. В данном разделе для определения поля на поверхности используется приближение Кирхгофа. В приближении Кирхгофа поверхность предполагается локально плоской, а поле на ней считается

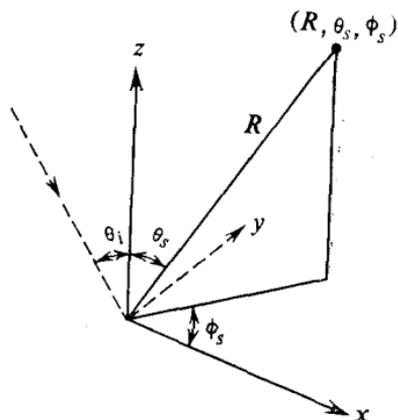


Рис. 21.7. Рассеяние в направлении  $(\theta_s, \phi_s)$  плоской волны, падающей в направлении  $(\theta_i, 0)$  на шероховатую поверхность  $\zeta = \zeta(x, y)$ .

приближенно равным полю, которое существовало бы на плоскости, соприкасающейся с шероховатой поверхностью в рассматриваемой точке. Поэтому имеем

$$p(\mathbf{r}') = p_i(\mathbf{r}') (1 + R_f), \quad \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} = ik_i \cdot \hat{\mathbf{N}} p_i(\mathbf{r}') - i(\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}) R_f p_i(\mathbf{r}'), \quad (21.82)$$

где  $R_f$  — коэффициент отражения в точке  $\mathbf{r}'$ , вообще говоря, зависящий от угла падения  $\theta_i$  и нормали  $\hat{\mathbf{N}}$ . Если волна падает из среды с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$  на среду с плотностью  $\rho_2$  и скоростью звука  $c_2$ , то коэффициент отражения  $R_f$  равен

$$R_f = \frac{m \cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{m \cos \theta_1 + n \cos \theta_2}, \quad (21.83)$$

где  $m = \rho_2/\rho_1$ ,  $n = c_1/c_2$ , а  $\theta_1$  — угол падения в точке  $\mathbf{r}'$ , равный углу между  $\mathbf{k}_i$  и  $\hat{\mathbf{N}}$ . Угол  $\theta_2$  — это угол преломления, определяемый соотношением

$$(\sin \theta_1)/(\sin \theta_2) = c_1/c_2. \quad (21.84)$$

Подставляя (21.81) и (21.82) в (21.80), получаем

$$p(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(ikR)}{4\pi R} \int_S (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} R_f - \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') ds', \quad (21.85)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}, & \mathbf{w} &= \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s = w_x \hat{\mathbf{x}} + w_y \hat{\mathbf{y}} + w_z \hat{\mathbf{z}}, \\ v_x &= -k(\sin \theta_s \cos \phi_s - \sin \theta_i), & v_y &= -k \sin \theta_s \sin \phi_s, \\ v_z &= -k(\cos \theta_i + \cos \theta_s), \\ w_x &= k(\sin \theta_s \cos \phi_s + \sin \theta_i), & w_y &= k \sin \theta_s \sin \phi_s, \\ w_z &= k(\cos \theta_s - \cos \theta_i), & \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' &= v_x x' + v_y y' + v_z \zeta(x, y). \end{aligned}$$

Формула (21.85) называется формулой Кирхгофа; она определяет рассеянное поле  $p(\mathbf{r})$  по падающему на поверхность  $S$  полю  $p_i(\mathbf{r})$ .

Коэффициент отражения  $R_f$  определяется формулой (21.83) и в общем случае является функций  $x$  и  $y$ . Можно представить  $R_f$  в виде суммы коэффициента отражения гладкой поверхности  $R_{f0}$  и коэффициента отражения  $R_{fr}$ , отвечающего неровностям. В случае плавно неровной поверхности коэффициент  $R_{fr}$  должен быть малым по сравнению с  $R_{f0}$ , поэтому приближенно можно считать, что  $R_f$  равен  $R_{f0}$ :

$$R_f \approx R_{f0} = \frac{m \cos \theta_i - n \cos \theta_t}{m \cos \theta_i + n \cos \theta_t}, \quad (21.86)$$

где  $(\sin \theta_i)/(\sin \theta_t) = c_1/c_2$ . Заметим еще, что, поскольку  $ds' = = (dx' dy')/N_z$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds' &= (v_x N_x + v_y N_y + v_z N_z) \frac{dx' dy'}{N_z} = \\ &= \left( -v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v_z \right) dx' dy', \end{aligned} \quad (21.87)$$

$$\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds' = \left( -w_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - w_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w_z \right) dx' dy'.$$

Подставляя (21.86) и (21.87) в (21.85), мы видим, что в (21.85) входит интеграл вида

$$\int dx' \int dy' \frac{\partial \zeta}{\partial x} \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}').$$

Интегрируя по частям по  $x'$ , получаем

$$\int dy' \left[ \frac{\exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}')}{iv_z} \right]_{x_1}^{x_2} - \int dx' dy' \left( \frac{v_x}{v_z} \right) \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}').$$

Первое слагаемое представляет собой разность величины, стоящей в квадратных скобках, взятой при  $x' = x_2$ , и той же величины при  $x' = x_1$ , а второе слагаемое — интеграл по  $x'$ . Поэтому при увеличении размеров площадки  $S$  первое слагаемое должно становиться пренебрежимо малым по сравнению со вторым. Таким образом, приближенно имеем

$$\int_S dx' dy' \frac{\partial \zeta}{\partial x} \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') \approx -\frac{v_x}{v_z} \int_S dx' dy' \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'). \quad (21.88a)$$

Подобным образом

$$\int_S dx' dy' \frac{\partial \zeta}{\partial y} \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') \approx -\frac{v_y}{v_z} \int_S dx' dy' \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'). \quad (21.88b)$$

Используя (21.86) — (21.88), запишем (21.85) в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(ikR)}{4\pi R} F \int_S \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') dx' dy', \quad (21.89)$$

где

$$F = -\frac{2k [1 + \cos \theta_i \cos \theta_s - \sin \theta_i \sin \theta_s \cos \phi_s]}{(\cos \theta_i + \cos \theta_s)} R_{f0}.$$

В случае плоской поверхности, когда  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' = v_x x' + v_y y'$ , поле в зеркальном направлении ( $\theta_s = \theta_i$ ,  $\phi_s = 0$ ) равно

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(ikR)}{4\pi R} (-2k \cos \theta_i) R_{f0} \int_S dx' dy'. \quad (21.90)$$

Искомое поле  $p(\mathbf{r}) = p(R, \theta_s, \phi_s)$  выражается через зеркально отраженное поле  $p_0(\mathbf{r}) = p_0(R, \theta_i, 0)$  следующим образом:

$$p(R, \theta_s, \phi_s) = p_0(R, \theta_i, 0) f(\theta_i, \theta_s, \phi_s) \frac{1}{S} \int_S \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') dx' dy', \quad (21.91)$$

где

$$f(\theta_i, \theta_s, \phi_s) = \frac{1 + \cos \theta_i \cos \theta_s - \sin \theta_i \sin \theta_s \cos \phi_s}{\cos \theta_i (\cos \theta_i + \cos \theta_s)}.$$

Это основное выражение для поля в приближении Кирхгофа.

## 21.10. Когерентное поле в приближении Кирхгофа

Пусть излучатель освещает шероховатую поверхность. Рассмотрим когерентное поле в зеркальном направлении ( $\theta_s = \theta_i$ ,  $\phi_s = 0$ ). Замечая, что при этом в (21.91)  $f = 1$  и  $v_x = v_y = 0$ , получаем

$$\langle p(R, \theta_i, 0) \rangle = p_0(R, \theta_i, 0) \chi(v_z), \quad (21.92)$$

где  $p_0(R, \theta_i, 0)$  — поле, отраженное от плоской поверхности, а  $\chi(v_z)$  — характеристическая функция случайной величины  $\zeta(x, y)$ , определяемая выражением

$$\chi(v_z) = \langle \exp(i v_z \zeta) \rangle, \quad v_z = -2k \cos \theta_i. \quad (21.93)$$

Выражая  $\chi(v_z)$  через функцию плотности вероятности  $W_0(\zeta)$ , имеем

$$\chi(v_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i v_z \zeta) W_0(\zeta) d\zeta. \quad (21.94)$$

Если высота  $\zeta$  распределена нормально с дисперсией  $\sigma_0^2$ , то

$$W_0(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_0} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (21.95)$$

$$\chi(v_z) = \exp\left(-\frac{\sigma_0^2 v_z^2}{2}\right) = \exp(-2\sigma_0^2 k^2 \cos^2 \theta_i). \quad (21.96)$$

Обращаясь к разд. 21.1, находим, что когерентная мощность (21.3) равна

$$\frac{P_r \text{ ког}}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_t G_r}{(R_t + R_r)^2} R_f \chi(v_z), \quad (21.97)$$

где  $\chi(v_z)$  определяется выражением (21.93).

Рассмотрим теперь когерентное поле в направлении  $(\theta_s, \phi_s)$ . Усредняя (21.91), получаем

$$\langle p \rangle = \left[ p_0 f \frac{1}{S} \int_S \exp(i v_x x' + i v_y y') dx' dy' \right] \chi(v_z), \quad (21.98)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  даны в (21.85). Заметим, что величина в квадратных скобках в (21.98) — это поле, рассеянное плоской поверхностью, так что среднее поле равно полю, рассеянному плоской поверхностью, умноженному на  $\chi(v_z)$ .

### 21.11. Сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности

Рассмотрим теперь некогерентное (диффузное) поле. Сечение рассеяния единичной площадки определяется формулой

$$\sigma = \frac{4\pi R^2}{S} \langle |p - \langle p \rangle|^2 \rangle. \quad (21.99)$$

Используя (21.90), (21.91) и (21.98), получаем

$$\sigma = \frac{k^2 \cos^2 \theta_i}{\pi} R_{f0}^2 f^2 I, \quad (21.100)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{S} \int_S dx' dy' \int_S dx'' dy'' \exp [i v_x (x' - x'') + i v_y (y' - y'')] \times \\ &\quad \times [\chi_2(v_z, -v_z) - |\chi(v_z)|^2] = \\ &= \int dx_d \int dy_d \exp (i v_x x_d + i v_y y_d) [\chi_2(v_z, -v_z) - |\chi(v_z)|^2], \end{aligned} \quad (21.101)$$

где  $x_d = x' - x''$  и  $y_d = y' - y''$ . Через  $\chi_2(v_1, v_2)$  обозначена двумерная характеристическая функция высоты  $\xi$ :

$$\chi(v_1, v_2) = \langle \exp (i v_1 \xi_1 + i v_2 \xi_2) \rangle. \quad (21.102)$$

В предположении, что поверхность статистически однородна и изотропна,  $\chi(v_1, v_2)$  зависит только от  $(x_d^2 + y_d^2)^{1/2}$ .

Если высоты поверхности распределены по нормальному закону, то совместная плотность вероятности имеет вид

$$W_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2(1-C^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{\xi_1^2 - 2C\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma_0^2(1-C^2)} \right], \quad (21.103)$$

где  $\sigma_0^2$  — дисперсия, а  $C = C(\rho)$  — коэффициент корреляции высот на расстоянии  $\rho = (x_d^2 + y_d^2)^{1/2}$ :

$$\langle \xi(x_1, y_1) \xi(x_2, y_2) \rangle = \sigma_0^2 C(\rho). \quad (21.104)$$

В этом случае двумерная характеристическая функция (21.102) принимает вид

$$\begin{aligned} \chi(v_1, v_2) &= \int d\xi_1 \int d\xi_2 W_0(\xi_1, \xi_2) \exp (i v_1 \xi_1 + i v_2 \xi_2), \\ \chi(v_z, -v_z) &= \exp \{ -v_z^2 \sigma_0^2 [1 - C(\rho)] \}. \end{aligned} \quad (21.105)$$

Предполагая, что распределение нормально, имеем

$$\chi_2(v_z, -v_z) - |\chi(v_z)|^2 = \exp\{-v_z^2 \sigma_0^2 [1 - C(\rho)]\} - \exp(-v_z^2 \sigma_0^2). \quad (21.106)$$

В случае слабой шероховатости поверхности выражение (21.106) принимает вид  $[\exp(-v_z^2 \sigma_0^2)] v_z^2 \sigma_0^2 C(\rho)$ . Подставляя это выражение в (21.100) и (21.101) и используя определение (21.51) функции  $W(\rho, q)$ <sup>1)</sup>, получаем

$$I = \pi^2 W(\rho, q), \quad (21.107)$$

$$\sigma = \pi k^4 R_{f0}^2 [1 + \cos \theta_i \cos \theta_s - \sin \theta_i \sin \theta_s \cos \phi_s]^2 W(\rho, q),$$

где  $\rho = -v_x = k \sin \theta_s \cos \phi_s - k \sin \theta_i$  и  $q = -v_y = k \sin \theta_s \sin \phi_s$  — те же величины, что и в (21.56). В случае обратного рассеяния ( $\theta_s = \theta_i$ ,  $\phi_s = \pi$ ) имеем

$$\sigma = 4\pi k^4 R_{f0}^2 W(-2k \sin \theta_i, 0). \quad (21.108)$$

Отметим, что формула (21.108) с точностью до коэффициента отражения  $R_{f0}^2$  и описывающего горизонтальную поляризацию падающей волны множителя  $\cos^4 \theta_i$  совпадает с выражением (21.65), полученным методом малых возмущений. Множитель  $\cos^4 \theta_i$  обусловлен тем, что поверхностные магнитные токи пропорциональны  $\cos \theta_i$ , а диаграмма рассеяния вносит дополнительный множитель  $\cos \theta_i$ . Поэтому рассеянное поле пропорционально  $\cos^2 \theta_i$ , а мощность рассеянного поля пропорциональна  $\cos^4 \theta_i$ .

В случае слабошероховатой поверхности приближение Кирхгофа даёт практически тот же результат, что и метод малых возмущений. Этого, конечно, следовало ожидать. Нужно заметить, однако, что метод малых возмущений лучше описывает поляризационные эффекты, поскольку он основывается на точных граничных условиях на поверхности. В приближении Кирхгофа используется коэффициент отражения для плоской поверхности, поэтому полностью учесть поляризационные эффекты не удастся [361].

Если неровности поверхности велики, то когерентная мощность  $|\langle \rho \rangle|^2$  практически обращается в нуль, и мы получаем

$$\chi_2(v_z, -v_z) - |\chi(v_z)|^2 \approx \chi_2(v_z, -v_z),$$

$$I = \int dx_d dy_d \exp(iv_x x_d + iv_y y_d) \exp\{-v_z^2 \sigma_0^2 [1 - C(\rho)]\} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho J_0(v\rho) \exp\{-v_z^2 \sigma_0^2 [1 - C(\rho)]\}, \quad (21.109)$$

<sup>1)</sup> Функция  $W(\rho, q)$  — спектральная плотность высот шероховатой поверхности.

где  $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$  и  $\rho = (x_d^2 + y_d^2)^{1/2}$ . Для сильно неровной поверхности  $v_z^2 \sigma_0^2 \gg 1$ , так что основной вклад в интеграл (21.109) дает окрестность точки  $\rho = 0$ . Поэтому мы разложим  $1 - C(\rho)$  в ряд по степеням  $\rho^2$  и сохраним лишь первый член:

$$1 - C(\rho) = \rho^2/l^2 + \dots, \quad (21.110)$$

где через  $l$  обозначен радиус корреляции неровностей поверхности. Подставляя (21.110) в (21.109), получаем

$$\sigma = \frac{k^2 \cos^2 \theta_i}{\pi} R_{f0}^2 f^2 I, \quad I = \frac{\pi l^2}{v_z^2 \sigma_0^2} \exp\left(-\frac{v^2 l^2}{4v_z^2 \sigma_0^2}\right), \quad (21.111)$$

где  $f$  дано в (21.91), а

$$\begin{aligned} v_z &= -k(\cos \theta_i + \cos \theta_s), & v^2 &= p^2 + q^2, \\ p &= k(\sin \theta_s \cos \phi_s - \sin \theta_i), & q &= k \sin \theta_s \sin \phi_s. \end{aligned}$$

Сечение обратного рассеяния ( $\theta_s = \theta_i$ ,  $\phi_s = \pi$ ) равно

$$\sigma = \left(\frac{R_{f0}^2}{4 \cos^4 \theta_i}\right) \frac{l^2}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{l^2}{\sigma_0^2} \frac{\text{tg}^2 \theta_i}{4}\right). \quad (21.112)$$

Это выражение можно также представить в виде

$$\sigma = \frac{R_{f0}^2}{\cos^4 \theta_i} \text{ctg}^2 \beta_0 \exp\left(-\frac{\text{tg}^2 \theta_i}{\text{tg}^2 \beta_0}\right), \quad (21.113)$$

где величину  $\text{tg} \beta_0 = 2\sigma_0/l$  следует интерпретировать как среднее значение наклонов шероховатой поверхности.



Рис. 21.8. Обратное рассеяние от шероховатой поверхности при освещении ее остронаправленным пучком.

Некогерентная мощность  $P_s$  теперь определяется выражением (21.5). Предположим, например, что излучатель обладает узкой диаграммой направленности

$$G_t(\hat{\mathbf{i}}) = G_t(0) \exp(-\theta^2/\theta_0^2), \quad (21.114)$$

где  $\theta$  измеряется от направления на максимум диаграммы направленности (рис. 21.8). Замечая, что  $R_1 = R_2 \approx R$ , получаем

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{\lambda^2 \pi \theta_0^2 \sigma G_t^2(0)}{(4\pi)^3 2R^2 \cos \theta_i}, \quad (21.115)$$

где  $\sigma$  определяется выражением (21.112).

## 21.12. Распределение вероятности рассеянного поля

Рассмотрим диффузно рассеянное поле  $p$  вне зеркального направления. В этом случае  $\langle p \rangle = 0$ , а само поле  $p$  состоит из полей, рассеянных различными участками шероховатой поверхности. Если положить  $p = X + iY$ , то  $X$  и  $Y$  будут представлять собой суммы большого числа независимых величин  $X_i$  и  $Y_i$ :

$$X = \sum_i^N V_i \quad \text{и} \quad Y = \sum_i^N Y_i. \quad (21.116)$$

Согласно центральной предельной теореме, распределение случайной величины, представляющей собой сумму  $N$  независимых случайных величин, при  $N \rightarrow \infty$  приближается к нормальному независимо от того, какому распределению подчиняется каждое из слагаемых.

Такая ситуация полностью аналогична рассмотренной в разд. 4.9. Поэтому амплитуда  $A$  поля  $p$  распределена по рэлеевскому закону.

В направлении, где поле складывается из когерентной  $\langle p \rangle$  и некогерентной частей, нужно снова исследовать (21.116). Если положить  $\langle p \rangle = A_0 \exp(i\phi_0)$  и отсчитывать фазу так, что  $\phi_0 = 0$ , то некогерентное поле  $p_s = p - \langle p \rangle$  можно записать в виде суммы большого числа слагаемых:

$$p_s = X - A_0 + iY, \quad X - A_0 = \sum_i^N X_i, \quad Y = \sum_i^N Y_i. \quad (21.117)$$

Используя центральную предельную теорему, запишем функцию плотности вероятности  $W_s(X, Y)$  поля  $p$  в виде

$$W_s(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left[-\frac{(X - A_0)^2 + Y^2}{2\sigma_s^2}\right], \quad (21.118)$$

где  $\sigma_s^2$  — дисперсия  $X - A_0$  и  $Y$ .

Тогда плотность вероятности амплитуды  $A$  определяется формулой (см. (4.80) и (4.81); см. также [174])

$$W_s(A) = \int_0^{2\pi} W_s(X, Y) A d\phi = \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma_s^2}\right) I_0\left(\frac{A_0 A}{\sigma_s^2}\right), \quad (21.119)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя. Это распределение называют распределением Райса — Накагами. Оно было получено Накагами в 1940 г., а затем Райсом в 1944 г. Заметим, что при  $A_0 = 0$  оно переходит в рэлеевское распределение.

Исследовалось также другое распределение, отвечающее случаю, когда дисперсия величины  $X - A_0$  отличается от дисперсии  $Y$ . Такое распределение называют распределением Хойта [30]. При освещении поверхности когерентным светом она кажется ячеистой. Это явление называется пятнистостью; по существу оно определяется рассеянием на шероховатой поверхности. Современное состояние этого вопроса рассматривается в специальном выпуске «Пятнистость в оптике» журнала J. Optical Society of America, November 1976 (хороший обзор дан в работе [159]).

## Дистанционное зондирование и методы обращения

Дистанционное зондирование окружающей среды на основе анализа распространения и рассеяния волн представляет большой интерес, поскольку оно является одним из способов исследования свойств среды и ее влияния на линии связи, а также служит для обнаружения и отождествления объектов, расположенных в различных средах. Например, дистанционное зондирование тропосферы используется для предсказания погоды, целенаправленного изменения погоды, исследования загрязнений, предупреждения о штормах и обеспечения безопасности воздушного сообщения. Полезность и важность дистанционного зондирования обусловлены необходимостью получения данных о среде в обширной области пространства в течение ограниченного промежутка времени. Решение этой задачи обычными методами оказывается либо недопустимо дорогим, либо фактически невозможным [394].

В этой главе мы рассмотрим сначала некоторые аспекты дистанционного зондирования тропосферы. Будут приведены результаты зондирования атмосферной турбулентности и скорости ветра. При дистанционном зондировании ошибки измерения часто существенно возрастают в процессе извлечения нужной информации. Это соответствует так называемой некорректно поставленной задаче, при решении которой необходимо прибегать к специальным методам обращения, позволяющим уменьшить эти ошибки до приемлемой величины. Мы опишем три основных метода обращения: метод сглаживания (регуляризации), метод статистического обращения и метод обращения Бакуса — Гильберта.

Мы рассмотрим также кратко дистанционное зондирование геофизических характеристик земной атмосферы, поверхности океана и земной поверхности, а также подповерхностных сред. Будут затронуты и вопросы дистанционного зондирования атмосфер планет и солнечного ветра. В связи с описанием методов обращения будет рассмотрено дистанционное зондирование распределения частиц по размерам, играющее важную роль в физике атмосферы и океана. Дистанционное зондирование биологических сред представляет собой важную область исследований, однако мы здесь не будем касаться этого вопроса [9, 113, 374].

## 22.1. Дистанционное зондирование тропосферы

Методы дистанционного зондирования тропосферы [90, 91, 224, 394, 567] можно разбить на два вида: пассивные и активные. К пассивным системам зондирования относятся такие системы, которые просто принимают собственное излучение исследуемого объекта, например излучение газа и аэрозольных компонент атмосферы или излучение Солнца, Луны или планет. В качестве примера можно назвать радиометрические методы. К активным системам зондирования относятся такие системы, в которых сигнал излучается передатчиком, взаимодействует со средой или мишенью, а затем принимается и измеряется. Примерами могут служить радиолокаторы, лидары, звуковые локаторы, просвечивание в пределах прямой видимости, радиокартографирование и голографические методы.

При зондировании атмосферы [91] можно выделить два типа взаимодействия: молекулярное и взаимодействие с флуктуациями показателя преломления. В первом из них молекулы атмосферы взаимодействуют с волной, вызывая ее поглощение и рассеяние. Сечения поглощения и рассеяния зависят от свойств данной молекулы, частоты и свойств окружающей среды (давления, температуры). Характеристики рассеяния и поглощения диэлектрических сфер, к которым относятся частицы дымки, тумана и дождевые капли, могут быть точно вычислены на основе теории Ми. Если размер частицы мал по сравнению с длиной волны, то можно использовать формулы рэлеевского рассеяния (гл. 2). По измерениям характеристик рассеяния могут быть найдены распределение частиц по размерам и их показатель преломления. Однако при этом необходимо прибегать к методам обращения. Эти вопросы обсуждаются ниже в разд. 22.4—22.8.

Рассеяние Ми и рэлеевское рассеяние могут иметь место при любых длинах волн. «Флуоресцентное» рассеяние происходит только в том случае, когда частота падающей волны лежит в полосе поглощения частицы. Оно вызывает переход в более высокое энергетическое состояние и излучение на частотах, равных или лежащих ниже, чем исходная частота. Этот случай называется стоксовой флуоресценцией. Излучение на более высоких частотах соответствует так называемой антистоксовой флуоресценции. Комбинационное рассеяние, хотя и является более слабым по сравнению с упомянутыми выше процессами рассеяния, тем не менее оказывается полезным благодаря тому, что оно происходит независимо от частоты падающей волны. Комбинационное рассеяние содержит ряд линий на частотах  $\nu \pm \nu_1$ ,  $\nu \pm \nu_2, \dots$ , где  $\nu$  — частота падающей волны. Нижние частоты называются стоксовыми линиями, а верхние — антистоксовыми линиями (подробнее см. в работе [334]).

Импульсно-доплеровские радиолокаторы могут быть использованы для изучения движения атмосферы [90] (см. также ультразвуковое зондирование течения крови [9]). Поскольку импульсно-доплеровский радиолокатор может измерять фазу, он позволяет оценивать спектр радиальной компоненты скорости частиц и турбулентности в рассеивающем объеме. Кроме того, этот метод дает информацию о сечениях рассеяния, отражательной способности и плотности. Доплеровские радиолокаторы использовались в исследованиях по физике облаков, при оценке систем предупреждения о штормах, а также полей скорости ветра и турбулентности. Система из двух или более доплеровских радиолокаторов используется для триангуляционного определения положения шторма и для разрешения компонент его скорости.

Для исследования турбулентности прозрачного воздуха применялись мощные радиолокаторы и акустические системы зондирования [90]. Лидары (лазерные локаторы) использовались для измерения параметров тропосферного аэрозоля [90]. На основе пассивных радиометрических измерений в микроволновом диапазоне были получены температурные профили в атмосфере, а по спутниковым спектрометрическим измерениям в инфракрасном диапазоне определялось вертикальное распределение водяного пара [90].

Атмосферная турбулентность вызывает флуктуации показателя преломления воздуха, которые в свою очередь приводят к флуктуациям амплитуды и фазы распространяющегося оптического пучка. Поэтому оказывается возможным определение параметров турбулентности по измерениям флуктуаций волны. В следующем разделе мы рассмотрим этот случай в качестве примера дистанционного зондирования и обсудим некоторые известные методы дистанционного зондирования.

Определяемые зондированием параметры турбулентности включают интенсивность турбулентности, характеризуемую структурной характеристикой  $C_n$ , и скорость ветра. Дистанционное зондирование этих параметров можно разбить на два вида: определение их усредненных вдоль всей трассы значений и нахождение их профилей как функции координаты вдоль трассы. В настоящее время исследования в области дистанционного зондирования практически целиком опираются на теорию слабых флуктуаций, поэтому на оптических частотах они охватывают только трассы порядка нескольких километров. На более протяженных трассах необходимо пользоваться теорией сильных флуктуаций. О каких-либо серьезных исследованиях дистанционного зондирования в области сильных флуктуаций в литературе не сообщалось.

## 22.2. Дистанционное зондирование структурной характеристики $C_n$ , усредненной вдоль трассы

Как известно, в условиях развитой турбулентности флуктуации скорости имеют колмогоровский спектр. Некоторые величины, например потенциальная температура и масса водяного пара, переносятся в поле скоростей турбулентности без заметного изменения, поэтому флуктуационные характеристики этих величин тоже подчиняются колмогоровскому спектру. В оптическом диапазоне влияние влажности пренебрежимо мало, поэтому поле флуктуаций температуры, как известно, тоже имеет колмогоровский спектр. Поле показателя преломления  $n$  связано с температурным полем соотношением

$$N = (n - 1) 10^6 = 79P/T, \quad (22.1)$$

где  $P$  — атмосферное давление в миллибарах, а  $T$  — температура в кельвинах. Связь между давлением и температурой определяется процессом переноса тепла в турбулентности. Считая время существования турбулентности малым, этот процесс можно рассматривать как адиабатический; в этом предположении имеем

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\delta T}{T}, \quad (22.2)$$

где  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей ( $\gamma = c_p/c_v = 1,4$  для воздуха). Следовательно, структурная функция показателя преломления  $D_n(r)$  связана со структурной функцией температуры  $D_T(r)$  соотношением

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}, \quad D_T(r) = C_T^2 r^{2/3}, \quad C_n = \left[ \frac{79}{\gamma - 1} \frac{P}{T^2} \cdot 10^{-6} \right] C_T. \quad (22.3)$$

Важно отметить, что при оптическом дистанционном зондировании измеряются флуктуации показателя преломления турбулентности, а не флуктуации поля скоростей. Как указывалось выше, эти две характеристики тесно связаны между собой. Однако в некоторых случаях, например в нейтральной атмосфере, при сильных флуктуациях скорости оптический эффект может быть малым [224].

Усредненная структурная характеристика турбулентности  $C_n$  может быть получена по результатам измерений дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности распространяющейся оптической волны при помощи следующих формул, полученных в гл. 18:

$$\sigma_{\ln I}^2 = \begin{cases} 1,228 k^{7/6} L^{11/6} C_n^2 & (\text{плоская волна}), \\ 0,496 k^{11/6} L^{11/6} C_n^2 & (\text{сферическая волна}), \end{cases} \quad (22.4)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $L$  — длина трассы распространения. В случае волнового пучка имеем

$$\sigma_{\text{ин}J}^2 = 4\sigma_x^2(L, \rho), \quad (22.5)$$

где величина  $\sigma_x^2(L, \rho)$  найдена в гл. 18.

Измерение флуктуаций логарифма интенсивности должно быть проведено с использованием апертуры, малой по сравнению с радиусом корреляции волны, который для плоской и сферической волн приближенно равен  $\sqrt{\lambda L}$ . Для коллимированного волнового пучка радиус корреляции также приближенно равен  $\sqrt{\lambda L}$ , а для сфокусированного пучка он может быть значительно меньше, чем  $\sqrt{\lambda L}$ .

### 22.3. Дистанционное зондирование скорости ветра, усредненной вдоль трассы

В последние годы проводились исследования дистанционного зондирования средней скорости ветра в поперечном направлении по отношению к трассе распространения [182, 227, 311]. В этом разделе мы рассмотрим следующие три метода дистанционного зондирования скорости ветра: а) метод, основанный на измерении частотного спектра; б) метод, основанный на регистрации временной задержки, и в) метод, основанный на измерении наклона корреляционной функции.

а. *Метод, основанный на измерении частотного спектра.* Картина мерцаний, регистрируемая приемником, при наличии у скорости ветра поперечной составляющей перемещается, причем тем быстрее, чем больше скорость ветра. Поэтому следует ожидать, что с увеличением поперечной скорости ветра в частотных спектрах флуктуаций амплитуды и фазы должны появляться компоненты с более высокими частотами. Следовательно, оказывается возможным определение средней скорости ветра по измерению спектра флуктуаций. Наметим здесь следующие три пути нахождения средней скорости: 1) по форме спектра, 2) по отношению спектров на двух частотах и 3) по степени когерентности на двух частотах.

Теоретическая форма спектра флуктуаций уровня такова, что на низких частотах спектр примерно постоянен, а на высоких частотах убывает как  $f^{-8/3}$ . Для плоской и сферической волн эти спектры получены в разд. 19.2 и описываются следующими асимптотическими формулами:

для плоской волны

$$W_{\text{пл}} \rightarrow \begin{cases} 0,8506 (C_n^2/V) k^{2/3} L^{7/3} & \text{при } f \rightarrow 0, \quad (22.6a) \\ 2,192 (C_n^2/V) k^{2/3} L^{7/3} (f/f_0)^{-8/3} & \text{при } f \rightarrow \infty, \quad (22.6b) \end{cases}$$

для сферической волны

$$W_{\text{хсф}} \rightarrow \begin{cases} 0,1905 (C_N^2/V) k^{2/3} L^{7/3} & \text{при } f \rightarrow 0, \quad (22.6\text{в}) \\ 2,192 (C_N^2/V) k^{2/3} L^{7/3} (f/f_0)^{-8/3} & \text{при } f \rightarrow \infty, \quad (22.6\text{г}) \end{cases}$$

где  $f_0 = (V/2\pi)(k/L)^{1/2} = 0,4V/\sqrt{\lambda L}$ , и  $V$  — поперечная скорость ветра.

Спектры, полученные экспериментально, в основном согласуются с формулами (22.6), поэтому их форма и особенно частота  $f_c$ , при которой эти две асимптотики пересекаются, дают хороший способ определения скорости ветра. Заметим, что частота  $f_c$  в случае плоской волны равна  $1,43 f_0$ , а в случае сферической волны —  $2,60 f_0$ .

Этот метод требует измерений флуктуаций на одной рабочей частоте. Однако на практике экспериментальное определение точки пересечения  $f_c$  затруднительно. Если излучить две волны с различными частотами, то можно получить дополнительную информацию.

Можно произвести сравнение спектров на двух различных частотах  $k_1$  и  $k_2$  и взять их отношение. Из формул (22.6) следует

$$\frac{W_{\text{х}}(k_2)}{W_{\text{х}}(k_1)} = \begin{cases} (k_2/k_1)^{2/3} & \text{при } f \rightarrow 0, \quad (22.7\text{а}) \\ (k_2/k_1)^2 & \text{при } f \rightarrow \infty. \quad (22.7\text{б}) \end{cases}$$

Общий характер зависимости этого отношения от частоты показан на рис. 22.1. Частоты  $f_1$  и  $f_2$ , отвечающие точкам пересечения, определяются формулами:

для плоской волны

$$f_i = 1,43 (V/2\pi)(k_i/L)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \quad (22.8\text{а})$$

для сферической волны

$$f_i = 2,60 (V/2\pi)(k_i/L)^{1/2}, \quad i = 1, 2. \quad (22.8\text{б})$$

Поэтому оказывается возможным определить скорость ветра  $V$  путем измерения спектров при  $k_1$  и  $k_2$  и вычисления отношения и частот  $f_i$ . Это было сделано для микроволнового диапазона [181].

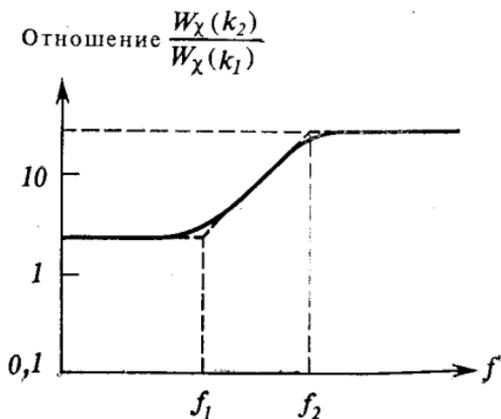


Рис. 22.1. Типичный вид отношения спектров на двух различных частотах;  $f_1$  и  $f_2$  — точки пересечения.

Для определения скорости ветра можно также воспользоваться корреляционными свойствами флуктуаций на двух различных частотах. При анализе случайных процессов используется квадрат нормированного взаимного спектра

$$[W_{\chi}(\omega, k_1, k_2)]^2 / [W_{\chi}(\omega, k_1) W_{\chi}(\omega, k_2)],$$

называемый степенью когерентности [32]. При  $\omega \rightarrow 0$  степень когерентности стремится к следующему пределу:

$$\frac{[W_{\chi}(\omega, k_1, k_2)]^2}{W_{\chi}(\omega, k_1) W_{\chi}(\omega, k_2)} \rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{4/3} \left[ \left(\frac{1+k_1/k_2}{2}\right)^{4/3} - \left(\frac{1-k_1/k_2}{2}\right)^{4/3} \right]^2, \quad (22.9)$$

где  $k_1 < k_2$ .

Степень когерентности остается почти постоянной на уровне, задаваемой формулой (22.9), в диапазоне частот от нуля до некоторой частоты, определяемой скоростью ветра, а затем падает

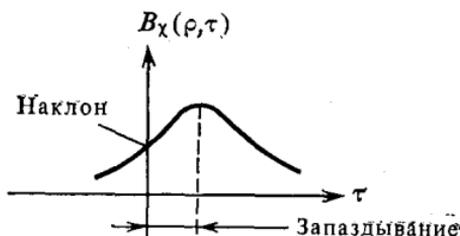


Рис. 22.2. Методы, основанные на измерении временного запаздывания и наклона корреляционной функции.

до пренебрежимо малого значения [181, 248]. Типичное поведение степени когерентности показано на рис. 19.3. Следовательно, скорость ветра может быть определена по измерению взаимного спектра.

**б. Метод, основанный на регистрации времени запаздывания.** Если два приемника расположить вдоль линии, перпендикулярной направлению распространения и параллельной скорости ветра (рис. 22.2), то флуктуационные характеристики волны будут смещаться в направлении ветра. При этом флуктуации в приемнике *A* в момент времени *t* оказываются смещенными по отношению к флуктуациям в приемнике *B*, взятым в запаздывающий момент времени  $t + \tau$ . Поэтому можно ожидать, что при некотором запаздывании  $\tau$  флуктуации в приемниках *A* и *B* будут

сильно коррелированы. Эта ситуация показана на рис. 22.2. Время запаздывания  $\tau$ , отвечающее максимуму корреляции, связано со скоростью ветра и приближенно равно радиусу корреляции поля, деленному на скорость ветра. Радиус корреляции приближенно равен  $\sqrt{\lambda L}$ .

Общее выражение для корреляционной функции флуктуаций уровня  $\chi$  приведено в гл. 18. В случае сферической волны оно принимает вид

$$B_{\chi}(\rho, \tau) = 8\pi^2 k^2 \int_0^L d\eta \int_0^{\infty} \kappa d\kappa J_0\left(\kappa \left| \frac{\rho\eta}{L} - V\tau \right|\right) \times \\ \times \sin^2 \left[ \frac{\eta(L-\eta)}{2kL} \kappa^2 \right] \Phi_n(\kappa, \eta). \quad (22.10)$$

Используя колмогоровский спектр

$$\Phi_n(\kappa, \eta) = 0,033 C_n^2(n) \kappa^{-11/3}, \quad (22.11)$$

можно найти форму корреляционной функции (22.10) и сравнить ее с экспериментальными данными. Определяя время запаздывания для максимума, можно вычислить скорость ветра. Заметим, что формула (22.11) соответствует предположению  $l_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll \ll L_0$ , где  $l_0$  и  $L_0$  — внутренний и внешний масштабы турбулентности, так что спектр отвечает инерционному интервалу, и интенсивность турбулентности определяется структурной характеристикой  $C_n$ . Отметим также, что корреляционная функция  $B_{\chi}$  фактически совпадает с ковариационной функцией, так как среднее значение  $\langle \chi \rangle$  предполагается здесь равным нулю.

Было найдено [226], что вариации  $C_n(\eta)$  и скорости ветра  $V(\eta)$  приводят к заметным искажениям формы корреляционной функции и тем самым вносят значительную ошибку. Между тем наклон корреляционной функции при  $\tau = 0$ , по-видимому, менее чувствителен к этим вариациям, и поэтому может оказаться более предпочтительной характеристикой.

*в. Метод, основанный на измерении наклона корреляционной функции.* Наклон корреляционной функции при  $\tau = 0$  определяется выражением

$$\left. \frac{\partial B_{\chi}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 8\pi^2 k^2 \int_0^L d\eta \int_0^{\infty} \kappa^2 d\kappa V J_1\left(\kappa \frac{\rho\eta}{L}\right) \sin^2 \left[ \frac{\eta(L-\eta)}{2kL} \kappa^2 \right] \Phi_n(\kappa, \eta). \quad (22.12)$$

Оказалось, что предпочтительнее использовать разнесение  $\rho = 0,33\sqrt{\lambda L}$ , поскольку при этом в наклон (22.12) входят наиболее равномерно взвешенные вдоль трассы значения  $C_n$  и  $V$ .

Скорость ветра, измеренная оптическим методом, сравнивалась с усредненными вдоль трассы данными нескольких анемометрических измерений, и было получено хорошее согласие.

## 22.4. Дистанционное зондирование профиля структурной характеристики и некорректно поставленная задача

До сих пор мы рассматривали дистанционное зондирование усредненных вдоль трассы распространения структурной характеристики и скорости ветра. Предположим, что мы хотим найти профиль структурной характеристики как функцию положения вдоль трассы при помощи измерений флуктуационных характеристик волны. Очевидно, что для нахождения этого профиля требуется гораздо больше данных, чем в случае определения среднего значения. Число приемников, естественно, должно возрасти. Чтобы проиллюстрировать этот факт, рассмотрим корреляционную функцию (22.10). Используя (22.11), запишем

$$B_x(\rho, \tau) = \int d\eta K(\rho, \tau, \eta) C_n^2(\eta), \quad (22.13)$$

где

$$K(\rho, \tau, \eta) = 8\pi^2 k^2 (0,033) \int_0^\infty \kappa^{-8/3} J_0\left(\kappa \left| \frac{\rho\eta}{L} - V\tau \right|\right) \times \\ \times \sin^2\left[\frac{\eta(L-\eta)}{2kL} \kappa^2\right] d\kappa.$$

Проведем теперь серию измерений и получим  $M$  различных значений корреляционной функции  $B_x(\rho_i, \tau_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, M$ . Заменяя приближенно интеграл в (22.13) рядом, получим

$$B_x(\rho_i, \tau_i) = \sum_{j=1}^N a(\rho_i, \tau_i, \eta_j) C_n^2(\eta_j), \quad (22.14)$$

где  $a(\rho_i, \tau_i, \eta_j) = W_j K(\rho_i, \tau_i, \eta_j)$  и  $W_j$  — соответствующая весовая функция, зависящая от типа квадратурной формулы, используемой при переходе от интеграла (22.13) к ряду (22.14).

Запишем формулу (22.14) в матричной форме

$$g = Af, \quad (22.15)$$

где  $g = (g_i)$  — матрица-столбец размера  $M \times 1$ ,  $A = (a_{ij})$  — прямоугольная матрица размера  $M \times N$ ,  $f = (f_j)$  — матрица-столбец размера  $N \times 1$  и

$$g_i = B_x(\rho_i, \tau_i), \quad a_{ij} = W_j K(\rho_i, \tau_i, \eta_j), \quad f_j = C_n^2(\eta_j).$$

В формуле (22.15)  $g_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) — данные, получающиеся из  $M$  различных измерений,  $(a_{ij})$  — известная матрица, а  $f_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) — неизвестные величины.

Вообще говоря, число измерений  $M$  должно быть по крайней мере равно числу неизвестных  $N$ , а обычно  $M > N$ . Простейшим способом получения наилучшего возможного значения неизвестной  $f$  из измеренных данных  $g$  является метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов состоит в нахождении такого значения  $f$ , для которого квадрат разности  $g - Af$  оказывается минимальным:

$$|g - Af| = \min. \quad (22.16)$$

Решение, удовлетворяющее условию (22.16), хорошо известно [128]:

$$f = (A^+A)^{-1}A^+g, \quad (22.17)$$

где  $A^+$  — матрица, комплексно-сопряженная транспонированной матрице  $A$ . При  $M = N$  решение (22.17) сводится к обычному обращению

$$f = A^{-1}g. \quad (22.18)$$

Для многих задач дистанционного зондирования, как будет показано ниже, формулы (22.17) или (22.18) не дают требуемого решения, так как малые ошибки измерений  $g$  приводят к очень большим ошибкам определения неизвестных величин. Для иллюстрации рассмотрим формулу (22.17) и предположим, что в определении  $g$  имеется некоторая ошибка  $\delta g$ , а результирующая ошибка в  $f$  есть  $\delta f$ . Тогда имеем

$$\delta f = (A^+A)^{-1}A^+\delta g. \quad (22.19)$$

В качестве относительной ошибки  $\Delta_f$  возьмем

$$\Delta_f = \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad (22.20)$$

где  $\|f\|$  — норма  $f$ , определенная как

$$\|f\| = \max |f_j|. \quad (22.21)$$

Используя (22.19), получаем

$$\Delta_f = \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} < \|(A^+A)^{-1}\| \|A^+\| \frac{\|\delta g\|}{\|g\|}, \quad (22.22)$$

где  $\|A\|$  — норма матрицы  $A$ , определенная выражением

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad (22.23)$$

так что максимальное значение относительной ошибки  $\Delta_{f \max}$  есть

$$\Delta_{f \max} = \|(A^+A)^{-1}\| \|A^+\| \Delta, \quad (22.24)$$

где  $\Delta_g$  — относительная ошибка  $g$ , равная  $\|\delta g\|/\|g\|$ . Во многих задачах дистанционного зондирования элементы  $a_{ij}$  не очень сильно отличаются друг от друга, поэтому норма  $\|(A+A)^{-1}\|$  может принимать очень большие значения и часто достигает значений порядка 10 или 10 в некоторой степени. Такая ситуация называется неустойчивой, а сама задача — «некорректно поставленной» [129]. С математической точки зрения это является результатом того, что детерминант  $|A+A|$  принимает очень малое значение. Это эквивалентно также большому отношению максимальной величины  $\mu_{\max}$  к минимальной величине  $\mu_{\min}$  собственных значений  $A+A$ . Обычно неустойчивость возрастает с ростом  $\mu_{\max}/\mu_{\min}$ .

В качестве примера рассмотрим простую задачу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (22.25)$$

где  $|\varepsilon| \ll 1$ . Точное решение уравнения  $g = Af$  есть

$$f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 + \varepsilon} \\ \frac{1}{2 + \varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (22.26)$$

Введем теперь в измеренные данные некоторую ошибку  $\delta g$  и оценим ошибку  $\delta f$  решения  $f$ . Заметим, что  $\|A\| \sim 2$ . Кроме того, поскольку

$$A^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon + 2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 - \varepsilon \\ -1 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.27)$$

получаем  $\|A^{-1}\| \sim |\varepsilon|^{-1}$ . Поэтому из формулы (22.24) находим

$$\Delta_{f_{\max}} = 2|\varepsilon|^{-1} \Delta_g. \quad (22.28)$$

Это означает, что при  $|\varepsilon| = 10^{-3}$  ошибка в 1% в данных измерений  $g$  увеличивается до ошибки в 2000% в определении неизвестной величины  $f$ , если просто использовать соотношение  $f = A^{-1}g_d$ . Это можно увидеть также, положив

$$g_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta g_1$  и  $\Delta g_2$  порядка  $\pm 10^{-2}$ . Тогда имеем

$$f = A^{-1}g_d \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix},$$

где  $|\Delta f_1| \sim |\Delta f_2| \sim 10$ .

С проблемой неустойчивости столкнулся Шэн [310], который, чтобы избежать этой трудности, использовал только ограниченное число неизвестных. Однако в общем случае необходим метод, позволяющий выполнять устойчивое обращение уравнения (22.15). Этот вопрос обсуждается в следующих разделах.

Упомянем здесь еще несколько методов дистанционного зондирования свойств атмосферы. Клиффорд и др. [75] сообщили о развитии метода, использованного Лоуренсом и др. [226]. Они рассмотрели метод, в котором используется естественное окружающее освещение какого-либо экрана, например горного склона или облака. Следовательно, этот метод не требует таких активных световых источников, как лазер.

Недавно были предложены два многообещающих метода дистанционного зондирования структурной характеристики и скорости ветра: метод пересекающихся пучков и апертурный метод пространственной фильтрации.

*а. Метод пересекающихся пучков* [123]. Ванг и др. [370] предложили использовать два источника и два приемника так, чтобы два пучка пересекались в некоторой точке трассы. Измерения взаимной корреляции между выходами двух приемников позволяют найти характеристики турбулентности в выбранной точке пересечения пучков.

*б. Апертурный метод пространственной фильтрации.* Ли [233] предложил метод, основанный на том, что если излучающая и приемная апертуры берутся с надлежащим весом (или с пространственной фильтрацией), то выход может быть сделан чувствительным к одному определенному пространственному волновому числу, которое в свою очередь выделяет одно определенное положение на трассе. Он провел простые эксперименты с использованием линзы Френеля с апертурой  $0,5 \times 0,6$  м, поперек которой были нанесены вертикальные полосы из черной бумаги шириной 11 мм с интервалом 11 мм. Эти полосы образовывали пространственный фильтр. Используя аналогичную линзу в качестве приемной апертуры, он получил значения скорости ветра, хорошо согласующиеся с анемометрическими измерениями [234, 272].

## 22.5. Обратная задача

В предыдущем разделе было указано, что проблема дистанционного зондирования профиля структурной характеристики может привести к некорректно поставленной задаче. Многие другие задачи дистанционного зондирования также являются некорректно поставленными. Примером может служить проблема извлечения геофизической информации о внутренней структуре земной коры из конечного набора данных измерений [7]. Еще одним

примером является задача определения профиля температуры атмосферы из радиометрических измерений [90].

Задача определения распределения частиц по размерам из измерений рассеяния также относится к числу некорректно поставленных (разд. 22.8). Рассеянная интенсивность  $g$  может быть измерена как функция длины волны  $\lambda$  и угла рассеяния  $\theta$ . Рассеянная интенсивность связана с распределением частиц по размерам  $n(D)$  и дифференциальным сечением рассеяния  $\sigma$ , которое является функцией угла рассеяния  $\theta$ , длины волны  $\lambda$  и размера  $D$ . Тогда можно записать

$$g(\lambda, \theta) = \int_0^{\infty} k(\lambda, \theta, D) f(D) dD, \quad (22.29)$$

где функция  $K(\lambda, \theta, D)$  пропорциональна дифференциальному сечению  $\sigma(\lambda, \theta, D)$  и  $f(D) = n(D)$ .

Можно произвести серию измерений для различных  $\theta_i$  и  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) и, следуя процедуре разд. 22.4, записать (22.29) в виде

$$g = Af. \quad (22.30)$$

Такие задачи часто обладают неустойчивостью, и в следующих разделах мы опишем три метода обращения, которые обычно используются для получения устойчивых решений.

## 22.6. Метод сглаживания (регуляризации)

Для обращения некорректно поставленной задачи (22.15) использовалось несколько методов. В данном разделе мы кратко опишем метод, разработанный Филлипсом [286] и Тихоновым [342]. Прекрасный обзор дан в статье [346], а также в работах [94, 260].

Рассмотрим некорректно поставленную задачу

$$g = Af. \quad (22.31)$$

На практике истинное значение  $g$  никогда не известно, так как оно всегда содержит некоторую экспериментальную ошибку  $n$ . Поэтому измеренные данные  $g_a$  можно представить в виде

$$g_a = g + n, \quad (22.32)$$

где  $g_a$  — известная матрица размера  $M \times 1$ , а  $n$  — матрица экспериментальных ошибок размера  $M \times 1$ .

Рассмотрим процедуру минимизации следующей положительной величины:

$$U = (g_a - Af)^+(g_a - Af) + \gamma_1 (f - f_0)^+(f - f_0) + \gamma_2 (Bf)^+(Bf), \quad (22.33)$$

где индекс  $\dagger$  обозначает комплексное сопряжение и транспонирование,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — положительные константы,  $f_0$  — «пробная» функция, а  $B$  — матрица размера  $M \times M$ , описывающая некоторое сглаживание  $f$ . Первый член в (22.33) является мерой точности  $f$ , даваемой формулой (22.31). Заметим, что если экспериментальных ошибок нет, то  $g_d = g$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $U = 0$  — минимальное значение  $U$  и решением является  $f = A^{-1}g$ . Второй член в (22.33) указывает на отклонение  $f$  от пробной функции  $f_0$ , а третий член характеризует отклонение  $f$  от идеального сглаживания, соответствующего  $(Bf) = 0$ . Обычно  $(Bf)$  описывает первую или вторую производную [90].

Рассмотрим случай  $\gamma_2 = 0$ . Дифференцируя  $U$  по  $f$ , находим

$$f = (A^+ A + \gamma_1 I)^{-1} (A^+ g_d + \gamma_1 f_0), \tag{22.34}$$

где  $I$  — квадратная матрица размера  $N \times N$ .

Выбор  $\gamma_1$  должен быть сделан так, чтобы обеспечить разумный компромисс между первым и вторым членами в (22.33). Если  $\gamma_1$  мало, то преобладает первый член, и решение является сильно осциллирующим. Если  $\gamma_1$  велико, то преобладает второй член, и решение получается сильно сглаженным. Дальнейшие подробности можно найти в работе [94].

В случае  $\gamma_1 = 0$  решение имеет вид

$$f = (A^+ A + \gamma_2 B^+ B)^{-1} A^+ g_d. \tag{22.35}$$

Матрица  $B$  может быть взята в виде

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$Bf$  представляет собой дискретный аналог второй производной  $f$ . Более подробно этот метод изложен в работах [71, 90].

## 22.7. Статистический метод обращения

Во многих задачах дистанционного зондирования встречающиеся ошибки носят статистический характер, поэтому более естественно рассматривать задачу обращения с учетом статистической природы экспериментальных ошибок и другой статистиче-

ской информации. В этом разделе мы опишем элементы теории статистического обращения [109, 129, 171, 326].

Рассмотрим некорректно поставленную задачу (22.31).

Измеренные данные  $g_d$  имеют вид (22.32)

$$g_d = g + n,$$

где  $g_d$  и  $n$  — матрицы размера  $M \times 1$ . При этом могут быть известны статистические свойства матрицы экспериментальных ошибок  $n$ .

Подставляя (22.32) в (22.31), получаем

$$g_d = Af + n. \quad (22.36)$$

Соотношение (22.36) можно рассматривать как стохастическое уравнение, а величины  $g_d$ ,  $f$  и  $n$  — как случайные функции с нулевыми средними значениями:

$$\langle g_d \rangle = 0, \quad \langle f \rangle = 0, \quad \langle n \rangle = 0. \quad (22.37)$$

Значения  $g_d$ ,  $f$  и  $n$ , полученные в одном конкретном эксперименте, рассматриваются, таким образом, как одна из реализаций ансамбля.

Задача обращения может быть сформулирована следующим образом: найти матрицу  $B$  размера  $N \times M$ , такую, чтобы  $Bg_d$  было насколько возможно близким к искомой неизвестной функции  $f$ . Математически эта близость может быть сформулирована как минимизация среднего квадрата скалярного произведения  $f - Bg_d$  и некоторого произвольного вектора  $a_1$  размерности  $N \times 1$ :

$$\langle |f - Bg_d + a_1|^2 \rangle = \min. \quad (22.38)$$

Чтобы найти решение, положим  $(Bg_d + a_1) = g_d^+ B + a_1$  и  $B + a_1 = a_2$ . Тогда левая часть (22.38) запишется как

$$\langle |f + a_1 - g_d^+ a_2|^2 \rangle = a_1^+ R_{ff} a_1 - a_2^+ R_{gf} a_1 - a_1^+ R_{fg} a_2 + a_2^+ R_{gg} a_2, \quad (22.39)$$

где  $R_{ff} = \langle ff^+ \rangle$  — матрица размера  $N \times N$ , характеризующая корреляцию и называемая корреляционной матрицей. Аналогично  $R_{gf} = \langle g_d f^+ \rangle$ ,  $R_{fg} = \langle f g_d^+ \rangle = R_{gf}^+$  и  $R_{gg} = \langle g_d g_d^+ \rangle$ .

Перепишем правую часть (22.39) в виде

$$(a_2 - R_{gg}^{-1} R_{gf} a_1)^+ R_{gg} (a_2 - R_{gg}^{-1} R_{gf} a_1) + a_1^+ (R_{ff} - R_{gf}^+ R_{gg}^{-1} R_{gf}) a_1. \quad (22.40)$$

Если  $R_{gg}$  положительно определена, то первый член всегда неотрицателен. Кроме того, матрица во втором слагаемом, стоящая между  $a_1^+$  и  $a_1$ , является эрмитовой, поэтому второй член всегда положителен. Следовательно, эту величину можно минимизиро-

вать путем выбора  $a_2$  таким образом, чтобы первый член обращался в нуль. Это дает

$$a_2 = B^+ a_1 = R_{gg}^{-1} R_{gf} a_1. \quad (22.41)$$

Отсюда находим требуемую матрицу  $B$ :

$$B = R_{gf}^+ (R_{gg}^-)^{-1}. \quad (22.42)$$

Заметим теперь, что

$$R_{gf}^+ = \langle f g_d^+ \rangle = \langle f (A f + n)^+ \rangle = R_{ff} A^+ + R_{fn}, \quad (22.43)$$

$$R_{gg} = \langle (A f + n) (A f + n)^+ \rangle = A R_{ff} A^+ + R_{nf} A + A R_{fn} + R_{nn}, \quad (22.44)$$

где  $R_{fn} = \langle f n^+ \rangle$  — корреляционная матрица размера  $N \times M$ , а  $R_{nn} = \langle n n^+ \rangle$  — корреляционная матрица размера  $M \times M$ .

Подставляя (22.43) и (22.44) в (22.42), находим окончательное решение

$$f = B g_d, \quad B = (R_{ff} A^+ + R_{fn}) (A R_{ff} A^+ + R_{fn}^+ A^+ + A R_{fn} + R_{nn})^{-1}. \quad (22.45)$$

Во многих прикладных задачах ошибки измерений  $n$  и неизвестная величина  $f$  независимы, так что  $R_{fn} = 0$ , и формула (22.45) принимает вид

$$B = (R_{ff} A^+) (A R_{ff} A^+ + R_{nn})^{-1}. \quad (22.46)$$

Максимальное значение  $\Delta_f$  max относительно ошибки определения  $f$  связано с относительной ошибкой  $\Delta_n$  измерений соотношением

$$\Delta_{f \max} = \|A\| \|B\| \Delta_n, \quad (22.47)$$

где  $\Delta_f = \|\delta f\| / \|f\|$  и  $\Delta_n = \|n\| / \|g_d\|$ . Норма  $B$ , определяемая формулами (22.45) или (22.46), обычно очень мала по сравнению с нормой  $A^{-1}$ , поэтому ошибка  $\Delta_f$  max сравнима по величине с экспериментальной ошибкой  $\Delta_n$ , и, следовательно, эта процедура дает устойчивое решение.

Как видно из (22.46), эффективность этой процедуры зависит от выбора корреляционных матриц  $R_{ff}$  и  $R_{nn}$ . Ясно, что если что-либо известно о статистических свойствах неизвестной  $f$  и экспериментальной ошибки  $n$ , то при построении корреляционных матриц  $R_{ff}$  и  $R_{nn}$  можно воспользоваться этой информацией. При этом, очевидно, чем больше нам известно о свойствах  $f$  и  $n$ , тем лучше мы можем выбрать  $R_{ff}$  и  $R_{nn}$  и тем самым получить более точное решение.

В качестве примера рассмотрим задачу, заданную в (22.25) и (22.26). Предположим, что значение элементов  $f$  порядка еди-

ницы (точное их значение  $1/(2 + \varepsilon)$ ). Для матрицы  $R_{ff}$  примем следующий вид:

$$R_{ff} = \begin{pmatrix} \sigma_f^2 & 0 \\ 0 & \sigma_f^2 \end{pmatrix}, \quad (22.48)$$

где  $\sigma_f^2$  порядка единицы, а корреляция между элементами  $f$  (недиагональные члены) считается пренебрежимо малой. Экспериментальную ошибку по-прежнему положим равной 1%. Поэтому возьмем

$$R_{nn} = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (22.49)$$

где  $\sigma_n^2 = 10^{-2}$ , и, кроме того, корреляция шумов (недиагональные члены) считается пренебрежимо малой. Подставляя (22.48) и (22.49) в (22.46), получаем

$$B \approx \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.50)$$

Ошибка определения  $\Delta f$ , найденная из  $Bg_d$ , оказывается того же порядка, что и ошибка измерений  $\Delta_g$ . Следовательно,  $Bg_d$  дает устойчивое решение.

## 22.8. Метод обращения Бакуса — Гильберта

Метод регуляризации (сглаживания), рассмотренный в разд. 22.6, для получения устойчивого решения требует разумного выбора параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Статистический метод, описанный в разд. 22.7, опирается на знание статистических свойств ошибок измерений и неизвестных величин. Эти требования не относятся к числу серьезных недостатков. Фактически во многих прикладных задачах эти требования оказываются легко выполнимыми. В 1970 г. Бакус и Гильберт предложили метод обращения, не требующий априорной информации о неизвестной функции. Кроме того, он позволяет найти разрешение (уширение) и точность (дисперсию) как функции ошибки измерения и тем самым позволяет управлять выбором уширения и дисперсии. В этом разделе мы дадим краткое описание этого метода [7, 71, 290, 375].

Рассмотрим задачу обращения (22.29) и запишем ее в виде

$$g_i = \int_a^b k_i(r) f(r) dr, \quad (22.51)$$

где  $f(r)$  — неизвестная функция, которую необходимо найти,  $K_i(r)$  — известная функция, а  $g_i$  — величины, подлежащие измерению. Из  $N$  измерений получаем данные наблюдений  $g_{di}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Поскольку истинные значения  $g_i$  никогда не известны, а  $g_{di}$  всегда содержит некоторые экспериментальные ошибки (шум), запишем

$$g_{di} = g_i + n_i, \quad (22.52)$$

где  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) — экспериментальные ошибки. Предположим, что среднее значение  $\langle n_i \rangle$  равно нулю и известна корреляционная матрица ошибок<sup>1)</sup>

$$S_n = \langle nn^+ \rangle, \quad (22.53)$$

где  $n = (n_i)$  — матрица-столбец размера  $N \times 1$ , а  $n^+$  — транспонированная матрица.

Попытаемся найти решение  $f(r)$  для  $N$  измеренных величин  $g_{di}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Очевидно, что нельзя надеяться на определение  $f(r)$  по конечному набору величин  $g_{di}$ . Однако можно надеяться, что удастся найти среднее взвешенное значение  $f$  для различных  $r$  с весовой функцией, выделяющей некоторую точку  $r_0$ , в которой требуется оценить  $f(r_0)$ . Для нахождения локального среднего значения  $f(r)$  вблизи точки  $r_0$  воспользуемся следующей процедурой усреднения:

$$\langle f(r_0) \rangle = \int_a^b A(r_0, r) f(r) dr, \quad (22.54)$$

где  $A(r_0, r)$  называется усредняющим ядром. Функция  $A(r_0, r)$  мала всюду, кроме окрестности точки  $r = r_0$ , и удовлетворяет условию

$$\int_a^b A(r_0, r) dr = 1. \quad (22.55)$$

В идеальном случае  $A(r_0, r)$  должна быть дельта-функцией  $A(r_0, r) = \delta(r_0 - r)$ . Тогда  $\langle f(r_0) \rangle$  в точности воспроизводит  $f(r)$ . Разумеется, в реальных задачах это невозможно.

В методе Бакуса — Гильберта используется усредняющее ядро вида

$$A(r_0, r) = \sum_{i=1}^N a_i(r_0) K_i(r), \quad (22.56)$$

<sup>1)</sup> Матрица  $S_n$  тождественна матрице  $R_{nn}$  из предыдущего раздела. Здесь используется общепринятое обозначение.

где  $K_i(r)$  — известная функция, входящая в (22.51), а  $a_i(r_0)$  — константа, которая должна выбираться в соответствии с требованием, чтобы  $A(r_0, r)$  была подобна дельта-функции. Подставляя (22.56) в (22.54), получаем

$$\langle f(r_0) \rangle = \sum_{i=1}^N a_i(r_0) g_i. \quad (22.57)$$

Заметим, что если бы  $A(r_0, r)$  была дельта-функцией, то (22.57) было бы точно равно  $f(r)$ . На практике  $A(r_0, r)$  никогда не является дельта-функцией, а  $g_i$  никогда не известны. Вместо этого известны только данные измерений  $g_{di}$ . Запишем

$$\langle f(r_0) \rangle_d = \sum_{i=1}^N a_i(r_0) g_{di}; \quad (22.58)$$

очевидно, это равенство не является точным. Однако при надлежащем выборе  $a_i(r_0)$  формула (22.58) должна давать разумное в некотором смысле приближение. В качестве меры точности такого приближения используем две величины: расхождение и дисперсию.

Расхождение определяется как

$$s(r_0) = 12 \int_a^b (r - r_0)^2 A^2(r_0, r) dr, \quad (22.59)$$

Константа здесь выбрана так, чтобы при прямоугольной форме функции  $A(r_0, r)$  с высотой  $l^{-1}$  и шириной  $l$ , сосредоточенной вблизи  $r_0$ , получить  $s(r_0) = l$ . Подставив (22.56) в (22.59), найдем

$$s(r_0) = a^+ S a, \quad (22.60)$$

где  $a = (a_i(r_0))$  — матрица-столбец размера  $N \times 1$ , а  $S$  — матрица размера  $N \times N$  с элементами

$$S_{ij}(r_0) = 12 \int_a^b (r - r_0)^2 K_i(r) K_j(r) dr. \quad (22.61)$$

Выражение (22.60) определяет расхождение для заданного  $a = (a_i)$ .

Рассмотрим теперь дисперсию  $\sigma^2$ . Из формул (22.57) и (22.58) находим, что ошибка определения неизвестной функции  $\Delta_f = \langle f(r_0) \rangle_d - \langle f(r_0) \rangle$  выражается через ошибки измерений (шум)  $n_i$  в виде

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^N a_i(r_0) n_i. \quad (22.62)$$

Поэтому для дисперсии  $\sigma^2(r_0)$  имеем

$$\delta^2(r_0) = \langle \Delta_f^2 \rangle = a^+ S_n a, \quad (22.63)$$

где  $S_n$  — корреляционная матрица размера  $N \times N$  (22.53).

Можно ожидать, что для заданного шума  $S_n$  при малом расхождении  $s(r_0)$  дисперсия  $\sigma^2(r_0)$  может оказаться большой. Бакус и Гильберт показали, что это действительно так. Иными словами, повышение точности (уменьшение дисперсии) достигается только за счет ухудшения разрешения (увеличения расхождения). Это означает, что необходимо выбирать  $a_i(r_0)$  таким образом, чтобы для данной задачи можно было уменьшить как расхождение, так и дисперсию, и в то же время достичь компромисса между точностью и разрешением.

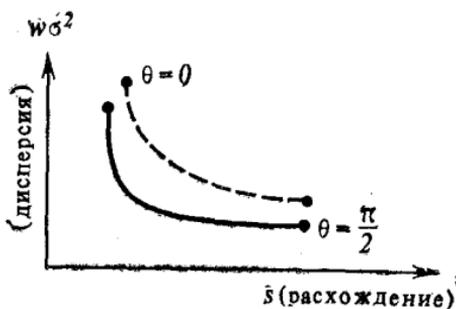


Рис. 22.3. Кривая баланса для различных ошибок измерений. Сплошная кривая соответствует меньшим значениям ошибок по сравнению с пунктирной кривой.

Соответствующее решение, полученное Бакусом и Гильбертом, может быть представлено в виде

$$a = \frac{W^{-1}U}{U + W^{-1}U}. \quad (22.64)$$

Здесь  $U = (U_i)$  — матрица-столбец размера  $N \times 1$ , а  $W$  — матрица размера  $N \times N$ , определяемые выражениями

$$U_i = \int_a^b K_i(r) dr, \quad W = S \cos \theta + \omega S_n \sin \theta,$$

где  $\omega$  — некоторая константа. Параметр  $\theta$ , лежащий в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , описывает соотношение между расхождением и дисперсией. Например,  $\theta = 0$  соответствует минимальному расхождению и максимальной дисперсии, а  $\theta = \pi/2$  отвечает максимальному расхождению и минимальной дисперсии. Это соотношение может быть изображено в виде типичной «кривой баланса», показанной на рис. 22.3. Константа  $\omega$  должна быть выбрана так, чтобы  $s$  и  $\omega\sigma^2$  были приблизительно одного порядка. При  $a_i$ , взятых в соответствии с формулой (22.64), выражение (22.58) дает окончательное решение.

Проводилось сравнение метода Бакуса — Гильберта с другими методами [71]. Если неизвестная функция  $f(r)$  априори

должна быть плавной функцией, то метод сглаживания (Филлипса — Туоми) оказывается более устойчивым по отношению к ошибкам определения  $g$ . Однако метод Бакуса — Гильберта не требует информации о неизвестной функции  $f(r)$  и дает меру точности получаемого решения, характеризуемую расхождением и дисперсией. Следует отметить, что, поскольку усредняющее ядро (22.56) должно быть подобно дельта-функции, для подавления  $A(r_0, r)$  в точках  $r$ , отличных от  $r_0$ , требуется некоторое число членов  $N$ . Это число  $N$  может несколько превышать число осцилляций функции  $K(r)$ . Влияние числа измерений и их ошибок на разрешение рассмотрено в работе [375].

## 22.9. Дистанционное зондирование геофизических объектов

В разд. 22.1—22.3 рассмотрены некоторые аспекты дистанционного зондирования в тропосфере. В этом разделе мы кратко перечислим другие задачи дистанционного зондирования.

Таблица 22.1

Частота	Измерения	Параметры океана
Поверхностная волна СВ- и КВ-диапазонов	Доплеровский сдвиг в спектре сигнала	Высота волн и направление их распространения, течения, приливы и отливы
Пространственная волна КВ-диапазона	Спектр рассеянного сигнала	То же, но эффекты наблюдаются во втором порядке по высоте волн
СВЧ	Двухчастотная корреляция и фазовые измерения	Короткие гравитационные волны, налагающиеся и взаимодействующие с более длинными волнами
Микроволновый диапазон	Высотометрия (обратное рассеяние)	Несимметричные и негауссовы спектры высоты волн, средний уровень моря, приливы и отливы и т. д.
	Прием рассеянного излучения (около зеркального направления)	Капиллярные волны и наличие сильной зависимости от скорости ветра
	Прием рассеянного излучения (квазизеркальное рассеяние)	Асимметрия и негауссовость наклонов волны
	Радиометрия	Температура поверхности, распределение пены и состояние морской поверхности

В последние годы велись активные исследования по дистанционному зондированию морской поверхности [365—367]. Баррик систематизировал их (табл. 22.1). К другим примерам дистанционного зондирования океана относятся обнаружение нефтяных загрязнений и определение типов льда [216, 217, 361].

Тепловое излучение и радиометрические измерения могут быть использованы для зондирования внутренней структуры земной коры, а также для определения ослабления в дожде [19, 112, 169, 324, 345] (эффекты многократного рассеяния при радиометрических измерениях ослабления в дожде рассмотрены в работе [403]). Проведены обширные исследования радиолокационного отражения от растительных покровов [101, 354]. Укажем также на электромагнитную геофизическую разведку [8, 305]. Кроме того, при дистанционном зондировании параметров турбулентности атмосфер планет применялся метод радиопокрытий [382, 383, 385, 387, 585], а при исследовании свойств солнечного ветра использовались частотные спектры.

## Приложение А

# Спектральное представление случайных функций

### А.1. Комплексные стационарные случайные функции

Рассмотрим комплексную стационарную случайную функцию  $f(t)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad (A.1a)$$

$$\langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle = B_f(t_1 - t_2). \quad (A.1b)$$

Мы предполагаем, что среднее значение равно нулю, поэтому  $B_f$  можно называть корреляционной функцией. Если среднее значение не равно нулю, то условиям (А.1) удовлетворяет флуктуация  $f(t) - \langle f(t) \rangle$ .

Попытаемся получить спектральное представление случайной функции, удовлетворяющей (А.1) [336, 337, 392]. Можно было бы записать обычное преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (A.2)$$

Но с математической точки зрения такое представление противоречит предположению о стационарности, так как для существования преобразования Фурье требуется выполнение условия Дирихле, которое имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \text{ конечен.} \quad (A.3)$$

Однако для стационарной случайной функции интеграл (А.3) расходится.

Чтобы обойти эту трудность, случайную функцию представляют в виде интеграла Фурье — Стильтьеса

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\nu(\omega), \quad (A.4)$$

где  $d\nu(\omega)$  называют случайной спектральной амплитудой. Определим свойства  $d\nu$ , следующие из анализа условий (А.1). Во-первых, из (А.1а) следует

$$\langle d\nu(\omega) \rangle = 0. \quad (A.5)$$

Во-вторых, рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2) \langle dv(\omega_1) dv^*(\omega_2) \rangle. \quad (\text{A. 6})$$

В соответствии с (A.16) эта величина должна зависеть только от разности  $t_1 - t_2$ . Поэтому потребуем выполнения условий

$$\langle dv(\omega_1) dv^*(\omega_2) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq \omega_2, \quad (\text{A. 7a})$$

$$\langle dv(\omega_1) dv^*(\omega_2) \rangle = W(\omega_1) d\omega_1 \quad \text{при} \quad \omega_1 = \omega_2. \quad (\text{A. 7б})$$

Условия (A.7a) и (A.7б), можно объединить, записав

$$\langle dv(\omega_1) dv^*(\omega_2) \rangle = W(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (\text{A. 8})$$

Используя (A.8), получаем

$$\langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(t_1 - t_2)] W(\omega) d\omega. \quad (\text{A. 9})$$

Соотношение (A.8) означает, что если функция  $f(t)$  выражена в спектральной форме (A.4), то спектральные амплитуды  $dv(\omega)$  на различных частотах не коррелированы [см. (4.7a)]. Преобразование (A.9) является обычным преобразованием Фурье, так как корреляционная функция удовлетворяет условию Дирихле. Функция  $W(\omega)$  называется спектральной плотностью случайной функции  $f(t)$ . Она описывает распределение «мощности» по частотам. Например, дисперсия есть сумма спектральных плотностей по всем частотам:

$$\langle |f|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (\text{A. 10})$$

Поскольку (A.9) представляет собой обычное преобразование Фурье, обратное преобразование имеет вид

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (\text{A. 11})$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ . Пара преобразований (A.9) и (A.11) является, как известно, содержанием теоремы Винера — Хинчина.

При измерениях частотных спектров обычно используют спектральную плотность  $W_T$ , определяемую соотношениями

$$B_f(\tau) = \int_0^{\infty} W_T(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad W_T(f) = 4 \int_0^{\infty} B_f(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau. \quad (\text{A. 12})$$

Плотность  $W_T$  отличается от  $W$  на  $4\pi$ :

$$W_T(f) = 4\pi W(\omega). \quad (\text{A. 13})$$

## А.2. Вещественные стационарные случайные функции

Если  $f(t)$  — вещественная функция, то

$$f(t) = f^*(t). \quad (\text{А. 14})$$

Применяя к (А.4) операцию комплексного сопряжения, получаем

$$f^*(t) = \int e^{i\omega t} dv^*(\omega). \quad (\text{А. 15})$$

Заменяя  $\omega$  на  $-\omega$  и учитывая (А.14), для вещественной  $f(t)$  получаем

$$dv(\omega) = dv^*(-\omega). \quad (\text{А. 16})$$

## А.3. Однородные комплексные случайные функции

Рассмотренное только что одномерное спектральное представление легко обобщить на трехмерный случай. Запишем

$$f(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} dv(\mathbf{K}), \quad (\text{А. 17})$$

причем случайные амплитуды  $dv(\mathbf{K})$  удовлетворяют условиям  $\langle dv(\mathbf{K}) \rangle = 0$ ,  $\langle dv(\mathbf{K}_1) dv^*(\mathbf{K}_2) \rangle = d\mathbf{K}_1 d\mathbf{K}_2 \Phi(\mathbf{K}_1) \delta(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)$ , (А. 18)

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= K_x \hat{x} + K_y \hat{y} + K_z \hat{z}, \\ \delta(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) &= \delta(K_{x1} - K_{x2}) \delta(K_{y1} - K_{y2}) \delta(K_{z1} - K_{z2}), \\ d\mathbf{K} &= dK_{x1} dK_{y1} dK_{z1}, \quad d\mathbf{K}_2 = dK_{x2} dK_{y2} dK_{z2}. \end{aligned}$$

Тогда теорема Винера — Хинчина принимает вид

$$B_f(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r}_1) f^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \int \Phi(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{K}, \quad (\text{А. 19})$$

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ .

Для  $f(\mathbf{r})$  можно дать и двумерное спектральное представление:

$$f(\mathbf{r}) = f(x, \rho) = \int e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\kappa}} dv(x, \boldsymbol{\kappa}), \quad (\text{А. 20})$$

где  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = x\hat{x} + \rho$ . Тогда амплитуды  $dv(x, \boldsymbol{\kappa})$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \langle dv(x, \boldsymbol{\kappa}) \rangle &= 0, \\ \langle dv(x_1, \boldsymbol{\kappa}_1) dv^*(x_2, \boldsymbol{\kappa}_2) \rangle &= F(x, \boldsymbol{\kappa}_1) \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2) d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2, \end{aligned} \quad (\text{А. 21})$$

<sup>1)</sup> Случайные функции нескольких переменных часто называют случайными полями. — Прим. перев.

где  $x = x_1 - x_2$ . В этом случае

$$B_f(x, \rho) = \int F(x, \kappa) e^{i\kappa \cdot \rho} d\kappa, \quad (\text{A. 22})$$

$$F(x, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int B_f(x, \rho) e^{-i\kappa \cdot \rho} d\rho.$$

Связь между  $F$  и  $\Phi$  можно установить, заметив, что

$$dv(x, \kappa) = \int \exp(iK_x x) dv(\mathbf{K}) dK_x. \quad (\text{A. 23})$$

Отсюда имеем

$$F(x, \kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iK_x x) \Phi(\mathbf{K}) dK_x, \quad (\text{A. 24})$$

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iK_x x) F(x, \kappa) dx,$$

где  $\mathbf{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y} + K_z \hat{z} = K_x \hat{x} + \kappa$ .

#### А.4. Однородные и изотропные случайные функции

Если функция  $f(\mathbf{r})$  изотропна в плоскости  $yz$ , то выражения (А.22) принимают вид

$$B_f(x, \rho) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\kappa \rho) F(x, \kappa) \kappa d\kappa, \quad (\text{A. 25})$$

$$F(x, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(\kappa \rho) B_f(x, \rho) \rho d\rho.$$

Для вывода этих формул в (А.22) необходимо перейти к цилиндрической системе координат и выполнить интегрирование по угловой переменной.

Если функция  $f(\mathbf{r})$  изотропна в трехмерном пространстве, то (А.24) принимает вид

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iK_x x) F(|x|, \kappa) dx. \quad (\text{A. 26})$$

Поскольку это соотношение должно выполняться для любого  $K_x$ , положим  $K_x = 0$  и получим следующую полезную формулу, справедливую для однородных и изотропных случайных функций:

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F(|x|, \kappa) dx. \quad (\text{A. 27})$$

Для однородных и изотропных случайных функций трех переменных справедливы также следующие соотношения. Поскольку функция  $\Phi$  зависит только от  $K$ , можно написать

$$\Phi(K) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi B_f(r) \exp(iKr \cos \theta),$$

где использовано  $K_1x + K_2y + K_3z = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}$ , а  $\mathbf{r}$  выражено в сферической системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{K}$ . Тогда соотношение между  $\Phi(K)$  и  $B_f(r)$  принимает вид

$$\Phi(K) = \frac{1}{2\pi^2 K} \int_0^\infty B_f(r) r \sin(Kr) dr. \quad (\text{A. 28})$$

Обратное преобразование имеет вид

$$B_f(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \Phi(K) K \sin(Kr) dK. \quad (\text{A. 29})$$

Заметим также, что одномерный спектр вдоль оси  $x$  определяется выражением

$$V(K_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty B_f(x) \exp(iK_1x) dx. \quad (\text{A. 30})$$

Это выражение можно записать в виде

$$V(K_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B_f(x) \cos(K_1x) dx,$$

и замечая, что

$$\frac{dV(K)}{dK} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty B_f(x) x \sin(Kx) dx,$$

можно связать трехмерный спектр  $\Phi(K)$  с одномерным  $V(K)$ :

$$\Phi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \frac{dV(K)}{dK}. \quad (\text{A. 31})$$

Например, если

$$B_f(r) = \langle |f|^2 \rangle \exp(-|r|/a), \quad (\text{A. 32})$$

то

$$V(K) = \frac{\langle |f|^2 \rangle a}{\pi(1 + K^2 a^2)}$$

и

$$\Phi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \frac{d}{dK} V(K) = \frac{\langle |f|^2 \rangle a^3}{\pi^2 (1 + K^2 a^2)^2}.$$

Если

$$B_f(r) = \langle |f|^2 \rangle \exp(-r^2/a^2), \quad (\text{A. 33})$$

то

$$V(K) = \frac{\langle |f|^2 \rangle a}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{K^2 a^2}{4}\right), \quad \Phi(K) = \frac{\langle |f|^2 \rangle a^3}{8\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{K^2 a^2}{4}\right).$$

### А.5. Однородные вещественные случайные функции

В качестве обобщения (А.16) для однородных случайных функций имеем

$$dv(\mathbf{K}) = dv^*(-\mathbf{K}). \quad (\text{A. 34})$$

### А.6. Стационарные и однородные случайные функции

Рассмотрим случайную функцию  $f(\mathbf{r}, t)$ , стационарную во времени и однородную в пространстве. Тогда имеем

$$f(\mathbf{r}, t) = \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) dv(\mathbf{K}, \omega), \quad (\text{A. 35})$$

а  $dv$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \langle dv(\mathbf{K}, \omega) \rangle &= 0, \\ \langle dv(\mathbf{K}_1, \omega_1) dv^*(\mathbf{K}_2, \omega_2) \rangle &= U(\mathbf{K}_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \times \\ &\times \delta(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{K}_1 d\mathbf{K}_2. \end{aligned} \quad (\text{A. 36})$$

В этом случае

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \tau) &= \int d\mathbf{K} d\omega \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - i\omega\tau) U(\mathbf{K}, \omega) = \\ &= \int d\mathbf{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{K}, \tau) = \int d\omega e^{-i\omega\tau} W(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{A. 37})$$

где  $U(\mathbf{K}, \omega)$  — четырехмерная спектральная плотность,  $\Phi(\mathbf{K}, \tau)$  — зависящая от времени трехмерная спектральная плотность, а  $W(\mathbf{r}, \omega)$  — частотный спектр, зависящий от пространственных координат:

$$\Phi(\mathbf{K}, \tau) = \int d\omega e^{-i\omega\tau} U(\mathbf{K}, \omega) \quad W(\mathbf{r}, \omega) = \int d\mathbf{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{K}, \omega). \quad (\text{A. 38})$$

### А.7. Гипотеза замороженности

Если изменения во времени случайной функции  $f(\mathbf{r}, t)$  вызваны только переносом ее пространственной структуры со скоростью  $\mathbf{V}$ , то говорят, что выполняется условие «замороженности». Математически оно записывается следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{V}t, 0). \quad (\text{A. 39})$$

Тогда коорреляционная функция принимает вид

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \tau) &= \langle f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{V}t_1, 0) f(\mathbf{r}_2 - \mathbf{V}t_2, 0) \rangle = \\ &= B(\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau) = \int d\mathbf{K} \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau)] \Phi(\mathbf{K}). \end{aligned} \quad (\text{A. 40})$$

Сравнивая с (A.37), получаем

$$U(\mathbf{K}, \omega) = \delta(\omega - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \Phi(\mathbf{K}), \quad \Phi(\mathbf{K}, \tau) = \Phi(\mathbf{K}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}\tau}. \quad (\text{A. 41})$$

Если скорость  $\mathbf{V}$  складывается из постоянной скорости  $\mathbf{U}$  и флуктуационной скорости  $\mathbf{V}_f$ :

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}_f, \quad (\text{A. 42})$$

то (A.40) нужно усреднить по флуктуациям  $\mathbf{V}_f$ . В результате получим

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \tau) &= \int d\mathbf{K} \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{U}\tau)] \Phi(\mathbf{K}) \langle \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_f\tau) \rangle = \\ &= \int d\mathbf{K} \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{U}\tau)] \Phi(\mathbf{K}) \chi(-\mathbf{K}\tau), \end{aligned} \quad (\text{A. 43})$$

где  $\chi(-\mathbf{K}\tau)$  — характеристическая функция флуктуаций скорости  $\mathbf{V}_f$ . В этом случае имеем

$$\Phi(\mathbf{K}, \tau) = \Phi(\mathbf{K}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}\tau} \chi(-\mathbf{K}\tau). \quad (\text{A. 44})$$

Если функция  $f$  однородна и изотропна, то удается также связать  $W(\mathbf{r}, \omega)$  при  $\mathbf{r} = 0$  с  $\Phi(K)$ . Имеем

$$W(0, \omega) = \int d\mathbf{K} \delta(\omega - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \Phi(\mathbf{K}) = \frac{2\pi}{v} \int_{|\omega/v|}^{\infty} \Phi(K) K dK. \quad (\text{A. 45})$$

Это соотношение получается, если положить  $d\mathbf{K} = K^2 dK \times \times \sin \theta d\theta d\phi$ , выбрать  $\mathbf{V} = v\hat{z}$  и проинтегрировать по  $\theta$  и  $\phi$ . Из (A.45) получаем также

$$\Phi(K) = -\frac{v^2}{2\pi K} \left[ \frac{d}{d\omega} W(0, \omega) \right]_{\omega=vK}. \quad (\text{A. 46})$$

## Структурные функции

Случайные процессы, с которыми приходится иметь дело на практике, часто можно с достаточной точностью описывать с помощью стационарных или однородных случайных функций. Однако такое описание оказывается справедливым только в пределах ограниченных временных и пространственных интервалов. При увеличении пространственных или временных интервалов средние значения могут изменяться, что, строго говоря, приводит к нестационарности и неоднородности. Примером может служить ветер в турбулентной атмосфере, среднюю скорость которого допустимо считать постоянной лишь в пределах органиченного временного интервала.

Изучая турбулентность, Колмогоров предложил ввести новый важный класс функций, обобщающий класс стационарных или однородных случайных функций. Уже отмечалось, что поле скоростей в турбулентной среде, строго говоря, неоднородно, поскольку его средние значения по различным участкам турбулентной среды не совпадают друг с другом. Однако если рассмотреть скорости в двух различных точках и составить их разность, то эта разность оказывается практически однородной в широком диапазоне пространственных масштабов. Если неоднородную случайную функцию такого класса обозначить через  $f(\mathbf{r})$ , то функция  $[f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_d) - f(\mathbf{r})]$  будет однородной, даже если функция  $f(\mathbf{r})$  сама по себе неоднородна.

В математике такие случайные функции называются случайными процессами со стационарными приращениями, если речь идет о функциях времени, и локально однородными случайными функциями, если говорят о функциях пространственных координат. Такие функции удобнее всего описывать на основе так называемых «структурных функций», которые рассматриваются в данном приложении (см. [275, 392]).

### Б.1. Структурная функция и случайные процессы со стационарными приращениями

Рассмотрим случайную функцию времени  $f(t)$ , которой может быть скорость ветра, влажность, температура, давление или показатель преломления турбулентной атмосферы. Сама функция  $f(t)$  нестационарна, но разность  $f(t + \tau) - f(t)$  считается стацио-

нарной. На математическом языке этот факт можно выразить следующими двумя утверждениями:

а. Среднее по статистическому ансамблю от  $f(t + \tau) - f(t)$  не зависит от  $t$ , а зависит только от  $\tau$ :

$$\langle f(t + \tau) - f(t) \rangle \text{ функция только от } \tau. \quad (\text{Б.1а})$$

б. Среднее по статистическому ансамблю от квадрата амплитуды  $f(t + \tau) - f(t)$  является функцией только  $\tau$ :

$$D_f(\tau) = \langle |f(t + \tau) - f(t)|^2 \rangle. \quad (\text{Б.1б})$$

Введенная равенством (Б.1б) функция называется структурной функцией. Среднее значение (Б.1а) оказывается пропорциональным  $\tau^1$ :

$$\langle f(t + \tau) - f(t) \rangle = c_1 \tau. \quad (\text{Б.2})$$

Случайный процесс, удовлетворяющий (Б.1а) и (Б.1б), называется случайным процессом со стационарными приращениями.

В качестве примера рассмотрим одномерное броуновское движение свободной частицы. Смещение  $x(t)$  некоторой определенной частицы не является стационарным процессом, но разность этих смещений  $x(t + \tau) - x(t)$  стационарна.

Из определения (Б.1б) очевидно, что структурная функция содержит меньше информации о процессе, чем второй момент. В самом деле, если второй момент

$$B_f(t_1, t_2) = \langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle \quad (\text{Б.3})$$

известен, то всегда можно найти структурную функцию

$$D_f(\tau) = B_f(t + \tau, t + \tau) + B_f(t, t) - B_f(t + \tau, t) - B_f(t, t + \tau). \quad (\text{Б.4})$$

Однако, зная структурную функцию, вообще говоря, нельзя получить выражение для второго момента  $B_f$ .

Стационарный процесс можно рассматривать как частный случай процесса со стационарными приращениями. В этом случае имеется взаимно-однозначное соответствие между структурной функцией и вторым моментом:

$$D_f(\tau) = 2B_f(0) - B_f(\tau) - B_f^*(\tau), \quad D_f(\infty) = 2B_f(0), \\ \text{Re } B_f(\tau) = \frac{1}{2} [D_f(\infty) - D_f(\tau)]. \quad (\text{Б.5})$$

<sup>1)</sup> Вычисляя производную от (Б.1а), получаем  $(d/dt) \langle f(t + \tau) \rangle - (d/dt) \langle f(t) \rangle = 0$ , откуда следует, что  $(d/dt) \langle f(t) \rangle$  — константа. Поэтому  $\langle f(t) \rangle = c_1 t + c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — константы. Отсюда получаем  $\langle f(t + \tau) \rangle - \langle f(t) \rangle = c_1 \tau$ .

## Б.2. Спектральное представление структурной функции

Неопределенный интеграл от стационарного процесса  $g(t)$

$$\int g(t) dt, \quad (\text{Б. 6})$$

представляет собой процесс со стационарными приращениями, и наоборот, производная процесса  $f(t)$  со стационарными приращениями есть стационарный процесс.

Если выразить  $g(t)$  в спектральной форме [392]

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \quad (\text{Б. 7})$$

где  $\langle dZ(\lambda) dZ^*(\lambda') \rangle = W(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'$ , и взять неопределенный интеграл от этого выражения, то получим спектральное представление случайного процесса со стационарными приращениями. Выбирая пределы интегрирования от  $t = 0$  до  $t$ , получаем

$$f(t) - f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda} dZ(\lambda). \quad (\text{Б. 8})$$

Перепишем это выражение в более привычной форме

$$f(t) = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\lambda t}) d\phi(\lambda), \quad (\text{Б. 9})$$

где

$$d\phi(\lambda) = -\frac{dZ(\lambda)}{i\lambda}, \quad \langle d\phi(\lambda) d\phi^*(\lambda') \rangle = \Phi(\lambda) \sigma(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'; \quad (\text{Б. 10})$$

здесь  $\Phi(\lambda) = W(\lambda)/\lambda^2$  — «спектральная плотность» случайного процесса  $f(t)$ .

Из (Б.9) получаем спектральное представление структурной функции

$$D_f(\tau) = \langle |f(t + \tau) - f(t)|^2 \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \lambda \tau) \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (\text{Б. 11})$$

Для доказательства этого факта запишем

$$f(t + \tau) - f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t} - e^{i\lambda(t+\tau)}) d\phi(\lambda),$$

$$[f(t + \tau) - f(t)]^* = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\lambda' t} - e^{-i\lambda'(t+\tau)}) d\phi^*(\lambda')$$

и воспользуемся (Б.10).

Можно найти выражение  $\Phi(\lambda)$  через  $D_f(\tau)$ . Вычисляя производную по  $\tau$  от (Б.11) и используя синус-преобразование Фурье<sup>1)</sup>, получаем

$$\lambda\Phi(\lambda) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda\tau \frac{d}{d\tau} D_f(\tau) d\tau. \quad (\text{Б. 12})$$

Если процесс стационарен, то корреляционная функция  $B_f(\tau)$  равна

$$B_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (\text{Б. 13})$$

Подставляя это выражение в (Б.5), снова приходим к (Б.11), откуда следует, что (Б.11) применимо как к процессам со стационарными приращениями, так и к стационарным процессам.

Тем не менее между корреляционной и структурной функциями имеется существенное различие. Спектральное представление (Б.13) корреляционной функции имеет смысл лишь для стационарных процессов, в то время как спектральное представление (Б.11) структурной функции имеет смысл как для стационарных процессов, так и для процессов со стационарными приращениями. Для пояснения этого утверждения рассмотрим поведение спектра  $\Phi(\lambda)$  вблизи значения  $\lambda = 0$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  для сходимости интеграла (Б.13) необходимо, чтобы

$$\Phi(\lambda) \sim \lambda^n, \quad n > -1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (\text{Б. 14})$$

в то время как для сходимости интеграла (Б.11) достаточно, чтобы

$$\Phi(\lambda) \sim \lambda^n, \quad n > -3 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (\text{Б. 15})$$

<sup>1)</sup> Пара синус-преобразований Фурье имеет вид  $F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \lambda\tau d\tau,$

$f(\tau) = (1/2\pi) \int_0^{\infty} F(\lambda) \sin \lambda\tau d\lambda$  [318].

Отсюда делаем вывод, что если спектр удовлетворяет условию (Б.14), то процесс стационарен и существуют как корреляционная, так и структурная функции. Однако если условие (Б.14) не выполняется, но условие (Б.15) выполнено, то процесс является процессом со стационарными приращениями, и существует только структурная функция, а корреляционная функция не существует. Этот вывод играет важную роль в теории распространения волн в турбулентной среде.

### Б.3. Локально однородные и изотропные случайные функции

Трехмерный эквивалент процесса со стационарными приращениями называется локально однородной случайной функцией. Рассмотрим случайную функцию  $f(\mathbf{r})$ . Заметим, что, вообще говоря,  $f(\mathbf{r})$  не является однородной функцией, но  $f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_1)$  — однородная функция.

Структурная функция  $D_f(\mathbf{r})$  определяется выражением

$$D_f(\mathbf{r}) = \langle |f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle. \quad (\text{Б. 16})$$

Если процесс стационарен, то  $D_f$  выражается через корреляционную функцию  $B_f(\mathbf{r})$  и наоборот:

$$D_f(\mathbf{r}) = 2B_f(0) - B_f(\mathbf{r}) - B_f^*(\mathbf{r}), \quad \text{Re } B_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [D_f(\mathbf{r}) - D_f(\infty)]. \quad (\text{Б. 17})$$

Если процесс локально однороден и изотропен, то структурная функция зависит только от величины вектора  $\mathbf{r}$  и не зависит от его направления:

$$D_f(|\mathbf{r}|) = D_f(r) = \langle |f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle. \quad (\text{Б. 18})$$

Спектральное представление локально однородной случайной функции получается как трехмерное обобщение результата для процесса со стационарными приращениями. Выпишем спектральные представления для случайной функции  $f(\mathbf{r})$  и ее структурной функции  $D_f(\mathbf{r})$ :

$$f(\mathbf{r}) = f(0) + \iiint_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}) d\phi(\mathbf{K}),$$

$$D_f(\mathbf{r}) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \Phi(\mathbf{K}) d\mathbf{K}, \quad (\text{Б. 19})$$

$$\langle d\phi(\mathbf{K}) d\phi^*(\mathbf{K}') \rangle = \Phi(\mathbf{K}) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') d\mathbf{K} d\mathbf{K}'.$$

Для изотропного и локально однородного процесса структурная функция становится функцией только  $|\mathbf{r}|$ , а спектральная плотность  $\Phi$  становится функцией только  $|\mathbf{K}|$ . В этом случае

$$D_f(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin Kr}{Kr}\right) \Phi(K) K^2 dK. \quad (\text{Б. 20})$$

Трехмерный спектр  $\Phi(K)$  связан с одномерным спектром  $V(K)$  соотношением

$$\Phi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \frac{\partial V(K)}{\partial K}. \quad (\text{Б. 21})$$

Этот результат получается, если заметить, что структурная функция вдоль одной из координатных осей, скажем вдоль оси  $x$ , равна

$$D_f(x) = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos Kx) V(K) dK, \quad (\text{Б. 22})$$

и проинтегрировать (Б.22) по частям<sup>1)</sup>. Отметим также, что на основании (Б.12) спектр  $V(K)$  можно найти по  $D_f(x)$ :

$$KV(K) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} K \sin x \frac{d}{dx} D_f(x) dx. \quad (\text{Б. 23})$$

Функцию  $f(\mathbf{r})$  можно представить также в виде двумерного спектрального разложения [336]:

$$f(x, \rho) = f(x, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho})] d\phi(x, \boldsymbol{\kappa}), \quad (\text{Б. 24})$$

где  $\boldsymbol{\kappa} = K_2 \hat{y} + K_3 \hat{z}$ ,  $\boldsymbol{\rho} = y \hat{y} + z \hat{z}$ , а,

$$\langle d\phi(x, \boldsymbol{\kappa}) d\phi^*(x', \boldsymbol{\kappa}') \rangle = F(|x - x'|, \boldsymbol{\kappa}) \delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') d\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}'. \quad (\text{Б. 25})$$

Тогда для структурной функции имеем

$$D_f(x, \rho) = D_f(x, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho})] F(|x|, \boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}.$$

<sup>1)</sup>  $D_f(x) = D_f(r) = 4 [K - (\sin Kx)/x] V(K) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} [4K - (\sin Kx)/x] \times \times (\partial V/\partial K) dK$ . Это выражение нужно сравнить с (Б.21),

Двумерный спектр  $F$  связан с трехмерным спектром  $\Phi$  соотношениями

$$F(|x|, \kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(K_1 x) \Phi(K_1, K_2, K_3) dK_1, \quad (\text{Б. 26})$$

$$\Phi(K_1, K_2, K_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(K_1 x) F(|x|, \kappa) dx.$$

Если функция  $f(\mathbf{r})$  локально однородна и изотропна в плоскости  $yz$ , то

$$D_f(x, \rho) = D_f(x, 0) + 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] F(|x|, \kappa) \kappa d\kappa. \quad (\text{Б. 27})$$

Заметим, что если  $f(\mathbf{r})$  — однородная и изотропная функция, то ее спектр должен удовлетворять условию

$$\Phi(K) \rightarrow K^n, \quad n > -3 \quad \text{при} \quad K \rightarrow 0. \quad (\text{Б. 28})$$

Если же  $f(\mathbf{r})$  — локально однородная и изотропная функция, то ее спектр удовлетворяет условию

$$\Phi(K) \rightarrow K^n, \quad n > -5 \quad \text{при} \quad K \rightarrow 0. \quad (\text{Б. 29})$$

#### Б.4. Колмогоровский спектр

В качестве примера рассмотрим колмогоровский спектр. Структурная функция  $D_n(r)$  флуктуаций показателя преломления определяется выражением

$$D_n(r) = \langle |n_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - n_1(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \begin{cases} C_n^2 r^{2\beta} & \text{при } L_0 \gg r \gg l_0, \\ C_n^2 l_0^{2\beta} (r/l_0)^2 & \text{при } r \ll l_0, \end{cases} \quad (\text{Б. 30a})$$

$$(\text{Б. 30б})$$

где  $n = \langle n \rangle (1 + n_1)$ , а  $L_0$  и  $l_0$  — внешний и внутренний масштабы турбулентности.

Если  $D_n(r) = C_n^2 r^p$ , то

$$V_n(K) = \frac{1}{2\pi K} \int_0^{\infty} \sin Kx \frac{d}{dx} D_n(x) dx = \left[ \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi} \sin \frac{\pi p}{2} \right] C_n^2 K^{-(p+1)}.$$

$$(\text{Б. 31})$$

Выражение для трехмерного спектра можно получить, воспользовавшись соотношением (Б.21):

$$\Phi_n(K) = \frac{1}{2\pi K} \frac{\partial}{\partial K} V_n(K) = \left[ \frac{\Gamma(p+2)}{4\pi^2} \sin \frac{\pi p}{2} \right] C_n^2 K^{-(p+3)}. \quad (\text{Б. 32})$$

При  $p = 2/3$  получаем

$$\Phi_n(K) = 0,033 C_n^2 K^{-11/3}. \quad (\text{Б. 33})$$

Выражение (Б.33) описывает спектр  $\Phi_n(K)$  в интервале  $2\pi/L_0 \ll K \ll 2\pi/l_0$ . В области  $K \gg 2\pi/l_0$  можно ожидать, что спектр  $\Phi_n(K)$  имеет малую величину, а его структурная функция при  $r \ll l_0$  должна обращаться в (Б.30б). Один из способов получить такой результат был предложен Татарским. Он предположил, что при  $K > 2\pi/L_0$  спектр имеет вид

$$\Phi_n(K) = 0,033 C_n^2 K^{-11/3} \exp(-K^2/K_m^2), \quad (\text{Б. 34})$$

причем значение  $K_m$  выбирается таким, чтобы структурная функция при  $r \ll l_0$  имела вид (Б.30б).

Для определения  $K_m$  подставим (Б.34) в (Б.20) и вычислим интеграл

$$D_f(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin Kr}{Kr}\right) \Phi_n(K) K^2 dK$$

при  $r \ll l_0$ . В этом случае можно воспользоваться приближенным выражением

$$1 - \frac{\sin Kr}{Kr} \approx \frac{K^2 r^2}{6}.$$

В результате вычисления получим

$$D_f(r) = C_n^2 \left\{ (5/27\pi) \left[ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \sin(\pi/3) K_m^{4/3} \right\} r^2. \quad (\text{Б. 35})$$

Выберем  $K_m$  так, чтобы (Б.35) совпало с (Б.30б). Тогда получим

$$K_m l_0 = \left\{ (5/27\pi) \left[ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \sin(\pi/3) \right\}^{-3/4} = 5,91.$$

Отсюда делаем вывод, что спектр  $\Phi_n(K)$ , соответствующий структурной функции (Б.30а) и (Б.30б), имеет вид

$$\Phi_n(K) = 0,033 C_n^2 K^{-11/3} \exp(-K^2/K_m^2) \text{ при } K > 2\pi/L_0, \quad (\text{Б. 36})$$

где  $K_m = 5,91/l_0$ .

## Приложение В

# Турбулентность и флуктуации показателя преломления

### В.1. Ламинарное течение и турбулентность

Имеются два различных типа движения вязкой жидкости — ламинарное течение и турбулентность. Например, если жидкость движется в трубке диаметра  $l$  со средней скоростью  $v$ , то, добавив в жидкость красящее вещество, мы увидим, что при малой скорости линии тока являются гладкими и хорошо отделяются друг от друга. Такое течение называется ламинарным. С увеличением скорости можно дойти до такого состояния, когда линии тока перестанут быть гладкими, а движение жидкости станет нерегулярным и случайным. Это явление называется турбулентностью [2, 21, 22, 33, 141, 178, 220, 240, 262, 273, 275, 303, 320, 341, 364, 393].

Первое систематическое исследование турбулентности было проведено Рейнольдсом в 1883 г. Исходя из теории подобия, он сделал вывод, что если безразмерный параметр

$$Re = vl/\nu \quad (B.1)$$

меньше некоторого критического значения  $Re_{кр}$ , то поток ламинарен, а если  $Re$  превышает  $Re_{кр}$ , то движение становится турбулентным. Здесь  $v$  и  $l$  — характерные скорость и размер потока (например, средняя скорость и диаметр трубки), а  $\nu$  — кинематическая вязкость. Параметр  $Re$  называется числом Рейнольдса, а  $Re_{кр}$  — критическим числом Рейнольдса.

Смысл числа Рейнольдса можно пояснить следующим образом. Если турбулентность создается внутри трубки диаметра  $l$  и скорости жидкости в завихрениях порядка  $v$ , то характерное время вихря порядка  $\tau = l/v$ . Поэтому кинетическая энергия единицы массы турбулентной жидкости в единицу времени по порядку величины равна

$$v^2/\tau = v^3/l. \quad (B.2)$$

С другой стороны, из-за вязкости происходит диссипация энергии турбулентности. Очевидно, что для поддержания турбулентного потока необходимо, чтобы кинетическая энергия была значительно больше диссипации энергии.

Диссипация энергии для единицы массы в единицу времени <sup>1)</sup> равна по порядку величины

$$\nu v^2/l^2. \quad (\text{В. 3})$$

Отношение кинетической энергии к диссипации энергии и есть число Рейнольдса.

Критическое число Рейнольдса не является универсальной константой. Его значение зависит не только от геометрических характеристик, но и от способа возбуждения турбулентности <sup>2)</sup>.

## В.2. Развитая турбулентность

При значениях числа Рейнольдса, близких к критическому числу, характеристики турбулентности зависят от начальных условий. Но при больших числах Рейнольдса  $Re \ll Re_{кр}$  влияние начальных условий исчезает, движение жидкости становится совершенно нерегулярным и случайным, так что появляется возможность чисто статистического описания этого движения.

В 1941 г. Колмогоров предложил теорию локальной структуры турбулентности при очень больших числах Рейнольдса, которая впоследствии стала основой всех современных теорий турбулентности.

<sup>1)</sup> В ламинарном потоке напряжение сдвига (сила, приложенная к единице площади), обусловленное деформацией сдвига (градиентом скорости  $\partial V_x/\partial y$ ), равно  $\mu \partial V_x/\partial y$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкости. По теории размерности напряжение сдвига в турбулентности равно  $\mu v/l$ . Поэтому диссипация энергии для единицы массы в единицу времени равна  $(\mu v/l) (1/\rho) (v/l) = \nu v^2/l^2$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $\nu = \mu/\rho$  [320]. Типичные значения  $\mu$ ,  $\rho$  и  $\nu$  при 20 °С равны

	Воздух	Вода
$\mu$ , кг/(м·с)	$1,81 \cdot 10^{-5}$	0,001
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1,21	998,0
$\nu$ , м <sup>2</sup> /с	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$

<sup>2)</sup> Если в систему ввести малые флуктуации скорости  $v_1$ , то в принципе можно решить уравнение Навье—Стокса  $\partial \mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = -\nabla P/\rho + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$ , дополненное уравнением непрерывности  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  и начальными и граничными условиями. Вообще говоря,  $v_1$  зависит от времени по закону  $\exp(-i\omega t)$  и при  $Re > Re_{кр}$  мнимая часть  $\omega$ , равная  $\omega_i$ , положительна, так что флуктуации нарастают во времени. Если  $Re < Re_{кр}$ , то  $\omega_i$  отрицательна и флуктуации затухают.

Некоторые типичные значения числа Рейнольдса [220]:

обтекание цилиндра	34
поток между движущимися пластинами (или большими вращающимися цилиндрами)	1500
поток между двумя неподвижными пластинами (или в трубе)	7700

По Колмогорову энергия, затрачиваемая на турбулентное движение, возникает вследствие изменения средней скорости. Например, вблизи поверхности Земли средняя горизонтальная скорость ветра меняется в зависимости от высоты, и это изменение приводит к возникновению турбулентных завихрений, размер которых приближенно равен высоте  $z$  (разд. В.10.). Размер первоначальных вихрей, в которых и возникает энергия турбулентного движения, называется внешним масштабом турбулентности и обозначается  $L_0$ . Вихри с размерами больше  $L_0$ , как правило, анизотропны. Например, в случае приземной турбулентности вихри с размерами, большими, чем  $L_0 \approx z$ , могут быть сильно вытянутыми в горизонтальных направлениях. Что касается вихрей, размеры которых меньше внешнего масштаба  $L_0$ , то они, как правило, изотропны.

Рассмотрим кинетическую энергию вихрей размера  $L_0$ . Пусть  $V_0$  — скорость, характерная для вихрей такого размера. В соответствии с (В.2) кинетическая энергия единицы массы жидкости (в единицу времени) порядка  $V_0^3/L_0$ . Диссипация энергии в единице массы жидкости за единицу времени по порядку величины равна  $\nu V_0^2/L_0^2$ , и, поскольку число Рейнольдса очень велико, кинетическая энергия во много раз превосходит диссипацию энергии. Поэтому диссипацией можно пренебречь, и практически вся кинетическая энергия может передаваться вихрям меньшего масштаба. Обозначим через  $V_1, V_2, \dots, V_n$  скорости вихрей размера  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , причем  $L_0 > L_1 > L_2 > \dots > L_n$ . Тогда кинетическая энергия единицы массы жидкости в единицу времени должна быть примерно одинаковой для вихрей всех размеров:

$$V_0^3/L_0 \approx V_1^3/L_1 \approx V_2^3/L_2 \approx V_3^3/L_3 \approx \dots \approx V_n^3/L_n. \quad (\text{В. 4а})$$

В то же время диссипация энергии  $\nu V_n^2/L_n^2$  с уменьшением размера вихря возрастает<sup>1)</sup>, и это продолжается до тех пор пока не будет достигнут минимальный размер вихря  $l_0$ , при котором кинетическая энергия по порядку величины равна диссипации энергии  $\varepsilon$ :

$$V_0^3/L_0 \approx V_1^3/L_1 \approx \dots \approx V_i^3/l_0 \approx \nu V_i^2/l_0^2 \approx \varepsilon. \quad (\text{В. 4б})$$

При размерах вихрей  $\sim l_0$  вся кинетическая энергия преобразуется в тепло, так что на создание вихрей с размерами меньше  $l_0$  практически не остается энергии. Размер  $l_0$  называется внутренним масштабом турбулентности. Энергия  $\varepsilon$ , диссипируемая единицей массы жидкости в единицу времени, играет важную

<sup>1)</sup> Заметим, что  $V_n \sim L_n^{1/3}$ , поэтому  $\nu V_n^2/L_n^2 \sim \nu L_n^{-1/3}$ .

роль в теории турбулентности и называется скоростью диссипации энергии.

Из (В.46) следует важное свойство скорости  $V$  вихря с размером  $L$ . Если размер вихря заключен между внешним ( $L_0$ ) и внутренним ( $l_0$ ) масштабами турбулентности, то флуктуационная скорость  $V$  зависит только от размера  $L$  вихря и скорости диссипации энергии  $\epsilon$ :

$$V \sim (\epsilon L)^{1/3}. \quad (\text{В.5})$$

Теперь можно найти вид структурной функции флуктуаций скорости. Она должна быть изотропной и иметь размерность  $(\epsilon L)^{2/3}$ :

$$D_v(r) = C(\epsilon r)^{2/3} \quad \text{при } l_0 \ll r \ll L_0, \quad (\text{В.6a})$$

где  $C$  — безразмерная постоянная<sup>1)</sup>. Формула (В.6a) была получена Колмогоровым и Обуховым и носит название «закона двух третей».

При  $r \ll l_0$  из (В.46) следует

$$D_v(r) = C'(\epsilon/\nu)r^2, \quad (\text{В.6б})$$

где, как известно [336],  $C' = 1/15$  для  $D_r(r)$ .

Скорость диссипации энергии  $\epsilon$ , как уже показано в (В.46), порядка  $\nu V_0^2/l_0^2$ . С другой стороны, поскольку эта величина равна энергии, которая вносится в турбулентное движение при больших масштабах турбулентности, можно ожидать, что  $\epsilon$  связано с градиентом скорости ветра  $\langle V \rangle$ . Поэтому можно написать<sup>2)</sup>

$$\epsilon \approx K_m(\text{grad} \langle V \rangle)^2. \quad (\text{В.7})$$

Константа  $K_m$  называется турбулентным коэффициентом вязкости. Важно понимать, что скорость диссипации энергии  $\epsilon$  связана не только с минимальным масштабом турбулентности  $l_0$  [см. (В.46)], но и с поведением средней скорости [см. (В.7)].

Мы не будем вдаваться в дальнейшие детали флуктуаций поля скоростей [240], поскольку нашей главной целью является вывод флуктуационных характеристик показателя преломления.

<sup>1)</sup> Поскольку скорость  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  представляет собой векторное поле, нужно рассматривать структурные функции, в которые входят разные компоненты. Однако можно показать, что все компоненты выражаются через структурную функцию компоненты  $v$  вдоль  $\mathbf{r}$ :  $D_r(r) = \langle [v_r(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - v_r(\mathbf{r}_1)]^2 \rangle$ . В этом случае постоянная  $C$  в (В.6a) равна 1,2 [336].

<sup>2)</sup> Вообще говоря,  $\epsilon$  зависит также от архимедовых сил [см. разд. В.6, формула (В.33)].

### В.3. Скалярные величины, сохраняющие свое значение в турбулентной атмосфере, а также в нейтральной, стабильной и нестабильной атмосферах

Показатель преломления  $n$  земной атмосферы в пределах тропосферы (до высоты 17 км) определяется выражением<sup>1)</sup>

$$n - 1 = \frac{77,6}{T} (P + 4810e/T) \cdot 10^{-6}, \quad (\text{В.8а})$$

где  $T$  — абсолютная температура в кельвинах,  $P$  — давление в миллибарах и  $e$  — упругость водяных паров в миллибарах<sup>2)</sup>.

Считается, что формула (В.8а) справедлива для волн с частотой от 1 МГц до по крайней мере 30 ГГц, а возможно, и 72 ГГц. В оптической области влажность не играет существенной роли, и показатель преломления приближенно определяется выражением

$$n - 1 = (77,6/T) P \cdot 10^{-6}. \quad (\text{В.8б})$$

В турбулентной атмосфере величины  $P$ ,  $T$  и  $e$ , входящие в (В.8), испытывают хаотические изменения, которые, вообще говоря, не обязательно следуют турбулентному движению. Однако некоторые величины, на анализе которых мы кратко остановимся, сохраняют свои значения в элементе объема при его перемещениях в турбулентной среде. Поскольку характеристики таких величин при турбулентном движении сохраняются, их называют консервативными примесями. Более того, если между этими примесями и турбулентностью не происходит обмена энергией (как это обычно и бывает), то их называют пассивными. В этом случае говорят о консервативных пассивных примесях.

Какие величины могут быть пассивными примесями? Вообще говоря, имеется две величины, которые можно рассматривать как «консервативные»: потенциальная температура и удельная влажность. Рассмотрим эти величины в случае земной атмосферы.

Предположим, что в атмосфере не происходит ни испарения, ни конденсации водяного пара. В этих условиях естественно ожидать, что при движении некоторой массы воздуха количество тепла в ней не будет меняться в течение достаточно большого времени (порядка минут). Поэтому с термодинамической точки

<sup>1)</sup> Рассматривая вклады сухого воздуха (давление  $P_d$ ), водяных паров (упругость  $e$ ) и углекислого газа  $\text{CO}_2$  (давление  $P_c$ ), для показателя преломления  $n$  можно получить выражение  $(n - 1)10^6 = K_1(P_d/T) + K_2(e/T) + K_3(e/T^2) + K_4(P_c/T)$  [23]. Выражение (В.8) получается при введении соответствующего предположения о содержании  $\text{CO}_2$  и использовании полного давления  $P = P_d + e$ .

<sup>2)</sup> 1 миллибар (мб) =  $10^{-3}$  дин/см<sup>2</sup> = 100 Па; 1 стандартная атмосфера = 1013,2 мб.

зрения турбулентность можно считать адиабатическим процессом.

Рассмотрим некоторую массу воздуха, расположенную на высоте  $z$  при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Если эту массу адиабатически перенести к поверхности Земли ( $P = P_0$  и  $z = 0$ ), то температура  $T$  изменится и станет равной  $\theta$ . Эта температура  $\theta$  называется потенциальной температурой [178]. Выражение для потенциальной температуры можно получить следующим образом.

Поскольку давление  $P$  в атмосфере обусловлено гравитационной силой, оно удовлетворяет уравнению гидростатики

$$dP = -\rho g dz, \quad (\text{В. 9})$$

где  $\rho$  — плотность воздуха, а  $g$  — гравитационное ускорение. Давление  $P$  и плотность  $\rho$  связаны уравнением состояния. Для 1 моля газа оно имеет вид

$$P = \rho RT, \quad (\text{В. 10})$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная, равная 8,314 Дж/моль·К. Для адиабатического процесса имеем  $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$ , где  $\gamma = C_p/C_v$  — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме. Отсюда получаем

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP}{P}. \quad (\text{В. 11})$$

Используя уравнение гидростатики, находим

$$\frac{dT}{dz} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{g}{R} = -\frac{g}{C_p} = -\alpha \quad (\text{В. 12})$$

где использовано соотношение  $C_p - C_v = R$ .

В стандартной атмосфере

$$C_p = 0,240 \text{ кал/}^\circ\text{C} = 0,240 \cdot 10^3 \cdot 4,184 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К},$$

$$C_v = 0,171 \text{ кал/}^\circ\text{C} \text{ и } g = 9,81 \text{ Дж/кг} \cdot \text{м},$$

поэтому  $\alpha_a = 0,98 \text{ К/100 м}$ . Интегрируя (В.12) от  $z$  до 0, получаем выражение для потенциальной температуры  $\theta$ :

$$\theta - T = -\alpha_a z \Big|_z^0 = \alpha_a z, \quad \theta = T + \alpha_a z, \quad (\text{В. 13})$$

где параметр  $\alpha_a$  называется адиабатической скоростью уменьшения температуры.

Ясно, что если потенциальная температура атмосферы одинакова на всех высотах (т. е. температура  $T$  убывает с высотой со скоростью  $\alpha_a$ ), то воздух, даже будучи перемещенным в другую точку, будет иметь те же температуру и давление, что и ок-

ружающий его воздух; поэтому воздух не будет ни подниматься, ни опускаться. Такую атмосферу называют «нейтральной». С другой стороны, если потенциальная температура с высотой возрастает ( $T$  убывает со скоростью, меньшей  $\alpha_a$ ), то воздух при его перемещении вверх или вниз будет становиться холоднее или теплее окружающего воздуха и поэтому вернется к своему первоначальному положению. В этом случае говорят о «стабильной» атмосфере. Если потенциальная температура убывает с высотой, то воздух не будет возвращаться к своему первоначальному состоянию, поэтому атмосфера такого рода является «нестабильной».

Таким образом, движение воздуха в турбулентной атмосфере определяется не самой температурой, а потенциальной температурой. Только рассматривая малые интервалы высот, можно пренебречь влиянием адиабатической скорости  $\alpha_a$  и рассматривать температуру как «консервативную добавку».

Упругость водяных паров  $e$  не сохраняется, но удельная влажность  $q$ , равная массе водяного пара в единице массы воздуха, должна приблизительно сохранять свое значение при турбулентном движении воздуха. Удельная влажность  $q$  определяется выражением

$$q = 0,622e/P, \quad (\text{В. 14})$$

где константа 0,622 равна отношению молекулярных весов воды и воздуха.

#### В.4. Флуктуации показателя преломления

Приведенный выше анализ консервативных пассивных примесей показывает, что изменение этих примесей (потенциальной температуры  $\theta$  и удельной влажности  $q$ ) непосредственно связано с движением воздуха. Выразим поэтому показатель преломления  $n$  через  $\theta$  и  $q$ :

$$(n - 1) = \frac{77,6P}{\theta - \alpha_a z} \left( 1 - \frac{7733q}{\theta - \alpha_a z} \right) \cdot 10^{-6}. \quad (\text{В. 15})$$

В предположении об адиабатичности процесса (В.11) флуктуации показателя преломления определяются соотношениями

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial n}{\partial q} \delta q, \quad (\text{В. 16})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{77,6P}{(\gamma - 1) T^2} \left( 1 + \frac{15466q}{T} \right) \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n}{\partial q} = \frac{77,6 \cdot 7733}{T^2} \cdot 10^{-6}.$$

Соотношения (В.16) ясно показывают, что поведение  $\theta$  и  $q$  в турбулентной атмосфере непосредственно связано с флуктуационными характеристиками показателя преломления турбулентной атмосферы.

## В.5. Структурные функции консервативных примесей и флуктуаций показателя преломления

Рассмотрим флуктуационные характеристики потенциальной температуры  $\theta$  в развитой турбулентности. Представим  $\theta$  в виде суммы среднего значения  $\langle\theta\rangle$  и флуктуаций  $\theta'$ :

$$\theta = \langle\theta\rangle + \theta'. \quad (\text{В. 17})$$

Флуктуации  $\theta'$  можно связать с поведением поля скоростей, о котором шла речь в разд. В.3. Рассмотрим вихри, размеры которых совпадают с внешним масштабом турбулентности  $L_0$ . Эти вихри переносят с собой примесь  $\theta$ . Поэтому по аналогии с полем скоростей количество возникающих за единицу времени неоднородностей  $\theta'$ , соответствующих масштабу  $L_0$ , должно быть порядка

$$\theta'^2/\tau_0 = V_0\theta'^2/L_0. \quad (\text{В. 18})$$

Количество неоднородностей, исчезающих за единицу времени, порядка

$$D\theta'^2/L_0^2, \quad (\text{В. 19})$$

где  $D$  называется коэффициентом молекулярной диффузии и играет роль, аналогичную кинематической вязкости  $\nu$  для поля скоростей, причем значение  $D$  очень близко к значению  $\nu$  [336]<sup>1)</sup>. В случае вихрей промежуточного размера между  $L_0$  и  $l_0$  рассасывание неоднородностей, описываемое (В.19), пренебрежимо мало по сравнению с их возникновением  $\theta'$  [см. (В.18)], поэтому неоднородности, описываемые (В.18), переходят от крупных масштабов к более мелким. Наконец, при достижении внутреннего масштаба  $l_0$  неоднородности исчезают вследствие процесса молекулярной диффузии.

Поэтому по аналогии с (В.46) запишем

$$\frac{V_0\theta_0'^2}{L_0} \approx \frac{V_1\theta_1'^2}{L_1} \approx \frac{V_2\theta_2'^2}{L_0} \approx \dots \approx \frac{V_l\theta_l'^2}{l_0} \approx D \frac{\theta_l'^2}{l_0^2} = N_\theta, \quad (\text{В. 20})$$

где через  $N_\theta$  обозначена скорость рассасывания флуктуаций скалярной примеси  $\theta'$ . Согласно (В. 20), в интервале между  $L_0$  и  $l_0$

$$V\theta'^2/L \approx N_\theta. \quad (\text{В. 21})$$

Поскольку в турбулентности

$$V \approx (\epsilon L)^{1/3} \quad (\text{В. 22})$$

<sup>1)</sup> В случае температуры  $D \approx 1,9 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, в случае водяного пара в атмосфере  $D = 2,0 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, а для атмосферного углекислого газа  $D = 1,4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Эти значения сравнимы с кинематической вязкостью воздуха  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.

[см. (В.5)], получаем

$$\theta'^2 \sim N_0 L^{2/3} / \epsilon^{1/3}. \quad (\text{В. 23})$$

Теперь можно написать выражение для структурной функции флуктуаций  $\theta$ . Из (В.23) получаем

$$D_\theta(r) = C_\theta^2 r^{2/3}, \quad C_\theta^2 = b N_0 / \epsilon^{1/3} \quad \text{при } l_0 \ll r \ll L_0, \quad (\text{В. 24})$$

где  $b$  нужно рассматривать как некоторую универсальную константу. Точное значение константы  $b$  неизвестно; оценки показывают, что ее значение заключено в пределах от 1,5 до 3,5; Монин и Яглом [262] предлагают использовать значение  $b = 2,8$ . Величину  $C_\theta$  называют структурной характеристикой примеси  $\theta$ .

При  $r \ll l_0$  можно написать

$$D_\theta(r) = C_\theta^2 l_0^{2/3} (r/l_0)^2. \quad (\text{В. 25})$$

(В.24) и (В. 25) представляют собой фундаментальные формулы, определяющие структурную функцию флуктуаций примеси  $\theta$ .

Поскольку флуктуации показателя преломления прямо пропорциональны флуктуациям консервативной примеси, можно написать выражение для структурной функции флуктуаций показателя преломления:

$$D_n(r) = \begin{cases} C_n^2 r^{2/3} & \text{при } l_0 \ll r \ll L_0, \\ C_n^2 l_0^{2/3} (r/l_0)^2 & \text{при } r \ll l_0, \end{cases} \quad (\text{В. 26})$$

где  $C_n^2 = b N_n / \epsilon^{1/3}$ . Через  $N_n$  обозначена скорость рассасывания флуктуаций показателя преломления, а через  $C_n$  — структурная характеристика флуктуаций показателя преломления.

Структурные характеристики  $C_0$  и  $C_n$  описывают интенсивность турбулентности, и их определение представляет особую важность. Для их четкого определения необходимы дополнительные сведения о двух важных параметрах  $\epsilon$  и  $N$ . Этому вопросу посвящены следующие разделы.

## В.6. Скорость диссипации энергии $\epsilon$ и энергетический баланс в атмосферной турбулентности

Прежде чем рассматривать метод расчета  $\epsilon$ , необходимо изучить общие свойства атмосферной турбулентности. Эти свойства удобнее всего описать с помощью уравнения баланса энергии. Пусть  $E$  — средняя кинетическая энергия единицы массы турбулентной жидкости. Изменение  $E$  за единицу времени вызывается: а) скоростью увеличения энергии турбулентности вследствие изменения скорости ветра  $M$ , б) скоростью увеличения энергии за счет архимедовых сил  $B$ , в) скоростью диссипации энергии  $\epsilon$ .

Таким образом, мы можем написать <sup>1)</sup>

$$dE/dt = M + B - \varepsilon. \quad (\text{В. 27})$$

Скорость увеличения энергии турбулентности  $M$  обусловлена изменением скорости ветра с высотой и равна

$$M = K_m [(dV_x/dz)^2 + (dV_y/dz)^2], \quad (\text{В. 28})$$

где  $V_x$  и  $V_y$  — взаимно-ортогональные компоненты скорости ветра в горизонтальной плоскости, а  $K_m$  — коэффициент «вихревой вязкости». Слагаемое  $B$  в (В.27) зависит от вертикального профиля температуры. Если потенциальная температура  $\theta$  постоянна (нейтральная атмосфера), то  $B$  отрицательно и стремится уменьшить турбулентность. Если же  $\theta$  с высотой увеличивается (неустойчивая атмосфера), то  $B$  положительно и стремится увеличить энергию турбулентности. Приблизительно  $B$  определяется выражением

$$B = -K_h \frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz}, \quad (\text{В. 29})$$

где  $g$  — гравитационное ускорение, а  $K_h$  — «коэффициент турбулентной температуропроводности». Коэффициенты  $K_m$  и  $K_h$  одного порядка, и часто принимают, что они равны.

Отношение скорости увеличения энергии из-за изменения скорости ветра  $M$  к скорости увеличения энергии за счет архимедовых сил  $B$  называется числом Ричардсона  $R_f$ . Оно приближенно равно дифференциальному числу Ричардсона  $Ri$ :

$$R_f = -\frac{B}{M}, \quad Ri = \frac{(g/\theta) d\theta/dz}{(dV_x/dz)^2 + (dV_y/dz)^2}. \quad (\text{В. 30})$$

Теперь уравнение (В.27) можно записать в виде

$$dE/dt = M(1 - R_f) - \varepsilon. \quad (\text{В. 31})$$

Если  $R_f < 0$ , то как изменение скорости ветра, так и архимедовы силы передают энергию турбулентному движению. Если величина  $R_f$  положительна и велика, то энергия, расходуемая на преодоление архимедовых сил, возрастает настолько, что турбулентное движение не развивается. Поэтому можно говорить о «критическом числе Ричардсона»  $Ri_{кр}$ , которое определяется из условия, что турбулентное движение существует только при  $Ri < Ri_{кр}$ . Критическое число Ричардсона имеет значение между 0,15 и 0,5. Поэтому область существования турбулентного движения можно описать двумя условиями:

$$Ri < Ri_{кр}, \quad Re > Re_{кр}. \quad (\text{В. 32})$$

<sup>1)</sup> Сюда можно добавить еще член переноса  $T$ , описывающий выходящую энергию, которая диссипируется во всем пространстве. Однако это слагаемое обычно пренебрежимо мало [227].

В случае самоподдерживающейся турбулентности скорость диссипации энергии  $\epsilon$  должна уравниваться слагаемым  $M$ , связанным с изменением скорости ветра, и слагаемым  $B$ , описывающим влияние архимедовых сил, так что

$$\epsilon = M + B = M(1 - R_f). \quad (\text{В. 33})$$

В свободной атмосфере (разд. В.9) скорость диссипации (в единицах  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ) для турбулентности различной интенсивности приближенно равна [363]

$\epsilon > 100 \cdot 10^{-3}$	сильная турбулентность,
$100 \cdot 10^{-3} > \epsilon > 12 \cdot 10^{-3}$	умеренная турбулентность
$12 \cdot 10^{-3} > \epsilon > 3 \cdot 10^{-3}$	слабая турбулентность,
$\epsilon < 3 \cdot 10^{-3}$	почти полное отсутствие, турбулентности.

## В.7. Скорость диссипации флуктуаций $N$

Точно так же, как скорость диссипации  $\epsilon$  должна уравниваться скоростью увеличения энергии турбулентности  $M + B$ , скорость диссипации флуктуаций  $N$  должна быть приближенно равной скорости образования флуктуаций скалярной примеси. Флуктуации обусловлены градиентом среднего значения скалярной примеси. Поэтому

$$N_\theta = K (\text{grad } \langle \theta \rangle)^2 \approx D\theta_i'^2/l_0^2, \quad (\text{В. 34})$$

где  $K$  — коэффициент «турбулентной диффузии». Коэффициенты  $K$  и  $K_m$  имеют одинаковую размерность ( $L^2/T$ ) и одного порядка величины.

Значения  $N_\theta$  для флуктуаций температуры в свободной атмосфере на высотах около 18 км обычно составляют от  $10^{-6}$  до  $10^{-4}$  град<sup>2</sup>/с при слабой турбулентности, от  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$  град<sup>2</sup>/с при умеренной турбулентности и от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$  град<sup>2</sup>/с при сильной турбулентности [363].

## В.8. Расчет структурной характеристики

Как следует из (В.24), структурную характеристику  $C_\theta^2$  скалярной величины  $\theta$ , которой может быть показатель преломления или температура, можно найти, если известны скорость диссипации энергии  $\epsilon$  и скорость диссипации флуктуаций скаляра  $\theta$   $N_\theta$ :

$$C_\theta^2 = bN_\theta/\epsilon^{1/3}, \quad (\text{В. 35})$$

где  $N_\theta$  и  $\epsilon$  определены соответственно в разд. В.7 и В.6.

С другой стороны, величину  $C_\theta^2$  можно вычислить через внешний масштаб турбулентности  $L_0$ . Для этого рассмотрим структурную функцию  $D_\theta(r)$ , равную среднему квадрату разности флуктуаций в двух точках. Средние значения скаляра  $\langle \theta \rangle$  в этих двух точках должны отличаться друг от друга. В инерциальном интервале квадрат этой разности  $[r \text{ grad } \langle \theta \rangle]^2$  много меньше, чем средний квадрат разности флуктуаций  $D_\theta(r)$ . Однако на расстояниях порядка внешнего масштаба  $L_0$  эти две величины должны быть примерно одинаковыми:

$$D_\theta(L_0) \approx [L_0 \text{ grad } \langle \theta \rangle]^2. \quad (\text{В. 36})$$

Поэтому запишем

$$b(N_\theta/\epsilon^{1/3})L_0^{2/3} = b[L_0 \text{ grad } \langle \theta \rangle]^2, \quad (\text{В. 37})$$

где мы внесли в правую часть равенства множитель  $b$ , упрощающий определение  $L_0$ . Замечая, что в соответствии с (В.34)  $N_\theta = K(\text{grad } \langle \theta \rangle)^2$ , получаем

$$L_0 = [K/\epsilon^{1/3}]^{3/4}. \quad (\text{В. 38})$$

Поскольку  $D_\theta(r) = C_\theta^2 r^{2/3}$  и  $D_\theta(L_0) = b[L_0 \text{ grad } \langle \theta \rangle]^2$ , имеем

$$C_\theta^2 = bL_0^{4/3} (\text{grad } \langle \theta \rangle)^2. \quad (\text{В. 39})$$

Формулы (В.35) и (В.39) дают два различных способа расчета структурной характеристики  $C_\theta^2$ . В разд. В.10 для расчета  $C_n^2$  используется формула (В.39).

## В.9. Приграничный слой, свободная атмосфера, крупно- и мелкомасштабная турбулентность

В данном разделе мы дадим краткую классификацию различных типов турбулентности.

В турбулентности земной атмосферы можно выделить два разных типа. Турбулентность, образующаяся вблизи поверхности Земли, существенно зависит от высоты над поверхностью и от граничных условий. В этом случае говорят о турбулентности в «приграничном слое». Турбулентное движение возникает в атмосфере и на больших высотах. Тогда говорят о турбулентности в «свободной атмосфере».

Турбулентность в атмосфере можно разделить на мелкомасштабную и крупномасштабную. Крупномасштабная турбулентность характеризуется вихрями размером порядка сотен и тысяч километров, которые обуславливают глобальные погодные условия. Вихри мелкомасштабной турбулентности имеют размеры от миллиметров до сотен метров. Они вызывают рассматриваемые в этом приложении флуктуации показателя преломления.

## В.10. Структурная характеристика показателя преломления в приграничном слое<sup>1)</sup>

Как указано в разд. В.6, турбулентность вызывается изменением скорости ветра и архимедовыми силами. Поэтому в случае турбулентности в приграничном слое нужно проанализировать изменение с высотой средней горизонтальной скорости ветра. Из-за вязкости скорость ветра у поверхности Земли равна нулю, а в пределах первых нескольких сотен метров она меняется по логарифмическому закону<sup>2)</sup>

$$V(z) = (V_*/0,4) \ln(z/z_0), \quad (\text{В. 40})$$

где  $V_* = \text{const}$  называется скоростью трения, а параметр  $z_0$  зависит от шероховатости поверхности. Рассчитаем скорость образования энергии из-за изменения скорости ветра  $M$  (В.28):

$$M = K_m (dV/dz)^2. \quad (\text{В. 41})$$

Используя (В.40), находим

$$\partial V/\partial z = V_*/0,4 z. \quad (\text{В. 42})$$

Из экспериментальных данных следует, что в эту формулу нужно внести небольшую поправку. Поэтому запишем

$$\partial V/\partial z = (V_*/0,4z) \phi, \quad (\text{В. 43})$$

где  $\phi = 1$  в случае нейтральной атмосферы. Некоторые эмпирические формулы для  $\phi$  приведены ниже [см. (В.47)]. Как известно, коэффициент турбулентной вязкости  $K_m$  равен

$$K_m = 0,4 V_* z/\phi. \quad (\text{В. 44})$$

Используя (В.43) в (В.44), находим

$$M = (V_*^3/0,4z) \phi. \quad (\text{В. 45})$$

Если теперь принять во внимание и влияние архимедовых сил  $B$ , то можно записать

$$\epsilon = M + B = (V_*^3/0,4z) \phi_\epsilon, \quad (\text{В. 46})$$

где  $\phi_\epsilon$  включает влияние как  $\phi$ , так и  $B$ .

Приведенные ниже формулы для  $\phi$  и  $\phi_\epsilon$ , выраженные через число Ричардсона  $Ri$ , по-видимому, хорошо описывают имеющиеся экспериментальные данные [276, 277].

<sup>1)</sup> Случай свободной атмосферы рассмотрен в работах [177, 276—278, 363].

<sup>2)</sup> За исключением малых  $z$ , где скорость почти пропорциональна  $z$  [220].

В случае нестабильной атмосферы

$$\phi_e = (1 - 18 Ri)^{-1/4} - Ri, \quad \phi = (1 - 18 Ri)^{-1/4}. \quad (\text{В. 47a})$$

В случае стабильной атмосферы

$$\phi_e = \frac{1 - 0,7 Ri}{1 - 7 Ri}, \quad \phi = \frac{Ri}{1 - 7 Ri}. \quad (\text{В. 47б})$$

Коэффициент турбулентной диффузии  $K$  имеет значение, близкое к  $K_m$ , и приближенно равен

$$K = K_m / \phi = 0,4 V_* z / \phi^2. \quad (\text{В. 48})$$

Подставляя (В.46) и (В.48) в (В.38), получаем выражение для внешнего масштаба турбулентности:

$$L_0 = 0,4 z \phi^{-3/2} \phi_e^{-1/4}. \quad (\text{В. 49})$$

Используя (В.39), находим

$$C_\theta^2 = b (0,4 z)^{4/3} \phi^{-2} \phi_e^{-1/3} (\partial \langle \theta \rangle / \partial z). \quad (\text{В. 50})$$

Заметим здесь, что внешний масштаб турбулентности приблизительно равен  $0,4z$ . Этот результат подтверждает высказанное ранее предположение, что внешний масштаб порядка высоты над поверхностью.

Если пренебречь влиянием архимедовых сил, то  $\phi$  и  $\phi_e$  можно положить равными единице. В общем случае  $\phi$  и  $\phi_e$  мало отличаются от единицы.

На основании (В.50) можно вычислить структурную характеристику показателя преломления  $C_n$ :

$$C_n^2 = b (0,4 z)^{4/3} \phi^{-2} \phi_e^{-1/3} (\partial \langle n \rangle / \partial z)^2. \quad (\text{В. 51})$$

Градиент среднего показателя преломления в соответствии с (В.16) равен

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (\text{В. 52})$$

Предположим, что изменение влажности мало, так что

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial z} \approx \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (\text{В. 53})$$

где  $\partial n / \partial \theta$  вычислено в (В.16). Для расчета  $\partial \theta / \partial z$  заметим [336], что потенциальная температура  $\theta$  изменяется с высотой по логарифмическому закону:

$$\theta(z) = \text{const} + \theta_* \ln(z/z_0), \quad \theta_* = \text{const}. \quad (\text{В. 54})$$

Поэтому

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta_*}{z}. \quad (B.55)$$

Для определения  $\theta_*$  можно измерить температуры  $T_1$  и  $T_2$  на двух разных высотах  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда получим

$$\theta(z_1) = T_1 + \alpha_a z_1 \text{ и } \theta(z_2) = T_2 + \alpha_a z_2. \quad (B.56)$$

Подставляя (B.56) и (B.54) и заменяя производную разностью, получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{z} \left[ \frac{T_1 - T_2 + \alpha_a (z_1 - z_2)}{\ln(z_1/z_2)} \right]. \quad (B.57)$$

Подставляя (B.57) в (B.53), получаем выражение для  $\partial\langle n \rangle/\partial z$ . Используя (B.53), находим  $C_n^2$  из (B.51).

### В.11. Структурная характеристика $C_n$ для свободной атмосферы

Значения структурной характеристики  $C_n$  определены только для нескольких выбранных высот. Для оптического диапазона Хуфнагель предложил модельный профиль  $C_n$  [177]. В СВЧ-диа-

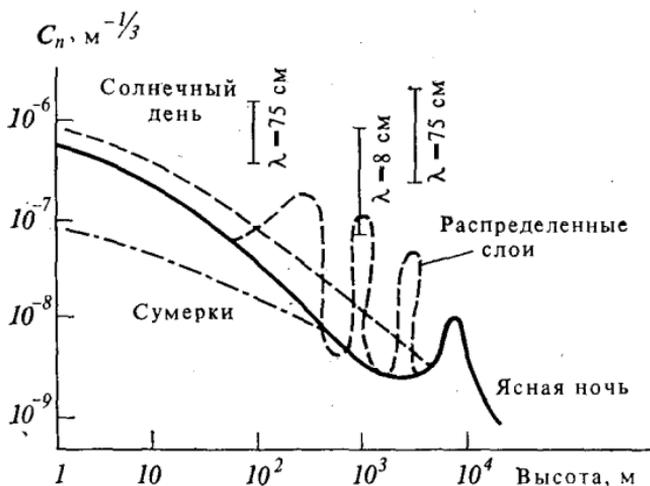


Рис. В.1. Зависимость структурной характеристики  $C_n$  флуктуаций показателя преломления в атмосфере от высоты.

пазоне значения  $C_n$ , по-видимому, должны существенно превышать соответствующие значения для оптического диапазона (рис. В.1). Имеются некоторые экспериментальные данные [79, 270] о высотных профилях температуры и  $C_n^2$  над сушей и океаном вплоть до высоты 3 км.

## В.12. Соотношение между структурной характеристикой $C_n$ и дисперсией флуктуаций показателя преломления

Турбулентная атмосфера является локально однородной средой, поэтому она описывается структурной функцией  $D_n(r)$ , а корреляционная функция  $B_n(r)$  для нее, вообще говоря, не существует. Это эквивалентно тому, что спектр показателя преломления  $\Phi_n(K)$  известен только в инерционном интервале при  $K \gg \gg 1/L_0$ , а при  $K < 1/L_0$  он анизотропен, и его вид не известен.

Тем не менее если модифицировать таким образом, чтобы он был изотропным и ограниченным в области больших масштабов, то турбулентную атмосферу можно считать однородной средой, для которой корреляционная функция имеет смысл.

Одна из таких модификаций уже предложена. Известно, что если

$$D_n(r) = 2[B_n(0) - B_n(r)] = 2 \langle n_1^2 \rangle \left[ 1 - \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{L_0}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{L_0}\right) \right], \quad (\text{B.58})$$

то

$$\Phi_n(K) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \frac{\langle n_1^2 \rangle L_0^3}{(1 + K^2 L_0^2)^{\nu+3/2}}. \quad (\text{B.59})$$

Чтобы формула (B.59) при  $K \gg 1/L_0$  переходила в колмогоровский спектр  $K^{-11/3}$ , нужно положить  $\nu = 1/3$ . Структурная функция при малых  $r$  принимает вид<sup>1)</sup>

$$D_n(r) = \frac{2\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \frac{\langle n_1^2 \rangle}{2^{2\nu}} \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2/3} \quad (\text{B.60})$$

и должна быть равна  $C_n^2 r^{2/3}$ . Отсюда получаем соотношение между структурной характеристикой  $C_n$  и дисперсией  $\langle n_1^2 \rangle$ , выражающееся через внешний масштаб турбулентности:

$$C_n^2 = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) L_0^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) 2^{2/3}} \langle n_1^2 \rangle = 1,91 \langle n_1^2 \rangle L_0^{-2/3}. \quad (\text{B.61})$$

Дисперсия флуктуаций показателя преломления  $\langle n_1^2 \rangle$  имеет порядок  $10^{-12}$ .

<sup>1)</sup> Заметим, что  $K_\nu(z) \sim \frac{\pi/2}{\sin \nu\pi} \left[ \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \right]$

при  $z \ll 1$ .

## Некоторые полезные математические формулы<sup>1)</sup>

Г.1. Функция Куммера  ${}_1F_1(a, c; z)$

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 t^2) t^{\mu-1} J_{\nu}(bt) dt =$$

$$= \frac{\Gamma((\nu + \mu)/2) (b/2a)^{\nu}}{2a^{\mu} \Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu + \mu}{2}, \nu + 1; -\frac{b^2}{4a^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\mu + \nu) > 0, \quad \operatorname{Re} a^2 > 0. \quad (\text{Г.1})$$

При  $|z| \rightarrow 0$

$${}_1F_1(a, b, z) \rightarrow 1 + (a/b)z + \dots \quad (\text{Г.2})$$

При  $|z| \rightarrow \infty$

$${}_1F_1(a, b; z) \rightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a}, & \operatorname{Re} z < 0; \end{cases} \quad (\text{Г.3})$$

$${}_1F_1(a, b; z) = e^z {}_1F_1(b-a, b; -z). \quad (\text{Г.4})$$

Г.2. Конфлюэнтная гипергеометрическая функция  $\Psi(a, b; z)$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt = \Gamma(a) \Psi(a, b; z),$$

$$\operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{Г.5})$$

При  $|z| \rightarrow 0$

$$\Psi(a, b; z) \rightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b}, & \operatorname{Re} b \geq 1, b \neq 1, \\ \frac{(-1)}{\Gamma(a)} \left[ \ln z + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \right], & b = 1, \\ \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)}, & \operatorname{Re} b < 1. \end{cases} \quad (\text{Г.6})$$

При  $|z| \rightarrow \infty$

$$\Psi(a, b; z) \rightarrow z^{-a}. \quad (\text{Г.7})$$

<sup>1)</sup> См. [3, 245].

## Г.3. Другие интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\nu+1} J_{\nu}(at) dt}{(t^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^{\mu} z^{\nu-\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az),$$

$$a > 0, \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \left(2\mu + \frac{3}{2}\right)^1. \quad (\Gamma. 8)$$

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(at) \exp(-p^2 t^2) t^{\nu+1} dt = \frac{a^{\nu}}{(2p^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right). \quad (\Gamma. 9)$$

$$\int_0^{\infty} t^{-(p+1)} \sin^2 t dt = \frac{2^{p-2}\pi}{\sin(\pi p/2) \Gamma(p+1)}, \quad 0 < p < 2. \quad (\Gamma. 10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2 + bt) dt = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \operatorname{Re} a > 0. \quad (\Gamma. 11)$$

---

<sup>1)</sup> См. [161].

# Литература

1. *Ables J. G., Komesaroff M. M., Hamilton P. A.*, *Astrophys. Lett.*, **6**, 147 (1970).
2. *Abramovich G. N.*, *The Theory of Turbulent Jet*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
3. *Abramovitz M., Stegun I. A.*, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. U. S. Govt. Printing Office, Washington D. C., 1964.
4. *Ackley M. H.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 1279 (1971).
5. *Ament W. S.*, *Proc. IRE*, **41**, 142 (1953).
6. *Anderson R. C., Browell E. V.*, *Appl. Opt.*, **11**, 1345 (1972).
7. *Backus G., Gilbert F.*, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A***266**, 123 (1970).
8. *Bahar E.*, *J. Geophys. Res.*, **70**, 1921 (1971).
9. *Baker D. W.*, *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, **SU-17**, 170 (1970).
10. *Vanakh V. A. et al.*, *JOSA*, **64**, 516 (1974).
11. *Барабаненков Ю. Н.* — *ЖЭТФ*, 1968, **54**, с. 1773.
12. *Барабаненков Ю. Н.* — *ЖЭТФ*, 1969, **56**, с. 1262.
13. *Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М.* — *ЖЭТФ*, 1967, **53**, с. 978.
14. *Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М.* — *Изв. вузов — Радиофизика*, 1968, **11**, с. 719.
15. *Барабаненков Ю. Н. и др.* — *УФН*, 1970, **102**, с. 3.
16. *Barrick D. E.*, *IEEE Trans.*, **AP-20**, 2 (1972).
17. *Barrick D. E., Peake W. H.*, *Radio Sci.*, **3**, 865 (1968).
18. *Barrick D. E.*, *Radio Sci.*, **6**, 517 (1971).
19. *Башаринов А. Е. и др.* — *Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана*, 1970, **6**, с. 366.
20. *Batchelor G. K.*, *Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1953.
21. *Batchelor G. K.*, *Scientific Papers of G. I. Taylor, Vol. 4*. Cambridge Univ. Press, London, and New York, 1971.
22. *Bates R. H. T.*, *Electron. Lett.*, **5**, 654 (1969).
23. *Bean B. R., Dutton E. J.*, *Radio Meteorology*, Dover, New York, 1968.
24. *Beard C. I.*, *IRE Trans.*, **AP-9**, 5, 740 (1961).
25. *Beard C. I.*, *IRE Trans.*, **AP-10**, 721 (1962).
26. *Beard C. I.*, *IEEE Trans.*, **AP-15**, 5, 649 (1967).
27. *Beard C. I., Kays T. H., Twersky V.*, *Appl. Opt.*, **4**, 1299 (1965).
28. *Beard C. I., Kays T. H., Twersky V.*, *IEEE Trans.*, **AP-15**, 99 (1967).
29. *Beard C. I., Kreiss W. T., Tank W. G.*, *Proc. IEEE*, **57**, 446 (1969). [Имеется перевод: *Бурд С., Крейсс В., Тэнк В.* — *ТИИЭР*, 1969, **57**, с. 83.]
30. *Beckmann P., Spizzichino A.*, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon, Oxford, 1963.
31. *Bendat J. S., Piersol A. G.*, *Measurement and Analysis of Random Data*, Wiley, New York, 1966.
32. *Bendat J. S., Piersol A. G.*, *Random Data*, Interscience, New York, 1971.
33. *Beran M. J.*, *Statistical Continuum Theories*, Wiley (Interscience), New York, 1968.
34. *Beran M. J.*, *JOSA*, **60**, 518 (1970).
35. *Beran M. J.*, *Radio Sci.*, **10**, 15 (1975).
36. *Beran M. J., Ho T. L.*, *JOSA*, **59**, 1134 (1969).
37. *Beran M. J., Parrent G. B., Jr.*, *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

38. *Beran M. J.*, Whitman, *JOSA*, **61**, 1044 (1971).
39. *Booker H. G.*, *J. Geophys. Res.*, **61**, 673 (1956).
40. *Booker H. G.*, *J. Atmos. Terrestrial Phys.*, **8**, 204 (1956).
41. *Booker H. G.*, *Proc. IRE*, **46**, 294 (1958).
42. *Booker H. G., Gordon W. E.*, *J. Geophys. Res.*, **55**, 241 (1950).
43. *Booker H. G., Gordon W. E.*, *Proc. IRE*, **38**, 401 (1950).
44. *Борисов Б. Д., Сазанович В. М., Хмелевцов С. С.* — *Изв. вузов — Физика*, 1969, **12**, с. 103.
45. *Born M., Wolf E.*, *Principles of Optics*, MacMillan, New York, 1964. [Имеется перевод: *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970.]
46. *Bouricius G. M. B., Clifford S. F.*, *JOSA*, **60**, 1484 (1970).
47. *Bradley L. C., Herrmann J.*, *Appl. Opt.*, **13**, 331 (1974).
48. *Bremmer H.*, *J. Res. Nat. Bur. Std.*, **68D**, 967 (1964).
49. *Bremmer H.*, *Radio Sci.*, **8**, 511 (1973).
50. *Bridges W. B. et al.*, *Appl. Opt.*, **13**, 291 (1974).
51. *Brinkworth B. J.*, *Appl. Opt.*, **12**, 427 (1973).
52. *Brookner E.*, *IEEE Trans.*, **COM-18**, 396 (1970).
53. *Brown H. E., Clifford S. F.*, *JASA*, **54**, 36 (1973).
54. *Brown W. P., Jr.*, *JOSA*, **56**, 1045 (1966).
55. *Brown W. P., Jr.*, *JOSA*, **57**, 1539 (1967).
56. *Brown W. P.*, *JOSA*, **61**, 1051 (1971).
57. *Brown W. P.*, *JOSA*, **62**, 45 (1972).
58. *Brown W. P.*, *JOSA*, **62**, 966 (1972).
59. *Bucher E. A., Lerner R. M.*, *Appl. Opt.*, **12**, 2401 (1973).
60. *Buck A. L.*, *Appl. Opt.*, **6**, 703 (1967).
61. *Budden K. G., Uscinski B. J.*, *Proc. Roy. Soc. London*, **A316**, 315 (1970); **A321**, 15 (1971); **A330**, 65 (1972).
62. *Bugnolo D.*, *J. Appl. Phys.*, **31**, 1176 (1960).
63. *Bugnolo D.*, *IRE Trans.*, **AP-9**, 89 (1961).
64. *Bugnolo D.*, *Phys. Rev.*, **A6**, 477 (1972).
65. *Burrows M. L.*, *Electron. Lett.*, **5**, 277 (1969).
66. *Burrows M. L.*, *Electron. Lett.*, **5**, 694 (1969).
67. *Buser R. G.*, *JOSA*, **61**, 488 (1971).
68. *Carlson F. P.*, *JOSA*, **59**, 1343 (1969).
69. *Carlson F. P., Ishimaru A.*, *JOSA*, **59**, 319 (1969).
70. *Чернов Л. А.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: изд-во АН СССР, 1958.
71. *Chow L. C., Tien C. L.*, *Appl. Opt.*, **15**, 378 (1976).
72. *Clifford S. F.*, *JOSA*, **61**, 1282 (1971).
73. *Clifford S. F., Strohbehn J. W.*, *IEEE Trans.*, **AP-18**, 264 (1970).
74. *Clifford S. F., Ochs G. R., Lawrence R. S.*, *JOSA*, **64**, 148 (1974).
75. *Clifford S. F., Ochs G., Wang T.-I.*, *Appl. Opt.*, **14**, 2844 (1975).
76. *Cohen A.*, *Appl. Opt.*, **14**, 2873 (1975).
77. *Collett E., Alfjerness R., Forbes T.*, *Appl. Opt.*, **12**, 1067 (1973).
78. *Collin R. E.*, *Radio Sci.*, **6**, 991 (1971).
79. *Consortini A., Ronchi L., Moroder E.*, *JOSA*, **63**, 1246 (1973).
80. *Coulman C. E.*, *JOSA*, **56**, 1232 (1966).
81. *Crane R. K.*, *Proc. IEEE*, **59**, 173 (1971). [Имеется перевод: *Крейн Р.* — ТИИЭР, 1971, **59**, с. 67.]
82. *Crane R. K.*, *Proc. IEEE*, **65**, 180 (1977). [Имеется перевод: *Крейн Р.* — ТИИЭР, 1977, **65**, с. 5.]
83. *Crombie D. D.*, *Nature (London)*, **175**, 681 (1955).
84. *Crosignani B., DiPorto P., Bertolotti M.*, *Statistical Properties of Scattered Light*, Academic Press, New York, 1975.
85. *Dabberdt W. F.*, *Appl. Opt.*, **12**, 1536 (1973).
86. *Dabberdt W. F., Johnson W. B.*, *Appl. Opt.*, **12**, 1544 (1973).

87. *Davenport W. B., Jr., Root W. L.*, Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958. [Имеется перевод: Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М.: ИЛ, 1960.]
88. *Davis J. I.*, Appl. Opt., **5**, 139 (1966).
89. *Deitz P. H., Wright N. J.*, JOSA, **59**, 527 (1969).
90. *Derr V. E.*, Remote Sensing of the Troposphere, S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1972.
91. *Derr V. E., Little C. G.*, Appl. Opt., **9**, 1976 (1970).
92. *DeSanto J. A.*, Math. Phys., **12**, 1913 (1971).
93. *DeSanto J. A.*, J. Math. Phys., **14**, 1566 (1973).
94. *Deshamps G. A., Сабаган Н. С.*, IEEE Trans., **AP-20**, 268 (1972).
95. *de Wolf D.*, JOSA, **58**, 461 (1968).
96. *de Wolf D.*, JOSA, **59**, 1455 (1969).
97. *de Wolf D.*, IEEE Trans., **AP-19**, 254 (1971).
98. *de Wolf D.*, IEEE, Trans., **AP-20**, 805 (1972).
99. *de Wolf D.*, JOSA, **63**, 171 (1973).
100. *de Wolf D.*, JOSA, **64**, 360 (1974).
101. *Dickey F. M. et al.*, IEEE Trans., **GE-12**, 19 (1974).
102. *Долин Л. С.* — Изв. вузов. — Радиофизика, 1966, **9**, № 1, с. 61.
103. *Долин Л. С.* — Изв. вузов. — Радиофизика, 1968, **11**, № 6, с. 840.
104. *Dowling J. A., Livingston P. M.*, JOSA, **63**, 846 (1973).
105. *Du Castel F.*, Tropospheric Radiowave Propagation Beyond the Horizon, Pergamon, Oxford, 1966.
106. *Dunphy J. R., Kerr J. P.*, JOSA, **64**, 1015 (1974).
107. *Dunphy S. Q.*, в кн.: Optical Aspects of Oceanography (N. G. Jerlov and E. S. Nielsen, eds.), Chapter 7, Academic Press, New York, 1974.
108. *Dyson F. J.*, JOSA, **65**, 551 (1975).
109. *Edenhofer P., Franklin J. N., Papas C. H.*, IEEE Trans., **AP-21**, 260 (1973).
110. *El-Khamy S. E., McIntosh R. E.*, IEEE Trans., **AP-21**, 269 (1973).
111. *England A. W.*, J. Geophys. Res., **80**, 4484 (1975).
112. *Erickson K. R., Fry F. J., Jones J. P.*, IEEE Trans., **SU-21**, 144 (1974).
113. *Ерухимов Л. М.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15**, с. 821.
114. *Fante R. L.*, IEEE Trans., **AP-21**, 750 (1973).
115. *Fante R. L.*, JOSA, **64**, 592 (1974).
116. *Fante R. L.*, Proc. IEEE, **63**, 1669 (1975): [Имеется перевод: Фэнте Р. — ТИИЭР, 1975, **63**, № 12, с. 43.]
117. *Fante R. L.*, Radio Sci., **11**, 215 (1976).
118. *Fante R. L., Poirier J. L.*, Appl. Opt., **12**, 2247 (1973).
119. *Feinstein D. L. et al.*, Phys. Fluids, **15**, 1641 (1972).
120. *Фейзулин З. И., Кравцов Ю. А.* — Изв. вузов. — Радиофизика, 1967, **10**, № 1, с. 68.
121. *Фейзулин З. И.* — Радиотехника и электроника, 1970, **15**, № 7, с. 1390.
122. *Feller W.*, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vols. 1 and 2, Wiley, New York, 1957.
123. *Fisher M. J., Krause F. R.*, J. Fluid Mech., **28**, 705 (1967)
124. *Fitsmaurice M. W., Bufton J. L.*, JOSA, **59**, 462 (1969).
125. *Fjeldbo G., Eshleman V. R.*, Radio Sci., **4**, 879 (1969).
126. *Foldy L. O.*, Phys. Rev., **67**, 107 (1945).
127. *Fortuin L.*, JASA, **50**, 1209 (1970).
128. *Franklin J. N.*, Matrix Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
129. *Franklin J. N.*, J. Math. Anal. Appl., **31**, 682 (1970).
130. *Fried D. L.*, JOSA, **54**, 10, 1380 (1964).
131. *Fried D. L.*, JOSA, **56**, 10, 1372 (1966).
132. *Fried D. L.*, Proc. IEEE, **55**, 57 (1967). [Имеется перевод: Фрид Д. — ТИИЭР, 1967, **55**, с. 62.]
133. *Fried D. L.*, JOSA, **57**, 169 (1967)

134. *Fried D. L.*, JOSA, **57**, 8, 980 (1967).
135. *Fried D. L.*, JOSA, **57**, 2, 268 (1967).
136. *Fried D. L.*, JOSA, **58**, 961 (1968).
137. *Fried D. L.*, JOSA, **67**, 421 (1977).
138. *Fried D. L.*, *Cloud J. D.*, JOSA, **56**, 1667 (1966).
139. *Fried D. L.*, *Seidman J. B.*, JOSA, **57**, 181 (1967).
140. *Fried D. L.*, *Mevers G. E.*, *Keister M. P., Jr.*, JOSA, **57**, 787 (1967).
141. *Friedlander S. K.*, *Topper L.*, Turbulence, Wiley (Interscience), New York, 1961.
142. *Furush V.*, в кн.: Probabilistic Methods in Applied Mathematics (A. T. Barucha-Reid, ed.), Vol. 1, pp. 76—198, Academic Press, New York, 1968.
143. *Fung A. K.*, J. Franklin Inst., **2**, 125 (1968).
144. *Fung A. K.*, Am. J. Phys., **48**, 127 (1970).
145. *Fung A. K.*, *Chan. H. L.*, IEEE Trans., **AP-17**, 590 (1969).
146. *Furuhamata Y.*, Radio Sci., **11**, 763 (1976).
147. *Furuhamata Y.*, *Fukushima M.*, Boundary-Layer Meteorol., **4**, 433 (1973).
148. *Furutsu K.*, JOSA, **62**, 240 (1972).
149. *Furutsu K.*, Radio Sci., **10**, 29 (1975).
150. *Gallager R. G.*, Characterisation and measurement of time-and frequency-spread channels, MIT Lincoln Lab., TR 352, Reference Documentation Center, AD44-3715, 1964.
151. *Gardner G. S.*, *Plonus M. A.*, Radio Sci., **10**, 129 (1975).
152. *Gebhards F. G.*, Appl. Opt., **15**, 1479 (1976).
153. *Gebhardt F. G.*, *Collins S. A., Jr.*, JOSA, **59**, 1139 (1969).
154. *Гельфанд И. М.*, *Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
155. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1967.
156. *Гнедин Ю. Н.*, *Долгинов А. З.* — ЖЭТФ, 1963, **45**, с. 1136.
157. *Golitsyn G. S.*, ICARUS, **13**, 1 (1970).
158. *Goodman J. W.*, Fourier Optics, McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.]
159. *Goodman J. W.*, JOSA, **66**, 1145 (1976).
160. *Грачева М. Е.*, *Гурвич А. С.* — Изв. вузов. — Радиофизика, 1965, **8**, с. 717.
161. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
162. *Granatstein V. L. et al.*, Appl. Opt., **11**, 1217 (1972).
163. *Greenwood D. P.*, *Fried D. L.*, JOSA, **66**, 193 (1976).
164. *Guinard N. W.*, *Daley J. C.*, Proc. IEEE, **58**, 543 (1970). [Имеется перевод: *Гинард Н.*, *Дейли Д.* — ТИИЭР, 1970, **58**, с. 31.]
165. *Гурвич А. С.* — Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 1969, **5**, с. 1172.
166. *Гурвич А. С.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1969, **12**, с. 147.
167. *Gurovich A. S.*, *Tatarski V. I.*, Radio Sci., **10**, 3 (1975).
168. *Гурвич А. С.*, *Каллистратова М. А.*, *Тиме Н. С.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, **11**, с. 1360.
169. *Гурвич А. С.*, *Калинин В. И.*, *Матвеев Д. Т.* — Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана 1973, **9**, с. 712.
170. *Heidbreder G. R.*, *Mitchell R. L.*, JOSA, **56**, 1677 (1969).
171. *Heneghan J. M.*, *Ishimaru A.*, IEEE Trans., **AP-12**, 457 (1974).
172. *Ho T. L.*, JOSA, **59**, 385 (1969).
173. *Ho T. L.*, *Beran M. J.*, JOSA, **58**, 10, 1335 (1968).
174. *Hoffman W. C.*, ed., Statistical Methods in Radio Wave Propagation, Pergamon, Oxford, 1960.
175. *Homstad G. E. et al.*, JOSA, **64**, 162 (1974).
176. *Hong S. T.*, *Ishimaru A.*, Radio Sci., **11**, 551 (1976).
177. *Hufnagel R.*, *Stanley N.*, JOSA, **54**, 52 (1964).

178. *Humphreys W. J.*, Physics of the Air, Dover, New York, 1964.
179. *Ishimaru A.*, Radio Sci., **4**, 295 (1969).
180. *Ishimaru A.*, Proc. IEEE, **57**, 407 (1969). [Имеется перевод: Исимару А. — ТИИЭР, 1969, **57**, с. 40.]
181. *Ishimaru A.*, IEEE Trans., **AP-20**, 10 (1972).
182. *Ishimaru A.*, IEEE Trans., **AP-21**, 47 (1973).
183. *Ishimaru A.*, Radio Sci., **10**, 45 (1975).
184. *Ishimaru A.*, Proc. IEEE, **65**, 1030 (1977). [Имеется перевод: Исимару А. — ТИИЭР, 1977, **65**, с. 46.]
185. *Ishimaru A.*, в кн.: Laser Beam Propagation Through the Atmosphere (J. W. Strohbehn, ed.), Chapter 3, Topics in Applied Physics, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.
186. *Ishimaru A., Hong S. T.*, Radio Sci., **10**, 637 (1975).
187. *Исюмов А. О.* — Радиотехника и электроника, 1968, **13**, с. 1155.
188. *Jahnke E., Emde F., Losch F.*, Table of Higher Functions, McGraw-Hill, New York, 1960. [Имеется перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1977.]
189. *Janes H. B., Thompson M. C., Jr.*, IEEE Trans., **AP-21**, 263 (1973).
190. *Janes H. B. et al.*, IEEE Trans., **AP-18**, 447 (1970).
191. *Kalaschnikov N. P.*, Nuovo Cimento, XLV, A, 2, 6458 (1966).
192. *Калашников Н. П., Рязанов М. И.* — ЖЭТФ, 1966, **50**, с. 459.
193. *Кайдановский Н. Л., Смирнова Н. А.* — Радиотехника и электроника, 1965, **10**, с. 1574.
194. *Keller J. B.*, Proc. Symp. Appl. Math., **16**, 145 (1964).
195. *Keller J. B.*, JOSA, **59**, 1003 (1969).
196. *Keller J. B., Karal F. C., Jr.*, J. Math. Phys., **7**, 661 (1966).
197. *Kennedy R. S., Hoverstein E. V.*, IEEE Trans., **IT-14**, 716 (1968).
198. *Kennedy R. S., Karp S.*, Proc. MIT—NASA Workshop NASA SP-217, U. S. Govt. Printing Office, Washington D. C., 1969.
199. *Kerr J. R.*, JOSA, **62**, 916 (1972).
200. *Kerr J. R.*, JOSA, **62**, 1040 (1972).
201. *Kerr J. R., Eiss R.*, JOSA, **63**, 1 (1972).
202. *Kerr J. R. et al.*, Proc. IEEE, **58**, 1661 (1970). [Имеется перевод: Керр Д. и др. — ТИИЭР, 1970, **58**, с. 305.]
203. *Khmelevtsov S. S.*, Appl. Opt., **12**, 2421 (1973).
204. *Хмелевцов С. С., Цыбк Р. Ш.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, с. 146.
205. *Kinoshita Y., Asakura T., Suzuki M.*, JOSA, **58**, 798 (1968).
206. *Кляцкин В. И.* — ЖЭТФ, 1969, **57**, с. 952.
207. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* — ЖЭТФ, 1968, **55**, с. 662.
208. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* — ЖЭТФ, 1970, **58**, с. 624.
209. *Knollman G. C.*, J. Appl. Phys., **36**, 3704 (1965).
210. *Комиссаров В. М.* — ЖЭТФ, 1967, **52**, с. 711.
211. *Кон А. И.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, с. 61.
212. *Кон А. И., Фейзулин З. И.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, с. 71.
213. *Кон А. И., Татарский В. И.* — Изв. вузов — Радиофизика, 1965, **8**, с. 870.
214. *Korff D., Dryden G., Leavitt R. P.*, JOSA, **65**, 1321 (1975).
215. *Krishen K.*, IEEE Trans., **AP-19**, 573 (1970).
216. *Krishen K.*, J. Geophys. Res., **76**, 6528 (1971).
217. *Krishen K.*, J. Geophys. Res., **78**, 1952 (1973).
218. *Курикса А. А.* — Радиотехника и электроника, 1968, **13**, с. 771.
219. *Laing M. B.*, IEEE Trans., **AP-19**, 712 (1971).
220. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. — М.: ГТТЛ, 1953.
221. *Lang K. R.*, Astrophys. J., **164**, 249 (1971).
222. *Lang K. R.*, Astrophys. Lett., **7**, 175 (1971).
223. *Lawrence R. S.*, JOSA, **62**, 701 (1972).

224. *Lawrence R. S.*, Remote sensing by optical line-of-sight propagation, в кн.: Remote Sensing of the Troposphere by V. E. Derr, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1972.
225. *Lawrence R. S., Strohheln J. W.*, Proc. IEEE, **58**, 10, 1523 (1970). [Имеется перевод: Лоуренс Р., Стробельн Д. — ТИИЭР, 1970, **58**, с. 130.]
226. *Lawrence R. S., Ochs G. R., Clifford S. F.*, Appl. Opt., **11**, 239 (1972).
227. *Lax M.*, Rev. Mod. Phys., **23**, 287 (1951).
228. *Leader J. C.*, IEEE Trans., **AP-19**, 786 (1971).
229. *Lee L. C.*, J. Math. Phys., **15**, 1431 (1974).
230. *Lee L. C., Jokipii J. R.*, Astrophys. J., **201**, 532 (1975).
231. *Lee L. C., Jokipii J. R.*, Astrophys. J., **196**, 695 (1975).
232. *Lee M. H., Holmes J. F., Kerr J. R.*, JOSA, **66**, 1164 (1976).
233. *Lee R. W.*, JOSA, **64**, 1295 (1974).
234. *Lee R. W., Harp J. C.*, Proc. IEEE, **57**, 375 (1969). [Имеется перевод: Лу Р., Харп Д. — ТИИЭР, 1969, **57**, с. 7.]
235. *Lee R. W., Waterman T., Jr.*, Proc. IEEE, **54**, 454 (1966). [Имеется перевод: Лу Р., Уотерман Т. — ТИИЭР, 1966, **54**, с. 13.]
236. *Levi L.*, Applied Optics, Wiley, New York, 1968.
237. *Liu C. H., Wernik A. W., Yeh K. C.*, IEEE Trans., **AP-20**, 624 (1974).
238. *Livingston P. M., Deitz P. H., Alcaraz E. C.*, JOSA, **60**, 925 (1970).
239. *Лорова Н. А.* — УФН, 1975, **115**, с. 603.
240. *Lumley J. L., Panofsky J. A.*, The Structure of Atmospheric Turbulence, Wiley (Interscience), New York, 1964.
241. *Lutomirski R. F., Buser R. G.*, Appl. Opt., **12**, 2153 (1973).
242. *Lutomirski R. F., Yura H. T.*, JOSA, **59**, 1247 (1969).
243. *Lutomirski R. F., Yura H. T.*, JOSA, **61**, 482 (1971).
244. *Lutomirski R. F., Yura H. T.*, Appl. Opt., **10**, 1652 (1971).
245. *Magnus W., Oberhettinger F.*, Formulas and Theorems for Functions of Mathematical Physics, Chelsea, New York, 1954.
246. *Mandics P. A., Lee R. W.*, Proc. IEEE, **57**, 685 (1969). [Имеется перевод: Мандикс П., Лу Р. — ТИИЭР, 1969, **57**, с. 339.]
247. *Mandics P. A., Lee R. W., Waterman A. T., Jr.*, Radio Sci., **8**, 185 (1973).
248. *Mandics P. A. et al.*, Radio Sci., **9**, 723 (1974).
249. *Mano K.*, JOSA, **59**, 318 (1969).
250. *Marcuwitz N.*, J. Math. Phys., **15**, 869 (1974).
251. *Mercier R. P.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **58**, 382 (1962).
252. *Mertens L. E.*, в кн., Water Photography, Wiley, New York, 1970.
253. *Middleton D.*, Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, New York, 1960. [Имеется перевод: Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, т. I, 1961, т. II, 1962.]
254. *Millar R. F.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **65**, 773 (1969).
255. *Millar R. F.*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **69**, 217 (1971).
256. *Millar R. F., Burrows M. L.*, Electron. Lett., **5**, 416 (1969).
257. *Milton J. E., Anderson R. C., Browell E. V.*, Appl. Opt., **11**, 697 (1972).
258. *Mintzer D.*, JASA, **25**, 922 (1953).
259. *Mitchell R. L.*, JOSA, **58**, 1267 (1968).
260. *Mitra R.*, Computer Techniques for Electromagnetics, Pergamon, Oxford, 1973. [Имеется перевод: Миттра Р. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977.]
261. *Molyneux J. E.*, JOSA, **60**, 248 (1971).
262. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, ч. I, 1965, ч. II, 1967.
263. *Muchmore R. B., Wheelon A. D.*, Proc. IRE, **43**, 1437 (1955).
264. *Muchmore R. B., Wheelon A. D.*, IEEE Trans., **AP-11**, 46 (1963).
265. *Muller R. A., Buffington A.*, JOSA, **64**, 1200 (1974).
266. *Murata K.*, Progr. Opt., **5**, 201 (1966).
267. *Norton K. A. et al.*, Proc. IRE, **43**, 1341 (1955)

268. Новиков Е. А. — ЖЭТФ, 1964, 47, с. 1919.
269. Ochs G. R., Lawrence R. S., JOSA, 59, 226 (1969).
270. Ochs G. R., Lawrence R. S., NOAA Technical Rep. ERL 251-WPL22, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1972.
271. Ochs G. R., Bergman R. R., Snyder J. R., JOSA, 59, 231 (1969).
272. Ochs G. R. et al., Appl. Opt., 15, 2504 (1976).
273. Olsen T. H., Goldberg A., Rogers M., Aircraft Wake Turbulence and its Detection, Plenum Press, New York, 1971.
274. O'Neill E. L., Introduction to Statistical Optics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963. [Имеется перевод: О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. — М.: Мир, 1966.]
275. Panchev S., Random Functions and Turbulence, Pergamon, Oxford, 1971.
276. Panojsky H. A., J. Geophys. Res., 73, 6047 (1968).
277. Panojsky H. A., Radio Sci., 4, 1101 (1969).
278. Panojsky H. A., Radio Sci., 4, 1143 (1969).
279. Pao Y. H., Goldberg A., Clear Air Turbulence and its Detection, Plenum Press, New York, 1969.
280. Peake W. H. et al., IEEE Trans., AP-18, 716 (1970).
281. Pearson J. E., Appl. Opt., 15, 622 (1976).
282. Pearson J. E. et al., Appl. Opt., 15, 611 (1976).
283. Pearson J. E., Kokorowski S. A., Pedinoff M. E., JOSA, 66, 1261 (1976).
284. Pekeris C. L., Phys. Rev., 71, 268 (1947).
285. Phillips D. L., JACM, 9, 84 (1961).
286. Phillips O. M., The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1969. [Имеется перевод: Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. — М.: Мир, 1969.]
287. Pionus M. A., Su H. H., Gardner C. S., IEEE Trans. AP-20, 801 (1972).
288. Покасов В. В., Хмелевцов С. С. — Изв. вузов — Физика, 1968, 11, с. 82.
289. Porcello L. J., IEEE Trans., AES-6, 636 (1970).
290. Post M. J., JOSA, 66, 483 (1976).
291. Primmerman C. A., Fouche D. G., Appl. Opt., 15, 990 (1976).
292. Prokhorov A. M. et al., Proc. IEEE, 63, 790 (1975). Имеется перевод: Прохоров А. М. и др. — ТИИЭР, 1975, 63, с. 4.]
293. Rice S. O., Comm Pure Appl. Math., 4, 351 (1951).
294. Rino C. L., IEEE Trans., AP-24, 912 (1976).
295. Roddier C., Roddier F., JOSA, 63, 661 (1973).
296. Ruck G. T. et al., Radar Cross Section Handbook, Vols. I and II, Plenum Press, New York, 1970.
297. Rumsey V. H., Radio Sci., 10, 107 (1975).
298. Ryde J. W., Proc. Roy. Soc. London, A131, 451 (1931).
299. Ryde J. W., Cooper B. S., Proc. Roy. Soc. London, A131, 464 (1931).
300. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В., Татарский В. И. — ЖЭТФ, 1965, 48, с. 656.
301. Salpeter E. E., Astrophys. J., 147, 433 (1967).
302. Sancer M. I., Varvatsis A. D., JOSA, 60, 654 (1970).
303. Saxton J. A., ed., Proc. Colloq. Spectra Meteorol. Variables, Stockholm, June, Radio Sci., 4, 12 (1969).
304. Schmeltzer R. A., Quart. Appl. Math., 24, 339 (1967).
305. Сьедин В. Я., Хмелевцов С. С., Небольсин М. Ф. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, с. 44.
306. Сергеенко Т. Н. — Радиотехника и электроника, 1970, 15, с. 465.
307. Shapiro J. H., Radio Eng. Electron. Phys., 15, 399 (1976).
308. Shapiro J. H., JOSA, 66, 469 (1976).
309. Shapiro J. H., в кн.: Laser Beam Propagation through the Atmosphere (ed. J. N. Strohbehm), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.
310. Shen L., IEEE Trans., AP-18, 493 (1970).
311. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970.

312. Широкова Т. А. — Акуст журн., 1963, 9, с. 101.
313. Шишов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, с. 866.
314. Шишов В. И. — Астрономический журн., 1973, 50, с. 941.
315. Silverman R. A., J. Appl. Phys., 28, 506 (1957).
316. Silverman R. A., IRE Trans., IT-3(3), 182 (1957).
317. Silverman R. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., 54, 530 (1958).
318. Sneddon I. N., Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York, 1951.
319. Snyder H. S., Scott W. T., Rev. Phys., 76, 220 (1949).
320. Sommerfeld A., Mechanics of Deformable Bodies, Acad. Press, New York, 1950. [Имеется перевод: Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. — М.: ИЛ, 1954.]
321. Sreenivasiah I., Ishimaru A., Hong S. T., Radio Sci., 11, 775 (1976).
322. Staras H., J. Appl. Phys., 23, 1152 (1952).
323. Staras H., Proc. IRE, 43, 1374 (1955).
324. Stogryn A., Radio Sci., 5, 1397 (1970).
325. Stott P., J. Phys. A, 1, 675 (1968).
326. Strand O. N., Westwater E. R., JАСМ, 15, 100 (1968).
327. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
328. Strohbehn J. W., Proc. IEEE, 56, 1301 (1968). [Имеется перевод: Стробен Д. — ТИИЭР, 1968, 56, с. 46.]
329. Strohbehn J. W., Prog. Opt., 9, 75 (1971).
330. Strohbehn J. W., ed., Laser beam propagation in the atmosphere, в кн.: Topics in Applied Physics, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.
331. Strohbehn J. W., Wang W. T., Speck J. P., Radio Sci., 10, 59 (1975).
332. Strohbehn J. W., Clifford S. F., IEEE Trans., AP-15, 416 (1967).
333. Swift C. T., ed., Special Issue on Radio Oceanography, IEEE Trans., AP-25, 1 (1977).
334. Szymanski H. A., Raman Spectroscopy, Plenum Press, New York, 1967.
335. Tai C.-T., IEEE Trans., AP-20, 114 (1972).
336. Татарский В. И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. — М.: изд-во АН СССР, 1959.
337. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
338. Татарский В. И., Герцеништейн М. Е. — ЖЭТФ, 1963, 44, с. 676.
339. Tavis M. T., Yura H. T., Appl. Opt., 15, 2922 (1976).
340. Taylor L. S., J. Math. Phys., 13, 590 (1972).
341. Tennekes H., Lumley J. O., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
342. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1963, 153, с. 49.
343. Titterton P. J., JOSA, 63, 439 (1973).
344. Torrieri D. J., Taylor L. S., JOSA, 62, 145 (1972).
345. Tsang L., Kong J. A., Radio Sci., 11, 599 (1976).
346. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. — УФН, 1970, 102, с. 345.
347. Twersky V., IRE Trans. AP-5, 81 (1957).
348. Twersky V., Proc. Am. Math. Soc. Symp. Stochas. Proc. Math. Phys. Eng., 16, 84 (1964).
349. Twersky V., в кн.: Electromagnetic Scattering (eds. R. L. Rowell, R. S. Stein), p. 579, Gordon and Breach, New York, 1967.
350. Twersky V., JOSA, 60, 908 (1970).
351. Twersky V., JOSA, 60, 1084 (1970).
352. Twersky V., JASA, 53, 96 (1973).
353. Twersky V., JOSA, 65, 524 (1975).
354. Ulaby F. T., Batilivala P. P., IEEE Trans., AP-24, 11 (1976).
355. Uscinski B. J., Proc. Roy. Soc., London, A336, 379 (1974).
356. Valenzuela G. R., IEEE Trans., AP-15, 552 (1967).
357. Valenzuela G. R., Radio Sci., 3, 12 (1968).

358. Valenzuela G. R., *Radio Sci.*, **3**, 1057 (1968).
359. Valenzuela G. R., *Proc. IEEE*, **58**, 1279 (1970). [Имеется перевод: Валенцуэла Г. — ТИИЭР, 1970, 58, ц. 163.]
360. Valenzuela G. R., Laing M. B., *J. Geophys. Res.*, **75**, 551 (1970).
361. Valenzuela G. R., Laing M. B., *J. Fluid Mech.*, **54**, 507 (1972).
362. Villars F., Weisskopf V. F., *Proc. IRE*, **43**, 1232 (1955).
363. Vinnichenko N. K., Dutton J. A., *Radio Sci.*, **4**, 1115 (1969).
364. Vinnichenko N. K. et al., *Turbulence in the Free Atmosphere*, Consultants Bureau, New York, 1973.
365. Wait J. R., *Electromagnetic Probing in Geophysics*, Golem Press, Boulder, Colorado, 1971.
366. Wait J. R., *Radio Sci.*, **6**, 387 (1971).
367. Wait J. R., в кн.: *Future Directions of Electromagnetics of Continuous Media (Proc. NSF Workshop)*, (eds. D. J. Angelakos, W. K. Kahn), U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1972.
368. Wang T., Strohbehn J. W., *JOSA*, **64**, 583 (1974).
369. Wang T., Strohbehn J. W., *JOSA*, **64**, 994 (1974).
370. Wang T. S., Clifford S. F., Ochs G. R., *Appl. Opt.*, **13**, 2602 (1974).
371. Watson K., *J. Math. Phys.*, **10**, 688 (1969).
372. Watson K., *Phys. Fluids*, **13**, 2514 (1970).
373. Wells P. N. T., *Physical Principles of Ultrasonic Diagnostics*, Acad. Press, New York, 1969.
374. Wenzel A. R., Keller J. B., *JOSA*, **50**, 911 (1971).
375. Westwater E. R., Cohen A., *Appl. Opt.*, **12**, 1340 (1973).
376. Wheelon A. D., *J. Res. Nat. Bur. Std. (Radio Prop.)*, **63D**, 205 (1959).
377. Wheelon A. D., Muchmore R. B., *Proc. IRE*, **43**, 1450 (1955).
378. Whitman A. M., Beran M. J., *JOSA*, **60**, 1595 (1970).
379. Williamson I. P., *Mon. Notices Roy. Astron. Soc.*, **157**, 55 (1972).
380. Williamson I. P., *Mon. Notices Roy. Astron. Soc.*, **163**, 345 (1973).
381. Wolf E., *Phys. Rev.*, **D13**, 869 (1976).
382. Woo R., *Astrophys. J.*, **201**, 1, Pt. 1, 238 (1975).
383. Woo R., *J. Atmos. Sci.*, **32**, 1084 (1975).
384. Woo R., Ishimaru A., *Radio Sci.*, **8**, 103 (1973).
385. Woo R., Ishimaru A., *IEEE Trans.*, **AP-22**, 566 (1974).
386. Woo R., Yang F. C., *J. Geophys. Res.*, **81**, 3417 (1976).
387. Woo R., Ishimaru A., Kendall W. B., *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1698 (1974).
388. Woo R. et al., *Astrophys. J.*, **210**, Pt. 1, 568 (1976).
389. Woo R., Yang F. C., Ishimaru A., *Astrophys. J.*, **210**, 2, Pt. 1, 593 (1976).
390. Wright J. W., *IEEE Trans.*, **AP-16**, 2, 217 (1968).
391. Wyant J. C., *Appl. Opt.*, **14**, 2622 (1975).
392. Яглом А. М. — УМН, 1952, 7, с. 51.
393. Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн: Сб. статей. Под ред. А. М. Яглома и В. И. Татарского. — М.: изд-во АН СССР, 1967.
394. Yates H. W., *Appl. Opt.*, **9**, 1971 (1970).
395. Young A. T., *Astrophys. J.*, **189**, 587 (1974).
396. Yura H. T., *JOSA*, **59**, 111 (1969).
397. Yura H. T., *Appl. Opt.*, **11**, 6, 1399 (1972).
398. Yura H. T., *Appl. Opt.*, **12**, 1061 (1973).
399. Yura H. T., *Appl. Opt.*, **12**, 1, 108 (1973).
400. Yura H. T., *JOSA*, **63**, 107 (1973).
401. Yura H. T., *JOSA*, **64**, 59 (1974).
402. Yura H. T., *JOSA*, **64**, 357 (1974).
403. Zavody A. M., *Proc. IEEE*, **121**, 257 (1974).
404. Zipfel G. G., DeSanto J. A., *J. Math. Phys.*, **13**, 1903 (1972).

# Предметный указатель

- Адаптивная оптика 208  
Амплитуда рассеяния 45  
Атмосфера земная 122  
— коэффициент преломления 287
- Бакуса — Гильберта метод 262  
Бете — Солпитера уравнение 5, 17, 29, 160  
Биологические среды 80, 215  
— — распространение акустических волн 98  
Борновское приближение 83, 101  
Букера — Гордона формула 86
- Вариационные производные 163, 211  
Винера — Хинчина теорема 84, 269  
Вихрей размер 88  
Временная когерентность 197  
— корреляционная функция 141, 143, 219  
— — — рассеянного поля 93  
Временной задержки метод 250, 252  
Временные флуктуации 141  
— — рассеянного поля 91  
Второй момент 15, 27, 48
- Гауссовское случайное поле 162  
Гюйгенса — Френеля принцип 160
- Дайсона уравнение 5, 17, 160  
Диаграммный метод 5, 17, 160, 217  
Дисперсия 86, 144, 264, 298  
— флуктуаций углов прихода 140  
— — уровня 131  
Дистанционное зондирование атмосферы планет 137  
— — атмосферы Венеры 159  
— — геофизических объектов 246  
— — распределения частиц по размерам 246  
— — солнечного ветра 246  
— — тропосферы 246
- Диффузная интенсивность 14, 31  
Диффузное поле 217, 227, 241  
Доплеровский сдвиг 37, 94, 215
- Закон двух третей 286  
Замороженности гипотеза 92, 141—143, 273  
Зеркальное отражение 216
- Изображений формирование в воде 128  
Изопланатическая область 207  
Импульса рассеяние 80, 96  
— уширение 74  
— форма 181  
Инерционный интервал 89, 120  
Интенсивность 13, 14, 20, 61  
— диффузная 14, 31  
— когерентная 13, 14, 31, 61  
— некогерентная 14, 31  
— обратного рассеяния 65  
— полная 13, 20, 31  
— средняя 31  
— флуктуаций, насыщение 199  
Интервал вязкий 88, 120
- Кармана спектр 89  
Кирхгофа приближение 217, 236, 240  
Когерентное поле 13, 17, 98, 164, 217  
— — в приближении Кирхгофа 240  
Когерентности радиус 179  
— степень 151, 250, 252  
— ширина полосы 73, 78, 179  
Когерентность пространственная 197  
Когерентные оптические адаптивные методы 209  
Колмогоровский спектр 86, 133, 249, 281  
Корреляции радиус 86, 115, 174  
Корреляционная матрица 260  
— функция 133, 268, 269  
— — амплитуды 108  
— — взаимная 149  
— — флуктуаций уровня и фазы 110

- Коэффициент затухания 95  
— усиления приемника и передатчика 81
- Лидары 248
- Логарифмически нормальное распределение 202
- Локаатор звуковой 247
- Лучевая интенсивность 28, 33, 48, 62, 69, 166, 182  
— — зависящая от времени 33, 49  
— — обобщенная 69  
— — обратная 62  
— — прямая 62  
— — частотный спектр 36
- Малоугловое приближение 49, 70, 166
- Малых возмущений метод 217, 219
- Мерцания индекс 190, 192, 199
- Метод наименьших квадратов 255
- Многokrатного рассеяния теория 5  
— — — связь с теорией переноса 5, 26  
— — эффекты 94
- Модуляционная передаточная функция 56, 59, 202, 204
- Некогерентный источник 172
- Некорректно поставленные задачи 246, 254, 256, 258
- Область применимости геометрической оптики 113, 122
- Обратное рассеяние 97  
— — от случайно распределенных рассеивателей 62
- Оптическая передаточная функция 204  
— теорема 45
- Параболического уравнения метод 160
- Приближение фазового экрана 186
- Пульсары 79, 178, 181
- Пучка дрожание (блуждание) 140, 197  
— радиус 174, 197  
— уширение 174
- Пучки пересекающиеся 141, 153  
— — метод дистанционного зондирования 257
- Пучок волновой 129, 133, 172  
— коллимированный 134, 135, 174  
— сфокусированный 134
- Пятнистость 245
- Радиолокаторы 248  
— в астрономии 215
- Радиолокации уравнение 81, 93
- Радиометрические измерения 258, 267
- Радиоокеанография 215
- Размер зоны Френеля 113, 118, 138, 155, 184
- Разрешение изображения 54  
— угловое 59
- Райса — Накагами распределение 244
- Распределение вероятности интенсивности 201  
— — рассеянного поля 244
- Рассеяние 5  
— однократное 39
- Регуляризации метод 246, 258
- Рэля гипотеза 221, 236  
— критерий шероховатости поверхности 216  
— распределение 244  
— рассеяние 87, 247
- Рытова метод 101  
— — для сферической волны 129
- Сглаживания метод 246, 258
- Сечение обратного рассеяния радиолокационное 66  
— рассеяния акустическое 96  
— — бистатическое 218  
— — шероховатой поверхности 230  
— — единицы объема 81, 96  
— — — слоя рассеивателей 66  
— — шероховатой поверхности 227  
— — полное 164
- Сильные флуктуации 94, 119, 160
- Спектр глобальный 156  
— локальный 156  
— полностью развитой турбулентности 88  
— протяженный 177  
— угловой 49, 51, 182, 183  
— — флуктуаций интенсивности 189, 194  
— частотный 36, 49, 51, 93, 141, 144, 150, 175, 177, 183, 192  
— — лучевой интенсивности 36  
— — сферической волны 147  
— — уширение 94
- Спектральная плотность 92  
— — комплексной фазы 192  
— — поля скоростей 96  
— — флуктуаций интенсивности 189
- Спектральное уширение 219
- Среднее поле 13, 98, 217

- Средняя интенсивность 31  
 — — на оси пучка 174, 175  
 Статистический метод обращения 259  
 Структурная функция 110, 257, 290  
 — — амплитуды 110  
 — — для колмогоровского спектра 133  
 — — коэффициента преломления 249, 290  
 — — спектральное представление 277  
 — — температуры 249  
 — — уровня 167  
 — характеристика 89, 97, 180, 183, 248, 291, 293, 297  
 — — в атмосфере 89  
 — — профиль 254  
 — — скорости 97  
 — — температуры 97  
 — — электронной плотности 180
- Тверского интегральное уравнение 5, 15  
 — теория 6  
 Туман 247  
 — распространение волн 79  
 Турбулентность 80, 275  
 — анизотропная 88  
 — атмосферы 80  
 — диагностика 140  
 — крупномасштабная 294  
 — локально однородная 120  
 — межзвездная 178  
 — мелкомасштабная 294  
 — океана 80  
 — экспоненциальный профиль 137
- Ультразвуковое зондирование течения крови 248  
 Уравнение для среднего поля 163  
 — — частотного спектра 36  
 — переноса излучения 31, 35, 36, 62, 166  
 — — — для движущихся частиц 32  
 — — — — зависящей от времени лучевой интенсивности 35  
 — — для флуктуаций интенсивности 36, 190
- Уравнение переноса, использование при дистанционном зондировании 250  
 Усредняющее действие апертуры 128, 140, 200
- Фильтрующая функция 11, 112  
 — — пространственная 111, 112  
 — — спектральная 111, 112  
 Флуктуации диэлектрической проницаемости 82  
 — коэффициента преломления 283, 289  
 — скорости ветра 146  
 Флуктуационное поле 13, 98  
 Фолди — Тверского интегральное уравнение 13, 14  
 Фотография подводная 59  
 Функциональные производные 163, 211  
 Функция взаимной когерентности 28, 34, 48, 62, 77, 165—167, 176, 204  
 — — — в турбулентной среде 173  
 — — — двухчастотная 68, 69, 70, 77  
 — — — зависящая от времени 37  
 — — — изображения 207  
 — — — плоской волны 175  
 — — — сферической волны 171, 175  
 Фурутсу — Новикова формула 163
- Характеристическая функция 93  
 — — движущихся частиц 35  
 — — случайной функции 240  
 — — флуктуаций скорости 274  
 Хойта распределение 245
- Шероховатая поверхность двухмасштабная 236
- Эйконала уравнение 116  
 Эффективное поле 7
- Яркость источников 194

# Оглавление

## ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Глава 14.	Теория многократного рассеяния волн на облаке неподвижных и движущихся рассеивателей и ее связь с теорией переноса . . . . .	5
14.1.	Процессы многократного рассеяния, учитываемые теорией Тверского . . . . .	6
14.2.	Статистическое усреднение для дискретных рассеивателей . . . . .	11
14.3.	Интегральное уравнение Фолди — Тверского для когерентного поля . . . . .	13
14.4.	Интегральное уравнение Тверского для корреляционной функции . . . . .	15
14.5.	Когерентное поле . . . . .	17
14.6.	Падение плоской волны на слой, содержащий рассеиватели, — «полная интенсивность» . . . . .	20
14.7.	Связь между теорией многократного рассеяния и теорией переноса . . . . .	26
14.8.	Приближенные интегральные и дифференциальные уравнения для корреляционной функции . . . . .	28
14.9.	Основные уравнения для движущихся частиц . . . . .	31
14.10.	Флуктуации, обусловленные распределением по размерам . . . . .	37
Приложение 14А.	Пример процесса рассеяния по Тверскому для $N = 3$ . . . . .	39
Приложение 14Б.	Оценка многократного интеграла $I$ с помощью метода стационарной фазы . . . . .	40
Приложение 14В.	Оптическая теорема . . . . .	45
Глава 15.	Теория многократного рассеяния волн и распространение импульсов в облаке случайных рассеивателей . . . . .	48
15.1.	Основные уравнения для случая движущихся рассеивателей . . . . .	48
15.2.	Функция взаимной когерентности, угловой спектр и частотный спектр в малоугловом приближении . . . . .	49
15.3.	Случай плоской падающей волны . . . . .	51
15.4.	Ограничения на разрешение изображения, налагаемые случайно распределенными рассеивателями . . . . .	54
15.5.	Выходной сигнал приемника при наличии случайно распределенных рассеивателей . . . . .	59
15.6.	Сферическая волна в облаке случайно распределенных частиц . . . . .	61
15.7.	Обратное рассеяние от случайно распределенных рассеивателей . . . . .	62
15.8.	Распространение импульсов в облаке случайно распределенных рассеивателей . . . . .	67
15.9.	Интегральные и дифференциальные уравнения для двухчастотной функции взаимной когерентности . . . . .	68

15.10.	Двухчастотная функция взаимной когерентности для случая плоской волны . . . . .	70
15.11.	Распространение плоской импульсной волны в случае слабых флуктуаций . . . . .	72
15.12.	Распространение плоской импульсной волны в случае сильных флуктуаций . . . . .	75

#### ЧАСТЬ IV. ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Глава 16.	Рассеяние волн в случайной сплошной среде и турбулентные среды . . . . .	80
16.1.	Приближение однократного рассеивания и принимаемая мощность . . . . .	81
16.2.	Сечение рассеяния единицы объема стационарной случайной среды . . . . .	82
16.3.	Формула Букера — Гордона . . . . .	86
16.4.	Гауссова модель и колмогоровский спектр . . . . .	88
16.5.	Анизотропная случайная среда . . . . .	90
16.6.	Временные флуктуации рассеянных полей, обусловленные изменением во времени свойств случайной среды . . . . .	91
16.7.	Сильные флуктуации . . . . .	94
16.8.	Рассеяние импульса случайной средой . . . . .	96
16.9.	Сечение рассеяния единицы объема в акустическом случае . . . . .	96
16.10.	Уравнение для узкого пучка . . . . .	97
Глава 17.	Распространение плоской волны в случайной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуаций . . . . .	98
17.1.	Уравнения Максвелла для флуктуирующей среды . . . . .	99
17.2.	Борновское приближение и приближение Рытова . . . . .	101
17.3.	Флуктуации уровня и фазы . . . . .	103
17.4.	Случай плоской волны . . . . .	104
17.5.	Прямой и спектральный методы . . . . .	105
17.6.	Спектральные представления флуктуаций амплитуды и фазы . . . . .	106
17.7.	Корреляционные функции амплитуды и фазы . . . . .	108
17.8.	Структурные функции амплитуды и фазы . . . . .	110
17.9.	Спектральные и пространственные фильтрующие функции . . . . .	111
17.10.	Статистически однородные случайные среды и спектральная фильтрующая функция . . . . .	112
17.11.	Область применимости геометрической оптики $L \ll l^2/\lambda$ . . . . .	113
17.12.	Область $L \gg l^2/\lambda$ . . . . .	117
17.13.	Общие свойства флуктуаций волн в статистически однородной случайной среде . . . . .	118
17.14.	Статистически однородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции . . . . .	119
17.15.	Однородная и локально однородная турбулентность . . . . .	120
17.16.	Статистически неоднородная случайная среда с гауссовой функцией корреляции и пространственная фильтрующая функция . . . . .	124
17.17.	Вариации интенсивности турбулентности вдоль трассы распространения . . . . .	126
17.18.	Пределы применимости теории слабых флуктуаций . . . . .	127
17.19.	Другие задачи . . . . .	127

Глава 18.	Распространение сферической волны и волнового пучка в турбулентной среде в пределах прямой видимости — случай слабых флуктуаций . . . . .	129
18.1.	Приближение Рытова для сферической волны . . . . .	129
18.2.	Дисперсия для колмогоровского спектра . . . . .	131
18.3.	Корреляционные и структурные функции для колмогоровского спектра . . . . .	133
18.4.	Волновой пучок . . . . .	133
18.5.	Дисперсия для волнового пучка и применимость приближения Рытова . . . . .	136
18.6.	Дистанционное зондирование атмосфер планет . . . . .	137
18.7.	Некоторые близкие задачи . . . . .	138
Глава 19.	Временная корреляция и частотные спектры флуктуаций волн в случайной среде и влияние статистической неоднородности случайной среды . . . . .	141
19.1.	Частотные спектры плоской волны . . . . .	141
19.2.	Случай, когда средняя скорость является чисто поперечной, а флуктуации скорости пренебрежимо малы . . . . .	142
19.3.	Частотные спектры с учетом средней и флуктуационной скоростей ветра . . . . .	146
19.4.	Частотные спектры сферической волны . . . . .	147
19.5.	Двухчастотная корреляционная функция . . . . .	149
19.6.	Пересекающиеся пучки . . . . .	153
19.7.	Флуктуации волн в статистически неоднородной случайной среде . . . . .	154
19.8.	Флуктуации волн в локализованной плавно неоднородной случайной среде . . . . .	155
Глава 20.	Сильные флуктуации . . . . .	160
20.1.	Параболическое уравнение . . . . .	161
20.2.	Модель флуктуаций показателя преломления . . . . .	162
20.3.	Уравнение для среднего поля и его общее решение . . . . .	163
20.4.	Параболическое уравнение для функции взаимной когерентности . . . . .	165
20.5.	Решения уравнения для функции взаимной когерентности . . . . .	167
20.6.	Примеры функций взаимной когерентности . . . . .	171
20.7.	Функция взаимной когерентности в турбулентной среде . . . . .	173
20.8.	Частотные спектры . . . . .	175
20.9.	Частотная корреляция . . . . .	178
20.10.	Двухчастотная функция взаимной когерентности плоской волны . . . . .	178
20.11.	Форма импульса . . . . .	181
20.12.	Угловой и частотный спектры . . . . .	182
20.13.	Моменты четвертого порядка . . . . .	184
20.14.	Приближение тонкого экрана . . . . .	187
20.15.	Решение в приближении фазового экрана . . . . .	191
20.16.	Приближение фазового экрана для сферических волн . . . . .	193
20.17.	Случай протяженных источников . . . . .	193
20.18.	Протяженная среда . . . . .	195
20.19.	Распространение оптического излучения в турбулентной среде . . . . .	197
20.20.	Модуляционная передаточная функция случайной среды . . . . .	202
20.21.	Адаптивная оптика . . . . .	208

Приложение 20А . . . . .	210
Приложение 20Б . . . . .	212
Приложение 20В . . . . .	213

## ЧАСТЬ V. РАССЕЙАНИЕ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

Глава 21. Рассеяние на шероховатой поверхности . . . . .	215
21.1. Принимаемая мощность и сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности . . . . .	217
21.2. Первое приближение метода малых возмущений (горизонтальная поляризация падающей волны) . . . . .	219
21.3. Сечение рассеяния единичной площадки в первом приближении метода малых возмущений . . . . .	226
21.4. Статистическое описание шероховатой поверхности . . . . .	228
21.5. Бистатистическое сечение рассеяния шероховатой поверхности . . . . .	230
21.6. Влияние нестационарности шероховатой поверхности . . . . .	233
21.7. Спектры океанических волн . . . . .	235
21.8. Некоторые другие задачи . . . . .	235
21.9. Приближение Кирхгофа: рассеяние звуковых волн на шероховатой поверхности . . . . .	236
21.10. Когерентное поле в приближении Кирхгофа . . . . .	240
21.11. Сечение рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности . . . . .	241
21.12. Распределение вероятности рассеянного поля . . . . .	244
Глава 22. Дистанционное зондирование и методы обращения . . . . .	246
22.1. Дистанционное зондирование тропосферы . . . . .	247
22.2. Дистанционное зондирование структурной характеристики $S_n$ , усредненной вдоль трассы . . . . .	249
22.3. Дистанционное зондирование скорости ветра, усредненной вдоль трассы . . . . .	250
22.4. Дистанционное зондирование профиля структурной характеристики и некорректно поставленная задача . . . . .	251
22.5. Обратная задача . . . . .	257
22.6. Метод сглаживания (регуляризации) . . . . .	258
22.7. Статистический метод обращения . . . . .	259
22.8. Метод обращения Бакуса — Гильберта . . . . .	262
22.9. Дистанционное зондирование геофизических объектов . . . . .	266
Приложение А. Спектральное представление случайных функций . . . . .	268
А.1. Комплексные стационарные случайные функции . . . . .	268
А.2. Вещественные стационарные случайные функции . . . . .	270
А.3. Однородные комплексные случайные функции . . . . .	270
А.4. Однородные и изотропные случайные функции . . . . .	271
А.5. Однородные вещественные случайные функции . . . . .	273
А.6. Стационарные и неоднородные случайные функции . . . . .	273
А.7. Гипотеза замороженности . . . . .	273
Приложение Б. Структурные функции . . . . .	275
Б.1. Структурная функция и случайные процессы со стационарными приращениями . . . . .	275
Б.2. Спектральное представление структурной функции . . . . .	277

Б.3.	Локально однородные и изотропные случайные функции . . .	279
Б.4.	Колмогоровский спектр . . . . .	281

Приложение В. Турбулентность и флуктуации показателя преломления 283

В.1.	Ламинарное течение и турбулентность . . . . .	283
В.2.	Развитая турбулентность . . . . .	284
В.3.	Скалярные величины, сохраняющие свое значение в турбулентной атмосфере, а также в нейтральной, стабильной и нестабильной атмосферах . . . . .	287
В.4.	Флуктуации показателя преломления . . . . .	289
В.5.	Структурные функции консервативных примесей и флуктуаций показателя преломления . . . . .	290
В.6.	Скорость диссипации энергии $\epsilon$ и энергетический баланс в атмосферной турбулентности . . . . .	291
В.7.	Скорость диссипации флуктуаций $N$ . . . . .	293
В.8.	Расчет структурной характеристики . . . . .	293
В.9.	Приграничный слой, свободная атмосфера, крупно- и мелко-масштабная турбулентность . . . . .	294
В.10.	Структурная характеристика показателя преломления в приграничном слое . . . . .	295
В.11.	Структурная характеристика $C_n$ для свободной атмосферы . . . . .	297
В.12.	Соотношение между структурной характеристикой $C_n$ и дисперсией флуктуаций показателя преломления . . . . .	298

Приложение Г. Некоторые полезные математические формулы . . . . . 299

Г.1.	Функция Куммера ${}_1F_1(a, c; z)$ . . . . .	299
Г.2.	Конфлюэнтная гипергеометрическая функция $\psi(a, b; z)$ . . . . .	299
Г.3.	Другие интегралы . . . . .	300

Литература . . . . . 301

Предметный указатель . . . . . 310