Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Моррис

СОЛИТОНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Монография учебного плана, написанная известными английскими специалистами и содержащая изложение основных методов обратной задачи рассеяния и их приложений в различных разделах физики. Много внимания уделено численным методам в теории солитонов. Большим достоинством книги являются удачно подобранные задачи и обширная библиография (свыше 500 работ).

Для математиков-прикладников, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

Содержание

От редактора перевода	5
Предисловие	7
1. Уединенные волны и солитоны	**11**
1.1. Открытие уединенной волны	11
1.2. Кортевег и де Фриз	14
1.3. Задача Ферми—Пасты—Улама (ФПУ)	16
1.4. Солитоны и работа Забуски и Крускала	20
1.5. Уравнение sin-Гордон	26
1.6. Нелинейное уравнение Шрёдингера	31
1.7. Некоторые основные принципы распространения линейных волн	32
1.8. Некоторые элементарные идеи в теории распространения нелинейных волн	38
1.9. Уравнения, не имеющие решений солитонного типа	44
1.10. Связь с квантовой механикой	47
1.11. Примечания	51
1.12. Задачи	55
2. Преобразования рассеяния	**68**
2.1. Обратная задача и анализ Фурье	58
2.2. Классическое рассеяние	66
2.3. Рассеяние в квантовой механике	73
2.3.1. Дельта-потенциал	81
2.3.2. Потенциал в виде прямоугольной ямы	83
2.4. Безотражательные потенциалы	87
2.5. Обобщения	95
2.5.1. Потенциал в форме прямоугольной ямы	98
2.5.2. Потенциал q=-r=—2 sech 2x	101
2.6. Примечания	103
2.7. Задачи	105
3. Уравнение Шрёдингера и уравнение Кортевега—де Фриза	**108**
3.1. Уравнение Кортевега—де фриза и преобразования Бэклунда	108
3.2. Иерархия уравнений КдФ и изоспектральное уравнение Шрёдингера	113
3.3. Задача рассеяния для уравнения Шрёдингера	116

3.4. Спектральная теория для оператора Шрёдингера 139
3.5. Нелинейные уравнения, связанные с изоспектральным уравнением Шрёдингера 160
3.6. Примечания 180
3.7. Задачи 183
4. Обратный метод для изоспектрального уравнения Шредингера и общее решение разрешимых нелинейных уравнений 193
4.1. Обратная задача рассеяния и уравнение Марченко для изоспектрального уравнения Шрёдингера 193
4.2. Задача Коши для разрешимых уравнений 215
4.3. N-солитонные решения разрешимых уравнений 229
4.4. Примечания 248
4.5. Задачи 253
5. Выделение уравнения Кортевега—де Фриза в некоторых физических примерах 258
5.1. Введение 258
5.2. Ионно-акустические волны 261
5.3. Длинные волны на мелкой воде 266
5.4. Задача из геофизической динамики жидкостей 274
5.4.1. Геострофическое приближение и теорема Тейлора—Прудмана 276
5.4.2. Уравнения движения для неглубокого слоя жидкости 278
5.4.3. Волны Россби 279
5.4.4. Уединенные волны Россби 280
5.5. Модифицированное и обобщенное уравнения КдФ 283
5.6 Примечания 287
5.7. Задачи 292
6. Метод обратное задачи рассеяния Захарова—Шабата/АКНС 296
6.1. Прямая задача Захарова—Шабата и класс интегрируемых уравнений 296
6.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения ЗШ—АКНС 341
6.3. Решения интегрируемых уравнений и их преобразования Бэклунда 373
6.4. Интегрируемые нелинейные уравнения и метод обратной задачи рассеяния 399
6.4.1. Методы обратной задачи рассеяния 401
6.4.2. Другие методы обратной задачи 412
6.5. Примечания 414
6.6. Задачи 418
7. Кинки и уравнение СГ 425
7.1. Топологические рассмотрения и механическая модель 425
7.1.1. Механический маятник 430
7.2. Свойства частиц 435
7.3. Топологический заряд 441
7.4. Нелинейные уравнения Клейна—Рордона 444
7.5. Вихри, монопали и инстантоны 450
7.5.1. Абелевы калибровочные поля 451

7.5.2. Вихри 456
7.6. Дислокации в кристаллах и параметры порядка 460
7.7. Ферромагнетизм и солитоны 469
7.7.1. Изотропный ферромагнетик Гейзенберга 474
7.7.2. Модель непрерывной цепочки Гейзенберга 478
7.8. Квантовая механика и уравнение СГ в квантовой оптике 482
7.8.1. Нестационарная теория Ландау—Гинзбурга 490
7.9. Неабелевы калибровочные поля, монополи и инстантоны 497
7.9.1. Неабелевы калибровочные поля 498
7.9.2. SU (2)-инвариантные уравнения Клейна—Гордона 600
7.9.3. Преобразования Бэклунда и решения-монополи 502
7.9.4. Автодуальные уравнения Янга—Миллса и инстантоны 506
7.10. Примечания 510
7.11. Задачи 522
8. Нелинейное уравнение Шрёдингера и резонансные взаимодействия воли 530
8.1. Введение 530
8.2. Класс уравнений, приводящих к нелинейному уравнению Шрёдингера 537
8.3. Оптическая самофокусировка 544
8.4. Ленгмюровские волны в плазме 547
8.5. Квадратичный резонанс 551
8.6. Резонанс длинных и коротких волн 554
8.6.1. Давыдовская модель альфа-спирали 559
8.7. Примечания 562
9. Амплитудные уравнения в неустойчивых системах 571
9.1. Введение 571
9.2. Окулярная теория возмущений и получение амплитудных уравнений 582
9.3. Распространение ультракоротких оптических импульсов и самоиндуцированная прозрачность 587
9.4. Двухслойная бароклиническая неустойчивость 603
9.5. Эффект слабой диссипации 609
9.6. Примечания 619
10. Численные исследования солитонов 627
10.1. Введение 627
10.2. Основные численные методы 628
10.2.1. Метод аппроксимирующих функций 629
10.2.2. Метод конечных разностей 632
10.2.3. Сходимость, согласованность и устойчивость 634
10.3. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона 636
10.3.1. Уравнение СГ 636
10.3.2. Уравнение фи-четыре 640
10.3.3. Двойное уравнение СГ 642
10.4. "Длинноволновые" уравнения 645
10.4.1. Уравнение КдФ и родственные уравнения 645

10.4.2. Регуляризованное длинноволновое уравнение 647
10.5. Другие уравнения с одной пространственной переменной 649
10.6. Численные исследования для большого числа пространственных измерений 651
10.6.1. Уравнения КдФ и НЛШвдвух и трек пространственных измерениях 653
10.6.2. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона в двух и трех пространственных измерениях 665
10.7. Примечания 658
Литература 660
Предметный указатель **687**

Предметный указатель

Абеля преобразование 70
- - обратное 71
амплитудные уравнения 578
антивихревые решения 457
асимптотические условия 64
аттенюатор 590
аттрактор хаотический 612
бароклинная неустойчивость 603
бароклинные волны 603
баротропная жидкость 276
безотражательные потенциалы 87
Бенджамина—Оно уравнение 407
Бенджамина—Фейера критерий 680
Бенин условие 557
Бернулли уравнение 268
бесстолкновительная ударная волна 247
бета-эффект (дисперсионный) 617
бифуркации точка 573
бифуркация 573
Блоха уравнение 486
- - оптическое 588
Богомольного уравнения 502
бозоны 513
Больцмана константа 261
Брауара степень гладкого отображения 442
бризер 440
бризерные решения 602
бумерона уравнения 404
Буссинеск 15
Буссинеска уравнение 18
Бюргерса уравнение 43, 56, 287
Баклунда преобразования 28, 49, 82, 234, 373, 411
- автопреобразование 112
- - СГ уравнения 29
- - КдФ уравнения 108
- обобщенные 237
- принцип суперпозиции 238
вакуумные состояния 27
волновая функция 74
- - связанного состояния 83
волновое число 33
волновые функции обобщенные 77
Вольтерры интегральные уравнения 352
вихревые решения 457
вронскиан 76, 97, 303
Галилея преобразование 41, 109
Гамильтона оператор 75
гамильтониан взаимодействия 487
гармонические колебания 33
Гельфанда—Левитана уравнение 249
Гельфанда—Левитана—Марченко уравнения 480
геострофическая функция тока 278
геострофическое приближение 276
главные функции 316
гомотопические классы 429
гомотопия 427
гравитационные силы 276
Грина функция 141, 306
групповая скорость 33, 591

Гурса задача 160
Давыдова уравнение 261
данные рассеяния 150
двухслойная модель 603
дебаевская длина 262
дельта-потенциал 81
Дерршсса теорема 450
де Фриз 14
Джосефсона контакт 639
Дирака уравнение 95
- дельта-функция 141
Дирихле оператор 190
дислокация в кристаллах 460
дисперсионная неустойчивость 585, 623
дисперсионное соотношение 33, 260, 434
дисперсия 33
диссипативная неустойчивость 584
диссипативность решения 438
дифференциальное сечение рассеяния 67
длинноволновое приближение 271
длинноволновые уравнения 645
Додда—Буллафа уравнение 525
Допплера эффект 14, 589
емкость 284
задача ФПУ 16
законы сохранения 108
Захарова уравнения 558
ЗШ—АКНС-метод обратной задачи 341
Иди модель 622
изгиб упругих оболочек 622
изометрическое отображение 140
изотропная группа 463
Йоста решения 117, 126, 136
Кадомцева—Петвиашвили уравнение 288, 406, 653
калибровочная группа 499
калибровочные поля
- абелевы 451
- неабелевы 498
- - преобразования 451, 481, 499
квадратичный резонанс 551
квантовое туннелирование 491
Каца и ван Мербеке уравнение 293
КдФ уравнение 15
Клейна—Гордона уравнение 26, 28
- - - линейное 33, 448, 451
- - - нелинейное 444, 636
кинк 26, 439
Кирхгофа законы 284
классический предел 74
Кноидальные волны 38
ковариантная производная 452
когерентный оптический импульс 623
конвекция 572
консервативные системы 571
Кортевег 15
Коула—Хопфа преобразование 23, 43, 48
коэффициент отражения 80
- прохождения 80
краевая дислокация 460
Крейна функционалы 151
Крепка—Нчколсона схема 633
Купера пары 465
Д-инстантонное решение 610
Лакса пара 114
Лакса условие 569
Ландау—Лифшица уравнение 472
Лапласа преобразование 70
Лапласа уравнение 269
ленгмюровские волны в плазме 547
линия дефектов 462
Липпмана—Швингера уравнение 183
Лиувилля уравнение 485
Лоренца аттрактор 613
- преобразование 611
- уравнение 611
Максвелла—Блоха уравнения 46, 487
- - - редуцированные 341, 600
Мантона поля 503
Марченко—Аграновича метод 156
Марченко уравнение 196, 213, 229, 377, 408

- - нестационарное 343
матрица массы 513
- монодромии 413
- плотности 485
- рассеяния 133, 153
Мейсснера эффект 465
медленные переменные 535
мероморфная функция 332, 350
метод конечных разностей 632
метод многомасштабных (двух временных) разложений 533
метод обратного спектрального преобразования 216
- обратной задачи 216, 399, 408
- перевала 36
- разложения 95, 101
- характеристик 41
Мёллера операторы 153, 182, 420
Миуры преобразование 184, 421
монополи 450
Навье—Стокса уравнение 266, 625
надкритическая область 671
нейтральная кривая 34
нейтрально-устойчивая система 34
нелинейные разностные уравнения 651
неоднородное уширение 589
нормировочные многочлены 326, 351
обобщенная волновая функция 77
обобщенные собственные значения 182
обобщенный порождающий базис 182
обратная задача рассеяния 58, 68
обратное преобразование рассеяния 218
- спектральное преобразование 218
одевание оператора 409
одноинстантонное решение БПТШ 509
однородное уширение 619
однородные вращающиеся жидкости 258
операторы преобразования 156
Орра—Зоммерфельда уравнение 621
параметр возмущения 259
- порядка 462
- уравнения 571
Парсеваля равенство 296
Паули матрица 478
Пенлеве уравнение II типа 257, 413
планетарная завихренность 276
Повзнера—Левитана представление 249
полевые уравнения 453
поляризация 588
потенциал в виде прямоугольной ямы 89
потенциальная завихренность 276
потенциальная функция 66, 267
Прандтля число 612
Прасада—Зоммерфельда монополь 529
прицельное расстояние частицы 67
Пуассона уравнение 262
Радона преобразование 59
распределение 141
регуляризированное длинноволновое уравнение 647
регулярное значение отображения 443
резольвента 140, 278
резонансная частота 596
Рейнольдса число 621
Рикката уравнение 49, 110
Римана-Гильберта задача 409
Россби число 275
Ралея число 620
сверхпроводящее туннелирование 491
связанное состояние 82
СГ-уравнение (sin-Гордон) 26, 298
секулярный член 535, 617
Скотт Расселл 11
солитоноподойное поведение 627
спектральная функция распределения 149

спектральное семейство оператора 145
спектральные особенности 191
сплетающие операторы 152, 156
Стокс 15
структурные постоянные 498
Тейлора—Прудмана теорема 278
теорема о равномерном распределении 16
Тоды, цепочка 52, 55, 293
топологический заряд 441
точные последовательности 515
ударная волна 42
уединенная волна 11
уравнение типа бумерона 404
- импульса 267
- квазигеострофическое потенциальной завихренности 279
уравнения потенциального вихря 605
- самоиндуцированной-прозрачности
уравнения φ^4, 44, 636, 640
утечка проводимости 619
фазовое пространство 612
фазовая скорость 33, 591
ферромагнетизм 469
флюксон 497
формула следов 176
Фредгольма альтернатива 204
- уравнение второго ряда 204
Фреше производная 176
Фруда число 605
фундаментальная группа 429
- система решений 131
функция тока 619
Фурье моды 78
- преобразования 58, 60, 78
Хиггса абелева модель 456
- неабелева модель 501
Хироты метод 24, 53
холодные ионы 258
Хопфа бифуркационная теорема 615
Хуфта матрицы 509
частота падающей волны 591
Шварца условие 173
Шредингера оператор 188
- уравнение 66, 111, 191
- - нестационарное 75
- - стационарное 76
Штурма—Лиувилля уравнение 65
эволюция 62
эволюционные операторы 62
Эйлера—Лагранжа оператор 177
Эккмана слон 604
электрическое поле 588
электростатический потенциал 262
Эрнста уравнение 407, 503
эффекты орбитальной сферичности 64
ядро резольвенты 306
Янга—Миллса уравнения 500
- - - автодуальные 506

От редактора перевода

Эта книга должна понравиться широкому кругу читателей, интересующихся современной математической физикой. Удачное сочетание физических и математических мотивировок и доступность изложения относятся к числу ее несомненных достоинств.

В период своего бурного развития солитонная тематика привлекла и сблизила специалистов из многих областей физики и математики. Конкуренция и взаимодействие методов, берущих свое начало из квантовой механики, теории дифференциальных операторов и теории интегрируемых конечномерных динамических систем, во многом определили современный облик теории солитонов. Увлекательная история этого научного прогресса является одной из основных тем книги. Подробно разъясняются как физические, так и математические предпосылки теории.

Солитоны как физическое явление и связанная с ними математика излагаются авторами на основе трех классических моделей, описываемых уравнением Кортевега—де Фриза, так называемым уравнением sin-Гордон и нелинейным уравнением Шрёдингера. В последних двух главах уточняются области применимости интегрируемых моделей и обсуждаются результаты численных экспериментов для уравнений, близких к интегрируемым. Авторы книги внесли заметный вклад в развитие этих исследований.

Переплетение существенно различных идей ставит много препятствий на пути последовательного изложения математической теории солитонов. По замыслу авторов, книга должна служить введением в предмет; избранный авторами путь тесно связан с классическими работами начала 70-х годов и одномерной квантовой обратной задачей рассеяния в ее первоначальном виде. Это позволяет авторам выявить и объяснить идеи, лежащие в основе открытия метода обратной задачи, но затрудняет переход

к более современным работам. Неизбежная переоценка ценностей и перестройка основных положений метода обратной задачи отражены в монографии Л. А. Тахтаджяна, Л. Д. Фаддеева и недавно вышедшей на русском языке книге М. Абловица, Х. Сигура. Развиваемый авторами научно-исторический подход к теории солитонов имеет свои преимущества, и книгу можно рекомендовать для первоначального знакомства с предметом. Специалисты также найдут в ней много интересного.

Перевод книги выполнен докторами физ.-мат. наук В. И. Мацаевым и В. П. Гурарием; в процессе работы над переводом были исправлены многочисленные опечатки оригинала.

А. Б. Шабат

Предисловие

Изучение солитона как устойчивого частицеподобного состояния нелинейных систем настолько захватило воображение физиков и математиков всех направлений, что его без преувеличения можно считать одной из немногих междисциплинарных тем современной математической физики. Возможно, что эта тема провзаимодействует с широким спектром соответствующих дисциплин, оставив в конце концов их содержание неизменным и лишь сдвинув некоторые акценты. Только время покажет, так ли это.

У неискушенного читателя, желающего познакомиться с основными идеями указанной теории, может возникнуть вопрос: с чего начинать? Как показывает библиография, помещенная в конце книги, сейчас существует много руководств, рассматривающих предмет с разных точек зрения. Эта книга написана для читателя, который не имеет предварительных сведений ни о солитонах, ни о нелинейных волновых уравнениях и для которого современная научная литература может оказаться слишком трудной для начального чтения. Одна из отличительных черт данной книги — попытка объединить идеи теории солитонов с изучением физических истоков рассматриваемых нелинейных уравнений. Кроме того, мы изучаем обратное преобразование рассеяния с такой степенью строгости, к которой обычно не стремятся авторы других руководств, хотя полное владение этим техническим материалом не столь существенно для понимания приложений теории. Мы будем в основном заниматься теорией и приложениями классических солитонов, ограничиваясь лишь кратким знакомством с квантовомеханическими эффектами, которые встречаются в физике частиц и в квантовой теории поля. Мы надеемся, что наш подход к проблемам привлечет внимание как специалистов, так и студентов, изучающих прикладную математику, теоретическую физику и смежные технические дисциплины.

Выбор тем в этой книге преследует две основные цели. Первая цель — изучение решений некоторых уравнений с помощью обратного преобразования рассеяния, а вторая состоит в изучении общих классов физических систем, порождающих эти уравнения. Оказывается, что эти цели совместимы, хотя количество уравнений, допускающих решение методом обратной задачи рассеяния,

мало. Это точно интегрируемые эволюционные уравнения, такие как КдФ, мКдФ, sin-Гордон (СГ) и НШЛ, которые возникают самым естественным образом при изучении слабо нелинейных дисперсионных систем различных типов в различных пространственных и временных масштабах. Универсальность этих уравнений оказывается настолько поразительной, что многие были склонны видеть в этом нечто магическое. Одна из наших целей состоит в том, чтобы показать, что это не так: дисперсионные слабо затухающие или незатухающие нелинейные системы ведут себя одинаково, независимо от того, встречаются ли они при описании плазмы, классических жидкостей, лазеров или нелинейных решеток. Эволюция длинных волн, с одной стороны, и гармонические волновые пакеты в резонансных и далеких от резонанса системах, с другой стороны, наряду с другими нелинейными взаимодействиями — это классические явления, возникающие во многих отраслях физики и прикладной математики. Теперь их следует считать стандартными эффектами, автоматически возникающими при изучении таких систем. Изучение солитонов — хороший пример такого поля деятельности, где объединены усилия специалистов разных направлений — от экспериментальной физики до чистой математики, и еще одна цель этой книги — продемонстрировать важность междисциплинарного подхода начинающему исследователю.

С самого начала изучения солитонов стала ясной ценность тщательных численных экспериментов, дополненных аналитическими методами. Сейчас, когда стали актуальны задачи с более чем одной пространственной переменной, численные исследования становятся еще более популярными. Поэтому мы сочли полезным включить в книгу краткую главу о численных методах и их результатах.

В соответствии с этими соображениями мы тщательно отобрали материал по главам. Большинство студентов в США и Соединенном Королевстве, специализирующихся в прикладной и инженерной математике, довольно поверхностно знакомы с квантовой механикой. В то же время основные ее понятия и концепции, такие как коэффициенты прохождения и отражения, квадратично интегрируемые волновые функции и рассеяние на потенциале, абсолютно необходимы при изучении обратного преобразования рассеяния. Поэтому мы включили в книгу главу, посвященную элементарным понятиям квантовой механики и классическим и квантовым обратным задачам рассеяния. С другой стороны, большинство студентов, специализирующихся в теоретической физике, недостаточно знакомы с классической прикладной математикой, в частности с механикой жидкости или геофизической гидродинамикой. Эти студенты могут не знать таких приемов, как метод многих масштабов или метод растяжения координат.

Мы пытались прорабатывать некоторые примеры очень детально с самого начала, потому что считали, что не очень хорошо начинать изложение сразу с готового и неизвестно откуда взявшегося уравнения. Однако нам не всегда удавалось следовать этому принципу из-за недостатка места. Очевидные ограничения на объем книги не позволили нам рассмотреть ряд важных вопросов, например дискретные системы, методы алгебр Ли, случаи высших размерностей, теорию возмущений, а также другие интегрируемые системы, требующие более сложных изоспектральных операторов. Конечно, книга выиграла бы от включения этих разделов, но мы надеемся, что наши коллеги, специализирующиеся в этих областях, поймут наши трудности. Мы уверены, что отдали должное все значительным достижениям, хотя могли конечно, упустить из виду какие-то важные результаты. В конце книги в начале библиографии мы отметили список книг и статей, в которых можно найти многие из упомянутых выше вопросов.

Поскольку эта книга задумана как учебное пособие по основным методам и понятиям, а не как обзор результатов исследований последних лет, мы вынесли большинство ссылок на оригинальные работы в комментарии, помещенные в конце каждой главы. Введение к гл. 1 отчасти служит историческим очерком, а отчасти должно постепенно подвести читателя к идее квантового варианта метода обратной задачи рассеяния. Можно было бы назвать по меньшей мере дюжину имен исследователей, внесших существенный вклад в развитие этой теории, но мы думаем, что большинство согласится с нами в том, что в создании и разработке метода обратной задачи рассеяния наиболее важную роль сыграли М. Д. Крускал и В. Е. Захаров. Эта книга, включая список литературы и предметный указатель, была подготовлена к печати при помощи компьютерной системы обработки текста SCRIBE (Рейд и Уолкер [1979]). Копия для прямого репродуцирования (за исключением рисунков и формул) была подготовлена на принадлежащей Science and Engineering Research Council (SERC) системе Interactive Computing Facility, DEC-10 в Эдинбургском региональном ВЦ (ERCC) и затем репродуцирована на печатающем устройстве DIABLO. Мы хотели бы особенно поблагодарить Джеффа Филлипса из ERCC за его ценные консультации по всем проблемам, возникавшим в ходе работы с системами редактирования SERC ICF. Математические символы и рисунки были добавлены к тексту на последней стадии с помощью стандартной печатной машинки. Многие из рисунков и графиков были построены с помощью системы FR80 графопостроения на микрофильме в лаборатории SERC Резерфорд—Эпплтон с использованием редактора ICF. Мы чрезвычайно благодарны Шоне Маквикар, принявшей на себя тяжелый труд по вводу в ЭВМ основного текста с черновиков. Тина Ричардсон из Imperial College и М. Гарднер из Heriott-

Watt University выполнили искусную работу по внесению математических знаков в текст. Им, а также А. Дж. Марсленду, Дж. Стюарту и И. Сансонне, взявшим на себя труд по чтению корректур и перепечатке, мы приносим свою благодарность. Нам хотелось бы поблагодарить также Анну Тревийон и Энтони Уоткинсона из издательства Academic Press за их почти бесконечное терпение, когда мы пропускали один срок сдачи рукописи за другим. Мы благодарны всем читателям рукописи за полезные советы, хотя мы не снимаем с себя ответственности за оставшиеся в книге ошибки и упущения. Мы надеемся, что читатели доведут до нашего сведения информацию о всех обнаруженных ими ошибках и помогут сделать исправления, способствующие улучшению книги

Октябрь 1982.

Роджер Додд,
Дж. Крис Эйлбек,
Джон Гиббон,
Хедли Моррис.

1. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ

1.1. Открытие уединенной волны

В истории науки часто случалось так, что важное открытие не получало должной оценки в тот момент, когда оно было сделано. Большей частью такие вещи происходят не из-за косности и равнодушия научной общественности, а просто потому, что состояние знаний в этой области не достигло еще уровня, необходимого для понимания полученного результата.

Нечто подобное произошло и с тем предметом, которому посвящена наша книга. Первое осознанное наблюдение уединенной волны произошло в 1834 г., но оно не было оценено до тех пор, пока в середине 60-х гг. нашего века не обнаружилось, что уединенная волна является важным устойчивым состоянием некоторых видов нелинейных систем. После более чем 130-летнего существования в качестве научного курьеза уединенная волна появилась во многих отраслях прикладной математики и физики, таких как метеорология, физика элементарных частиц, теория плазмы, лазерная физика.

Достижения последнего десятилетия несколько заслонили простоту более ранних результатов, поэтому во вводной главе мы сконцентрируемся на первоначальных результатах и наблюдениях, с тем чтобы дать читателю некоторую историческую перспективу. Здесь будет использоваться эвристический подход для развития ключевых идей и определений, которые позже пригодятся в более детальных и формализованных главах. В этом разделе будет введено понятие уединенной волны. Ниже мы опишем отличительные черты, свойственные многим типам уединенных волн. Если уединенная волна обладает такими свойствами, ее часто называют «солитоном». Различие между этими двумя терминами прояснится в разд. 1.4.

Первое документированное наблюдение уединенной волны сделано в 1834 г. шотландским ученым и инженером Скоттом Расселлом. Наблюдая движение баржи по каналу, Скотт Расселл заметил на поверхности воды волну необычного типа. Оригинальное описание Скотта Расселла до сих пор представляет интерес, и его стоит процитировать:

> «Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась — вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бур-

ного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатилась вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834 г. произошла моя первая случайная встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса...»

Это наблюдение не было результатом чистой случайности. Скотт Рассел занимался в это время проектированием барж по заказу Объединенного общества каналов Эдинбурга. Из другой его статьи можно заключить, что это первое наблюдение уединенной волны произошло возле Гермистонской экспериментальной станции Объединенного общества, в шести милях от центра Эдинбурга.

Кроме того, в других его работах отмечено, что он проводил различные эксперименты на других каналах, озерах и реках. Его исследования продолжались ряд лет и включали в себя, в частности, измерения приливной волны в заливе Фёрт оф Форт в Шотландии и на Ривер Ди в Чешире. В саду у него был построен маленький бассейн специально для изучения гидродинамического сопротивления плавающих тел. Скотт Расселл интересовался многими практическими задачами проектирования кораблей, в частности поисками наиболее обтекаемой формы корпуса корабля. На самом деле именно его теория «волновых линий» обеспечила ему заметное признание при жизни.

Все эти исследования побудили его заинтересоваться гораздо более фундаментальными вопросами движения жидкости. Когда какой-нибудь объект вроде корабля движется по воде, он гонит горб жидкости в точности так, как это было описано Скоттом Расселлом в приведенной выше цитате. Таким образом импульс передается от судна к жидкости. Что происходит при этом с жидкостью и как это действует в свою очередь на движение судна? Как развивается форма горба жидкости? Скотт Расселл пытался воспроизвести в лаборатории открытую им «волну переноса», чтобы более тщательно изучить это явление. Это ему удалось. Рис. 1.1, иллюстрирующий этот опыт, представляет собой оригинальный график Расселла.

На отобранных нами рисунках Скотта Расселла (у него это рисунки 4 и 6) показаны два эксперимента. Первый эксперимент, показанный на рис. 1.1а, изображает отгороженный перегород-

кой участок, где поверхность жидкости приподнята. Когда перегородка внезапно сдвигается, возникает длинная колоколообразная волна, и она начинает двигаться вдоль канала. Это в точности та волна, которую Скотт Расселл наблюдал на канале. Второй эксперимент идентичен первому, только объем воды в этом случае больше — возникает две волны.

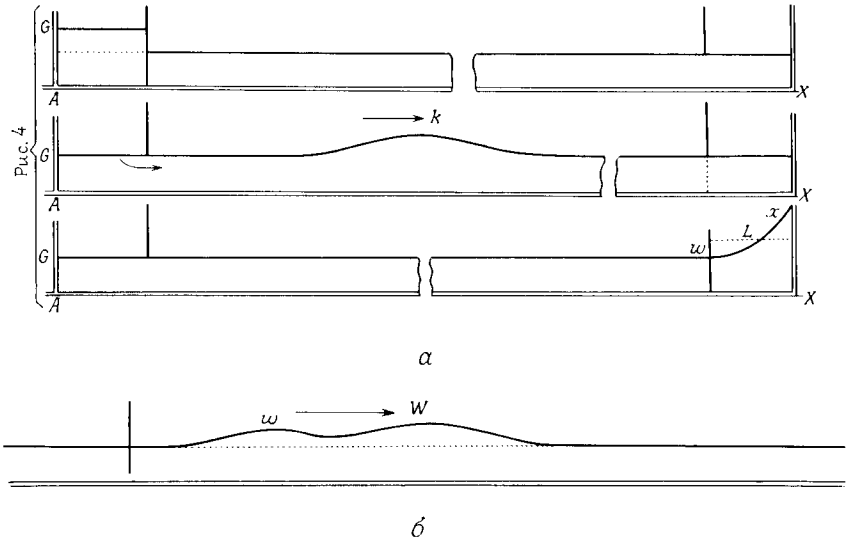


Рис. 1.1. Из книги Скотта Расселла «Report on Waves» (1844). *а* — рис. 4 Скотта Расселла; *б* — рис. 6 Скотта Расселла.

Самое важное, на что здесь следует обратить внимание — это то, что передача импульса жидкости не приводит к появлению ряби, в которой этот импульс рассеялся бы по всей поверхности. Вместо этого он локализуется в устойчиво распространяющейся волне, которая перемещается по жидкости, оставляя ее за собой в том же состоянии, в котором она находилась до прохождения волны. Нижний рисунок из трех на рис. 1.1а показывает, что Скотт Рассел это понимал. В идеализированной ситуации можно было бы поймать уединенную волну в тот момент, когда она достигает конца канала, пододвинув туда другую перегородку в нужный момент. При этом будет уловлено как раз такое количество воды, которое было выпущено в начальный момент, что и указывает на локализованность импульса в процессе переноса. Ниже мы покажем, что этот тип поведения характерен для широкого класса нелинейных систем, причем не обязательно лишь для волн на воде. Выражение «уединенная волна» было придумано самим Скоттом Расселлом в основном потому, что этот тип вол-

нового движения стоит особняком среди других типов колебательных движений жидкости.

Было бы несправедливо не упомянуть хотя бы мимоходом в заключение этой главы о других достижениях Скотта Расселла. Последняя его биография написана Джорджем Эммерсоном в 1977 г. Книга очень легко читается и прекрасно передает своеобразную атмосферу научной и инженерной деятельности ранней викторианской эпохи. Скотт Расселл был в высшей степени человеком своего времени — дерзкий, смелый, он не боялся самой черной работы и был готов на любые эксперименты. Заинтересовавшись каким-нибудь предметом, он брался за него с огромным энтузиазмом и не жалел никаких трудов — таким предстает Скотт Расселл из биографии Эммерсона.

Вероятно, Скотт Расселл был бы гораздо лучше устроен на университетской кафедре, но это не удалось, и он оказался вовлечен в мир бизнеса и кораблестроения. Это на его верфи в Лондоне был построен знаменитый корабль «Грейт Истерн», спроектированный Брюнелем, и всевозможные несчастья, преследовавшие это рискованное предприятие, несправедливо, как нам кажется, бросили тень на имя Расселла. Сегодня кажется очевидным, что в некоторых инцидентах Расселл использовался как удобный козел отпущения, что объяснялось, возможно, его скромным происхождением и просто невезением. Поэтому тем более посмертно хотелось бы воздать ему должное за его оригинальные исследования в области уединенных волн.

Обширный список научных трудов Скотта Расселла показывает, что его интересы в науке и инженерных задачах были весьма широки и простирались на многие предметы. В частности, он независимо открыл эффект Допплера. В дальнейшей его жизни уединенная волна становится почти наваждением. В посмертно опубликованном труде Скотта Расселла «Волна переноса» [1885] теория уединенной волны применяется для вычисления толщины атмосферы (правильно!) и размера Вселенной (неправильно). Он был бы обрадован, но вовсе не удивлен, если бы узнал, что его предсказание насчет огромной важности уединенной волны нашло свое подтверждение во многих областях науки.

1.2. Кортевег и де Фриз

Между первым наблюдением уединенной волны Скоттом Расселлом и каким-либо теоретическим исследованием этого явления прошло более 60 лет. Несмотря на некоторые попытки Скотта Расселла отгадать аналитическую формулу профиля волны (Миура [1976]), его наблюдение оставалось необъясненным в течение его жизни (он умер в 1882 г.). В следующие десятилетия волна переноса кратко упоминалась различными математиками,

в том числе Стоксом [1847] и Буссинеском [1872]. Однако первого теоретического подтверждения работам Скотта Расселла пришлось дожидаться до 1895 г., когда два голландских исследователя Кортевег и де Фриз [1895] получили свое знаменитое теперь уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала. Если канал имеет среднюю глубину l и $l + \eta$ (η мало) — уровень поверхности над дном, то дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее движение волны, будет таким:



Рис. 1.2. Три уединенных волны, изображенные рядом.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right), \quad (1.2.1)$$

где $\sigma = l^3/3 - Tl/\rho g$, α — произвольная константа, T — поверхностное натяжение и ρ — плотность жидкости. Вывод уравнения (1.2.1) непрост, и соответствующие выкладки приведены в гл. 4. Это уравнение, известное как уравнение Кортевега—де Фриза, обычно для простоты называют уравнением КдФ. Оно может быть приведено к более удобной форме изменением масштабов по осям. Если ввести обозначения

$$\eta = 8\alpha u; \quad \xi = \left(\frac{2\alpha}{\sigma}\right)^{1/2} x; \quad \tau = \left(\frac{2\alpha^3 g}{\sigma l}\right)^{1/2} t,$$

то (1.2.1) приобретает вид

$$u_\tau + u_\xi + 12uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (1.2.2)$$

Множитель 12 в нелинейном члене уравнения целиком зависит от нашего произвола и всегда может быть изменен преобразованием $u \to \beta u$. Чтобы найти решение, подобное волне Расселла, нужно искать решение уравнения (1.2.2) типа бегущей волны с постоянным профилем. Для этого рассмотрим трансляционно инвариантные решения вида $u = u(\theta)$, где θ — линейная функция от ξ и τ: $\theta = a\xi - \omega\tau + \delta$. Если потребовать, чтобы функция u стремилась к нулю вместе с ее производными при $|\theta| \to \infty$, то уравнение (1.2.2) можно будет проинтегрировать и получить решение

$$u = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}(a\xi - (a + a^3)\tau + \delta). \quad (1.2.3)$$

Константы a и δ — произвольные, причем последняя играет роль фазы, или «сдвига центра». Это и есть волна в виде горба, которую наблюдал Скотт Расселл. Она движется с постоянной скоростью, не меняя форым. Ее скорость, равная $1 + a^2$, зависит от амплитуды, и высокая волна движется быстрее, чем низкая. График этой зависимости дан на рис. 1.2. Для малых значений a волна широкая и низкая, как на рис. 1.1, но при увеличении a она становится у́же и острее. Именно такой профиль волны наблюдал Скотт Расселл в своих экспериментах (см. рис. 1.1), и, значит, это и есть уединенная волна.

1.3. Задача Ферми — Пасты — Улама (ФПУ)

Ферми, Паста и Улам в Лос-Аламосе (Ферми [1955]) занимались, как в то время казалось, совершенно изолированной проблемой — они исследовали поведение систем, которые первоначально были линейными, но в которые была привнесена нелинейность как возмущение. Если бы такого возмущения не было, энергия каждой нормальной моды линейной системы была бы постоянной. Можно было надеяться, что нелинейные взаимодействия между модами приведут к тому, что энергия системы равномерно распределится между всеми модами — этот результат был бы в согласии с теоремой о равномерном распределении. Но полученные результаты противоречили этой идее. Здесь читатель может удивиться, какое все это имеет отношение к уединенной волне Расселла и уравнению КдФ. Оказывается, что самое непосредственное, но чтобы убедиться в этом, необходимо проделать некоторые выкладки. Важность задачи ФПУ обусловлена тем, что неожиданные результаты этой работы стимулировали исследование нелинейных систем такого типа, и многие современные работы по солитонам берут свое начало именно оттуда. В связи с этим важно прояснить некоторые детали. В своей оригинальной работе ФПУ приводят результаты громоздких вычислений, которые мы не можем здесь ни привести, ни объяснить. Вместо этого мы дадим краткое резюме для того, чтобы объяснить, как эта нелинейная задача связана с уравнением КдФ.

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из N идентичных частиц единичной массы на прямой с фиксированными конечными точками (N велико; ФПУ рассматривали $N = 64$). Предположим, что между ближайшими соседями действуют силы. Пусть Q_n обозначает смещение из состояния равновесия n-й частицы. Тогда уравнение движения этой частицы можно записать в виде

$$\ddot{Q}_n = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}). \tag{1.3.1}$$

Здесь $f(Q)$ — некоторая функция, которая включает в себя как обычное линейное взаимодействие между ближайшими соседями,

так и некоторый малый нелинейный член. ФПУ рассматривали два случая:

$$f(Q) = \gamma Q + \alpha Q^2, \tag{1.3.2}$$

$$f(Q) = \gamma Q + \beta Q^3. \tag{1.3.3}$$

Здесь γ — линейная константа цепочки, а константы α и β выбираются таким образом, чтобы максимальное смещение Q, вызываемое нелинейным членом, было мало. Если использовать

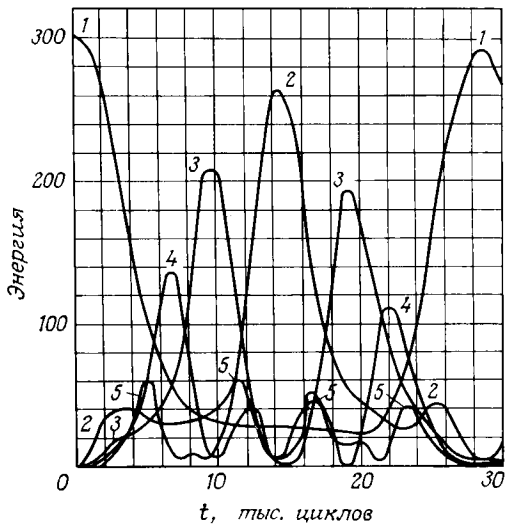


Рис. 1.3. Воспроизведен из ФПУ (Ферми и др. [1955]).

нелинейности такого вида и численно решить уравнение (1.3.1) с начальными условиями в виде, скажем, синусоидальной волны, то обнаружится, что энергия не распределяется между всеми нормальными модами, а остается в начальной моде и нескольких ближайших. К тому же плотность энергии в этих ближайших модах имеет почти периодический характер зависимости от времени. Рис. 1.3 взят из оригинальной статьи, написанной ФПУ, и представляет собой график зависимости энергии от времени для первых пяти мод с синусоидальными начальными данными.

После большого числа колебаний энергия каждой нормальной моды выглядит как почти периодическая функция от времени, причем энергия не перераспределяется в более высокие моды с течением времени. Строгое объяснение этой периодичности стимулировало более глубокое изучение уравнений типа (1.3.1). При некоторых приближениях уравнение (1.3.1) можно преобразовать в уравнение КдФ в континуальном пределе, т. е. при переходе к непрерывному случаю.

Для того, чтобы заменить члены типа Q_n непрерывными переменными, используем разложение в ряд Маклорена:

$$\left[\exp\left(a\frac{\partial}{\partial n}\right)\right]F(n) = F(n+a), \tag{1.3.4}$$

где n теперь рассматривается как непрерывная переменная. Уравнение (1.3.1) при $Q_n(t) = Q(n, t)$ принимает вид

$$\ddot{Q} = f\left\{\left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) - 1\right]Q\right\} + f\left\{\left[1 - \exp\left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)\right]Q\right\}. \tag{1.3.5}$$

Разлагая функцию f в ряд Маклорена, получим

$$\ddot{Q} = f'(0)\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 Q}{\partial n^4} \cdots\right] + \frac{1}{2!}f''(0)\left[2\frac{\partial Q}{\partial n}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial n^3} + \cdots\right] + \frac{1}{3!}f'''(0)\left[3\left(\frac{\partial Q}{\partial n}\right)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2} + \cdots\right]. \tag{1.3.6}$$

На глаз трудно определить, какие члены в (1.3.6) нужно сохранить, а какими следует пренебречь, поэтому мы введем шаг решетки l и определим переменную $x = ln$ как расстояние вдоль решетки. Кроме того, мы при помощи l сделаем замену переменной Q: $Q = l^r p$, где величина r подлежит определению. Эта величина зависит от того, какой вариант нелинейного члена мы выбираем — квадратичный или кубический. Теперь уравнение (1.3.6) приобретает вид

$$\ddot{P} = f'(0)\left\{l^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{l^4}{12}\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + \cdots\right\} + \frac{1}{2}f''(0)\{2l^{r+3}(\partial P/\partial x)(\partial^2 P/\partial x^2)\ldots\} + \frac{1}{3!}f'''(0)\{3l^{2r+4}(\partial P/\partial x)^2(\partial^2 P/\partial x^2)\ldots\}. \tag{1.3.7}$$

Если функция f выбрана в виде (1.3.2), то получаем $f'(0) = \gamma$; $f''(0) = 2\alpha$; $f'''(0) = 0$. Поэтому если положить $r = 1$, то члены с квадратичной нелинейностью оказываются одного порядка с членом, содержащим четвертую производную. Полагая $u(x, t) = \partial P/\partial x$, с точностью до $O(l^4)$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{l^4}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha l^4 u^2 + l^2\gamma u\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.3.8}$$

Если рассматривать это уравнение с точностью до $O(l^2)$, то это будет не что иное, как линейное волновое уравнение. Уравнение (1.3.8) известно под названием уравнения Буссинеска и описывает волны, которые могут перемещаться как влево, так и вправо. Его решение в виде уединенной волны для бесконечной цепи имеет вид

$$u = (n^2/8\alpha)\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}(ax - \omega t + \delta), \tag{1.3.9}$$

$$\omega^2 = \gamma a^2 l^2 + a^4 l^4/12. \tag{1.3.10}$$

Уравнение Буссинеска похоже на уравнение КдФ по своей структуре, и можно ожидать, что оно сведется к уравнению КдФ для волн, распространяющихся только в одном направлении. Это позволит проследить начальное возмущение только в одном направлении вдоль цепи. Используем масштабные преобразования переменных x, t и u. Сначала введем малый параметр ε и выберем новые пространственную и временную переменные

$$\xi = \varepsilon^p (x - ct), \quad \tau = \varepsilon^q t, \tag{1.3.11}$$

затем разложим u по степеням параметра ε:

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots . \tag{1.3.12}$$

Для того, чтобы все члены с четвертой производной, производной по времени, а также нелинейные члены были одного и того же порядка по ε, необходимо положить $c = \gamma^{1/2} l$, $p = 1/2$ и $q = 3/2$. Полученное при этом уравнение для $u^{(1)}$ можно проинтегрировать по ξ, при этом получится уравнение КдФ:

$$\frac{l^3}{12}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} + 2\alpha l^3 u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + 2\gamma^{1/2}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = 0. \tag{1.3.13}$$

Для кубически нелинейной цепочки с функцией $f(Q)$, определенной по формуле (1.3.3), имеем $f'(0) = \gamma$, $f''(0) = 0$ и $f'''(0) = 6\beta$. Теперь для того, чтобы кубически нелинейные члены и члены с четвертой производной оказались одного порядка, придется выбрать $r = 0$. Тогда с точностью до $O(l^4)$ получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{l^4}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta l^4 u^3 + \gamma l^2 u\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.3.14}$$

Проделав такие же масштабные преобразования переменных, как и в предыдущем случае, мы сможем теперь привести интересующие нас члены к одному порядку при $p = 1$, $q = 3$ и $c = \gamma^{1/2} l$. Интегрирование по ξ приводит к уравнению

$$\frac{l^3}{12}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} + 3\beta l^3 (u^{(1)})^2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + 2\gamma^{1/2}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = 0, \tag{1.3.15}$$

у которого есть решения, распространяющиеся только вправо. В уравнении (1.3.15) присутствует кубическая, но не квадратичная, нелинейность, и оно называется модифицированным уравнением КдФ (мКдФ). Для бесконечной цепочки решение уравнения (1.3.15) в виде уединенной волны имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= a(6\beta)^{-1/2}\operatorname{sech}\{a\xi - \omega\tau + \delta\}, \\ \omega &= (l^3 a^3)/24\gamma^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

С физической точки зрения то, чего мы достигли, есть сведение квадратично и кубично нелинейных цепочек соответственно к двум нелинейным уравнениям в частных производных, уравнениям КдФ и мКдФ, на большом отрезке в пространстве и во времени для

волн малой амплитуды, распространяющихся в одном направлении. Этот метод известен как редуктивная теория возмущений, и он будет детально обсужден в гл. 5 для различных примеров, в которых возникают уравнения КдФ и мКдФ. Для бесконечной цепочки профили уединенных волн представляют собой волны малой амплитуды, переносящие импульс при движении вдоль цепочки в локализованных пакетах таким же образом, как в случае мелкой воды, который наблюдал Скотт Расселл.

1.4. Солитоны и работа Забуски и Крускала

До сих пор мы говорили о решениях в виде уединенных волн, которые, если пользоваться весьма расплывчатым определением, представляют собой просто волны, распространяющиеся без изменения формы и в какой-то мере локализованные. Скотт Расселл особо интересовался уединенными волнами на мелкой воде, и, как отмечалось в разд. 1.1, он дал название этим волнам. Однако существует много уравнений, имеющих решение в виде уединенной волны в смысле того определения, которое было дано выше. Слово «солитон» впервые встречается в работе Забуски и Крускала [1965]. Крускал в течение некоторого времени интересовался задачей ФПУ и в особенности тем, почему имеет место рекуррентность. Он изучал некоторые движения нелинейной цепочки, о которых шла речь в предыдущем разделе. Забуски и Крускал описывают численное изучение уравнения КдФ с множителем δ^2 перед членом $\partial^3 u/\partial x^3$. Они выбрали $\delta = 0.022$, периодические граничные условия, такие, что $u(x, t) = u(x + 2, t)$, и периодическое начальное условие $u(x, 0) = \cos x$. Они заметили, что сначала волна становится круче в тех областях, где ее наклон отрицателен, вследствие того, что нелинейность доминирует над третьей производной благодаря малости δ^2. По мере того как волна становится круче, член $\delta^2 u_{xxx}$ становится более существенным и уравнивается по порядку величины с нелинейностью. Они заметили, что слева от того места, где волна становится круче, развиваются осцилляции, каждая из которых растет и в конце концов достигает устойчивой амплитуды и становится по форме почти идентичной решению в виде уединенной волны (1.2.3), каждая со своим значением a. Замечательным свойством этих уединенных волн является их взаимодействие друг с другом, когда они проходят через циклы эволюции, навязанные периодическими граничными условиями. Они проходят друг через друга без изменения форм и лишь с небольшим изменением фаз. Этот фазовый сдвиг приводит к тому, что начальное состояние не повторяется в точности, но все же почти повторяется, как в задаче ФПУ.

Забуски и Крускал назвали эти уединенные волны солитонами именно потому, что когда две или больше уединенных волны

КдФ сталкиваются, то они не разрушаются и не рассеиваются. Греческое окончание «он» обычно используется для частиц, и поэтому слово «солитон» призвано как бы подчеркнуть тот факт, что уединенные волны ведут себя подобно частицам.

Это «частицеподобное» поведение на самом деле не зависит от периодичности в граничных условиях. Мы можем численно ре-

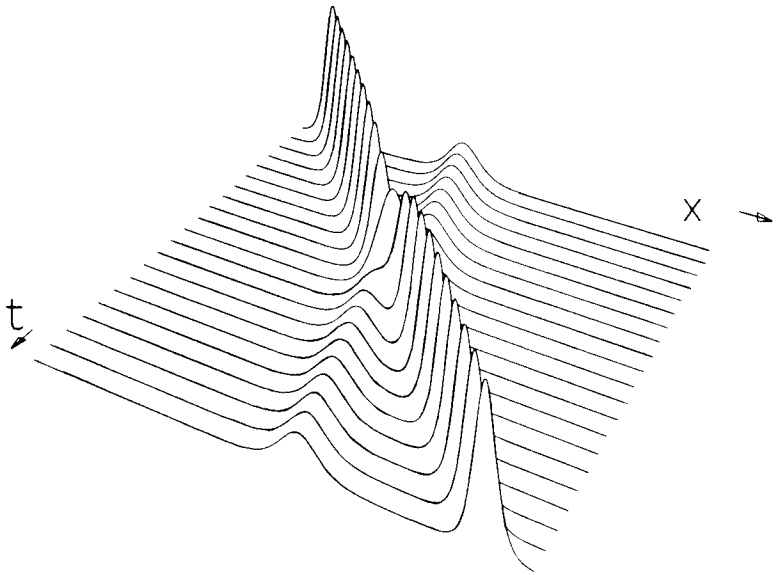


Рис. 1.4. Столкновение двух уединенных волн, описываемых уравнением КдФ.

шить уравнение КдФ при граничных условиях $u \to 0$ при $x \to \infty$ и взять в качестве начальных условий два существенно разных решения уравнения КдФ, имеющих вид уединенных волн, и таких, что более высокая и, соответственно, более быстрая волна расположена левее. С течением времени более быстрая волна нагоняет меньшую и сталкивается с ней. Это изображено на рис. 1.4. Каждый волновой профиль — это график функции $u(x, t)$ от x для некоторого фиксированного момента времени t. В целом рисунок представляет собой наложение некоторого количества таких профилей для возрастающей последовательности моментов времени t, отделенных равными промежутками.

Два солитона достаточно отделены друг от друга до столкновения, в середине рисунка сходятся и потом снова разделяются. Тот факт, что траектории каждого солитона в плоскости (x, t) не совпадают до и после столкновения, показывает, что каждый из них претерпевает фазовый сдвиг. Заметим, кроме того, что мак-

симум в области столкновения меньше амплитуды большего солитона, что указывает на отсутствие линейной суперпозиции в центре.

Уединенные волны после столкновения сохраняют в точности первоначальную форму, и это удивительно, поскольку можно было бы думать, что сильная нелинейность в процессе столкновения разрушит их. Это свойство важно, поскольку оно показывает, что энергия может распространяться в виде локализованных устойчивых «пакетов» без рассеяния. Такое поведение решений не является свойством одного лишь уравнения КдФ, тем же свойством обладают уравнения мКдФ, уравнение Буссинеска, а также многие другие уравнения.

Важно понимать, что большинство нелинейных уравнений в частных производных, обладающих решениями в виде уединенных волн, не имеют решений, ведущих себя как солитоны. Некоторые из таких уравнений имеют решения, ведущие себя почти как солитоны, в том смысле, что когда две уединенных волны встречаются, то после столкновения они возрождаются с малыми изменениями профиля, и лишь малое количество энергии теряется при этом в виде последующих колебаний. Такое поведение часто называют солитоноподобным, или говорится, что столкновение уединенных волн демонстрирует неупругое солитонное поведение. Однако терминология несколько неупорядоченна и различается в разных областях. Например, в физике частиц и в физике твердого тела взаимная проницаемость волн не так важна в сравнении с другими частицеподобными свойствами, такими как локализуемость и конечность энергии. В связи с этим существуют модели, в которых волны не являются, строго говоря, солитонами в смысле данного выше определения (см. разд. 1.9 этой главы), но специалисты в соответствующих областях называют их солитонами. Однако мы будем строго придерживаться данного выше определения. Форма волны не является важной частью определения солитона. Солитоны уравнения КдФ имеют форму $(\mathrm{sech})^2$, в то время как солитоны модифицированного КдФ — только sech. Слово солитон в большей степени указывает на частицеподобные свойства, чем на форму. Очевидно, что солитонное поведение имеет глубокий математический смысл и представляет собой нечто большее, чем просто привлекательный результат. Задачей глав 3, 4 и 6 будет, в частности, попытка понять эту проблему и увидеть, чем отличаются уравнения, обладающие солитонными свойствами, от прочих.

Один солитон в виде бегущей волны легко найти простым интегрированием, но в этом мало пользы, если мы захотим описать аналитической формулой столкновение двух солитонов, которые получены при численном интегрировании (рис. 1.4). В гл. 3 и 4, в частности, будут рассматриваться аналитические методы, позволяющие описывать столкновение целой цепочки солитонов, а также

при некоторых условиях находить функцию $u(x, t)$ по известным начальным данным $u(x, 0)$. Эта задача трудна, и поэтому мы предпошлем некоторым результатам этих глав вычисление двухсолитонных решений другими средствами. Это позволит нам изучить некоторые свойства солитонных столкновений, не запутываясь слишком глубоко в более сложных выкладках, которые мы собираемся описать в гл. 3 и 4. Для нахождения этого решения мы сделаем вначале преобразование, которое сведет уравнение КдФ к однородному уравнению.

Рассмотрим уравнение КдФ

$$u_{xxx} + 12uu_x + u_t = 0, \tag{1.4.1}$$

которое при замене $u = w_x$, сводится к виду

$$w_{xxx} + 6w_x^2 + \omega_t = 0. \tag{1.4.2}$$

Преобразование

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \log f \tag{1.4.3}$$

сводит уравнение КдФ к однородному уравнению относительно функции $f(x, t)$ (Хирота [1971]):

$$ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_xf_t = 0. \tag{1.4.4}$$

Преобразование (1.4.3) известно под названием преобразования Коула—Хопфа (Коул [1951], Хопф [1950]). Мы его обсудим ниже в разд. 1.8. Константа перед производной в (1.4.3), которая в данном случае равна единице, может быть подобрана в зависимости от значения множителя перед нелинейным членом в (1.4.1) таким образом, чтобы члены третьей и четвертой степени относительно функции f и ее производных взаимно погасились. Пытаясь решить (1.4.4), заметим для начала, что единственная форма солитонной волны, представленная формулой (1.2.3), получается в том случае, если положить

$$f = 1 + \exp\theta_1;\ \theta_i = a_1x - a_i^3(t) + \delta_i. \tag{1.4.5}$$

Это наводит на мысль рассмотреть решение в форме

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n f^{(n)}. \tag{1.4.6}$$

Множитель ε является удобным параметром разложения. Подставляя (1.4.6) в (1.4.4) и приравнивая коэффициенты при разных степенях ε, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon: \quad f^{(1)}_{xxxx} + f^{(1)}_{xt} = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad f^{(2)}_{xxxx} + f^{(2)}_{xt} = -[f^{(1)}f^{(1)}_{xxxx} - 4f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx} +\\
&\qquad + 3f^{(1)2}_{xxx} + f^{(1)}f^{(1)}_{xt} - f^{(1)}_x f^{(1)}_t],
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

$$\varepsilon^3: \quad f^{(3)}_{xxxx} + f^{(3)}_{xt} = -[f^{(1)}f^{(2)}_{xxxx} - 4f^{(1)}_x f^{(2)}_{xxx} - 4f^{(1)}_{xxx}f^{(2)}_x + 6f^{(1)}_{xx}f^{(2)}_{xx} + f^{(2)}f^{(1)}_{xxxx} + f^{(2)}f^{(1)}_{xt} - f^{(1)}_x f^{(2)}_t + f^{(1)}f^{(2)}_{xt} - f^{(1)}_t f^{(2)}_x].$$

В порядке $O(\varepsilon)$ мы можем легко найти в качестве точного решение с одной экспонентой (1.4.5). Однако поскольку это линейное уравнение, то мы можем рассматривать в качестве решения сумму любого числа экспоненциальных слагаемых. Здесь мы ограничимся двумя:

$$f^{(1)} = \exp\theta_1 + \exp\theta_2, \tag{1.4.8}$$

$$\theta_i = a_i x - a_i^3 t + \delta_i. \tag{1.4.9}$$

Это точное решение мы можем подставить в правую часть уравнения для порядка $O(\varepsilon^2)$. При этом получится:

$$f^{(2)}_{xxxx} + f^{(2)}_{xt} = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2), \tag{1.4.10}$$

что после интегрирования дает

$$f^{(2)} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2). \tag{1.4.11}$$

Большинство итерационных процессов приводят к бесконечным рядам. В нашем случае подстановка $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ в правую часть уравнения для $O(\varepsilon^3)$ (1.4.7) дает замечательный результат: эта правая часть равна нулю. Этот результат сводит уравнение для $O(\varepsilon^3)$ к виду

$$f^{(3)}_{xxxx} + f^{(3)}_{xt} = 0. \tag{1.4.12}$$

Теперь можно взять решение $f^{(3)} = 0$ и легко убедиться в том, что при таком решении для $f^{(3)}$ все последующие $f^{(n)} = 0$ $(n > 3)$. Эта конечность рядов для f чрезвычайно важна для нахождения точного решения. Множители ε могут быть ликвидированы путем соответствующих изменений фаз θ, и таким образом мы получим точное двухсолитонное решение:

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f(x,\ t),$$

$$f = 1 + \exp(\theta_1) + \exp\theta_2 + A\exp(\theta_1 + \theta_2), \tag{1.4.13}$$

$$A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a^2}\right)^2.$$

Точно такой же процесс пригоден и для трехпараметрического решения, но алгебраические выкладки становятся довольно громоздкими. Хирота [1971] нашел таким образом N-солитонное решение уравнения КдФ, и использованный выше метод редукции уравнения к одному или нескольким билинейным уравнениям стал известен под названием метода Хироты (Хирота [1974]).

Можно проанализировать формулу (1.4.13) для случая, когда два солитона достаточно далеки друг от друга. Возьмем $a_1 > a_2 > 0$. Для первого солитона, характеризующегося θ_1, находим, что область его максимума находится вблизи $\theta_1 \simeq 0$, т. е. в области на оси x, где $x \simeq a_1^2 t$. Отсюда следует, что $\theta_2 = (a_1^2 - a_2^2)\, t$, и, таким образом,

$$\begin{aligned} \theta_2 \simeq 0: \quad & \theta_1 \to +\infty \quad t \to +\infty, \\ & \theta_1 \to -\infty \quad t \to -\infty \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Аналогично в области расположения второго солитона имеем

$$\theta_2 \approx 0: \quad \theta_1 \to \mp\infty, \quad t \to \pm\infty. \tag{1.4.15}$$

Прежде чем продолжать, полезно заметить, что любая комбинация экспонент может быть вынесена за скобки в выражении для f, если принять во внимание преобразование Коула—Хопфа в (1.4.13). Используя это свойство и беря пределы, вычисленные выше для f, найдем, что асимптотически решение получается таким:

$$u \sim \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4} a_i^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\left(\theta_i + \Delta_i^{\pm}\right), \quad t \to \pm\infty, \tag{1.4.16}$$

где

$$\Delta_1^{(+)} = \log A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{+} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \log A.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)} &= \log A < 0, \\ \Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)} &= -\log A > 0. \end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Результат, выражаемый равенствами (1.4.17), состоит в том, что больший солитон (a_1) сдвинулся вперед, а меньший солитон (a_2) — назад в сравнении с тем, как они двигались бы, если бы взаимодействия между ними не произошло.

Траектории максимумов солитонов на рис. 1.4 отчетливо иллюстрируют этот результат. Считать ли, что столкновение солитонов — это процесс, при котором они проходят друг через друга, или же считать, что они при этом меняются ролями, — это только вопрос интерпретации. В конце концов уравнение (1.4.17) показывает, что общий фазовый сдвиг системы равен нулю, и это означает, что центр масс остается неподвижным.

1.5. Уравнение sin-Гордон

Одной из наиболее ранних моделей теории поля было линейное уравнение Клейна—Гордона:

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = m^2\varphi. \tag{1.5.1}$$

Уравнение (1.5.1) выводится из плотности лагранжиана:

$$L = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 - \varphi_t^2) + \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{1.5.2}$$

Скирм [1958] предложил нелинейную теорию поля, которая для скалярного случая и для случая одномерного пространства сво-

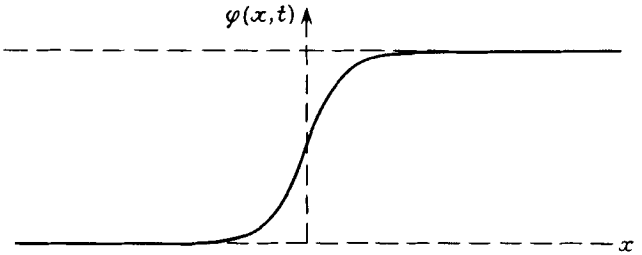


Рис. 1.5. Одиночный кинк уравнения sin-Гордон.

дится, грубо говоря, к нелинейному обобщению лагранжевой плотности (1.5.2). Член $m^2\varphi^2/2$ заменяется его простым периодическим обобщением $m^2(1 - \cos\varphi)/2$. Теперь уравнение поля приобретает вид

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = m^2 \sin^2. \tag{1.5.3}$$

Это уравнение стало впоследствии известно под названием уравнения sin-Гордон (С-Г). Будем снова искать волны с неизменным профилем. Принимая во внимание лоренц-инвариантность для (1.5.3) и используя граничные условия $\varphi \to 0 \pmod{2\pi}$, после двух интегрирований получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= 4 \operatorname{arctg} \exp\left[m\gamma(x - vt) + \delta\right], \\ \gamma^2 &= (1 - v^2)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= 2m\gamma \operatorname{sech}\left[m\gamma(x - vt) + \delta\right], \\ \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) &= \operatorname{sech}\left[m\gamma(x - vt) + \delta\right]. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

На рис. 1.5 показан график зависимости $\varphi(x, t)$ от t. Это решение было названо «кинк» [1]), поскольку оно представляет перегиб

[1]) Английское слово kink переводится как «петля» или «перегиб». — *Прим. перев.*

по переменной φ, который происходит при переходе системы от одного решения при $\varphi = 0$ к другому, соседнему решению при $\varphi = 2\pi$. Для этого графика был выбран случай положительного корня для γ. Состояния $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ известны как вакуумные состояния, поскольку они являются постоянными решениями нулевой энергии.

В 1962 г. Перринг и Скрим [1962] нашли в результате численного эксперимента аналитическое решение, представляющее собой

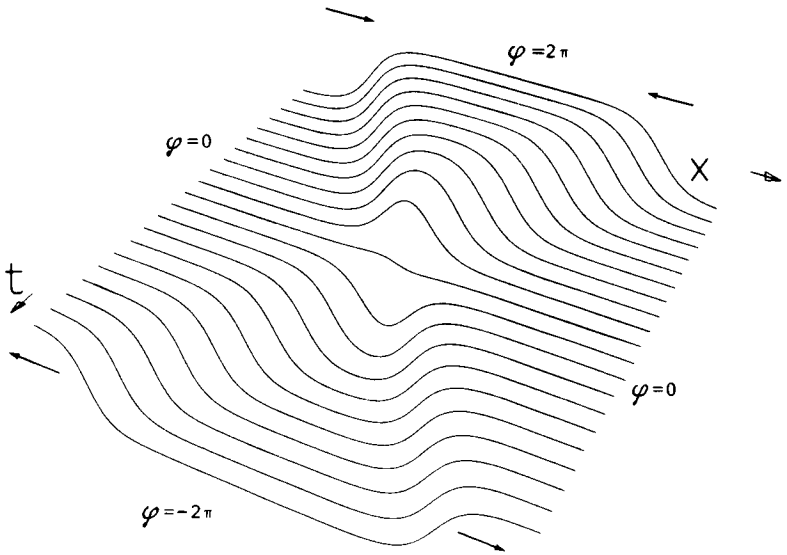


Рис. 1.6. Столкновение кинка и антикинка уравнения sin-Гордон.

лобовое столкновение двух кинков, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями, — кинк, движущийся налево, назывался антикинком, поскольку имел противоположный изгиб, и он соответствовал случаю отрицательного корня для γ. Этот результат предварил работу Забуски и Крускала, но точно так же, как было найдено позже, в 1965 г., когда изучалось столкновение двух уединенных волн уравнения КдФ, столкновение этих кинков не привело ни к их взаимному уничтожению (аннигиляции), ни к осцилляции. Эта ситуация показана на рис. 1.6, где кинк и антикинк сталкиваются и потом разделяются. Процесс столкновения переводит систему из соседних вакуумных состояний 0 и 2π в соседние состояния -2π и 0.

При столкновении волны совершают переход к двум соседним вакуумным состояниям. Волны не уничтожают одна другую в центре, поскольку φ_x не является нулем в этой точке. Эти волны, следовательно, имеют солитонное свойство в том смысле, что при

столкновении сохраняют свою форму. Однако название «кинк» прочно утвердилось за волнами такой формы (1.5.4), и поэтому в дальнейших главах мы будем продолжать придерживаться этого термина.

Одним из важных свойств решения в виде кинка является то, что его энергия конечна. Это можно легко доказать, интегрируя плотность гамильтониана уравнения sin-Гордон

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_t^2) + m^2(1 - \cos\varphi) \tag{1.5.6}$$

по действительной оси. В результате получится $8m\gamma$, что доказывает ожидаемую релятивистскую форму для массы кинка. Постоянные решения $\varphi = \pi \pmod{2\pi}$ нельзя рассматривать как вакуумные состояния, поскольку их энергия бесконечна.

Уравнение sin-Гордон имеет более длинную историю, чем уравнение КдФ. Особенно интересны исследования, проведенные шведским математиком Бэклундом в 1875 г. Он рассматривал задачу дифференциальной геометрии, связанную с теорией поверхностей постоянной отрицательной кривизны (Эйзенхарт [1960], Форсайт [1959]). Вклад Бэклунда состоял в том, что он показал, как можно строить иерархии решений, каждое из которых конструируется из предыдущих. Используемые при этом преобразования были названы преобразованиями Бэклунда, и они играют важнейшую роль в развитии теории и по сей день. Поэтому мы покажем, как найти преобразования Бэклунда для уравнения sin-Гордон. Методы для других уравнений будут развиты позже, в частности в гл. 3 и 6.

Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна—Гордона общего вида

$$\varphi_{\xi\tau} = F(\varphi), \tag{1.5.7}$$

выраженное в характеристических координатах: $\xi = (x - t)/2$, $\tau = (x + t)/2$.

Предположим, что можно определить зависимость между двумя независимыми решениями (1.5.7) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть эти два независимых решения уравнения (1.5.7) будут $\varphi = u + v$ и $\bar{\varphi} = u - v$, и рассмотрим пару уравнений

$$u_\xi = f(v), \quad v_\tau = g(u) \tag{1.5.8}$$

относительно переменных $u(\xi, t)$ и $v(\xi, t)$. Поскольку мы не задали никакой специальной формы для функций F, g и f, форма системы (1.5.8) продиктована только желанием разнести частные производные по ξ и τ из уравнения (1.5.7) в два разных уравнения.

Дифференцируя уравнения (1.5.8) по τ и ξ соответственно, получим уравнения

$$\begin{aligned} u_{\xi\tau} &= g(u) f'(v), \\ v_{\xi\tau} &= g'(u) f(v). \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Хотя уравнения (1.5.9) имеют структуру, похожую на (1.5.7), мы все еще не можем рассматривать u и v по отдельности как решения (1.5.7), потому что правая часть (1.5.9) содержит произведение функций от u и v. Однако складывая и вычитая эту пару уравнений, мы можем получить уравнения

$$\begin{aligned} (u+v)_{\xi\tau} &= g(u) f'(v) + g'(u) f(v), \\ (u-v)_{\xi\tau} &= g(u) f'(v) - g'(u) f(v). \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Поскольку φ и $\bar{\varphi}$ являются независимыми решениями уравнения (1.5.7), то

$$\begin{aligned} F(u+v) &= g(u) f'(v) + g'(u) f(v), \\ F(u-v) &= g(u) f'(v) - g'(u) f(v). \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Дифференцируя первое уравнение сначала по u, а потом по v, мы легко найдем, что

$$\frac{g''(u)}{g(u)} = \frac{f''(v)}{f(v)} = -\lambda. \tag{1.5.12}$$

Второе уравнение даст тот же самый результат. Поскольку левая часть уравнения (1.5.12) является функцией только от u, а правая часть — только от v, то λ должна быть константой. Теперь функции f и g удовлетворяют уравнениям

$$g'' + \lambda g = 0, \quad f'' + \lambda f = 0. \tag{1.5.13}$$

Абсолютная величина λ не так важна, как ее знак, поэтому возьмем сначала $\lambda = 1$ и найдем, что

$$g(u) = \beta \sin u, \quad f(v) = \alpha \sin v. \tag{1.5.14}$$

Сопоставив это с (1.5.11), немедленно получим

$$F(\varphi) = \sin \varphi, \quad \beta = 1/\alpha. \tag{1.5.15}$$

Так как $u = (\varphi + \bar{\varphi})/2$ и $v = (\varphi - \bar{\varphi})/2$, исходные уравнения (1.5.8) теперь будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi+\bar{\varphi})_{\xi} &= \alpha \sin \frac{1}{2}(\varphi-\bar{\varphi}), \\ \frac{1}{2}(\varphi-\bar{\varphi})_{\tau} &= \frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{2}(\varphi+\bar{\varphi}). \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Получилась пара уравнений относительно двух частных решений φ и $\bar{\varphi}$ уравнения sin-Гордон $\varphi_{\tau\xi} = \sin \varphi$. Равенства (1.5.16) — это и есть преобразования, введенные Бэклундом.

Выбор $\lambda = -1$ приводит к синусу гиперболическому вместо синуса, а выбор $\lambda = 0$ приводит к линейному уравнению Клейна—Гордона. Таким образом, мы показали, что при тех ограничениях на выбор, который был сделан в (1.5.8), уравнение sin-Гордон (или sh-Гордон) — единственное нелинейное уравнение Клейна—Гордона с преобразованиями Бэклунда; результат, делающий это уравнение весьма специальным случаем!

Если дано одно решение φ_0 уравнения sin-Гордон, соотношение (1.5.16) позволяет сформировать двухпараметрическое семейство зависимых решений. Простейшее решение уравнения sin-Гордон — это $\varphi_0 = 0$; подставляя его в (1.5.16), мы получим два очень простых обыкновенных дифференциальных уравнения для φ, которые после интегрирования дают:

$$\bar{\varphi} = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(a\xi + \frac{1}{a}\tau + \delta\right), \quad \alpha = -a. \tag{1.5.17}$$

Это решение типа единичного кинка (1.5.4), выраженное в характеристических координатах. Из этого единичного кинка мы можем построить другое решение при помощи (1.5.16). Сделать это из дифференциальных уравнений (1.5.16) прямым интегрированием трудно, но можно применить более простой геометрический способ. Начнем с решения φ и построим два решения того же типа, φ_1 и φ_2, отличающиеся только тем, что мы берем $\alpha = -a_1$ для φ_1 и $\alpha = -a_2$ для φ_2. Третье решение может быть получено из них, если мы предположим, что преобразования Бэклунда, схематически изображенные на рис. 1.7, коммутируют:

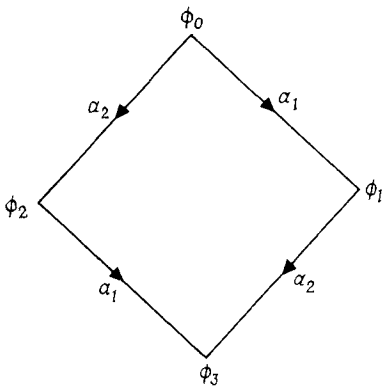


Рис. 1.7.

Возьмем последовательность пар φ_0, φ_1; φ_1, φ_3; φ_2, φ_3 и φ_0, φ_2, затем сложим первую и третью, а вторую и четвертую вычтем. После этого члены с производными в (1.5.16) взаимно уничтожаются и получается

$$a_1 \sin\frac{1}{4}(\alpha_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) = a_2 \sin(\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3), \tag{1.5.18}$$

что после несложных преобразований дает

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varphi_0-\varphi_3)=\left[\frac{a_1+a_2}{a_2-a_1}\right]\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varphi_2-\varphi_1). \qquad (1.5.19)$$

Если взять $\varphi_0=0$, то φ_1 и φ_2 будут решениями типа единичного кинка (1.5.17) с $a=-a_1$ и $a=-a_2$ соответственно. Решение φ_3 получится таким:

$$\varphi_3=4\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\right)\frac{\exp\theta_1-\exp\theta_2}{1+\exp(\theta_1+\theta_2)}\right]. \qquad (1.5.20)$$

Это и есть двухкинковое решение при $a_1,\ a_2<0$, показанное на рис. 1.6. Это обобщение формулы Перринга и Скирма, описывающее лобовое столкновение кинка и антикинка с противоположными и разными скоростями. Решение (1.5.20) и другие решения из нескольких кинков могут быть получены также при использовании метода преобразования Коула—Хопфа. Это описывается в замечаниях к главе.

1.6. Нелинейное уравнение Шрёдингера

Следующее уравнение, заслуживающее специального упоминания, — это кубическое нелинейное уравнение Шрёдингера (НЛШ):

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\beta\varphi|\varphi^2|=0. \qquad (1.6.1)$$

Оно так называется потому, что совпадает по форме с квантовым уравнением Шрёдингера с потенциалом в виде $\beta|\varphi^2|$. Теперь φ — комплексная функция, и поэтому естественно ожидать, что решение в виде бегущей волны будет иметь осциллирующую модуляцию. Нетрудно показать, что решение уравнения (1.6.1) в виде бегущей волны, удовлетворяющее условию $\varphi\to 0$ при $|x|\to\infty$, имеет вид

$$\varphi=a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\exp\left\{i\left[\frac{1}{2}bx-\left(\frac{1}{4}b^2-a^2\right)\right]\right\}\operatorname{sech}a(x-bt), \qquad (1.6.2)$$

где a и b — произвольные константы. Осциллирующая часть имеет огибающую формы sech. Нелинейное уравнение Шредингера (НЛШ) играет исключительно важную роль в теории развития слабо меняющихся волновых шлейфов в устойчивых слабо нелинейных системах и встречается в целом ряде физических ситуаций, включая физику плазмы и нелинейную оптику.

Оказывается, что НЛШ обладает теми же свойствами, что и уравнения КдФ, мКдФ и sin-Гордон, т. е. огибающие их решений в виде бегущей волны являются солитонами. В гл. 8 содержится существенно больше деталей о решениях уравнения НЛШ и приводятся выводы некоторых физических моделей, в которых уравнение НЛШ играет важную роль.

Форма выражения (1.6.2) указывает на то, что мы можем, как и прежде, искать преобразование типа Коула—Хопфа, чтобы увидеть, можно ли вычислить двухсолитонное решение.

Определим функцию f так, чтобы модуль квадрата φ мог быть записан в виде

$$|\varphi|^2 = \frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f, \tag{1.6.3}$$

и выберем $\varphi = g/f$ так, чтобы

$$gg^* = \frac{2}{\beta}(ff_{xx} - f_x^2). \tag{1.6.4}$$

Подстановка этих выражений в (1.6.1) показывает, как и в предыдущем примере, что члены выше второй степени уничтожаются, что приводит к уравнению

$$fg_{xx} - 2f_xg_x + gf_{xx} + i(g_tf - gf_t) = 0. \tag{1.6.5}$$

Однопараметрическое решение уравнения (1.6.5) имеет вид

$$\begin{aligned} g &= 2a\,(2/\beta)^{1/2}\exp\theta, \\ f &= 1 + \exp(\theta + \theta^*), \\ \theta_R &= ax - abt, \\ \theta_I &= \frac{1}{2}bx + \left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)t, \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

что согласуется с (1.6.2). Подстановка двухпараметрического решения в уравнения, полученные путем использования простой итерационной процедуры, аналогичной описанной в разд. 1.4 для случая уравнения КдФ, показывает, что снова получаются обрывающиеся ряды и вычисляется точное двухпараметрическое решение. Это оставлено в качестве упражнения для читателя в конце главы.

1.7. Некоторые основные принципы распространения линейных волн

В предыдущих шести разделах мы рассматривали явление, которое встречается при некоторых нелинейных взаимодействиях. Свойства секанса гиперболического придавали уединенной волне характер, весьма отличающий ее от линейных гармонических волн. Эта разница определяется не только тем, что уединенная волна представляет собой неосциллирующее волновое движение, но также и тем, что ее скорость зависит от амплитуды. Совершенно иная ситуация наблюдается в случае линейных волн, для которых скорость всегда независима от амплитуды. Мы предполагаем, что читатель знаком с линейными волнами, но для полноты все-таки изложим здесь некоторые основные принципы.

Для *линейной* системы самой простой линейной волной является гармоническая:

$$\varphi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]. \tag{1.7.1}$$

Здесь k — волновое число, связанное с длиной волны соотношением $k = 2\pi/\lambda$, а A — амплитуда, не зависящая от k. Требование, чтобы $\varphi(x, t)$ удовлетворяла линейному волновому уравнению, приводит к функциональной зависимости между k и ω

$$\mathscr{L}(k, \omega) = 0, \tag{1.7.2}$$

которая называется дисперсионным соотношением. Это самая важная характеристика любой линейной системы, так как она отражает форму линейного дифференциального уравнения, решением которого служит функция $\varphi(x, t)$. Так, например, линейное уравнение Клейна—Гордона

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = m^2\varphi \tag{1.7.3}$$

имеет дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = m^2 + k^2. \tag{1.7.4}$$

Фазовая скорость определяется формулой

$$c_p = \omega/k \tag{1.7.5}$$

и описывает, как движется поверхность постоянной фазы. Гораздо важнее понятие групповой скорости, которая определяется формулой

$$c_g = d\omega/dk \tag{1.7.6}$$

и дает численную меру скорости распространения пакета волн. У данной линейной системы может быть несколько групповых скоростей, соответствующих разным решениям или модам уравнения (1.7.2). Мы сейчас разбирали одномерный случай, когда волновое число k представляло собой скаляр, но в многомерном пространстве волновое число — это вектор $\mathbf{k}$. При этом фазовая скорость остается скаляром, $c_p = \omega/|\mathbf{k}|$, в то время как групповая скорость становится вектором: $\mathbf{c}_g = d\omega/d\mathbf{k}$.

Слово *дисперсия* означает следующее: для чисто вещественного значения ω волны, относящиеся к различным волновым числам k, имеют разные фазовые и групповые скорости, и поэтому компоненты волн в процессе распространения расползаются и диспергируют. Для того, чтобы это происходило, c_p и c_g должны зависеть от k. Это требование выполняется, если в уравнении (1.7.3) $m \neq 0$, и не выполняется, если $m = 0$. Мы все время предполагаем, что волны распространяются в неограниченной однородной среде. Если $\omega(k)$ — комплексная функция

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \tag{1.7.7}$$

то гармонические волновые решения (1.7.1) при $\omega_I > 0$ растут экспоненциально и неустойчивы, а при $\omega_I < 0$ экспоненциально убывают. В последнем случае говорят, что уравнение имеет *диссипативный* характер, поскольку амплитуда волны убывает как $\exp(-|\omega_I| t)$ при $t \to \infty$. Несколько более сложная ситуация возникает в том случае, если линейное уравнение, моделирующее физическую систему, содержит параметр (например, число Рэлея), значение которого можно менять. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x}; u\right)\varphi = 0. \tag{1.7.8}$$

Здесь $\mathscr{L}$ — линейный оператор, u — параметр, и дисперсионное соотношение имеет вид $\mathscr{L}(-i\omega, ik, u) = 0$. Если $\omega_I > 0$ для одних значений u, а для других $\omega_I < 0$, то можно рассмотреть соотношение между u и k

$$u = u(k), \tag{1.7.9}$$

определяемое условием $\omega_I = 0$, соответствующим границе устойчивости. Для тех значений u, которые находятся с одной стороны от кривой (1.7.9), где $\omega_I > 0$, волны неустойчивы, с другой же стороны, где $\omega_I < 0$, волны устойчивы. Величина ω_I равна нулю только на кривой (1.7.9), и система называется в этом случае *нейтрально устойчивой*. Кривая (1.7.9) называется *нейтральной кривой*, поскольку она является границей между областью устойчивости и областью неустойчивости. Многие физические системы не имеют нейтральной кривой, но у некоторых важных систем такие кривые есть, и мы вернемся к этому понятию в гл. 9. В этой же главе мы рассмотрим, в частности, случай, когда в дисперсионном соотношении появляется пара комплексно сопряженных корней.

Изложенные выше идеи и определения можно проиллюстрировать следующим примером. Рассмотрим уравнение

$$\varphi_t = \delta\varphi_{xx}. \tag{1.7.10}$$

Если $\delta = -i$, то уравнение (1.7.10) имеет вид

$$i\varphi_t = \varphi_{xx} \tag{1.7.11}$$

и представляет собой линеаризованный вариант уравнения Шрёдингера, упомянутого нами в предыдущем разделе. Это чисто дисперсионное уравнение, так как $\omega = -k^2$; $c_p = -k$ и $c_g = -2k$. Однако если δ вещественно и положительно, (1.7.10) оказывается тепловым или диффузионным уравнением, которое чисто диссипативно, так как $\omega = -i\delta k^2$. Вещественная часть ω в данном случае равна нулю, поэтому никакой дисперсии не происходит и волны затухают как $\exp(-\delta k^2 t)$ при $t \to \infty$. Уравнение (1.7.10) — удобный пример, который мы используем при обсуждении задач *с начальными условиями*.

Если начальные условия заданы в виде $\varphi(x, 0) = f(x)$, мы хотим вычислить $\varphi(x, t)$ для всех t. Даже если начальные условия не имеют формы гармоники, как в (1.7.1), представим их в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dx, \tag{1.7.12}$$

где

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k) t]} dk. \tag{1.7.13}$$

Для линейной системы общего вида, как было указано выше, $\omega = \omega(k)$, и поэтому решение для всех $t \geqslant 0$ вычисляется по формуле

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk. \tag{1.7.14}$$

Поскольку функция $A(k)$, по крайней мере в принципе, известна, т. е. может быть восстановлена по начальным данным $\varphi(x, 0)$ формулой (1.7.13), решение для всех t может быть найдено по формуле (1.7.14). На практике ни один из приведенных выше интегралов не может быть выражен в элементарных функциях даже в тех случаях, когда ω есть многочлен по k, за исключением некоторых специальных случаев. Однако интегральное представление (1.7.14) может быть использовано для получения аппроксимации с помощью метода перевала.

Уравнение $\varphi_t = \delta\varphi_{xx}$ как раз такое, что оно допускает аналитическое исследование, и потому будет использовано нами как пример. В этом случае функция $\varphi(x, t)$ определяется формулой

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, 0) e^{-ik\xi} d\xi \right] \exp[i(kx + i\delta k^2 t)]. \tag{1.7.15}$$

В предположении, что можно поменять порядок интегрирования в (1.7.15), получаем

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[(x - \xi)k - \delta k^2 t]\} dk \right] \varphi(\xi, 0) d\xi. \tag{1.7.16}$$

После замены $\eta = (x - \xi)$ интеграл (1.7.16) сводится к вычислению двух интегралов:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k\eta)\, e^{-\delta k^2 t}\, dk, \tag{1.7.17}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k\eta)\, e^{-\delta k^2 t}\, dk, \tag{1.7.18}$$

Подынтегральная функция в I_2 нечетна, и поэтому $I_2 = 0$. Интеграл I_1 может быть вычислен с помощью простого приема. Сначала положим $\lambda^2 = \delta k^2 t$ и $a = \eta/\sqrt{\delta t}$, так что

$$I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda. \tag{1.7.19}$$

Дифференцируя обе части по a и интегрируя по частям, получаем из (1.7.19) простые соотношения:

$$\frac{dI_1}{da} = -\frac{1}{2} a I_1; \quad I_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\delta t}}, \tag{1.7.20}$$

и, следовательно,

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\delta t}} \exp\left(-\frac{1}{4} a^2\right). \tag{1.7.21}$$

Здесь мы использовали известную формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\pi}. \tag{1.7.22}$$

Окончательно получаем выражение для $\varphi(x, t)$:

$$\varphi(x, t) = (4\pi\delta t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, 0) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\delta t}\right] d\xi. \tag{1.7.23}$$

Для произвольных начальных данных функция $\varphi(x, t)$ по формуле (1.7.23) может быть вычислена только приближенно методом перевала (Джеффри и Джеффри [1946]), который особенно удобен в тех случаях, когда δ вещественно и мало. Описание этой техники можно найти в книге Уизема [1974]. Одним из классов начальных условий, при которых интеграл может быть вычислен, являются гауссовы функции $\varphi(x, 0) = A \exp(-\alpha x^2)$. В этом случае

$$\varphi(x, t) = \frac{A}{(1 + 4\pi\alpha\delta t)^{1/2}} \exp\left[\frac{-\alpha x^2}{1 + 4\pi\delta t}\right]. \tag{1.7.24}$$

Если δ вещественно и положительно, то $\varphi \to 0$ при $t \to \infty$, как и следовало ожидать от решения диссипативного уравнения. Соответствующий график дан на рис. 1.8.

Однако если $\delta = -i$, то φ является осциллирующей функцией. На рис. 1.9 видно, как гауссовы начальные условия начинают диспергировать. Эти рисунки демонстрируют фундаментальное различие между дисперсией и диссипацией.

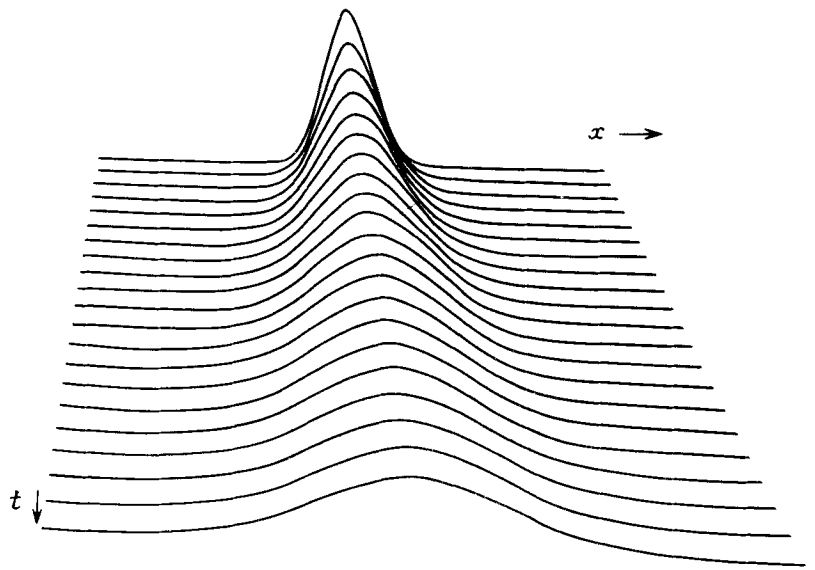


Рис. 1.8. Затухание начальных данных, имеющих форму кривой Гаусса ($\delta = 1$).

В уединенной волне проявляются как дисперсионные, так и нелинейные эффекты. Между нелинейными уединенными волнами и линейными гармоническими волнами существует связующее звено. Это осциллирующие решения уравнения КдФ, которые нелинейны в том смысле, что их амплитуда зависит от скорости. Такой класс решений можно получить, если три интегрирования в (1.2.2) выполнять без наложения граничных условий, которые приводят к решению типа солитона. Если использовать эллиптические интегралы (Берд и Фридман [1971]), то окончательный результат выражается в терминах эллиптической функции Якоби:

$$u = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cn}^2 \left[\frac{1}{2} \theta, K \right]. \qquad (1.7.25)$$

Модуль эллиптической функции K зависит от значений функции u и ее производных на бесконечности. В пределе, когда функция u

и ее производные стремятся к нулю на бесконечности, $K \to 1$ и

$$\operatorname{cn}\left(\frac{1}{2}\theta;\ K\right) \to \operatorname{sech}\frac{1}{2}\theta,\quad K \to 1. \tag{1.7.26}$$

Для волн с малой амплитудой, когда может быть использована линеаризация уравнения КдФ, K будет стремиться к нулю, и в пределе

$$\operatorname{cn}\left(\frac{1}{2}\theta;\ K\right) \to \cos\frac{1}{2}\theta,\quad K \to 0. \tag{1.7.27}$$

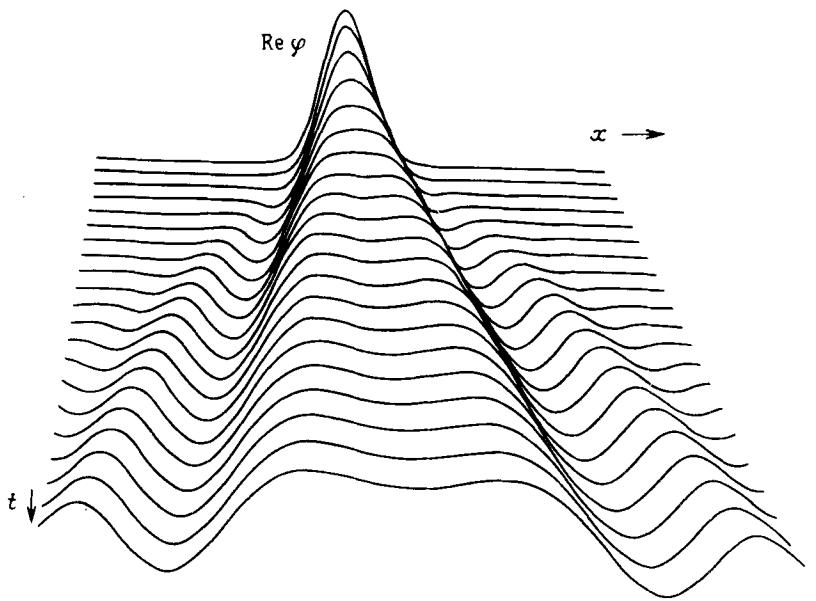


Рис. 1.9. Расплывание начальных данных, имеющих форму кривой Гаусса ($\delta = -i$).

Эти нелинейные осциллирующие решения называются кноидальными волнами, и они образуют мост между чисто линейными колебаниями и уединенными волнами.

1.8. Некоторые элементарные идеи в теории распространения нелинейных волн

Используя идеи предыдущего раздела, мы можем убедиться, что линеаризованный вариант уравнения КдФ, записанный в форме

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.8.1}$$

является чисто дисперсионным уравнением с $\omega = k - k^3$. Слагаемое u_{xxx} вносит дисперсионный эффект в бездисперсионное уравнение $u_t + u_x = 0$. Начальные данные, предпосланные уравнению (1.8.1), будут в дальнейшем диспергировать или расширяться, как описано в разд. 1.7.

Сконцентрируем теперь наше внимание на нелинейном члене uu_x, встречающемся в уравнении КдФ, и будем игнорировать дисперсионный член. Рассмотрим, как развиваются некоторые начальные данные

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1.8.2}$$

для бездисперсионного нелинейного уравнения

$$u_t + (u + 1) u_x = 0. \tag{1.8.3}$$

Уравнение такой структуры может показаться трудным для решения, но его можно преобразовать к другому виду по аналогии с соответствующей линеаризованной задачей. Уравнение $u_t + u_0 u_x = 0$ имеет решение $u = u(x - u_0 t)$, распространяющееся со скоростью u_0. Если мы выберем начальные данные $u(x, 0) = f(x)$, полное решение будет иметь вид $u(x, t) = f(x - u_0 t)$. Физическая аналогия с нелинейным случаем кажется слишком отдаленной, но тем не менее множитель $(u + 1)$ в уравнении (1.8.3) аналогичен волновой скорости u_0. По аналогии с линейным случаем это подразумевает, что (1.8.3) может быть выражено как функциональное уравнение:

$$u = f[x - (u + 1) t]. \tag{1.8.4}$$

Чтобы показать, что это возможно, произведем проверку прямым вычислением. Так,

$$u_x = (1 - u_x t) f' \tag{1.8.5}$$

и

$$u_t = -[tu_t + u + 1] f' \tag{1.8.6}$$

дают уравнение

$$[u_t + (u + 1) u_x] (1 + tf') = 0, \tag{1.8.7}$$

которое удовлетворяется любым решением уравнения (1.8.3). Удивительным образом оказывается, что (1.8.4) — альтернативная форма для (1.8.3) и, кроме того, *неявное* уравнение для u. Решение уравнения (1.8.4) может быть найдено методом характеристик. Детали можно найти у Уизема [1974]. Используя те же идеи, легко показать, что и для более общего нелинейного уравнения $u_t + c(u) u_x = 0$ с начальными условиями $u(x, 0) = f(x)$ решение может быть выражено в форме $u = f[x - c(u) t]$

Ясно, что для большинства функций $f(x)$ уравнение (1.8.4) нисколько не легче для решения, чем уравнение (1.8.3). Однако

существует такой выбор начальной функции, который позволяет решить уравнение (1.8.4). Это кусочно-линейные начальные условия в форме треугольника:

$$f(x)=\begin{cases} u_0 x, & 0<x<1, \\ u_0(2-x), & 1<x<2, \\ 0, & x<0,\ x>2. \end{cases} \tag{1.8.8}$$

Эта треугольная форма может считаться приближением более общей горбовидной кривой и в то же время не заставит нас заниматься решением трансцендентных уравнений. Поэтому такую форму начальных условий можно использовать для формирования интуитивных представлений о свойствах более общей задачи. При таких начальных условиях функциональное уравнение (1.8.4) приобретает вид

$$u(\eta,\ t)=\begin{cases} u_0(\eta-ut), & 0\leqslant \eta-ut\leqslant 1, \\ u_0(2-\eta+ut), & 1\leqslant \eta-ut\leqslant 2, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.8.9}$$

Здесь мы немного упростили (1.8.9) подстановкой $x-t=\eta$. Эти уравнения линейны по u в каждом интервале, и мы можем их решить:

$$u=\begin{cases} \dfrac{u_0\eta}{1+u_0t}, \\ \dfrac{u_0(2-\eta)}{1-u_0t}, \\ 0, \end{cases} \qquad u_\eta=\begin{cases} \dfrac{u_0}{1+u_0t}, & 0\leqslant \eta-ut\leqslant 1, \\ \dfrac{-u_0}{1-u_0t}, & 1<\eta-ut\leqslant 2, \\ \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.8.10}$$

Выражения для u_η записаны во втором столбце (1.8.10), и из них легко видеть, что наклон левой стороны треугольника медленно уменьшается с ростом t, в то же время наклон правой стороны треугольника из отрицательного становится постепенно положительным в точке $t=1/u_0$, где правая сторона треугольника вертикальна. Треугольник как бы сдвигается вершиной вправо, и правый угол становится тупым. Эта ситуация иллюстрируется серией диаграмм на рис. 1.10.

Если в уравнении (1.8.4) множитель $(u+1)$ понимать как скорость волны, то можно на интуитивном уровне понять, почему волна ведет себя именно таким образом. Бо́льшие значения u движутся быстрее, чем меньшие, и поэтому вершина треугольника обгоняет все нижние точки. Волна становится многозначной через некоторое время $t=1/u_0$, поэтому говорят, что она разрушается. Время $t=1/u_0$ называется минимальным временем разрушения. В общем случае начальное условие в виде горба становится многозначным, и гребень волны начинает опрокидываться, что весьма напоминает поведение больших волн на пляже. Это

очень сложный процесс, и его невозможно описать чисто аналитическим способом, как мы это только что сделали для простого примера с треугольником в качестве начального условия. Численные исследования такого процесса разрушения волны были проделаны Лонге-Хиггинсом и Коуклетом [1976].

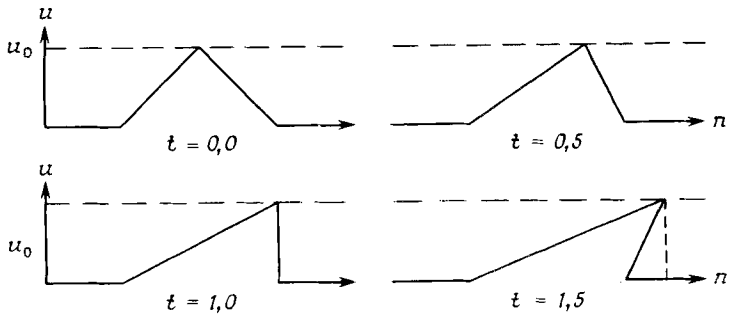


Рис. 1.10. Эволюция начальных данных, имеющих форму треугольного импульса.

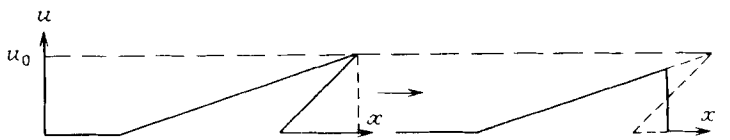


Рис. 1.11. Введение разрыва при $x = x_s$ для $t > 1/u_0$.

Если $u\ (x,\ t)$ обозначает амплитуду волны, то появление многозначного решения после минимального времени разрушения совершенно естественно с физической точки зрения. Уравнения, подобные (1.8.4), встречаются в динамике невязкого газа (см. упр. 5), причем в этой задаче функция u обозначает плотность. Очевидно, что многозначная плотность — бессмысленное понятие, если только не интерпретировать ее как следствие разрывности решения при $t \geqslant u_0^{-1}$. Для того, чтобы разъяснить эту задачу, рассмотрим для простоты уравнение (1.8.4) в других переменных $\eta = x' = x - t$, $t' = t$, и штрихи, начиная с этого момента, будем опускать. Это не что иное, как преобразование Галилея, переводящее уравнение (1.8.4) к виду $u_t + uu_x = 0$. Чтобы интерпретировать многозначность таким путем, заменим многозначную волну разрывной. Это показано графически на рис. 1.11.

Задача состоит в том, чтобы определить, где следует вводить разрыв и как он будет развиваться со временем. Используем тот факт, что площадь, занятая волной, все время постоянна, если u плотность, поскольку общая масса должна сохраняться.

Площадь, занятая начальным условием (1.8.10), равна u_0, и площадь, занятая треугольником с разрывом, равна $x_s h/2$, где h — высота. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{h}{x_s} = \frac{u_0}{1 + u_0 t}, \tag{1.8.11}$$

что дает

$$x_s^2 = 2(1 + u_0 t), \tag{1.8.12}$$

$$h = \sqrt{2u_0 (1 + u_0 t)^{-1/2}}. \tag{1.8.13}$$

Очевидно, что x_s и $h \to 0$ при $t \to \infty$. Характеристическая плоскость (рис. 1.12) показывает, как ведет себя решение до и после

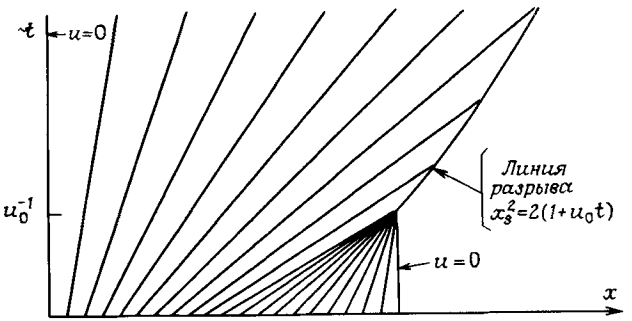


Рис. 1.12. Характеристическая плотность для уравнения $u_t + uu_x = 0$.

минимального времени разрушения при начальных условиях (1.8.8). Когда характеристические линии сходятся, они объединяются в кривую, которая является линией разрыва.

Характеристические линии задаются уравнением

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} \quad \text{при постоянном } u(x, t). \tag{1.8.14}$$

Линия с минимальным градиентом получается при $u = u_0$, что заставляет линии в середине рисунка склоняться внутрь и пересекаться с линиями, связанными с меньшими значениями u, которые получаются при больших x.

Из этих вычислений можно сделать вывод, что если нет дисперсионного члена, то через конечное время могут появиться разрывы или многозначность. Введение дисперсионного члена u_{xxx} предотвращает формирование ударной волны. Этой задачей занимались Забуски и Крускал [1965]. Они включили член $\delta^2 u_{xxx}$ с $\delta = 0{,}022$ и нашли, что хотя сначала волна и становится круче, она никогда не опрокидывается. Хотя величина множителя δ очень мала, третья производная в области, где волна становится круче, так велика, что ударные волны не могут сформироваться.

Таким образом, можно сделать вывод, что дисперсия противодействует присущей нелинейности тенденции к образованию разрывов.

Введение диссипации вместо дисперсии в такие системы сводится обычно к включению члена δu_{xx} вместо u_{xxx}. Получается нелинейное диффузионное уравнение типа

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}, \tag{1.8.15}$$

которое известно под названием уравнения Бюргерса. Величина δ — коэффициент диффузии, и она является вещественной положительной константой. Уравнение Бюргерса знаменито по нескольким причинам. Во-первых, оно включает в себя нелинейность и диссипацию самым простым способом и поэтому может рассматриваться как нелинейная версия уравнения теплопроводности. Во-вторых, что гораздо замечательнее, оно может быть *линеаризовано* при помощи преобразования, известного под названием преобразования Коула — Хопфа, с которым мы встречались в разд. 1.3 и 1.4:

$$u = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \log F. \tag{1.8.16}$$

Константа α пока неизвестна. Мы ее введем ниже. Использование этого преобразования в (1.8.15) приводит к уравнению

$$\frac{F_t}{F} + \frac{1}{2}\alpha \frac{F_x^2}{F^2} - \delta\left(\frac{F_{xx}}{F} - \frac{F_x^2}{F^2}\right) = c(t), \tag{1.8.17}$$

где $c(t)$ — константа интегрирования. Если положить $\alpha = -2\delta$, то член F_x^2/F^2 уничтожится, и мы получим

$$F_t - Fc(t) = \delta F_{xx}. \tag{1.8.18}$$

Функцию $c(t)$ можно включить в функцию F; таким образом, в результате получится уравнение

$$F_t = \delta F_{xx}, \tag{1.8.19}$$

которое называется диффузионным, или уравнением теплопроводности. Задача Коши для этого уравнения была решена в предыдущем разделе.

Преобразование Коула — Хопфа в (1.8.16) — это в точности то преобразование, при помощи которого уравнение КдФ сводилось к однородному уравнению второй степени (см. разд. 1.4.4). Можно считать, что уравнение КдФ и уравнение Бюргерса в некотором отношении родственны. Уравнение КдФ — простейшее *дисперсионное* обобщение нелинейного уравнения $u_t + uu_x = 0$, а уравнение Бюргерса — простейшее *диссипативное* обобщение. Очевидно, что они встречаются в разных физических ситуациях. Уравнение КдФ встречается в дисперсионных системах без рас-

сеяния энергии, а уравнение Бюргерса — в системах, где доминирует вязкость.

Простейшим решением уравнения Бюргерса, демонстрирующим процесс рассеяния, является решение Тейлора в виде ударной волны:

$$u = a\delta \{1 - \text{th } {}^1/_2 (ax - \delta a^2 t)\}. \qquad (1.8.20)$$

При $x \to \infty$, $u \to 0$, а при $x \to -\infty$ $u \to 2a\delta$. График решения (1.8.20) при некотором $t > 0$ дан на рис. 1.13. Это решение



Рис. 1.13. Решение Тейлора в виде ударной волны (1.8.20).

принято называть ударной волной, хотя на самом деле оно непрерывно. Однако по мере того как δ стремится к нулю, фронт ударной волны становится все круче и круче. Как и в случае уравнения КдФ, даже слагаемое с очень малым δ предотвращает разрушение волны, поскольку вторая производная в области фронта очень велика.

1.9. Уравнения, не имеющие решений солитонного типа

Для полноты изложения рассмотрим в этой главе, что происходит с теми дисперсионными нелинейными уравнениями, которые не имеют солитонных решений в строгом смысле, но обладают решениями в виде локализованных уединенных волн. Для уравнений, поддающихся простому численному интегрированию, можно использовать в качестве начального условия пару таких волн и рассмотреть их столкновение в некоторой области на оси x. В гл. 10 будут рассмотрены различные схемы вычислений; здесь же мы только приведем некоторые результаты, нужные в этом разделе.

Первый пример — это так называемое уравнение φ^4 в физике элементарных частиц:

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \lambda\varphi^3 - m^2\varphi, \quad \lambda > 0. \qquad (1.9.1)$$

В отличие от уравнения sin-Гордон, уравнение φ^4 имеет не бесконечный ряд устойчивых вакуумных состояний, а только два:

— $m/\lambda^{1/2}$ и $m/\lambda^{1/2}$. Легко найти простое решение уравнения (1.9.1) в виде бегущей волны:

$$\varphi = \pm \operatorname{th}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma(x - vt) + \delta\right]. \qquad (1.9.2)$$

Форма этой волны (если взять знак «+») очень похожа на кинк уравнения sin-Гордон, изображенный на рис. 1.5, где φ меняется от $-m/\lambda^{1/2}$ при $x = -\infty$ до $m/\lambda^{1/2}$ при $x \to +\infty$. Возьмем

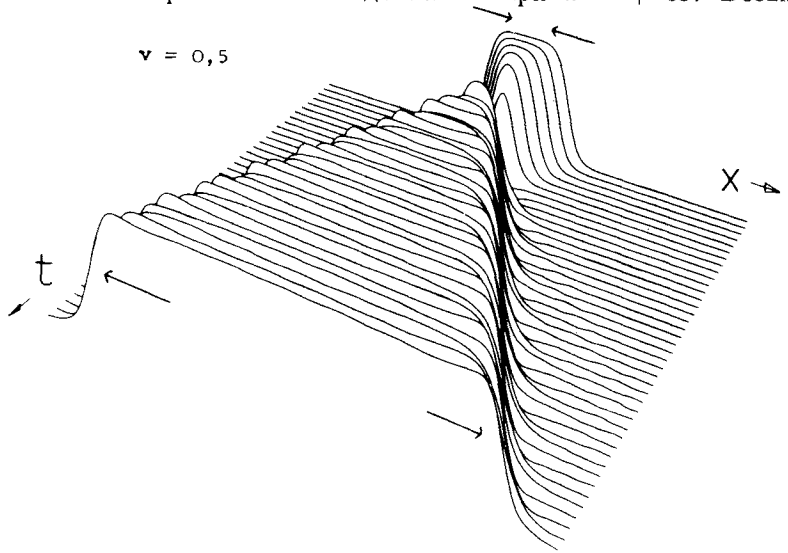


Рис. 1.14. Столкновение с высокой энергией кинка и антикинка уравнения φ^4.

движущееся вправо решение уравнения (1.9.2) (кинк) в форме тангенса гиперболического и движущееся влево решение (антикинк) той же формы в качестве начальных условий, и пусть они столкнутся в середине. Напомним, что в отличие от уравнения sin-Гордон, других состояний, которые могли бы столкнуться, не существует. Результат показан на рис. 1.14 и 1.15. На рис. 1.14 энергия столкновения очень высока. Два кинка выходят из столкновения, до некоторой степени сохранив свое строение, но возникают и осцилляции, которые можно рассматривать как излучение. Энергия столкновения на рис. 1.15 гораздо ниже, и кинки не выходят из столкновения, а образуют излучающее связанное состояние. В гл. 10 уравнение (1.9.1) будет обсуждаться более детально. Заметим, что кинки уравнения φ^4 *не* являются солитонами в смысле нашего строгого определения, в противоположность кинкам уравнения sin-Гордон. Это не удивительно, потому что в разд. 1.5 мы показали, что при ограничениях, налагаемых дан-

ными преобразованиями (см. (1.5.8)), уравнение sin-Гордон было *единственным* нелинейным уравнением Клейна — Гордона, имеющим преобразование Бэклунда, которое порождает целую последовательность точных мультикинковых решений.

Второй пример — система уравнений из нелинейной оптики (см. гл. 9), называемых уравнениями Максвелла — Блоха:

$$\begin{aligned} E_{xx} - E_{tt} &= -\alpha P_t, \\ P_{tt} + \mu^2 P &= (EN)_t, \\ N_t &= -EP. \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

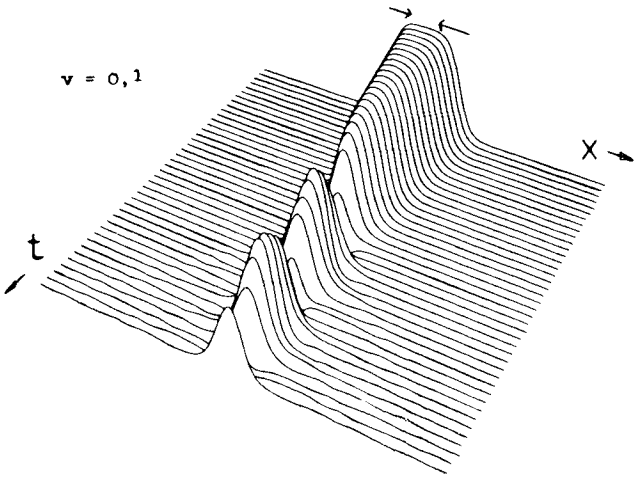


Рис. 1.15. Столкновение с низкой энергией кинка и антикинка уравнения φ^4.

Решение уравнения (1.9.2) в виде уединенной волны при условиях $E,\ P \to 0,\ N \to -1$ при $|x| \to \infty$ имеет форму секанса гиперболического, как и уравнение мКдФ:

$$E = a\,\mathrm{sech}\left[\frac{1}{2}(at - \omega x + \delta)\right], \tag{1.9.4}$$

$$\omega^2 = a^2 + \frac{\alpha a^2}{1/4 a^2 + \mu^2}. \tag{1.9.5}$$

Эта уединенная волна может двигаться вправо или влево в зависимости от того, какой знак выбран для ω в уравнении (1.9.5). На рис. 1.16 показаны результаты численного интегрирования уравнения (1.9.3) с начальными условиями в виде двух сталкивающихся волн. Как и в приведенном выше примере для уравнения φ^4, тут излучается рябь, что указывает на потерю энергии волны в процессе столкновения. Цель данной главы — доказать читателю, что нельзя думать, будто все решения типа уединенной

волны для любого уравнения ведут себя как солитоны. Этим весьма специальным свойством обладают лишь немногие уравнения; большинство уравнений этого свойства не имеют. Задача следующих глав — указать некоторые классы уравнений, имеющих

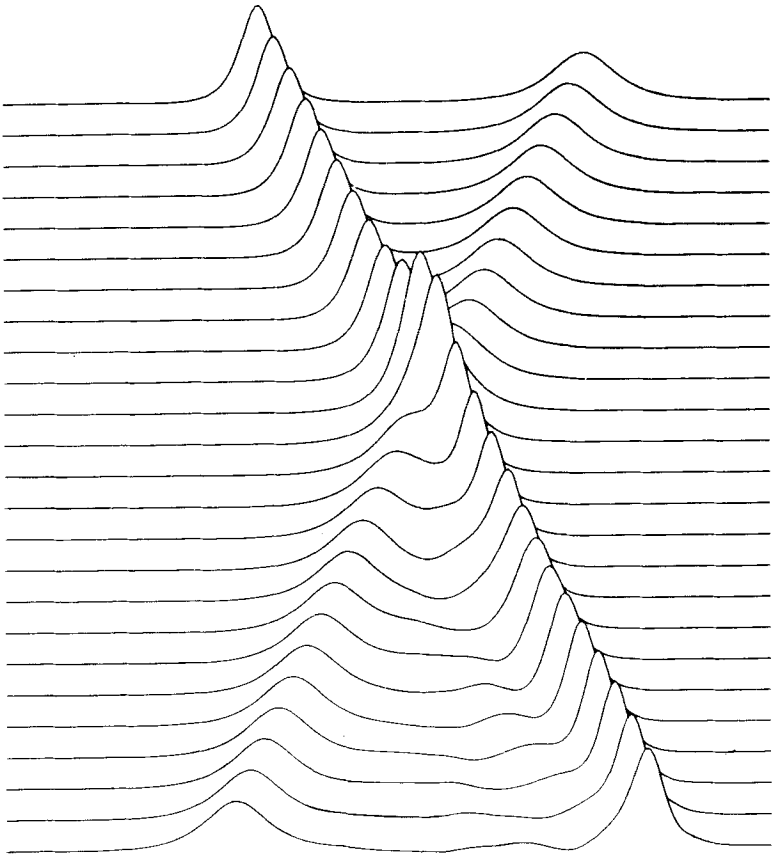


Рис. 1.16. Столкновение двух уединенных волн системы (1.9.3).

это свойство. И только в гл. 10 будут обсуждены некоторые методы численного исследования уравнений, не проявляющих солитонных свойств в смысле строгого определения.

1.10. Связь с квантовой механикой

Итак, мы обсудили методы изучения взаимодействий решений типа уединенной волны для дисперсионных нелинейных уравнений.

Самый прямой метод — численное интегрирование. Если волны проницаемы друг для друга, то это довольно убедительно указывает на солитонное поведение некоторых решений уравнения, но это еще не доказательство! Для некоторых нелинейных задач найти устойчивую и точную схему численного интегрирования нелегко. Если излучается рябь, превосходящая по размерам погрешности вычислений по численной схеме, то никакого «частицеподобного» поведения нет. Однако может случиться, что неупругость очень мала и амплитуда ряби окажется столь малой, что она останется незамеченной.

Второй метод — сведение к одному однородному уравнению или системе из двух однородных уравнений при помощи преобразования Коула — Хопфа. Если ряды для решений обрываются, то могут быть найдены точные N-параметрические решения, представляющие собой аналитические решения мультисолитонного типа. Отсутствие обрыва указывает на отсутствие солитонного поведения (но опять же не доказывает это!); таким же указанием служит невозможность сведения к однородным уравнениям второго порядка при помощи преобразования Коула — Хопфа. В частности, для нелинейных уравнений Клейна — Гордона отсутствие преобразования Бэклунда указывает на отсутствие солитонного поведения, поскольку эти преобразования конструируют мультисолитонные решения из других решений, состоящих из меньшего числа солитонов.

Заметим, во-первых, что этот список есть просто множество соображений и идей, появлявшихся в этой главе. Это только указания, но ни в коем случае не доказательство, что в основе тех уравнений, которые очевидным образом имеют точные солитонные решения (КдФ, sin-Гордон, мКдФ, НЛШ; существует много других, но эти самые важные), должна лежать некоторая хитроумная структура. Кроме того, поскольку оказывается, что такие различные уравнения, возникающие в разных физических ситуациях, не имеющих, казалось бы, ничего общего между собой, обладают сходными свойствами, то это снова указывает на существование некоторой общей структуры, *присущей всем этим уравнениям*.

Во-вторых, главное свойство, которым они все обладают — «*частицеподобная*» природа их решений, которые либо отталкиваются друг от друга, либо проходят друг через друга упруго, — указывает, что они рассеиваются друг на друге, как в одномерном рассеивании. Это наводит на мысль о возможности применения какой-то теории рассеяния. Во-первых, мы до сих пор не имеем серьезной математической связи между каким-либо из этих уравнений и какой-нибудь теорией рассеяния и, во-вторых, не знаем, какая это должна быть теория рассеяния — *классическая* или *квантовая*.

Для того, чтобы установить какую-то связь, вернемся к результату о преобразованиях Бэклунда (1.5.16), который был впервые получен Бэклундом в 1875 г. (Бэклунд [1875], Лэм [1976]) в дифференциальной геометрии:

$$\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})_\xi = \alpha \sin \frac{1}{2}(\varphi - \bar{\varphi}), \tag{1.10.1}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi - \bar{\varphi})_\tau = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}), \tag{1.10.2}$$

где φ и $\bar{\varphi}$ — решения уравнения sin-Гордон. Сделаем преобразование

$$v = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\varphi - \bar{\varphi}) \tag{1.10.3}$$

и исключим $\bar{\varphi}$ из (1.10.1). Получим

$$v_\xi = -\alpha v + \frac{1}{2}\varphi_\xi (1 + v^2). \tag{1.10.4}$$

Аналогично из (1.10.2) получим

$$v_\tau = \frac{1}{2\alpha}(1 - v^2) \sin \varphi - \frac{1}{\alpha} v \cos \varphi. \tag{1.10.5}$$

Вывод уравнения (1.10.5) требует применения тригонометрических формул

$$\sin (\operatorname{arctg} v) = \frac{v}{(1 + v^2)^{1/2}}, \tag{1.10.6}$$

$$\cos (\operatorname{arctg} v) = \frac{1}{(1 + v^2)^{1/2}}. \tag{1.10.7}$$

Каждое из уравнений (1.10.4) и (1.10.5) по отдельности называется уравнением Риккати, потому что в него входит только одна производная и *квадратичная* нелинейность. Уравнение Риккати всегда разрешимо: для этого введем две функции ψ_1 и ψ_2, такие что $v = \psi_1/\psi_2$. Тогда уравнение (1.10.4) примет вид

$$\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = -\alpha \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{2}\varphi_\xi (\psi_1^2 + \psi_2^2). \tag{1.10.8}$$

Уравнение (1.10.8) можно расщепить на два линейных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\alpha \psi_1 &= \frac{1}{2}\varphi_\xi \psi_2, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha \psi_2 &= -\frac{1}{2}\varphi_\xi \psi_1. \end{aligned} \tag{1.10.9}$$

Уравнения (1.10.9) примут более знакомый вид, если их продифференцировать один раз по ξ, чтобы получить пару уравнений

второго порядка, и затем положить $\alpha = 2i\lambda$. Первые производные можно исключить, и тогда получится

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \lambda^2\right]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\varphi_\xi^2 & \frac{1}{2}\varphi_{\xi\xi} \\ -\frac{1}{2}\varphi_{\xi\xi} & -\frac{1}{4}\varphi_{\xi^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}. \quad (1.10.10)$$

Уравнение (1.10.10) представляет собой *двухканальное квантовое уравнение Шрёдингера, где* λ *— собственное значение.* Оно может быть записано в более удобной форме

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi + V\psi = -\lambda^2\psi, \quad (1.10.11)$$

где V — матрица рассеивающего потенциала, λ — собственное значение и ψ — вектор-столбец волновых функций. Важно заметить, что матрица рассеивающего потенциала V в (1.10.11) зависит только от производных φ по ξ и *что* τ *входит в уравнение только в качестве параметра.* Решение задач рассеяния такого типа дается в гл. 3, 4 и 6. Эта задача была первоначально решена 30 лет назад Гельфандом, Левитаном, Марченко и другими (см. ссылки у Шадана и Сабатье [1977] и Аграновича и Марченко [1963]). Главный вывод относительно уравнения (1.10.11) — то, что спектр оператора постоянен во времени. Это значит, что спектр начальных условий остается спектром для всех моментов времени $t > 0$. Задача, которую решили Гельфанд и другие (известная как обратная задача рассеяния), состоит в том, чтобы построить потенциал $V(x)$ по известному спектру и известному асимптотическому поведению функции ψ. В нашей задаче построение потенциала равносильно нахождению решения уравнения sin-Гордон для всех $\tau > 0$.

Эта связь между некоторыми преобразованиями (впервые полученными в прошлом столетии в связи с дифференциальной геометрией) и квантовым уравнением Шрёдингера весьма примечательна, в особенности потому, что она дает метод решения задачи Коши.

Надо заметить, что уравнение Шрёдингера, которое мы здесь вывели, не совпадает с нелинейным уравнением Шрёдингера разд. 1.6, которое является совершенно самостоятельным уравнением в частных производных. Эти уравнения не следует путать.

Теперь, когда мы установили связь между одним солитонным уравнением и одной задачей квантовой физики, надо разобраться в ней более детально. Исторически данный выше вывод не совпадает с тем, которым эта связь была установлена первоначально. Впервые это сделали Гарднер и др. [1967], которые увидели, как связать уравнение КдФ с задачей рассеяния для скалярного уравнения Шрёдингера. Это другая тема, и мы вернемся к ней

в гл. 3. Следующая глава — небольшое, но необходимое отступление, в котором даются основы квантовой теории рассеяния, имеющие большое значение в дальнейшем. Те, кто знаком с квантовой механикой или с обратной задачей, могут перейти сразу к гл. 3.

1.11. Примечания

Раздел 1.1

Привычка жадно выискивать в архивной пыли детали биографии Скотта Расселла стала чем-то вроде культа среди людей, занимающихся нелинейными задачами, и авторам настоящей книги тоже не удалось избежать этой навязчивой идеи. Очень немногие отрасли науки имеют столь четко отмеченное начало, связанное с одним определенным человеком. К тому же многие исследователи, возможно, имеют осознанную или неосознанную тягу к тому периоду викторианской науки, в которой ученый «джентельмен», часто дилетант с состоянием, играл значительную роль.

Хотя биография, написанная Эммерсоном, очень доступна и занимательна, но (что неудивительно) в ней сравнительно мало места посвящено рассмотрению уединенных волн переноса, так как этот предмет занимал лишь небольшой период в ранней научной деятельности Скотта Расселла. Лоннгрен и Скотт [1978] и Буллаф и Кодри [1980] дают в своих книгах краткое описание жизни Скотта Расселла, причем последняя книга включает неполный список опубликованных статей Скотта Расселла, составленный одним из автором настоящей книги (Дж. С. Эйлбеком) по источникам из Библиотеки Королевского Общества Эдинбурга. Некоторые публикации, например «Доклад о волнах» (Скотт Расселл [1844]), представляют собой пример такой ясности изложения, до которой далеко многим сегодняшним ученым.

Раздел 1.2

Устойчивость уединенных волн уравнения КдФ доказал Бенджамин [1972]. Смотри также гл. 10 по поводу альтернативных уравнений длинных волн.

Раздел 1.3

Вычисление, демонстрирующее сведение уравнения Буссинеска (1.3.8) к уравнению КдФ, использующее координаты ξ и τ, поясняется и повторяется в примечаниях к гл. 5. Переменные ξ и τ известны под названием «растянутые» координаты, поскольку они изменяются на величину $O(1)$, когда x и t изменяются на величины $O(\varepsilon^{-p})$ и $O(\varepsilon^{-q})$ соответственно. Уравнение КдФ (1.3.10) описывает эволюцию слабо нелинейной длинной волны, движущейся вправо вдоль цепочки с квадратичной нелинейностью.

Аналогично, модифицированное уравнение КдФ делает то же самое для цепочки с кубической нелинейностью.

Выбор вида функции $f(Q) = \exp(-Q)$ соответствует очень важной физической системе, известной как цепочка Тоды (Тода [1970]). Этот выбор вида функции $f(Q)$ весьма специален, так как при нем эта система оказывается вполне интегрируемым дифференциально-разностным уравнением (Манаков [1975], Флашка [1974а, б], Хенон [1974]).

Раздел 1.4

Численный результат Забуски и Крускала о том, что начальное состояние почти повторяется, является общим результатом, который был доказан аналитически для уравнения КдФ в случае периодических граничных условий. Эта задача очень трудна и требует для своего решения изощренных математических методов. Время повторения зависит от того, как много периодичностей в начальных условиях и соизмеримы ли их частоты. Смотри Лакс [1975], Новиков [1974] и Дубровин и Новиков [1975].

Раздел 1.5

Уравнение sin-Гордон возникло еще до работы Скирма в исследованиях движений стенок Блоха в ферромагнитных кристаллах (Зеегер и др. [1953]). Позже оно изучалось в связи с контактами Джозефсона в теории сверхпроводимости. Мы вернемся к этой теме и другим приложениям уравнения sin-Гордон в последующих главах.

Открытие Хиротой [1971] N-солитонных решений уравнения КдФ последовало из разработки им метода сведения обсуждаемого эволюционного уравнения к однородному уравнению второй степени. После этого очевидным кандидатом для подобных атак стало уравнение sin-Гордон. Работа Лэма [1971] об уравнении sin-Гордон в нелинейной оптике выдвинула на первый план преобразование Бэклунда, поскольку этим методом можно построить иерархию солитонных решений. Прямая формула для полного N-солитонного решения была найдена Хиротой [1972] в одной форме и была угадана Гиббоном и Эйлбеком [1972] в другой форме (позже она была доказана Кодри и др. [1973]). Хирота взял

$$\varphi = 4\operatorname{arctg}(G/F) \tag{1.11.1}$$

и показал, что уравнение sin-Гордон может быть затем переписано в виде

$$\begin{aligned} GG_{\xi\tau} - G_\xi G_\tau &= FF_{\xi\tau} - F_\xi F_\tau, \\ GF_{\xi\tau} + FG_{\xi\tau} - G_\xi F_\tau - G_\tau F_\xi &= 0. \end{aligned} \tag{1.11.2}$$

Можно видеть, что выражения для G и F, взятые из (1.5.20), удовлетворяют (1.11.2). Хирота нашел подходящие выражения для

функций G и F, описывающие столкновения N кинков или солитонов.

Следующие два автора действовали несколько иным путем. Они заметили, что для одного параметра (b_1) решение уравнения sin-Гордон

$$\varphi_\xi = 2b_1 \operatorname{sech}\left(b_1\xi + \frac{1}{b_1}\tau + \delta_1\right),$$
$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{sech}\left(b_1\xi + \frac{1}{b_1}\tau + \delta_1\right) \tag{1.11.3}$$

может быть выражено формулой

$$\varphi_\xi^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\log(1 + \exp\theta_1). \tag{1.11.4}$$

Если взять $\varphi_\xi = 2g/f$, где $g^2 = ff_{\xi\xi} - f_\xi^2$, то получим

$$\varphi_\xi^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\log f,$$
$$\cos\varphi = 1 - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}\log f \tag{1.11.5}$$

для граничных условий $\varphi \to 0 \pmod{2\pi}$, $|\xi| \to \infty$. Дифференцируя $\varphi_\xi = 2g/f$ по τ и используя (1.11.5), получим

$$g_\tau^2 = f_\tau f_{\xi\xi\tau} - f_{\xi\tau^2} + ff_{\xi\tau} - f_\xi f_\tau. \tag{1.11.6}$$

Для f может быть найдено решение

$$M_{ij} = \frac{2}{b_i + b_j}\cosh\frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j),$$
$$\theta_i = b_i\xi + \frac{1}{b_i}\tau + \delta_i. \tag{1.11.7}$$

Все эти формы решений эквивалентны и могут быть переведены одна в другую теми или иными преобразованиями. Они могут быть вычислены последовательно шаг за шагом разложением g и f (или G и F) в ряды по ε вида

$$g = \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^3 g^{(3)} + \cdots,$$
$$f = 1 + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^4 f^{(4)} \ldots \tag{1.11.8}$$

аналогично тому, как это делалось в (1.4.6) для уравнения КдФ Так же, как для уравнения КдФ, ряды будут обрываться, что приведет к получению точных решений, показанных здесь.

Общий метод сведения рассматриваемого дифференциального уравнения в частных производных к одному или двум однородным уравнениям второй степени с последующим нахождением удовлетворяющих их формул стал известен как метод Хироты. Хирота применял его ко многим уравнениям, включая уравнения мКдФ, цепочку Тоды, уравнения теории электрических цепей, с немень-

шим успехом, чем к уравнениям КдФ и sin-Гордон. Вообще это исключительно мощный инструмент: слово метод в данном случае не совсем подходит, потому что при использовании он очень сильно опирается на опытность и интуицию исследователя. Хирота [1980] сделал обзор своих результатов и идей, включая список уравнений, решаемых этим методом. В упражнении (1) предлагается вычислить мультисолитонное решение цепочки Тоды методом Хироты.

Раздел 1.6

Уравнение НЛШ занимает особое место в истории теории солитонов, поскольку именно в связи с этим уравнением Захаров и Шабат ввели очень важную формулировку обратной задачи рассеяния 2×2. Эта формулировка может быть обобщена для решения других уравнений — детали см. в гл. 6.

Раздел 1.8

Значительно более исчерпывающий анализ распространения линейных и нелинейных волн содержится в книге Уизема [1974]. Анализ распространения нелинейных дисперсионных волн приведен в монографии Карпмана [1975].

Раздел 1.9

Как замечено выше, обсуждение других уравнений длинных волн можно найти в гл. 10.

Раздел 1.10

Как и в случае численного интегрирования, следует соблюдать осторожность при обращении к прямому методу Хироты. Недостаточно свести уравнение в частных производных к одному или двум однородным уравнениям второй степени. Ряды должны обрываться для того, чтобы из них можно было получить точное решение. Существует случай, когда этого не происходит. Рассмотрим уравнение (1.9.1) с противоположным знаком:

$$\varphi_{\xi\tau} = \varphi - \beta\varphi^3. \tag{1.11.9}$$

Обозначив $\varphi = g/f$ и положив

$$\beta g^2 = 2\,(ff_{\xi\tau} - f_\xi f_\tau), \tag{1.11.10}$$

мы легко найдем второе однородное уравнение:

$$fg_{\xi\tau} + gf_{\xi\tau} - g_\xi f_\tau - g_\tau f_\xi = 0. \tag{1.11.11}$$

Легко видеть, что ряды для g и f обрываются только для однопараметрического решения, а для решений более высоких порядков они не обрываются. Это мы оставляем читателю в качестве

упражнения. С физической точки зрения это не удивительно, так как решение в виде уединенной волны уравнения (1.11.9)

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\,\operatorname{sech}\left(a\xi + \frac{1}{a}\tau + \delta\right) \qquad (1.11.12)$$

неустойчиво. Существуют и другие уравнения, которые могут быть сведены к однородной форме, но ряды для которых не обрываются. Большое значение метода Хироты состоит в том, что если сведение к однородной форме уже проделано, то вычисления, показывающие, будут ли обрываться ряды для двухпараметрических решений, представляют собой простые алгебраические выкладки.

1.12. Задачи

1. Решеткой или цепочкой Тоды называется модель для частиц на прямой, каждая из которых имеет единичную массу и может взаимодействовать лишь с ближайшими соседями. Уравнение движения будет иметь вид

$$\ddot{Q}_n = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}),$$

где $Q_n(t)$ — отклонение от положения равновесия для n-й частицы. Определив переменную S_n, такую что

$$Q_n = S_{n-1} - S_n,$$

где S_n и все ее производные по времени стремятся к нулю, когда $t \to \infty$, покажите, что

$$1 + \ddot{S}_n = \exp(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n).$$

Найдите преобразование $S_n(t) = F(f_n(t))$, приводящее уравнение к виду

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = f_n\ddot{f}_n - \dot{f}_n^2,$$

и покажите, что тогда одно- или двухпараметрические решения уравнения имеют вид

$$f_n^{(1)} = 1 + \exp\theta_1,$$

$$f_n^{(2)} = 1 + \exp\theta_1 + \exp\theta_2 + A_{12}\exp(\theta_1 + \theta_2),$$

$$\theta_i = a_i n - \omega_i t + \delta_i,$$

$$D(a_i;\ \omega_i) \equiv \omega_i^2 - 2(\cosh a_i - 1) = 0,$$

$$A_{ij} = -\frac{D(a_i - a_j;\ \omega_i - \omega_j)}{D(a_i + a_j;\ \omega_i + \omega_j)}.$$

Докажите по индукции, что N-параметрическое решение имеет вид

$$f_n^{(N)}(t) = \log\det \mathbf{M},$$

где $\mathbf{M}$ — матрица $N \times N$ с элементами

$$M_{ij} = \delta_{ij} + (1 - A_{ij})^{1/2} \exp^{1/2} (0_i + \theta_j).$$

2. Уравнение

$$\varphi_{\xi\tau} = \varphi - \varphi^3$$

есть одна из форм усеченного уравнения sin-Гордон в характеристических координатах. Взяв $\varphi = g/f$, покажите, что оно сводится к двум однородным уравнениям второй степени от функций g и f:

$$g^2 = 2 (f f_{\xi\tau} - f_\xi f_\tau),$$

$$f g_{\xi\tau} + g f_{\xi\tau} - g_\xi f_\tau - g_\tau f_\xi = g f.$$

Разлагая g и f в ряды по малому параметру ε,

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} g^{(2n+1)},$$

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} f^{(2n)},$$

покажите, что может быть найдено точное однопараметрическое решение

$$g = 2\sqrt{2 \exp \theta_1},$$

$$f = 1 + \exp 2\theta_1,$$

$$\theta = a_i \xi + \tau / a_i + \delta_i,$$

но двухпараметрическое решение оказывается неспособным породить обрывающиеся ряды в разложении для g и f.

3. Пусть дано уравнение Бюргерса в форме

$$u_t + u u_x = \delta u_{xx}$$

с какими-то гладкими начальными условиями $u(x, 0) = f(x)$. Сведите это уравнение к уравнению теплопроводности. Решая задачу Коши для этого последнего, покажите, что в пределе $\delta \to 0$ решения уравнения Бюргерса могут быть представлены в форме

$$u = f(x - ut).$$

Вам понадобятся два результата:

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi},$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \exp[-G(\eta)/2\delta] \simeq$$

$$\simeq g(\eta_0) \left[\frac{4\pi\delta}{|G_{\eta\eta}(\eta_0)|}\right]^{1/2} \exp[-G(\eta_0)/2\delta]$$

для малого δ. Здесь η_0 — критическая точка функции G.

4. Положив $u = g/f$, показать, что модифицированное уравнение КдФ

$$u_{xxx} + 6u^2u_x + u_t = 0$$

может быть сведено к однородной форме

$$g^2 = ff_{xx} - f_x^2,$$

$$fg_{xxx} - 3f_xg_{xx} + 3f_{xx}g_x - f_{xxx}g + g_tf - gf_t = 0.$$

Используя метод разложения для g и f, показать, что двухпараметрическое решение дается формулами:

$$g = 2a_1 \exp\theta_1 + 2a_2 \exp\theta_2 + 2a_2A \exp(2\theta_1 + \theta_2) + \\ + 2a_1A \exp(\theta_1 + 2\theta_2),$$

$$f = 1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2 + 2(1 - A)\exp(\theta_1 + \theta_2) + \\ + A \exp(2\theta_1 + 2\theta_2),$$

$$\theta_i = a_ix - a_i^3(t) + \delta_i,$$

$$A = \left[\frac{a_i - a_j}{a_i + a_j}\right]^2.$$

Если $a_1 > a_2 > 0$ и больший солитон сначала находится слева показать, что при столкновении больший солитон сдвигается вперед и после разделения имеет фазовый сдвиг $\ln A$, в то время как меньший солитон сдвигается назад с фазовым сдвигом $\ln A^{-1}$.

5. В динамике идеального газа уравнения сохранения массы и импульса имеют вид

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + F)_x = 0,$$

где ρ — плотность и u — скорость. Если F связана с плотностью газа формулой

$$F = A(\rho/\rho_0)^\gamma$$

($1 < \gamma < 2$ для молекул политропного газа), где ρ_0 — невозмущенная плотность и A — константа, показать, что u может быть выражена как функция только от ρ (простые волны) и что эти решения в виде простых волн удовлетворяют уравнению

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0,$$

$$c(\rho) = 2(\gamma A\rho_0)^{1/2}[{}^1\!/_2(\gamma + 1)(\rho/\rho_0)^{(\gamma-1)/2} - 1]/(\gamma - 1).$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАССЕЯНИЯ

2.1. Обратная задача и анализ Фурье

Создание мощной вычислительной техники и измерительных приборов высокой точности изменило тип задач, которые ставят современная наука и техника. Например, современного инженера может не особенно интересовать температура как функция времени в некоторой точке тела, поскольку эту величину можно измерить с высокой точностью. Однако если имеется смесь материалов и теплопроводность смеси неизвестна, то у инженера нет способов измерить эту теплопроводность. Соответствующая задача состоит в следующем: можно ли по результатам измерений температурного профиля в теле определить теплопроводность (которая часто зависит от температуры) экстраполяцией назад? Задачи такого типа, приводящие к обратной экстраполяции, известны под названием *обратных задач*.

Типичным примером такой обратной задачи является анализ сейсмических данных. Он позволяет не только следить за активностью землетрясений в земной коре, но и является мощным инструментом в геофизических исследованиях детальной структуры земной мантии и ядра. Из анализа сейсмических волн, отраженных и преломленных слоями пород, через которые они проходят, может быть получена информация о плотности и других свойствах этих пород. Это пример *обратной задачи рассеяния*: зная приходящие и уходящие волны из известного источника, определить природу неизвестного рассеивателя волн.

Обратные задачи рассеяния обычно встречаются в ситуациях, когда невозможны непосредственные измерения. Типичный пример — исследование состояния стенок артерий с помощью ультразвука. Ослабленный участок стенки артерии, скажем аневризму, можно определить с помощью спектрального анализа ультразвуковых колебаний.

В медицине, химии, физике и технике часто требуется получить детальную информацию о строении макромолекул, скажем для молекул ДНК или для нового вида искусственного волокна. Наиболее распространен метод рентгеноструктурного анализа. По фотографии в рентгеновских лучах можно определить природу молекул, рассеивающих эти лучи. Теоретически эта обратная задача сводится к определению преобразования Фурье для полу-

ченного распределения плотности изображения в рентгеновских лучах.

Материалы, непроницаемые для рентгеновских лучей, можно исследовать с помощью пучков нейтронов или мезонов. Для того, чтобы обнаружить повреждения в таких недоступных областях, как внутренность ядерного реактора, инженеры могут использовать нейтронные пучки точно так же, как геологи используют рентгеновские лучи. Сканирующая техника, развитая для рентгеновских лучей, может быть просто приспособлена для определения поперечных сечений активной зоны реактора, и таким образом можно находить потенциально опасные трещины. Эта проблема тоже требует разрешения обратной задачи, и в этом случае задача сводится к обращению другого линейного преобразования, известного как преобразование Радона.

Внутренность атома, нуклона и других субъядерных частиц еще недоступнее, чем тепловыделяющий элемент атомного реактора. На исследуемые частицы-мишени направляются высокоэнергетические пучки других частиц, скажем электронов или протонов, и путем «эксперимента на разрушение» пытаются определить структуру мишеней. Такая процедура похожа на попытку определить форму предмета, направляя на него струю воды и фиксируя затем количество воды, разлетающейся от него под разными углами. В случае рассеяния в ядерной физике определяют число частиц из пучка, разлетающихся под разными углами относительно мишени, и их тип. По количеству этих частиц можно попытаться определить природу мишени. Это является сущностью обратной задачи рассеяния.

В этой книге будет показано, как при помощи некоторой математической обратной задачи можно точно решить многие уравнения, упомянутые в гл. 1. В настоящей главе мы начнем собирать воедино некоторые идеи, приведшие к созданию так называемой теории *обратного преобразования рассеяния* (ОПР). Их корни лежат в квантовой механике, откуда взялась большая часть описательного языка, связанного с этим методом, но затем эти названия проникли в различные разделы математики, такие, например, как спектральная теория. Строгое изложение метода начнется в гл. 3 и 4 и будет продолжено в более общем виде в гл. 6. Целью этой главы является подготовка к этой более абстрактной теории. Для этого мы введем обозначения и различные функции, возникающие в конкретных примерах.

Математическую формулировку начнем с обозначений, которыми будем пользоваться в этой и следующих главах. В дальнейшем мы часто будем иметь дело с функцией двух переменных f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Часто только одна из двух переменных будет играть существенную роль, а другая будет оставаться фиксированной. Для того, чтобы подчеркнуть главную переменную, другую будем

добавлять в качестве индекса к символу функции — либо перед символом внизу, либо после символа наверху. Точнее, определим функцию ${}_kf$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$ {}_kf(x) = f(x, k), \tag{2.1.1}$$

и функцию $f^x(k)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$ f^x(k) = f(x, k). \tag{2.1.2}$$

За исключением числовых индексов, мы оставляем место после символа функции внизу для обозначения частных производных. Например, мы будем обозначать $\partial^2 f/\partial x^2$ и $\partial^2 f/\partial k^2$ соответственно f_{xx} и f_{kk}. Иногда мы можем переходить от одного обозначения к другому, если это будет удобно для лучшего выражения какого-либо утверждения. В тех случаях, когда надо будет рассмотреть функцию от трех переменных Y: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$, тоже часто удобно определить функцию ${}_kY$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ таким образом: ${}_kY(t, x) = Y(t, x, k)$.

В гл. 1 мы решали линейную задачу теплопроводности при помощи преобразования Фурье. Методы, которые будут развиты в этой книге, можно рассматривать как обобщение метода преобразования Фурье на некоторые классы специальных нелинейных уравнений. Поэтому сейчас стоит рассмотреть способ применения преобразования Фурье для решения линейной задачи Коши

$$ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) q(t, x) = 0, \quad q(0, x) = q^0(x), \tag{2.1.3}$$

имеющей точное решение

$$ q^t(x) = q(t, x) = q^0(x - c_0 t). \tag{2.1.4}$$

Если q — комплекснозначная абсолютно интегрируемая функция при всех $t \geqslant 0$, т. е.

$$ \int_{-\infty}^{\infty} |q(t, x)|\, dx < \infty, \tag{2.1.5}$$

то преобразование Фурье от функции q^t определяется формулой

$$ (\mathcal{F}q^t)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} q(t, x) \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} = B^t(k). \tag{2.1.6}$$

Обозначим через $A(\mathbb{R})$ пространство непрерывно дифференцируемых и абсолютно интегрируемых функций на вещественной оси. Тогда

$$ \mathcal{F}\colon A(\mathbb{R}) \to A(\mathbb{R}). \tag{2.1.7}$$

Преобразование $\mathscr{F}$ обратимо на $A(\mathbb{R})$, и обратное к нему определяется так:

$$(\mathscr{F}^{-1}B^t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} B(t, k) \frac{dk}{(2\pi)^{1/2}} = q^t(x), \tag{2.1.8}$$

$$\mathscr{F}^{-1}: A(\mathbb{R}) \to A(\mathbb{R}). \tag{2.1.9}$$

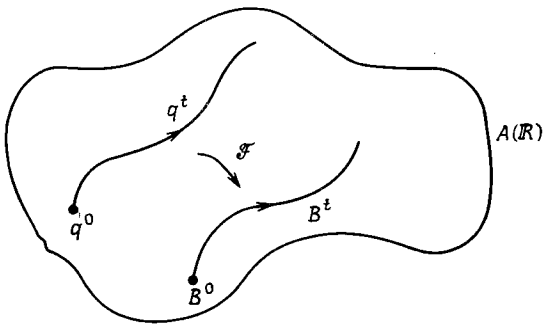


Рис. 2.1.

Уравнение (2.1.3) определяет эволюцию во времени функции $q^t \in A(\mathbb{R})$, которая при $t = 0$ совпадает с функцией q^0. Когда t меняется, точка q^t описывает кривую в функциональном пространстве $A(\mathbb{R})$.

Рис. 2.1. показывает, как этот график преобразуется под действием отображения $\mathscr{F}$. Преобразованный график тоже представляет собой кривую в пространстве $A(\mathbb{R})$, исходящую из начальной точки B^0. Преимущество, которое дает применение преобразования Фурье $\mathscr{F}$, состоит в том, что уравнение, описывающее кривую в преобразованном пространстве, много проще исходного и может быть точно решено. Из (2.1.3) найдем, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + ikc_0\right] B(t, k) = 0, \quad B(0, k) = B^0(k). \tag{2.1.10}$$

Это уравнение может быть проинтегрировано, что дает

$$B^t(k) = B(t, x) = B^0(k) e^{-ikc_0 t}. \tag{2.1.11}$$

Если теперь применить обратное преобразование $\mathscr{F}^{-1}$, то получится

$$q^t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-c_0t)} B^0(k) \frac{dk}{(2\pi)^{1/2}} = q^0(x - c_0 t). \tag{2.1.12}$$

Весь процесс проиллюстрирован на рис. 2.2, на котором схематически изображен развиваемый нами метод. На этом рисунке U^t

и V^t — эволюционные операторы для уравнений (2.1.3) и (2.1.10), определяемые следующим образом:

$$U^t\colon\ q^0 \to q^t, \quad V^t\colon\ B^0 \to B^t. \tag{2.1.13}$$

Для уравнения (2.1.3) существует и другой способ построения преобразования, подобного $\mathcal{F}$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + q(t,\ x)\right] Y(t,\ x,\ k) = -k^2 Y(t,\ x,\ k). \tag{2.1.14}$$

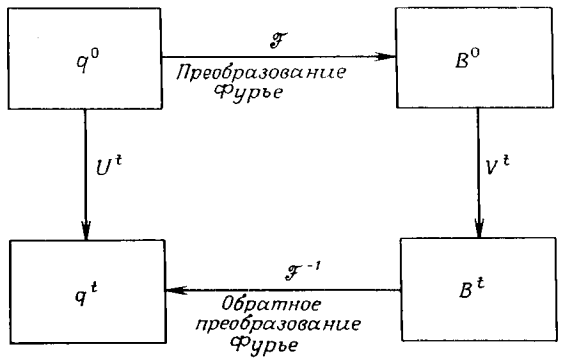


Рис. 2.2.

Переменная t играет в этом уравнении роль параметра. При изменении t будут меняться как допустимые значения k^2 (спектр оператора), так и собственные функции ${}_kY$. Если эволюция q^t определена конкретным уравнением, скажем (2.1.3), то зависимость ${}_kY$ от t тоже будет строго определена. Предположим, что эволюция ${}_kY$ подчинена уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x}\right] Y(t,\ x,\ k) = \alpha(k)\, Y(t,\ x,\ k). \tag{2.1.15}$$

Уравнения (2.1.14) и (2.1.15) совместны в том смысле, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} Y(t,\ x,\ k) = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x} Y(t,\ x,\ k), \tag{2.1.16}$$

если

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x}\right] q(t,\ x) = 0, \tag{2.1.17}$$

и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}(k^2) = 0. \tag{2.1.18}$$

Следовательно, эволюционное уравнение (2.1.3) заменяется уравнениями (2.1.15) и (2.1.18). На этом шаге может показаться,

что мы только усложнили положение, поскольку (2.1.15) сложнее, чем (2.1.3), которое соответствует $\alpha = 0$. Однако мы можем двигаться дальше, рассматривая функцию ${}_kY$, в то время как для функции q^t это было невозможно. Предположим, что функция q^t удовлетворяет граничным условиям

$$q^t(x) \to 0 \quad \text{для} \quad |x| \to \infty. \tag{2.1.19}$$

Тогда асимптотически уравнение (2.1.14) приобретает вид

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right] Y(t, x, k) = 0. \tag{2.1.20}$$

Уравнение (2.1.20) имеет общее решение

$$Y(t, x, k) = (Ae^{-ikx} + Be^{+ikx}), \tag{2.1.21}$$

где A и B могут быть функциями от t и k. Можно показать, что если асимптотика решения при $x \to -\infty$ выбрана, то тем самым фиксируется единственная асимптотика решения при $x \to +\infty$. Выберем решение уравнения (2.1.14), имеющее асимптотическую форму

$$\varphi(t, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ b^t(k)\, e^{ikx} + a^t(k)\, e^{-ikx}, & x \to +\infty. \end{cases} \tag{2.1.22}$$

Тогда если перейти к пределу $x \to -\infty$ и использовать асимптотическую форму (2.1.22) в (2.1.15), получим

$$\alpha(k) = -ikc_0. \tag{2.1.23}$$

Если мы возьмем другой предел $x \to \infty$ вместе с уравнением (2.1.23), то получим, что эволюция асимптотических коэффициентов b^t и a^t такова:

$$\frac{\partial}{\partial t} b(t, k) = -2ikc_0 b(t, k), \tag{2.1.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a(t, k) = 0. \tag{2.1.25}$$

Очевидно, что уравнение (2.1.24) аналогично уравнению (2.1.10). Решая уравнение (2.1.24), найдем, что

$$\varphi(t, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ b^0 e^{ik(x-2c_0t)} + a^0 e^{-ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{2.1.26}$$

где асимптотическое решение уравнения (2.1.14), соответствующее $q^0(x)$, имеет вид

$$\varphi(0, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ b^0 e^{ikx} + a^0 e^{-ikx}, & x \to +\infty. \end{cases} \tag{2.1.27}$$

Следовательно, асимптотическая форма, соответствующая $q^0(x - c_0t)$, дается формулой

$$\varphi(t, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ik(x-c_0t)}, & x \to -\infty, \\ b^0 e^{ik(x-c_0t)} + a^0 e^{-ik(x-c_0t)}, & x \to +\infty. \end{cases} \quad (2.1.28)$$

Можно нормировать асимптотический коэффициент e^{ikc_0} при $x \to -\infty$, приравняв его единице, поскольку уравнение (2.1.14) линейно. Далее, если установить взаимно однозначное соответствие $\mathcal{T}$ между q^t и асимптотическими условиями (b^t, a^t), можно получить

$$q(t, x) = q^0(x - c_0t), \quad (2.1.29)$$

в соответствии с (2.1.12).

Далее, можно показать, что если определено отображение $\mathcal{T}^{-1}$, то уравнение (2.1.5) может быть решено по схеме, представленной на рис. 2.3. Здесь

$$W^t: (b^0, a^0) \to (b^t, a^t) \quad (2.1.30)$$

есть оператор эволюции во времени для уравнений (2.1.24) и (2.1.25).

В последующих разделах мы определим асимптотические условия (b^t, a^t) для некоторых конкретных функций $q(t, x)$. Это поможет нам решить, является ли отображение $\mathcal{T}$ обратимым. Для того, чтобы отображение $\mathcal{T}$ было обратимо, необходимо, чтобы асимптотические данные были единственным образом связаны с функцией $q(t, x)$. Окажется, что требуется больше информации, чем содержится в паре чисел (b^t, a^t), и что, кроме того, требуются довольно сильные ограничения на $q(t, x)$.

Уравнение (2.1.14) встречается в физических моделях, и возможность обращения преобразования $\mathcal{T}$ представляет самостоятельный интерес. Рассмотрим колебания одномерной упругой среды с переменной плотностью $\rho(y)$. Соответствующее уравнение представляет собой ньютоновское уравнение движения для скорости $v(y, t)$,

$$\rho(y) \frac{\partial}{\partial t} v(y, t) = \frac{\partial S}{\partial y}(y, t), \quad (2.1.31)$$

где напряжение $S(y, t)$ выражается через поле смещений $u(y, t)$ формулой

$$S(y, t) = \varkappa(y) \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right](y, t). \quad (2.1.32)$$

Модуль упругости $\varkappa(y)$ предполагается зависящим от y, а $v(y, t)$ и выражается через $u(y, t)$ следующим образом:

$$v(y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(y, t). \quad (2.1.33)$$

Определим преобразование Фурье по переменной t от функции $f(x, t)$ формулой

$$\tilde{f}(y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f(y, t) \frac{dt}{(2\pi)^{1/2}}. \tag{2.1.34}$$

Тогда уравнения (2.1.31)—(2.1.33) могут быть сведены к уравнениям

$$iw\rho(y)\tilde{v}(y, k) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}(y, k), \tag{2.1.35}$$

$$ik\tilde{S}(y, k) = \varkappa(y)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(y, k). \tag{2.1.36}$$

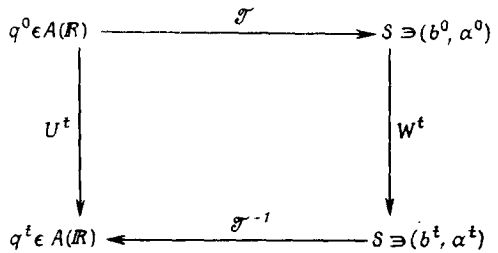


Рис. 2.3.

Если исключить из этих уравнений функцию $\tilde{v}(x, w)$, то получится уравнение Штурма — Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\rho(y)}\frac{\partial S}{\partial y}(y, k)\right] + \frac{k^2}{\varkappa(y)}\tilde{S}(y, k) = 0. \tag{2.1.37}$$

Вводя новую независимую переменную

$$x = \int^{y} \left[\frac{\rho(u)}{k(u)}\right]^{1/2} du \tag{2.1.38}$$

и новую зависимую переменную $Y(y, k)$,

$$Y(y, k) = \tilde{S}(y, k)(\varkappa(y)\rho(y))^{-1/2}, \tag{2.1.39}$$

мы сможем преобразовать уравнение (2.1.35) к канонической форме:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q(y)\right] Y(x, k) = 0, \tag{2.1.40}$$

где

$$Q(x) = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} \text{ и } \varphi(x) = (\varkappa(y)\rho(y))^{-1/4}. \tag{2.1.41}$$

Таким образом мы вернулись к уравнению вида (2.1.14).

Нам понадобится одна важная идея, которая состоит во введении понятий прямой и обратной задач. В примере, разобранном

выше, прямая задача — вычислить скорость и поле смещений $v(y, t)$ и $u(y, t)$ по заданным плотности $\rho(y)$ и модулю упругости $\varkappa(y)$. Точно так же, как в упомянутой выше задаче теплопроводности, эта задача не имеет практического значения. Можно сделать очень точные измерения скорости и поля смещений, но модуль упругости может быть неизвестен. Действительно, модуль может зависеть от поля смещений. Поэтому гораздо более реалистичная задача — определение модуля упругости $\varkappa(y)$ по данным измерений поля смещений. Это пример обратной задачи, соответствующей прямой задаче определения $u(y, t)$ и $v(y, t)$ по данным $\rho(y)$ и $\varkappa(y)$. Для того, чтобы решить обратную задачу определения $\varkappa(y)$ по данной функции $\rho(y)$, мы должны будем определить функцию $Q(x)$, решая обратную задачу для уравнения (2.1.35), и затем решить (2.1.41) и найти $\varkappa(y)$.

Уравнение (2.1.40) чаще всего встречается в квантовой механике, где оно известно как уравнение Шрёдингера, а функция $Q(x)$ называется потенциальной функцией. В разд. 2.3 мы увидим, как уравнение (2.1.40) возникает в квантовой механике. Для того, чтобы понять методы, которые мы станем развивать, вовсе не обязательно знать что-либо о квантовой механике. Однако она является источником многих идей, используемых в дальнейшем, и поэтому исходная терминология во многом сохранилась.

Прежде чем перейти к дальнейшему изучению, мы хотели бы ввести эту терминологию путем рассмотрения классической задачи, которая служит для иллюстрации понятий прямой и обратной задачи.

2.2. Классическое рассеяние

Начнем наше обсуждение прямой и обратной задач рассеяния с классического случая. Рассмотрим частицу, движущуюся в плоскости под действием консервативной силы, направленной из точки O. Такому силовому полю соответствует потенциал $V(r)$, зависящей только от r — радиальной переменной полярных координат с центром в точке O. Если радиальная сила, действующая на частицу, стремится к нулю при $r \to \infty$, то мы можем выбрать соответствующий потенциал $V(r)$, который тоже стремится к нулю при $r \to \infty$. На больших расстояниях от точки O при такой форме потенциала частица движется так, как если бы она была фактически свободна, т. е. по прямой линии. На рис. 2.4 показаны несколько траекторий частиц в поле такого потенциала. Траектории, изображенные на рис. 2.4, соответствуют частицам, приходящим из $x = -\infty$ по прямым, параллельным оси x, но находящимся на разных расстояниях от нее. Частицы сворачивают, входя в область значительного изменения потенциала, и их минимальное расстояние от центра R_b зависит от того, на каком расстоянии b

от оси x была частица вначале. Переменная b называется *прицельным расстоянием* частицы. Следовательно, частица отталкивается потенциалом, сворачивает со своего прежнего пути, который был параллелен оси x, и, наконец, уходит по кривой, асимптотически приближающейся к прямой, проходящей через точку O. Такая прямая определяет полярный угол $\theta(b)$, т. н. угол, который составляет эта прямая с положительным направлением оси абс-

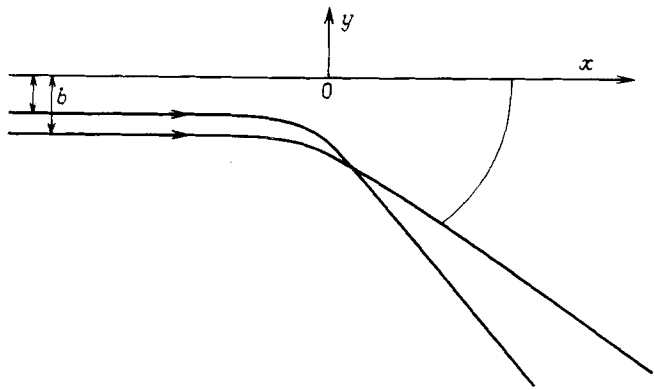


Рис. 2.4. Рассеяние двух частиц с различными прицельными расстояниями.

цисс. Прямая задача, соответствующая этой ситуации, состоит в том, чтобы по заданному потенциалу $V(r)$ определить функцию $\theta(b)$. Физической реализацией этой задачи является рассеяние электронов при прохождении через тонкую металлическую фольгу. В этом случае задача становится трехмерной. Однако если речь идет о цилиндрическом пучке, параллельном оси x, то мы можем ограничиться рассмотрением плоскости, в которой лежит траектория одной частицы, и воспользоваться только что проделанным анализом. Физически, конечно, невозможно измерить $\theta(b)$. Однако можно измерить различные величины, по которым этот угол определяется. Представим себе, что в лаборатории может быть получен пучок частиц, в котором каждую секунду через единичную площадь поперечного сечения пучка проходит ρ частиц с одинаковой энергией E. Этот пучок направляется на потенциал вдоль оси x. Число частиц, рассеявшихся внутрь углового интервала $(\theta, \theta + d\theta)$ в течение секунды, обозначается $-2\pi\rho\sigma(\theta)\sin\theta d\theta$, а функция $\sigma(\theta)$ называется *дифференциальным сечением рассеяния*. Область значений θ в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$ соответствует области значений b в интервале $(b, b + db)$. Число частиц сохраняется. Число частиц, входящих каждую секунду через кольцевую область, ограниченную величинами прицельного расстояния b и $b + db$, равно $2\pi\rho b db$. Оно должно быть равно числу выходящих

частиц, которое равно $-2\pi\sigma(\theta)\rho\sin\theta d\theta$. Таким образом получается соотношение

$$\sigma(\theta) = -b\,\mathrm{cosec}\,\theta\frac{db}{d\theta}. \tag{2.2.1}$$

Для монотонно возрастающих потенциалов с особенностью в точке $r = 0$ мы можем, интегрируя это соотношение, получить

$$b^2 = 2\int_{\theta}^{\pi}\sigma(\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{2.2.2}$$

(Заметим, что частицы, которые движутся точно по оси x, т. е. для которых $b = 0$, отражаются назад, и поэтому $\sigma(0) = \pi$.) Уравнение (2.2.2) определяет θ как функцию от прицельного расстояния b. Прямая физическая задача состоит в том, чтобы по данному потенциалу $V(r)$ определить дифференциальное сечение расстояния $\sigma(\theta)$. Цель подобных экспериментов состоит на самом деле в обратном. Потенциал $V(r)$ неизвестен, а дифференциальное сечение рассеяния можно измерить. Можно ли, зная $\sigma(\theta)$, определить $V(r)$? Это и есть физическая обратная задача рассеяния.

Решение прямой задачи можно получить непосредственно применением теории орбит классической механики. В задаче имеются две сохраняющиеся величины — энергия E и момент количества движения J. Если мы возьмем частицы единичной массы с прицельным расстоянием b, то эти величины могут быть выражены в полярных координатах (r, θ) с центром в точке O таким образом:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2 + V(r) = E = \frac{1}{2}v_0^2, \tag{2.2.3}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = J = bv_0 = b\sqrt{2E}, \tag{2.2.4}$$

где v_0 — начальная скорость частицы.

Используя (2.2.4) для исключения производной $d\theta/dt$, получим

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2Eb^2}{r^2}\right] + V(r) = E, \tag{2.2.5}$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \mp\left[2(E - V(r)) - \frac{2Eb}{r^2}\right]^{1/2}, \tag{2.2.6}$$

где знак минус соответствует входящей ветви траектории, а плюс — выходящей. Для входящей ветви значение r уменьшается до тех пор, пока не станет равным минимуму, где $dr/dt = 0$, при $r = R_b$ (R_b — наибольший из корней функции $(E - V(r) - Eb^2r^{-2})$). Если разделить (2.2.4) на (2.2.6), получим

$$\frac{d\theta}{dr} = \mp\frac{b\sqrt{E}}{r^2}[E - V(r) - Eb^2/r^2]^{-1/2}. \tag{2.2.7}$$

Обозначая через ${}_b\varphi$ величину θ, соответствующую $r = R_b$, мы можем проинтегрировать по отдельности для входящей и исходящей ветви и получим

$$\pi - \varphi_b = \int_{R_b}^{\infty} [b^{-2} - r^{-2} - V(r) E^{-1} b^{-2}]^{-1/2} r^{-2} dr, \qquad (2.2.8)$$

$$\varphi_b - \theta(b) = \int_{R_b}^{\infty} [b^{-2} - r^{-2} - V(r) b^{-2} E^{-1}]^{-1/2} r^{-2} dr. \qquad (2.2.9)$$

Отсюда сразу получается

$$\theta(b) = \pi - 2 \int_{R_b}^{\infty} [b^{-2} - r^{-2} - V(r) E^{-1} b^{-2}]^{-1/2} r^{-2} dr. \qquad (2.2.10)$$

Заменив переменную интегрирования (вместо r взяв $u = r^{-1}$), можно выразить (2.2.10) в таком виде:

$$\theta(b) = \pi - 2 \int_0^{U_b} [b^{-2}(1 - \tilde{V}(u) E^{-1}) - u^2]^{-1/2} du, \qquad (2.2.11)$$

где $U_b = R_b^{-1}$ и $\tilde{V}(u) = V(u^{-1})$.

Выражение (2.2.11) служит самым удобным решением прямой задачи. Для примера рассмотрим потенциал $V(r) = e/r^2$. Подставляя этот потенциал в (2.2.11), получим

$$\theta = \pi [1 - (eb^{-2}E^{-1} + 1)^{-1/2}] \qquad (2.2.12)$$

и, проинтегрировав, найдем, что

$$b^2 = eE^{-1} \frac{(1 - \theta/\pi)^2}{(1 - (1 - \theta/\pi)^2)}. \qquad (2.2.13)$$

Из (2.2.2) дифференциальное сечение рассеяния выражается формулой

$$\sigma(\theta) = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta \frac{d}{d\theta}(b^2). \qquad (2.2.14)$$

Используя (2.2.13) в выражении (2.2.14), можно выразить дифференциальное сечение рассеяния через θ:

$$\sigma(\theta) = \frac{e(1 - \theta/\pi)}{\pi E (\theta/\pi)(2 - \theta/\pi)^2} \operatorname{cosec} \theta. \qquad (2.2.15)$$

Теперь рассмотрим обратную задачу. Для этого мы должны тщательно проанализировать структуру выражения (2.2.11). В нем неудобно то, что зависимость от b в (2.2.11) носит двоякий характер. От b зависит не только подынтегральная функция, но и верхний предел интегрирования U_b, который является наименьшим корнем подынтегральной функции. В качестве первого шага

в решении (2.2.11) мы должны сделать явной неявную зависимость в U_b. Пусть U_b — наименьший корень множителя

$$[b^{-2} - u^2(1 - \tilde{V}(u)\,E^{-1})]^{-1}.$$

Если мы определим

$$W(u) = u^2(1 - E^{-1}\tilde{V}(u))^{-1}, \tag{2.2.16}$$

то, поскольку U_b — наименьший корень, функция $W(u)$ имеет единственную обратную на интервале интегрирования $(0, U_0)$. Следовательно, переменную интегрирования u можно заменить новой переменной интегрирования W; преимущество этой переменной в том, что теперь пределы интегрирования по W, а именно $W(0) = 0$ и $W(U_b) = b^{-2}$, явно зависят от b. Уравнение (2.2.11) с новой переменной интегрирования W примет вид

$$\frac{1}{2}(\pi - \theta(b)) = \int_0^{b^{-2}} (b^{-2} - W)^{-1/2}\,\Gamma(W)\,dW, \tag{2.2.17}$$

где

$$\Gamma(W) = (1 - \tilde{V}(u)\,E^{-1})^{-1/2}\frac{du}{dW}. \tag{2.2.18}$$

Теперь структура уравнения (2.2.11) стала ясна. Если определить интеграл $A[\psi](s)$ выражением

$$A[\psi](s) = \int_0^s (s - W)^{-1/2}\,\psi(W)\,dW, \tag{2.2.19}$$

то уравнение (2.2.17) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}(\pi - \theta(b)) = A(\Gamma)(b^{-2}). \tag{2.2.20}$$

Интегральное преобразование (2.2.19) называется *преобразованием Абеля*, и теперь можно понять, что обратная задача совпадает с задачей обращения этого преобразования Абеля.

Задача решения уравнения

$$A[\psi](s) = G(s) \tag{2.2.21}$$

упростится, если мы заметим, что $A[\psi]$ — интегральный оператор типа свертки. Абелево преобразование функции ψ является сверткой функции ψ с функцией $t^{-1/2}$. Если применить преобразование Лапласа к (2.2.1) и теорему о свертке, то можно легко убедиться в том, что поскольку преобразование Лапласа от $t^{-1/2}$ есть $\sqrt{\pi}p^{-1/2}$, то преобразование Лапласа от функции ψ имеет вид

$$L(\psi) = \pi^{-1/2}L(G)\,p^{1/2}. \tag{2.2.22}$$

Обратное преобразование Лапласа от функции $p^{1/2}$ не существует. Однако если использовать элементарное свойство преобразования Лапласа, состоящее в том, что преобразование Лапласа от $G'(t) = dG/dt$ находится по формуле

$$L[G'] = pL[G] - G(0), \tag{2.2.23}$$

то можно переписать (2.2.21) в таком виде:

$$L[\psi] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} p^{-1/2}\{L[G'] + G(0)\}. \tag{2.2.24}$$

Далее при помощи теоремы о свертке можно вывести, что

$$\psi(s) = \frac{1}{\pi}\left\{G(0)\, s^{-1/2} + \int_0^x G'(t)(s-t)^{-1/2}\, dt\right\}. \tag{2.2.25}$$

Это и есть *обратное преобразование Абеля*.

В нашем случае обратное преобразование Абеля приводит к такому результату:

$$\Gamma(W) = \frac{d}{dW}\frac{1}{2\pi}\int_0^W \frac{(\pi - \theta(s))}{(W-s)^{1/2}}\, ds, \tag{2.2.26}$$

где $\tilde{\theta}(s) = \theta(s^{-1/2})$ и $\theta(s) \to \pi$ при $s \to \infty$, поскольку $U \to 0$ при $b \to \infty$. Теперь определим

$$v(u) = (1 - \tilde{V}(u)\, E^{-1}). \tag{2.2.27}$$

Сопоставляя это с (2.2.16), получаем $v = u^2 W^{-1}$. Продифференцируем это последнее выражение по W и, подставляя $du/dW = U^{1/2}\Gamma(W)$, получим уравнение (здесь v рассматривается как функция $\tilde{v}$ от W)

$$\frac{d\tilde{v}}{dW} = [2\Gamma(W)\, W^{-1/2} - W^{-1}]\,\tilde{v}(W), \tag{2.2.28}$$

которое после интегрирования дает

$$\tilde{v}(W) = \exp\int_0^W [\Gamma(W)\, W^{-1/2} - W^{-1}]\, dW. \tag{2.2.29}$$

Теперь мы можем обратить уравнение $u^2 = \tilde{v}(W)\, W$, с тем чтобы получить W и, следовательно, v как функцию от u. Тем самым обратная задача решена.

Процесс обращения состоит в построении последовательности функций

$$\sigma \to \theta \to \Gamma \to \tilde{v} \to W \to v \to V. \tag{2.2.30}$$

Проследим наши шаги по этому пути от дифференциального сечения рассеяния (2.2.15) до исходного потенциала. Построим после-

довательность (2.2.30) для этого случая. Из (2.2.2) найдем, что

$$b^2 = \frac{eE^{-1}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^2}{\left(1-\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right)}. \qquad (2.2.31)$$

Отсюда можно найти θ как функцию от b:

$$\theta(b) = \pi(1-(eb^{-2}E^{-1}+1)^{-1/2}). \qquad (2.2.32)$$

Следовательно, $\tilde{\theta}(S) = \pi(1-(eSE^{-1}+1)^{-1/2})$, и подстановка этого выражения в (2.2.26) дает

$$\Gamma(W) = \frac{d}{dW}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^W \frac{\pi(eSE^{-1}+1)^{-1/2}}{(W-S)^{1/2}}\,dS\right]. \qquad (2.2.33)$$

Интегрируя подстановкой, имеем

$$\Gamma(W) = \frac{1}{2}\frac{W^{-1/2}e^{-1}E}{(W+e^{-1}E)}, \qquad (2.2.34)$$

и дальше, подставляя это в (2.2.32), получаем выражение для функции $\tilde{v}(W)$:

$$\tilde{v}(W) = (1+eE^{-1}W)^{-1}. \qquad (2.2.35)$$

Из уравнения $u^2 = \tilde{v}(W)\,W$ можно найти

$$u^2 = W(1+eE^{-1}W)^{-1}, \qquad (2.2.36)$$

так что $W(u) = u^2(1-eE^{-1}u^2)^{-1}$, и поэтому

$$v(u) = \tilde{v}(W(u)) = (1-eE^{-1}u^2), \qquad (2.2.37)$$

что по определению $v(u)$ дает $\tilde{v}(u) = eu^2$. В конце концов мы выводим формулу $V(r) = er^{-2}$.

Эта задача классической механики представляет собой пример общей структуры таких двойственных, прямой и обратной, задач. Сначала решается прямая задача и определяется преобразование между неизвестными величинами (в данном случае это одна потенциальная функция) и некоторыми измеримыми величинами (в данном случае это дифференциальное сечение рассеяния). Часто измеримые величины имеют асимптотический характер. Это происходит потому, что в области асимптотики влияние неизвестных величин предполагается известным и простым. Следовательно, результаты экспериментов могут быть истолкованы с некоторой степенью доверия. Преобразования, связывающие изучаемый объект с асимптотическими данными при помощи процесса рассеяния, называются преобразованиями рассеяния. Обратная задача сводится, таким образом, к задаче построения обратного

преобразования рассеяния. Как мы только что видели, построение такого обратного преобразования рассеяния включает построение последовательности вспомогательных функций, которые сами по себе совершенно не важны и представляют собой только этапы решения задачи. Это будет общей чертой обратных преобразований рассеяния в этой книге.

2.3. Рассеяние в квантовой механике

Классическая механика представляет собой подходящее описание для таких систем, как солнечная система. Процесс измерения для таких макроскопических систем имеет пренебрежимо малое влияние на результаты наблюдений. С точки зрения классической механики движущаяся частица в каждый момент времени имеет и точно определенное положение в пространстве, и точное значение импульса, а также всех характеристик, поддающихся наблюдению, таких как энергия и момент количества движения. Это очень важный аспект классического подхода. Классическая задача рассеяния, рассмотренная в предыдущем разделе, очень типична в этом смысле. Уравнения (2.2.3) и (2.2.4) могут быть использованы для моделирования движения кометы в гравитационном поле планеты. В классической модели комета приближается из некоторой бесконечно удаленной точки пространства по прямой линии, гравитационное поле планеты отклоняет ее, и она уходит по орбите, асимптотой которой является другая прямая линия. Мы говорим, что комета была рассеяна гравитационным полем планеты. В любой точке траектории комета обладала точным положением в пространстве, импульсом, энергией и моментом количества движения. Действительно, две последние характеристики постоянны в процессе движения кометы.

Квантовая механика представляет собой подходящее описание для систем малого размера, в которых существенны взаимодействия субатомных частиц. В отличие от своего классического аналога квантовая частица не может одновременно иметь точно определенное положение в пространстве и точно определенный импульс, поскольку процесс измерения взаимодействует с системой субатомного размера. Однако можно выделить набор наблюдаемых характеристик, которые могут быть одновременно определены. Например, энергия E и момент количества движения J частицы могут быть одновременно измерены без влияния одного на другое.

Для того чтобы проиллюстрировать понятия квантовой механики, и в частности уравнение Шрёдингера, рассмотрим движение квантовой частицы в потенциальном поле $V(x)$ на вещественной прямой $-\infty < x < \infty$. Эта задача имеет непосредственное отношение к методам, которые будут развиты в последующих главах.

Квантовая частица может быть описана только в вероятностных терминах. В любой момент времени t состояние такой частицы определяется комплекснозначной функцией $\psi^t(x)$ от координаты x. Такая функция $\psi^t(x)$ называется *волновой функцией*, и для нее должно выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^t(x)|^2 dx < \infty, \tag{2.3.1}$$

т. е. она должна быть квадратично интегрируема. Полное линейное пространство всех таких функций будет обозначаться $L^2(\mathbb{R})$. Это ограничение накладывается для того, чтобы функцию $\psi^t(x)$ можно было интерпретировать следующим образом. Величина $|\psi(x)|^2 dx$ интерпретируется как относительная вероятность нахождения частицы в интервале $(x, x+dx)$. Если выполнено условие (2.3.1), то абсолютная вероятность нахождения частицы в интервале (a, b) выражается формулой

$$\int_a^b |\psi^t(x)|^2 dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^t(x)|^2 dx. \tag{2.3.2}$$

При переходе от классической механики к квантовой мы заменяем классические наблюдаемые величины, такие как положение в пространстве x, импульс p, энергия H, операторами $\hat{x}$, $\hat{p}$ и $\hat{H}$, действующими на волновую функцию ψ. Операторы, представляющие положение в пространстве и импульс, обычно определяются так:

$$\hat{x}\psi_t(x) = x\psi^t(x) \tag{2.3.3}$$

и

$$\hat{p}\psi^t(c) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi^t}{\partial x}(x), \tag{2.3.4}$$

где $\hbar = h/2\pi$ и h — физическая константа, имеющая размерность действия, известная как *постоянная Планка*. Численная величина h равна $6.6252 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Тот факт, что положение в пространстве и импульс не могут наблюдаться одновременно, выражается формально в том, что операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$ не коммутируют.

Если измерения положения в пространстве и импульса производятся в разном порядке, то результаты будут разные. Из (2.3.3) и (2.3.4) можно найти, что $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$, и, таким образом, $\hbar$ является как бы мерой того, насколько измерения положения в пространстве и импульса мешают друг другу. Можно показать, что в пределе $\hbar \to 0$ квантовая механика переходит в классическую. Это известно под названием *классический предел*.

Классическая энергия H частицы массы m при значении потенциала $V(x)$ выражается так:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{2.3.5}$$

Соответствующий ему оператор энергии или оператор Гамильтона в квантовой механике определяется так:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \tag{2.3.6}$$

Соответствующий физический закон, определяющий эволюцию квантовой системы во времени, выражается уравнением Шрёдингера для $\psi^t(x)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi^t}{\partial t} = \hat{H}\psi^t. \tag{2.3.7}$$

Если в (2.3.6) подставить это выражение для $\hat{H}$, то получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi^t}{\partial t}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^t}{\partial x^2}(x) + V(x)\psi^t(x). \tag{2.3.8}$$

Это так называемое нестационарное уравнение Шрёдингера.

Мы должны проверить, что эта эволюция во времени согласуется с нашей вероятностной интерпретацией функции ψ^t. Если функция $\psi^t(x)$ нормирована в некоторый момент времени $t = t_0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{t_0}(x)|^2\,dx = 1, \tag{2.3.9}$$

то нужно потребовать, чтобы она была так же нормирована для всех других моментов времени. Это вытекает из закона сохранения, который выводится из уравнения (2.3.8). Из (2.3.8) легко найти, что величина

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi^t(x)|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^{t*}(x)\frac{\partial\psi^t}{\partial x}(x) - \psi^t(x)\frac{\partial\psi^{t*}}{\partial x}(x)\right) \tag{2.3.10}$$

не зависит от $V(x)$. Интегрируя по всей вещественной оси и предполагая, что $\psi^t(x) \to 0$ при $x \to \infty$, получаем

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi^t(x)|^2\,dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^{t*}(x)\frac{\partial\psi^t}{\partial x}(x) - \psi^t(x)\frac{\partial\psi^{t*}}{\partial x}(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \tag{2.3.11}$$

и, таким образом, для любой такой функции норма $\psi^t(x)$ сохраняется в процессе движения.

Следовательно, квадратично интегрируемая волновая функция, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$ и нормированная в какой-то момент времени, остается нормированной для всех моментов времени, так что вероятностная интерпретация согласуется с эволюционным уравнением. Уравнение (2.3.10) может быть записано в форме закона сохранения

$$\frac{\partial \rho^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j^t = 0, \tag{2.3.12}$$

если ρ^t и j^t определены следующим образом:

$$\rho^t = |\psi^t|^2 \text{ и } j^t = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^{t*}\frac{\partial \psi^t}{\partial x} - \psi^t \frac{\partial \psi^{t*}}{\partial x}\right). \tag{2.3.13}$$

Они интерпретируются как плотность вероятности и поток вероятности соответственно. Можно записать j^t и другим способом:

$$j^t = \frac{\hbar}{2mi} W(\psi^{t*}, \psi^t), \tag{2.3.14}$$

где билинейный функционал $W(\varphi_1, \varphi_2)$ определен выражением

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.3.15}$$

и называется *вронскианом* от функций φ_1 и φ_2. Вронскианы будут играть важную роль в теории, которая будет развита в последующих главах.

В квантовой механике собственные функции оператора $\hat{A}$, соответствующего наблюдаемой величине A в классической механике, интерпретируются как состояния частицы, для которых существует точное значение величины A. Если мы ищем решения ${}_E\psi^t$ нестационарного уравнения Шрёдингера (2.3.7), соответствующие состояниям с точным значением энергии E,

$$H({}_E\psi^t) = E({}_E\psi^t) = 2\hbar \frac{\partial}{\partial t}({}_E\psi^t), \tag{2.3.16}$$

то мы можем решить уравнение (2.3.16) и получить

$$\psi(t, x, E) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x, E), \tag{2.3.17}$$

где, как видно из первого равенства в (2.3.16), $\psi(x, E)$ удовлетворяет уравнению

$$E\psi(x, E) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, E) + V(x)\psi(x, E), \tag{2.3.18}$$

которое называется *стационарным уравнением Шрёдингера*.

Заметим, что эволюция во времени таких собственных состояний энергии приводит только к изменению фазы волновой функции и что величины ρ^t и j^t не зависят от времени для таких

состояний. Важным свойством j^t является ее независимость от потенциала $V(x)$. Для собственных состояний энергии можно найти другие такие величины. Если φ_1 и φ_2 — два решения стационарного уравнения Шрёдингера (2.3.18), то легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} W(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \tag{2.3.19}$$

и поэтому вронскиан $W(\varphi_1, \varphi_2)$ от любых двух решений с постоянной энергией — постоянная величина.

Условие квадратичной интегрируемости и непрерывности функции $\psi(x, E)$ и ее первой производной вместе с другими граничными условиями, которые позволяют с помощью общего уравнения (2.3.18) описать конкретную задачу, ставят строгие ограничения на допустимые значения E. Если мы определим

$$Q(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} V(x); \quad k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}; \quad y(x, k) = \psi\left(x, -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right), \tag{2.3.20}$$

тогда уравнение Шрёдингера (2.3.18) может быть записано в виде

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\right] y(x, k) = k^2 y(x, k). \tag{2.3.21}$$

Теперь его можно интерпретировать как задачу нахождения собственных значений дифференциального оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x), \tag{2.3.22}$$

дополненную соответствующими граничными условиями.

Оператор L называют *оператором рассеяния Шрёдингера*. Собственные значения E представляют собой возможные значения энергии этой системы. В классическом случае E непрерывна и удовлетворяет только естественному ограничению $E \geqslant V_{\min}$, где $V_{\min}$ — минимальное значение потенциала $V(x)$. Однако в квантовом случае энергия не обязана быть непрерывной. Вообще говоря, существует дискретное множество изолированных точек и некоторое количество непрерывных интервалов, образующих множество допустимых значений энергии, которое называется энергетическим спектром L. Более точное определение и обсуждение спектра оператора Шрёдингера будет дано в гл. 3.

Не все собственные функции квантового оператора квадратично интегрируемы. Такие функции не являются волновыми функциями, поскольку они не поддаются вероятностной интерпретации. Такие ненормируемые функции мы будем называть *обобщенными волновыми функциями*. Примером такой обобщенной волновой функции может служить собственная функция ${}_k y$ оператора импульса $\hat{p}$,

$$\hat{p}({}_k y)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}({}_k y(x)) = (\hbar k)({}_k y(x)), \tag{2.3.23}$$

соответствующая собственному значению импульса $p = \hbar k$. Интегрирование этого уравнения дает

$$y(x, k) = b(k)\, e^{ikx}, \tag{2.3.24}$$

где $b(k)$ — константа.

Хотя такие собственные состояния импульса не являются физически интерпретируемыми волновыми функциями, в элементарной квантовой механике их обычно используют как базис, по которому разлагаются квадратично интегрируемые волновые функции. Это, в сущности, метод анализа Фурье. Для наших целей с математической точки зрения удобно ввести более строгие ограничения на волновые функции, чем просто принадлежность к $L^2(\mathbb{R})$. Требование, чтобы волновая функция была непрерывно дифференцируема и абсолютно интегрируема, $\int_{-\infty}^{\infty} |y^t(x)|\, dx < \infty$, достаточно для квадратичной интегрируемости, как следует из неравенства Коши — Шварца. Более того, это требование позволит нам применять классическую технику анализа Фурье и вообще даст возможность более гибко манипулировать. Из классической теоремы об интеграле Фурье известно, что такая непрерывно дифференцируемая и абсолютно интегрируемая волновая функция имеет представление Фурье

$$y^t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{y}^t(k)\, dk, \tag{2.3.25}$$

где по теореме об интеграле Фурье

$$y^t(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} y^t(x)\, dx. \tag{2.3.26}$$

Отдельные элементы подынтегральной функции $e^{ikx}\tilde{y}^t(k)$ часто называют модами Фурье от функции y^t.

Только в том случае, если $V \equiv 0$, функция ${}_k y$ является решением стационарного уравнения Шрёдингера (2.3.18). Если $E = \hbar^2 \frac{k^2}{2m}$, то стационарное уравнение Шрёдингера для случая, когда потенциал равен нулю, примет вид

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right] y(x, t) = 0. \tag{2.3.27}$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$Y(x, k) = b(k)\, e^{ikx} + a(k)\, e^{-ikx} \quad (k > 0). \tag{2.3.28}$$

Случай, когда $V(x) = 0$, соответствует свободному движению и описывается свободным уравнением Шрёдингера (2.3.27). Этот

случай в квантовой динамике частиц соответствует случаю прямолинейного движения в классической механике. Общие решения нестационарного свободного уравнения Шрёдингера могут быть выражены формулой

$$y^t(x) = \int_0^\infty dx e^{\frac{ik^2t\hbar}{2m}} Y(x, k). \tag{2.3.29}$$

Это интеграл Фурье, представленный в терминах собственных функций энергии и импульса, поскольку эти наблюдаемые могут быть указаны одновременно.

Функция $y^t(x)$ состоит из двух частей, $y_+^t(x)$ и $y_-^t(x)$, где

$$y_+^t(x) = \int_0^\infty b(k) e^{i\left(kx - k^2\frac{t\hbar}{2m}\right)} dk, \tag{2.3.30}$$

$$y_-^t(x) = \int_0^\infty a(k) e^{-i\left(kx + k^2\frac{t\hbar}{2m}\right)} dk. \tag{2.3.31}$$

Функция y_+^t состоит из волн, движущихся вправо, а функция y_-^t — из волн, движущихся влево. Когда мы имеем дело со стационарным уравнением Шрёдингера, следует помнить, что решение

$$y(x, k) = b(k) e^{ikx} + a(k) e^{-ikx} \tag{2.3.32}$$

соответствует суперпозиции волны, бегущей направо, являющейся собственной функцией импульса с собственным значением $k\hbar$, и волны, бегущей влево, являющейся собственной функцией импульса с собственным значением $-k\hbar$.

Возвращаясь к общему случаю $V \not\equiv 0$, предположим, что $V(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Если квантовая частица направляется с импульсом $-k\hbar$ из $x = +\infty$, то может случиться, что она пройдет через ядро потенциала и выйдет из него с импульсом $-k\hbar$ в сторону $x = -\infty$, где снова станет свободна. Однако может случиться и так, что она будет отражена потенциалом и вернется к $x = +\infty$ с импульсом $+\hbar k$. Эти две возможности, исключающие друг друга в классической механике, в квантовом мире могут реализоваться одновременно. В нестационарном случае начальный волновой пакет движется из бесконечности, и как только он попадает в зону влияния потенциала, он распадается на свои моды Фурье. Часть исходного пакета проходит сквозь потенциал и движется дальше к $-\infty$, остальная часть отражается от потенциала. На рис. 2.5 показана последовательность состояний волнового пакета, падающего справа на гауссов потенциал $Q(x) = 2e^{-x^2}$. Если исходная частица на $x = +\infty$ представлена собственным состоянием импульса e^{-ikx}, соответствующим свободной частице, движущейся влево и имеющей импульс $-k\hbar$, то мы

должны добавить к ней отраженную волну, бегущую направо с импульсом $\hbar k$. Таким образом, асимптотическая форма волновой функции, описывающей частицу на $x = +\infty$, такова:

$$\tilde{\varphi}(x, k) \sim (e^{-ikx} + R(k)\, e^{+ikx}), \quad x \to +\infty. \tag{2.3.33}$$

На другом пределе $x \to -\infty$ существует только волна, бегущая налево, которая прошла через потенциал. Следовательно, ее асимптотическая форма будет иметь вид

$$\tilde{\varphi}(x, k) \sim T(k)\, e^{-ikx}, \quad x \to -\infty. \tag{2.3.34}$$

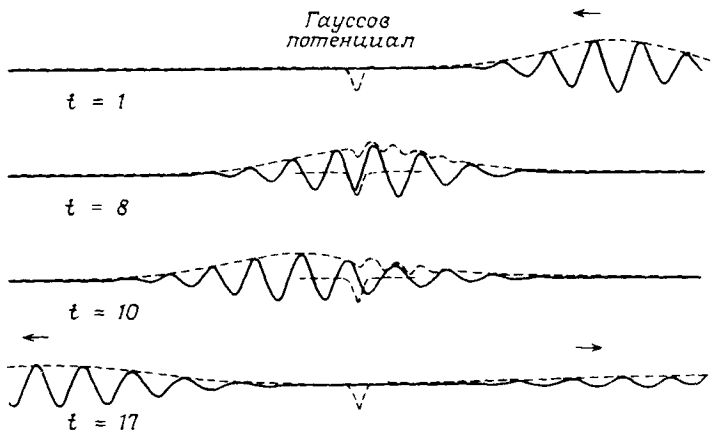


Рис. 2.5. —·—·— $Q(x)$, — $\mathrm{Re}\,(y)$, ——— $|y|$.

Функции $R(k)$ и $T(k)$ известны как *коэффициент отражения и коэффициент прохождения*.

В анализе описанного выше процесса рассеяния удобно нормировать волновую функцию ${}_k\tilde{\varphi}$, приведя ее к функции ${}_k\varphi$, имеющей асимптотическое поведение $\varphi(x, k) \sim e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$. Это значит, что мы будем искать волновые функции ${}_k\varphi$, имеющие асимптотическое поведение такого вида:

$$\varphi(k, x) \sim \begin{cases} b(k)\, e^{ikx} + a(k)\, e^{-ikx}, & x \to +\infty, \\ e^{-ikx}, & x \to -\infty, \end{cases} \tag{2.3.35}$$

где $a(k) = 1/T(k)$ и $b(k) = R(k)/T(k)$, причем заметим, что $R(k) = b(k)/a(k)$. Из постоянства j^t немедленно следует соотношение между функциями a и b. Поскольку $j^t(+\infty) = j^t(-\infty)$ для вещественных k, то выполняется равенство

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \tag{2.3.36}$$

Величины $a(k)$ и $b(k)$ представляют асимптотические данные, относящиеся к процессу шрёдингеровского рассеяния точно так

же, как θ (b) относилась к классическому рассеянию в предыдущем разделе. В оставшейся части этого раздела и в следующем разделе мы начнем исследовать, в какой степени $a(k)$ и $b(k)$ определяют потенциал $Q(x)$. В заключение этого раздела мы решим две простых задачи потенциального рассеяния. Это поможет нам привыкнуть к манипуляциям с функциями $a(k)$ и $b(k)$. Примеры специально выбраны так, что они решаются точно и несложно, и не нужно думать, что их индивидуальные особенности являются типичными. Первый пример — дельта-потенциал, второй — потенциал в форме прямоугольной ямы.

2.3.1. Дельта-потенциал

Потенциал

$$Q(x) = Q_0\delta(x), \tag{2.3.37}$$

где $\delta(x)$ — дельта-распределение Дирака, можно считать предельной функцией семейства гауссовых потенциалов $\pi^{-1/2}\alpha \exp(-x^2\alpha^2)$ при $\alpha \to -\infty$.

Уравнение Шрёдингера для дельта-потенциала (2.3.37) принимает форму

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q_0\delta(x)\right]\varphi(x, k) = 0. \tag{2.3.38}$$

Поскольку $\delta(x)$ равна нулю для всех $x \neq 0$, то это, по существу, задача о свободной частице. При $x = 0$ дельта-распределение приводит к следующим граничным условиям. Интегрируя уравнение (2.3.38) в окрестности $(-\varepsilon, \varepsilon)$ точки $x = 0$, получим

$$\left[\frac{d}{dx}\varphi(x, k)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{Q_0\delta(x) + k^2\}\varphi(x, k)\,dx = 0. \tag{2.3.39}$$

Если использовать непрерывность ${}_k\varphi$ при $x = 0$ и основное свойство функции $\delta(x)$, то в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\frac{d}{dx}({}_k\varphi)(0^+) - \frac{d}{dx}({}_k\varphi)(0^-) = Q_0({}_k\varphi(0)), \tag{2.3.40}$$

что приводит к противоречию с нашим обычным условием непрерывности первой производной от функции ${}_k\varphi$.

Запишем

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} b(k)e^{ikx} + a(k)e^{-ikx}, & x \to +\infty, \\ e^{-ikx}, & x \to -\infty. \end{cases} \tag{2.3.41}$$

Условие непрерывности функции ${}_k\varphi$ при $x = 0$ дает

$$a(k) + b(k) = 1, \tag{2.3.42}$$

а условие на разрыве (2.3.40) дает

$$ik - ik\,[a(k) - b(k)] = -Q_0. \tag{2.3.43}$$

Из этих двух уравнений можно найти $a(k)$ и $b(k)$:

$$a(k) = 1 + \frac{Q_0}{2ik}, \quad b(k) = -\frac{Q_0}{2ik}. \tag{2.3.44}$$

В качестве проверки легко установить, что для любого вещественного k выполняется $|a|^2 - |b|^2 = 1$, что согласуется с требованием сохранения потока вероятности j.

Если допустить, что k — чисто мнимое число, что соответствует состоянию с отрицательной полной энергией, то функция ${}_k\varphi$ может быть нормирована при условии, что $a(k)$ имеет нуль на положительной части мнимой оси в комплексной плоскости k. Поэтому мы требуем $Q_0 > 0$, чтобы нуль функции $a(k)$, равный, как видно из (2.3.44), $k = iQ_0/2$, лежал на положительной части мнимой оси. Уравнение (2.3.41) тогда определяет решение в виде

$$\varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right) = e^{-Q_0|x|/2}. \tag{2.3.45}$$

Если бы мы рассматривали эти волновые функции только с точки зрения квантовой механики, то можно было бы нормировать их так, чтобы их норма в $L^2(\mathbb{R})$ была равна единице. Однако для той техники, которая развивается в этой книге, удобнее принять другие способы нормировки волновых функций. В гл. 3 и 4 будет показано, что для наших целей нормировка $\int_{-\infty}^{\infty} Y^2(x)\,dx = 1$ удобнее нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} |Y(x)|^2\,dx = 1$. Для волновой функции дельта-потенциала (2.3.45) нормированная волновая функция будет иметь вид $\sqrt{c}\varphi(x, iQ_0/2)$, где

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right)\right]^2 dx = \frac{2}{Q_0}. \tag{2.3.46}$$

В данном случае вид нормированной функции совпадает с квантовомеханической нормировкой, поскольку $\varphi(x, iQ_0/2)$ является вещественной. Волновая функция (2.3.45) описывает частицу с центром в точке $x = 0$, т. е. в точке локализации потенциала. Такое состояние, локализованное вокруг потенциального центра, называется *связанным состоянием*. Это состояние представляет собой квантовый аналог замкнутой орбиты, например такой, как орбита Луны вокруг Земли. Решение (2.3.45) принято называть

волновой функцией связанного состояния. Из (2.3.30) следует, что энергия этого состояния равна $E = h^2k^2/2m = -Q_0^2h^2/8m$, т. е. отрицательна.

2.3.2. Потенциал в виде прямоугольной ямы

Рассмотрим потенциал вида

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0, & |x| \leqslant \alpha, \\ 0, & |x| > \alpha. \end{cases} \tag{2.3.47}$$

Уравнения Шрёдингера в этом случае таковы:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q_0\right] \varphi(x, k) = 0 \text{ для } |x| \leqslant \alpha, \tag{2.3.48}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right] \varphi(x, k) = 0 \text{ для } |x| > \alpha. \tag{2.3.49}$$

К ним следует добавить дополнительные условия — непрерывность функции $({}_k\varphi)$ и ее производной $({}_k\varphi)'$ при $x = \pm\alpha$.

Нужно выписать волновые функции для каждой из областей $x > \alpha$, $|x| < \alpha$ и $x < -\alpha$. Они имеют вид:

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x \leqslant -\alpha, \\ B(k, \zeta) e^{i\zeta x} + A(k, \zeta) e^{-i\zeta x}, & |x| \leqslant \alpha, \\ b(k, \zeta) e^{ikx} + a(k, \zeta) e_1^{-ikx}, & x \geqslant \alpha, \end{cases} \tag{2.3.50}$$

где $\zeta^2 = k^2 + Q_0^2$.

Непрерывность функции ${}_k\varphi$ при $x = \pm\alpha$ означает, что

$$Ae^{i\zeta\alpha} + Be^{-i\zeta\alpha} = e^{ik\alpha}, \tag{2.3.51}$$

$$Ae^{-i\zeta\alpha} + Be^{i\zeta\alpha} = ae^{-ik\alpha} + be^{ik\alpha}, \tag{2.3.52}$$

а непрерывность производной $({}_k\varphi)'$ при $x = \mp\alpha$ означает, что

$$Ae^{i\zeta\alpha} - Be^{-i\zeta\alpha} = \frac{k}{\zeta} e^{ik\alpha}, \tag{2.3.53}$$

$$Ae^{-i\zeta\alpha} - Be^{i\zeta\alpha} = \frac{k}{\zeta}(ae^{-ik\alpha} - be^{ik\alpha}). \tag{2.3.54}$$

Из (2.3.51) и (2.3.53) получается

$$A(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{-i\zeta\alpha}\left(1 + \frac{k}{\zeta}\right) e^{ik\alpha}, \quad B(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{i\zeta\alpha}\left(1 - \frac{k}{\zeta}\right) e^{ik\alpha}, \tag{2.3.55}$$

а из (2.3.52) и (2.3.54) определяются a и b:

$$a(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{ik\alpha}\left(1 + \frac{\zeta}{k}\right) Ae^{-i\zeta\alpha} + \left(1 - \frac{\zeta}{k}\right) Be^{i\zeta\alpha}, \tag{2.3.56}$$

$$b(k, \zeta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\zeta}{k}\right) Ae^{-i\zeta\alpha} + \left(1 + \frac{\zeta}{k}\right) Be^{-ik\alpha}. \tag{2.3.57}$$

Сопоставляя последние два выражения с (2.3.55), можно получить окончательный результат:

$$a(k,\ \zeta) = e^{2ik\alpha}\left[\cos 2\zeta\alpha - \frac{i}{2}\left(\frac{\zeta}{k} + \frac{k}{\zeta}\right)\sin 2\zeta\alpha\right], \quad (2.3.58)$$

$$b(k,\ \zeta) = \frac{i}{2}\left(\frac{\zeta}{k} - \frac{k}{\zeta}\right)\sin 2\zeta\alpha. \quad (2.3.59)$$

Эти выражения удовлетворяют условию $|a(k, \zeta)|^2 - |b(k, \zeta)|^2 = 1$ для вещественных k и ζ, что отвечает требованию сохранения потока вероятности, который остается равным $-k/m$ для всех x.

Полагая $Q_0 = \bar{Q}_0/2\alpha$ и устремляя $\alpha \to 0$, найдем, что $\zeta\alpha \to 0$ и $\zeta \sin 2\zeta\alpha \to \bar{Q}_0$. В пределе при $\alpha \to 0$ уравнения (2.3.58) и (2.3.59) дадут

$$a(k,\ \zeta) \to a(k) = 1 - \frac{i\bar{Q}_0}{2k} \text{ при } \alpha \to 0, \quad (2.3.60)$$

$$b(k,\ \zeta) \to b(k) = \frac{i}{2k}\bar{Q}_0 \text{ при } \alpha \to 0, \quad (2.3.61)$$

где предельные функции $a(k)$ и $b(k)$ такие же, как и для случая дельта-потенциала (2.3.37). Этого следовало ожидать, потому что семейство потенциалов

$$Q(x,\ \alpha) = \begin{cases} -Q_0/2\alpha, & |x| \leqslant \alpha, \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases} \quad (2.3.62)$$

имеет своим пределом дельта-потенциал при $\alpha \to 0$. А именно,

$$\lim_{\alpha \to 0} Q(x,\ \alpha) = -\bar{Q}_0\delta(x). \quad (2.3.63)$$

Поскольку дельта-потенциал имеет связанное состояние ($Q_0 > 0$), можно ожидать, что потенциальная яма тоже будет иметь связанные состояния. Для того, чтобы их найти, необходимо исследовать мнимые нули $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$) функции $a(k, \zeta)$. При $k = i\varkappa$ функция $a(k, \zeta)$ приобретает вид

$$a(i\varkappa,\ \chi) = e^{-\varkappa\alpha}\left(\cos 2\chi\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\chi}\right)\sin^2\chi\alpha\right), \quad (2.3.64)$$

где $\chi^2 = (Q_0 - \varkappa^2)^{1/2}$. Если $\chi^2 < 0$, то легко показать, что функция $a(i\varkappa, \chi)$ не имеет нулей. Однако если $\chi^2 > 0$, то $k = i\varkappa$ является нулем функции $a(k, \chi)$ при условии

$$\operatorname{tg} 2\chi\alpha = \frac{2\varkappa\chi}{\chi^2 - \varkappa^2}. \quad (2.3.65)$$

Введя новые переменные $\xi = \chi\alpha$ и $\beta^2 = Q_0\alpha^2$, можно записать (2.3.65) в виде

$$\operatorname{tg} 2\xi = \frac{2(\beta^2 - \xi^2)^{1/2}}{(2\xi^2 - \beta^2)}. \quad (2.3.66)$$

Будем искать решения этого уравнения для $\xi \leqslant \beta$. Уравнение (2.3.66) можно решить графически. Для этого надо нарисовать графики кривых $y = \operatorname{tg} 2\xi$ и $y = 2(\beta^2 - \xi^2)^{1/2}(2\xi^2 - \beta^2)^{-1}$ и проследить, где они пересекаются.

Из графика на рис. 2.6 видно, что если $N\pi/2 \leqslant \beta \leqslant (N + 1)\pi/2$, то существует $(N + 1)$ решение $\{\gamma\}_1^{N+1}$. Если $Q_0 = \bar{Q}_0/2\alpha$, то $\beta \to 0$ при $\alpha \to 0$, и мы получаем в точности одно

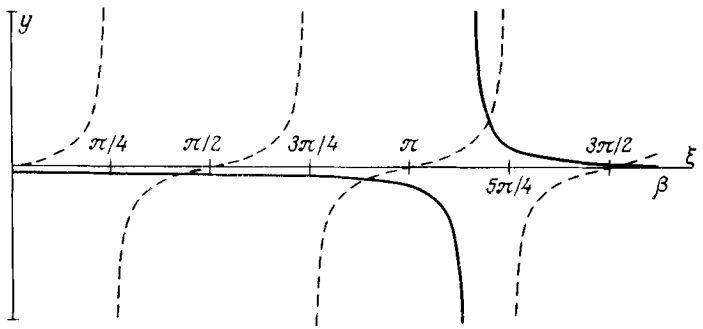


Рис. 2.6.

связанное состояние в пределе при $\alpha \to 0$. Это согласуется с проделанным выше анализом дельта-потенциала. В качестве простого примера можно рассмотреть потенциал

$$Q(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leqslant \pi/4, \\ 0, & |x| > \pi/4, \end{cases} \tag{2.3.67}$$

имеющий единственное связанное состояние с энергией $E = -\hbar^2/2m$ и с волновой функцией

$$\varphi(x, i) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant \pi/4, \\ e^{-\pi/4}\sqrt{2}\cos x, & |x| \leqslant \pi/4, \\ e^{x}, & x \leqslant -\pi/4. \end{cases} \tag{2.3.68}$$

График этой функции приведен на рис. 2.7. Нормированная форма этой волновой функции имеет вид $\sqrt{C}\varphi(x, i)$, где C можно найти из формулы

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, i)]^2 dx = \int_{\pi/4}^{\infty} e^{-2x} dx + 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-\pi/2}\cos^2 x\, dx + \int_{-\infty}^{-\pi/4} e^{2x} dx = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\pi/2}. \tag{2.3.69}$$

Поскольку волновая функция $\varphi(x, t)$ вещественна, то ее нормировка совпадает с нормировкой в квантовомеханическом смысле и, следовательно, вероятность нахождения частицы в яме равна $(2 + \pi/4 + \pi)$, что составляет приблизительно 70 %.

Если взять $k = \sqrt{2}$, то рассеянная волновая функция с положительной энергией $E = \hbar^2/m$ — это

$$\varphi(x, 2) = \begin{cases} \exp(-i\sqrt{2}\,x), & x \leqslant -\pi/4, \\ -\exp(i\pi/2\sqrt{2}) \cdot \{\sin 2x + (\cos 2x)/\sqrt{2}\}, & |x| \leqslant \pi/4, \\ \exp\{-i\sqrt{2}x + i\pi(1 + 1/\sqrt{2})\}, & x \geqslant \pi/4. \end{cases} \tag{2.3.70}$$

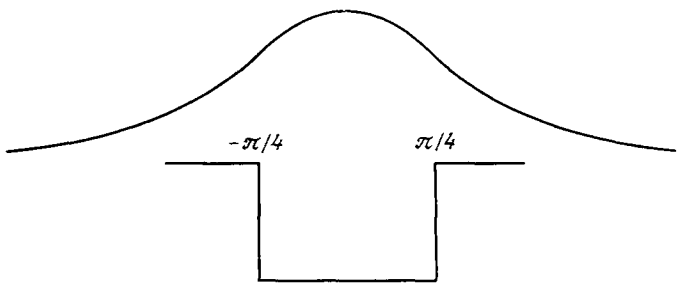


Рис. 2.7.

Это выражение описывает частицу, которая не отразилась потенциалом, а прошла сквозь него на $+\infty$ с коэффициентом прохождения $b = \exp[i\pi(1 + 1/\sqrt{2})]$, имеющим модуль, равный единице. Можно сказать, что при прохождении через потенциал волна претерпела фазовый сдвиг, равный $\pi(1 + 1/\sqrt{2})$. Значения k, которые, подобно $k = \sqrt{2}$, являются нулями коэффициента отражения $R(k, \zeta)$, изолированы, и поэтому волновой пакет, составленный из волн, имеющих импульсы в интервале вблизи $\sqrt{2}$, всегда будет разрушаться при прохождении через потенциал. Чем уже границы для величины k вокруг $\sqrt{2}$, тем ближе ситуация к полному прохождению. Сигнал с такой достаточно узкой полосой частот будет проходить через потенциал, почти не разрушаясь, при этом будет происходить только фазовый сдвиг. Как показывает этот пример, существуют специальные значения величины k, допускающие полное прохождение. В следующем разделе мы займемся специальным видом потенциалов, для которых такая прозрачность наблюдается в более общих ситуациях.

2.4. Безотражательные потенциалы

Существует особый вид потенциалов, заслуживающих особого внимания в связи со своими замечательными свойствами. Рис. 2.8—2.10 демонстрирует несколько последовательных моментов в развитии волнового пакета, падающего на потенциал

$$Q(x, m) = m(m+1)\operatorname{sech}^2 x, \tag{2.4.1}$$

для трех разных значений параметра m.

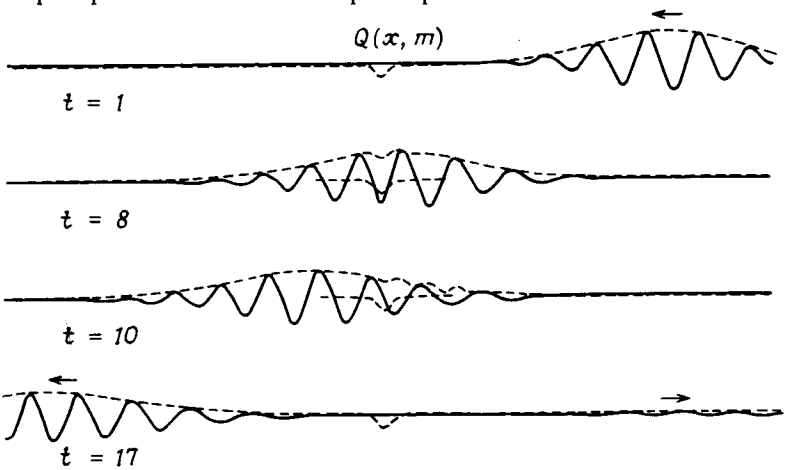


Рис. 2.8. —·—·— $Q(x)$, — $\mathrm{Re}(y)$, ———$|y|$; $m < 1$.

На рис. 2.8 и 2.10, соответствующих значениям $m < 1$ и $m > 1$, мы видим типичное поведение упомянутого выше пакета, распадающегося на отраженную и проходящую части. На рис. 2.9, соответствующем $m = 1$, волновой пакет начинает распадаться на моды Фурье, как только он попадает в потенциальную яму, но когда он проходит дальше, отдельные волны снова собираются в пакет, и пакет полностью восстанавливается после прохождения через яму. Ясно, что в случае, изображенном на рис. 2.9, когда $m = 1$, происходит полное прохождение, т. е. никакие волны не отражаются. Таким свойством обладают все потенциалы вида $Q(x, m)$ с целыми значениями параметра m: такие потенциалы по понятным причинам принято называть безотражательными. Для случая $m = 1$ задача легко решается методом разложения, и это весьма полезно и поучительно, поэтому мы решим ее подробно. Уравнение Шрёдингера, которое мы должны решить, имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (2\operatorname{sech}^2 x + k^2)\right] y(x, k) = 0. \tag{2.4.2}$$

Определим операторы $L_{\pm}$:

$$L_{\pm} = \left(\operatorname{th} x \mp \frac{d}{dx}\right). \tag{2.4.3}$$

Тогда (2.4.2) можно выразить таким образом:

$$L_{+}L_{-}({}_{k}y) = (k^2 + 1)({}_{k}y). \tag{2.4.4}$$

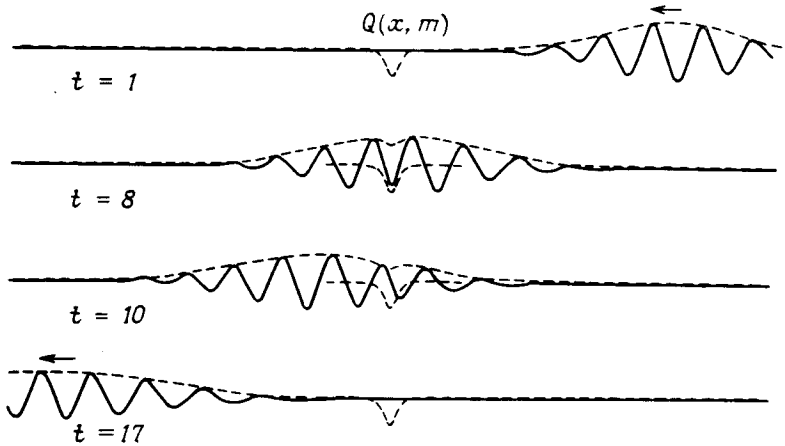


Рис. 2.9. —·—·— $Q(x)$, — Re (y), ———| y |; $m = 1$.

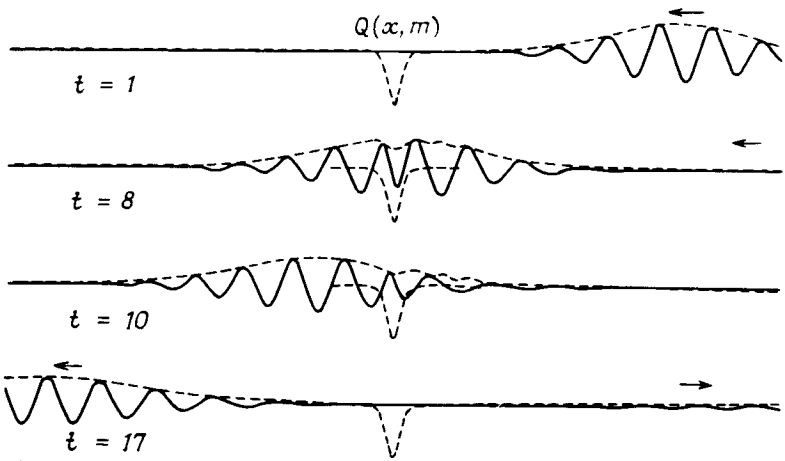


Рис. 2.10. —·—·— $Q(x)$, — Re (y), ———| y |; $m > 1$.

Легко показать, что функция ${}_{k}Y$, определенная формулой

$${}_{k}Y = L_{-}({}_{k}y), \tag{2.4.5}$$

является решением уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) Y(x, k) = 0. \tag{2.4.6}$$

Далее, для каждого решения ${}_kY$ уравнения (2.4.6) функция ${}_ky$, определенная выражением

$$ {}_ky = L_+ ({}_kY), \tag{2.4.7} $$

является решением уравнения (2.4.2). Используя эту привлекательную алгебраическую структуру, мы можем теперь легко решить задачу для случая $m = 1$. Для задачи рассеяния мы ищем решение уравнения (2.4.2), определяемое асимптотическими граничными условиями

$$ \varphi(x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ b(k)\, e^{ikx} + a(k)\, e^{-ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{2.4.8} $$

где $b(k)$ и $a(k)$ — коэффициенты отражения и прохождения. Общее решение уравнения (2.4.6) имеет вид

$$ Y(x, k) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \tag{2.4.9} $$

и, применяя операторы $L_\pm$, можно получить общее решение уравнения (2.4.2):

$$ y(x, k) = A(\operatorname{th} x + ik)\, e^{-ikx} + B(\operatorname{th} x - ik)\, e^{ikx}. \tag{2.4.10} $$

При $x \to \pm\infty$, $\operatorname{th} x \to \pm 1$. Следовательно,

$$ a(k) = \frac{ik+1}{ik-1}, \quad b(k) = 0, \tag{2.4.11} $$

что соответствует в точности волновой функции ${}_k\varphi$, задаваемой формулой

$$ \varphi(x, k) = \frac{(\operatorname{th} x + ik)}{(ik-1)} e^{-ikx}. \tag{2.4.12} $$

Связанные состояния системы соответствуют отрицательным значениям энергии. Для таких состояний $k = i\varkappa$, где $\varkappa$ вещественно, и волновая функция может быть нормирована. Если положить $k = i\varkappa$ в (2.4.12), то волновая функция $\varphi(x, i\varkappa)$ примет вид

$$ \varphi(x, i\varkappa) = \frac{(\varkappa - \operatorname{th} x)}{(1+\varkappa)} e^{+\varkappa x}. \tag{2.4.13} $$

Асимптотическое поведение волновой функции $\varphi(x, i\varkappa)$ будет таким:

$$ \varphi(x, i\varkappa) \sim \begin{cases} e^{+\varkappa x} & \text{для } x \to -\infty, \quad (2.4.14) \\ \left[\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right] e^{+\varkappa x} & \text{для } x \to +\infty, \quad (2.4.15) \end{cases} $$

и она может быть нормирована лишь в том случае, если коэффициент прохождения $(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)$ равен нулю. Поэтому мы должны потребовать, чтобы $\varkappa = 1$, и тогда существует только

одно связанное состояние с энергией $E = -\hbar^2/2m$ и нормируемой волновой функцией

$$\varphi(x, i) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{th} x)\, e^x = \frac{1}{2}\operatorname{sech} x. \qquad (2.4.16)$$

Нормированная форма этой функции выглядит так: $\sqrt{2}\varphi(x, i)$. Вообще, если волновая функция y нормирована к виду $Y = \sqrt{C}y$, так что $\int_{-\infty}^{\infty} |Y|^2(x)\, dx = 1$, то C называется нормирующей константой. Для потенциала $Q(x, N)$, где N — целое число, можно показать аналогичным способом, что волновая функция дается формулой

$$y(x, k) = \prod_{m=1}^{N} \left(m \operatorname{th} x - \frac{d}{dx}\right) Y(x, k), \qquad (2.4.17)$$

где, как и выше, $Y(x, k)$ — решение уравнения (2.4.6). В этом случае

$$a(k) = \prod_{m=1}^{N} \frac{ik + m}{ik - m}, \quad b(k) = 0. \qquad (2.4.18)$$

Для связанных состояний должно выполняться условие

$$a(ik) = 0, \qquad (2.4.19)$$

что приводит к N связанным состояниям с энергиями E_m, которые даются формулой

$$E_m = -\frac{\hbar^2}{2M} m^2, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad (2.4.20)$$

Таким образом, потенциал $U(x) = -2\operatorname{sech}^2 x$ заслуживает особого внимания благодаря свойству безотражательности. Делая масштабные преобразования переменных, допускаемые уравнением Шрёдингера, можно из этого единственного примера безотражательного потенциала получить целое двухпараметрическое семейство потенциалов $Q(x, \varkappa, c)$:

$$Q(x, \varkappa, c) = 2\varkappa^2 \operatorname{sech}^2(\varkappa x + c). \qquad (2.4.21)$$

Рассмотрим уравнение Шрёдингера с потенциалом $Q(z, \varkappa, c)$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (K^2 + 2\varkappa^2 \operatorname{sech}^2(\varkappa z + c))\right] \omega(x, K) = 0. \qquad (2.4.22)$$

Введем переменные x, ${}_k y$ и k:

$$x = \varkappa z + c, \quad y(x, k) = \omega\left(\frac{x - c}{\varkappa}, K\right), \quad k = K/\varkappa. \qquad (2.4.23)$$

Тогда ${}_k y$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера (2.4.2) и, как легко убедиться, потенциал $Q(x, \varkappa, c)$ — тоже безотражательный с коэффициентом прохождения $a(K)$, где

$$a(K) = \frac{i\varkappa + K}{i\varkappa - K}. \tag{2.4.24}$$

Существуют некоторые обобщения приведенного выше метода разложения, о которых следует упомянуть. Пусть дано уравнение Шрёдингера с потенциалом $q(x)$ и волновой функцией ${}_k y$:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + k^2\right) y(x, k) = 0. \tag{2.4.25}$$

Можно ли найти волновую функцию $u(x)$, такую что функция ${}_k Y$, определенная равенством

$$\left(\frac{d}{dx} - u(x)\right) y(x, k) = Y(x, k), \tag{2.4.26}$$

удовлетворяет другому уравнению Шрёдингера,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) + k^2\right) Y(x, k) = 0, \tag{2.4.27}$$

с одним и тем же k^2 в обоих случаях?

Подставляя (2.4.26) в (2.4.27), мы легко обнаружим, что для совместимости необходимо выполнение условий

$$Q = q + 2\frac{du}{dx}, \tag{2.4.28}$$

$$-q = \frac{du}{dx} + u^2 + C, \tag{2.4.29}$$

где C — константа интегрирования.

Если определить

$$Z(x, \sigma) = \left(\frac{d}{dx} \ln z(x, \sigma)\right), \tag{2.4.30}$$

где ${}_k z$ — решение уравнения (2.4.25), то функция $Z(x, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dZ}{dx} + Z^2 + \sigma^2 = -q. \tag{2.4.31}$$

Для того, чтобы выражение (2.4.30) было всюду корректно определено, необходимо, чтобы функция $z(x, \sigma)$ не имела нулей. По теореме Штурма — Лиувилля о колебаниях для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы σ^2 лежало слева и от непрерывного, и от дискретного спектра уравнения (2.4.25). Таким образом, если мы возьмем $\sigma = iK$, где K больше или равно

модулю наименьшего собственного значения, то функцию $u(x)$ удобно выбрать в таком виде:

$$u(x) = \frac{d}{dx} \log (z(x, iK)), \tag{2.4.32}$$

где $z(x, iK)$ — любая волновая функция для потенциала $q(x)$, соответствующая значению $\sigma = iK$. Полагая $Q = -2dW/dx$ и $q = -2dw/dx$, мы сможем исключить функцию $u(x)$ из уравнений (2.4.28) и (2.4.29). При этом мы получим следующее соотношение:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{dw}{dx} - K^2 + (W - w)^2. \tag{2.4.33}$$

Потенциалы Q и q, связанные между собой таким образом, называются *преобразованиями Бэклунда* друг от друга.

В качестве примера применения этих результатов мы можем получить наш безотражательный потенциал $2K^2 \operatorname{sech}^2 (Kx + c)$ другим путем. Если $q = 0$, то наиболее общий вид волновой функции уравнения (2.4.25), соответствующей $k = iK$, таков:

$$z(x, iK) = (A \operatorname{ch} Kx + B \operatorname{ch} Kx), \tag{2.4.34}$$

где A и B не равны нулю. Соответствующая функция $u(x)$ будет иметь вид

$$u(x) = K^2 \operatorname{th} (Kx + c), \tag{2.4.35}$$

где $c = \operatorname{arth} (B/A)$.

Отсюда при помощи (2.4.28) получаем потенциал

$$Q(x) = 2K^2 \operatorname{sech}^2 (Kx + c). \tag{2.4.36}$$

Поскольку функция $u(x)$ известна, то можно точно выписать волновые функции, соответствующие потенциалу $2K^2 \operatorname{sech}^2 (Kx + c)$. Выбирая любое значение $k^2 \leqslant -K^2$, мы можем построить новую функцию $u_a(x)$ и получить новый потенциал и соответствующие волновые функции. Следовательно, можно построить целую серию решений различных уравнений Шрёдингера.

Иногда преобразование Бэклунда может быть всего лишь симметрией. Например, если выбрать $k = 1$ и $c = 0$ и взять волновую функцию

$$z_1(x, iK) = \left(\frac{K - \operatorname{th} x}{k + 1}\right) e^{+Kx}, \quad K^2 > 1, \tag{2.4.37}$$

то окажется, что соответствующая функция $u(x)$ (обозначим ее $u_1(x)$) дается формулой

$$u_1(x) = \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\operatorname{th} x - K} + K, \tag{2.4.38}$$

что приводит, если принять во внимание (2.4.28), к потенциалу

$$Q(x) = \frac{2(K^2 - 1) \operatorname{sech}^2 x}{(\operatorname{th} x - K)^2} = 2 \operatorname{sech}^2 (x + c), \quad c = -\operatorname{arcth} K. \tag{2.4.39}$$

Волновая функция ${}_k\Phi$ с асимптотикой

$$\Phi(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad x \to -\infty, \tag{2.4.40}$$

как легко видеть, имеет вид

$$\Phi(x, k) = -\frac{1}{(K+ik)}\left[\frac{d}{dx} - K - \frac{\operatorname{sech}^2 x}{(\operatorname{th} x - K)}\right]\varphi(x, k). \tag{2.4.41}$$

Если взять асимптотику при $x \to -\infty$, то станет ясно, что

$$a(k) = \frac{k+i}{k-i}, \quad b(k) = 0, \tag{2.4.42}$$

т. е. асимптотические условия те же самые, что и для волновой функции ${}_k\varphi$, соответствующей потенциалу $2\operatorname{sech}^2 x$. Теперь очевидно, что соответствие между потенциалами и парами функций $a(k)$, $b(k)$ не является взаимно однозначным. Однако здесь существует различие. Волновая функция связанного состояния будет иметь вид

$$\Phi(x, i) = \frac{1}{(1-K)}\left[\frac{d}{dx} - u_1\right]\varphi(x, i), \tag{2.4.43}$$

и константа нормировки C для $\varphi(x, i)$ определяется соотношением

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} - u_1\right)\varphi(x, i) \times$$
$$\times \left(\frac{d}{dx} - u_1\right)\varphi(x, i)\,\frac{dx}{(1-K)^2}. \tag{2.4.44}$$

Интегрируя по частям правую часть, получим

$$(K-1)^2 C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i)\left(-\frac{d}{dx} - u_1\right)\left(\frac{d}{dx} - u_1\right)\varphi(x, i)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{du_1}{dx} + u_1^2\right)\varphi(x, i)\,dx, \tag{2.4.45}$$

что, учитывая конкретный вид функции u_1, равняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i)\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 2\operatorname{sech}^2 x + K^2\right)\varphi(x, i)\,dx =$$
$$= (K^2 - 1)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i)\,dx = \frac{1}{2}(K^2 - 1). \tag{2.4.46}$$

Следовательно, нормирующий множитель волновой функции связанного состояния изменился и вместо 2 стал равен $C(K)$:

$$C(K) = 2\left[\frac{K+1}{K-1}\right] = 2e^{-2c}. \tag{2.4.47}$$

Таким образом, любая связь потенциала с асимптотическим поведением волновых функций должна включать не только функции $a(k)$ и $b(k)$, но и по крайней мере значение нормирующей константы. Заметим также, что способ построения нормирующей константы, приведенный выше, применим не только для частного случая потенциала $2\,\mathrm{sech}^2 x$, использованного для его иллюстрации. Ясно, что существует тесная взаимосвязь между преобразованиями Бэклунда и симметриями уравнения Шрёдингера, такими, как в (2.4.23). Если преобразование Бэклунда порождается более общим решением, чем $\varphi(x, i)$, то тем самым могут быть получены потенциалы, не принадлежащие семейству $Q(x, K, c)$, имеющие дополнительное связанное состояние.

Можно надеяться, что если известны функции $a(k)$ и $b(k)$ и, кроме того, нормирующая константа, то этого окажется достаточным для реконструкции потенциала $Q(x)$. Однако, как показывает наш последний пример, для того, чтобы это было возможно, нужны сильные ограничения на потенциал и связанные с ним волновые функции. Например, потенциалу

$$Q(x, \alpha) = \frac{2}{(x+\alpha)^2} \tag{2.4.48}$$

соответствует волновая функция

$$\varphi(x, k) = \left[1 - \frac{1}{2k(x+\alpha)}\right] e^{-ikx}. \tag{2.4.49}$$

Ясно, что это безотражательный потенциал с $b(k) = 0$ и $a(k) = 1$ для всех значений k и α. Здесь нет связанных состояний, которые можно было бы нормировать, и нет даже фазового сдвига, поскольку коэффициент прохождения $T(k)$ тождественно равен единице. Потенциал (2.4.48) сингулярен при $x = -\alpha$, и мы можем надеяться, что таких неприятностей не будет, если на потенциал будут наложены ограничения, такие как абсолютная интегрируемость. Другая неприятность, которую мы хотим отметить, состоит в том, что функция $({}_k\varphi)$ имеет полюс при $k = 0$. Это нежелательное свойство, которого следует опасаться. Интересно заметить, что сингулярные потенциалы $Q(x, \alpha)$ могут быть получены предельным переходом, примененным к аналитическому продолжению семейства потенциалов $Q(x, \gamma, c) = 2\gamma^2\,\mathrm{sech}^2(\gamma x + c)$ следующим образом:

$$Q(x, \alpha) = \lim_{\gamma \to 0} Q\left(x, \gamma, \gamma\alpha + \frac{i\pi}{2}\right). \tag{2.4.50}$$

Это подсказывает путь, которым они могут быть изучены.

2.5. Обобщения

Метод разложения на множители, примененный для решения задачи (2.4.2) о безотражательном потенциале, допускает естественное обобщение. Если наше уравнение Шрёдингера можно разложить на множители, приведя его к виду

$$\left(u(x)-\frac{d}{dx}\right)\left(u(x)+\frac{d}{dx}\right)\psi(x,\ k)=(k^2+A)\,\psi(x,\ k), \qquad (2.5.1)$$

то уравнение (2.4.37) можно свести к паре уравнений первого порядка:

$$\left[\frac{d}{dx}+u(x)\right]\psi_1=i\zeta\psi_2, \qquad (2.5.2)$$

$$\left[\frac{d}{dx}-u(x)\right]\psi_2=-i\zeta\psi_1, \qquad (2.5.3)$$

где $\psi_1=\psi$ и функция ψ_2 определена равенством (2.5.2) и $\zeta^2=(k^2+A)$. Если определить новые функции v_1 и v_2

$$v_1=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2),\quad v_2=\frac{1}{2i}(\psi_2-\psi_1), \qquad (2.5.4)$$

то уравнения (2.5.2) и (2.5.3) превратятся в двумерную задачу на собственные значения:

$$\begin{bmatrix}\frac{id}{dx} & u(x)\\ u(x) & -\frac{id}{dx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\zeta\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}. \qquad (2.5.5)$$

Асимптотический анализ для этой задачи рассеяния первого порядка может быть выполнен аналогично тому, как это делалось для уравнения Шрёдингера. Система с зависимостью от времени, соответствующая нестационарному уравнению Шрёдингера, есть уравнение Дирака:

$$\left[\begin{bmatrix}i(\partial_x+\partial_t) & 0\\ 0 & i(\partial_t-\partial_x)\end{bmatrix}+u(x)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right]. \qquad (2.5.6)$$

Полагая $u(x)=\operatorname{th} x$, что соответствует разложению, применяемому при исследовании безотражательного потенциала $2\operatorname{sech}^2 x$, можно решить систему (2.5.2)—(2.5.3) (см. рис. 2.8—2.10). Используя решение (2.4.12), легко показать, что после перенормировки соответствующее решение уравнения (2.5.5) дается формулой:

$$\varphi(x,\ k,\ \zeta)=\begin{bmatrix}\frac{\operatorname{th}x+i(\zeta+k)}{i(\zeta+k)-1}\\ \frac{i\operatorname{th}x-(k-\zeta)}{i(\zeta+k)-1}\end{bmatrix}e^{-ikx},\quad k=\sqrt{\zeta^2-1}. \qquad (2.5.7)$$

В пределе при $x \to \infty$ $\varphi(x, k, \zeta) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ k-\zeta \end{pmatrix} e^{-ikx}$, что в свою очередь является решением системы

$$\begin{bmatrix} \frac{id}{dx} & -1 \\ -1 & -\frac{id}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \xi \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{2.5.8}$$

Эта система является асимптотическим пределом системы (2.5.5) при $x \to -\infty$. Когда $x \to +\infty$, (2.5.7) имеет следующую асимптотическую форму:

$$\varphi(x, k, \zeta) \sim \left(\frac{k+\zeta-i}{k+\zeta+i}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta - k \end{bmatrix} e^{-ikx}. \tag{2.5.9}$$

Для потенциала общего вида, удовлетворяющего условию $u(x) \to \pm 1$ при $x \to \pm\infty$, решение $\varphi(x, k, \zeta)$ системы (2.5.5) с асимптотическим граничным условием

$$\varphi(x, k, \zeta) \sim \begin{bmatrix} 1 \\ k-\zeta \end{bmatrix} e^{-ikx} \quad x \to -\infty \tag{2.5.10}$$

можно выразить при $x \to +\infty$ в асимптотической форме

$$\varphi(x, k, \zeta) \sim a(\zeta, k) \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta - k \end{pmatrix} e^{-ikx} + b(\zeta, k) \begin{pmatrix} \zeta - k \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}. \tag{2.5.11}$$

Векторы $v_- = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta - k \end{bmatrix} e^{-ikx}$ и $v_+ = \begin{bmatrix} \zeta - k \\ 1 \end{bmatrix} e^{ikx}$ являются на самом деле собственными функциями линейной системы

$$\begin{bmatrix} \frac{id}{dx} & 1 \\ 1 & -\frac{id}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \zeta \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \tag{2.5.12}$$

которая может рассматриваться как асимптотическая форма системы (2.5.5) при $x \to +\infty$. Функции $v_\pm$ соответствуют асимптотическим волнам системы Дирака (2.5.6), бегущим соответственно вправо и влево. Функции $a(\zeta, k)$ и $b(\zeta, k)$ являются естественными аналогами функций $a(k)$ и $b(k)$ предыдущего раздела.

Решения (2.5.7) показывают, что $u(x) = \operatorname{th} x$ — безотражательный потенциал для задачи рассеяния (2.5.5). Асимптотические данные $a(\zeta, k)$ и $b(\zeta, k)$ имеют вид

$$a(\zeta, k) = \left(\frac{k+\zeta-i}{k+\zeta+i}\right), \quad b(\zeta, k) = 0. \tag{2.5.13}$$

Мы показали зависимость функций $a(\zeta, k)$ и $b(\zeta, k)$ от обеих переменных ζ и k, так как эти функции определены на римановой поверхности функции $k = \sqrt{\zeta^2 - 1}$. Такую же зависимость мы

указывали для данных рассеяния в случае прямоугольной потенциальной ямы, но в том случае внимательная проверка показывает, что $R(k, \zeta) = b(k, \zeta)/a(k, \zeta) = \tilde{R}(k, \zeta^2)$.

Вронскиан (2.3.15) шрёдингеровской задачи на собственные значения можно обобщить на случай системы первого порядка (2.5.5) следующим образом:

$$W(V_1, V_2) = \det \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5.14}$$

где $V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ и $V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}$ — любые два решения (2.5.2), соответствующие одному и тому же значению ζ.

Поскольку $|u(+\infty)| = |u(-\infty)|$, можно при помощи вронскиана (2.5.14) показать, что $|a(k, \zeta)|^2 - |b(k, \zeta)|^2 = 1$, таким же способом, как это делалось для уравнения Шрёдингера.

У этой задачи есть две новые черты. Во-первых, здесь мы имеем дело с двумя уравнениями первого порядка, а не с одним уравнением второго порядка, и, во-вторых, в случае $u(x) = \operatorname{th} x$ мы сталкиваемся с ситуацией, когда потенциал не стремится к нулю при $|x| \to \infty$. В этой книге мы не будем подробнее изучать такие потенциалы, которые не стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, но вместо этого рассмотрим первое из этих возможных обобщений. Если случай с нулевым на бесконечности потенциалом разобран, то обобщение результатов на асимптотически ненулевые потенциалы представляет уже не принципиальную, а чисто техническую проблему.

Наиболее естественное обобщение состоит в том, чтобы заменить задачу на собственные значения для уравнения Шрёдингера второго порядка задачей первого порядка на собственные значения:

$$\frac{\partial}{\partial x} V_1 + ikV_1 = q(x) V_2, \tag{2.5.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_2 - ikV_2 = r(x) V_1. \tag{2.5.16}$$

Уравнение (2.5.5) является частным случаем этой задачи при $q = -r = iu$. Заметим также, что при $r = -1$ мы возвращаемся к задаче Шрёдингера для V_2:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 + q(x)\right) V_2(x, k) = 0. \tag{2.5.17}$$

Функции V_1 и V_2 зависят от переменных x и k, но для удобства обозначений мы не будет указывать в дальнейшем эту зависимость, кроме особых случаев, когда это нужно будет сделать для большей ясности. Поскольку эта система впервые была проанализирована в самом общем виде Захаровым и Шабатом [1972] и Абло-

вицем, Каупом, Ньюэллом и Сигуром [1974], то в дальнейшем мы будем ее называть системой ЗШ—АКНС. На бесконечности система описывается свободными уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x} V_1 + ikV_1 = 0, \tag{2.5.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_2 - ikV_2 = 0, \tag{2.5.19}$$

имеющими общее решение

$$V_1 = ae^{-ikx}, \tag{2.5.20}$$

$$V_2 = be^{ikx}. \tag{2.5.21}$$

Для общего случая, включающего два неизвестных потенциала q и r, нужно обязательно задать две волновые функции, определенные специфическим асимптотическим поведением. Можно построить решения ${}_k\varphi$ и ${}_k\bar{\varphi}$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & x \to -\infty, \qquad (2.5.22) \\ \begin{bmatrix} ae^{-ikx} \\ be^{ikx} \end{bmatrix} & x \to +\infty \qquad (2.5.23) \end{cases}$$

и

$$\bar{\varphi}(x, k) \sim \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{ikx} & x \to -\infty, \qquad (2.5.24) \\ \begin{bmatrix} \bar{b}e^{-ikx} \\ -\bar{a}e^{ikx} \end{bmatrix} & x \to +\infty, \qquad (2.5.25) \end{cases}$$

где функции a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ отличаются от аналогично обозначенных функций разд. 3 и 4.

Попытаемся несколько приподнять завесу таинственности над задачей рассеяния (2.5.15)—(2.5.16), решая некоторые простые иллюстративные примеры, так же, как мы это делали в двух последних разделах. Рассмотрим два специальных случая: (i) потенциал в форме прямоугольной ямы и (ii) потенциал $q(x) = -r(x) = -2\,\mathrm{sech}\,2x$.

2.5.1. Потенциал в форме прямоугольной ямы

$$q(x) = -r(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \gamma, \\ -Q_0, & |x| \leqslant \gamma. \end{cases} \tag{2.5.26}$$

Для потенциала в виде прямоугольной ямы (2.5.26) система ЗШ—АКНС (2.5.15)—(2.5.16) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}+ik & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx}-ik \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ для } |x|>\gamma, \tag{2.5.27}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}+ik & Q_0 \\ -Q_0 & \frac{d}{dx}-ik \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ для } |x|\leqslant\gamma, \tag{2.5.28}$$

что аналогично (2.5.8).

Запишем решение в виде

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{cases} \begin{bmatrix} Ae^{-ikx} \\ Be^{ikx} \end{bmatrix}, & x\geqslant\gamma, \qquad (2.5.29) \\ \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k-\zeta}{iQ_0} \end{bmatrix}e^{-i\zeta x}+\beta\begin{bmatrix} \frac{k-\zeta}{iQ_0} \\ 1 \end{bmatrix}e^{i\zeta x}, & |x|\leqslant\gamma, \qquad (2.5.30) \\ \begin{bmatrix} Ce^{-ikx} \\ De^{ikx} \end{bmatrix}, & x\leqslant-\gamma, \qquad (2.5.31) \end{cases}$$

где $\zeta^2=k^2+Q_0^2$.

Требование непрерывности при $x=\pm\gamma$ приводит к условиям

$$e^{-ik\gamma}A=\alpha e^{-i\zeta\gamma}+\frac{i(\zeta-k)}{Q_0}e^{i\zeta\gamma}\beta, \tag{2.5.32}$$

$$e^{ik\gamma}B=\alpha\frac{i(\zeta-k)}{Q_0}e^{-i\zeta\gamma}+e^{i\zeta\gamma}\beta, \tag{2.5.33}$$

$$e^{ik\xi}C=\alpha e^{i\zeta\gamma}+i\frac{(\zeta-k)}{Q_0}e^{-i\zeta\gamma}\beta, \tag{2.5.34}$$

$$e^{-ik\zeta}D=\alpha\frac{i(\zeta-k)}{Q_0}e^{i\zeta\gamma}+e^{-i\zeta\gamma}\beta. \tag{2.5.35}$$

Если $C=1$, $D=0$, то из (2.5.34), (2.5.35) мы получаем

$$\alpha=e^{ik\gamma-i\zeta\gamma}\left[1+\left(\frac{\zeta-k}{Q_0}\right)^2\right]^{-1}, \tag{2.5.36}$$

$$\beta=-e^{ik\gamma+i\zeta\gamma}\left[\frac{i(\zeta-k)}{Q_0\left[1+\left(\frac{\zeta-k}{Q_0}\right)^2\right]}\right], \tag{2.5.37}$$

а из (2.5.32), (2.5.33)

$$a(k,\ \zeta)=e^{2ik\gamma}\left[\cos 2\zeta\gamma-\frac{2k}{\zeta}\sin 2\zeta\gamma\right], \tag{2.5.38}$$

$$b(k,\ \zeta)=\frac{Q_0}{\zeta}\sin 2\zeta\gamma. \tag{2.5.39}$$

Если $C = 0$, $D = -1$,

$$\alpha = \frac{1(\zeta - k)\, e^{-i\zeta\gamma - ik\gamma}}{Q_0\left(1 + \left(\frac{\zeta - k}{Q_0}\right)^2\right)}, \tag{2.5.40}$$

$$\beta = -e^{-ik\gamma + i\zeta\gamma}\left[1 + \left(\frac{\zeta - k}{Q_0}\right)^2\right]^{-1}, \tag{2.5.41}$$

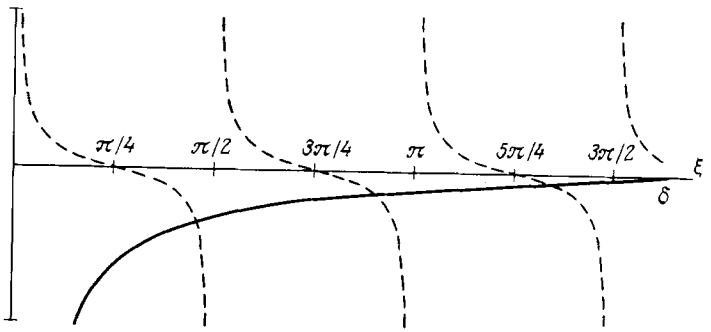


Рис. 2.11. $\delta = 13\pi/8$.

то из (2.5.32), (2.5.33) получаем

$$\bar{a}(k, \zeta) = e^{2ik\gamma}\left[\cos 2\zeta\gamma - \frac{2k}{\zeta}\sin 2\zeta\gamma\right] = (a(k^*, \zeta^*))^*, \tag{2.5.42}$$

$$\bar{b}(k, \zeta) = \frac{Q_0}{\zeta}\sin 2\zeta\gamma = (b(k^*, \zeta^*))^*. \tag{2.5.43}$$

По аналогии с уравнением Шрёдингера мы можем убедиться, что существует два случая, в которых могут встретиться связанные состояния. Либо нули функции $a(k, \zeta)$ лежат на положительной мнимой полуоси k, либо нули функции $\bar{a}(k, \bar{\zeta})$ лежат на отрицательной мнимой полуоси k. Поскольку $\bar{a}(k, \bar{\zeta}) = (a(k^*, \zeta^*))^*$, в этом случае нам достаточно рассматривать только функцию $a(k, \zeta)$.

Должен существовать нуль функции $a(k, \zeta)$ при $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$ и ζ вещественное), если

$$\operatorname{ctg} 2\zeta\gamma = -\frac{\varkappa}{\zeta};\ \zeta^2 = Q_0^2 - \varkappa^2 \geqslant 0. \tag{2.5.44}$$

Если обозначить $\zeta\gamma = \xi$, то уравнение (2.5.44) можно записать как уравнение от ξ, по аналогии с (2.3.65):

$$\operatorname{ctg} 2\xi = -(\delta^2 - \xi^2)^{1/2}/\xi. \tag{2.5.45}$$

Значения ξ должны удовлетворять неравенству $\xi \leqslant \delta$, где $\delta = \gamma Q_0$. Графический анализ уравнения (2.5.45) можно проделать примерно так же, как это было сделано для уравнения (2.3.66). На рис. 2.11 показано, что если $N\pi/2 \leqslant (\delta - \pi)/4 \leqslant (N + 1)\pi/2$, то существует $N + 1$ корней или связанных состояний.

В качестве специального примера рассмотрим потенциал

$$q(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{3\pi}{8}, \\ -\sqrt{2}, & |x| \leqslant \frac{3\pi}{8}, \end{cases} \tag{2.5.46}$$

для которого существует единственное связанное состояние при $k = i$ с волновой функцией связанного состояния

$$\varphi(x, i) = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}, & x \geqslant \frac{3\pi}{8}, \\ \sqrt{2} e^{-3\pi/8} \begin{bmatrix} \sin(x + 5\pi/8) \\ \sin(x + 3\pi/8) \end{bmatrix}, & |x| \leqslant \frac{3\pi}{8}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x}, & x < -\frac{3\pi}{8}. \end{cases} \tag{2.5.47}$$

Если $\chi(x)$ — волновая функция связанного состояния системы ЗШ—АКНС, удобно ввести нормирующую константу C, определенную соотношением

$$C^{-1} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1 \chi_2 \, dx. \tag{2.5.48}$$

Заметим, что она не обязана быть не только положительной, но даже вещественной, и она не связана с квантовомеханической вероятностью нахождения частицы со специфическими спиновыми свойствами в различных положениях. В примере (2.5.47) нормирующая константа определяется равенством $C^{-1} = (1 + 3\pi/4\sqrt{2}) \exp(-3\pi/4)$.

2.5.2. Потенциал $q = -r = -2 \operatorname{sech} 2x$

Для того чтобы решить систему в случае потенциала $q = -2 \operatorname{sech} 2x$, можно воспользоваться техникой, аналогичной методу разложения. Определим оператор L_+ таким образом:

$$L_+ = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} - \operatorname{th} 2x & -\operatorname{sech} 2x \\ \operatorname{sech} 2x & \frac{d}{dx} - \operatorname{th} 2x \end{bmatrix}. \tag{2.5.49}$$

Легко показать, что ${}_k v = L_+ ({}_k V)$ является решением системы ЗШ—АКНС:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} + ik & 2 \operatorname{sech} 2x \\ -2 \operatorname{sech} 2x & \frac{d}{dx} - ik \end{bmatrix} v(x, k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5.50}$$

если ${}_kV$ является решением свободной системы

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} + ik & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} - ik \end{bmatrix} V(x, k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5.51}$$

Поэтому общее решение (2.5.50) имеет вид

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(ik + \operatorname{th} 2x) e^{-ikx} - D(\operatorname{sech} 2x) e^{ikx} \\ C(\operatorname{sech} 2x) e^{-ikx} + D(ik - \operatorname{th} 2x) e^{ikx} \end{bmatrix}. \tag{2.5.52}$$

В частности, мы получим решения для ${}_k\varphi$ и ${}_k\bar{\varphi}$ в виде

$$\varphi(x, k) = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{th} 2x + ik}{ik - 1} \\ -\frac{\operatorname{sech} 2x}{ik - 1} \end{bmatrix} e^{-ikx}, \tag{2.5.53}$$

$$\bar{\varphi}(x, k) = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{sech} 2x}{1 + ik} \\ \frac{\operatorname{th} 2x - ik}{1 + ik} \end{bmatrix} e^{ikx}, \tag{2.5.54}$$

из которых можно определить a, b, $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$a(k) = \left(\frac{1 + ik}{ik - 1}\right), \quad b(k) = 0, \tag{2.5.55}$$

$$\bar{a}(k) = \left(\frac{ik - 1}{ik + 1}\right), \quad \bar{b}(k) = 0. \tag{2.5.56}$$

Численное моделирование волнового пакета, падающего на потенциал $q(x) = -2 \operatorname{sech} 2x$, покажет близкую аналогию с рисунками 2.8—2.10. Существует связанное состояние при $k = i$ с соответствующей волновой функцией

$$\varphi(x, i) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, i) \\ \varphi_2(x, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-x}}{2} \\ \frac{e^{x}}{2} \end{bmatrix} \operatorname{sech} 2x. \tag{2.5.57}$$

Кроме того, состояние φ, нормированное в соответствии с (2.5.48), представляет собой функцию $\tilde{\varphi}$ с асимптотическим поведением $\tilde{\varphi}(x, i) \sim \sqrt{C}\, e^{x}$ при $x \to -\infty$, где C определено соотношением

$$C^{-1} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, i) \varphi_2(x, i)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 2x = \frac{1}{2}. \tag{2.5.58}$$

Существуют также связанные состояния, соответствующие нулям функции $\bar{a}(k)$, расположенным на отрицательной мнимой полу-

оси. В этом случае $k = -i$, и соответствующая волновая функция имеет вид

$$\bar{\varphi}(x, -i) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(x, i) \\ \bar{\varphi}_2(x, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{x}}{2} \\ -\frac{e^{-x}}{2} \end{bmatrix} \operatorname{sech} 2x \qquad (2.5.59)$$

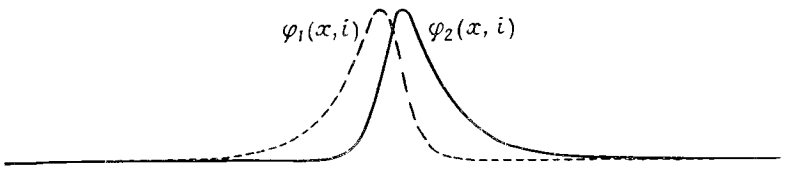


Рис. 2.12.

с нормирующей константой C, определяемой из $\bar{C}^{-1} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}$.

На рис. 2.12 показаны две компоненты волновой функции $\varphi(x, i)$. Как мы видели в случае уравнения Шрёдингера, нормирующая константа представляет существенную часть данных рассеяния, если мы хотим реконструировать потенциал единственным образом.

В этой главе мы сделали попытку несколько развеять те опасения, которые мог бы испытывать читатель при переходе к последующим, более строгим главам. Кроме того, мы надеемся, что располагать запасом примеров, с которыми можно соотнести абстрактные результаты, будет полезно и приведет к более глубокому пониманию. Пока что было решено совсем мало математических проблем, мы попытались только определить те ограничения на потенциалы, которые должны быть введены для того, чтобы можно было получить корректно определенные преобразования рассеяния. Теперь у читателя должно быть много вопросов, и мы надеемся, что следующие главы дадут ответы хотя бы на некоторые из них. Мы надеемся, кроме того, что эти главы достаточно вдохновят и вооружат читателя для того, чтобы он мог двигаться дальше и строить собственные решения.

2.6. Примечания

Раздел 2.1

Приложение метода обратной задачи рассеяния к проблеме дистанционной регистрации обсуждается в работе Миттры [1973].

Техника сканирования, развитая для рентгеновских лучей, описана в статье Смита и др. [1977].

Утверждение об обратимости преобразования $\mathcal{F}$ на $A(\mathbb{R})$ является чрезмерным упрощением, так как прообраз элемента пространства $A(\mathbb{R})$ не обязан принадлежать пространству $A(\mathbb{R})$. Лучше определить образ $A(\mathbb{R})$ как новое пространство $\tilde{A}(\mathbb{R})$, на котором определено преобразование $\mathcal{F}^{-1}$. Для того чтобы уравнения (2.2.11) и (2.2.12) были справедливы, потребуем, чтобы из условия $B \in \tilde{A}(\mathbb{R})$ следовало $\exp(ikx) B \in \tilde{A}(\mathbb{R})$.

Предположение, что функция $q^t(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2.1.19), необходимо, поскольку, вопреки интуиции, из абсолютной интегрируемости функции не следует, что она должна стремиться к нулю на бесконечности.

Очень хороший обзор прямых и обратных задач можно найти в статье Келлера [1967].

Раздел 2.2

Этот раздел основывается на работе Келлера, Кея и Шмойса [1956].

Раздел 2.3

Предположение, что $\psi(x) \to 0$ при $x \to \infty$, следующее за уравнением (2.3.10), необходимо, так как это не следует из свойств интегрируемости волновой функции. Мы вводим условие $\psi(\pm\infty) = 0$ для того, чтобы оператор H был корректно определен. Эволюционный оператор $U = \exp(-iHt)$ будет, таким образом, унитарным на области определения оператора H, и он может быть продолжен на все пространство $L^2(\mathbb{R})$ с сохранением нормы.

Непрерывная часть спектра оператора L (уравнение (2.3.22)) не существует, если мы будем требовать, чтобы собственные функции удовлетворяли условию квадратичной интегрируемости: она состоит из обобщенных собственных значений, которые возникают при отказе от этого условия.

С математической точки зрения непрерывность производной требуется для того, чтобы обеспечить самосопряженность граничных условий для оператора $H = -d^2/dx^2 + V(x)$.

Раздел 2.4

Метод разложения на множители описан в статье Инфельда и Халла [1951].

Полезное собрание статей по преобразованиям Бэклунда издано под редакцией Миуры [1976].

2.7. Задачи

1. Определим функцию $f(x)$ выражением

$f(x) = \sqrt{2\pi}\,(1 - |x|)$ для $|x| \leqslant 1$ и 0 во всех остальных случаях.

Показать, что

$$(Ff)(k) = \frac{2}{k^2}(1 - \cos k),$$

и, следовательно, что

$$F^{-1}(2k^{-2}(1 - \cos k)) = f(x).$$

Вывести отсюда, что F^{-1} не отображает $A(\mathbb{R})$ на себя.

2. Показать, что выражение

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - n^2)\, n^4\right)$$

определяет бесконечно дифференцируемую и абсолютно интегрируемую функцию. Показать, что

$$F(N^2) \geqslant (2\pi)^{-1/2} \text{ для всех } N \in Z^+,$$

и вывести отсюда, что $F(x) \not\to 0$ при $x \to \infty$.

3. Частица колеблется в одномерной симметричной потенциальной яме $V(x) = V(-x)$. Найти потенциал $V(x)$, если известен период колебаний $T(E)$ для частицы с энергией E.

4. Определить потенциал, задающий следующее сечение рассеяния:

$$\sigma(\theta) = \frac{e^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)}.$$

5. Показать, что уравнение Шрёдингера

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - x^2\right)\psi = 0$$

может быть записано в виде произведения

$$L_+ L_- \psi = \lambda\psi,$$

где λ и $L_\pm$ определяются таким образом:

$$\lambda = \frac{1}{2}(k^2 - 1), \quad L_\pm = \left(x \mp \frac{d}{dx}\right)\Big/\sqrt{2}.$$

Показать, что при обычном скалярном произведении в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ имеет место соотношение $L_+ = L_-^+$ и что операторы $L_\pm$ удовлетворяют коммутационному соотношению $[L_-, L_+] = 1$.

Если ${}_\lambda\varphi$ — квадратично интегрируемая нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ, показать, что

(i) $\lambda = \|L_-({}_\lambda\varphi)\|^2$,

(ii) $L_-({}_\lambda\varphi) = \sqrt{\lambda}\,({}_{\lambda-1}\varphi)$,

(iii) $L_+({}_\lambda\varphi) = \sqrt{\lambda+1}\,({}_{\lambda+1}\varphi)$.

Из (i) и (ii) вывести, что собственные значения суть $\lambda_n = n$ (целые) и что соответствующие собственные функции ${}_n\varphi$ даются формулой

$${}_n\varphi = (L_+)^n\,({}_0\varphi)\,(\sqrt{n!})^{-1},$$

где ${}_0\varphi$ удовлетворяет уравнению $L_-({}_0\varphi) = 0$ и имеет вид

$${}_0\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

6. Показать, что уравнение Шрёдингера с потенциалом

$${}_aV(x) = \frac{2}{(x+a)^2}$$

может быть точно решено методом разложения с функцией $u(x)$, выбранной в виде

$$u(x) = \frac{1}{x+a}.$$

Использовать этот результат для получения преобразования Бэклунда потенциала ${}_aV$.

7. Использовать результат задачи 6 для определения данных рассеяния $a(k)$ и $b(k)$ для потенциала

$$V(x) = \frac{2}{1+|x|^2}.$$

8. Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 + W(x)\right]\psi = 0,$$

где $W(x)$ — потенциал ступенчатой формы:

$$W(x) = \begin{cases} -2\ \operatorname{sech}^2 x, & x \leqslant 0, \\ -2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть ψ — волновая функция со следующим асимптотическим поведением:

$$\psi \sim \begin{cases} \exp(ik'x), & x \to +\infty \\ a(k,\ k')\exp(ikx) + b(k,\ k')\exp(-ikx), & x \to -\infty, \end{cases}$$

причем k и k' связаны соотношением $(k')^2 = k^2 + 2$. Определить функции $a(k, k')$ и $b(k, k')$.

9. Решить систему АКНС с $q = -r = W$, где W — ступенчатый потенциал вида

$$W(x) = \begin{cases} -2, & x \geqslant 0, \\ -2\operatorname{sech} 2x, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Определить данные рассеяния для этой задачи.

3. УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

3.1. Уравнение Кортевега—де Фриза и преобразования Бэклунда

В 1967 году Гарднер, Грин, Крускал и Миура в удивительно краткой и оригинальной статье в журнале Physical Review Letters нашли точное решение уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) на вещественной оси

$$q_t + \alpha q q_x + q_{xxx} = 0 \tag{3.1.1}$$

в классе функций, достаточно быстро стремящихся к конечному пределу при $|x| \to \infty$. В своей работе они полагали $\alpha = -6$, но простым изменением масштаба q: $q \to -\alpha q/6$ можно сделать α любым удобным числом. Эта статья явилась кульминацией исследований этих авторов о свойствах уравнения КдФ (Миура [1968], Миура и др. [1968], Су и Гарднер [1969], Крускал и др. [1970], Гарднер [1971], Гарднер и др. [1974]). В этих статьях выводятся многие свойства уравнения КдФ, которые, как теперь известно, характерны для целого класса разрешимых уравнений в частных производных. (См. замечание к гл. 3.1.1.)

Они показали, например, что уравнение КдФ на вещественной прямой имеет бесконечное число законов сохранения, которые мы подробно обсудим в разд. 3.5. Миура, исследуя сохраняющиеся плотности для уравнения КдФ и соответствующее бесконечное множество для модифицированного уравнения КдФ (мКдФ)

$$v_t - \beta v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \tag{3.1.2}$$

нашел преобразование, связывающее решения двух уравнений (Миура [1968]):

$$q = \frac{1}{\alpha}\left(-\beta v^2 + \varepsilon (6\beta)^{1/2} v_x\right), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{3.1.3}$$

Подстановка (3.1.3) в (3.1.1) показывает, что

$$q_t + \alpha q q_x + q_{xxx} \equiv \frac{1}{\alpha}\left(-2\beta v + \varepsilon (6\beta)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t + \beta v^2 v_x + v_{xxx}). \tag{3.1.4}$$

Ясно, что если v является решением уравнения (3.1.2), то q, определенное при помощи (3.1.3), является решением уравнения КдФ (3.1.1). Преобразование (3.1.3) представляет собой половину

преобразования Бэклунда, которое в общем случае определяет соответствие (а не отображение) между решениями одного и того же уравнения или двух различных уравнений. Другую половину преобразования можно получить, повторяя подстановку (3.1.3) в (3.1.2) до тех пор, пока не исключатся все производные функции v по x. Полученное таким образом полное преобразование Бэклунда состоит из пары дифференциальных уравнений в частных производных:

$$v_x = \frac{\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}(aq + \beta v^2),$$

$$v_t = -\frac{\alpha\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}\left(\frac{1}{3}v^2\beta q + q_{xx} + \left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2}\varepsilon v q_x + \frac{\alpha q^2}{3}\right). \quad (3.1.5)$$

В гл. 6 приводится полное исследование преобразований Бэклунда и их связи с точно решаемыми уравнениями системы ЗШ—АКНС. Здесь важно заметить, что условия полной интегрируемости уравнений (3.1.5), т. е. $v_{xt} = v_{tx}$, удовлетворяются, если q является решением уравнения КдФ (3.1.1).

Прежде чем продемонстрировать это, приведем преобразование (3.1.5) к более общему виду, используя инвариантность уравнения (3.1.1) относительно преобразования Галилея:

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha\lambda t, \\ t' &= t, \\ q' &= q + \lambda. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Здесь λ — любое вещественное число. Эта симметрия уравнения КдФ, примененная к (3.1.5), позволяет обобщить преобразования Бэклунда, включив в них произвольный параметр λ. Уравнения (3.1.5) приобретают вид

$$v_x = \frac{\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}(\alpha(q-\lambda) + \beta v^2), \quad (3.1.7)$$

$$v_t = \frac{-\alpha\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}\left(\frac{1}{3}(q+2\lambda)(\alpha(q-\lambda) + \beta v^2) + q_{xx} + \left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2}\varepsilon v q_x\right). \quad (3.1.8)$$

Здесь в обозначениях переменных штрихи опущены. Условие полной интегрируемости уравнений (3.1.7), (3.1.8) требует, чтобы $v_{xt} = v_{tx}$. Несложные вычисления с использованием (3.1.7), (3.1.8) показывают, что

$$v_{xt} = \frac{\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}\left(\alpha q_t - \left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2}\varepsilon v\alpha\left(\frac{1}{3}(q+2\lambda)(\alpha(q-\lambda) + \beta v^2) + q_{xx} + \left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2} v q_x \varepsilon\right)\right),$$

$$v_{tx} = \frac{-\alpha\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}\left(q_x(\alpha(q-\lambda)+\beta v^2)+\frac{\alpha}{3}(q+2\lambda)q_x+q_{xxx}+\right.$$

$$+\left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2}\varepsilon v q_{xx}+\frac{\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}}(\alpha(q-\lambda)+\beta v^2)\left(\frac{2\beta}{3}v(q+2\lambda)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{2\beta}{3}\right)^{1/2}q_x\varepsilon\right)\right). \qquad (3.1.9)$$

Заметим, что когда мы берем частную производную по x от функций, зависящих от x, $\partial/\partial x$ на самом деле является полной производной, т. е. если обозначить этот оператор $\frac{\partial^\dagger}{\partial x}$, то для данного примера будет выполняться равенство

$$\frac{\partial^\dagger}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}+q_x\frac{\partial}{\partial q}+q_{xx}\frac{\partial}{\partial q_x}+q_{xxx}\frac{\partial}{\partial q_{xx}}+v_x\frac{\partial}{\partial v}. \qquad (3.1.10)$$

Сравнивая два выражения в (3.1.9), мы находим, что система (3.1.7), (3.1.8) вполне интегрируема, если q является решением уравнения КдФ (3.1.1). Преобразование уравнения КдФ в такое уравнение, для которого функция v является решением, можно получить, используя уравнение (3.1.7) для исключения q из (3.1.8). В результате получится уравнение

$$v_t+\alpha\lambda v_x-\beta v^2 v_x+v_{xxx}=0, \qquad (3.1.11)$$

которое просто связано с уравнением мКдФ и совпадает с ним при $\lambda=0$. Таким образом, преобразование Бэклунда (3.1.7), (3.1.8) связывает уравнение КдФ с однопараметрическим семейством уравнений мКдФ (3.1.11) (α и β предполагаются фиксированными). Мы полагали α и β произвольными в этом тексте, так что читателю будет легче сравнивать исследования разных авторов, встречающиеся в литературе.

Если предположить, что q — известное решение, то уравнения (3.1.7), (3.1.8) представляют собой примеры уравнений Риккати. Это означает, что они являются уравнениями первого порядка с квадратичной нелинейностью. В частности, они могут быть линеаризованы изменением зависимой переменной. Положим в уравнениях (3.1.7), (3.1.8)

$$v=\gamma\frac{\psi_x}{\psi} \qquad (3.1.12)$$

и выберем γ так, чтобы квадратичный член в (3.1.7) исчез. Оказывается, что

$$\gamma=-\varepsilon\left(\frac{6}{\beta}\right)^{1/2}. \qquad (3.1.13)$$

Уравнение (3.1.8) превратится в уравнение

$$\psi G_x - \psi_x G = 0,$$

где

$$G \equiv \psi_t - \frac{\alpha}{6} q_x \psi + \frac{\alpha}{3} (q + 2\lambda) \psi_x. \tag{3.1.14}$$

После интегрирования уравнения (3.1.14) преобразованные уравнения (3.1.7), (3.1.8) можно записать в виде

$$\psi_{xx} + \frac{\alpha}{6} q\psi = \frac{\alpha k^2}{6} \psi, \tag{3.1.15}$$

$$\psi_t + \frac{\alpha}{3} (q + 2k^2) \psi_x + \left(f(k, t) - \frac{\alpha}{6} q_x \right) \psi = 0, \tag{3.1.16}$$

где $k^2 = \lambda$ и f — произвольная функция от переменных t и k.

Уравнение (3.1.15) является уравнением Шрёдингера, о котором шла речь в разд. 2.4! Однако теперь уравнение (3.1.15) — это уравнение в частных производных, хотя переменная t появляется здесь только в качестве параметра. Для того, чтобы продолжить сравнение с содержанием разд. 2.4, используем инвариантность уравнения (3.1.11) относительно замены $v \to -v$. Если применить эту тривиальную симметрию к уравнениям (3.1.7), (3.1.8) и определить Q как соответствующее решение уравнения КдФ, то

$$-v_x = \frac{\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}} (\alpha (Q - \lambda) + \beta v^2), \tag{3.1.17}$$

$$v_t = \frac{\alpha\varepsilon}{(6\beta)^{1/2}} \left(\frac{1}{3} (Q + 2\lambda) (\alpha (Q - \lambda) + \beta v^2) + Q_{xx} - \left(\frac{2\beta}{3} \right)^{1/2} \varepsilon v Q_x \right). \tag{3.1.18}$$

Из (3.1.7) и (3.1.17) немедленно получается, что

$$v_x = \frac{\alpha\varepsilon}{2 (6\beta)^{1/2}} (q - Q). \tag{3.1.19}$$

Если мы введем функции

$$w = \frac{1}{2} \int_{-w}^{x} q(y)\, dy + \mu, \quad W = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} Q(y)\, dy - \mu$$

с

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(\frac{3\beta}{2} \right)^{1/2} v(-\infty), \tag{3.1.20}$$

то получим из (3.1.19) и (3.1.7), (3.1.8) (или из (3.1.17), (3.1.18)) пару уравнений в частных производных, связывающую два решения уравнения КдФ:

$$(W + w)_x = k^2 - \frac{\alpha}{6}(W - w)^2, \tag{3.1.21}$$

$$(W - w)_t = \frac{\alpha^2}{6}(W - w)^2(W - w)_x - \alpha k^2 (W - w)_x - (W - w)_{xxx}. \tag{3.1.22}$$

При получении (3.1.22) мы использовали (3.1.21), так что мы можем записать окончательный вид уравнения в симметричной форме. Уравнения (3.1.21), (3.1.22) представляют собой автопреобразование Бэклунда для уравнения КдФ (3.1.1). (См. замечание 1.2. к гл. 3.) Это значит, что оно преобразует одно решение этого уравнения в другое решение того же самого уравнения. Впервые его вывели Уолквист и Эстабрук [1973]. Уравнение (3.1.21) совпадает с уравнением (2.4.33) при $k = ik$ и $\alpha = -6$. Использование преобразования (3.1.21), (3.1.22) при получении решений уравнения КдФ исследуется в задачах в конце главы.

Завершая этот раздел, обратимся к уравнениям (3.1.15), (3.1.16). Исключая из этих уравнений q, найдем, что ψ является решением уравнения

$$\psi\psi_t + \alpha k^2 \psi\psi_x - 3\psi_x\psi_{xx} + f\psi^2 + \psi\psi_{xxx} = 0. \tag{3.1.23}$$

Таким образом, система уравнений (3.1.15), (3.1.16) является преобразованием Бэклунда между уравнением КдФ (3.1.1) и уравнением (3.1.23). Этот факт обычно не подчеркивается в литературе.

Из уравнений (3.1.11) и (3.1.19) видно, что

$$Q - q = \frac{12}{\alpha}(\log\psi)_{xx}. \tag{3.1.24}$$

Поскольку $q = 0$ является решением уравнения КдФ, уравнение (3.1.24) можно использовать для конструирования дальнейших решений уравнения КдФ рекуррентным методом. Все они будут иметь следующий вид:

$$q = \frac{12}{\alpha}(\log\varphi)_{xx}. \tag{3.1.25}$$

Легко показать, что φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi_{xt} - \varphi_x\varphi_t + 3\varphi_{2x}^2 + \varphi\varphi_{4x} - 4\varphi_x\varphi_{3x} = 0, \tag{3.1.26}$$

если подставить (3.1.25) в уравнение (3.1.1). Уравнение (3.1.26) было выведено Хиротой [1971] при помощи преобразования (3.1.25). Проведенный им анализ этого уравнения приводит к подмножеству решений уравнения КдФ, состоящему из так называ-

емых N-солитонных решений, как мы уже видели в гл. 1. Эти решения возникают как самая важная компонента общего решения, выведенного Гарднером и др. [1967]. В частности, отметим, что если $q = 0$ (см. 3.1.15) и (2.4.6)), то решение Q, порожденное преобразованием Бэклунда, обязано быть безотражательным потенциалом sech^2, о которой шла речь в разд. 2.4.

В этом разделе мы попытались показать взаимосвязь симметрий и преобразований Бэклунда между уравнением КдФ и некоторыми другими нелинейными уравнениями. Мы хотели бы подчеркнуть тот факт, что (3.1.7), (3.1.8) и связанные с ними уравнения, в частности (3.1.15) и (3.1.16), интерпретируются как преобразования Бэклунда.

3.2. Иерархия уравнений КдФ и изоспектральное уравнение Шрёдингера

Если определить линейные операторы

$$\mathbf{L} \equiv -\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{6} q\right), \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{A}_f \equiv -\left(4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + q\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{2} q_x + f(k, t)\right), \tag{3.2.2}$$

затем подставить k^2 из (3.1.15) в (3.1.16) и сделать масштабное преобразование переменной k, то уравнения (3.1.15), (3.1.16) можно будет переписать как линейные операторные уравнения:

$$\mathbf{L}\psi = k^2\psi, \tag{3.2.3}$$

$$\psi_t = \mathbf{A}_f\psi. \tag{3.2.4}$$

Индекс f в обозначении оператора $\mathbf{A}_f$ служит для того, чтобы подчеркнуть, что этот оператор не единственный. Он определяется с точностью до произвольной функции $f(k, t)$ и, таким образом, зависит от выбора конкретной собственной функции оператора $\mathbf{L}$ в уравнении (3.2.3).

В разд. 3.1 мы установили фундаментальный факт, что условия полной интегрируемости преобразования Бэклунда (3.1.15), (3.1.16) удовлетворялись, если функция q являлась решением уравнения КдФ (3.1.1). Там было показано, что $\lambda = k^2$ не зависит от времени, но все-таки передокажем этот результат из операторных уравнений (3.2.3), (3.2.4) в предположении, что эта система вполне интегрируема. Исходя из этого предположения, можно записать

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{L}\psi) = \mathbf{L}_t\psi + \mathbf{L}\psi_t, \tag{3.2.5}$$

где $\mathbf{L}_t$ обозначает дифференцирование коэффициентов оператора $\mathbf{L}$ по переменной t. Теперь при помощи (i) дифференцирования (3.2.3) по t и (ii) подстановки ψ_t из (3.2.4) получим соответственно:

(i) $\mathbf{L}_t\psi + \mathbf{L}\psi_t = (k^2)_t\,\psi + k^2\psi_t$,

(ii) $\mathbf{L}_t\psi + \mathbf{L}\mathbf{A}_f\psi = (k^2)_t\,\psi + \mathbf{A}_f(k^2\psi)$.

Конечный результат, снова использующий (3.2.3), можно записать в виде

$$(\mathbf{L}_t - [\mathbf{A}_f,\ \mathbf{L}])\,\psi = (k^2)_t\,\psi. \tag{3.2.6}$$

Квадратные скобки в уравнении (3.2.6) обозначают коммутатор: $[\mathbf{A}_f,\ \mathbf{L}] = \mathbf{A}_f\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_f$. Прямое вычисление показывает, что $[\mathbf{A}_f,\ \mathbf{L}]$ не зависит от f и что

$$\mathbf{L}_t - [\mathbf{A}_f,\ \mathbf{L}] = 0 \tag{3.2.7}$$

является уравнением КдФ (3.1.1). Из (3.2.6) мы заключаем, что собственные значения $\lambda = k^2$ уравнения Шрёдингера (3.2.3) не зависят от времени, если $q(x,\ t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением КдФ (3.1.1).

Поскольку собственные значения уравнения (3.2.3) не зависят от времени, мы будем его называть изоспектральным уравнением Шрёдингера. Запишем $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{f=0}$. Тогда без потери общности можно считать, что нелинейное уравнение КдФ

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{A}_1,\ \mathbf{L}] \tag{3.2.8}$$

ассоциировано с линейным изоспектральным уравнением (3.2.3). Присутствие произвольной функции f соответствует тому факту, что оператор $\mathbf{A}_1$ следует определять с точностью до оператора, коммутирующего с $\mathbf{L}$. $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_1$ называются парой Лакса для уравнения КдФ.

После того, как уравнение представлено в таком виде, возникает естественный вопрос, существуют ли другие уравнения, ассоциированные с изоспектральным уравнением Шрёдингера, т. е. существуют ли такие операторы $\mathbf{A}$, которые могут заменить оператор $\mathbf{A}_1$ в уравнении (3.2.8). Лакс [1968] нашел одно такое семейство операторов; они имеют общую форму

$$\mathbf{A}_m = -c_m\left(D^{2m+1} + \sum_1^m \left(b_j D^{2j-1} + D^{2j-1}b_j\right)\right), \tag{3.2.9}$$

где $D^j = \partial^j/\partial x^j$ и b_j — функционалы от переменной q и ее производных по x. Переменная q удовлетворяет нелинейному эволюционному уравнению

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{A}_m,\ \mathbf{L}]. \tag{3.2.10}$$

Заметим, что запись оператора дифференцирования D перед b_j на самом деле означает оператор полного дифференцирования по x

(см. замечание к формуле (3.1.10)). Эти b в уравнении (3.2.9) определяются условием, состоящим в том, чтобы уравнение (3.2.10) вообще не содержало операторов D, т. е. было просто оператором умножения. Так, при $m = 0$ (3.2.10) является линейным волновым уравнением

$$q_t = -c_0 q_x. \tag{3.2.11}$$

При $m = 1$ и $c_1 = 4$ мы возвращается к уравнению КдФ (3.1.1), а при $m = 2$, $c_2 = 96$ мы получаем уравнение КдФ высшего порядка:

$$q_t + 6q_{5x} + 5\alpha^2 q^2 q_x + 20\alpha q_x q_{2x} \mp 10\alpha q q_{3x} = 0. \tag{3.2.12}$$

Семейство уравнений, порожденных формулой (3.2.9) и расположенных по возрастанию порядка и нелинейности, называется иерархией уравнений КдФ. В первых двух разделах этой главы мы видели, что важное физическое уравнение, а именно уравнение КдФ, может быть ассоциировано с *линейной* задачей на собственные значения, т. е. с изоспектральным уравнением Шрёдингера. Представленный таким образом материал выдвигает некоторое количество математических задач технического порядка и открывает несколько разных направлений для дальнейшего более глубокого исследования значимости такого соотношения. В каких линейных пространствах действует оператор $\mathbf{L}$ из уравнения (3.2.3)? Можем ли мы описать класс операторов, которые могли бы заменить оператор Шрёдингера в соотношении вида (3.2.10)? Можно ли описать все семейство нелинейных уравнений, которые могут быть ассоциированы с оператором Шрёдингера при помощи уравнения, аналогичного уравнению (3.2.10)?

В разд. 2.4 показано, что если уравнение Шрёдингера определено на вещественной прямой и мы имеем дело с рассеивающими потенциалами (т. е. с такими потенциалами $q(x)$, что $q \to 0$ при $|x| \to \infty$), которые к тому же являются безотражательными, то асимптотические данные рассеяния единственным образом определяют потенциал. Особенно важной в обратной задаче представляется роль коэффициента прохождения $a(\zeta)$. В разд. 3.1 мы заметили, что переменная t входит в (3.2.3) только как параметр, так что для фиксированного t оно эквивалентно уравнению (2.3.18). Можно ли определить единственным образом данные рассеяния для данной функции $q(x, t)$ в уравнении (3.2.3), принадлежащей к классу функций, удовлетворяющих условию $q(x, t) \to 0$ при $|x| \to \infty$? Если это так, то можно ли по данным рассеяния восстановить функцию $q(x, t)$? В этом состоит обратная задача для уравнения Шрёдингера, которая будет рассмотрена в гл. 4. Какую информацию об эволюции данных рассеяния можно извлечь из асимптотической формы эволюции данных рассеяния и из асимптотической формы эволюции линейной системы (2.3.4)?

Последние три вопроса можно задать и относительно задачи с начальными данными для уравнения КдФ. То есть, какие начальные данные и граничные условия должны быть наложены на функцию $q(x, 0)$ и ее производные по x для того, чтобы решение уравнения КдФ существовало и было единственным для всех $t > 0$? Эта задача обсуждается в разд. 3.5, а также в гл. 4. и 6.

Единственный случай, отличный от нашего и представляющий физический интерес, — задача с периодическими граничными условиями на q, $q(x + c, t) = q(x, t)$ — в этой книге не рассматривается.

Ответы на все остальные вопросы мы дадим в оставшихся разделах. Главное, что при помощи этой связи между нелинейным уравнением КдФ и линейным уравнением мы можем узнать многое о свойствах решений нелинейного уравнения. Такая связь — явление специальное, и, вообще говоря, она невозможна для произвольного нелинейного уравнения. В качестве примера можно указать уравнения Максвелла—Блоха, обсужденные в гл. 1. Фундаментальный вопрос о том, когда такая связь возможна, до сих пор является предметом активных научных исследований.

3.3. Задача рассеяния для уравнения Шредингера

В этом разделе мы займемся изучением математических свойств уравнения Шрёдингера

$$Ly = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Qy = k^2 y, \tag{3.3.1}$$

определенного на всей вещественной оси, $x \in R$, для фиксированного t, $t = t_0$. Будем рассматривать только такие функции $Q(x, t_0)$, которые суммируемы на любом интервале вида $]a, b[$, $-\infty < a, b < +\infty$ и такие, что $Q \to 0$ при $|x| \to \infty$. Такое уравнение, определенное на полуоси, исчерпывающе изучено как математиками, так и физиками. Однако между этими случаями существует ряд отличий. Многие результаты, содержащиеся в этой и следующей главах, впервые были получены в статье Фаддеева [1964]. Сравнивая уравнение (3.3.1) с выражением (3.2.1), замечаем, что мы записали здесь $Q = -\alpha q/6$ и для обозначения произвольного решения уравнения Шрёдингера использовали символ y. Мы это сделали потому, что хотим оставить символ ψ для обозначения некоторого специального класса решений, который будет введен ниже. Мы не будем использовать переменную t при записи решений уравнения (3.3.1) в этом разделе, поскольку мы имеем дело с фиксированным $t = t_0$, но будем сохранять обозначение частной производной при дифференцировании по x, чтобы не забывать о зависимости от t. Заметим, что для урав-

нения КдФ (3.1.6) наше рассмотрение охватывает случай, когда функция $Q(x, t_0)$ имеет конечный предел при $|x| \to \infty$.

Для того класса функций, который мы рассматриваем, задача о собственных значениях уравнения (3.3.1) называется задачей рассеяния. Причина в том, что, как уже было замечено в разд. 2.2, уравнение (3.3.1) можно интерпретировать как падающую плоскую волну, взаимодействующую с потенциальной ямой, определяемой функцией $Q(x, t)$. Это взаимодействие и рассеянные волны могут быть выражены в терминах некоторых фундаментальных решений, которые асимптотически (либо при $x \to +\infty$, либо при $x \to -\infty$) имеют характер плоской волны, т. е. решений для потенциала $Q(x, t_0) \equiv 0$. Это семейство решений, зависящих от параметра k, обычно называется решениями Йоста для уравнения (3.3.1); они определяются следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} e^{-ikx}\psi(x, k) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{ikx}\bar{\psi}(x, k) = 1;\\
&\lim_{x\to+\infty} e^{-ikx}\psi_x(x, k) = ik, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{ikx}\bar{\psi}_x(x, k) = -ik;\\
&\lim_{x\to-\infty} e^{-ikx}\bar{\varphi}(x, k) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\varphi(x, k) = 1;\\
&\lim_{x\to-\infty} e^{-ikx}\bar{\varphi}_x(x, k) = ik, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\varphi_x(x, k) = -ik.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Мы исследуем ниже, каким условиям должна удовлетворять функция Q для того, чтобы существовали решения Йоста. Естественно возникает вопрос, существуют ли решения Йоста для комплексных значений k. Из граничных условий (3.3.2) ясно, что вопрос о существовании решений Йоста для комплексного k связан с определением собственных функций оператора L в $L^2(R)$. Этот анализ и составляет большую часть содержания данного раздела.

Введем теперь гильбертово пространство $L^2(R)$ комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу и квадратично интегрируемых на вещественной оси. В таком пространстве скалярное произведение определяется формулой

$$\langle u, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v^*(x)\, dx, \tag{3.3.3}$$

где $u, v \in L^2(R)$. Ясно, что для вещественного значения k функции, определяемые условиями (3.3.2), вообще говоря, не принадлежат пространству $L^2(R)$. Это *обобщенные собственные функции* линейного оператора, определенного уравнением (3.3.1) и действующего на $L^2(R)$. Как мы увидим ниже, существует способ включения этих функций в формализм гильбертова пространства.

Если функция, определенная на вещественной оси, обращается в нуль при достаточно больших $|x|$, то о ней говорят, что она имеет компактный носитель. Множество функций пространства $L^2(R)$, имеющих компактный носитель, называется множеством финитных функций пространства $L^2(R)$; это множество плотно в $L^2(R)$. Рассмотрим множество функций вида $\{I,\ 0 < a < \infty\}$, определенных условием $I_a(x) = x$, если $|x| < a$, и равных нулю для всех остальных x. Тогда с любой функцией $Q(x)$ можно связать финитную функцию Q_a, определенную равенством $Q_a = Q \cdot I_a$. Многие выкладки этого и следующих двух разделов можно существенно упростить, если сначала предположить, что функция Q имеет компактный носитель $Q_a = Q \cdot I_a$, а затем устремить a к бесконечности, $a \to \infty$. Корректность этой техники будет обсуждена в разд. 6.1.

Дифференциальное выражение в левой части уравнения (3.3.1) формально является самосопряженным, поскольку функция Q вещественна. Это можно увидеть, если дважды проинтегрировать по частям с использованием формулы для скалярного произведения (3.3.3). Формально получится

$$\langle \mathbf{L}u,\ v\rangle = [uv_x - u_x v]_{-\infty}^{\infty} + \langle u,\ \mathbf{L}v\rangle. \tag{3.3.4}$$

Однако мы должны быть очень осторожны, говоря об области определения $\mathscr{D}_{\mathbf{L}}$ соответствующего самосопряженного оператора, действующего в пространстве $L^2(R)$. Ясно, что $\mathscr{D}_{\mathbf{L}}$ должно быть подпространством пространства $L^2(R)$, состоящим из тех элементов $u \in L^2(R)$, для которых $\mathbf{L}u \in L^2(R)$, и что выражение, содержащееся в квадратных скобках в (3.3.4), должно обращаться в нуль для произвольных элементов $\mathscr{D}_{\mathbf{L}}$. Таким образом, мы вводим условие абсолютной непрерывности производной u_x на любом конечном интервале для любой функции $u \in \mathscr{D}_{\mathbf{L}}$. Условие $\mathbf{L}u \in L^2(R)$ тоже налагает на функцию Q некоторые ограничения, не позволяя ей иметь слишком сильные особенности. Соответствующие условия на функцию Q естественным образом возникают из требования существования и единственности решений Йоста. Этот самосопряженный оператор можно, кроме того, определить с помощью замыкания симметрического оператора, отвечающего уравнению (3.3.1) и действующего на множестве функций $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, являющихся бесконечно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$ с компактным носителем (Като [1966]). В дальнейшем мы будем обозначать получившийся самосопряженный оператор через $\mathbf{L}$.

Стандартный метод в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, применяемый для доказательства существования и единственности решения данного дифференциального уравнения с граничными или начальными условиями, заданными в точке, состоит в том, чтобы включить эти условия в эквивалентное интегральное представление. В этом случае итерация Пикара, то

есть метод последовательных приближений, позволяет определить условия существования решения. Для уравнения (3.3.1) интегральное представление может быть получено непосредственно с использованием метода вариации постоянных. Можно действовать по-другому: ввести вспомогательные переменные $y_1 \equiv y$, $y_2 = y_x$ и превратить тем самым уравнение (3.3.1) в эквивалентную систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \mathbf{B}(k)\, Y = Q\sigma Y, \tag{3.3.5}$$

где

$$Y = (y_1,\ y_2)^T, \quad \mathbf{B}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем, поскольку функция $\exp(\mathbf{B}(k)\, x)$ аналитична по k, эквивалентная интегральная формулировка уравнения (3.3.1) при начальном или граничном условии в точке

$$Y(x_0,\ k) = Y_0(k) = \begin{pmatrix} y_{01}(k) \\ y_{02}(k) \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

будет иметь вид

$$Y(x,\ k) = e^{\mathbf{B}(k)(x_0 - x)}\, Y_0(k) + \int_{x_0}^{x} e^{\mathbf{B}(k)(v-x)}\, Q(v)\, \sigma Y(v)\, dv. \tag{3.3.7}$$

Если разложить функцию $\exp(\mathbf{B}(k)\, x)$ в степенной ряд, получим

$$e^{\mathbf{B}(k)\, x} = \mathbf{I} \cos kx + k^{-1}\mathbf{B}(k) \sin kx, \tag{3.3.8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица 2×2. Подставляя (3.3.8) в (3.3.7), придем к следующему уравнению относительно $y \equiv y_1$:

$$y(x,\ k) = \cos k(x_0 - x)\, y_{01}(k) -$$

$$- k^{-1} \sin k(x_0 - x)\, y_{02}(k) - k^{-1} \int_{x_0}^{x} Q(v) \sin k(v - x)\, y(v,\ k). \tag{3.3.9}$$

Как видно из (3.3.6), для получения интегрального представления решений Йоста нужно знать асимптотическое поведение функций и их первых производных по x. Граничные условия (3.3.2) достаточны для получения таких, например, интегральных представлений:

$$\psi(x,\ k) = e^{ikx} + k^{-1} \int_{x}^{\infty} Q(v) \sin(k(v - x))\, \psi(v,\ k)\, dv, \tag{3.3.10}$$

$$\varphi(x,\ k) = e^{-ikx} - k^{-1} \int_{-\infty}^{x} Q(v) \sin(k(v - x))\, \varphi(v,\ k)\, dv. \tag{3.3.11}$$

Конечно, существует много способов сведения уравнения (3.3.1) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. Выбор новых переменных в виде $y_1 = iky - y_x$, $y_2 \equiv -y$ имеет то преимущество, что полученная при этом система двух дифференциальных уравнений первого порядка является следующей задачей на собственные значения:

$$\mathbf{L}Y \equiv i\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -Q \\ 1 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} Y = kY. \tag{3.3.12}$$

Если заменить во второй строке оператора $\mathbf{L}$ единицу на произвольную функцию $R(x, t)$, то получится обобщение этой задачи, являющееся задачей рассеяния ЗШ—АКНС. Последняя будет исследована в гл. 6.

Используем теперь метод последовательных приближений для того, чтобы определить условия, при которых существуют решения Йоста задачи (3.3.1). Начнем с продолжения уравнений (3.3.10) и (3.3.11) на комплексную плоскость переменной k, $k = \xi + i\eta$. Тогда

$$|e^{-ikx}|\,|\sin kx| = \frac{e^{\eta x}}{2}|e^{ikx} - e^{-ikx}| \leqslant e^{\eta x}\max\{e^{-\eta x}, e^{\eta x}\},$$

так что для $x \leqslant 0$

$$|e^{-ikx}|\,|\sin kx| \leqslant e^{(\eta - |\eta|)x}. \tag{3.3.13}$$

Если взять модуль от (3.3.11) и использовать неравенство (3.3.13), получим неравенство

$$|\varphi(x, k)e^{ikx}| \leqslant 1 + |k|^{-1}\int_{-\infty}^{x} |Q(v)|\,e^{(\eta - |\eta|)(v-x)}\,|\varphi(v, k)e^{ikv}|\,dv. \tag{3.3.14}$$

Покажем теперь, что решение уравнения (3.3.11) может быть найдено в форме

$$\varphi(x, k)e^{ikx} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x, k), \tag{3.3.15}$$

где

$$h_0(x, k) = 1;$$

$$h_{j+1}(x, k) = -k^{-1}\int_{-\infty}^{x} Q(v)\,e^{-ik(v-x)}\sin k(v-x)\,h_j(v, k)\,dv,$$

если $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Итерация (3.3.14) в области $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ приводит к неравенству

$$|\varphi(x, k) e^{ikx}| \leqslant 1 + |k|^{-1} P_0(x) + \\ + \frac{1}{2!}|k|^{-2} P_0^2(x) + \cdots + \frac{1}{r!}|k|^{-r} P_0^r(x) + \cdots, \quad (3.3.16)$$

где

$$P_0(x) = \int_{\infty}^{x} |Q(v)|\, dv, \quad |h_j(x, k)| \leqslant \frac{P_0^j}{j!}(x)\, |k|^{-j}. \quad (3.3.17)$$

Формулу (3.3.16) можно получить с помощью соотношения

$$\frac{d}{dx} P_0^r(x) = r P_0^{r-1}(x)\, |Q(x)|, \quad r = 1, \ldots. \quad (3.3.18)$$

Из формулы (3.3.17) следует, что ряд в правой части (3.3.16) *мажорирует* ряд (3.3.15). Этот ряд равномерно сходится при $x \in \mathbb{R}$, если существует его формальная сумма $\exp(P_0(x) \times \times |k|^{-1})$. Достаточным условием для существования суммы является абсолютная интегрируемость функции Q на $\mathbb{R}$, т. е. $Q \in L^1(\mathbb{R})$, откуда следует, что

$$P_0(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|\, dv < \infty. \quad (3.3.19)$$

Поскольку sin и Q суммируемы на любом конечном интервале, отсюда немедленно следует, что ряд $\sum h_n$ сходится абсолютно и равномерно для $x \in \mathbb{R}$ и фиксированного k, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, и тем самым определено решение $\varphi(x, k)$ для уравнения (3.3.11). Кроме того, получается оценка

$$|\varphi(x, k) e^{ikx}| < \exp(|k|^{-1} P_0(x)), \quad k \neq 0. \quad (3.3.20)$$

Точка $k = 0$ исключается из рассмотрения, поскольку для этого случая неравенство (3.3.14) не имеет смысла. Однако из (3.3.10) и (3.3.11) можно непосредственно получить интегральные представления

$$\psi(x, 0) = 1 + \int_{x}^{\infty} (v - x) Q(v) \psi(v, 0)\, dv, \\ \varphi(x, 0) = 1 - \int_{-\infty}^{x} (v - x) Q(v) \varphi(v, 0)\, dv \quad (3.3.21)$$

решений Йоста для случая $k = 0$.

Положим

$$h_0(x) = 1,$$

$$h_{j+1}(x) = -\int_{-\infty}^{x} (v-x)\,Q(v)\,h_j(v)\,dv, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots. \tag{3.3.22}$$

Из этого рекуррентного соотношения можно вывести оценку

$$|h_j(x)| \leqslant \frac{1}{j!}(M(x))^j, \tag{3.3.23}$$

где

$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} (x-v)\,|Q(v)|\,dv.$$

Определим

$$P_j(x) = \int_{-\infty}^{x} |v|^j\,|Q(v)|\,dv, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{3.3.24}$$

Отсюда следует, что решения Йоста определены для $k = 0$, если $P_0(\infty) < \infty$, и $P_1(\infty) < \infty$, и $x < a < \infty$. Действительно, в силу неравенства

$$\left|\frac{e^{-ikx}\sin kx}{k}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1-e^{-2ikx}}{k}\right| = \left|\int_x^0 e^{-2iky}\,dy\right| < -x, \quad x \leqslant 0,\ \operatorname{Im} k > 0 \tag{3.3.25}$$

легко установить аналогичный результат при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ и $k \neq 0$:

$$|\varphi(x,\ k)\,e^{ikx} - 1| \leqslant M(x)\exp M(x), \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{3.3.26}$$

Заметим, что оценка растет экспоненциально при $x \to \infty$. Следовательно, функция $\varphi(x,\ k)\exp(ikx)$ равномерно ограничена при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ на любом интервале $x \in\ ]-\infty,\ a]$, $a < \infty$. Мы можем заключить из этого, что функция $\varphi(x,\ k)\exp(ikx)$ непрерывна при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ и аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$, поскольку этими свойствами обладают итерации. Другую оценку можно получить,

если заметить, что для функции $h(x, k) = \varphi(k, x) \exp(ikx)$ выполняется следующее неравенство:

$$|h(x, k) - 1| \leqslant x \int_{-\infty}^{x} |Q(v)|\,|h(v, k)|\,dv +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} (-v)\,|Q(v)|\,|h(v, k)|\,dv \leqslant K_1 x \int_{-\infty}^{x} (1 + |v|)\,|Q(v)|\,dv +$$

$$+ K_2 \int_{-\infty}^{0} (-v)\,|Q(v)|\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} K_3 (1 + x) \int_{-\infty}^{x} (1 + |v|)\,|Q(v)|\,dv, & x \geqslant 0, \\ K_4 \int_{-\infty}^{x} (-v)\,|Q(v)|\,dv, & x < 0. \end{cases}$$

Отсюда для $x \in \mathbb{R}$ следует неравенство

$$|h(x, k) - 1| \leqslant K_5 (1 + \max(x, 0)) \int_{-\infty}^{x} (1 + |v|)\,|Q(v)|\,dv. \tag{3.3.27}$$

Используя это и принимая во внимание «хорошее» поведение функции $h(x, k)$ вдали от $k = 0$, (3.3.20), получим

$$|\varphi(x, k) e^{ikx} - 1| \leqslant \frac{K(1 + \max(x, 0))}{(1 + |k|)} \int_{-\infty}^{x} (1 + |v|)\,|Q(v)|\,dv \tag{3.3.28}$$

(см. Фаддеев [1974] и статью Дейфта и Трубовица [1979], где был впервые выведен этот результат). Таким образом, для аналитичности функции $\varphi(x, k)$ при $\operatorname{Im} k > 0$ требуется существование $\varphi_k(x, k)$. Из (3.3.11) легко получить функцию

$$h_k(x, k) = -\int_{-\infty}^{x} Q(v) (k^{-1} \sin k(v - x)\, e^{ik(x-v)})_k\, h(v, k)\,dv -$$

$$- \int_{-\infty}^{x} Q(v) (k^{-1} \sin k(v - x)\, e^{ik(x-v)})\, h_k(v, k)\,dv, \tag{3.3.29}$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-h_{xxk} + 2i(kh_{kx} + h_x) + Qh_k = 0. \tag{3.3.30}$$

Если рассмотреть функцию $\{k^{-1}\sin k(v-x)\exp[ik(x-v)]\}_k$, легко убедиться, что

$$\{k^{-1}\sin(kx)\exp(-ikx)\}_k| = \left|\left(\int_x^0 \exp(-2iky)\,dy\right)_k\right| \leqslant x^2, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \quad x \leqslant 0. \tag{3.3.31}$$

Наконец, используя оценку (3.3.28), можно получить неравенство

$$|h_k(x,\ k)| \leqslant K_5(1 + x\max(x,\ 0)) + \int_{-\infty}^{x} (x-v)\,|Q(v)|\,|h_k(v,\ k)|\,dv, \tag{3.3.32}$$

поскольку

$$\int_{-\infty}^{x} |Q(v)|(v-x)^2\,|h(x,\ v)|\,dv \leqslant K_5(1 + x\max(x,\ 0))$$

в предположении, что $P_2(\infty) < \infty$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $P_i(\infty) < \infty$ для $i = 0, 1, 2$. Эти требования можно свести в одно условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty. \tag{3.3.33}$$

Итерация (3.3.32) приводит к заключению, что h_k равномерно ограничено для всех $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ на любой полуоси $x \leqslant a$. Следовательно, производная φ_k существует и непрерывна при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ и аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$. Кроме того, используя (3.3.11) и (3.3.27), несложно показать, что производная h_x равномерно ограничена. Эти ограничения в явном виде задаются выражениями

$$\begin{aligned} &|h_k(x,\ k)| \leqslant K(1 + x\max(x,\ 0)), && \operatorname{Im} k \geqslant 0, \\ &|h_x(x,\ k)| \leqslant \frac{K}{1+|k|}, && \operatorname{Im} k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

При $k = 0$ мы тоже можем найти решения, удовлетворяющие интегральным уравнениям

$$\tilde{\psi}(x) = x + \int_x^{\infty} (v-x)\,Q(v)\,\tilde{\psi}(v)\,dv, \tag{3.3.35}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = x - \int_{-\infty}^{\infty} (v-x)\,Q(v)\,\tilde{\varphi}(v)\,dv. \tag{3.3.36}$$

При помощи подстановки $h(x) = x^{-1}\tilde{\varphi}(x)$ уравнение (3.3.36) преобразуется к виду

$$h(x) = 1 - x^{-1}\int_{-\infty}^{x}(v-x)\,vQ(v)\,h(v)\,dv. \tag{3.3.37}$$

В этом случае метод последовательных приближений приводит к рекуррентной формуле

$$h_0(x) = 1, \quad h_{j+1}(x) = -x^{-1}\int_{-\infty}^{x}(v-x)\,vQ(v)\,h_j(v)\,dv, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.3.38}$$

и оценкам

$$|h_j(x)| \leqslant \frac{1}{j!}(S(x,\ \delta))^j, \quad x \notin]-\delta,\ \delta[, \tag{3.3.39}$$

где

$$S(x,\ \delta) = \int_{-\infty}^{x}(\delta^{-1}v^2 + |v|)\,|Q(v)|\,dv.$$

Оценка для $\tilde{\varphi}_x$ легко устанавливается таким же способом. Аналогичные результаты получаются, если повторить те же процедуры для других решений Йоста и функции ψ. Это удобно резюмировать при помощи следующей теоремы.

Теорема 3.1 *Уравнение Шрёдингера*

$$[-\partial^2/\partial x^2 + Q(x)]\,y = k^2 y \text{ на } \mathbb{R}$$

имеет решения $\psi(x,\ k)$, $\varphi(x,\ k)$, $\bar{\psi}(x,\ k)$, $\bar{\varphi}(x,\ k)$, *удовлетворяющие интегральным уравнениям*:

$$\psi(x,\ k) = e^{ikx} + k^{-1}\int_{x}^{\infty}Q(v)\sin k(v-x)\,\psi(v,\ k)\,dv,$$

$$\varphi(x,\ k) = e^{-ikx} - k^{-1}\int_{-\infty}^{x}Q(v)\sin k(v-x)\,\varphi(v,\ k)\,dv,$$

$$\bar{\psi}(x,\ k) = e^{ikx} + k^{-1}\int_{x}^{\infty}Q(v)\sin k(v-x)\,\bar{\psi}(v,\ k)\,dv,$$

$$\bar{\varphi}(x,\ k) = e^{-ikx} - k^{-1}\int_{-\infty}^{x}Q(v)\sin k(v-x)\,\bar{\varphi}(v,\ k)\,dv,$$

если $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|v|)\,|Q(v)|\,dv<\infty$. *Для каждого* $x\in\mathbb{R}$ *решения* $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$ *и их производные по* x φ_x, ψ_x *непрерывны по* k *при* $\operatorname{Im} k\geqslant 0$ *и аналитичны по* k *при* $\operatorname{Im} k>0$. *Если выполнено условие* $\int_{-\infty}^{\infty}(1+v^2)\,|Q(v)|\,dv<\infty$, *то производные* $\varphi_k(x,k)$ *и* $\psi_k(x,k)$ *аналитичны при* $\operatorname{Im} k>0$ *и непрерывны при* $\operatorname{Im} k\geqslant 0$. *Аналогичные свойства справедливы для функций* $\bar{\varphi}(x,k)$, $\bar{\psi}(x,k)$, $\bar{\varphi}_x(x,k)$, $\bar{\psi}_x(x,k)$, $\bar{\varphi}_k(x,k)$, $\bar{\psi}_k(x,k)$ *при* $\operatorname{Im} k\leqslant 0$.

При $k=0$ *вдобавок к решениям Йоста существуют решения, задаваемые интегральными уравнениями*

$$\tilde{\psi}(x)=x+\int_{x}^{\infty}(v-x)\,Q(v)\,\tilde{\psi}(v)\,dv,$$

$$\tilde{\varphi}(x)=x-\int_{-\infty}^{x}(v-x)\,Q(v)\,\tilde{\varphi}(v)\,dv,$$

которые могут быть определены и являются непрерывными вне любой окрестности точки $k=0$ *при выполнении условия*

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+v^2)\,|Q(v)|\,dv<\infty.$$

Эти решения имеют следующее равномерное асимптотическое поведение:

$$\psi(x,k)=e^{ikx}(1+o(1)),\qquad \bar{\psi}(x,k)=e^{-ikx}(1+o(1)),$$
$$\psi_x(x,k)=e^{ikx}(ik+o(1)),\qquad \bar{\psi}_x(x,k)=-e^{-ikx}(-ik+o(1))$$

при $x\to+\infty$;

$$\varphi(x,k)=e^{-ikx}(1+o(1)),\qquad \bar{\varphi}(x,k)=e^{ikx}(1+o(1)),$$
$$\varphi_x(x,k)=e^{-ikx}(-ik+o(1)),\qquad \bar{\varphi}_x(x,k)=e^{ikx}(ik+o(1))$$

при $x\to-\infty$;

$$\tilde{\psi}(x)=x(1+o(1)),\quad \tilde{\psi}_x(x)=1+o(1)\quad \text{при } x\to+\infty,$$
$$\tilde{\varphi}(x)=x(1+o(1)),\quad \tilde{\varphi}_x(x)=1+o(1)\quad \text{при } x\to-\infty.$$

В процессе доказательства теоремы устанавливаются, кроме того, следующие оценки для решений Йоста.

Следствие 3.1.1. *Для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и каждого* k, *такого что* $\operatorname{Im} k > 0$, *и* $|k| \geqslant \delta$, *существует такое вещественное число* C_δ, *что*

$$|\varphi(x, k)| \leqslant C_\delta \exp \eta x, \quad |\psi(x, k)| \leqslant C_\delta \exp(-\eta x).$$

Если мы потребуем, чтобы решения Йоста были аналитичны для действительных значений k, функция Q должна удовлетворять очень строгим условиям. Решения Йоста будут бесконечно дифференцируемы по k, если

$$P_j(\infty) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x|^j |Q(x)|\, dx < \infty, \quad j = 0, 1, \ldots . \tag{3.3.40}$$

Таким образом, для того, чтобы решения Йоста были аналитичны для вещественных k, необходимо, чтобы функция Q убывала быстрее, чем любая степень $|x|$ при $|x| \to \infty$.

В следующей теореме рассматривается единственность решений Йоста.

Теорема 3.2. *При выполнении условий теоремы 3.1 решения Йоста* $\psi(x, k)$, $\varphi(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$, $\bar{\varphi}(x, k)$ *единственны.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_j(x, k) = e^{-ikx} - k^{-1} \int_{-\infty}^{x} Q(v) \sin k(v - x)\, \varphi_j(v, k)\, dv, \quad j = 1, 2$$

суть два решения, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1. Тогда если

$$w(x, k) = |(\varphi_1(x, k) - \varphi_2(x, k)) \exp(ikx)|,$$

то

$$w(x, k) \leqslant s(x, k), \ \operatorname{Im} k \geqslant 0, \tag{3.3.41}$$

где

$$s(x, k) = \int_{-\infty}^{x} (x - v)\, |Q(v)|\, w(v, k)\, dv.$$

Из (3.3.41) следует, что

$$s_x = \int_{-\infty}^{x} |Q(v)|\, w(v)\, dv \leqslant s(x) \int_{-\infty}^{x} |Q(v)|\, dv,$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x, k) \exp\left[-\int_{-\infty}^{x} (x - v)\, |Q(v)|\, dv\right]\right) \leqslant 0,$$

и после интегрирования этого соотношения от $-\infty$ до x получим

$$s(x, k) \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{3.3.42}$$

Из уравнений (3.3.41) и (3.3.42) немедленно следует, что $w(x, k) \equiv \equiv 0$. Таким образом получается, что для $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ решение Йоста единственно, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |v|)\,|Q(v)|\,dv$ конечен. Для других решений Йоста единственность устанавливается таким же путем. □

Проверка граничных условий (3.3.2) для решений Йоста приводит к такому следствию из теоремы 3.2.

Следствие 3.2.1. *Решения Йоста* φ, $\bar{\varphi}$ *и* ψ, $\bar{\psi}$ *связаны соотношениями*

$$\bar{\varphi}(x, k) = \varphi(x, -k^*) = \varphi^*(x, k^*),$$
$$\bar{\psi}(x, k) = \psi(x, -k^*) = \psi^*(x, k^*),$$

где $*$ *обозначает операцию комплексного сопряжения.* □

Рассмотрим теперь пространство решений линейного уравнения второго порядка (3.3.1) или эквивалентной ему системы первого порядка (3.3.5) для фиксированного k. Для обозначения таких решений будем использовать запись $y(x)$ (или $Y(x)$). Здесь явно обозначается зависимость от переменной x для того, чтобы подчеркнуть, что решения могут иметь разные области определения. Легко проверить, что как для скалярного, так и для векторного уравнений сумма двух решений на общей области их определения, а также произведение решения на любое комплексное число тоже являются решениями. Таким образом, множество решений является линейным пространством (на их общей области определения) над полем комплексных чисел. Поскольку $Q(x) \to \to 0$ при $|x| \to \infty$, то отсюда следует (для фиксированного k), что любое решение уравнения (3.3.1) или (3.3.5) определено произвольным начальным условием при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, имеющим форму линейной комбинации экспоненциальных функций $\exp(\pm ikx)$.

На следующем шаге мы должны доказать, что любое такое граничное условие единственным образом определяет решение (3.3.1) или (3.3.5). Это можно доказать тем же способом, каким мы доказали существование и единственность решений Йоста (см. Наймарк [1968]). Доказательство показывает, кроме того, что любое решение определено для почти всех x. Отсюда следует, что асимптотическое соотношение, которое существует между произвольным решением и линейной комбинацией решений Йоста, верно почти всюду. Поэтому мы можем однозначно представить любое решение одной лишь функцией y или Y.

Если Y_1, Y_2 — различные решения уравнения (3.3.5), то они *линейно независимы* в том случае, если из равенства

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0, \quad \alpha, \beta \in C \tag{3.3.43}$$

следует $\alpha = \beta = 0$.

Это значит, что если (3.3.43) верно, то одно решение не получается из другого умножением на число. Заметим, что порядок скалярного уравнения (3.3.1) или размерность векторного пространства, в котором принимают свои значения решения (3.3.5),— это максимальная размерность пространства решений (для фиксированного k) для (3.3.1) и (3.3.5) соответственно. Пусть Y_1, Y_2, Y_3 — три различных решения (3.3.5). Тогда из

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 = 0$$

следует, что

$$Y_3(x_0) = -\gamma^{-1}(\alpha Y_1(x_0) + \beta Y_2(x_0)) \tag{3.3.44}$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и что, поскольку решения единственным образом определяются начальными условиями, то Y_3 линейно зависит от Y_1 и Y_2.

Определим *вронскиан* $W(Y_1, Y_2)$ двух решений Y_1, Y_2

$$W(Y_1, Y_2) \equiv \det \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{vmatrix} = (y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}). \tag{3.3.45}$$

Из (3.3.43) мы видим, что Y_1, Y_2 линейно независимы, если их вронскиан $W(Y_1, Y_2)$ не равен нулю.

Пусть теперь k может меняться. Тогда получится однопараметрическое (с комплексным параметром) семейство решений, члены которого договоримся обозначать ${}_kY(x) = Y(x, k)$. Читателю должно быть ясно, что поскольку любое решение может быть выражено в терминах решений Йоста, произвольное семейство решений может быть определено только для вещественных k, или для $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, или для $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Лемма 3.3. *Решения* ${}_kY_1$, ${}_kY_2$ *системы* (3.3.5) *линейно независимы тогда и только тогда, когда вронскиан* $W({}_kY_1, {}_kY_2)$ *не равен нулю.*

Решения ${}_kY_1$, ${}_kY_2$ *уравнения* (3.3.1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда их вронскиан* $W({}_kY_1, {}_kY_2)$ *не равен нулю.*

Исключая функцию Q из (3.3.5) или (3.3.1) при помощи двух решений ${}_kY_1$, ${}_kY_2$, удовлетворяющих этим уравнениям, получим соотношение для их вронскиана:

$$W({}_ky_1, {}_\varkappa y_2)(x) - W({}_ky_1, {}_\varkappa y_2)(x_0) = \\ = (k^2 - \varkappa^2) \int_{x_0}^{x} {}_ky_1(v)\, {}_\varkappa y_2(v)\, dv. \tag{3.3.46}$$

Из этого важного соотношения мы можем немедленно получить, что для $\varkappa = k$ вронскиан $W({}_k y_1, {}_\varkappa y_2)$ независим от x и является функцией k. В случае решений Йоста получается:

$$W({}_k\varphi, {}_k\psi) \equiv 2ika(k), \quad W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\psi) \equiv -2ik\bar{a}(k), \tag{3.3.47}$$

$$\begin{gathered} W({}_k\psi, {}_k\bar{\psi}) = -2ik, \quad k \neq 0, \quad W({}_k\varphi, {}_k\bar{\varphi}) = 2ik, \quad k \neq 0, \\ W({}_0\psi, \bar{\psi}) = 1, \quad k = 0, \quad W({}_0\varphi, \bar{\varphi}) = 1, \quad k = 0, \end{gathered} \tag{3.3.48}$$

$$W({}_k\varphi, {}_k\bar{\psi}) = -2ikb(k), \quad W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\psi) = 2ik\bar{b}(k). \tag{3.3.49}$$

Соотношения (3.3.48) можно получить, используя асимптотическое поведение решений Йоста, описанное в теореме 3.1. Уравнения (3.3.47) и (3.3.49) представляют собой определения функций, входящих в правые части. Как мы покажем ниже, вронскианы (3.3.47)—(3.3.49), вообще говоря, не будут определены почти всюду, если функция Q не имеет компактного носителя. Если выполнены условия теоремы 3.1, то функция $a(k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$, функция $\bar{a}(k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k < 0$, и обе функции непрерывны для $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$. На самом деле из соотношений (3.3.47)—(3.3.49) и теоремы 3.1 ясно, что функции $ka(k)$ и $kb(k)$ непрерывны на вещественной оси для всех k. Поскольку максимальное число линейно независимых решений уравнения (3.31) и системы (3.3.5) равно двум, из леммы 3.3 и соотношений (3.3.47)—(3.3.49) выводится следующая теорема.

Теорема 3.4. *Для фиксированного k при выполнении условий теоремы 3.1 решения Йоста ${}_k\varphi$, ${}_k\psi$ (${}_k\bar{\varphi}$, ${}_k\bar{\psi}$) образуют базис пространства решений уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y - Qy = k^2 y$ при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ ($\operatorname{Im} k \leqslant 0$) и $k \neq 0$, кроме случая, когда $a(k) = W({}_k\varphi, {}_k\psi)/2ik$ равно нулю (когда $\bar{a}(k) = -W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\bar{\psi})/2ik$ равно нулю). При $\operatorname{Im} k = 0$ и $k \neq 0$ решения Йоста ${}_k\psi$, ${}_k\bar{\psi}$ или ${}_k\varphi$, ${}_k\bar{\varphi}$ всегда образуют базис. В частности, если $b(k) = W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\bar{\psi})/2ik$ и $\bar{b}(k) = -W({}_k\varphi, {}_k\bar{\psi})/2ik$ и $a(k)$, $\bar{a}(k)$ не равны нулю, то любая пара решений Йоста ${}_k\varphi$, ${}_k\psi$, ${}_k\bar{\varphi}$, ${}_k\bar{\psi}$ может быть использована в качестве базиса пространства решений при $\operatorname{Im} k = 0$ и $k \neq 0$. Для $k = 0$ пара функций ${}_0\psi$, $\bar{\psi}$ или ${}_0\varphi$, $\bar{\varphi}$ образует базис почти всюду.*

Следствие 3.4.1. *Функция $a(k)$ ($\bar{a}(k)$) аналитична в верхней (нижней) полуплоскости k и непрерывна сверху (снизу) вплоть до вещественной оси k ($k \neq 0$). Функции $b(k)$ и $\bar{b}(k)$ непрерывны на вещественной оси k ($k \neq 0$). Кроме того, из соотношений между решениями Йоста следует, что*

$$a(k) = a(-k) = a^*(k)$$

и

$$\bar{b}(k) = b(-k) = b^*(k).$$

Базис пространства решений уравнения (3.3.1) для фиксированного k, например $({}_k\varphi,\ {}_k\psi)$ при $\operatorname{Im} k > 0$, называется *фундаментальной системой решений*. Фундаментальная система решений системы (3.3.5) записывается в виде матрицы, например

$$ {}_k\Phi = \begin{pmatrix} {}_k\varphi & {}_k\bar{\varphi} \\ {}_k\varphi_x & {}_k\bar{\varphi}_x \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad {}_k\Psi = \begin{pmatrix} {}_k\psi & {}_k\bar{\psi} \\ {}_k\psi_x & {}_k\bar{\psi}_x \end{pmatrix} \tag{3.3.50} $$

при $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$; эти матрицы называются *фундаментальными матричными решениями* системы (3.3.5). Из (3.3.5) мы немедленно получаем

$$ {}_k\Phi_x = (Q\sigma - B(k))_k\,\Phi. \tag{3.3.51} $$

В дальнейшем, допуская некоторую языковую вольность, мы будем просто говорить, что Φ и Ψ — фундаментальные матричные решения системы (3.3.5). Для вещественного k любое решение ${}_ky$ уравнения (3.3.1) может быть записано в виде линейной комбинации фундаментальных решений ${}_k\psi$, ${}_k\bar{\psi}$:

$$ {}_ky = {}_kc_1\,{}_k\bar{\psi} + {}_kc_2\,{}_k\psi, \tag{3.3.52} $$

где ${}_kc_1$ и ${}_kc_2$ — комплексные *числа*. Соответствующее семейство решений y с параметром k может быть, таким образом, выражено через решения Йоста $\bar{\psi}$, ψ и пару комплексных *функций* $c_1(k)$, $c_2(k)$:

$$ y(x,\ k) = c_1(k)\,\bar{\psi}(x,\ k) + c_2(k)\,\psi(x,\ k). \tag{3.3.53} $$

В частности, для решений Йоста φ и $\bar{\varphi}$ при использовании (3.3.47)—(3.3.49) найдем

$$ \varphi(x,\ k) = a(k)\,\bar{\psi}(x,\ k) + b(k)\,\psi(x,\ k), \tag{3.3.54} $$

$$ \bar{\varphi}(x,\ k) = \bar{b}(k)\,\bar{\psi}(x,\ k) + \bar{a}(k)\,\psi(x,\ k). \tag{3.3.55} $$

В терминах фундаментальных матричных решений системы (3.3.5) уравнения (3.3.47)—(3.3.49) могут быть записаны в таком виде:

$$ \Phi(x,\ k) = \Psi(x,\ k)\,A(k), \tag{3.3.56} $$

где

$$ A(k) = \begin{pmatrix} b(k) & \bar{a}(k) \\ a(k) & \bar{b}(k) \end{pmatrix}. $$

Прямо из (3.3.47)—(3.3.49) разложением определителей можно найти

$$ W({}_k\varphi,\ {}_k\psi)\,W({}_k\bar{\varphi},\ {}_k\bar{\psi}) - W({}_k\varphi,\ {}_k\bar{\psi})\,W({}_k\bar{\varphi},\ {}_k\psi) = W(\varphi,\ \bar{\varphi})\,W(\psi,\ \bar{\psi}). \tag{3.3.57} $$

Отсюда следует следующее соотношение между функциями a, $\bar{a}$, b и $\bar{b}$ для вещественного $k \neq 0$:

$$ a(k)\,\bar{a}(k) - b(k)\,\bar{b}(k) = 1. \tag{3.3.58} $$

Здесь нам кажется уместным сделать некоторую паузу в изложении чисто математической стороны вопроса и обратить внимание на связь между материалом этого раздела и более физическим подходом к тем же проблемам, затронутым в разд. 2.2. Предположим, что мы можем определить ограниченные непрерывные функции $T_+(k) = a^{-1}(k)$ и $R_+(k) = b(k)\,a^{-1}(k)$ для вещественных k. Тогда (3.3.54) можно переписать в виде

$$T_+(k)\,\varphi(x,\ k) = \bar{\psi}(x,\ k) + R_+(k)\,\psi(x,\ k). \tag{3.3.59}$$

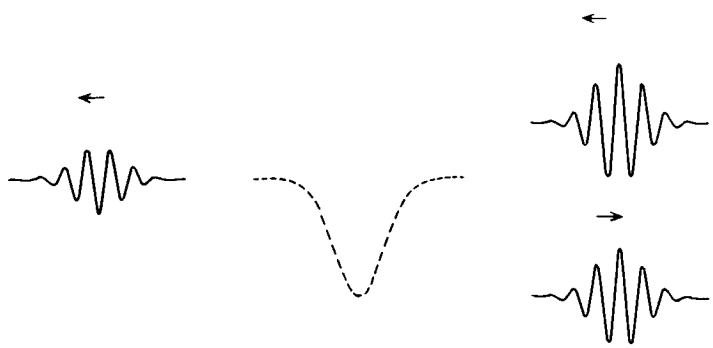


Рис. 3.1. Представление решения (3.3.59) как процесса рассеяния.

Асимптотическое поведение решений Йоста, описанное в теореме 3.1, позволяет дать выражению (3.3.59) следующую интерпретацию. Функция $\bar{\psi}(x,\ k)$ представляет плоскую падающую справа волну ($\exp(-ikx)$), взаимодействующую с потенциалом Q. В результате взаимодействия часть волны проходит ($T_+(k) \times \times \exp(-ikx)$), а другая часть отражается ($R_+(k)\exp(ikx)$). Это взаимодействие представлено ниже в виде диаграммы.

Это «столкновение» вполне упруго, так как из (3.3.58) и следствия 3.4.1 получаем

$$|T_+(k)|^2 + |R_+(k)|^2 = 1. \tag{3.3.60}$$

Это «моментальный снимок» столкновения в фиксированный момент времени $t = t_0$. При переменном t будут меняться решения Йоста, коэффициенты прохождения и отражения, но рисунок взаимодействия останется неизменным. Точное соотношение между коэффициентами рассеяния и потенциалом дано в гл. 4, а в следующих разделах этой главы мы построим формулы, представляющие временну́ю эволюцию коэффициентов рассеяния R_+ и T_+. Если мы определим $T_-(k) = a^{-1}(k)$ ($\equiv T_+(k)$) и $R_-(k) = -\bar{b}(k) \times \times a^{-1}(k) \equiv -b^*(k)\,a^{-1}(k)$ для вещественного k, то мы сможем построить аналогичные картинки для плоской волны ($\exp(ikx)$),

падающей слева и взаимодействующей с потенциалом Q, используя (3.3.55). Матрица

$$\widetilde{S}(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix} \tag{3.3.61}$$

называется *матрицей рассеяния*. В разд. 3.4 обсуждается роль матрицы $\widetilde{S}$ в теории рассеяния. Из следствия 3.1.1 ясно, что $\widetilde{S}(k)$ непрерывна при $k \neq 0$. На самом деле, как мы теперь установили, она непрерывна для всех вещественных k, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + v^2) \, |Q(v)| \, dv < \infty.$$

Используя свойства решений Йоста, описанные в теореме 3.1, получим

$$\varphi(x, k) e^{ikx} = e^{2ikx}\left[\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v) e^{-ikv} \varphi(v, k)\, dv\right] +$$

$$+\left[1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v) e^{ikv} \varphi(v, k)\, dv\right] + o(1), \quad x \to +\infty. \tag{3.3.62}$$

С другой стороны, из (3.3.54)

$$\varphi(x, k) e^{ikx} = b(k) e^{2ikx} + a(k) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{3.3.63}$$

так что

$$\begin{aligned} a(k) &= 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v) e^{ikv} \varphi(v, k)\, dv, \\ b(k) &= \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v) e^{-ikv} \varphi(v, k)\, dv. \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

Из оценки (3.3.27) для $\varphi \exp(ikx)$ и представлений (3.3.64) устанавливается, что a аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$ и что a и b непрерывны для вещественных $k \neq 0$. Полагая $m = \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \varphi(v, 0)\, dv$ (что потребует конечности интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + v^2) \, |Q(v)| \, dv < \infty$), из (3.3.64) получаем

$$a(k) = \left(1 - \frac{m}{2ik}\right) - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\left[\varphi(v, k) \exp(ikv) - \varphi(v, 0)\right] k^{-1}\, dv. \tag{3.3.65}$$

Затем перейдем к пределу $k \to 0$ и используем (3.3.34) для двух случаев, $m = 0$ и $m \neq 0$. Мы найдем, что хотя предел $a(0)$ су-

ществует и не равен нулю и a непрерывна при $k = 0$ в случае $m = 0$, но для $m \neq 0$ a не является непрерывной при $k = 0$. Однако T_+ и в этом случае непрерывна при $k = 0$. Действительно, для $m \neq 0$

$$T_+(k) = k\,(\text{const}) + o(1) \text{ при } k \to 0. \tag{3.3.66}$$

Подобным же образом b не непрерывна при $k = 0$, но, используя (3.3.4) и (3.3.64), можно установить непрерывность R_+ при $k = 0$. Мы заключаем, что соотношение (3.3.59) верно для всех вещественных k и что матрица $\tilde{S}(k)$ непрерывна. Если $m \neq 0$, то из (3.3.64)

$$(1 + R_+(k))\,a(k) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,\frac{e^{ikv} - e^{-ikv}}{2ik}\,\varphi(v,\ k)\,dv =$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,v\varphi(v,\ k)\,dv + o(1) \quad \text{при} \quad k \to 0. \tag{3.3.67}$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$R_+(0) = -1 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,\varphi(v,\ 0)\,dv \neq 0. \tag{3.3.68}$$

Из (3.3.64) ясно, что T_+ и R_+ аналитичны в комплексной k-плоскости, если функция Q имеет компактный носитель.

До сих пор мы не рассматривали связанные состояния этого процесса взаимодействия. По определению эти решения принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$, и из ранее высказанных замечаний относительно решений уравнения (3.3.1) следует, что единственными кандидатами на эту роль являются решения, имеющие асимптотическое поведение $\exp(\pm ikx)$ при $x \to \pm\infty$, $\operatorname{Im} k > 0$ или $\exp(\pm ikx)$ при $x \to \mp\infty$, $\operatorname{Im} k < 0$. Таким образом, решения типа связанных состояний представляют собой собственные функции оператора $\mathbf{L}$, удовлетворяющие соотношениям типа

$$_k\varphi = {}_kc_k\psi, \quad \operatorname{Im} k > 0; \quad {}_k\bar{\varphi} = {}_k\bar{c}_k\bar{\psi}, \quad \operatorname{Im} k < 0. \tag{3.3.69}$$

Если предположить, что $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|\,(1 + v^2)\,dv < \infty$, то $\lambda = k^2 = 0$ не может быть собственным значением оператора $\mathbf{L}$, поскольку общее решение уравнения (3.3.1) будет тогда иметь вид

$$y(x,\ 0) = c_1\psi(x,\ 0) + c_2\tilde{\psi}(x) \sim c_1 + c_2x(1 + O(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty \tag{3.3.70}$$

и не будет принадлежать пространству $L^2(\mathbb{R})$.

В оставшейся части этого раздела мы покажем, что существует конечное число собственных функций, удовлетворяющих (3.3.69) при условии $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$. Из определений (3.3.47) видно, что соотношения типа (3.3.69) требуют, чтобы или $a(k) = 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, или $\bar{a}(k) = 0$, $\operatorname{Im} k < 0$. Отсюда следует, что вопрос о конечности или бесконечности числа собственных функций оператора $\mathbf{L}$ сводится к изучению нулей функции a.

Перед нами открыты два подхода. Первый состоит в том, чтобы продолжать работу в рамках теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а второй — в том, чтобы развивать спектральную теорию самосопряженного оператора $\mathbf{L}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. В оставшейся части этого раздела мы воспользуемся первым методом. Спектральная теория оператора $\mathbf{L}$ будет изучаться в следующем разделе. Почему нам все же необходимо столь строгое изложение? Причина этого заключена в самой сути метода обратной задачи. В следующей главе мы установим условия, при которых функция Q может быть единственным образом восстановлена по данным рассеяния соответствующего линейного уравнения рассеяния Шрёдингера (3.3.1). Данные рассеяния включают нормировочные постоянные связанных состояний, собственные значения оператора $\mathbf{L}$ и один из коэффициентов отражения.

Непосредственно из (3.3.46) имеем

$$W(f(k^*), f(k)) = (k^{*2} - k^2)\int_{-\infty}^{x} |f(k)|^2\,dx, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{3.3.71}$$

Если $f(k)$ — решение типа связанного состояния, т. е. собственная функция оператора $\mathbf{L}$, то соотношение (3.3.69) и граничные условия на φ дают следующую формулу из уравнения (3.3.71):

$$\xi\eta\|f(k)\|^2 = 0, \quad k = \xi + i\eta, \quad \eta > 0. \tag{3.3.72}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, и мы немедленно получаем, что $\operatorname{Re} k = \xi = 0$. Поскольку, как мы только что показали, случай $a(0) = 0$ исключен, можно сделать вывод, что нули функции a лежат на положительной части мнимой оси комплексной плоскости k. Из соотношения $\bar{a}(k^*) = a^*(k^*)$, $\operatorname{Im} k > 0$, следует, что нули функции $\bar{a}$ комплексно сопряжены с нулями функции a, и, следовательно, можно заключить, что собственные значения оператора $\mathbf{L}$ строго отрицательны. Таким образом, если $\lambda = -\eta^2$, $\eta > 0$, — собственное значение оператора $\mathbf{L}$, то $k = i\eta$ — нуль функции a. Может показаться, что налицо парадоксальная ситуация, а именно что единственному собственному значению $\lambda = -\eta^2$ оператора $\mathbf{L}$ соответствуют две собственные функции

$\{{}_{i\eta}\varphi,\ {}_{-i\eta}\bar{\varphi}\}$. Однако из следствия 3.2.1 вытекает, что ${}_{i\eta}\varphi = {}_{-i\eta}\bar{\varphi} = ({}_{i\eta}\varphi)^*$, так что собственные функции вещественны.

Теперь мы покажем, что функция a имеет лишь конечное число нулей. Для того чтобы доказать этот результат, мы используем асимптотическое поведение функции a при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Здесь уместно представить также поведение функции b и решений Йоста при больших k. Это потребуется нам в следующих разделах. Из (3.3.64) и (3.3.20) мы сразу получаем

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,dv + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \tag{3.3.73}$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\exp(2ikv)\,dv + O(|k|^{-2}) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \tag{3.3.74}$$

Теорема Римана—Лебега позволяет вывести из последнего результата, что $b(k) = o\left(\frac{1}{|k|}\right)$ при $|k| \to \infty$. Аналогично асимптотическое поведение решений Йоста получается из итерации их интегральных представлений с использованием оценки (3.3.20).

Лемма 3.5. *Решения Йоста имеют асимптотические разложения:*

$$\varphi(x, k)e^{ikx} = 1 + \frac{1}{(-2ik)}\int_{-\infty}^{x} Q\,dv + O(|k|^{-2}),$$

$$\psi(x, k)e^{-ikx} = 1 + \frac{1}{2ik}\int_{x}^{\infty} Q\,dv + O(|k|^{-2})$$

при $|k| \to \infty$, *равномерно справедливые в полуплоскости* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, *если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1 + |v|)\,dv < \infty$. *Разложения для* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ *получаются комплексным сопряжением из разложений для* φ *и* ψ.

Поскольку нули аналитической функции изолированы и функция a отлична от нуля на вещественной оси, то из (3.3.73) следует, что функция a имеет лишь конечное число нулей. К тому же они *простые*, как мы сейчас покажем. Продифференцируем уравнение (3.3.1) по переменной k и умножим на φ:

$$-\varphi_{xxk}\varphi + Q\varphi_k\varphi = 2k\varphi^2 + k^2\varphi_k\varphi, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{3.3.75}$$

Если умножить уравнение (3.3.1) на φ_k, вычесть из (3.3.75) и один раз проинтегрировать, то получится следующая формула:

$$W(\varphi, \varphi_k)(\infty) - W(\varphi, \varphi_k)(-\infty) = -2k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{3.3.76}$$

Дифференцируя (3.3.47) один раз по k и подставляя значения вронскианов при $x = +\infty$, получим

$$W(\varphi_k, \dot{\psi})(\infty) + W(\varphi, \dot{\psi}_k)(\infty) = 2ia + 2ika_k, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{3.3.77}$$

Следовательно, в нулях функции a $k_j = i\eta_j$, $\eta_j > 0$, $\varphi_j = c_j\psi_j$, где $u_j \equiv k_j u$, соотношения (3.3.76) и (3.3.77) можно скомбинировать таким образом, что получится равенство

$$c_j^2 W(\psi_j, \dot{\psi}_j)(\infty) - W(\varphi_j, \dot{\varphi}_j)(-\infty) - 2ik_j\dot{a}_j c_j = -2k_j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^2 dx. \tag{3.3.78}$$

В формуле (3.3.78) мы использовали обозначение $\dot{f}_j \equiv \dot{f}_k \mid_{k=k_j}$ для того, чтобы запись была менее громоздкой. Если в (3.3.78) подставить значения вронскианов, то получится следующий результат:

$$D_{-j}^{-1} \equiv ic_j\dot{a}_j = \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle, \quad D_{+j}^{-1} \equiv ic_j^{-1}\dot{a} = \langle \psi_j, \psi_j \rangle. \tag{3.3.79}$$

Из выражения (3.3.79) и других наших замечаний, сделанных раньше, следует, что собственные значения оператора $\mathbf{L}$ просты и что D_{-j} (D_{+j}) можно интерпретировать как нормировочную постоянную для собственной функции φ_j (ψ_j).

Можно показать, что число нулей функции $\varphi(x, 0)$ для фиксированного x_0 совпадает с числом собственных значений оператора Дирихле, определенного дифференциальным выражением (3.3.1) в пространстве $L^2(-\infty, x_0)$ (Коддингтон и Левинсон [1955]). Используя принцип минимакса, можно вывести, что оператор $\mathbf{L}$ обладает дискретным спектром тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x, 0)$ обращается в нуль при некотором x (Дейфт и Трубовиц [1979]). Далее легко показать, что если M — число собственных значений оператора $\mathbf{L}$, то

$$M \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |v|\,|Q(v)|\,dv. \tag{3.3.80}$$

Заметим, наконец, что в случае $m = 0$ в (3.3.65) требуется, чтобы функции $\varphi(x, 0)$ и $\psi(x, 0)$ были линейно зависимы:

$$0 = m = \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\varphi(v, 0)\,dv = W({}_0\varphi, {}_0\varphi). \tag{3.3.81}$$

Это условие весьма неустойчиво и, как мы покажем в разд. 4.3, встречается только в тех случаях, когда еще одно собственное значение нужно добавить к спектру оператора $\mathbf{L}$. Теперь подведем итоги и сформулируем результаты, полученные нами на последних нескольких страницах этого раздела.

Лемма 3.6. *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$, *то функция* a *единственным образом определена и непрерывна в полуплоскости* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, *аналитична при* $\operatorname{Im} k > 0$ *и имеет конечное число нулей* $k_j = i\eta_j$, $\eta_j > 0$. *Функция* b *единственным образом определена и непрерывна для вещественных* $k \neq 0$. *Функции* ka, kb *непрерывны для всех вещественных* k. *Для вещественных* $k \neq 0$ *функции* a *и* b *удовлетворяют условию*

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1.$$

Функции a *и* b *имеют следующее асимптотическое поведение:* $a(k) = 1 + O(|k|^{-1})$ при $|k| \to \infty$, $b(k) = O(|k|^{-1})$ при $|k| \to \infty$.

Теорема 3.7. *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$, *то данные рассеяния* $S_{\pm} = \{R_{\pm}, D_{\pm j}, \lambda_j, j = 1, \ldots, M\}$ *определены единственным образом.*

(i) *Собственные значения* λ_j *все различны, строго отрицательны и просты.*

(ii) *Нормировочные постоянные* $D_{\pm j}$ *положительны.*

(iii) *Матрица рассеяния*

$$\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix},$$

где $T_+ = T_- = T$, *определена единственным образом и обладает следующими свойствами:*

(a) $T(k) = T^*(-k)$, $R_{\pm}(k) = R_{\pm}^*(-k)$ *(вещественность);*

(b) $T(k)R_+^*(k) + R_-(k)T^*(k) = 0$;
$|T(k)|^2 + |R_+(k)|^2 = 1 = |T(k)|^2 + |R_-(k)|^2$ *(унитарность);*

(c) $\tilde{S}(k)$ *непрерывна;*

(d) $T(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ *при* $|k| \to \infty$, k *вещественно;*

(e) *либо* $T(k) = \alpha k + o(k)$, $\alpha \neq 0$, *при* $|k| \to 0$, *либо* $|T(k)| > \text{const} > 0$ *при* $|k| \to 0$.

Чего же мы на самом деле достигли в этом разделе? Основное — то, что мы установили аналитические свойства некоторых специальных решений, решений Йоста, для уравнения Шрёдингера и аналитические свойства функции $a = W(\varphi, \psi)/2ik$. Кроме того, мы исследовали асимптотическое поведение этих функций в комплексной плоскости k. Заодно мы показали, что оператор $\mathbf{L}$ имеет лишь конечное число строго отрицательных, простых собственных значений. Далее, теорема 3.7 описывает некоторые свойства данных рассеяния для данного потенциала Q.

В следующем разделе мы покажем, что существует разложение единицы в терминах главных функций оператора $\mathbf{L}$. Иначе говоря, мы определим *спектральное семейство* для оператора $\mathbf{L}$. Будет показано, что главными функциями оператора $\mathbf{L}$ являются его собственные функции и решения Йоста, для которых $\operatorname{Im} k = 0$. Эти последние функции не принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$ и ассоциированы с *непрерывным спектром* оператора $\mathbf{L}$. Для получения этого результата мы используем комплексный анализ в плоскости λ, так что наши знания об аналитических и асимптотических свойствах решений Йоста окажутся существенными. Прелесть этого подхода состоит в том, что, изучая однопараметрическое (с комплексным параметром k) семейство решений Йоста, мы одновременно охватываем свойства обоих типов главных функций, требуемых для разложения.

Функция a играет центральную роль в этом анализе; она отражает спектральные свойства оператора $\mathbf{L}$. На самом деле логарифм от a определяется регуляризованным следом резольвентного оператора. В гамильтоновой формулировке обратной задачи присутствуют коэффициенты асимптотического разложения функции a при больших k, определяющие гамильтонианы некоторых разрешимых нелинейных уравнений. Это кратко описывается в разд. 3.5.

Все леммы и теоремы этого раздела имеют свои аналоги для системы уравнений первого порядка (3.3.5), эквивалентной скалярному уравнению Шрёдингера. Некоторые упражнения в конце этой главы развивают этот альтернативный подход к изучению уравнения Шрёдингера.

3.4. Спектральная теория для оператора Шрёдингера

В этом разделе мы рассмотрим спектральную теорию самосопряженного оператора $\mathbf{L}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Первой нашей целью будет получение разложения единицы для оператора $\mathbf{L}$. Оно определяет спектральное семейство для оператора $\mathbf{L}$, т. е.

семейство операторов проектирования в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, таких что произвольный элемент пространства $L^2(\mathbb{R})$ имеет единственное разложение в сумму элементов подпространств, определяемых спектральным семейством. Мы обсудим вкратце связь с анализом Фурье и разложением произвольного элемента пространства $L^2(\mathbb{R})$ по обобщенному порождающему базису или обобщенным собственным функциям. Везде в этом разделе, если не оговорено противное, предполагается, что $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$.

Метод, который мы используем для получения разложения единицы, начинается с резольвентного оператора ${}_\lambda\mathbf{R}$ оператора $\mathbf{L}$. Некоторые элементы базиса не принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$, а именно это те собственные функции, которые ассоциированы с непрерывным спектром оператора $\mathbf{L}$. Однако их можно включить в формализм гильбертова пространства путем введения однозначно определенной матричной функции спектрального разложения $\mathbf{F}(k)$ оператора $\mathbf{L}$. Нахождение $\mathbf{F}(k)$ эквивалентно определению данных рассеяния $S_\pm$ для оператора $\mathbf{L}$. Мы выведем важный результат, что $\mathbf{F}(k)$ однозначно определяется по $S_\pm$, и наоборот. Этим на самом деле завершается прямая задача рассеяния, т. е. определение $S_\pm(t_0)$ вместе с ее свойствами по начальным данным $Q(x, t_0)$.

Мы определим также скалярную спектральную функцию $\sigma(k)$, для которой введем гильбертово пространство $L_2^2(\sigma, \mathbb{R})$ комплексных функций со значениями в C^2, квадратично интегрируемых на $\mathbb{R}$ по отношению к мере σ. Мы покажем, что существует изометрическое отображение пространства $L^2(\mathbb{R})$ на пространство $L_2^2(\sigma, \mathbb{R})$, и наоборот, при котором оператор $\mathbf{L}$ преобразуется в оператор τ, осуществляющий умножение элементов пространства $L_2^2(\sigma, R)$ на $\lambda = k^2$.

Затем мы разовьем общую теорию возмущения операторов, и при ее помощи оператор $\mathbf{L}$ будет получен из фиксированного оператора $\mathbf{L}_0$ применением сплетающего оператора. В этом разделе это используется для того, чтобы дать теоретико-операторную интерпретацию матрицы рассеяния и ввести операторы преобразования, что послужит подготовкой к гл. 4.

Развитая здесь общая теория будет снова использоваться в разд. 3.5 для определения другого метода получения временно́й эволюции данных рассеяния.

Если число λ не является собственным значением оператора $\mathbf{L}$, то оператор ${}_\lambda\mathbf{R} = (\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ существует и называется *резольвентой* оператора $\mathbf{L}$. Число λ принадлежит резольвентному множеству или непрерывному спектру оператора $\mathbf{L}$ в зависимости от

того, является ли оператор ${}_\lambda\mathbf{R}$ ограниченным или неограниченным на своей области определения.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений ядро A^{-1} оператора $\mathbf{A}^{-1}$, обратного к линейному дифференциальному оператору $\mathbf{A}$, определенному на пространстве $L^2(\mathbb{R})$, называется *функцией Грина*. Так, если

$$\mathbf{A}u = f, \tag{3.4.1}$$

то

$$(\mathbf{A}^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1}(x, y) f(y)\, dy. \tag{3.4.2}$$

Для того чтобы (3.4.1) и (3.4.2) были согласованы между собой, требуется, чтобы

$$\mathbf{A}A^{-1}(x, y) = \delta(x - y), \tag{3.4.3}$$

где δ — *дельта-функция* (или распределение) *Дирака*. Для резольвентного оператора ${}_\lambda\mathbf{R}$ оператора $\mathbf{L}$ эти формулы для $u \in \in \mathbf{D}_\mathbf{L}$ приобретают вид

$$({}_\lambda\mathbf{R}u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y, \lambda) u(y)\, dy \tag{3.4.4}$$

и

$$(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})\, R(x, y, \lambda) = \delta(x - y), \tag{3.4.5}$$

или

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(x) - \lambda\right) R(x, y, \lambda) = \delta(x - y). \tag{3.4.6}$$

Из (3.4.4) выводятся следующие граничные условия на R:

$$\lim_{|x| \to \infty} R(x, y, \lambda) = 0; \qquad \lim_{|y| \to \infty} R(x, y, \lambda) = 0. \tag{3.4.7}$$

Если $\operatorname{Im} k > 0$, $\lambda = k^2$, то из теорем существования и единственности (см. разд. 3.3) следует, что для фиксированного $y = y_0$

$$R(x, y_0, k^2) = \begin{cases} f(y_0, k)\psi(x, k) & \text{при } x \to +\infty, \\ g(y_0, k)\varphi(x, k) & \text{при } x \to -\infty. \end{cases} \tag{3.4.8}$$

Из (3.4.7) и (3.4.8) и из соображений непрерывности получим

$$R(x, y, k^2) = \begin{cases} h(k)\varphi(y, k)\psi(x, k), & x \geqslant y, \\ h(k)\psi(y, k)\varphi(x, k), & y \geqslant x. \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Для того, чтобы определить функцию h, проинтегрируем (3.4.6) по интервалу $]y-\varepsilon,\ y+\varepsilon[$:

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x}R(x,\ y,\ \lambda)\Big|_{x=y-\varepsilon}^{x=y+\varepsilon}=1, \tag{3.4.10}$$

откуда при использовании (3.4.9) получается

$$-h(k)\,W({}_k\varphi,\ {}_k\psi)=1, \tag{3.4.11}$$

где W — вронскиан, определенный в разд. 3.3. Из уравнений (3.3.47) мы находим, что $W({}_k\varphi,\ {}_k\psi)=2ika(k)$, так что в конце концов получается

$$R(x,\ y,\ k^2)=\begin{cases}\dfrac{i}{2ka(k)}\varphi(y,\ k)\psi(x,\ k), & x\geqslant y,\\ \dfrac{i}{2ka(k)}\psi(y,\ k)\varphi(x,\ k), & y>x,\end{cases}\qquad \operatorname{Im}k\geqslant 0. \tag{3.4.12}$$

Теперь мы покажем, что оператор ${}_\lambda\mathbf{R}$ ограничен на множестве $\{\lambda:\ \lambda\notin\sigma(\mathbf{L}),\ \lambda\in\mathbb{C}\}$, где $\sigma(\mathbf{L})$ — спектр оператора $\mathbf{L}$, и что $\{\lambda:\ \lambda\geqslant 0\}$ составляет непрерывный спектр оператора $\mathbf{L}$.

Лемма 3.8. *Для каждого* $\eta>0$ *формулы*

$$\mathbf{A}_0u(x)=\exp(-\eta x)\int_{-\infty}^{x}\exp(\eta y)\,u(y)\,dy,$$

$$\mathbf{B}_0u(x)=\exp(\eta x)\int_{x}^{\infty}\exp(-\eta y)\,u(y)\,dy$$

определяют в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ *непрерывные линейные операторы, причем*

$$\|\mathbf{A}_0\|\leqslant\eta^{-1},\quad \|\mathbf{B}_0\|\leqslant\eta^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $u\in L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$|(\mathbf{A}_0u)(x)|\leqslant\exp(-\eta x)\left\{\int_{-\infty}^{x/2}\exp(\eta y)\,|u(y)|\,dy+\int_{x/2}^{x}\exp(\eta y)\,|u(y)|\,dy\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\exp(-\eta x)}{(2\eta)^{1/2}}\left\{e^{\eta x/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|^2\,dy\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+(e^{2\eta x}-e^{-\eta x})^{1/2}\left[\int_{x/2}^{x}|u(y)|^2\,dy\right]^{1/2}\right\},$$

и, следовательно, $|\mathbf{A}_0 u(x)| \to 0$ при $x \to \infty$. Поскольку

$$\frac{d[(A_0 u)(x)]}{dx} = -\eta (\mathbf{A}_0 u)(x) + u(x),$$

мы получаем

$$\frac{d}{dx} |(\mathbf{A}_0 u)(x)|^2 = -2\eta |(\mathbf{A}_0 u)(x)|^2 + (\mathbf{A}_0 u)(x)\, u^*(x) + u(x)\, (A_0 u)^*(x).$$

Интегрируя по вещественной оси и подставляя граничные условия, находим

$$0 = -2\eta \| A_0 u \|^2 + \langle A_0 u,\ u \rangle + \langle u,\ A_0 u \rangle$$

и из неравенства Коши—Шварца получаем

$$\| A_0 u \| \leqslant \frac{1}{\eta} \| u \|.$$

Вторая часть леммы доказывается аналогичным способом. □

Лемма 3.8 и формула для ядра резольвентного оператора (3.4.12) используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.9. *Множество комплексных чисел* $\{\lambda:\ \lambda = k^2,\ a(k) \neq 0,\ \operatorname{Im} k > 0\}$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* $\mathbf{L}$. *Резольвентный оператор* ${}_\lambda\mathbf{R} = (\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ *представляет собой интегральный оператор*

$${}_\lambda\mathbf{R} v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,\ y,\ \lambda)\, v(y)\, dy, \quad v \in \mathbf{D}_L$$

с ядром

$$R(x,\ y,\ \lambda) = \begin{cases} \dfrac{i}{2\lambda^{1/2} a(\lambda^{1/2})} \varphi(y,\ \lambda^{1/2}) \psi(x,\ \lambda^{1/2}), & x \geqslant y, \\ \dfrac{i}{2\lambda^{1/2} a(\lambda^{1/2})} \psi(y,\ \lambda^{1/2}) \varphi(x,\ \lambda^{1/2}), & y > x, \end{cases} \quad \operatorname{Im} \lambda^{1/2} \geqslant 0, \\ (R(x,\ y;\ \lambda^*))^*, \qquad \operatorname{Im} \lambda^{1/2} < 0, \end{cases}$$

которое определено при условии $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|\,(1 + |v|)\, dv < \infty$. *Для каждого* $\delta > 0$ *существует такое число* $C_\delta > 0$, *что*

$$\| {}_\lambda\mathbf{R} \| \leqslant \frac{C_\delta}{|\lambda^{1/2}|\, |a(\lambda^{1/2})|\, \operatorname{Im} \lambda^{1/2}} \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} \lambda^{1/2} > 0,\ \ |\lambda| \geqslant \delta.$$

Каждое число $\lambda \geqslant 0$ *принадлежит непрерывному спектру оператора* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Пусть $u \in D_L$, тогда

$$ {}_k\mathbf{R}u(x) = \frac{ia(k)^{-1}}{2k}\left\{\psi(x,\ k)\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(y,\ k)\,u(y)\,dy + \right. $$

$$ \left. + \varphi(x,\ k)\int\limits_{x}^{\infty}\psi(y,\ k)\,u(y)\,dy\right\},\quad \operatorname{Im} k > 0, $$

и аналогичное выражение получается, если $\operatorname{Im} k < 0$. Резольвентный оператор определен при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,|(1+|v|)\,dv > \infty$. Следствие 3.1.1 дает

$$ |\psi(x,\ k)| \leqslant C_\delta \exp(\eta x),\quad |\varphi(x,\ k)| \leqslant C_\delta \exp(-\eta x), $$

так что

$$ |{}_k\mathbf{R}u(x)| \leqslant \frac{|a(k)|^{-1}}{2|k|}C_\delta\left\{\exp(\eta x)\int\limits_{-\infty}^{x}\exp(-\eta y)\,u(y)\,dy + \right. $$

$$ \left. + \exp(-\eta x)\int\limits_{x}^{\infty}\exp(\eta y)\,u(y)\,dy\right\},\quad \operatorname{Im} k > 0. $$

Используя лемму 3.8, получаем неравенство

$$ \|{}_k\mathbf{R}\| \leqslant \frac{C_\delta}{|k|\,|a(k)|\operatorname{Im} k},\quad \operatorname{Im} k > 0. $$

Введем финитные функции ${}_a\varphi^*(x,\ k) = \varphi^*(x,\ k)$, $|x| \leqslant 0$, равные нулю при всех остальных значениях x. Тогда

$$ {}_k\mathbf{R}\,{}_a\varphi(x) = \frac{i}{2ka(k)}\psi(x,\ k)\,\|{}_a\varphi\|^2,\quad |x| \geqslant a, $$

из чего следует

$$ \|{}_k\mathbf{R}\,{}_a\varphi\|^2 \geqslant \int\limits_a^\infty |{}_k\mathbf{R}\,{}_a\varphi|^2\,dx = \frac{\|{}_a\varphi\|}{4|ka(k)|^2}\int\limits_a^\infty |\psi(x,\ k)|^2\,dx,\quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. $$

Поскольку $\psi(x,\ k) = \exp(ikx)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$, то существует достаточно большое a, такое что для $a < x < \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$,

$$ |\psi(x,\ k)| \geqslant (1/2)\exp(-\eta x),\quad \eta = \operatorname{Im} k $$

и

$$ \|{}_k\mathbf{R}\,{}_a\varphi\| \geqslant \frac{\|{}_a\varphi\|\exp(-\eta a)}{4|k|\,|a(k)|\sqrt{2\eta}}. $$

Отсюда следует, что $\| {}_{k^2}\mathbf{R} \| \to \infty$ при $\operatorname{Im} k \to 0$, и, таким образом, $\lambda \geqslant 0$ принадлежит спектру оператора $\mathbf{L}$.

Пусть $\mathbf{R}(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})$ — область значений оператора $(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})$. Теперь мы должны показать, что для $\lambda \geqslant 0$, $\mathbf{R}(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})$ плотно в $L^2(\mathbb{R})$, так что обратный оператор может быть определен. Условие, эквивалентное этому, состоит в том, что ортогональное дополнение $\mathbf{R}(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})$ — нулевой элемент. Но пространство решений уравнения $\mathbf{L}^{\mathbf{A}}u = \lambda u$ совпадает с ортогональным дополнением, и поэтому из равенства $\mathbf{L}^{\mathbf{A}} = \mathbf{L}$ следует, что оно нулевое. Таким образом, множество чисел $\lambda \geqslant 0$ составляет непрерывный спектр оператора $\mathbf{L}$.

Таким образом, главные функции будут иметь следующий вид. *Дискретному* или *точечному спектру* $\{\lambda_j = -\eta_j^2,\ \eta_j > 0\}$, который при условиях леммы 3.8 будет конечным и простым, соответствуют *собственные функции* $\{\varphi_j \equiv i\eta_j\varphi,\ j = 1, \ldots, M\}$. Функции $\{{}_k\varphi : k^2 = \lambda \geqslant 0\}$ — *обобщенные собственные функции*, связанные с *непрерывным спектром*. Они не принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$ и поэтому не являются собственными функциями в строгом смысле.

Продолжим построение спектрального семейства оператора $\mathbf{L}$. В качестве конкретного примера спектрального семейства рассмотрим эрмитов оператор $\mathbf{A}$, действующий в конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел. Пусть $\{\mathbf{E}_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ — разложение единичного оператора на операторы проектирования, которые инвариантны на собственных подпространствах оператора $\mathbf{A}$ с собственными значениями $\{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, N\}$. Тогда

$$\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = \mathbf{I}. \tag{3.4.13}$$

Определим «ступенчатую функцию»:

$${}_\lambda\mathbf{P} = \sum_{\lambda_j < \lambda}^{N} \mathbf{E}_j. \tag{3.4.14}$$

Тогда, поскольку

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{E}_j, \tag{3.4.15}$$

из (3.4.14) следует, что

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\,{}_\lambda\mathbf{P}. \tag{3.4.16}$$

Таким образом, (3.4.16) есть способ представления самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ в диагональной форме, и $\{{}_\lambda\mathbf{P}\}$ называется *спектральным семейством* оператора $\mathbf{A}$. Для случая гильбертова

пространства равенство (3.4.16) по-прежнему является корректным способом диагонализации самосопряженного оператора (Смирнов [1964], Като [1966], Наймарк [1964]), но в этом случае $\{{}_\lambda\mathbf{P}\}$ больше не должна быть ступенчатой функцией. В книгах по функциональному анализу, когда говорится о разложении единицы, подразумевается именно спектральное семейство $\{{}_\lambda\mathbf{P}\}$. Однако мы будем использовать его для обобщения равенства (3.4.13) на случай гильбертова пространства. Спектральное семейство приводит к понятию спектральной функции распределения.

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_{R,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R,r}} \frac{R(x, y, \lambda)\, d\lambda}{(\lambda - z)}, \tag{3.4.17}$$

где $\Gamma_{R,r}$ — контур, изображенный на рис. 3.2.

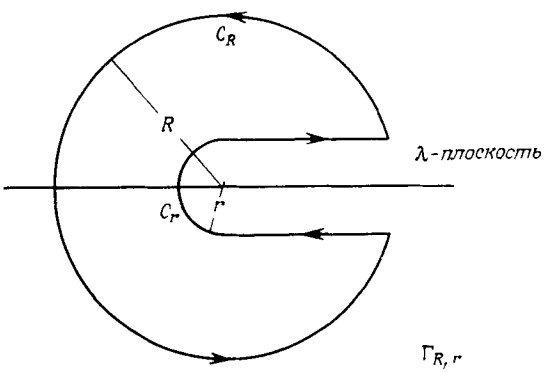


Рис. 3.2. Контур для резольвентного оператора.

Контур состоит из дуги круга радиуса R, двух отрезков прямых, параллельных вещественной оси, и малой дуги окружности r. Радиусы R и r выбираются так, чтобы $\{z, \lambda_1, \ldots, \lambda_2\}$ лежали внутри контура $\Gamma_{R,r}$. Тогда поскольку функция $R(x, y, \lambda)$ аналитична внутри контура $\Gamma_{R,r}$, то по теореме 3.9 из теоремы Коши следует, что

$$I_{R,r} = R(x, y, z) + \sum_{j=1}^{M} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} \left[\frac{R(x, y, \lambda)}{(\lambda - z)} \right]. \tag{3.4.18}$$

Кроме того, из (3.4.12) и лемм 3.5 и 3.6 мы имеем, что

$$|R(x, y, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2|\lambda^{1/2}|} e^{-\eta(x-y)} + o(1) \tag{3.4.19}$$

$$\text{при} \quad |\lambda| \to \infty, \quad \eta = \operatorname{Im} \lambda^{1/2} > 0.$$

Следовательно, в пределе

$$\lim_{R\to\infty}\int\frac{R(x,\ y,\ \lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)}=0 \tag{3.4.20}$$

и

$$\lim_{R\to\infty} I_{R,\,r}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{R(x,\ y,\ \lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)}, \tag{3.4.21}$$

где Γ_r — контур $\lim\limits_{R\to\infty}(\Gamma_{R,\,r}-C_R)$, показанный на рис. 3.3

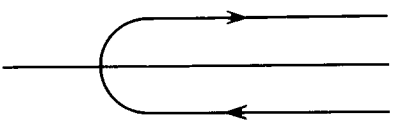


Рис. 3.3. Контур Γ_r.

Наконец, мы используем тот факт, что функция $T_+(0)$ финитна, как было установлено в разд. 3.3, и выведем, что

$$\lim_{r\to 0_+}\int\limits_{C_r}\frac{R(x,\ y,\ \lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)}=0. \tag{3.4.22}$$

Если мы скомбинируем (3.4.21) и (3.4.22) с (3.4.18) в пределе при $R\to\infty$, $r\to+0$, то мы получим выражение для ядра резольвенты:

$$\begin{aligned} R(x,\ y,\ \lambda)&=J(x,\ y)-\sum_{j=1}^{M}\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left\{\frac{R(x,\ y,\ \lambda)}{(\lambda-z)}\right\},\\ J(x,\ y)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}(R(x,\ y,\ \lambda_+)-R(x,\ y,\ \lambda_-))\frac{d\lambda}{(\lambda-z)}, \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

где $\lambda_\pm=\lambda\pm i0$. Следующий шаг состоит в том, чтобы выразить правую часть (3.4.23) через главные функции. Если $\operatorname{Im}\lambda^{1/2}<0$, то ядро резольвенты определяется равенством

$$R(x,\ y,\ \lambda)=(R(x,\ y,\ \lambda^*))^*,\quad \operatorname{Im}\lambda^{1/2}<0, \tag{3.4.24}$$

так что

$$J(x,\ y)=J_1(x,\ y)+J_1^*(x,\ y) \tag{3.4.25}$$

и

$$J_1(x, y) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \left[\frac{b}{a}(\lambda^{1/2})\psi(x, \lambda^{1/2})\psi(y, \lambda^{1/2}) + \right.$$
$$\left. + \psi^*(x, \lambda^{1/2})\psi(y, \lambda^{1/2})\right]\cdot\frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}(\lambda - z)}. \quad (3.4.26)$$

Проще выразить J через функции, определенные на плоскости k ($k = \lambda^{1/2}$):

$$J(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{b}{a}(k)\psi(x, k)\psi(y, k) + \psi^*(x, k)\psi(y, k)\right)\frac{dk}{(k^2 - z)}. \quad (3.4.27)$$

При тех условиях, которые были наложены на функцию Q в теореме 3.9, полюсы функции $R(x, y)$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с простыми нулями функции a. Поэтому мы сразу можем выписать вычеты:

$$\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[\frac{R(x, y, \lambda)}{(\lambda - z)}\right] = \frac{ic_j\psi_j(x)\psi_j(y)}{(\lambda_j - z)\dot{a}_j}. \quad (3.4.28)$$

Если использовать нормировочные постоянные

$$D_{+j}^{-1} \equiv ic_j^{-1}\dot{a}_j = \langle\psi_j, \psi_j\rangle, \quad (3.4.29)$$

ядро резольвенты можно выразить через главные функции:

$$R(x, y, z) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{b}{a}(k)\psi(x, k)\psi(y, k) + \psi^*(x, k)\psi(y, k)\right]\frac{dk}{(k^2 - z)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} D_{+j}\frac{\psi_j(x)\psi_j(y)}{(\lambda_j - z)}. \quad (3.4.30)$$

Применив оператор $(\mathbf{L} - z\mathbf{I})$, мы получим *разложение единицы, выраженное через главные функции оператора* $\mathbf{L}$:

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{b}{a}(k)\psi(x, k)\psi(y, k) + \psi^*(x, k)\psi(y, k)\right]dk +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} D_{+j}\psi_j(x)\psi_j(y). \quad (3.4.31)$$

Появление двух обобщенных собственных функций ${}_k\psi$ и ${}_k\psi^*$ в разложении соответствует тому факту, что *непрерывный спектр*

является двукратно вырожденным лебеговым спектром. Если рассматривать эти обобщенные собственные функции просто как обобщенные функции, можно показать, что они не являются ортонормированными в обобщенном смысле. Если расширить определение скалярного произведения $\langle , \rangle$, распространив его на обобщенные функции, то мы найдем, что

$$\begin{aligned}
&\langle {}_k\varphi,\ {}_{\bar{k}}\varphi\rangle = 2\pi\,(|\,a\,(k)|^2\,\delta\,(k-\bar{k}) + a\,(k)\,b\,(k)\,\delta\,(k+\bar{k})),\\
&\langle {}_k\psi,\ {}_{\bar{k}}\psi\rangle = 2\pi\,(|\,a\,(k)|^2\,\delta\,(k-\bar{k}) - a\,(k)\,b\,(k)\,\delta\,(k+\bar{k})),\\
&\langle {}_k\varphi,\ {}_{\bar{k}}\psi\rangle = 2\pi a\,(k)\,\delta\,(k+\bar{k}),\\
&\langle {}_k\varphi,\ \psi_j\rangle = 0,\\
&\langle {}_k\psi,\ \psi_j\rangle = 0,\\
&\langle \psi_j,\ \psi_j\rangle = D_j^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Для получения этих результатов существенно используются соотношение (3.3.46), асимптотическая форма решений Йоста при $|\,x\,| \to \infty$ и формула

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{\pm ikx}}{k}\right] = \pm i\pi\delta\,(k), \tag{3.4.33}$$

которая встречается в теории обобщенных функций.

Если положить $g_1\,(x,\ k) \equiv \psi\,(x,\ k)$, $g_2\,(x,\ k) \equiv \psi\,(x,\ -k)$, то (3.4.32) можно записать в таком виде:

$$\delta\,(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,\ j=1}^{2} g_i\,(x,\ \lambda^{1/2})\,g_j^*\,(y,\ \lambda^{1/2})\,d\mathbf{F}_{ij}\,(\lambda), \tag{3.4.34}$$

где

$$d\mathbf{F}_{ij}\,(\lambda) = \mathbf{H}_{ij}\,(\lambda)\,d\lambda \tag{3.4.35}$$

и

$$\mathbf{H}\,(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\lambda^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a}\,(\lambda)^{1/2} \\ \dfrac{b^*}{a^*}\,(\lambda)^{1/2} & 1 \end{pmatrix}, & 0 \leqslant \lambda < \infty, \\ \dfrac{1}{4\lambda^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{M} D_j \delta\,(\lambda - \lambda_j), & -\infty < \lambda < 0. \end{cases} \tag{3.4.36}$$

Соответствующая эрмитова мера $\mathbf{F}\,(\lambda)$ называется (матричной) *спектральной функцией распределения* для оператора $\mathbf{L}$, соответствующей разложению единицы, выраженному через собственные функции $\psi\,(x,\ k)$ (см. примечание 1 к разд. 3.4). Ясно, что для ее

определения нам понадобится определить множество *данных рассеяния*

$$S_+ = \left\{D_j,\ R_+ = \frac{b}{a},\quad \lambda_j,\ j = 1,\ \ldots,\ M\right\}.$$

Если мы используем собственные функции $g_1(x,\ k) \equiv \varphi(x,\ k)$, $g_2(x) \equiv \varphi(x,\ -k)$, то для $\lambda \geqslant 0$ матрица $\mathbf{H}$ в (3.4.36) будет иметь вид

$$\mathbf{H}(\lambda) = \frac{1}{8\pi\lambda^{1/2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b^*}{a}(\lambda^{1/2}) \\ -\frac{b}{a^*}(\lambda^{1/2}) & 1 \end{pmatrix},\quad \lambda \geqslant 0. \tag{3.4.37}$$

Компоненты матрицы $\mathbf{H}$ для $\lambda < 0$ имеют такой же вид, как и в (3.4.36), только вместо $\mathbf{D}_{+j}$ появятся $\mathbf{D}_{-j}$ (разд. 3.3, формула (3.3.37)). В этом случае данные рассеяния будут представлены множеством $S_- = \left\{\mathbf{D}_{-j},\ R_- = -\frac{b^*}{a},\ \lambda_j,\ j = 1,\ \ldots,\ M\right\}$. В следующей главе мы покажем, что если компоненты матрицы $\mathbf{H}$ удовлетворяют некоторым ограничениям, то потенциал Q может быть единственным образом реконструирован либо по S_+, либо по S_-.

Физически процесс рассеяния естественно разделяет собственные функции φ/a и ψ/a (см. примечание 2 к разд. 3.4). Для того, чтобы осуществить этот подход, перепишем (3.4.32) так:

$$\delta(x-y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|^2}\varphi(x,\ y)\varphi^*(y,\ k) + \psi(x,\ k)\psi^*(y,\ k)\,dk + \\ + \sum_{j=1}^{M} D_{+j}\psi_j(x)\psi_j(y). \tag{3.4.38}$$

Рассмотрим теперь разложение произвольного элемента $u \in L^2(\mathbb{R})$ по собственным функциям оператора $\mathbf{L}$. Такое разложение можно получить, используя (3.4.38):

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|^2}\left(\langle u,\ {}_k\varphi\rangle\varphi(x,\ k) + \langle u,\ {}_k\psi\rangle\psi(x,\ k)\right)dk + \\ + \sum_{j=1}^{M} D_{+j}\langle u,\ \psi_j\rangle\psi_j(x). \tag{3.4.39}$$

Если ввести обозначения

$$p^-(x,\ k) = \frac{\psi(x,\ k)}{a(k)},\quad m^-(x,\ k) = \frac{\varphi(x,\ k)}{a(k)} \tag{3.4.40}$$

и предположить для простоты, что дискретный спектр отсутствует, (3.4.39) можно переписать в таком виде:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(k)\, m^-(x, k) + u_2(k)\, p^-(x, k))\, d\sigma(k), \qquad (3.4.41)$$

где $\tilde{u} = (u_1, u_2)^T$, $d\sigma(k) = dk/4\pi$ и

$$u_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, m^-(x, k)\, dx, \quad u_2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, p^-(x, k)\, dx. \qquad (3.4.42)$$

Здесь $\sigma(k)$ — спектральная функция распределения для оператора $\mathbf{L}$ (если отсутствует дискретный спектр) и можно показать, что $\tilde{u} \in L^2_{(2)}(\sigma, \mathbb{R})$, где $L^2_{(2)}(\sigma, \mathbb{R})$ — гильбертово пространство $\mathbf{C}^2$-значных функций, которые квадратично интегрируемы на $\mathbb{R}$ по отношению к мере σ. В дальнейшем мы будем писать L_x и L_σ для обозначения пространств $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2_{(2)}(\sigma, \mathbb{R})$ соответственно. Нормы и скалярные произведения в этих пространствах тоже будут различаться индексами x или σ. Функционалы в (3.4.42) являются обобщениями обыкновенных преобразований Фурье, которые называются направляющими функционалами Крейна или $\mathbf{L}$-преобразованиями Фурье. Заметим, что эти функционалы приводят к включению обобщенных собственных функций в гильбертово пространство в качестве ядер отображения $\mathbf{T}$: $u \mapsto \tilde{u}$, $u \in L_x$. Из (3.4.41) и (3.4.42) следует, что $\mathbf{T}$ является *унитарной изометрией*, $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ равно единичному оператору в L_x и $\mathbf{T}\mathbf{T}^*$ равно единичному оператору в L_σ:

$$\|u\|_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(k)\, u_1^*(k) + u_2(k)\, u_2^*(k))\, d\sigma(k) = \|u\|_\sigma^2. \qquad (3.4.43)$$

В то же время оператор, получающийся из оператора $\mathbf{L}$ с помощью преобразования $\mathbf{T}$, предельно прост:

$$\|u\|_\sigma^2 = \langle \lambda u, u\rangle_x = \langle \mathbf{L}u, u\rangle_x = \langle \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^* u, u\rangle_\sigma, \qquad (3.4.44)$$

так что

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^* = k^2\mathbf{I} \qquad (3.4.45)$$

является просто умножением на квадрат независимой переменной. Таким образом, оператор $\mathbf{L}$ представляет собой тривиальный пример оператора в L_x, являющегося *диагональным* в спектральном представлении оператора $\mathbf{L}$. В общем случае оператор $\mathbf{A}$ в пространстве L_x является *диагональным* в спектральном представлении оператора $\mathbf{L}$, если для произвольного $u \in L_x$ $(\widetilde{\mathbf{A}u}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{u}$.

Рассмотрим теперь частный случай двух операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_0$ в пространстве L_x, таких что $\mathbf{L}$ *унитарно эквивалентен* оператору $\mathbf{L}_0$. Это означает, что существует унитарный сплетающий оператор $\mathbf{U}$, такой что

$$\mathbf{LU} = \mathbf{UL}_0. \tag{3.4.46}$$

В этом случае оператор $\mathbf{L}$ может быть спектрально представлен в том же самом пространстве, что и оператор $\mathbf{L}_0$. Пусть $\mathbf{T}_0$: $u \longmapsto \tilde{u}_0$ — введенная ранее изометрия, определяющая $\mathbf{L}_0$-преобразования Фурье.

Тогда

$$\langle \mathbf{L}_0 v,\ u\rangle_x = \langle \mathbf{T}_0(\mathbf{L}_0 v),\ \mathbf{T}_0 u\rangle_{\sigma_0} =$$
$$= \langle (\mathbf{T}_0\mathbf{U}^*)\,\mathbf{L}\,(\mathbf{T}_0\mathbf{U}^*)^*\,(\mathbf{T}_0\mathbf{U}^*)\,\mathbf{U}v,\ (\mathbf{T}_0\mathbf{U}^*)\,\mathbf{U}u\rangle_{\sigma_0}$$

и

$$\langle \mathbf{L}_0 v,\ u\rangle_x = \langle \mathbf{LU}v,\ \mathbf{U}u\rangle_x = \langle (\mathbf{TLT}^*)\,\mathbf{T}(\mathbf{U}v),\ \mathbf{T}(\mathbf{U}u)\rangle_\sigma,$$

так что

$$\mathbf{L}_\sigma \equiv \mathbf{L}_{\sigma_0} \quad \text{и} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0\mathbf{U}^*. \tag{3.4.47}$$

Вполне возможно, что существует более одного сплетающего оператора, определяющего унитарную эквивалентность между операторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0$. Если $\mathbf{V}$ — другой такой оператор, то в соответствии с (3.4.46) он должен удовлетворять соотношению

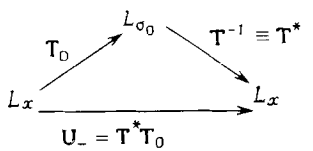
$$[\mathbf{L}_0,\ \mathbf{N}] = 0, \quad \text{где } \mathbf{N} = \mathbf{U}^*\mathbf{V} \tag{3.4.48}$$

унитарный *нормирующий* оператор. Заметим, что оператор $\mathbf{N}$ обязан быть диагональным в спектральном представлении оператора $\mathbf{L}_0$, поскольку он коммутирует с оператором $\mathbf{L}$ и ограничен.

Для прямой задачи рассеяния, о которой шла речь в предыдущем разделе, $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{L}\,(Q = 0)$. Матрица рассеяния может быть получена из этой теории, если ввести в качестве сплетающих операторов операторы Мёллера $\mathbf{U}_\pm$. В этом случае по-прежнему предполагая, что дискретный спектр отсутствует, $\mathbf{L}_0$-преобразования Фурье определяются при помощи скалярного произведения произвольных элементов пространства L_x с собственными функциями

$$m_0(x,\ k) = e^{-ikx}, \quad p_0(x,\ k) = e^{ikx}. \tag{3.4.49}$$

Тогда отображение



$$\overset{\mathbf{T}_0}{u} \longrightarrow \overset{\mathbf{T}^*}{u_0} \longrightarrow v \tag{3.4.50}$$

$$u, v \in L_x,\ u_0 \in L_{\sigma_0}$$

определяет один из волновых операторов Мёллера. Читатель, вероятно, уже догадался, что собственные функции, помеченные знаком «+», определяются таким образом:

$$m^+(x,\ k) = \frac{\varphi^*(x,\ k)}{a^*(k)}, \quad p^+(x,\ k) = \frac{\psi^*(x,\ k)}{a^*(k)}. \tag{3.4.51}$$

Тогда из соотношений (3.3.54) и (3.3.55) и обратных к ним имеем

$$\begin{aligned} \psi^* &= b^*\psi^* + a^*\psi, \\ \psi^* &= a^*\varphi - b\varphi^*, \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

так что

$$\begin{aligned} p^- &= \frac{1}{a} m^+ - \frac{b^*}{a} p^+, \\ m^- &= \frac{1}{a} p^+ + \frac{b}{a} m^+, \end{aligned} \tag{3.4.53}$$

и (3.4.50) с учетом (3.4.53) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_- u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u_{01}(k)\, m^-(x,\ k) + u_{02}(k)\, p^-(x,\ k)]\, d\sigma(k) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{a(k)} u_{01}(k) - \frac{b^*}{a}(k)\, u_{02}(k) \right] p^+(x,\ k) + \right. \\ &\left. + \left[\frac{b}{a}(k)\, u_{01}(k) + \frac{1}{a(k)} u_{02}(k) \right] m^+(x,\ k) \right\} d\sigma(k) = \\ &= \mathbf{U}_+ w(x). \end{aligned} \tag{3.4.54}$$

Здесь w — такой элемент пространства L_x, что его представление через оператор $\mathbf{L}_0$ формируется из коэффициентов p^+ и m^+ в (3.4.54). Из этого следует, что нормирующий оператор для этого случая, называемый оператором рассеяния,

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_+^* \mathbf{U}_-, \tag{3.4.55}$$

имеет следующее представление через оператор $\mathbf{L}_0$:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b^*}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{3.4.56}$$

Это унитарная матрица $\tilde{S}$, называемая матрицей рассеяния, введенная в разд. 3.3.

Вообще говоря, знания дискретного спектра оператора $\mathbf{L}$ и либо функции $R_+(k) = b(k)/a(k)$, либо функции $R_-(k) = -b^*(k)/a(k)$, $k \in \mathbb{R}$, достаточно для полного определения матрицы $\widetilde{S}$, если функция Q удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$. Для того, чтобы это доказать, введем функцию

$$h(k) = \prod_{j=1}^{M} \frac{(k-i\eta_j)}{(k+i\eta_j)}\, a^{-1}(k), \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \tag{3.4.57}$$

где $\{\lambda_j = -\eta_j^2,\ \eta_j > 0\colon j = 1, \ldots, M\}$ — дискретный спектр оператора $\mathbf{L}$ и

$$a^{-1}(k) = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{3.4.58}$$

Тогда, поскольку функция $h(k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, из общей формы теоремы Коши следует, что

$$\log h(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{\log h(z)}{(z-k)}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log h(x)\,dx}{(x-k)}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{3.4.59}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\log h^*(z)\,dz}{(z-k)} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log h^*(x)\,dx}{(x-k)}, \quad \operatorname{Im} k > 0 \tag{3.4.60}$$

Контуры γ_1, γ_2, показаны на рис. 3.4. Комбинируя два выражения, получаем формулу

$$a^{-1}(k) = \prod_{j=1}^{M} \frac{k+i\eta_j}{k-i\eta_j} \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|a(x)|^{-2}}{(k-x)}\,dx, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{3.4.61}$$

Это равенство можно продолжить на вещественную ось плоскости k, если мы заменим k на $y + i\varepsilon$ и перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$, после чего интеграл станет интегралом в смысле главного значения. Соотношение (3.3.58) можно записать в виде

$$|a|^{-2} = 1 - \frac{bb^*}{aa^*}. \tag{3.4.62}$$

Следовательно, если определено R_+ или R_-, то $|a|^{-2}$ определяется из формулы (3.4.49) и a^{-1} — из (3.4.61). Кроме того, из (3.4.62) следует, что

$$|a|^{-2} = 1 - R_+ R_-^* |a|^{-2} \tag{3.4.63}$$

и из (3.3.79) и (3.4.29) следует, что

$$D_{-j}^{-1} D_{+j}^{-1} = -\dot{a}_j^2, \tag{3.4.64}$$

так что S_+ определяет S_-, и наоборот. Эти результаты, относящиеся к прямой задаче рассеяния, могут быть сведены в следующую теорему.

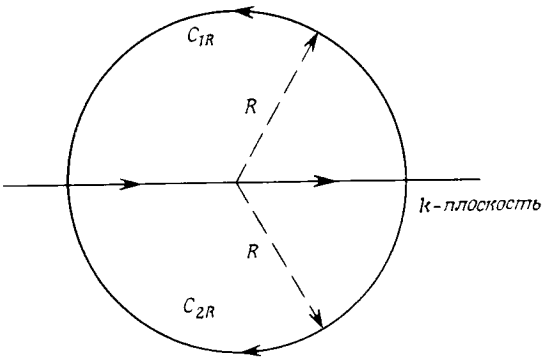


Рис. 3.4. Контуры γ_1, γ_2, C_1 и C_2.

Теорема 3.10. *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+v^2)\,dv < \infty$, *то каждое из множеств* S_+, S_- *данных рассеяния определено единственным образом. Матрица рассеяния* $\tilde{S}$, *которая унитарна и непрерывна, определяется единственным образом любым из упомянутых множеств данных рассеяния. Функции* $T_\pm \equiv a^{-1}$ *определяются по формуле*

$$a^{-1}(k) = \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{k + i\eta_j}{k - i\eta_j} \right) \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |a(x)|^{-2}}{(k-x)}\,dx, \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

$$|a(x)|^{-2} = 1 - |R_+(x)|^2 = 1 - |R_-(x)|^2.$$

Это равенство можно продолжить на вещественную ось плоскости k, после чего интеграл становится интегралом в смысле главного значения.

Особый интерес для метода обратной задачи представляют сплетающие операторы, осуществляющие преобразования между соб-

ственными функциями операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{L}$ $(Q = 0)$. В литературе они называются *операторами преобразования* (Агранович и Марченко [1963], Кэй и Мозес [1955, 1956]), хотя Фаддеев [1963] применил это название для сплетающих операторов, связанных с собственными функциями, определенными при помощи регулярных граничных условий. Представление для изоспектрального оператора Шрёдингера легко получается из свойств решений Йоста, установленных в разд. 3.3. Если определить $l(x, k) \equiv \varphi(x, k) - \exp(-ikx)$, то получим, что функция ${}_x l$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$ и удовлетворяет условиям

$$|{}_x l(k)| < \frac{K e^{-\eta x}}{|k|}, \quad k = \xi + i\eta, \quad \eta > 0, \tag{3.4.65}$$

так что ${}_x l \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_x l(\xi + i\eta)|^2 \, d\xi = O(e^{-2\eta x}). \tag{3.4.66}$$

Таким образом, по теореме Титчмарша [1948] (теорема 96) существует преобразование Фурье

$$\begin{aligned} K_+(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x, k) - e^{ikx}) e^{-iky} \, dk, \quad y \geqslant x, \\ K_-(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x, k) - e^{-ikx}) e^{iky} \, dk, \quad x \leqslant y. \end{aligned} \tag{3.4.67}$$

Если обратить (3.4.67), то получатся операторы преобразования

$$\psi(x, k) = \mathbf{U}_\psi e^{ikx} \equiv e^{ikx} + \int_x^{\infty} K_+(x, y) e^{iky} \, dy, \tag{3.4.68}$$

$$\varphi(x, k) = \mathbf{U}_\varphi e^{-ikx} \equiv e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, y) e^{-iky} \, dy, \tag{3.4.69}$$

определенные при $\operatorname{Im} k > 0$, функции ${}_x K_+$, ${}_x K_-$ принадлежат пространству L^2 при $y \geqslant x$ и $y \leqslant x$ соответственно. Заметим, что из (3.4.67) следует, что ядра — вещественные функции.

Существование и единственность операторов преобразования (3.4.68), так же, как и детальные свойства ядер, можно установить, если предположить, что решение Йоста ψ, например, имеет форму (3.4.68). Для доказательства существования можно воспользоваться методом, развитым Марченко и Аграновичем [1963], и получить интегральное уравнение Вольтерры для ядра K_+,

а затем использовать метод последовательных приближений. Из (3.3.10) и (3.4.68) получаем

$$\int_x^\infty K_+(x, y)\, e^{iky}\, dy = \int_x^\infty Q(v)\, \frac{\sin k(v-x)}{k}\, e^{ikv}\, dv + \\ + \int_x^\infty Q(v)\, dv \int_x^\infty \frac{\sin k(v-x)}{k}\, e^{iku} K_+(x, u)\, du \equiv J_1 + J_2. \quad (3.4.70)$$

Используя формулы

$$\frac{\sin k(v-x)}{\lambda}\, e^{iku} = \frac{1}{2} \int_x^{2v-x} e^{iks}\, ds, \\ \frac{\sin k(v-x)}{k}\, e^{iku} = \frac{1}{2} \int_{x-v+u}^{v-x+u} e^{iks}\, ds \quad (3.4.71)$$

и изменив порядок интегрирования в интегралах J_1 и J_2, получим:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_x^\infty Q(v)\, dv \int_x^{2v-x} e^{iks}\, ds = \\ = \left\{ \frac{1}{2} \int_{1/2}^\infty e^{iks}\, ds \right\} \left\{ \int_{(1/2)(x+s)}^\infty Q(v)\, dv \right\}.$$

$$J_2 = \int_x^\infty Q(v)\, dv \int_v^\infty K_+(v, u)\, du \frac{1}{2} \int_{x-v+u}^{v-x+u} e^{iks}\, ds = \quad (3.4.72)$$

$$= \int_x^\infty e^{iks} \left[\frac{1}{2} \int_x^{(1/2)(x+s)} Q(s)\, ds \int_{s+v-x}^{s+x-v} K_+(v, u)\, du + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{(1/2)(x+s)}^\infty Q(v)\, dv \int_v^{s+v-x} K_+(v, u)\, du \right].$$

Поскольку мы предположили, что $P_0(x) < \infty$, то первое изменение порядка интегрирования, как легко доказать, вполне законно. Второе же изменение можно оправдать только после доказательства существования. Подставляя выражения для интегралов J_1, J_2 (3.4.72) и принимая во внимание единственность интеграль-

ного представления Фурье, мы приходим к следующему интегральному уравнению для ядра $K_+(x, y)$:

$$K_+(x, y) = \frac{1}{2}\int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(v)\,dv + \\ + \frac{1}{2}\int_{x}^{(1/2)(x+y)} Q(v)\,dv \int_{y+x-v}^{y+v-x} K_+(v, u)\,du + \\ + \frac{1}{2}\int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(v)\,dv \int_{v}^{y+v-x} K_+(v, u)\,du, \quad -\infty < x \leqslant y < \infty. \quad (3.4.73)$$

Предположим, что решение имеет вид

$$K_+(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(x, y), \quad (3.4.74)$$

где

$$K_0(x, y) = \frac{1}{2}\int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(v)\,dv$$

и

$$K_{m+1}(x, y) = \frac{1}{2}\int_{x}^{(1/2)(x+y)} Q(v)\,dv \int_{y+x-v}^{y+v-x} K_m(v, u)\,du + \\ + \frac{1}{2}\int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(v)\,dv \int_{v}^{y+v-x} K_m(v, u)\,du, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Докажем теперь по индукции, что

$$|K_m(x, y)| \leqslant R_0\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]\frac{1}{m!}N^m(x), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

где

$$N_t = \int_t^{\infty}(v-x)\,|Q(v)|\,dv \quad \text{и} \quad R_t(x) = \int_x^{\infty}|v|^t\,Q(v)\,dv. \quad (3.4.75)$$

Из (3.4.74) имеем

$$|K_{m+1}(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2m!} R_0\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]\left\{\int_x^{(1/2)(x+y)} (N(v))^m |Q(v)|(v-x)\,dv\right\} +$$

$$+ \int_{(1/2)(x+y)}^{\infty}\left\{(N(v))^m |Q(v)|\frac{1}{2}(y-x)\,dv\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2m!} R_0\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]\int_x^{\infty}(N(v))^m |Q(v)|(v-x)\,dv =$$

$$= \frac{1}{(2m+1)!} R_0\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]|V^{m+1}(x)|. \quad (3.4.76)$$

Из этого результата ясно, что

$$|K_+(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} R_0\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\exp N(x). \quad (3.4.77)$$

Теперь очевидно, что K_+ неограничена при $x \to -\infty$.

Изменение порядка интегрирования во втором случае оправдывается теоремой Фубини, поскольку для $x > a > -\infty$

$$\int_x^{\infty}|K_+(x, y)|\,dy \leqslant \frac{1}{2}\exp N(x)\int_x^{\infty} dy \int_{(1/2)(x+y)}^{\infty}|Q(s)|\,ds =$$

$$= \exp N(x)\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}|Q(x)|\,ds\,dy =$$

$$= \exp N(x)\int_x^{\infty}(y-x)\,|Q(y)|\,dy = N(x)\exp N(x),$$

и, таким образом,

$$\int_x^{\infty} dy\int_y^{\infty}|Q(s)|\,ds\int_s^{\infty}|K_+(s, v)|\,dv \leqslant \int_x^{\infty} dy\int_y^{\infty}|Q(s)|\,N(s)\exp N(s) =$$

$$= \int_x^{\infty}(s-x)\,|Q(s)|\,N(s)\exp[N(s))\,ds =$$

$$= \exp[N(x)]\{N(x)-1\} < \infty. \quad (3.4.78)$$

Теперь можно показать, что функция, определяемая правой частью (3.4.68), удовлетворяет уравнению Шрёдингера с коррект-

ными граничными условиями на ψ. Функция ψ — единственная функция теоремы 3.1.

Непрерывная дифференцируемость K_+ следует из (3.4.73). В самом деле, сразу получается

$$\frac{d}{dx} K_+(x, x) = -\frac{1}{2} Q(x),$$

$$K_{+2x}(x, y) - Q(x) K_+(x, y) - K_{+2y}(x, y) = 0, \quad y < x, \quad (3.4.79)$$

при условии, что функция Q дифференцируема. Из уравнения, которому удовлетворяет функция K_+, дифференцированием граничных условий получается

$$\lim_{x+y\to\infty} K_{+x}(x, y) = 0, \quad \lim_{x+y\to\infty} K_{+t}(x, y) = 0. \quad (3.4.80)$$

Задача с начальными условиями (3.4.79) есть характеристическая задача или *задача Гурса*. Здесь мы сразу приходим к получению решения методом Римана (для доказательства существования и единственности решения задачи Гурса кроме метода Римана можно использовать метод Гарабедяна [1964]).

В работе Фаддеева [1964] и в других более новых работах по обратной задаче рассеяния или по спектральным преобразованиям используют представление

$$\psi(x, k) = e^{ikx}\left(1 + \int_0^\infty B_+(x, y) e^{2iky}\, dy\right) \quad (3.4.81)$$

и аналогичное представление для функции φ. Связь с представлением Левина (3.4.68) выражается соотношением $K_+(x, y) = (1/2) B_+(x, (1/2)(x - y))$. Мы используем здесь представление Левина, поскольку это удобнее для изложения материала гл. 6.

3.5. Нелинейные уравнения, связанные с изоспектральным уравнением Шрёдингера

В последних двух разделах мы ограничивались случаем единственной функции Q и рассматривали поведение этой функции и соответствующих решений Йоста для уравнения Шрёдингера только в зависимости от x. Конечно, самое интересное для нас в линейном уравнении Шрёдингера — научиться решать те нелинейные уравнения, которые могут быть ассоциированы с ним в том смысле, как это было изложено в разд. 3.2. Там мы показали, что иерархия Лакса уравнений КдФ представляет собой одно из таких семейств. В этом разделе мы получим очень большое семейство уравнений, которые могут быть ассоциированы с уравнением Шрёдингера и, кроме того, поддаются решению. Эти два свойства

на самом деле связаны между собой; разрешимые уравнения всегда ассоциированы.

Отложим подробное обсуждение обратного метода до следующей главы. Однако некоторые общие представления о методе понадобятся для того, чтобы понять, насколько обширный класс разрешимых уравнений может быть получен. По существу метод состоит в получении уравнений, управляющих эволюцией данных рассеяния, заданных в начальный момент: $S_+(t_0) = \{\lambda_j(t_0), D_{+j}(t_0), R_+(k, t_0), j = 1, \ldots, M, k \in R\}$ — для данного потенциала $Q(x, t_0)$. Если S_+ подчиняется некоторым условиям, то, как мы увидим, функция Q определяется по S_+ единственным образом для любого значения параметра t. Если эволюционное уравнение для данных рассеяния может быть решено, то функция Q единственным образом определяется для последующих моментов времени. Тем самым мы решим задачу с начальными условиями для уравнения, которому удовлетворяет функция Q, с начальными условиями $Q(x, t_0)$. Эволюционные уравнения для данных рассеяния — уравнения первого порядка и включают билинейные функционалы решений Йоста. В общем случае мы не можем надеяться на какие-либо упрощения, потому что Q может удовлетворять любому нелинейному уравнению с заранее заданными граничными условиями, состоящими в том, что Q вместе со своими производными по x и по t стремится к нулю «достаточно быстро» при $|x| \to \infty$. Однако если мы ограничимся некоторым классом уравнений, для которых эволюционное уравнение данных рассеяния линейно, то они могут быть решены, из чего дальше последует решение Q для любого момента времени.

В работе Абловица с соавторами [1974] подчеркивается, что эту процедуру можно рассматривать как нелинейный аналог анализа Фурье. В самом деле, процедура, превращающая эволюционные уравнения для данных рассеяния в линейные, включает нахождение функции, в сущности являющейся дисперсионным соотношением линеаризованного уравнения, которому удовлетворяет функция Q. Все это подробно обсуждается в настоящем разделе. Кроме того, мы используем теорию сплетающих операторов, кратко описанную в предыдущем разделе, для того, чтобы развить теоретико-операторный подход для получения эволюции данных рассеяния из пары Лакса, связанной с данным разрешимым уравнением.

Функция Q в общем случае может зависеть не только от x, t, но и от еще нескольких пространственных переменных $y = (y_1, \ldots, y_n)$, и решения Йоста в этом случае тоже могут зависеть от этих дополнительных переменных. Сейчас нам будет удобно рассматривать k как функцию от переменных (t, y). Сначала мы будем предполагать, что функция Q и решения Йоста как функции от этих переменных принадлежат C^1. Это означает, что мы требуем

существования и непрерывности частных производных по t и y. Вдобавок мы потребуем, чтобы функция Q принадлежала пространству C^∞ по переменной x и чтобы функция Q и ее производные «достаточно быстро» стремились к нулю при $|x| \to \infty$. Из дальнейшего будет ясно, почему мы требуем выполнения именно этих условий. Мы выбираем такие обозначения, что если $p \in \mathbb{R}^{n+2}$, то ее локальные координаты будут (x, t, y). Пусть отображение C: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ определяет кривую в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $t = t(u)$, $y = y(u)$.

Эта кривая может быть превращена в кривую $C^*_{x_0}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$: $x = x_0$, $t = t(u)$, $y = y(u)$. Пусть $C^* = \{C^*_{x_0}: x_0 \in \mathbb{R}, C$ — любая кривая в $\mathbb{R}^{n+1}\}$. Если $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, тогда производная от f вдоль *любой* кривой из семейства C^* вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{dt(u)}{du} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dy(u)}{du} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3.5.1}$$

где $t = t(u)$, $y = y(u)$ — параметризация выбранной кривой. Точка в формуле (3.5.1) обозначает обыкновенное скалярное произведение. Таким образом, $(0, dt(u)/du|_{u=0}, dy(u)/du|_{u=0})$ — компоненты касательного вектора к кривой $C^*_{x_0}$ в точке $p_0 = \{x_0, t_0 = t(0), y_0 = y(0)\}$. Ясно, что производная функций f вдоль любой кривой семейства C^* в точке p_0 будет иметь вид (3.5.1), и, таким образом, мы сможем написать

$$X_{p_0}(f) = \left((\pi^* X^t(x_0, t_0, y_0)\frac{\partial}{\partial t} + \pi^* X^y(x_0, t_0, y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) f, \tag{3.5.2}$$

где $\pi^* X^t = X^t \circ \pi$, X^t и X^y — произвольные функции на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и π — проекция $\pi(x, t, y) = (t, y)$. Отсюда следует, что

$$X = \pi^* X^t \frac{\partial}{\partial t} + \pi^* X^y \frac{\partial}{\partial y} \tag{3.5.3}$$

определяет *векторное поле* над $\mathbb{R}^{n+2}$, если X^t и X^y — заданные функции на $\mathbb{R}^{n+1}$. Решение уравнений

$$\frac{dt}{du} = X^t, \quad \frac{dy}{du} = X^y \tag{3.5.4}$$

позволяет получить семейство *орбит* или кривых, параметризованное переменной x и имеющее касательные векторы, определяемые (3.5.3). Рассмотрим теперь графики функций k: $\mathbb{R}^{n+1} \to C$. Введем многообразие $J^0(\mathbb{R}^{n+1}, C)$ с локальными координатами (t, y, k). Кривые на $J^0(\mathbb{R}^{n+1}, C)$ могут быть превращены в кривые на $J^0(\mathbb{R}^{n+1}, C) \times \mathbb{R}$, и для этого случая мы получим векторные поля

$$X = \pi^* X^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + k_t \frac{\partial}{\partial k}\right) + \pi^* X^y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} + k_y \frac{\partial}{\partial k}\right) \tag{3.5.5}$$

$(\pi(x, t, y, k, k_t, k_y) = (t, y)$ на $J^1(\mathbb{R}^{n+1}, C) \times \mathbb{R}$ соответствует функциям X^t, X^{y_i}, определенным на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$).

В классическом случае обычно имеют дело с вариациями, если хотят вычислить производную по произвольному направлению. Поэтому мы введем обозначения δ и Δ для дифференциальных операторов, отображающих функции на $J^0(\mathbb{R}^{n+1}, C) \times \mathbb{R}$ в множество функций на $J^1(\mathbb{R}^{n+1}, C) \times \mathbb{R}$:

$$\delta = \pi^* X^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + k_t \frac{\partial}{\partial k}\right) + \pi^* X^y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} + k_y \frac{\partial}{\partial k}\right), \qquad (3.5.6)$$

$$\Delta = \delta - \delta k \frac{\partial}{\partial k}.$$

Обычно преобразование π^* в выражении (3.5.6) опускают. Мы будем кроме того использовать Δ для обозначения соответствующего оператора, действующего на функциях, определенных на $\mathbb{R}^{n+1}$, а именно оператора

$$X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^y \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \qquad (3.5.7)$$

Из определения операторов δ и Δ следует, что они коммутируют с оператором $\partial/\partial x$.

Для получения вариации Δ данных рассеяния примем процедуру, предложенную Флашкой и Ньюэллом [1975]. Фундаментальное матричное решение

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \bar{\varphi} \\ \varphi_x & \bar{\varphi}_x \end{pmatrix},$$

как показано в разд. 3.3, удовлетворяет уравнению

$$\Phi_x = \mathbf{P}\Phi \equiv (Q\sigma - \mathbf{B}(k))\Phi, \quad \operatorname{Im} k = 0, \qquad (3.5.8)$$

где

$$\mathbf{B}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратную к Φ можно найти, если использовать значение вронскиана $W({}_k\varphi, {}_k\bar{\varphi}) = 2ik$:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_x & -\bar{\varphi} \\ -\varphi_x & \varphi \end{pmatrix}. \qquad (3.5.9)$$

Построив вариацию Δ из (3.5.8) и умножив слева на Φ^{-1}, получим

$$\Phi^{-1}\Delta\Phi_x = \Phi^{-1}\Delta\mathbf{P}\Phi + \Phi^{-1}\mathbf{P}\Delta\Phi. \qquad (3.5.10)$$

Дифференцируя равенство $\Phi\Phi^{-1} = 1$ по x, разрешая его относительно Φ_x^{-1} и используя (3.5.8), получим

$$\Phi_x^{-1}\Delta\Phi = -\Phi^{-1}\Phi_x\Phi^{-1}\Delta\Phi = -\Phi^{-1}\mathbf{P}\Delta\Phi. \tag{3.5.11}$$

Комбинируя (3.5.10) и (3.5.11) и интегрируя по x вдоль всей оси $\mathbb{R}$, получаем в результате выражение

$$\Phi^{-1}\Delta\Phi\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Q\,(\Phi^{-1}\sigma\Phi)\,dx. \tag{3.5.12}$$

Поскольку фундаментальные матричные решения линейно зависимы для вещественного k, то

$$\Phi = \Psi\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & \bar{a} \\ a & \bar{b} \end{pmatrix}, \tag{3.5.13}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица, введенная в разд. 3.3. Следовательно, (3.5.12) приобретает вид

$$\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}(\Psi^{-1}\Delta\Psi)(x = +\infty)\mathbf{A} - (\Phi^{-1}\Delta\Phi)(x = -\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Q\,(\Phi^{-1}\sigma\Phi)\,dx. \tag{3.5.14}$$

Для того, чтобы обеспечить существование интегралов в (3.5.12) и (3.5.14), введем условие, что $\Delta Q \to 0$ «достаточно быстро» при $|x| \to \infty$, которое уже встречалось раньше в наших предположениях. Поскольку вариация Δ независима от x, мы можем поменять местами дифференцирование при помощи Δ и знак предела и затем использовать тот факт, что $\Delta \exp(\pm ikx) = 0$. Тогда получим

$$\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Q\,(\Phi^{-1}\sigma\Phi)\,dx. \tag{3.5.15}$$

Введем билинейный функционал

$$I_\Delta(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Q\,(u, v)\,dx. \tag{3.5.16}$$

Тогда уравнения (3.5.15) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\Delta a = -\frac{1}{2ik} I_\Delta(\varphi, \psi), \tag{3.5.17}$$

$$\Delta b = \frac{1}{2ik} I_\Delta(\varphi, \bar{\psi}). \tag{3.5.18}$$

Для того, чтобы получить уравнения (3.5.17) и (3.5.18), можно использовать либо выражения для вронскианов (3.3.47)—(3.3.49),

либо непосредственно использовать соотношения, которые существуют между фундаментальными матричными решениями Φ и Ψ и матрицей $\mathbf{A}$, заданные уравнением (3.5.13).

Вариации Δ от $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были опущены в (3.5.12), потому что они комплексно сопряжены с Δa и Δb. В разд. 3.4 мы определяли данные рассеяния как множество

$$S_+ = \{\lambda_j,\ D_{+j},\ R_+(k),\ k \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, M\}.$$

Это множество состоит из собственных значений и нормировочных «постоянных» собственных векторов оператора $\mathbf{L}$ вместе с функцией R_+, определенной на вещественной оси. Из формул (3.5.17) и (3.5.18) можно сразу получить вариацию Δ функции R:

$$\Delta R_+ = \frac{\Delta b}{a} - \frac{b}{a^2}\Delta a = R_+\left(\frac{1}{2ik}\frac{1}{ab} I_\Delta(\varphi,\ \varphi)\right). \qquad (3.5.19)$$

Уравнение (3.5.19) верно для любой функции Q, удовлетворяющей условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|\,(1 + x^2)\,dx < \infty$ и стремящейся к нулю при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными для произвольных величин t и y. Поэтому, вообще говоря, (3.5.19) — очень сложное уравнение, которое мы не можем надеяться решить *точно*, т. е. найти интегрирующий множитель уравнения. Однако если потребовать выполнения дополнительного *ограничения*

$$\begin{gathered} I_\Delta(\varphi,\ \varphi) - 2ikab\Omega = 0, \\ \Omega = \Omega(k,\ t,\ y), \end{gathered} \qquad (3.5.20)$$

то тем самым из класса всех возможных уравнений, образованных из функций Q, удовлетворяющих этим условиям, мы выделим те, для которых вариация Δ функции R_+ задается *линейным* уравнением:

$$\Delta R_+ = \Omega R_+. \qquad (3.5.21)$$

В частности, некоторые вариации превращают (3.5.21) в уравнение, допускающее точное решение. Как уже было кратко отмечено в начале этого раздела, в том случае, если уравнение, описывающее эволюцию S_+, может быть решено, то может быть эффективно решена и задача с начальными условиями для нелинейного уравнения, которому удовлетворяет функция Q. Таким образом, вопрос сводится к тому, можем ли мы из (3.5.20) получить такое семейство уравнений, что для любого из них эволюция функции R_+ описывается уравнением (3.5.21)?

Из уравнения Шрёдингера (3.3.1) для обобщенных собственных функций u, v с соответствующими им собственными значениями получим следующие соотношения:

$$-u_{xx}v = (k^2 - Q)\,uv, \tag{3.5.22}$$

$$-(u_{xx}v)_x + Q_x uv = (k^2 - Q)\,(uv)_x, \tag{3.5.23}$$

$$(uv)_{xx} = u_{xx}v + 2u_x v_x + uv_{xx} = 2\,(Q - k^2)\,uv + 2u_x v_x, \tag{3.5.24}$$

$$-u_{xx}v_x = (k^2 - Q)\,uv_x, \tag{3.5.25}$$

$$-v_{xx}u_x = (k^2 - Q)\,u_x v. \tag{3.5.26}$$

Используя (3.5.23), (3.5.25) и (3.5.26), найдем

$$(u_{xx}v - u_x v_x)(x) = \int_{-\infty}^{x} Q_s uv\,ds + (u_{xx}v - u_x v_x)(-\infty), \tag{3.5.27}$$

а из этого выражения вместе с (3.5.24) и (3.5.22) получим уравнение

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\int_{-\infty}^{x} dsQ_s - 4Q\right)uv = k^2 uv + \frac{1}{2}(u_{xx}v - u_x v_x)(-\infty). \tag{3.5.28}$$

В (3.5.28) $\int_{-\infty}^{\infty} dsQ$ — интегральный оператор, определяемый следующим образом:

$$\left(\int_{-\infty}^{x} dsQ_s\right)u(x) = \int_{-\infty}^{x} Q_s(s)\,u(s)\,ds. \tag{3.5.29}$$

Уравнения (3.5.27) и (3.5.28) — фундаментальные соотношения, выполнения которых мы будем в дальнейшем требовать. В частности, если $u = v = \varphi$, то уравнение (3.5.27) приобретает вид

$$ab = \frac{1}{4k^2}\int_{-\infty}^{\infty} Q_x \varphi^2\,dx, \tag{3.5.30}$$

а уравнение (3.5.28) превращается в *задачу на собственные значения*

$$\mathbf{L}_1\varphi^2 = k^2\varphi^2,$$

где

$$\mathbf{L}_1 \equiv -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\int_{-\infty}^{x} dsQ_s - 4Q\right). \tag{3.5.31}$$

Уравнение (3.5.30) позволяет записать ограничение (3.5.20) в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta Q + Q_x C)\,\varphi^2\,dx = 0, \qquad C(k,\ t,\ y) = \frac{i}{2k}\,\Omega(k,\ t,\ y). \tag{3.5.32}$$

Вспомним, что наша цель состоит в том, чтобы усилить (3.5.32) и получить разрешимые эволюционные уравнения. Если C и коэффициенты вариации Δ являются функциями только от переменных t и y, то требования

$$\Delta Q + CQ_x = 0 \tag{3.5.33}$$

для всех t и y оказывается достаточно для того, чтобы породить нетривиальное эволюционное уравнение, включающее только функцию Q и ее производные и тривиальным образом удовлетворяющее уравнению ограничения. Как можно было бы обобщить этот пример на ситуацию, когда C и Δ произвольным образом зависят от k? Для начала рассмотрим случай, когда $C(k) = -4k^2$ и Δ не зависит от k. Тогда, если использовать (3.5.31), то (3.5.32) можно записать в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta Q - 4Q_x \mathbf{L}_1)\,\varphi^2\,dx = 0. \tag{3.5.34}$$

Это выражение имеет правильную форму, но оператор $\mathbf{L}_1$ действует на φ^2, так что мы не можем просто приравнять нулю содержимое скобки. Поэтому нам нужно перенести действие оператора $\mathbf{L}_1$ с функции φ^2 на Q_x. Если нам удастся это сделать, то скобки в (3.5.34) станут снова независимы от φ и приравнивание нулю этого выражения будет представлять собой достаточное нетривиальное условие выполнения ограничений (3.5.20). Для того, чтобы перенести действие оператора на Q_x, построим сопряженный к оператору $\mathbf{L}_1$ оператор $\mathbf{L}_1^A$ (см. замечание 1 к разд. 3.5). Определим

$$\langle \mathbf{L}_1 u,\ Q_x v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_1 u Q_x v^*\,dx, \tag{3.5.35}$$

где u и v — произвольные элементы пространства $L^2(\mathbb{R})$. Заметим, что (3.5.35) корректно определено, даже если $u(x,\ k) = \varphi^2(x,\ k)$,

k вещественное, вследствие асимптотического поведения функции Q_x. Интегрирование по частям показывает, что

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\int_{-\infty}^{x}dyQ_x-4Q\right)uQ_xv^*\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[u_xQ_xv^*-u(Q_xv^*)_x-2\int_{x}^{\infty}Q_sv^*\,ds\int_{-\infty}^{x}Q_su\,ds\right]_{-\infty}^{\infty}-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}u\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4Q+2Q_x\int_{x}^{\infty}ds\right](Q_xv^*)\,dx. \quad (3.5.36)$$

Таким образом, получаем

$$\langle \mathbf{L}_1u,\ Q_xv\rangle=\langle u,\ \mathbf{L}_1^AQ_xv\rangle,$$

$$\mathbf{L}_1^A\equiv-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4Q+2Q_x\int_{x}^{\infty}dy\right). \quad (3.5.37)$$

В частности, (3.5.37) справедливо при $v\equiv 1$ и $u=\varphi^2$, так что (3.5.34) может быть записано в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\Delta Q-4\mathbf{L}_1^AQ_x)\varphi^2\,dx=0. \quad (3.5.38)$$

Это ограничение тривиальным образом удовлетворяется, если изменение Q подчиняется уравнению

$$\Delta Q-4\mathbf{L}_1^AQ_x=0. \quad (3.5.39)$$

Возвращаясь к обозначениям разд. 3.1 и 3.2, положим $q=-6\alpha^{-1}Q$ и выберем $\Delta=\partial/\partial t$. При этом (3.5.39) приобретает вид

$$q_t+\alpha qq_x+q_{xxx}=0, \quad (3.5.40)$$

что является уравнением КдФ (3.1.1). Очевидно, что тот же метод позволяет получить нелинейные уравнения, соответствующие случаю, когда C — произвольный вещественный полином от k^2. Так, если

$$C(t,\ y,\ k^2)=\sum_{i=0}^{n}g_i(t,\ y)k^{2i}, \quad (3.5.41)$$

то мы имеем

$$C(t,\ y,\ k^2)\varphi^2 = \sum_{i=0}^{n} g(t,\ y)k^{2i}\varphi^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g_i(t,\ y)(\mathbf{L}_1)^{2i}\varphi^2 = C(t,\ y,\ \mathbf{L}_1)\varphi^2. \quad (3.5.42)$$

Для того, чтобы получить уравнение (3.5.42), мы воспользовались условием дифференцируемости функции Q. Основное требование, которое здесь должно выполняться, состоит в том, чтобы Q как функция от x принадлежала C^∞ и как функция от (t, y) принадлежала пространству C^1. Вдобавок мы потребуем, чтобы функция Q и ее производные «достаточно быстро» стремились к нулю при $|x| \to \infty$, с тем чтобы были определены сингулярные интегралы.

Используем эту информацию для получения общего нелинейного уравнения, определенного в (3.5.41). Из (3.5.32) и (3.5.41), (3.5.42) мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Delta(\mathbf{L}_1^A)Q(x,\ t,\ y) + C(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)Q_x(x,\ t,\ y)]\varphi^2(x,\ t,\ y)\,dx = 0, \quad (3.5.43)$$

где

$$\Delta(\mathbf{L}_1^A) \equiv X^t(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)\frac{\partial}{\partial t} + X^y(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)\frac{\partial}{\partial y} \quad (3.5.44)$$

и, таким образом, уравнение ограничения тривиально удовлетворяется нелинейным эволюционным уравнением

$$\Delta(\mathbf{L}_1^A)Q(x,\ t,\ y) + C(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)Q_x(x,\ t,\ y) = 0. \quad (3.5.45)$$

Более широкий класс нелинейных уравнений, удовлетворяющих уравнению ограничения, можно получить, если предположить, что C — рациональная функция от k^2, $C = C_2/C_1$, где C_1 и C_2 имеют вид (3.5.41). Тогда соответствующее эволюционное уравнение будет иметь следующий вид:

$$C_1(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)\Delta(\mathbf{L}_1^A)Q(x,\ t,\ y) + C_2(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)Q_x(x,\ t,\ y) = 0. \quad (3.5.46)$$

Отсюда следует, что семейство нелинейных эволюционных уравнений, для которых Δ-эволюция функции R_+ подчиняется линейному уравнению, порождается множеством произвольных вещественных полиномов от k^2, C_1, C_2. Более формально C_1, C_2 могут считаться произвольными вещественными аналитическими функциями от k.

Уравнения можно записать в другой форме, в которой вводится оператор, играющий важную роль в гамильтоновой струк-

туре этого частного случая метода обратной задачи. Пусть $u, v \in \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\langle u,\ \mathbf{L}_1^A v_x\rangle = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4Q + 2Q_x\int_x^{\infty} ds\right)\frac{\partial v^*}{\partial x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v^*_{xx} - 4Qv^*\right) + 2Q_x v^*\right)dx =$$

$$= \left\langle u,\ \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{L}_2 v\right\rangle,$$

где

$$\mathbf{L}_2 \equiv -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4Q - 2\int_x^{\infty} ds Q_s\right). \tag{3.5.47}$$

Теперь уравнение (3.5.46) можно записать так:

$$C_1(t,\ y,\ \mathbf{L}_1^A)\,\Delta(\mathbf{L}_1^A)\,Q(x,\ t,\ y) + \frac{\partial}{\partial x}C_2(t,\ y,\ \mathbf{L}_2)\,Q(x,\ t,\ y) = 0. \tag{3.5.48}$$

Это получается по индукции, поскольку для любого целого r

$$\langle u,\ (\mathbf{L}_1^A)^r v_x\rangle = \left\langle u,\ (\mathbf{L}_1^A)^{r-1}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{L}_2 v)\right\rangle. \tag{3.5.49}$$

Если проделать соответствующие вычисления, принимая во внимание граничные условия на функцию Q, уравнение (3.5.48) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds C_1(t,\ y,\ \mathbf{L}_2)\,\Delta(\mathbf{L}_2)\,Q(s,\ t,\ y) + C_2(t,\ y,\ \mathbf{L}_2)\,Q(x,\ t,\ y) = 0. \tag{3.5.50}$$

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению примеров этих уравнений, вернемся к эволюции S_+. Мы уже видели, что разрешимые уравнения (3.5.50) связаны с линейной эволюцией функции R_+:

$$\Delta R_+ = \Omega R_+ \equiv -2ikC_1(k^2)/C_2(k^2)\,R_+. \tag{3.5.51}$$

Нам пришлось применить здесь Δ-вариацию функции R, поскольку вычисления в (3.5.14) не определены для δ-вариации. Однако если $\operatorname{Im} k > 0$ или $\operatorname{Im} k < 0$, можно выполнить наиболее общую вариацию δ для данных рассеяния a, b или $\bar{a}$, $\bar{b}$ соответственно. В этом случае для аналитичности b и $\bar{b}$ требуется, чтобы функ-

ция Q имела компактный носитель. Уравнения (3.5.17), (3.5.18) заменяются теперь уравнениями

$$\begin{aligned} \delta a + a\delta k &= -\frac{1}{2ik} I_\Delta(\varphi, \psi), \\ \delta b + b\delta k &= \frac{1}{2ik} I_\Delta(\varphi, \bar{\psi}), \end{aligned} \qquad \operatorname{Im} k > 0, \tag{3.5.52}$$

так что

$$\delta\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2ika^2} I_\Delta(\varphi, \varphi) \equiv \Omega b a^{-1}, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{3.5.53}$$

Для данных рассеяния $\bar{a}$, $\bar{b}$ δ-вариация находится путем комплексного сопряжения уравнений (3.5.52). Если $k \in C(\mathbb{R}^{n+1}, C)$, то для любой орбиты δ, $t = t(u)$, $y = y(u)$ существует индуцированная кривая $k(u) \equiv k(t(u), y(u))$ в комплексной плоскости k. Пусть, в частности, k_j соответствует собственному значению $\lambda_j = \bar{k}_j$ оператора $\mathbf{L}$. Тогда функционал

$$D_+(k) = -ib(k)(k - k_j)/a(k), \tag{3.5.54}$$

вычисляемый при постоянных значениях t и y, корректно определен, дифференцируем и имеет значение

$$D_{+j} \equiv D_+(k_j) = -ib_j/\dot{a}_j \tag{3.5.55}$$

при $k = k_j$, являющейся нормировочной постоянной для соответствующей собственной функции ψ_j, как было показано в разд. 3.3 и 3.4. Из (3.5.53) и (3.5.54) получаем

$$(\delta D_+(k) - \Omega(k) D_+(k)) \cdot (k - k_j) - D_+(k)\delta(k - k_j) = 0. \tag{3.5.56}$$

Это на самом деле семейство операторов, зависящее от параметра k: в обозначениях разд. 3.3

$${}_k\delta = {}_kX^t(t, y)\left(\frac{\partial}{\partial t} + k_t\frac{\partial}{\partial k}\right) + {}_kX^y(t, y)\left(\frac{\partial}{\partial y} + k_y\frac{\partial}{\partial k}\right). \tag{3.5.57}$$

Если предположить, что коэффициенты ${}_k\delta$ аналитичны, то

$${}_k\delta = {}_{k_j}\delta + (k - k_j)\,{}_{k_j}\delta_k + O(|k - k_j|^2) \tag{3.5.58}$$

и (3.5.56) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} ({}_k\delta D_+(k) - \Omega(k) D(k) - D_+(k)\,{}_{k_j}\delta_k(k - k_j))(k - k_j) + \\ + {}_{k_j}\delta(k - k_j) + O(|k - k_j|^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.5.59}$$

Можно вычислить предел при $k \to k_j$ двумя способами. Заметим сначала, что ${}_{k_j}\delta k_j = 0$; тогда, переходя к пределу, получим

$$\begin{aligned} {}_{k_j}\delta k\big|_{k=k_j} = (\delta k)_{k=k_j} \equiv X^t(t, y, k_j) k_{jt} + \\ + X^y(t, y, k_j) \cdot k_{jy} = 0, \quad j = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{3.5.60}$$

Затем разделим (3.5.59) на $(k - k_j)$ и перейдем к пределу, используя (3.5.60). Тогда получим

$$ {}_{k_j}\Delta D_j(t, y) - \Omega(t, y, k_j) D_{+j}(t, y) - D_{+j}(t, y)_{k_j}\Delta_k k_j(t, y) = 0, $$

$$ j = 1, \ldots, M. \quad (3.5.61) $$

При выводе этой формулы мы пользовались двумя фактами:

$$ \delta k(t, y)|_{k=k_j} \equiv \Delta k(t, y)|_{k=k_j} \text{ и } \delta_k k(t, y)|_{k=k_j} \equiv \Delta_k k(t, y)_{k=k_j}. $$

Уравнение (3.5.61) остается справедливым и для того случая, когда функция Q не имеет компактного носителя. В этом случае интеграл в (3.5.53) сходится только в собственных значениях оператора $\mathbf{L}$. Дальше для продолжения доказательства вводится подходящая аналитическая функция $l(k)$, такая что $l(k_j) = b_j$ и $l_k(k_j) = b_{kj}$. Существование интегрального представления b_{kj} следует из интегрального представления (3.3.64) и теоремы 3.1. В общем случае (3.5.60) является нелинейным уравнением для k_j. Однако если k_j уже определено, то уравнение (3.5.61) линейно. Мы не будем рассматривать общее семейство разрешимых уравнений, поскольку анализ уравнения (3.5.60) труден. Частные решения все-таки можно было бы получить, но для целей нашей книги мы ограничим себя в оставшейся части этого раздела и в следующей главе случаем, представляющим наибольший интерес: $\Delta \equiv \partial/\partial t$ и C_1, C_2 — функции только от переменной k^2. В этом случае $S_+(t)$ единственным образом определяется множеством $S_+(t_0)$. Дальше мы увидим следующее интересное свойство соответствующих разрешимых уравнений. Линеаризируя (3.5.46), получим

$$ C_1\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q_t(x, t) + C_2\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q_x(x, t) = 0, \quad (3.5.62) $$

и, полагая $Q(x, t) = \exp(i(\omega t - kx))$, приходим к дисперсионному соотношению

$$ \omega(k) = kC_2\left(\frac{1}{4}k^2\right) \Big/ C_1\left(\frac{1}{4}k^2\right), \quad (3.5.63) $$

из которого мы выводим, что фазовая скорость элементарного решения ω/k определяет класс эквивалентности разрешимых нелинейных уравнений. Два уравнения принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, если $C_2^1 = E.C$ и $C_1^1 = E.C_1$, где E — вещественная аналитическая функция от k^2. Для того чтобы подытожить полученные до сих пор результаты, сформулируем в явном виде, что значит «достаточно быстро». Функция Q называется *быстро убывающей* или принадлежащей классу Шварца, если она принадлежит пространству C^∞ и

$$ \sup_{(x, t) \in R^2} \left| x^{\alpha_1} t^{\alpha_2} \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2} Q}{\partial x^{\beta_1} \partial t^{\beta_2}} \right| < \infty, \quad (3.5.64) $$

где α_i, β_i — неотрицательные целые числа. Если просмотреть в обратном порядке процесс, при помощи которого мы получили разрешимые уравнения, то обнаружится, что если функция $Q(x, t)$ может быть единственным образом реконструирована по множеству $S_+(t)$, то задача с начальными данными разрешима при условии, что функция $Q(x, t_0)$ удовлетворяет общему условию Шварца:

$$\sup_{(x,\ t) \in R^2} \left| t^{\alpha_2} x^{\alpha_1} \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2} Q}{\partial x^{\beta_1}\, \partial t^{\beta_2}} \right| < \infty, \quad \beta_1 \text{ целое}, \tag{3.5.65}$$

β_2 неотрицательное целое.

Таким образом, если мы интерпретируем отрицательные индексы как «антипроизводные», то мы сможем убедиться, что интегралы от функций $Q(x, t_0)$ и $Q_t(x, t_0)$ тоже являются быстро убывающими функциями в смысле данного выше определения. На самом деле нам потребуются только два значения β_2 — нуль и единица, но для простоты мы используем более общее утверждение. Это конечно, очень сильное условие на функцию $Q(x, t_0)$. Для специальных разрешимых уравнений оказываются достаточными гораздо более слабые условия (см. разд. 4.1), но это — простейшее условие, которое можно наложить для того, чтобы Q было классическим решением для любого уравнения из семейства разрешимых уравнений типа (3.5.46).

Теорема 3.11. *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x, t_0)|(1 + x^2)\,dx < \infty$, *то данные рассеяния определяются единственным образом по* $Q(x, t_0)$.

Функция $\Omega(k)$ *определяет класс эквивалентности разрешимых нелинейных эволюционных уравнений*

$$C_1(\mathbf{L}_1^A) Q_t(x, t) + C_2(\mathbf{L}_1^A) Q_x(x, t) = 0,$$

каждому члену которого отвечает одно и то же $S_+(t)$,

$$R_+(t) = R_+(t_0) \exp \Omega(k)(t - t_0),$$

$$D_{+j}(t) = D_{+j}(t_0) \exp \Omega_j (t - t_0), \quad \Omega_j = \Omega(k_j),$$

$$k_j(t) = k_j(t_0),$$

$\Omega(k) = -2ikC_2/C_1 \equiv -2i\omega(2k)$, $\omega = \omega(k)$ — *дисперсионное соотношение соответствующего линеаризованного уравнения.*

Достаточное условие для того, чтобы функция Q *была решением задачи с начальными данными, состоит в том, чтобы начальные условия были определены таким образом, чтобы это гарантировало принадлежность восстановленной функции* Q *общему классу Шварца.*

Одна из задач, возникающих здесь, состоит, как мы увидим в следующей главе, в том, чтобы определить начальные данные для произвольного разрешимого уравнения. В качестве примеров нелинейных уравнений, разрешимых этим обратным методом, можно привести следующие:

КдФ

$$C_1(k^2) = 1, \quad C_2(k^2) = -4k^2;$$
$$Q_t - 6QQ_x + Q_{xxx} = 0.$$

Иерархия КдФ

$$C_1(k^2) = 1, \; C_2(k^2) = a_i k^{2i}, \; a_i \in \mathbb{R};$$
$$Q_t + a_i (\mathbf{L}_1^A)^{2i} Q_x = 0.$$

Это то же самое множество уравнений, которое было выведено в разд. 3.1 с использованием пары Лакса, поскольку оба множества уравнений имеют одно и то же линеаризованное дисперсионное соотношение и $C_1 \equiv 1$.

Уравнение длинных волн

$$C_1(k^2) = (1 + k^2), \quad C_2(k^2) = -4;$$
$$Q_{xxt} - 4Q_t - 4QQ_t + 2Q_x \int_x^\infty Q_t \, dy + Q_x = 0.$$

Это уравнение сводится к уравнению КдФ в пределе длинных волн малой амплитуды и имеет хорошие свойства устойчивости, т. е. слабо реагирует на возмущения в виде коротких волн.

Наконец, рассмотрим, какую роль играет a в этом обратном методе. Из уравнений (3.5.22)—(3.5.26) примерно тем же способом, каким было получено уравнение (3.5.28), можно получить, что

$$\mathbf{L}_2 uv = k^2 uv + \frac{1}{2}(u_{xx}v - u_x v_x)(\infty), \tag{3.5.66}$$

где $\mathbf{L}_2$ — оператор, определенный в (3.5.47). В частности,

$$\mathbf{L}_2 \varphi\psi = k^2 \varphi\psi - k^2 a, \tag{3.5.67}$$

поскольку

$$\mathbf{L}_2 1 = \frac{1}{2} Q,$$

$$(\mathbf{L}_2 - k^2 \mathbf{I}) \cdot \left[\frac{\varphi\psi}{a} - 1 \right] = -\frac{1}{2} Q. \tag{3.5.68}$$

Хотя след резольвентного оператора не определен, можно определить регуляризованный след, соответствующий эталонному оператору $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{L}$ $(Q = 0)$:

$$d(\lambda) \equiv \operatorname{Tr}((\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})^{-1} - (\mathbf{L}_0 - \lambda\mathbf{I})^{-1}). \tag{3.5.69}$$

Для изоспектрального уравнения Шрёдингера, используя определение ядра резольвенты, данное в (3.4.12), можно найти, что

$$d(k^2) = -\frac{1}{2k}\frac{d}{dk}\log a(k) = \frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\varphi\psi}{a} - 1\right)dx, \tag{3.5.70}$$

так что, используя (3.5.68), мы формально получаем

$$\frac{d}{dk}\log a(k) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{L}_2 - k^2)^{-1} Q\, dx. \tag{3.5.71}$$

Кроме того, можно переписать (3.5.17) в терминах резольвентного оператора для оператора $\mathbf{L}_2$:

$$\Delta a = -\frac{1}{2ik} I_\Delta(\varphi, \psi) = -\frac{a}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta Q\left(\frac{\varphi\psi}{a} - 1\right)dx, \tag{3.5.72}$$

при граничных условиях на ΔQ. Затем, используя (3.5.68), находим, что

$$\Delta \log a(k) = \frac{1}{4ik}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta Q\,(\mathbf{L}_2 - k^2)^{-1} Q\, dx. \tag{3.5.73}$$

Уравнения (3.5.72) и (3.5.73) крайне интересны и важны. Предполагая справедливость разложения $(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2/k^2)^{-1}$ для больших значений k, мы получаем из (3.5.71)

$$\frac{d}{dk}\log a(k) \sim \frac{-i}{2k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathbf{L}_2}{k^2}\right)^n Q\, dx \text{ при } |k| \to \infty. \tag{3.5.74}$$

Выполняя формальное интегрирование, получаем

$$\log a(k) \sim \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{k^{2n+1}}(\mathbf{L}_2)^n Q\, dx \text{ при } |k| \to \infty. \tag{3.5.75}$$

Полагая по определению

$$c_{2n+1} \equiv \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{L}_2^n Q}{(2n+1)}\,dx,$$

мы получаем формулу следов, принадлежащую Захарову и Фаддееву [1971]. Первые три члена разложения будут иметь следующий вид:

$$c_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Q\,dx, \quad c_3 = -\frac{i}{8}\int_{-\infty}^{\infty} Q^2\,dx, \quad c_5 = \frac{i}{32}\int_{-\infty}^{\infty} (Q_x^2 + 2Q^3)\,dx. \tag{3.5.76}$$

Справедливость этого разложения можно доказать, если получить асимптотическое разложение для $\log a$, отправляясь от изоспектрального уравнения Шрёдингера. Нетрудно видеть, что $\Delta a = 0$. Из (3.3.60) и (3.5.21) имеем

$$\Delta\,|R_+|^2 + \Delta\,|T_+|^2 = \Delta\,|T_+|^2 = 0, \tag{3.5.77}$$

поскольку Ω мнимое. Тогда из (3.4.61) следует, что $\Delta a = 0$. Кроме того, можно непосредственно показать, что интеграл в правой части (3.5.73) тождественно равен нулю для разрешимых уравнений. Однако уравнение (3.5.73) становится нетривиальным, если Δ интерпретируется как функциональная производная.

Функциональная производная, или *производная Фреше*, определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\mathcal{F}(Q)}{\Delta Q}\cdot v\,dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(Q+\varepsilon v);$$

здесь

$$\mathcal{F}(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} F(Q, Q_x, \ldots, Q_{nx})\,dx. \tag{3.5.78}$$

Число n в (3.5.78) — целое и положительное.

Так, например, если $\mathcal{F}(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} (Q_x^2 + 2Q^3)\,dx$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\{(Q_x+\varepsilon v_x)^2 + 2(Q+\varepsilon v)^3\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(6Q^2 - 2Q_{xx})\,v\,dx \tag{3.5.79}$$

(после интегрирования по частям), так что

$$\frac{\Delta\mathcal{F}(Q)}{\Delta Q} = 6Q^2 - 2Q_{xx}. \tag{3.5.80}$$

До сих пор предполагалось, что функция v принадлежит тому же пространству, что и функция Q; так, например, можно предполагать, что это пространство функций Шварца общего типа. Простое обобщение определения позволит нам определить про-

изводную Фреше и для этого случая (для этого просто надо разрешить числу n в формуле (3.5.78) принимать любое целое значение, интерпретируя при этом отрицательные индексы как интегралы). Легко видеть из определения, что производная Фреше, если ограничиваться только функциями, принадлежащими классу Шварца, представляет собой в точности оператор Эйлера—Лагранжа в этом функциональном пространстве:

$$\frac{\Delta}{\Delta Q} = \frac{\partial}{\partial Q} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial Q_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial}{\partial Q_{xx}} - \cdots. \tag{3.5.81}$$

Проверка дифференцированием показывает, что (3.5.73) можно интерпретировать как этот тип вариационной производной. Это происходит потому, что оператор полного дифференцирования и производная Фреше коммутируют, так что предположения, сделанные при выводе формулы (3.5.73), остаются верными и в этом случае. Это значит, что (3.5.81) можно принять в качестве определения вариации функции $\log a$, если функция Q меняется произвольным образом (не обязательно как решение) в функциональном пространстве. При $|k| \to \infty$ формула (3.5.73) дает асимптотику

$$\Delta \log a \sim -\frac{1}{4ik^3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta Q \left(\frac{\mathbf{L}_2}{k^2}\right)^n Q\, dx \text{ при } |k| \to \infty, \tag{3.5.82}$$

но

$$\log a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_{2n+1}}{k^{2n+1}}\right) \text{ при } |k| \to \infty, \tag{3.5.83}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta c_{2n+3}}{\Delta Q} = \frac{1}{4i}(\mathbf{L}_2)^n Q. \tag{3.5.84}$$

Полагая $C_2(\mathbf{L}_2) = \sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{L}_2)^j$, $C_1 \equiv 1$ и используя затем формулу (3.5.84), мы увидим, что соответствующее разрешимое уравнение может быть записано в *гамильтоновой форме*

$$Q_t + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta Q}\right\} = 0 \tag{3.5.85}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} 4ia_j c_{2j+3}. \tag{3.5.86}$$

Отсюда следует, что существует гамильтонова структура, ассоциированная с иерархией уравнений Лакса. Так, если, например, взять $\mathcal{H} = -16ic_5$, то после использования (3.5.81) окажется, что мы получили уравнение КдФ (3.1.1) с изменением масштаба $q = -6\alpha^{-1}Q$. Этот аспект теории уравнений, разрешимых методом обратного преобразования рассеяния, так же как и гамильтоновы формы уравнений для рациональных линеаризованных дисперсионных соотношений, выводят нас за рамки настоящей книги. Дальнейшие подробности содержатся в статье Захарова и Фаддеева [1971], в статьях Гельфанда и Дикого [1975—78], в работе Флашки и Ньюэлла [1975], Додда и Буллафа [1979].

В разд. 3.2 мы вывели иерархию уравнений КдФ, используя существование пары Лакса (**A**, **L**) (теперь ее часто записывают как (**P**, **L**) в честь Питера Лакса), где **L** — изоспектральный оператор Шрёдингера. Мы обратились к иерархии КдФ, поскольку она ассоциирована с оператором **L**. В этом разделе мы получили большой класс разрешимых нелинейных уравнений, и нам бы хотелось показать, что они тоже ассоциированы с некоторыми парами, т. е. определить оператор **A** в паре Лакса. Вообще говоря, это довольно сложный процесс. Однако для иерархии Лакса существует сравнительно прямой путь, и мы его сейчас опишем. Диагональ резольвентного ядра определяется формулой

$$R(x, x, k^2) = \frac{i}{2ka(k)}\psi(x, k)\varphi(x, k), \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{3.5.87}$$

которая является непосредственным следствием определения резольвентного ядра, данного в разд. 3.4. Из (3.5.72) ясно, что

$$\frac{\Delta \log a}{\Delta Q} = R. \tag{3.5.88}$$

Из асимптотического разложения этого выражения при больших k и из соотношений (3.5.85), (3.5.86), (3.5.84) следует, в частности, что

$$R_{j+1} = \mathbf{L}_2 R_j, \tag{3.5.89}$$

где R_j являются коэффициентами асимптотического разложения

$$R \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_j}{k^{2j+1}} \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \tag{3.5.90}$$

Дифференцируя теперь (3.5.68), мы видим, что R удовлетворяет линейному уравнению третьего порядка

$$-R_{xxx} + 2Q_x R + 4(Q - k^2)R_x = 0. \tag{3.5.91}$$

В наших обозначениях разрешимые уравнения этого типа могут быть записаны так:

$$Q_t + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=0}^{n} b_j R_j = 0. \tag{3.5.92}$$

Поэтому ясно, что коммутатор операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_j$ кратен R_{jx}. Если мы интерпретируем оператор R, заданный в (3.5.90), как порождающую функцию, то мы можем получить порождающий оператор для операторов, отвечающих функциям R_j, входящим в (3.5.92), следующим путем:

$$-R_x \equiv [\mathbf{L}, \mathbf{A}]. \tag{3.5.93}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — порождающий оператор для операторов $\mathbf{A}_j$. Далее,

$$-R_x = -R_x(\mathbf{L}-k^2)(\mathbf{L}-k^2)^{-1} =$$

$$= \left(R_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - QR_x + k^2R_x\right)(\mathbf{L}-k^2)^{-1} =$$

$$= \left(R_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4}R_{xxx} + \frac{1}{2}Q_xR\right)(\mathbf{L}-k^2)^{-1}.$$

Последнее выражение получается после подстановки k из формулы (3.5.91). Кроме того, можно получить

$$[\mathbf{L}, \mathbf{A}] = (\mathbf{L}a - a\mathbf{L})(\mathbf{L}-k^2)^{-1} =$$

$$= \left(-a_{xx} - 2a_x\frac{\partial}{\partial x} + Qa - aQ\right)(\mathbf{L}-k^2)^{-1}, \tag{3.5.95}$$

если положить

$$\mathbf{A} = a(\mathbf{L}-k^2)^{-1}. \tag{3.5.96}$$

Затем, сравнивая (3.5.95) с (3.5.94) и предполагая, что a — оператор первого порядка, мы можем получить требуемое представление

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}R\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4}R_x\right)(\mathbf{L}-k^2)^{-1}. \tag{3.5.97}$$

Операторы $\mathbf{A}_j$ получаются из асимптотического разложения порождающего оператора

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}_j}{k^{2j+1}} \quad \text{при } |k|\to\infty. \tag{3.5.98}$$

Оператор для уравнения КдФ получается, если взять подходящий оператор, кратный оператору $\mathbf{A}_2$. Неприятный множитель i, появляющийся в наших выкладках, можно убрать, если сделать замену переменной $k \to ik$.

После того как мы установили теоретико-операторный метод получения разрешимых уравнений, кажется естественным вопрос, нельзя ли таким же путем получить временну́ю эволюцию данных рассеяния без обращения к свойствам самого изоспектрального уравнения Шрёдингера. К сожалению, детали такого подхода еще не проработаны. Однако мы можем применить некоторые идеи разд. 3.4, относящиеся к сплетающим операторам, для того, чтобы охарактеризовать суть такого метода. Положим $\mathbf{L}_0 \equiv \equiv \mathbf{L}(Q=0)$ и $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(Q(t))$; тогда, определяя $\mathbf{U}_\pm$ так же, как мы это делали в разд. 4, из определения сплетающего оператора (3.4.46) получим, что

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{A}_\pm, \mathbf{L}], \quad \text{где} \quad \mathbf{A}_\pm = \mathbf{U}_{\pm t}\mathbf{U}_\pm^* \tag{3.5.99}$$

и

$$S_t = (\mathbf{U}_+^*\mathbf{U}_-)_t = \mathbf{U}_{+t}^*\mathbf{U}_- + \mathbf{U}_+^*\mathbf{U}_{-t} =$$

$$= \mathbf{U}_+^* A_+^* \mathbf{U} + \mathbf{U}_+^* \mathbf{A}_- \mathbf{U}_- \equiv \mathbf{U}_+^* (\mathbf{A}_- - \mathbf{A}_+)\, \mathbf{U}_+ S, \tag{3.5.100}$$

здесь, как и раньше, использован тот факт, что операторы $\mathbf{A}_\pm$ являются антиэрмитовыми, что легко доказывается дифференцированием по t условия унитарности операторов $\mathbf{U}_\pm$. Если преобразовать (3.5.100) к спектральному представлению оператора $\mathbf{L}_0$, то получим

$$\tilde{S}_t = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{S}, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_0 \mathbf{U}_+^* (\mathbf{A}_- - \mathbf{A}_+)\, \mathbf{U}_+ \mathbf{T}_0^*. \tag{3.5.101}$$

Оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ предполагается диагональным (поскольку оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ неограничен, это условие следует рассматривать как дополнительное). Таким образом мы получили уравнение для эволюции матрицы рассеяния. Соответствующий пример приведен у Флашки и Ньюэлла [1975].

3.6. Примечания

Раздел 3.1

1. Мы используем слово «*разрешимость*» в том смысле, в котором многие авторы используют слово «интегрируемость». Оно означает, что существует единственное обратимое преобразование уравнения в частных производных к новой системе переменных, в которой преобразованное уравнение в частных производных может быть проинтегрировано в явном виде. Однако в общем случае невозможно выписать решение уравнения в частных производных в явном виде при помощи обратного преобразования, хотя мы знаем, что оно существует. Когда начальные условия таковы, что позволяют это сделать, мы будем называть полу-

ченное решение *точным решением* уравнения в частных производных.

Путаница происходит из-за того, что некоторые авторы применяют термин «интегрируемость» для обозначения тех уравнений в частных производных, которые могут быть интерпретированы как бесконечномерные гамильтоновы системы, имеющие бесконечное количество законов сохранения, и, следовательно, *по аналогии* с конечномерным случаем, являющиеся интегрируемыми.

2. Альтернативный подход к преобразованиям Бэклунда состоит в том, чтобы исследовать *факторизации* линейных операторов, ассоциированных с изучаемым уравнением. Результаты такого типа в *дифференциальной алгебре* были получены в статье Бёрчналла и Чанди [1922], хотя эти авторы ставили себе другие цели. Полезный обзор содержится в книге Айнса [1926, гл. 5]. Для того чтобы уравнение Шрёдингера (3.1.15) было факторизуемо, требуется, чтобы

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\alpha q}{6}\right)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}+u\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+v\right).$$

Это выполняется, если $u=-v$, $v_x-v^2=q/6$, что является преобразованием Миуры. Перестановка в этой факторизации допустима при условии, что существует такая функция Q, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\alpha Q}{6}\right)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}+v\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-v\right),$$

а это вместе с предыдущей факторизацией и преобразованием Миуры приводит к автопреобразованию Бэклунда для уравнения КдФ.

Раздел 3.3

1. Лучшим обзором по уравнению Шрёдингера на полуоси является, вероятно, статья Фаддеева [1963]. Книга Аграновича и Марченко [1963] содержит наиболее полный анализ этого случая и его n-мерного обобщения. Обзор представляет собой, кроме того, интересный исторический очерк развития идей и технических средств, используемых при разработке этой задачи.

Что касается уравнения Шрёдингера на вещественной оси, $x\in R$, то еще раньше была опубликована статья Кея и Моузеса [1956], но в этой работе авторы применяют технику, развитую в их более ранних работах и применимую в более общей ситуации, что делает статью слишком трудной для чтения. Статья Фаддеева [1964] содержит условия, которым должны удовлетворять данные рассеяния, чтобы потенциал был убывающего типа (мы требуем

в нашем случае, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\,|\,Q(x)\,|\,dx<\infty$), и эта статья была взята в качестве основы для этой и следующей главы.
В статье есть ошибка, Фаддеев упустил тот факт, что кроме условия $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|\,Q(x)\,|\,dx<\infty$ требуется еще и второй момент для того, чтобы матрица рассеяния была непрерывна при $k=0$. Это условие впервые было выдвинуто Шаданом и Сабатье [1977], а потом Дейфтом и Трубовицем [1979]. Эта последняя статья содержит наиболее полный и детальный анализ обратной задачи рассеяния на вещественной прямой.

Раздел 3.4

1. Спектральное семейство в гильбертовом пространстве определяется следующим образом. Для $u\in L^2(\mathbb{R})$ определим ${}_{\lambda}P$:

$$
{}_{\Delta}\mathbf{P}u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Delta\cap(0,\,\infty)}\frac{1}{\lambda^{1/2}}\left(\frac{b}{a}(\lambda^{1/2})\,\psi(x,\,\lambda^{1/2})\,\psi(u,\,\lambda^{1/2})+\right.
$$

$$
+\psi^*(x,\,\lambda^{1/2})\,\psi(u,\,\lambda^{1/2})+\frac{b}{a^*}(\lambda^{1/2})\,\psi^*(x,\,\lambda^{1/2})\,\psi^*(u,\,\lambda^{1/2})+
$$

$$
\left.+\psi(x,\,\lambda^{1/2})\,\psi^*(u,\,\lambda^{1/2})\right)d\lambda+\sum_{\lambda_j\in\Delta}D_j\psi_j(x)\,\psi_j(u),
$$

$$
\text{где }\psi(u,\,\lambda^{1/2})=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,(x,\,\lambda^{1/2})\,dx
$$

и Δ — интервал в $\mathbb{R}$. Оператор

$$
A=\int_{-\infty}^{\infty}A(\lambda)\,d_{\lambda}\mathbf{P}
$$

определяется как предел суммы $\sum_{i=1}^{n}A(\lambda_i)_{\Delta_i}P$, где λ_i — произвольная точка интервала Δ_i и $\{\bigcup\Delta_i\}=\mathbb{R}$. В том случае, когда дискретный спектр отсутствует, $h_1(x,\lambda)=\psi(x,\lambda^{1/2})$, $h_2(x,\lambda)=(x,-\lambda^{1/2})$ или $h_2(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda^{1/2})$ служат *обобщенным порождающим* базисом и матричная функция $H_{jk}(\Delta)=(h_j(\Delta),h_k(\Delta))$ является матричной функцией распределения для этого базиса. Они соответствуют в двух случаях (с точностью до множителя) функциям F и σI, введенным в разд. 3.4.

2. В теории рассеяния операторы Мёллера определяются так:

$$
\mathbf{U}_{+}=\operatorname*{strong\text{-}lim}_{k\to\pm\infty}(\exp(ik\mathbf{L})\exp(-ik\mathbf{L}_0)).
$$

Соответствующие собственные функции получаются из уравнения Липпмана—Швингера

$$u_{\pm}(x,\ k) = u_0(x,\ k) - \int_{-\infty}^{\infty} R_0(x,\ y,\ k^2 \pm i0)\, Q(y)\, u_{\pm}(y,\ k)\, dy,$$

где $R_0(x,\ y,\ k^2 \pm i0)$ является пределом функции Грина для $Q = 0$ при приближении k^2 к вещественной оси сверху и снизу соответственно. Вектор u_0 равен $(\exp(ikx), \exp(-ikx))$. В частности,

$$u_+(x,\ k) = u_0(x,\ k) - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-y|}\, Q(y)\, u_+(y,\ k)\, dy,$$

и из асимптотической формы этого уравнения найдем, что

$$u_+(x,\ k) = \left(\frac{\psi^*}{a^*}(x,\ k),\ \frac{\varphi^*}{a^*}(x,\ k)\right)$$

и аналогично

$$u_-(x,\ k) = \left(\frac{\varphi}{a}(x,\ k),\ \frac{\psi}{a}(x,\ k)\right).$$

Раздел 3.5

1. Мы использовали обозначение $\mathbf{P}^A$ для формально сопряженного оператора к оператору $\mathbf{P}$ по отношению к некоторой естественно определенной билинейной форме, связанной с оператором $\mathbf{L}$. Используемая здесь билинейная форма такова:

$$(u,\ v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(x)\, dx,$$

поскольку $\mathbf{L}_1^A$ — требуемый оператор даже в том случае, когда функция Q комплексная.

3.7. Задачи

Раздел 3.1

1. Пусть $(\psi_n,\ q_n,\ k_n)$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$\psi_{xx} + \frac{\alpha}{6} q\psi = \frac{\alpha}{6} k^2 \psi.$$

Показать, что рекуррентная формула

$$q_{n+1} - q_n = \frac{12}{\alpha} (\log \psi_n)_{xx}$$

приводит к рекуррентному соотношению

$$q_{n+1} = \frac{12}{\alpha}\left(\log\left(\prod_{i=0}^{n}\psi_i\right)\right)_{xx}.$$

В частности, показать, что если $q_0 = 0$, то $g_1(x, t) = 2k_0^2 \operatorname{sech}^2((\alpha/6)^{1/2} k_0 x + g(t))$, и определить функцию $g(t)$ для уравнения КдФ. Можно ли определить q_2 для $q_0 = 0$ по этой формуле?

2. Рассмотрим преобразование Миуры

$$v_x = q + v^2$$

между

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad (\text{КдФ})$$

и

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (\text{мКдФ}).$$

Если мы начинаем с $q = 0$, то мы порождаем *однопараметрическое* семейство рациональных решений уравнения мКдФ $v = -(x + c)^{-1}$, где c — произвольная константа. Однако ясно, что такое преобразование определяет отображение из мКдФ в Кдф. Это рациональное решение может быть сделано зависящим от времени путем подбора коэффициентов. Так, $v = 2(x + C(t))^{-1}$ является решением уравнения мКдФ в предположении, что

$$C_t = 18(x + C)^{-2}.$$

Получить соответствующее рациональное решение для уравнения КдФ. Рассмотреть n таких решений, характеризуемых функциями C_i, $i = 1, \ldots, n$. Показать, что дискретизацию соответствующих эволюционных уравнений для C_j, полученных заменой непрерывной переменной x на сумму по всем C_i (исключая C_j для j-го уравнения движения), можно интерпретировать как конечномерную гамильтонову систему.

3. Рассматривая решение в виде уединенной волны уравнения мКдФ

$$v_t + 6\varepsilon v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad \varepsilon = \pm 1$$

(или каким-либо другим способом), показать, что это уравнение имеет солитонное решение

$$v(x, t) = k \operatorname{sech}(kx + k^3 t)$$

лишь при $\varepsilon = 1$. После преобразования Миуры соответствующее решение уравнения КдФ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

становится сингулярным решением

$$q(x, t) = k^2(\sec^2\theta + \sec\theta \operatorname{tg}\theta), \quad \theta = kx + k^3 t.$$

Однако если мы начинаем с солитонного решения уравнения КдФ

$$q(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 k(x - 4k^2t),$$

мы получим однопараметрическое (с параметром c) семейство решений в случае $\varepsilon = -1$:

$$v(x, t) = -2k \operatorname{cosech} \varphi + \operatorname{cth}^2 \varphi (c + x - k^{-1} \operatorname{cth} \varphi)^{-1},$$

$$\varphi = k(x - 4k^2t).$$

Эти решения не имеют особенностей, если c конечно.

4. Для уравнения КдФ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

автопреобразование Бэклунда, выраженное через потенциальную функцию $w_x = q/2$, имеет следующий вид:

$$(W - w)_x = k^2 - (W - w)^2,$$

$$(W - w)_t = 6(W - w)^2 (W - w)_x - 6k^2 (W - w)_x - (W - w)_{xxx}.$$

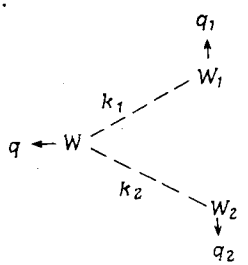
Начиная с $w = 0$, показать, что однопараметрическое (с параметром c) семейство несингулярных решений уравнения КдФ имеет вид

$$q(x, t, c) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 (k(x - 4k^2t) + c),$$

и вывести из соображений симметрии, примененных к преобразованию, что сингулярное семейство решений таково:

$$q^*(x, t, c) = -2k^2 \operatorname{cosech}^2 (k(x - 4k^2t) + c).$$

Рассмотрим теперь три решения уравнения КдФ, связанные преобразованием Бэклунда:



Штриховые линии на рисунке обозначают соответствие Бэклунда, а сплошные стрелки обозначают отображения. Часть отображения, отвечающая переменной x, выглядит так:

$$(w_1 + w)_x = k_1^2 - (w_1 - w)^2,$$

$$(w_2 + w)_x = k_2^2 - (w_2 - w)^2.$$

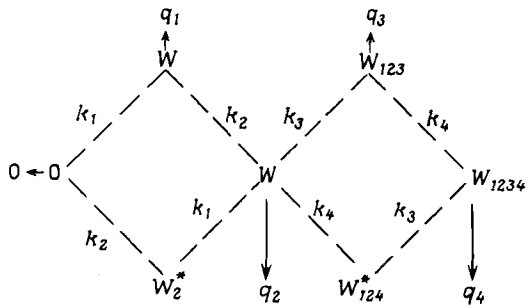
Рассматривая дальнейшие преобразования

$$(w_{12} + w_1)_x = k_2^2 - (w_{12} - w_1)^2,$$
$$(w_{21} + w_2)_x = k_1^2 - (w_{21} - w_2)^2,$$

показать, что условие $w_{12} = w_{21}$ удовлетворяется, если

$$w_{12} = w + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(w_2 + w_1)},$$

откуда мы сможем вывести q_{12}. Эта коммутативность преобразования Бэклунда позволяет получать решения КдФ чисто алгебраическим путем, используя только что приведенную нелинейную суперпозицию соотношений. Этим способом можно построить целую пирамиду или лестницу решений. Если начинать с нулевого решения, то получится пирамида солитонных решений. Нужно действовать осторожно, с тем чтобы получать регулярные решения на каждом шаге.



$k_1 < k_2 < \ldots$, q_n — это n-солитонное решение.

5. Обобщение преобразования Миуры непосредственно приводит к тому, чтобы связать КдФ с семейством уравнений, содержащим уравнения КдФ и мКдФ в качестве частного случая:

$$q_t + \alpha q q_x + q_{xxx} = 0,$$

$$v_t + \mu v_x + \varphi v^2 v_x + \theta v v_x + v_{xxx} = 0.$$

Это можно сделать путем линейной замены переменной v:

$$(6\varphi)^{1/2}\, i\varepsilon v_x + \mu + (\varphi v^2 + 2\theta v) - \alpha q = 0.$$

В частности, для $\varphi^{1/2} = 6^{1/2}\delta$, $\theta = \alpha/2$, $\mu = 0$ и $\alpha = 6$ преобразование можно записать так:

$$i\delta v_x + \delta^2 v^2 + v - q = 0.$$

Это преобразование устанавливает соответствие между решениями уравнений

$$q_t + (3q^2 + q_{xx})_x = 0,$$

$$v_t + \left(3\delta^2 v^3 + \frac{3}{2} v^2 + v_{xx}\right)_x = 0.$$

Уравнения записаны в виде *законов сохранения*

$$H_t + F_x = 0,$$

где H — *сохраняющаяся плотность*, а F — ассоциированный с ней *поток*. Характерное свойство рассматриваемых нами разрешимых уравнений состоит в том, что они имеют бесконечное множество интегралов движения $I = \int_{-\infty}^{\infty} H\,dx$. Это следует прямо из закона сохранения при условии, что функции q и v вместе со своими производными обращаются в нуль на границе (здесь границей служат $\pm\infty$). Мы можем получить формальный степенной ряд для v из преобразования Миуры, полагая $v = \sum_0^{\infty} L_i(q)\delta^i$, где L_i — функционал от функции q и ее производных по x. Подставляя это разложение для v в соответствующий закон сохранения и приравнивая коэффициенты при δ^i, мы получим бесконечное число сохраняющихся плотностей H для уравнения КдФ. Показать, что первые несколько плотностей при $\alpha = 6$ равны, с точностью до постоянного множителя, следующим величинам:

$$H_0 = q,\ H_2 = q^2,\ H_4 = 2q^3 - q_x^2,\ H_6 = 9q^4 - 18qq_x^2 + 9q_x^2 \cdot 15.$$

Заметим, что соответствующие плотности нечетного порядка здесь отсутствуют, поскольку они являются полными производными по x и, следовательно, тривиальны. Доказать, что все плотности нечетного порядка тривиальны.

Раздел 3.3

1. Показать, что если $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|Q(x)|\,dx < \infty$, то $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|Q(x)|\,dx < \infty$.

2. Полагая $h(x, k) = \varphi(x, k)\exp(ikx)$,

$$|h(x, k)| \leqslant 1 + x\int_{-\infty}^{x} |Q(v)|\,|h(v, k)|\,dv + \int_{-\infty}^{\infty} (-v)\,|Q(v)|\,|h(v, k)|\,dv,$$

доказать следующую оценку:

$$|h(x, k) - 1| \leqslant K_5(1 + \max(x, 0)) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |v|)|Q(v)|\,dv.$$

3. Доказать неравенство (3.3.32). Необходимо рассмотреть отдельно два случая: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 0$. Итерируя (3.3.32), показать, что

$$|h_k(x, k)| \leqslant K(1 + \max(x, 0)) \exp M(x)$$

и, таким образом, вывести первую оценку в (3.3.34).

4. Показать, что

$$|h_x(x, k)| \leqslant K(1 + |k|)^{-1} \int_{-\infty}^{x} (1 + |v|)Q(v)|\,dv, \quad x \in \mathbb{R},$$

и, таким образом, доказать вторую оценку в (3.3.34).

5. Рассмотрим решение вида $\varphi^1(x) = f(x)\varphi(x, 0)$ уравнения $-y_{xx} + Qy = 0$. Показать, что решением является функция

$$\varphi^1(x) = \left(\int^{x} \varphi^{-2}(v, 0)\,dv\right)\varphi(x, 0), \quad \varphi^1(x) = x + o(1) \text{ при } x \to \infty,$$

и заключить, что $\varphi^1 \equiv \tilde{\varphi}$.

6. Усилить оценку, данную в лемме 3.3.2.

$$\varphi(x, k)\, e^{ikx} = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{x} \left(e^{2(ik(x-v))} - 1\right) Q(v)\,dv +$$

$$+ \frac{1}{2(2ik)^2}\left(\int_{-\infty}^{x} Q(v)\,dv\right) + o(1/|k|^2) \text{ при } |k| \to \infty.$$

Эта формула может быть упрощена, если $Q_x \in L^2(\mathbb{R})$.

7. Показать, что если функция Q имеет n производных, принадлежащих $L^1(\mathbb{R})$, то

$$R_+(k) = o\left(1/|k|^{n+1}\right) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty.$$

8. Рассмотрим оператор Шрёдингера $\mathbf{L}_D = -\partial^2/\partial x^2 + Q$, действующий в пространстве $L^2(-\infty, x_0)$ с условием Дирихле в точке x_0. Показать, что $\varphi(x, k)$, $\operatorname{Im} k > 0$, имеет конечное число простых нулей $k_j = i\eta_j$, $\eta_j > 0$ и не имеет вещественных нулей, кроме, возможно, $k = 0$, который называется виртуальным собственным значением.

9. Используя оператор, определенный в предыдущей задаче, показать, что число собственных значений оператора $\mathbf{L}_D$ равно

числу нулей функции $\varphi(x, 0)$. Далее, рассматривая пару последовательных нулей функции $\varphi(x, 0)$, например, $a < b$, показать, что

$$\varphi(x, 0) = \varphi_x(a, 0)(a - x) + \int_a^x Q(v)(v - x)\varphi(v, 0)\,dv, \quad a < x < b,$$

и, рассматривая случай $\varphi(x, 0) \leqslant 0$, $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$, вывести, что если n — число собственных значений оператора $\mathbf{L}_D$, то

$$n \leqslant \int_{-\infty}^{x_0} (x_0 - v)\,|Q(v)|\,dv < \infty.$$

10. Рассмотреть потенциальный барьер

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

и показать, что для фиксированного $k \neq 0$ функция $\varphi(x, k)\, e^{ikx}$ является ограниченной, в то время как для $k = 0$, $\varphi(x, 0)$ имеет линейный рост при $x \to +\infty$. Сравнить это с общим поведением функции φ, представленным формулой (3.3.27).

11. Для системы первого порядка (3.3.12) определим решения Йоста для вещественного k следующими граничными условиями:

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi e^{ikx} = \begin{pmatrix} 2ik \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \to -\infty} \bar{\varphi} e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \psi e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 2ik \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \to +\infty} \bar{\psi} e^{ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Установить условия, которым должна удовлетворять функция Q для существования и единственности этих решений и их аналитических продолжений на комплексную плоскость k. Ввести функции $a(k)$, $\bar{a}(k)$, $b(k)$ и $\bar{b}(k)$ при помощи соотношений

$$\varphi(k) = a(k)\bar{\psi}(k) + b(k)\psi(k),$$
$$\bar{\varphi}(k) = \bar{a}(k)\psi(k) + \bar{b}(k)\bar{\psi}(k)$$

и исследовать их аналитические свойства, используя технику, аналогичную той, которая была применена в разд. 3.3. В частности, показать, что a имеет лишь конечное число нулей.

12. Вычислить несколько первых членов разложения a при больших значениях k:

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,dv + \frac{1}{2} \frac{1}{2ik^2} \int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\,dv + o(|k|^{-2})$$

при $|k| \to \infty$.

Заключить отсюда, что если $\lambda_0 = -\eta_0^2$ — наибольшее собственное значение, то

$$|\lambda_0| \approx \left(\int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\, dv \right)^2,$$

и что собственные значения отсутствуют, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(v)\, dv < 0.$$

13. Из задачи 9 к разд. 3.3 ясно, что для операторов Дирихле на пространствах $L^2(-\infty, 0)$ и $L^2(0, \infty)$ справедливы оценки

$$n_{-\infty} \leqslant -\int_{-\infty}^{\infty} v\,|Q(v)|\, dv, \quad n_{+\infty} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} v\,|Q(v)|\, dv$$

для числа собственных значений в их спектрах. Вывести отсюда, что число собственных значений оператора Дирихле на пространстве $L^2(-\infty, 0) \oplus L^2(0, \infty)$ имеет следующее ограничение:

$$n_D \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |v|\,|Q(v)|\, dv.$$

Однако из принципа максимума и теоремы об отображении спектров можно показать, что $M = n + 1$, так что

$$M \leqslant 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |v|\,|Q(v)|\, dv.$$

14. Исходя из представления (3.3.64), исследовать поведение a и b при $|k| \to 0$. В частности, получить уравнение (3.3.66)

15. Рассмотреть однопараметрическое семейство потенциалов:

$${}_aQ = \begin{cases} a, & -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ -1, & -1 \leqslant x \leqslant +1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и найти решение Йоста $\varphi(x, k)$. Для случая $a = -4\pi^2$ определить число собственных значений оператора Шрёдингера, вычислив для этого число нулей функции $\varphi(x, 0)$. Сравнить с границей, данной в задаче (3.3.14).

Показать, что существует единственное значение $a = a_0$, такое, что $\varphi(x, 0) = \text{const}$ для $x > 0$, и, таким образом, функции $\varphi(x, 0)$ и $\psi(x, 0)$ линейно зависимы. Вывести, что ${}_aR_+(0) = -1$ для $a \neq a_0$, но что ${}_{a_0}R_+(0) = -1$; поэтому независимо от того, как сходится ${}_aQ$, соответствующая последовательность коэффициентов отражения ${}_aR_+(0)$ не сходится равномерно в окрестности нуля.

16. Вывести из уравнения (3.3.64), что если функция Q имеет компактный носитель, то функции R_+ и T_+ аналитичны по k во всей комплексной плоскости k. Если носителем Q является полупрямая, показать из (3.3.64) и аналогичных уравнений для представления функции ψ, что T_+ аналитична во всей комплексной плоскости k, в то время как R_+ аналитична в верхней полуплоскости.

Раздел 3.4

1. Рассмотрим *комплексное* изоспектральное уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Qy = k^2 y.$$

Повторите анализ этой главы для такого уравнения. В частности, исследуйте разложение единицы для этой задачи. Заметим, что присутствие *спектральных особенностей*, т. е. таких вещественных k, что $a(k) = 0$, вызывает некоторые сложности со сходимостью разложения. Придется либо ограничить класс рассматриваемых функций из пространства $L^2(\mathbb{R})$, либо ввести подходящую регуляризацию расходящихся интегралов, с тем чтобы разложение функции $v \in L^2(\mathbb{R})$ по собственным функциям было корректно определено. Являются ли простыми собственные значения в этой задаче и где они локализованы?

2. Доказать формулы (3.4.32), предполагая, что $v \in L^2(\mathbb{R})$ имеет разложение

$$v = v_\psi \psi + v_{\psi *} \psi^* + \sum_{j=1}^{M} v_j \psi_j.$$

Использовать формулы для определения коэффициентов разложения и вывести из него разложение единицы.

3. Доказать существование и единственность решения задачи Гурса, которая ставится равенством (3.4.74).

4. Ввести множество решений изоспектрального уравнения Шрёдингера (3.3.1), определяемое граничными условиями

$$g_1(0) = 1, \quad g_{1x}(0) = ik,$$
$$g_2(0) = 1, \quad g_{2x}(0) = -ik,$$

и показать, что вектор-строка $G = (g_1, g_2)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(x, k) = G_0(x, k) + k^{-1} \int_0^x \operatorname{sh}(x - y) Q(y) G(y, k)\, dy,$$

где $G_0(x, k) = (\exp(ikx), \exp(-ikx))$. Доказать, что компоненты вектора G являются целыми функциями от k. Положите

$$G(x, k) = H(x, k)\, \mathbf{B}(k), \quad \text{где} \quad H = (\psi, \varphi),$$

и определите $\mathbf{B}$. Определите матрицу Йоста формулой

$$\mathbf{J}(k) = T^{-1}(k)\,\mathbf{B}(k)$$

и покажите, что $\det \mathbf{J}(k) = T^{-1}(k)$, так что связанные состояния определяются равенством

$$\det \mathbf{J}(k) = 0.$$

Интерпретируйте собственные функции матрицы $\mathbf{J}$.

Раздел 3.5

1. Определим операторы:

$$\mathbf{B}_{\bar{\psi}} \equiv \mathbf{B}_{\varphi} = -\left[4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + q\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{2}q_x - 4ik^3\right],$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\varphi}} \equiv \mathbf{B}_{\psi} = -\left[4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + q\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{2}q_x + 4ik^3\right].$$

Эти операторы образуют пары Лакса с изоспектральным оператором Шрёдингера для уравнения КдФ, как показано в разд. 3.2. Заметим, в частности, что равенства $\bar{\psi}_t = \mathbf{B}_{\bar{\psi}}\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}_t = \mathbf{B}_{\bar{\varphi}}\bar{\varphi}$, $\psi_t = \mathbf{B}_{\psi}\psi$ и $\varphi_t = \mathbf{B}_{\varphi}\varphi$ убеждают в том, что граничные условия, определяющие решения Йоста, выполнены для всех t. Показать, что поскольку для всех вещественных k

$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi,$$

то $R_{+t} = 8ik^3R_+$, и получить эволюционное уравнение для нормировочной постоянной собственных функций для этой задачи рассеяния.

2. Покажите, что

$$\frac{d}{dk}\log a(k) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\psi\varphi}{a} - 1\right)dx,$$

исходя из уравнения Шрёдингера.

3. Используя определение a в терминах вронскиана функций φ и ψ и уравнение Шрёдингера, получить рекуррентную формулу для коэффициентов в асимптотическом разложении $\log a$ при $|k| \to \infty$. Вычислить первые три нетривиальных члена этого разложения и сравнить их с (3.5.76).

4. Вывести представление производной Фреше для функционалов $\mathcal{F}(Q)$, включающих в свое определение как производные, так и интегралы от Q, если дано, что $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и Q является функцией Шварца общего типа.

5. Исходя из определения

$$\mathrm{Tr}\left((\mathbf{L} - k^2)^{-1} - (L_0 - k^2)^{-1}\right) = -\frac{1}{2k}\frac{d}{dk}\log a(k)$$

и беря Δ-вариацию, вывести формально (3.5.52) (вам следует использовать представление ядра резольвенты, данное в теореме 3.9).

4. ОБРАТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ИЗОСПЕКТРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ РАЗРЕШИМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Обратная задача рассеяния и уравнение Марченко для изоспектрального уравнения Шрёдингера

Обратная задача рассеяния для уравнения Шрёдингера состоит в том, чтобы реконструировать потенциал по асимптотическим данным, которые получаются в результате процесса рассеяния. Примеры такой процедуры рассматривались в разд. 2.2. Первые попытки решения обратной задачи были предприняты Фрёбергом [1948] и Хиллераасом [1948]. Однако Баргманн [1949], построив контрпримеры, показал, что их решения не являлись единственными. Их ошибка состояла в том, что они использовали в качестве асимптотических данных лишь матрицу рассеяния вместо данных рассеяния (S_+ или S_-). Данные рассеяния полностью определяют (матричную) спектральную функцию распределения, которую можно связать с уравнением Шрёдингера при данных граничных условиях (см. разд. 3.4). В результате исследований некоторых советских математиков было установлено, что задание спектральной функции распределения, подчиненной некоторым условиям, необходимо и достаточно для того, чтобы потенциал мог быть восстановлен единственным образом.

Для нас в этой работе интереснее всего то, что потенциал может быть найден из решения линейного интегрального уравнения, включающего в себя данные рассеяния, так что если $S_\pm(t)$ определено таким способом, который был указан в разд. 3.5, по начальным данным $S_\pm(0)$ при $t = 0$, то мы можем в принципе построить $Q(x, t)$ в произвольный последующий момент времени по начальному состоянию $Q(x, 0)$. Это линейное интегральное уравнение называется либо уравнением Гельфанда — Левитана [1951], либо уравнением Марченко (Марченко и Агранович [1963]). Различие состоит в том, что в одном случае граничные условия обратной задачи регулярны, а в другом — нерегулярны. Поскольку фундаментальными решениями для нашей задачи являются решения Йоста, соответствующее интегральное уравнение есть уравнение Марченко.

Главной целью настоящего раздела является вывод уравнения Марченко для уравнения Шрёдингера на вещественной оси и

нахождение таких ограничений на данные рассеяния, которые гарантируют единственность решения Q, удовлетворяющего условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\,|Q(x)|\,dx<\infty.$$

Самый прямолинейный способ вывода исходит из фундаментального соотношения (3.3.59):

$$T_+(k)\varphi(x,\ k)=\psi^*(x,\ k)+R_+(k)\psi(x,\ k), \tag{4.1.1}$$

где

$$T_+=a^{-1}\ \text{и}\ R_+=ba^{-1}$$

— непрерывные ограниченные функции, и по лемме 3.6

$$R_+(k)=O(1)\quad\text{при}\quad|k|\to\infty,$$
$$T_+(k)=O(|k|^{-1})\quad\text{при}\quad k\to\infty. \tag{4.1.2}$$

Эти свойства элементов матрицы рассеяния вместе с граничными условиями, определяющими решения Йоста (3.3.2), гарантируют существование интегралов в преобразовании Фурье от (4.1.1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(T_+(k)-1)\varphi(x,\ k)e^{iky}\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_+(k)\left(\psi(x,k)-e^{ikx}\right)e^{iky}\,dk+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_+(k)e^{ik(x+y)}\,dk+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^*(x,\ k)-e^{-ikx}\right)e^{iky}\,dk+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ikx}-\varphi(x,\ k)\right)e^{iky}\,dk. \tag{4.1.3}$$

Определим преобразование Фурье для функции $f\in L^{12}(\mathbb{R})=L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\widehat{f}(x)=(2\pi)^{-1/2}\mathbf{T}f(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)e^{ikx}\,dx,$$
$$\widetilde{f}(k)=(2\pi)^{1/2}\mathbf{T}^*f(k)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ikx}\,dx, \tag{4.1.4}$$

где $\mathbf{T}$ — унитарный оператор. Тогда поскольку

$$\langle f,\ g\rangle=\langle\mathbf{T}^*\mathbf{T}f,\ g\rangle=\langle\mathbf{T}f,\ \mathbf{T}g\rangle, \tag{4.1.5}$$

$$(2\pi)^{-1/2}\mathbf{T}\left(e^{iky}f(k)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)e^{ik(x+y)}\,dk=\widehat{f}(x+y),$$

то первый интеграл в правой части уравнения (4.1.3) можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_+(k)\left(\psi(x,\ k)-e^{ikx}\right)e^{iky}\,dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\langle \mathbf{T}\left(e^{iky}R_+(k)\right),\ \mathbf{T}\left(\psi(x,\ k)-e^{ikx}\right)^*\right\rangle=$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{R}_+(u+y)\,\mathbf{T}^*\left(\psi(x,\ k)-e^{ikx}\right)(u)\,du. \qquad (4.1.9)$$

В разд. 3.4 мы определили операторы преобразования $\mathbf{U}_+$, $\mathbf{U}_-$, имеющие вещественные ядра

$$\psi(x,\ k)=\mathbf{U}_+e^{ikx}\equiv e^{ikx}+\int_{-\infty}^{\infty}K_+(x,\ y)\,e^{iky}\,dy, \qquad (4.1.7)$$

$$\varphi(x,\ k)=\mathbf{U}_-e^{-ikx}\equiv e^{-ikx}+\int_{-\infty}^{\infty}K_-(x,\ y)\,e^{-iky}\,dy. \qquad (4.1.8)$$

Используя (4.1.7), получим

$$\mathbf{T}^*\left(\psi(x,k)-e^{ikx}\right)(u)=\mathbf{T}^*\int_{-\infty}^{\infty}K_+(x,\ y)\,e^{iky}\,dy\,(u)=$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}K_+(x,\ y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(y-u)}\,dk\,dy=(2\pi)^{1/2}K_+(x,\ u). \qquad (4.1.9)$$

Преобразования (4.1.7) и (4.1.8) позволяют и другие члены правой части равенства (4.1.3) переписать с использованием ядер K_+, K_- операторов преобразования:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(T_+(k)-1\right)\varphi(x,\ k)\,e^{iky}\,dk=$$

$$=\int_{x}^{\infty}\widehat{R}_+(u+y)\,K_+(x,\ u)\,du+\widehat{R}_+(x+y)+K_+(x,\ y)-K_-(x,\ y). \qquad (4.1.10)$$

Интеграл в левой части (4.1.10) вычисляется интегрированием по контуру Γ_R, состоящему из отрезка прямой $(-R,\ R)$ и полуокружности C_R радиуса R в верхней полуплоскости переменной k,

который надо обходить в направлении против часовой стрелки. Тогда в пределе при $R \to \infty$ получим

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}(T_+(k)-1)\,\varphi(x,\,k)\,e^{ikx}\,dk\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(T_+(k)-1)\,\varphi(x,\,k)\,e^{iky}\,dk+$$

$$+\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}(T_+(k)-1)\,\varphi(x,\,k)\,e^{iky}\,dk\right\}. \quad (4.1.11)$$

Второй интеграл в правой части (4.1.11) в пределе обращается в нуль, и поэтому по теореме о вычетах получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(T_+(k)-1)\,\varphi(x,\,k)\,e^{iky}\,dk=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\operatorname{Res}_{k=i\eta_j}\{T_+(k)\,\varphi(x,\,k)\,e^{iky}\}, \quad (4.1.12)$$

где $\lambda_j=-\eta_j^2\in\sigma(\mathbf{L})$ — спектр оператора $\mathbf{L}$. В разд. 3.4 мы ввели нормировочные постоянные $D_{+j}^{-1}\equiv ic_j^{-1}a_j=\langle\psi_j,\,\psi_j\rangle$, где $\varphi_j=c_j\psi_j$ — собственные функции оператора $\mathbf{L}$. Теперь из (4.1.7) мы можем вывести выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(T_+(k)-1)\,\varphi(x,\,k)\,e^{iky}\,dk=i\sum_{j=1}^{M}D_{+j}\left(e^{-\eta_j(x+y)}+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}K_+(x,\,u)\,e^{-\eta_j(y+u)}\,du\right). \quad (4.1.13)$$

Если мы подставим (4.1.13) в (4.1.10), то после некоторых преобразований мы получим уравнение Марченко, зависящее от времени:

$$K_+(x,\,y,\,t)+\Omega_+(x+y,\,t)+\int_x^{\infty}K_+(x,\,u,\,t)\,\Omega_+(u+y,\,t)\,du=0,$$

$$y\geqslant x, \quad (4.1.14)$$

$$\Omega_+(x,\,t)=\widehat{R}_+(x,\,t)+\sum_{j=1}^{M}D_{+j}(t)\,e^{-\eta_j x}.$$

Зависимость от времени t, которое входит в качестве параметра в это уравнение, будет опускаться повсюду до конца этого раздела, так как все расчеты делаются для фиксированного момента времени.

Аналогичное уравнение может быть получено для ядра K_-:

$$K_-(x, y, t) + \Omega_-(x+y, t) + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, u, t)\,\Omega_-(u+y, t)\,du = 0, \quad y \leqslant x, \quad (4.1.15)$$

$$\Omega_-(x, t) = \widehat{R}_-(x, t) + \sum_{j=1}^{M} D_{-j} e^{\eta_j x}$$

и $D_j^{-1} = ic_j \dot{a}_j$, так что $D_{-j}D_{+j} = -\dot{a}_j^2$. Заметим, что Ω_+ и Ω_- определены, если известны данные рассеяния S_+ или S_-, и что из (3.4.79) получаем

$$Q(x, t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x, x, t) = 2\frac{d}{dx}K_-(x, x, t). \quad (4.1.16)$$

Таким образом, если решение любого уравнения Марченко определено, при условии, конечно, что оно существует и единственно, то потенциал Q вполне определен.

Теперь мы получим условия, которым должны подчиняться данные рассеяния для того, чтобы потенциал Q удовлетворял условию $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$. Условия, которым должны удовлетворять данные рассеяния для того, чтобы выполнялось условие $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+|x|)\,dx < \infty$, неизвестны до настоящего времени (Дейфт и Трубовиц [1979]). Конечно, данные рассеяния должны подчиняться добавочным условиям, если потенциал Q должен быть решением разрешимого уравнения. Эти особые условия выводятся в разд. 4.2. Читатели, которые главным образом интересуются решениями разрешимых уравнений, могут не заниматься детальным изучением материала этого раздела. Основные его итоги формулируются в теореме 4.3.

Теперь мы будем работать только с уравнением Марченко (4.1.14) и приводить аналогичные результаты для уравнения (4.1.15). Мы начнем с исследования условий, которым должны удовлетворять данные рассеяния, если потенциал Q удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$.

Полагая $y = x$ в уравнении (4.1.14), мы получим формулу

$$K_+(x, x) + \Omega_+(2x) + \int_{x}^{\infty} K_+(x, u)\,\Omega_+(x+u)\,du = 0, \quad (4.1.17)$$

которую мы будем рассматривать как уравнение для Ω_+. Для простоты обозначений мы будем опускать в дальнейших выклад-

ках нижний индекс «+» в функциях, входящих в это уравнение. Дифференцируя уравнение (4.1.17) по x, получим

$$\Omega_x(2x) - \frac{1}{2}Q(x) + \int_x^\infty K_+(x, u)\,\Omega(x+u)\,du + \int_x^\infty K(x, u)\,\Omega_x(x+u)\,du - K(x, x)\,\Omega(2x) = 0. \quad (4.1.18)$$

Если мы определим

$$I(x) = \int_x^\infty K_x(x, u)\,\Omega(x+u)\,du, \quad (4.1.19)$$

то при использовании (3.4.79) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}I(x) &= Q(x)\int_x^\infty K(x, u)\,\Omega(x+u)\,du + \int_x^\infty K_{uu}(x, u)\,\Omega(x+u)\,du + \\ &+ \int_x^\infty K_x(x, u)\,\Omega_x(x+u)\,du - K_x(x, x)\,\Omega(2x) = \\ &= Q(x)\left[\int_x^\infty K(x, u)\,\Omega(x+u)\,du + K(x, x) + \Omega(2x)\right] - \\ &- Q(x)\,K(x, x) - \frac{d}{dx}\left(\int_x^\infty \Omega(x+u)\,K_x(x, u)\,du\right) = \\ &= \frac{d}{dx}\left(K^2(x, x) - \int_x^\infty \Omega(x+u)\,K_u(x, u)\,du\right). \quad (4.1.20)\end{aligned}$$

Уравнение (4.1.18) теперь можно переписать в виде

$$\Omega_x(2x) - \frac{1}{2}Q(x) + 2\int_x^\infty K(x, u)\,\Omega_x(x+u)\,du + K^2(x, x) = 0. \quad (4.1.21)$$

Из свойств ядра $K(x, u)$ мы можем определить операцию свертки «*» следующим образом:

$$({}_xK *_x K)(u) = \int_{-\infty}^\infty K(x, 2u-y)\,K(x, y)\,dy, \quad u \geqslant x. \quad (4.1.22)$$

Тогда

$$\int_x^\infty \Omega_u(2u)({}_xK *{}_xK)(u) = \int_x^\infty K(x,y) \int_{(1/2)(x+y)}^\infty K(x,2u-y)\Omega_u(2u)\,du\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_x^\infty K(x,y)\,(\Omega_y(x+y) + K_y(x,y))\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}K^2(x,x) - \frac{1}{2}\int_x^\infty K(x,y)\,\Omega_x(x+y)\,dy, \tag{4.1.23}$$

где мы использовали производную по y от уравнения Марченко. Комбинация уравнений (4.1.21) и (4.1.23) дает уравнение, которое можно проитерировать для $\Omega_+(2x)$:

$$\Omega_x(2x) = \frac{1}{2}Q(x) + \int_x^\infty P(x,y)\,\Omega_y(2y)\,dy, \tag{4.1.24}$$

где

$$P(x,y) = 4\,(K(x,2y-x) + ({}_xK *{}_xK)(y)).$$

Поскольку итерации интегрального уравнения Вольтерры всегда сходятся, мы можем использовать оценку

$$K(x,y) \leqslant C(x)\,R_0\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leqslant C(a)\,R_0\left(\frac{1}{2}(x+y)\right),$$

$$-\infty < a \leqslant x \leqslant y, \tag{4.1.25}$$

выведенную из неравенства (3.4.61), чтобы получить оценку для $\Omega_+(2x)$. Здесь и в следующем разделе $C_j(x)$ — монотонная функция, ограниченная при $x \to +\infty$ и, вообще говоря, возрастающая при $x \to -\infty$. Нетрудно показать, что $kR_+T_+^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$, $(T_+ - 1) \in L^2(\mathbb{R})$ и что

$$kR_+ = kR_+T_+^{-1} + kR_+(T_+ - 1)\,T_+^{-1}; \tag{4.1.26}$$

отсюда следует, что

$$\frac{d}{dx}\widehat{R}_+(x)^\vee = \check{g}_1 + \check{g}_2, \tag{4.1.27}$$

где $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ и $g_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Итерация уравнения (4.1.24) и использование оценки (4.1.25) вместе с разложением (4.1.27) позволяют вывести следующую оценку:

$$\left|\frac{1}{2}Q(x) - \Omega_x(2x)\right| < C_1(x)\,R_0^2(x). \tag{4.1.28}$$

Поскольку $\Omega_+(2x)$ локально принадлежит L^1, мы отсюда выводим, что $\Omega_+(2x)$ абсолютно непрерывна.

Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+|x|^n)\,dx < \infty$; тогда поскольку

$$|\Omega_x(2x)| = \left|\left(\frac{1}{2}Q(x) - \Omega_x(2x)\right) - \frac{1}{2}Q(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{2}Q(x) - \Omega_x(2x)\right| + \left|\frac{1}{2}Q(x)\right|, \qquad (4.1.29)$$

то для $-\infty < a < x$

$$\int\limits_x^\infty |\Omega_y(2y)|(1+|y|^n)\,dy \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty |Q(y)|(1+|y|^n)\,dy +$$
$$+\int\limits_x^\infty C_1(y)R_0^2(y)(1+|y|^n)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty |Q(y)|(1+|y|^n)dy + C_1(a)\int\limits_x^\infty R_0(y)\,dy\int\limits_y^\infty |Q(s)|(1+|s|^n)ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_x^\infty |Q(y)|(1+|y|^n)\,dy\left(\frac{1}{2} + C_1(a)\int\limits_x^\infty (x-a)|Q(x)|\,dx\right) < C_2(x) < \infty \qquad (4.1.30)$$

при условии, что, кроме того, $P_1(\infty) < \infty$. Таким образом, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$, то Ω_x удовлетворяет условию $\int\limits_a^\infty |\Omega_x(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$, $-\infty < a \leqslant x$. Поскольку функция Ω абсолютно непрерывна с граничным условием $\Omega(\infty) = 0$, то из этого условия мы получаем

$$\int\limits_a^\infty |\Omega(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^\infty dx\int\limits_a^\infty |\Omega_y(y)|\,dy = \int\limits_a^\infty (x-a)|\Omega_x(x)|\,dx \leqslant C_3(a) < \infty. \qquad (4.1.31)$$

В случае Ω_- функции C_i и R_0 заменяются функциями D_i и P_0 в соотношениях, подобных (4.1.28), (4.1.30) и (4.1.31). В этом случае, однако, D_i — монотонно неубывающие функции, ограниченные при $x \to \infty$ и, вообще говоря, возрастающие при $x \to -\infty$.

Функции $\hat{R}_+$, $\hat{R}_-$ отличаются от Ω_+, Ω_- только экспоненциально убывающими слагаемыми при $x \to \infty$, $x \to -\infty$ соответственно. Поэтому кроме условий теоремы 3.7, данные рассеяния должны удовлетворять дополнительным условиям, данным в теореме 4.1, если потенциал Q удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$.

Теорема 4.1. *Преобразования Фурье $\hat{R}_+$, $\hat{R}_-$ от коэффициентов рассеяния $R_+ = ba^{-1}$, $R_- = -b^*a^{-1}$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям*

$$\int_a^{\infty} |R_{+x}(x)|(1+x^2)\,dx < C_3(a) < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{b} |\hat{R}_{-x}(x)|(1+x^2)\,dx < D_3(a) < \infty$$

для всех $a > -\infty$, $b < \infty$, *если* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$.

Теперь мы видим, что необходимые условия, которые даются теоремами 3.7 и 4.1 для данных рассеяния, являются также достаточными для единственности восстанавливаемой функции Q рассеивающего потенциала для уравнения Шрёдингера и, кроме того, обеспечивают выполнение условия $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$. Этот результат может быть доказан, если мы докажем справедливость утверждений, содержащихся в следующих пяти шагах, в которых мы предполагаем, без ограничения общности, что S_+ задано. Сначала мы опишем в общих чертах шаги доказательства, а затем обсудим каждый из шагов более детально.

Шаг 1.

Пусть дано, что S_+ удовлетворяет условиям

$$|R_+(k)| \leqslant 1, \quad R_+(-k) = R_+^*(k) \text{ и } \int_a^{\infty} |\hat{R}_{+x}(x)|(1+x^2)\,dx < C_3(a),$$

$a > -\infty$, где C_3 — неубывающая функция, ограниченная при $x \to +\infty$ и возрастающая при $x \to -\infty$. Построим

$$\Omega_+(x) = \hat{R}_+(x) + \sum_{j=1}^{M} D_{+j} e^{-\eta_j x}.$$

Здесь M — число «собственных значений» $\lambda_j = -\eta_j^2$, $\eta_j > 0$, а положительные вещественные числа D_{+j}, $j = 1, \ldots, M$, — соответствующие «нормировочные постоянные». Построим унитарную матрицу рассеяния $\widetilde{S}(k)$ и проверим, что она является непрерывной функцией от переменной k и что выполняются условия

(i) $T_+(k) = \alpha k + O(|k^2|)$ при $|k| \to 0$,

(ii) $T_+(k) \geqslant C \neq 0$ при $|k| \to 0$.

Докажем, что при этих условиях решение $K_+(x, y)$ уравнения Марченко (4.1.14) существует и единственно. Докажем, что производные от $K_+(x, y)$ существуют, и выведем оценки для K_+ и ее производных.

Шаг 2.

Построим $u_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K_+(x, y)\, e^{iky}\, dy$ и

$$v_1(x, k) = u_1(x, -k) + R_+(k)\, u_1(x, k), \quad \operatorname{Im} k = 0$$

и покажем, что если $R_+(k) = O(1/|k|)$ при $|k| \to \infty$, то из шага 1 следует, что u_1 и v_1 являются единственными функциями, такими что:

(a) u_1 и v_1 могут быть аналитически продолжены в области $\operatorname{Im} k > 0$ таким образом, что $\exp(-ikx)\, u(x, k)$ ограничена для $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, и v_1 имеет простые полюсы в точках $k_j = i\eta_j$, $j = 1, \ldots, M$.

(b) Вычеты функции v_1 связаны со значениями функции u_1 для $k = i\eta_j$ соотношениями

$$\operatorname{Res}_{k=i\eta_j}(v_1(x, k)) = -iD_{+j}u_1(x, i\eta_j), \quad j = 1, \ldots, M.$$

(c) На вещественной оси

$$u_1(x, -k) = u_1^*(x, k), \quad v_1(x, -k) = v_1^*(x, k).$$

(d) Для $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$,

$$u_1(x, k)\, e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad v_1(x, k)\, e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Шаг 3.

Исходя из матрицы рассеяния $\widetilde{S}$, проверим, что

$$\int_{-\infty}^{b} |\widehat{R}_{-x}(x)|\,(1 + x^2)\, dx < D_3(b),$$

где D_3 — неубывающая функция, ограниченная при $x \to -\infty$. Вычислим $D_{-j} = -a_j D_{+j}$, $j = 1, \ldots, M$, где $a(k) \equiv T_+^{-1} = T_-^{-1}$. Построим

$$\Omega_-(x) = \widehat{R}_-(x) + \sum_{j=1}^{M} D_{-j} e^{\eta_j x}$$

и повторим шаги 1 и 2, используя уравнение Марченко (4.1.15) для ядра $K_-(x, y)$ и функций

$$u_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, y)\, e^{-iky}\, dy,$$

$$v_2(x, k) = R_-(k)\, u_2(x, k) + u_2(x, -k), \quad \operatorname{Im} k = 0.$$

Заменим в шаге 2 функции u_1, v_1, R_+ на u_2, v_2, R_-, тогда в части (b) имеем соотношение

$$\operatorname{Res}_{k=i\eta_j}(v_2(x, k)) = iD_{-j}u_2(x, i\eta_j), \quad j = 1, \ldots, M.$$

Шаг 4.

Установим, что функции u_l являются решениями уравнения Шрёдингера

$$-u_{lxx}(x, k) + Q_l(x)\, u_l(x, k) = k^2 u_l(x, k), \quad l = 1, 2,$$

где $Q_1(x) = -2\frac{d}{dx}K_+(x, x)$, $Q_2(x) = 2\frac{d}{dx}K_-(x, x)$, и, кроме того,

$$\int_a^{\infty} |Q_1(x)|\,(1 + x^2)\, dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{b} |Q_2(x)|\,(1 + x^2)\, dx < \infty.$$

Шаг 5.

Функции u_l удовлетворяют соотношениям

$$T_-u_1(x, k) = R_-(k)\, u_2(x, k) + u_2(x, -k),$$

$$T_+u_2(x, k) = R_+(k)\, u_1(x, k) + u_1(x, -k),$$

где $T_+ = T_-$. Из этого мы заключаем, что $Q \equiv Q_1 = Q_2$ и что обратная задача имеет единственное решение Q, удовлетворяющее ограничению $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|\,(1 + x^2)\, dx < \infty$. Функции u_1, u_2 являются решениями Йоста ψ, φ.

Теперь, когда мы описали в общих чертах эти пять этапов, обсудим каждый из них более детально.

Шаг 1.

$T_+^{-1}(k)$ строится с использованием (3.4.61) (см. тем не менее примечания к этому разделу в конце главы). Условия шага 1 проверяются для матрицы рассеяния

$$\tilde{\mathbf{S}}(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix},$$

где $|T_+|^2 + |R_+|^2 = 1$ и $R_+ = ba^{-1}$, $R_- = -b^*a^{-1}$. Перепишем уравнение (4.1.14), опуская зависимость от t, как операторное уравнение:

$$ {}_xh(y) + {}_xg(y) + {}_xN\,{}_xh(x) = 0, \tag{4.1.32} $$

где ${}_xh(y) \equiv K_+(x, y)$, $y \geqslant x$; ${}_xg(y) \equiv \Omega_+(x+y)$, $y \geqslant x$ и ${}_xNf(y) = \int_x^\infty \Omega_+(u+y) f(u)\,du$, $y \geqslant x$, $f \in L^1(x, \infty)$. Уравнение (4.1.32) — *уравнение Фредгольма второго рода*. Функция ${}_xg$ абсолютно интегрируема и ограничена на интервале $[x, \infty[$ (см. уравнение (4.1.31)). Из этого следует, что она, кроме того, квадратично интегрируема, т. е. ${}_xg \in L^{12}(x, \infty)$. Для того чтобы доказать существование и единственность решения уравнения (4.1.32), которое тоже принадлежит пространству $L^2(x, \infty)$, применим *теоремы альтернативы Фредгольма*. Для начала докажем, что ${}_xN$ является вполне непрерывным оператором в пространстве $L^{12}(x, \infty)$. Положим

$$ p(x) = \int_x^\infty |\Omega_{+u}(u)|\,du. \tag{4.1.33} $$

Используя условия на S, видим, что $p(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $[a, \infty[$, $a > -\infty$, и

$$ |\Omega_+(x)| \leqslant \int_x^\infty |\Omega_{+u}(u)|\,du = p(x), \tag{4.1.34} $$

так что

$$ \int_x^\infty du \int_x^\infty dy\, |\Omega_+(u+y)|^2 \leqslant \left(\int_{2x}^\infty p(y)\,dy \right)^2 < \infty, $$

и, следовательно, оператор ${}_xN$ вполне непрерывен в пространстве $L^2(x, \infty)$. Аналогичным образом легко показать, что ${}_xN$ вполне непрерывен в пространстве $L^1(x, \infty)$, что является следствием абсолютной интегрируемости функции p.

Для того чтобы установить существование и единственность решения в пространстве $L^{12}(x, \infty)$, мы должны показать только, что однородное уравнение

$$ {}_xh(y) + {}_xN_xh(y) = 0 \tag{4.1.35} $$

имеет только тривиальное решение в пространстве $L^{12}(x, \infty)$. Предположим, что это не так и что решение ${}_xh(y) \in L^2(x, \infty)$ нетривиально. Поскольку $\Omega_+(x)$ вещественна, то мы без ограничения общности можем считать, что решение ${}_xh(y)$ тоже вещественное. Определим ${}_xh(y) = 0$, если $y < x$, умножим (4.1.35) на

${}_xh$ и затем проинтегрируем это выражение по всей оси $]-\infty, \infty[$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_xh^2(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} du\, {}_xh(y) \times \times \left\{ \sum_{j=1}^{M} D_{+j} e^{-\eta_j(u+y)} + R_+(u+y) \right\} {}_xh(u) = 0. \quad (4.1.36)$$

Так как $\langle \mathbf{T}\,{}_xh, \mathbf{T}\,{}_xh \rangle = \langle {}_xh, {}_xh \rangle$, то отсюда следует, что это можно записать в терминах преобразований Фурье следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ({}_x\bar{h}(k)\,{}_x\bar{h}(-k) + R_+(k)\,{}_x\bar{h}^2(k))\,dk + + \sum_{j=1}^{M} D_{+j}\,{}_x\bar{h}^2(i\eta_j)\,e^{-2\eta_j x} = 0. \quad (4.1.37)$$

Полагая

$$\begin{aligned} {}_xf &= {}_x\bar{h}(-k) + R_+(k)\,{}_x\bar{h}(k), \\ {}_xg &= |T_+(k)|\,{}_x\bar{h}(k), \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

мы найдем, что (4.1.37) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|{}_xf(k)|^2 + |{}_xg(k)|^2)\,dk + \sum_{j=1}^{M} D_{-j}\,{}_x\bar{h}^2(i\eta_j)\,e^{-2\eta_j x} = 0. \quad (4.1.39)$$

Поскольку решение ${}_xh(y)$ вещественно, то и ${}_xh(i\eta)$ вещественно, так что левая часть уравнения (4.1.39) содержит только положительные члены. Отсюда мы заключаем, что

$${}_xf(k) = {}_xg(k) = 0. \quad (4.1.40)$$

Из (4.1.38) и (4.1.40) можно вывести, что либо ${}_x\bar{h}(k) = 0$ ($T_+(k) > C$ при $|k| \to 0$), либо, в противном случае, ${}_x\bar{h}(k) = 0$, за исключением $k = 0$ ($T_+(k) = \alpha k + O(|k|)$ при $|k| \to 0$). В последнем случае $R_+(0) = -1$ и первое соотношение из (4.1.38) дает тогда, что ${}_x\bar{h}(k) = 0$ для всех k. Поэтому однородные уравнение (4.1.35) имеет только тривиальные решения. Таким образом, из того факта, что оператор ${}_x\mathbf{N}$ вполне непрерывен в пространстве $L^2(x, \infty)$, и теоремы альтернативы Фредгольма следует, что решение уравнения (4.1.32) существует и единственно в пространстве $L^2(x, \infty)$. Более того, оно разрешимо и в пространстве $L^1(x, \infty)$, поскольку

$$|{}_xh(y)| \leqslant \int_x^{\infty} |\Omega_+(u+y)|\,|{}_xh(u)|\,du \leqslant p(y+x) \int_x^{\infty} |{}_xh(u)|\,du \quad (4.1.41)$$

и $p(x)$ ограничена на интервале $[x, \infty[$, причем $p(\infty) = 0$. Таким образом, любое решение из $L^1(x, \infty)$ принадлежит также

и $L^2(x, \infty)$, потому что неравенство (4.1.41) показывает, что оно квадратично интегрируемо.

Для того чтобы закончить шаг 1, выведем теперь оценку для ядра $K_+(x, y)$ и его производных. Поскольку

$$\int_x^\infty |{}_x\mathbf{N} f(y)|\, dy \leqslant \int_x^\infty dy \int_x^\infty |f(u)|\, |\Omega_+(u+y)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_x^\infty |f(y)|\, dy\right)\left(\int_x^\infty |\Omega_+(y)|\, dy\right),$$

$$-\infty < a < x < \infty,\ f \in L^1(a, \infty), \quad (4.1.42)$$

то верна оценка

$$\|{}_x\mathbf{N}\|_1 \leqslant \int_x^\infty |\Omega_+(y)|\, dy \leqslant C_3(x), \quad (4.1.43)$$

где $\|\ \|_1$ — операторная норма в пространстве $L^1(x, \infty)$, $x \geqslant a > -\infty$. Уравнение (4.1.35) и соответствующее ему неоднородное уравнение имеют единственное решение, так что оператор $(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N})^{-1}$ существует и ограничен на $[a, \infty[$. Следуя рассуждениям Аграновича и Марченко [1964], можно показать, что $\|(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N})^{-1}\|_1$ — непрерывная функция от x. Поскольку $\|{}_x\mathbf{N}\| \to 0$ при $x \to \infty$, то

$$\max_{-\infty < a \leqslant x < \infty} \|(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N})^{-1}\|_1 = C(a). \quad (4.1.44)$$

Из (4.1.14) мы получаем

$$|K_+(x, y)| \leqslant p(x+y)\left(1 + \int_x^\infty |K_+(x, u)|\, du\right), \quad (4.1.45)$$

$$\int_x^\infty |K_+(x, y)|\, du \leqslant \|(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N})^{-1}\|_1 \int_x^\infty |\Omega_+(x-u)|\, du \leqslant C(a) C_3(2x), \quad (4.1.46)$$

так что

$$|K_+(x, y)| \leqslant C_4(x)\, p(x+y). \quad (4.1.47)$$

Исходя из (4.1.14), можно установить существование частных производных от ядра $K_+(x, y)$. Для того чтобы получить оценки производных, заметим сначала, что

$$\int_x^\infty |K_+(x, u)|\, |\Omega_{+y}(u+y)|\, du \leqslant C_4(x) \int_x^\infty p(x+u)\, |\Omega_{+y}(u+y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_4(x)\, p(x+y)\, p(2x), \quad (4.1.48)$$

$$|K_{+y}(x, y)| + |\Omega_{+y}(x+y)| \leqslant C_4(x)\, p(2x)\, p(x+y). \quad (4.1.49)$$

Подобным же образом из уравнения, которому удовлетворяет производная по x от K_+, мы получим

$$\int_x^\infty |K_{+x}(x, y)|\,dy \leqslant \|(\mathbf{1}-{}_x\mathbf{N})^{-1}\|_1 \left(\int_x^\infty |\Omega_{+x}(x+y)|\,dy + \right.$$
$$\left. + |K_+(x, x)| \int_x^\infty |\Omega(x+y)|\,dy\right) \leqslant C(a)\, p(2x)\,(1 + C_3(x)\, C_4(x)), \tag{4.1.50}$$

так что

$$|K_{+x}(x, y) - \Omega_x(x-y)| \leqslant C_5(x)\, p(2x)\, p(x+y), \tag{4.1.51}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{d}{dx} K_+(x, x) + \frac{d}{dx}\Omega_+(2x)\right| \leqslant C_6(x)\, p^2(2x). \tag{4.1.52}$$

Наконец, в результате получится

$$\int_a^\infty (1 + x^2)\left|\frac{d}{dx} K_+(x, x)\right| dx \leqslant \int_a^\infty (1+x^2)\left|\frac{d}{dx} K_+(x, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dx}\Omega_+(2x)\right| dx + \int_{2a}^\infty \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)\left|\frac{d}{dx}\Omega_+(x)\right| dx. \tag{4.1.53}$$

Второй интеграл в правой части (4.1.53) существует по нашему предположению. Для первого интеграла имеем

$$\int_a^\infty (1+x^2)\left|\frac{d}{dx} K_+(x, x) + \frac{d}{dx}\Omega_+(2x)\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant C_0(a) \int_a^\infty (1+x^2)\, p^2(2x)\, dx \leqslant C_7(a) \int_a^\infty p(2x)\, dx < \infty. \tag{4.1.54}$$

Последнее неравенство получается путем деления области интегрирования на интервалы $[a, -1[$, $[-1, 1]$, $]1, \infty[$. Подведем итоги шага 1 в следующей лемме.

Лемма 4.2. *Если Ω_+, построенная по S_+, удовлетворяет условию*

$$\int_a^\infty |\Omega_{+x}(x)|\,(1-x^2)\,dx < \infty, \quad a > -\infty,$$

и если $\hat{\mathbf{S}}(k)$, построенная из S_+, непрерывна, унитарна и обладает свойствами

(i) $R_+(-k) = R_-^*(k)$,

(ii) *либо* (a) $T_+(k) = T_-(k) = \alpha k + o(|k|)$ *при* $|k| \to 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$,

$R_{\pm}(k) + 1 = \beta_{\pm} k + o(|k|)$ *при* $|k| \to 0$, k *вещественное, либо* (b) $T_+(k) = T_-(k) = \text{const} > 0$ *при* $|k| \to 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$,

то решение уравнения Марченко (4.1.14), $K_+(x, y)$, *единственно. Более того, существуют первые производные от* $K_+(x, y)$, *и для них выполняются следующие оценки:*

$$|K_+(x, y)| \leqslant C_6(x)\, p(x+y),$$
$$|K_{+y}(x, y) - \Omega_{+y}(x+y)| \leqslant C_4(x)\, p(x+y)\, p(2x),$$
$$|K_{+x}(x, y) + \Omega_{+x}(x-y)| \leqslant C_5(x)\, p(2x)\, p(x+y),$$
$$\left|\frac{d}{dx} K_+(x, x) + \frac{d}{dx}\Omega_+(2x)\right| \leqslant C_6(x)\, p^2(2x)$$

для $-\infty \leqslant a < x < \infty$ *и*

$$\int_a^\infty \left|\frac{d}{dx} K_+(x, x)\right| (1 + x^2)\, dx < \infty.$$

Шаг 2.

$$u_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K_+(x, y)\, e^{iky}\, dy,$$

$$v_1(x, k) = u_1(x, -k) - R_+(k)\, u_1(x, k), \quad \operatorname{Im} k = 0.$$

Заметим, что из определения функции $u_1(x, k)$ следует, что $u_1(x, -k) = u_1^*(x, k)$, $\operatorname{Im} k = 0$.

Из свойств ядра $K_+(x, y)$ мы сразу получаем, что $u_1(x, k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$, и для $|k| \to \infty$ имеем

$$u_1(x, k)\, e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \qquad (4.1.55)$$

Это следует из того, что $K_{+y}(x, y)$ существует. Интегрируя по частям выражение для $u_1(x, k)$ и используя оценку из леммы 4.2, получим (4.1.55).

Из (4.1.14) мы получим

$$K_+(x, y) + \widehat{R}_+(x+y) + \int_x^\infty K_+(x, u)\, \widehat{R}_+(u+y)\, du = -\widetilde{K}_+(x, -y), \quad y \geqslant x, \qquad (4.1.56)$$

где

$$\widetilde{K}_+(x, y) = -\left(\sum_{j=1}^{M} D_{+j}\left(e^{-\eta_j(x-y)} + \int_x^\infty K_+(x, y)\, e^{-\eta_j(u-y)}\, du\right)\right), \quad y \leqslant x. \qquad (4.1.57)$$

Если взять преобразование Фурье от (4.1.56), то получим представление

$$v_1(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_+(x, y)\, e^{iky}\, dy \qquad (4.1.58)$$

для $v_1(x, k)$. Отсюда мы заключаем, что $v_1(x, k)$ мероморфна при $\operatorname{Im} k > 0$, и если

$$R_+(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \qquad (4.1.59)$$

то

$$v_1(x, k)\, e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \qquad (4.1.60)$$

Применение теоремы Коши к (4.1.58) и (4.1.57) показывает, что

$$\operatorname{Res}_{k=i\eta_j} v_1(x, k) = -iD_+ \mu_1(x, i\eta_j), \qquad (4.1.61)$$

поскольку числа η_j различны. Кроме того, из уравнения (4.1.58) мы имеем

$$v_1(x, -k) = v_1^*(x, k), \quad \operatorname{Im} k = 0.$$

Шаги 3 и 4.

Шаг 3 представляет собой непосредственное повторение выкладок, проделанных в шагах 1 и 2. Займемся шагом 4. Предположим для простоты, что

$$\int_a^\infty (1 + x^2)\, |\Omega_{+xx}(x)|\, dx < \infty, \quad -\infty < a. \qquad (4.1.62)$$

Тогда мы сможем доказать существование K_{+xx} и K_{+yy}, удовлетворяющих уравнениям

$$K_{+yy}(x, y) = -\Omega_{+yy}(x + y) - \int_x^\infty K_+(x, u)\, \Omega_{+yy}(u + y)\, du, \qquad (4.1.63)$$

$$K_{+xx}(x, y) = -\Omega_{+yy}(x + y) + \frac{d}{dx} K_+(x, x)\, \Omega_+(x + y) + K_{1+}(x, x)\, \Omega_{1+x}(x + u)|_{u=x} \Omega_+(x + y) - \int_a^\infty K_{1+xx}(x, u)\, \Omega_+(u + y)\, du. \qquad (4.1.64)$$

Если проинтегрировать по частям уравнение (4.1.63) и вычесть из него (4.1.64), то мы придем к уравнению

$$K_{+xx}(x, y) - K_{+yy}(x, y) - Q_1(x)\, K_+(x, y) + \int_x^\infty (K_{+xx}(x, u) - K_{+uu}(x, u) - Q_1(x)\, K_+(x, u))\, \Omega_+(u + y)\, du = 0, \qquad (4.1.65)$$

где

$$Q_1(x) = -2\frac{d}{dx}K_+(x, x).$$

Поскольку это уравнение имеет только тривиальное решение, то

$$K_{+xx}(x, y) - K_{+yy}(x, y) - K_+(x, y) - Q_1(x) K_+(x, y) = 0. \quad (4.1.66)$$

Далее, при наших предположениях

$$\lim_{(x, y)\to\infty} K_+(x, y) = 0, \quad \lim_{(x, y)\to\infty} K_{+x}(x, y) = 0. \quad (4.1.67)$$

Если взять преобразование Фурье от (4.1.66), то мы сразу получим

$$-u_{1xx}(x, k) + Q_1(x) u_1(x, k) = k^2 u_1(x, k), \quad (4.1.68)$$

и по лемме 4.2

$$\int_a^\infty |Q_1(x)|(1 + x^2)\,dx < \infty, \quad -\infty < a. \quad (4.1.69)$$

На самом деле, как показали Агранович и Марченко [1964], функция u_1 удовлетворяет уравнению (4.1.68), даже если не предполагать, что Ω_+ имеет вторую производную. Таким же способом можно показать, что

$$-u_{2xx}(x, k) + Q_2(x) u_2(x, k) = k^2 u_2(x, k), \quad (4.1.70)$$

где

$$\int_{-\infty}^b |Q_2(x)|(1 + x^2)\,dx < \infty, \quad b < \infty,$$

$$Q_2(x) = 2\frac{d}{dx}K_-(x, x).$$

Шаг 5.

Как было показано на шаге 3, имеются единственные функции u_2, v_2, которые для вещественного k удовлетворяют соотношению

$$v_2(x, k) = R_-(k) u_2(x, k) + u_2(x, -k). \quad (4.1.71)$$

Умножив (4.1.71) на $R_-(-k)$, это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$|R_-(k)|^2 u_2(x, k) + R_-(-k) u_2(x, -k) = R_-(-k) v_2(x, k). \quad (4.1.72)$$

Затем из унитарности матрицы $\tilde{S}$ получим

$$-|T_+(k)|^2 u_2(x, k) - v_2(x, -k) = R_-(-k) v_2(x, k). \quad (4.1.73)$$

Определим функции

$$u(x, k) = v_2(x, k) T_-^{-1}(k); \quad v(x, k) = u_2(x, k) T_-(k). \quad (4.1.74)$$

Тогда (4.1.73) можно будет записать в другом виде:

$$v(x, k) = u(x, -k) + R_+(k) u(x, k). \quad (4.1.75)$$

Из определений этих функций (4.1.74) можно непосредственно установить, что функции u и v обладают свойствами, определяющими функции u_1 и v_1, поэтому из теоремы единственности следует $u \equiv u_1$, $v \equiv v_1$, и мы заключаем, что

$$Q = Q_1 \quad Q_2. \qquad \text{(4.1.76), (4.1.77)}$$

Шаги 1—5 решают обратную задачу рассеяния.

Теорема 4.3. *Множество* $S_+ = \{R_+, \lambda_j = (i\eta_j)^2, D_{+j}, j = 1, \ldots, M\}$ *образует данные рассеяния для вещественного потенциала* Q, *удовлетворяющего условию* $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$ *в том случае, если выполняются следующие условия:*

(i) *Все числа* λ_j *различны и строго отрицательны.*

(ii) *Матрица рассеяния* $\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} T_+ & R_- \\ R_+ & T_- \end{pmatrix}$,

где $T_+(k) = T_-(k) = T(k)$,

$$T(k) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{k+i\eta_j}{k-i\eta_j}\right) \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - k)^{-1} \log[1 - |R_+(\xi)|^2]\, d\xi, & \operatorname{Im} k > 0, \\ \lim_{\varepsilon \to 0} T(k + i\varepsilon), & \operatorname{Im} k = 0, \end{cases}$$

имеет следующие свойства:

(a) $T(k) = T^*(-k)$, $R_\pm(k) = R_\pm^*(-k)$, (*вещественность*);

(b) $T(k) R_+^*(k) - R_-(k) T^*(k) = 0$;

$|T(k)|^2 + |R_+(k)|^2 = 1 = |T(k)|^2 + |R_-(k)|^2$ (*унитарность*);

(c) $\tilde{\mathbf{S}}(k)$ *непрерывна*;

(d) $T(k) = 1 + O(1/|k|)$ *при* $|k| \to \infty$;

$R_\pm(k) = O(1/|k|)$ *при* $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k = 0$;

(e) *либо* $T(k) = \alpha k + O(k)$, $\alpha \neq 0$ *при* $k \to 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$,

и $R_\pm(k) = \beta_\pm k + o(k)$, $\beta_\pm \neq 0$ *при* $|k| \to 0$, $\operatorname{Im} k = 0$,

или $|T(k)| \geqslant \text{const} > 0$ *при* $|k| \to 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

(iii) *Функции* $\widehat{R}_{\pm}$ *абсолютно непрерывны и*

$$\int_a^{\infty} |R_{+x}(x)|(1+x^2)\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{b} |R_{-x}(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$$

для $-\infty < a;\ b < \infty$.

(iv) *Числа* D_{+j} *положительны.*

Теорема 4.3 является главным результатом этого раздела. В заключение этого раздела мы обсудим другие методы решения обратной задачи рассеяния. Мы начнем с того, что из отношения полноты, установленного в разд. 3.4, выведем уравнение Марченко, связывающее данные рассеяния для двух разных рассеивающих потенциалов Q_1, Q_2. Пусть $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ — решения Йоста, соответствующие этим потенциалам, определенные условиями, аналогичными условиям (3.3.2). Рассмотрим операторы преобразования

$$\psi^{(2)}(x, k) = \psi^{(1)}(x, k) + \int_x^{\infty} K(x, k)\,\psi^{(1)}(y, k)\,dy, \quad (4.1.78)$$

$$\psi^{(1)}(y, k) = \psi^{(2)}(y, k) + \int_y^{\infty} \widetilde{K}(v, y)\,\psi^{(2)}(v, k)\,dv. \quad (4.1.79)$$

Мы не будем сейчас говорить о свойствах ядер этих операторов и сконцентрируем внимание на кратком выводе результата. Из отношения полноты (3.4.31) для решений Йоста $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ имеем

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (R_+^{(i)}(k)\,\psi^{(i)}(x, k)\,\psi^{i}(y, k) + \psi^{*(i)}(x, k)\,\psi^{(i)}(y, k))\,dk + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} D_{+j}^{(i)}\psi_j^{(i)}(x)\,\psi_j^{(i)}(y), \quad i = 1, 2. \quad (4.1.80)$$

Умножим обе части (4.1.79) на $(R_+^{(2)}\psi^{(2)}(x, k) + \psi^{*(2)}(x, k))$ и проинтегрируем по k; затем используем (4.1.80) при $i = 2$ для получения уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\psi^{(1)}(y, k)\,(R_-^{(2)}(k)\,(R_+^{(2)}(k)\,\psi^{(2)}(x, k) + \psi^{*(2)}(x, k))) + \sum_{j=1}^{M} D_{+j}^{(2)}\psi_j^{(2)}(x)\,\psi^{(1)}(y, i\eta_j^{(2)}) = \int_y^{\infty} dv\,\delta(x-v)\,\widetilde{K}(v, y) + \delta(x-y). \quad (4.1.81)$$

Применяя те же процедуры к (4.1.78) и используя (4.1.81), мы получим

$$\int_x^\infty dv K(x, v)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\psi^{(1)}(y, k) R_+^{(2)}(k) + \sum_{j=1}^{M(2)} D_{+j}^{(2)}\psi^{(1)}(v, i\eta_j^{(2)})\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{(1)}(x, k)\,\psi^{(1)}(y, k) R_+^{(2)}(k)\,dk +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M(2)} D_{+j}^{(2)}\psi^{(2)}(x, i\eta_j^{(2)})\,\psi^{(2)}(y, i\eta_j^{(2)}) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\psi^{(1)}(y, k)\,\psi^{*(2)}(x, k) -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dv\delta(x - v)\,\tilde{K}(v, y) - \delta(x - y) = 0. \quad (4.1.82)$$

Тогда уравнение (4.1.80) для $i = 1$ приведет к уравнению Марченко

$$K(x, y) + \Omega(x, y) + \int_x^\infty K(x, v)\,\Omega(v, y)\,dv = 0, \quad y \geqslant x, \quad (4.1.83)$$

где

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\psi^{(1)}(x, k)\,\psi^{(1)}(y, k)\,(R_+^{(2)}(k) - R_+^{(1)}(k)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M(2)} D_{+j}^{(2)}\psi^{(1)}(x, i\eta_j^{(2)})\,\psi^{1}(y, i\eta_j^{(2)}) - \sum_{j=1}^{M(2)} D_{+j}^{(1)}\psi_j^{(1)}(x)\,\psi_j^{(1)}. \quad (4.1.84)$$

Потенциалы связаны с уравнением Марченко соотношением

$$Q_2(x) - Q_1(x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x). \quad (4.1.85)$$

Если $Q_{ix} \in L^1(R)$, то K удовлетворяет уравнению

$$K_{xx}(x, y) - K_{yy}(x, y) + (Q_1(x) - Q_2(y))\quad K(x, y) = 0 \quad (4.1.86)$$

с граничными условиями

$$\lim_{(x, y)} K_x(x, y) = 0, \quad \lim_{(x, y)} K_y(x, y) = 0. \quad (4.1.87)$$

Очевидно, что уравнение Марченко (4.1.83) идентично уравнению (4.1.14) при $Q_1 \equiv 0$. При подходе, используемом Захаровым и Фаддеевым [1971], уравнение (4.1.83) является основным уравне-

нием, используемым в доказательстве того, что уравнение КдФ представляет собой интегрируемую гамильтонову систему. Один из решающих моментов в доказательстве состоит в том, чтобы показать, что обратное преобразование рассеяния или спектральное преобразование является симплектическим преобразованием для многообразий (бесконечномерных), определенных локальными координатами (Q) и (S_+). Авторы показывают, что симплектическая форма

$$\omega(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 Q(x)\, \delta_2 P(x) - \delta_1 P(x)\, \delta_2 Q(x))\, dx, \quad (4.1.88)$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} Q(y)\, dy,$$

отображается на симплектическую форму $\omega(S_+)$, что доказывает требуемый результат. Здесь $\delta_i Q$ — произвольные касательные векторы в бесконечномерном пространстве. Из (4.1.83) и (4.1.85) легко видеть, что

$$\delta Q = -2\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\psi^2(x, k)\,\delta R_+(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M} (\delta D_{-j}\psi_j^2(x) + 2iD_{-j}\psi_j\psi_j\delta\eta_j)\right\}, \quad (4.1.89)$$

где $Q = Q_1$ и $\psi = \psi^{(1)}$.

Другие методы восстановления потенциала Q по данным рассеяния принадлежат Ньютону [1980] и Дейфту и Трубовицу [1979].

В этом разделе мы получили точные утверждения, касающиеся восстановления по данным рассеяния S_+ потенциала Q, такого, что $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|(1 + x^2)\, dx < \infty$ (теорема 4.3). В следующем разделе мы будем пользоваться техникой, развитой в этом разделе, и теоремой 4.3 при решении задачи Коши для разрешимого эволюционного уравнения. Ясно, что на начальные условия должны быть наложены дополнительные условия дифференцируемости, но оказывается, что эти условия (по крайней мере в простейшем случае, когда начальные данные совершенно гладкие) приводят лишь к небольшим изменениям в теории, изложенной выше, чтобы были гарантированы существование и единственность решения задачи с начальными условиями.

4.2. Задача Коши для разрешимых уравнений

Как следует из результатов разд. 3.5, мы имеем дело с *задачей Коши*

$$C_1\left(\mathrm{L}_1^A\right) Q_t + C_2\left(\mathrm{L}_1^A\right) Q_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,$$
$$Q(x, 0) = F(x), \tag{4.2.1}$$

где $C_1(k^2)$, $C_2(k^2)$ — вещественные аналитические функции. В семействе уравнений (4.2.1) содержится класс эволюционных уравнений, имеющих форму $Q_t = \mathrm{K}(Q)$, зависящую только от функции Q и ее производных по x, определенных на подходящем функциональном пространстве. В этом случае (4.2.1) можно записать в виде

$$Q_t + C\left(\mathrm{L}_1^A\right) Q_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{4.2.2}$$
$$Q(x, 0) = F(x),$$

где C — вещественная аналитическая функция и $\mathrm{K}(Q) \equiv C\left(\mathrm{L}_1^A\right) Q$. Самое важное и наиболее изученное уравнение этого класса — уравнение КдФ:

$$Q_t + 6QQ_x + Q_{xxx} = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2.3}$$
$$Q(x, 0) = F(x).$$

Заметим, что это уравнение является примером *задачи с характеристическими начальными данными*, так что теорема Коши — Ковалевской неприложима для получения даже локально аналитического результата. Однако достаточно просто показать, что решения уравнения (4.2.3), если они существуют, единственны, если наложить условия, что ${}_tQ \in C^3(\mathbb{R})$ и стремится к нулю вместе со своими двумя первыми производными при $|x| \to \infty$ (Лакс [1968]). Предположим в этом случае, что существует другое решение $P(x, t)$, и построим $W = Q - P$. Нетрудно доказать, что при этих условиях

$$E_t(t) \leqslant mE(t), \tag{4.2.4}$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} tW(x)\,dx \quad \text{и} \quad \frac{m}{6} = \max_{x,\, t \in \mathbb{R}} |2P_x - Q_x|. \tag{4.2.5}$$

Следовательно, $E(t) \leqslant E(0) \exp(mt)$, и если $E(0) = 0$, то $W(t)$ тождественно равна нулю при всех $t > 0$. Существование решения задачи Коши для уравнения КдФ было доказано при различных все более сильных ограничениях на начальные данные. Этот материал обсуждается в конце настоящего раздела.

Сейчас мы докажем существование решения уравнения (4.2.2) для того случая, когда $F(x)$ принадлежит пространству $C^n(\mathbb{R})$,

быстро убывает вместе со своими производными при $|x| \to \infty$ и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$. Число n зависит, конечно, от свойств функции C в уравнении (4.2.2). Прежде чем вдаваться в технические подробности, дадим общий набросок метода, который называется *методом обратной задачи* или *методом обратного спектрального преобразования*.

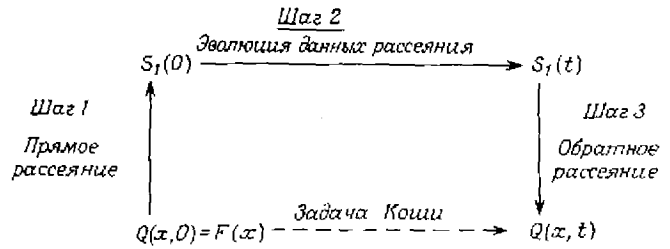


Рис. 4.1. Обратный метод.

Этот метод не только доказывает существование решения, но, кроме того, является конструктивным. Таким образом, большой класс решений, называемых N-солитонными решениями, может быть получен в явном виде, и к тому же можно вывести асимптотические свойства общего решения. Эти вопросы будут рассмотрены в последнем разделе настоящей главы.

Обратный метод легче всего описать при помощи приведенной ниже схемы (рис. 4.1).

Цель состоит в том, чтобы решить задачу Коши для уравнения (2.2.1), представленную на рис. 4.1 штриховой линией. Сплошной линией на рисунке обозначено, как можно решить эту задачу за три шага, включающих только *линейные процедуры*.

Шаг 1. Прямое рассеяние.

Данные рассеяния $S_{\pm}(0)$, соответствующие начальной функции $F(x)$, получаются решением уравнения Шрёдингера для решений Йоста. В гл. 3, теорема 3.10, устанавливается, что $S_{\pm}(0)$ определяются единственным образом.

Шаг 2. Эволюция данных рассеяния.

Для данного уравнения (4.2.1) вещественная аналитическая функция C единственным образом определяет эволюцию данных рассеяния (уравнение (3.5.2)); последнее можно решить для получения $S_{\pm}(t)$, т. е. данных рассеяния в момент времени $t > 0$.

Шаг 3. Обратное спектральное преобразование.

Данные рассеяния $S_{\pm}(t)$ удовлетворяют требованиям теоремы 4.3, и, следовательно, потенциал $Q(x, t)$ может быть единственным

образом по ним восстановлен; более того, $\int_{-x}^{\infty} |Q(x)|(1+x^2)\,dx < \infty$, $t > 0$.

Конечно, мы опустили условия дифференцируемости и интегрируемости на функцию $F(x)$, которые требуются для того, чтобы гарантировать, что восстановленная функция $Q(x)$ является решением уравнения (4.2.1). Эти модификации рассматриваются ниже.

На этом пути решается задача Коши (4.2.2). Мы хотим особо подчеркнуть, почему этот метод работает. *Дело в том, что шаг 2 включает в себя решение линейных уравнений, для чего требуется только информация о граничных значениях потенциала $Q(x, t)$ и его производных при $|x| \to \infty$ для $t > 0$.* Здесь граничным значением является нуль, но другие граничные условия, такие как периодичность потенциала Q или стремление к ненулевому граничному значению при $|x| \to \infty$, тоже приводят к обратному методу, из которого потенциал Q тоже может быть восстановлен единственным образом по начальным условиям.

Обратный метод можно интерпретировать как обобщение техники анализа Фурье на случай нелинейных уравнений. Чтобы увидеть это, рассмотрим уравнение (4.2.2) при «малых» значениях Q, т. е. когда он удовлетворяет (нелокальному) условию

$$P_0(\infty, t) \ll 1. \tag{4.2.6}$$

В этом случае уравнение (4.2.2) можно записать в виде

$$Q_t + C\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)Q_x = 0, \tag{4.2.7}$$

$$Q(x, 0) = F(x),$$

где, как мы видели в разд. 3.5, C интерпретируется как фазовая скорость элементарного решения. Используя уравнение (3.3.64), мы получаем результат для прямой задачи рассеяния.

Прямое рассеяние.

$$R_+(k, 0) \approx \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-ikx}\,dx. \tag{4.2.8}$$

Здесь отсутствует дискретный спектр, что характерно для нелинейных разрешимых систем.

Эволюция данных рассеяния.

Из уравнения (3.5.51) можно получить эволюцию данных рассеяния:

$$R_+(k, t) \approx R_+(k, 0)\, e^{-2ikC(k^2)t}. \tag{4.2.9}$$

Обратное спектральное преобразование или обратное преобразование рассеяния.

Решая уравнение Марченко (4.1.14) при условиях (4.2.6), мы получаем

$$Q(x, t) \approx \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} kR_+(k)\, e^{2ik(x-C(k^2)t)}\, dk. \qquad (4.2.10)$$

Теперь легко проверить, используя (4.2.10), что $P_0(\infty, t) \ll 1$ вследствие того, что $P_0(\infty, 0) \ll 1$.

Для решения задачи Коши (4.2.2) мы почти точно последуем идеям Танаки [1974] для уравнения КдФ, кроме доказательства того, что построенный потенциал $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.2.2), где мы используем подход, более приемлемый для наших методов. Введем следующие обозначения:

$$h^{(i, j, l)}(x, y, t) \equiv \frac{\partial^{i+j+l}}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial t^l} h(x, y, t)$$

с очевидными сокращениями для функций одной или двух переменных. Существование решения уравнения (4.2.2) можно вывести, доказав предварительно следующую лемму.

Лемма 4.4. *Если $F(x)$ принадлежит C^n и*

$$P_0^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{x} |F^{(j)}(y)|\, dy, \quad R_0^{(j)}(x) = \int_{x}^{\infty} |F^{(j)}(y)|\, dy, \quad j \leqslant n,$$

конечны для любого x, то $B_{\pm}^{(j, l)}(x, y)$ существуют для $j + l \leqslant n + 1$ и выполняется следующая оценка (здесь $B_{\pm}(x, y) = K_{\pm}(x, x + 2y)$):

$$|B_+^{(j, l)}(x, y) + F^{(j+l-1)}(x + y)| \leqslant C(x) \sum_{m=0}^{j+l-1} R_0^{(m)}\left(\frac{1}{2}(x + y)\right),$$

$$|B_-^{(j, l)}(x, y) - F^{(j+l-1)}(x + y)| \leqslant D(x) \sum_{m=0}^{j+l-1} P_0^{(m)}\left(\frac{1}{2}(x + y)\right).$$

Доказательство. Мы будем рассматривать только случай B_+, результаты для B_- устанавливаются аналогичным способом. Для $j = l = 0$ результат дается формулой (3.4.77). Дифференцируя (3.4.73) по x, получаем

$$B_{+x}(x, y) - F(x + y) = -\int_0^y F(x + y - z)\, B(x + y - z)\, dz. \qquad (4.2.11)$$

Существование и оценки для $B_+^{(j, 0)}$ получаются дифференцированием (4.2.11) по x. Предположим, что утверждение уже доказано

для $j + l \leqslant m$ и для $j + l = m + 1$, $l \leqslant l'$. Существование $B_+^{(m=k',\, k'+1)}$ и ее оценки следуют из формулы

$$B_{+x}(x, y) - B_{+y}(x, y) = -\int_x^\infty F(z)\, B_+(z, y)\, dz \qquad (4.2.12)$$

и ее повторного дифференцирования.

Теперь нам нужно получить регулярность данных рассеяния ($S_+(0)$ или $S_-(0)$) из регулярности $F(x)$. Это можно вывести из представлений фурье-компонент множества $\mathbf{S}(k, 0)$, полученных подстановкой (4.1.7)—(4.1.8) в определяющие соотношения для a и b, т. е. в уравнения (3.3.47)—(3.3.49). Это дает

$$2ika(k) = 2ik - \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, dy + \int_0^\infty \pi_2(y)\, e^{2iky}\, dy, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \qquad (4.2.13)$$

$$2ikb(k) = e^{-2ikx} \int_{-\infty}^{\infty} {}_x\pi_1(y)\, e^{-2iky}\, dy, \quad \operatorname{Im} k = 0,$$

где

$${}_x\pi_1(y) = -B_{+x}(x, y) + B_{-x}(x, y) + \int_{-\infty}^{\min(y,\,0)} B_{-x}(x, z) B_+(x, y - z)\, dz -$$

$$- \int_{\max(y,\,0)}^{\infty} B_{+x}(x, z)\, B_-(x, y - z)\, dz,$$

$$\pi_2(y) = B_{+x}(x, y) - B_{-x}(x, -y) - B_{+y}(x, y) +$$

$$+ B_{-y}(x, -y) - B_+(x, 0)\, B_-(x, -y) +$$

$$+ \int_{z=0}^{y} (B_{+x}(x, z) - B_y(x, z))\, B_-(x, z - y)\, dz -$$

$$- \int_{z=0}^{y} B_+(x, y)\, B_{-x}(x, z - y)\, dz$$

и

$$B_\pm(x, y) \equiv 2K_\pm(x, 2y + x).$$

Танака доказывает следующую лемму.

Лемма 4.5. *Если $F(x)$ принадлежит пространству C^n, то $\{{}_x\pi_1^{(m)}(y),\ \pi_2^{(m)}(y),\ m \leqslant n\}$ — непрерывные функции.*

Доказательство. Из леммы 4.4 следует, что ${}_x\pi_1(y)$ дифференцируема во всех точках, кроме $y = x$. Для $y \gtrless x$ имеем:

$$
{}_x\pi^{(m)}(y) = \mp B_{\pm}^{(1,\,m)}(x,\ y) + \sum_{j=0}^{m-1} B_{\pm}^{(j,\,j)}(x,\ y)\, B_{\mp}^{(0,\,m-j)}(x,\ \mp 0) +
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\min(y,\,0)} B_{-x}(x,\ z)\, B_{+}^{(0,\,m)}(x,\ y-z)\, dz -
$$

$$
- \int_{\max(y,\,0)}^{\infty} B_{+x}(x,\ z)\, B_{-}^{(0,\,m)}(x,\ y-z)\, dz. \quad (4.2.14)
$$

Таким образом, мы должны показать только, что

$$
\mp B_{\pm}^{(1,\,m)}(x,\ \pm 0) + \sum_{j=0}^{m-1} B_{\pm}^{(1,\,j)}(x,\ \pm 0)\, B_{\mp}^{(0,\,m-j-1)}(x,\ \mp 0)
$$

не зависит от знака. Для $m > 1$ мы можем использовать

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) B_{\pm}(x,\ y) - F(x)\, B_{\pm}(x,\ y) = 0, \quad (4.2.15)
$$

$$
\mp \frac{\partial}{\partial x} B_{\pm}(x,\ \pm 0) = F(x)
$$

для того, чтобы упростить (4.2.14). Это уравнение (3.4.79), только вместо ядер $K_{\pm}$ здесь используются ядра $B_{\pm}$. Таким образом, для $m = 1$ получаем

$$
\mp B_{\pm}^{(1,\,)}(x,\ \pm 0) + B_{\pm}^{(1,\,0)}(x,\ 0)\ B_{\mp}(x,\ \mp 0) =
$$

$$
= \mp \left(B_{\pm}^{(2,\,0)}(x,\ \pm 0) - F(x)\, B_{\pm}(x,\ \pm 0)\right) + B_{\pm}^{(1,\,0)}(x,\ \pm 0) B_{\mp}(x,\ \mp 0) =
$$

$$
= \mp \left(\mp F_x(x) - F(x)\, B_{\pm}(x,\ \pm 0) \mp F(x)\, B_{\mp}(x,\ \mp 0)\right), \quad (4.2.16)
$$

Результат для $m > 1$ доказывается аналогично.

Лемма 3.6 показывает, что $T_+(k) = a^{-1}(k)$ непрерывна для всех k при условии $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|F(x)|\,dx < \infty$. Вдобавок решения Йоста дифференцируемы по k m раз, поскольку $P_j(\infty) < \infty$, $j = 0, \ldots, m$. Этой информации достаточно для того, чтобы с уверенностью утверждать, что существуют $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$, если использовать их определения в терминах вронскианов решений Йоста (3.3.47) и (3.3.49). Однако мы потребуем большего: нам нужно знать условия, при которых функция $k^p R_+^{(m)}$ квадратично интегрируема. Для того чтобы установить эти условия, докажем следующие леммы.

Лемма 4.6. *Если* $F(x)$ *принадлежит пространству* C^n *и* $F^{(j)}(x) = O(|x|^{-l})$ *при* $|x| \to \infty$, *то* ${}_x\pi_1$, π_2 *тоже принадлежат* C^n *и, более того,*

$$ {}_x\pi_1^{(j)}(y) = O(|y|^{1-l}) \quad \text{при} \quad |y| \to \infty, $$

$$ \pi_2^{(j)}(y) + O(y^{1-l}) \quad \text{при} \quad y \to \infty, $$

если $0 \leqslant j \leqslant n$.

Доказательство. В лемме 4.5 доказывается, что ${}_x\pi_1$ принадлежит пространству $C^n(\mathbb{R})$ и π_2 принадлежит пространству $C^n(\mathbb{R}^+)$, на основании их определений. Из оценок для $B_{\pm}^{(i,j)}$ в лемме 4.4 получаем

$$ |B_{\pm}^{(i,j)}(x, y)| \leqslant C_{\pm}(x) |x + y|^{1-l}, \quad i + j \leqslant n + 1 \text{ при } y \to \infty. \tag{4.2.17} $$

Таким образом, результат получается из определений ${}_x\pi_1$ и π_2.

Лемма 4.7. *Функция* $a(k)$ *принадлежит классу* C^{l-2}, *кроме, возможно, случая* $k = 0$. *Если* $j \leqslant l - 2$, *то* $(ka(k))^{(j)}$ *при* $\operatorname{Im} k = 0$ *ограничена.*

Функция $b(k)$ *принадлежит классу* C^{l-2}, *кроме, возможно, случая* $k = 0$. *Если* $j \leqslant l - 2$, *то* $b^{(j)}(k) = O(|k|^{-(n+1)})$ *при* $|k| \to \infty$.

Доказательство. Дифференцируя m раз соотношение (4.2.13), $1 \leqslant m \leqslant l - 2$, мы получаем

$$ 2i(k(a(k) - 1))^{(m)} = \int_0^\infty (2iy)^m \pi_2(y) e^{2iky}\, dy, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \tag{4.2.18} $$

$$ 2i(kb(k))^m = \int_{-\infty}^{\infty} (-2iy)^m {}_0\pi_1(y) e^{-2iky}\, dy, \quad \operatorname{Im} k = 0. \tag{4.2.19} $$

Таким образом, $ka(k)$ принадлежит классу $C^{l-2}(\mathbb{R})$, так что $a(k)$ принадлежит классу C^{l-2}, кроме, может быть, случая, когда $k = 0$. Функция $k(a(k) - 1)$ ограничена при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, и $(ka(k))^{(m)}$, $1 \leqslant m \leqslant l - 2$, ограничено. Из (4.2.19) аналогичным способом получаем, что $kb(k)$ принадлежит классу C^{l-2}, так что $b(k)$ принадлежит классу C^{l-2}, кроме, может быть, случая, когда $k = 0$. Кроме того, имеет место равенство

$$ (2ik)^p (2ikb(k))^{(m)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial y^p} ((-2iy)^m {}_0\pi_1(y)) e^{-2iky}\, dy, \tag{4.2.20} $$

из которого следует, что $b^{(m)}(k) = o(1/|k|^{n+1})$; $m \leqslant l - 2$ при $|k| \to \infty$.

Лемма 4.8. *Если* $F(x)$ *принадлежит* C^n *и* $F^{(l)}(x) = O(|x|^{-l})$ *при* $|x| \to \infty$, *то* $R_\pm \in C^M$ *и* $R_+^{(m)}(k) = O(|k|^{-n-1})$ *для всех* $m \leqslant M$, *где* $M = l - 2$, *если* $\lim\limits_{k\to 0} ka(k) \neq 0$, *или* $M = l - 3$, *если* $\lim\limits_{k\to 0} ka(k) = 0$.

Это непосредственно следует из предыдущих двух лемм, поскольку $R_+ = ba^{-1}$. Подобный же результат верен и для R_-, однако мы будем иметь дело только с S_+, хотя, конечно, можно было бы все то же самое проделать и для S_-.

Для рассматриваемого случая теорема 3.12 дает

$$R_+(k, t) = R_+(k, 0) \exp(-2ikC(k^2)\, t), \tag{4.2.21}$$

где C — вещественная аналитическая функция. Поскольку $R_+(k, 0)$ обладает свойствами, описанными в лемме 4.8, отсюда следует, что и $R_+(k, t)$ обладает этими же свойствами. Далее, $k^m R_+^{(p,\,0)}(k, 0)$ квадратично интегрируема при $m \leqslant n$, $p \leqslant M$. Построим функцию

$$\widehat{R}_+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_+(k, 0) \exp(ik(x - 2C(k^2)\, t))\, dk, \tag{4.2.22}$$

тогда из предыдущих соображений и из того факта, что если функция и ее первая производная квадратично интегрируемы, то интегрируемо и ее преобразование Фурье, мы получаем следующий результат.

Лемма 4.9. *Предположим, что* $\deg(C(k^2)) = s$, *и пусть* $F(x)$ *принадлежит классу* C^n, $n > \max\{4, 2s\}$; *тогда* $\widehat{R}_+^{(j,\,l)}(x, t)$ *существуют и интегрируемы для* $j + (2s + 1)\, l \leqslant n$. *Более того,* $x\widehat{R}_{+x}$, $x^2\widehat{R}_{+xx}$, $x^2\widehat{R}_{+x}$, $x\widehat{R}_{+xx}$ *также интегрируемы. Мы все время предполагаем, что* $F^{(l)}(x) = O(|x|^{-m})$ *при* $|x| \to \infty$, *где* $m \geqslant 6$, *и что коэффициенты функции* $C(k^2)$ *строго отрицательны.*

Как было отмечено в разд. 1, можно определить множество $S_+(0) = \{R_+(k, 0),\ D_{+j}(0),\ \eta_j:\ j = 1, \ldots, M\}$ по $F(x)$. Построим функцию

$$\Omega_+(x, t) = \sum_{j=1}^{m} D_{+j}(t) \exp(-\eta_j x) + \widehat{R}_+(x, t), \tag{4.2.23}$$

где

$$D_{+j}(t) = D_{+j}(0) \exp(2\eta_j C(-\eta_j^2)\, t). \tag{4.2.24}$$

Тогда теорема 4.3 и лемма 4.9 гарантируют существование функции $Q(x, t) = -2d/dx(K_+(x, x, t))$, где $K_+(x, y, t)$ — единственное решение уравнения Марченко (4.1.14), и функция $Q(x, t)$ удовлетворяет изоспектральному уравнению Шрёдингера

$$-y_{xx} + Q(x, t)\, y = k^2 y. \tag{4.2.25}$$

Теперь мы хотим убедиться в дифференцируемости функции $Q(x, t)$ и решений Йоста для уравнения (4.2.25).

Лемма 4.10. *Предположим, что* $\Omega_{\pm}^{(i, j)}(x, t)$, $j + (2s + 1) l \leqslant n$, *существует, где* $\deg C(k^2) = s$, *и функция* $F(x)$ *принадлежит классу* C^n. *Тогда существуют* i-*я производная по переменной* x *и* j-*я производная по переменной* t *для решений Йоста и для функции* $Q(x, t)$; *эти производные непрерывны для* $i + (2s + 1) j \leqslant n$, $i + (2s + 1) j \leqslant n - 1$ *соответственно, и* $Q^{(i, j)} \to 0$ *при* $|x| \to \infty$.

Доказательство. Используя результаты разд. 4.1, мы продифференцируем уравнение Марченко (4.1.14), записанное в терминах ядра B_+, и получим

$$B_+^{(i, 0, 0)}(x, y, t) + \int_0^\infty H_+(x + y + u, t) B_+^{(i, 0, 0)}(x, u, t)\, du =$$

$$= -H_+^{(i, 0)}(x + y, t) - \sum_{m=1}^{i} C_m^i \int_0^\infty H_+^{(m, 0)}(x + y + u, t) B_+^{(i-m, 0)}(x, u, t), \tag{4.2.26}$$

где $H_+(x, t) = 2\Omega_+(2x, t)$, откуда можно вывести, что

$$\left| B_+^{(i, j, 0)}(x, y, t) + H_+^{(i, j, 0)}(x, y, t) \right| \leqslant C_+(x) \sum_{m=j}^{i+j} p_{+m}(x + y, t), \tag{4.2.27}$$

где

$$p_{+m}(x, t) = \int_x^\infty \left| H_+^{(m, 0)}(y, t) \right| dy.$$

Затем, пользуясь результатами леммы 4.9, можно увидеть, что $B_+^{(i, j, 0)}(x, y, t)$ существует для $i + j \leqslant n$. Если мы теперь рассмотрим производную уравнения (4.1.14) по переменной t, то получим

$$B_{+t}(x, y, t) + \int_0^\infty H_+(x + y + u) B_{+t}(x, u, t)\, du + D_+(x, y, t) = 0, \tag{4.2.28}$$

где

$$D_+(x, y, t) = -\sum_{j=0}^{s} a_j (-1)^j \times$$

$$\times \left\{ H_+^{(2j+1, 0)}(x + y, t) + \int_0^\infty B_+(x, u, t) H_+^{(2j+1, 0)}(x + y + u, t)\, du \right\}.$$

Последнее выражение получено из того факта, что если $C(k^2) = \sum_{j=0}^{s} a_j k^{2j}$, то

$$\Omega_{+t}(x, t) + 2\sum_{j=0}^{s} a_j (-1)^j \Omega_+^{(2j+1, 0)}(x, t) = 0. \qquad (4.2.29)$$

Используя (4.2.26) и (4.2.27) и аналогичные рассуждения для B_-, мы можем доказать, что $B_\pm^{(i, j, l)}(x, y, t)$ существуют и непрерывны для $(i + j + (2s + 1) l) \leqslant n$ и что из (3.4.68)—(3.4.69) следует, что существуют i-я производная по x и j-я производная по t от решений Йоста, где $(i + (2s + 1) j) \leqslant n$. Из определения функции Q следует, что $Q^{(i, l)}(x, t)$ существует и непрерывна для $(i + (2s + 1) j) \leqslant n - 1$. Более того, из леммы 4.9 и уравнений (4.2.27), (4.2.28) следует, что $|B_+^{(i, j, l)}(x, y, t)| \to 0$ при $x, y, t \to +\infty$, и из аналогичных уравнений для B_- следует, что $|B^{(i, j, l)}(x, y, t)| \to 0$ при $x, y, t \to -\infty$. Следовательно, $Q^{(i, j)}(x, t) \to 0$ при $|x|, t \to \infty$ при данных порядках производной. Точное асимптотическое поведение функции $Q^{(i, j)}(x, t)$ может быть получено из анализа функции R_+, хотя мы здесь не будем этого демонстрировать.

Установим теперь главный результат этого раздела.

Теорема 4.11. *Задача Коши*

$$Q_t + C(\mathbf{L}_1^A) Q_x = 0,$$
$$Q(x, 0) = F(x),$$

где $C(k^2)$ — многочлен степени s, имеет решение $Q(x, t)$, если функция F принадлежит классу C^n, где $n = \max(6, 2s + 2)$ и $|F^{(l)}(x)| = O(|x|^{-l})$, $l > 5$ при $|x| \to \infty$.

Доказательство. Из определения оператора $\mathbf{L}_1^A$ и уравнения (4.2.2) мы видим, что если $\deg C(k^2) = s$, то надо требовать существования $Q^{(j, 0)}(x, t)$, $j = 2s + 1$, и $Q^{(0, 1)}(x, t)$. Предположим, что $n = 2s + 2$; тогда $C(\mathbf{L}_1)\varphi^2$ существует и непрерывна, так что

$$R_{+t}(k, t) + C(k^2) R_+(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (Q_t + Q_x C(\mathbf{L}_1)) \varphi^2(x, k)\, dx. \qquad (4.2.30)$$

По определению (4.2.21) левая часть равенства (4.2.30) тождественно равна нулю и, следовательно,

$$Q_t + C(\mathbf{L}_1^A) Q_x = 0. \quad \square \qquad (4.2.31)$$

Был получен ряд дальнейших результатов для задачи Коши, связанной с уравнением КдФ, которые существенно уточняют или

расширяют проведенный выше анализ. Некоторые из них, в особенности результаты Марри [1978], могут быть применены к широкому классу эволюционных уравнений. Бона и Смит [1975] требовали для существования, чтобы функция F принадлежала пространству Соболева $H^{s+1}(\mathbb{R})$, $(s+1) \geqslant 1$. Коэн [1978] доказал существование решения для уравнения КдФ в случае прямоугольной начальной функции, не охватываемом результатами Бона и Смита. Марри [1978, 1979] при наложении явных оценок убывания на начальные условия также доказал существование классических (в отличие от слабых) решений для случая, когда $F \in C^s$ ($\mathbb{R}$) для любого s (сравните с теоремой 4.11). Другой интересный результат, принадлежащий Дейфту и Трубовицу [1979], состоит в приложении к уравнению КдФ на прямой аналога того факта, что периодические потенциалы являются вещественными и аналитическими тогда и только тогда, когда запрещенные зоны имеют экспоненциально убывающую ширину (Трубовиц [1977]). Эта теорема устанавливает взаимосвязь между аналитичностью в полосе ($Q(z)$ аналитична при $|\operatorname{Im} z| < a$) и экспоненциальным убыванием функции R_+. Они использовали эту теорему для того, чтобы доказать существование решения $Q(x, t)$ уравнения КдФ, мероморфного при $|\operatorname{Im} z| < a$ с n полюсами, определенными связанными состояниями начальной функции $F(x)$.

Если мы рассмотрим уравнения (4.2.1), то следующий вопрос будет состоять в том, как интерпретировать решение, полученное методом обратной задачи рассеяния, если соответствующая задача Коши, как представляется, требует гораздо больше информации, чем у нас имеется. Разрешение этого парадокса содержится в замечании, сделанном после уравнения (3.5.63). Дело в том, что фактически мы ищем решение не для уравнения (4.2.1), а для целого класса эквивалентности разрешимых уравнений. Из этой интерпретации следует, что на самом деле решается задача Коши, формально записанная следующим образом:

$$Q_t + C_1^{-1}\left(\mathbf{L}_1^A\right) C_2\left(\mathbf{L}_1^A\right) Q_x = 0, \tag{4.2.32}$$
$$Q(x, 0) = F(x).$$

Следовательно, мы должны понять, при каких условиях на функцию $F(x)$ существует такое решение. Заметим сначала, что формальное уравнение в (4.2.32) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &Q_t = f_1, \\ &\left(\mathbf{L}_1^A - k_j^2 \mathbf{I}\right) f_j = f_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ &\left(\mathbf{L}_1^A - k_n^2 \mathbf{I}\right) f_n = -C_2\left(\mathbf{L}_1^A\right) Q_x. \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

где $C_1(k^2) = \prod_{j=1}^{n}(k^2 - k_j^2)$. Тогда j-е уравнение можно записать в виде

$$-\frac{1}{4}h_{jxxx} + (Q - k_j^2)h_{jx} + \frac{1}{2}Q_x h_j = f_{j+1},$$

где

$$h_j = \int_x^\infty f_j\,dy. \tag{4.2.34}$$

Теперь мы покажем, что систему (4.2.33) можно записать через решения Йоста и что связанная с ней задача Коши поставлена корректно. Для того чтобы это показать, рассмотрим другое представление той же системы

$$\Phi_x = \mathbf{P}\Phi, \quad \Phi_t = \mathbf{M}\Phi, \tag{4.2.35}$$

где $\mathbf{P}$ — оператор (3.5.8) и $\mathbf{M}$ — матричная функция (не дифференциальный оператор). Для того чтобы система была вполне интегрируема, требуется, чтобы

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{M}_x + [\mathbf{P},\ \mathbf{M}] = 0, \tag{4.2.36}$$

откуда мы получаем

$$-\frac{1}{4}B_{xxx} + (Q - k^2)B_x + \frac{1}{2}Q_x B = \frac{1}{2}Q_t, \tag{4.2.37}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B_x & B \\ -\frac{1}{2}B_{xx} + (Q - k^2)B_x & \frac{1}{2}B_x \end{pmatrix}. \tag{4.2.38}$$

Таким образом, (4.2.34) и (4.2.37)—(4.2.38) отличаются только обозначениями: $h_j = B$ и $f_{j+1} = \frac{1}{2}Q_t$.

Разрешая (4.2.35) относительно $\mathbf{M}$, получим

$$\mathbf{M} = \Phi\left(\mathbf{N} + \int_{-\infty}^{x} \Phi^{-1}\mathbf{P}_t\Phi\,dy\right)\Phi^{-1}, \tag{4.2.39}$$

где

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad K,\ H \text{ — константы.} \tag{4.2.40}$$

Теперь нетрудно получить соотношение

$$h_j = \frac{1}{2ik_j}(-2\alpha_j\varphi\bar{\varphi} + \beta_j\varphi^2 - \gamma_j\bar{\varphi}^2), \tag{4.2.41}$$

в котором

$$\alpha_j = -k_j^{-1} I(f_{j+1}, \varphi, \bar{\varphi}), \quad \beta_j = -k_j^{-1} I(f_{j+1}, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}) + K_j,$$
$$\gamma_j = k_j^{-1} I(f_{j+1}, \varphi, \varphi) + H_j \text{ и } I(f, u, v) \equiv -i \int_{-\infty}^{x} fuv\, dy, \tag{4.2.42}$$

где функции Йоста вычислены при $k = k_j$. В качестве простого примера рассмотрим уравнение длинной волны, данное в разд. 4.5

$$Q_{xxt} - 4Q_t - 4QQ_t + 2Q_x \int_x^{\infty} Q_t\, dy + Q_x = 0. \tag{4.2.43}$$

Некоторые решения этого уравнения мы можем найти, решая методом обратной задачи эволюционное уравнение, принадлежащее тому же классу эквивалентности, что и уравнение (4.2.36)

$$Q_t = f,$$
$$(\mathbf{L}_1^A + 1) f = -\frac{1}{4} Q_x, \tag{4.2.44}$$

где функция f задается формулой

$$f \equiv h_x = -\frac{1}{2}(-2\alpha\varphi\bar{\varphi} + \beta\varphi^2 - \gamma\bar{\varphi}^2)_x \tag{4.2.45}$$

и

$$\alpha = \frac{i}{4} I(Q_y, \varphi, \bar{\varphi}) = \frac{1}{8}(\bar{\varphi}_{xx}\varphi + \varphi_{xx}\bar{\varphi} - 2\bar{\varphi}_x\varphi_x - 4),$$

$$\beta = \frac{i}{4} I(Q_y, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}) + K = \frac{1}{4}(\varphi_{xx}\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_x^2) + K,$$

$$\gamma = -\frac{i}{4} I(Q_y, \varphi, \varphi) + H = -\frac{1}{4}(\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2) + H.$$

Получая выражение (4.2.45), мы предполагали, что $k_1 = +i$; предположим теперь для простоты, что функция Q имеет компактный носитель, так что функции рассеяния и $\tilde{\mathbf{S}}$ определены на всей комплексной плоскости k. Затем, упрощая выражение для функции f, получим

$$f = \frac{1}{8}(-2\varphi\varphi_x\bar{\varphi}\bar{\varphi}_x - 4\varphi\bar{\varphi} + \varphi^2\bar{\varphi}_x^2 + \varphi_2\varphi_x^2)_x - \frac{1}{2} K(\varphi^2 - \bar{\varphi}^2)_x =$$

$$= -\frac{1}{2}(\varphi\bar{\varphi})_x - \frac{1}{2}(K\varphi^2 - H\bar{\varphi}^2)_x. \tag{4.2.46}$$

Из граничных условий на функцию Q следует, что $f \to 0$ при $|x| \to \infty$. Следовательно, из (4.2.46) мы найдем, что $H = 0$ и что либо (i) $a(i) = 0$, либо (ii) $K = b(i)/a(i)$. Условие (i) исклю-

чается в соответствии с принятыми допущениями. Из условия (ii) получаем:

$$Q_t = -\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi\psi}{a}\right]_x, \tag{4.2.47}$$

$$(\varphi\psi)_{xxx} = 4(Q+1)(\varphi\psi)_x + 2Q_x(\varphi\psi). \tag{4.2.48}$$

Если мы наложим теперь начальное условие $Q(x, 0) = F(x)$, то окажется, что смешанная задача (4.2.47) поставлена корректно, потому что мы можем решить уравнение (4.2.48) при $t = 0$ относительно функции $\varphi\psi$ так, что $\varphi\psi \to a(k, 0)$ при $|x| \to \infty$. Затем, поскольку $a(k, t) = a(k, 0)$, то это и есть граничное условие, требуемое для всех последующих моментов времени. Если бы мы выбрали $k_1 = -i$, то в уравнениях (4.2.47)—(4.2.48) вместо φ, ψ и a оказались бы $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ и $\bar{a}$. Заметим, что справедливость (4.2.48) может быть установлена и без требования о компактном носителе, поскольку это вытекает непосредственно из самих уравнений. При рассмотрении случая $C_2(k^2) = k^2 - 1$ мы получаем условия (i) $a(\pm 1) = \bar{a}(\pm 1) = 0$ или (ii) $b(1) = 0$. Первое условие исключается, так как оно противоречит свойствам функции a. Тогда из второго условия получается следующая форма уравнения:

$$Q_t = -\frac{1}{2}(\varphi\bar{\varphi})_x, \tag{4.2.49}$$

$$(\varphi\bar{\varphi})_{xxx} = 4(Q-1)(\varphi\bar{\varphi})_x + 2Q_x(\varphi\varphi). \tag{4.2.50}$$

Эта задача тоже корректно поставлена. Общий принцип, утверждаемый здесь, можно легко вывести, рассматривая общее уравнение с использованием формальных методов, развитых в разд. 3.5. Там было показано, что дифференциальный оператор $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ сплетает операторы $\mathbf{L}_1^A$ и $\mathbf{L}_2$ следующим образом:

$$\partial_x \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1^A \partial_x. \tag{4.2.51}$$

Таким образом, если ∂_x^{-1} — интегральный оператор, $\partial_x^{-1}\partial_x = \partial_x\partial_x^{-1} = \mathbf{I}$, то

$$(\mathbf{L}_1^A)^r = \partial_x \mathbf{L}_2^r \partial_x^{-1} \text{ для целых } r. \tag{4.2.52}$$

Отсюда следует, что уравнение (4.2.1) можно формально записать в виде

$$Q_t + \partial_x\left(C_1^{-1}(\mathbf{L}_2)\, C_2(\mathbf{L}_2)\right) Q = 0. \tag{4.2.53}$$

Тогда из (3.5.68) имеем

$$-2\left(\frac{\varphi\psi}{a} - 1\right) = (\mathbf{L}_2 - k^2\mathbf{I})^{-1} Q, \tag{4.2.54}$$

так что в частном случае, когда $C_2 = \alpha$ и $C_1 = (k^2 - k_1^2)^n$, из уравнения (4.2.54) мы получим

$$(\mathbf{L}_2 - k^2\mathbf{I})^{-n} Q = \frac{-2}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (k^2)^{n-1}} \left(\frac{\varphi\psi}{a} - 1 \right) \Big|_{k=k_1}, \quad (4.2.55)$$

и эволюционное уравнение приобретает вид

$$Q_t + \alpha \partial_x \left[\frac{-2}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (k^2)^{n-1}} \left(\frac{\varphi\psi}{a} - 1 \right) \Big|_{k=k_1} \right] = 0. \quad (4.2.56)$$

Его нужно рассматривать совместно с уравнением (4.2.50) и его производными порядка $2(n-1)$, вычисленными при $k = k_1$. Требуется, чтобы k_1 не было собственным значением оператора $\mathbf{L}$, $\operatorname{Im} k > 0$. Если $\operatorname{Im} k_1 < 0$, то в уравнении (4.2.56) φ, ψ и a заменяются на $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ и $\bar{a}$. Если $\operatorname{Im} k_1 = 0$, то из асимптотической формы уравнения (4.2.56) при $|x| \to \infty$ потребуется вдобавок, чтобы

$$\frac{\partial^m b(k)}{\partial k^m} \Big|_{k=k_1} = 0, \quad m = 0, \ldots, 2(n-1).$$

Конечно, в этом случае для того, чтобы уравнение можно было решить методом обратной задачи, нужно будет ввести дополнительные условия на начальные данные. Насколько нам известно, задача с начальными условиями для уравнения (4.2.56) в литературе не исследована до конца.

4.3. *N*-солитонные решения разрешимых уравнений

Если начальные данные таковы, что коэффициент отражения (R_+ или R_-) равен нулю, то обратный метод дает точное решение и при этом получаются N-солитонные решения разрешимых уравнений (4.2.1), если спектр уравнения Шрёдингера изначально содержал N собственных значений. Уравнение Марченко ((4.1.14) или (4.1.15)) является тогда уравнением с вырожденным ядром, и его можно решить, используя технику линейной алгебры.

Предположим, что ядро (4.1.14) можно записать в виде произведения,

$$K(x, y, t) = h(x, t) \cdot f(y), \quad (4.3.1)$$

и что

$$\Omega(x + y, t) = g(x, t) \cdot f(y), \quad (4.3.2)$$

где h — неизвестный вектор-столбец длины N, а g, f — векторы-столбцы длины N, у которых j-е компоненты равны соответственно

$D_j(t)\exp(-\eta_j x)$ и $\exp(-\eta_j y)$. Рассмотрим, например, уравнение Марченко (4.1.14), которое можно записать в виде

$$(\mathbf{A}(x, t)\, h(x, t) + g(x, t))\cdot f(y) = 0, \quad y \geqslant x, \tag{4.3.3}$$

где $\mathbf{A}$ — обратимая матричная функция,

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{I} + \mathbf{E}(x, t),$$

$$E(x, t)_{ij} = \left(\int_x^\infty g(u, t)\, \bar{f}^T(u)\, du\right)_{ij} = \frac{D_{+i}(t)\, e^{-i(\eta_i+\eta_j)x}}{(\eta_i + \eta_j)}.$$

Обратимость $\mathbf{A}$ следует из существования и единственности решения уравнения Марченко. Решая уравнение (4.3.3), получим выражение

$$K(x, y, t) = (-\mathbf{A}^{-1}(x, t)\, g(x, t))\cdot f(y), \tag{4.3.4}$$

являющееся единственным решением уравнения Марченко, что оправдывает принятую форму (4.1.1). Отсюда следует, что

$$K(x, x, t) = \operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{A}\right) = (\det \mathbf{A})^{-1}\operatorname{Tr}\left(\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{A}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\log(\det \mathbf{A}(x, t)) \tag{4.3.5}$$

и что решение задач Коши (4.1.1) имеет вид

$$Q(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\det(\mathbf{I} + \mathbf{E}(x, t))). \tag{4.3.6}$$

Проверив свойства функции $\det(\mathbf{I} + \mathbf{E}(x, t))$ или же отправляясь прямо от уравнения Марченко, можно убедиться, что определение функции $\mathbf{E}$ можно заменить более симметричным:

$$E_{ij}(x, t) = \frac{D_{+i}^{1/2}(t)\, D_{+j}^{1/2}(t)\exp-(\eta_i + \eta_j)x}{(\eta_i + \eta_j)}. \tag{4.3.7}$$

Из результатов разд. 3.5 имеем

$$D_{+i}(t) = D_{+i}(0)\exp\left\{2\eta_i\int_0^t C(t', -\eta_i^2)\, dt'\right\}. \tag{4.3.8}$$

Таким образом, N-солитонные решения всех разрешимых уравнений имеют одну и ту же функциональную форму, и различие между ними происходит только из-за разной эволюции во времени нормировочных постоянных. Это, как мы видели, происходит просто из-за разных дисперсионных соотношений для линеаризованных разрешимых систем.

В качестве примера мы приводим явные формулы для односолитонного и двухсолитонного решений общего разрешимого уравнения (4.2.1).

Односолитонное решение.

$$Q(x, t) = -2\eta^2 \operatorname{sech}^2\left(\eta x - \eta \int_a^t C(t, -\eta^2)\, dt' - \delta\right), \quad (4.3.9)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2\eta} D_+(0).$$

Двухсолитонное решение.

$Q(x, t)$ есть дробь с числителем

$$-4\eta_1\eta_2 \left(4 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) + \operatorname{th} \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \{e^{(\delta_1 - \delta_2)} \operatorname{ch}(\theta_1 + \delta_1) + e^{(\delta_2 - \delta_1)} \operatorname{ch}(\theta_2 + \delta_2)\}\right)$$

и знаменателем

$$\left(\operatorname{th} \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\right)\right)^2, \quad (4.3.10)$$

где

$$e^{\delta_1} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\eta_1(\eta_1 + \eta_2)}, \quad e^{\delta_2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\eta_2(\eta_1 + \eta_2)}$$

и

$$\theta_i = \log D_{+i}(0) + 2\eta_i \int_0^t C(t', -\eta_i^2)\, dt' - 2\eta_i x.$$

Интересно детально рассмотреть асимптотическое поведение при $|t| \to \infty$ N-солитонного решения уравнения (4.3.6). Вкратце это было обсуждено в разд. 1.4 для уравнения КдФ. Мы предполагаем здесь, что $C = C(k^2)$ (если функция C явно зависит от времени, то весь последующий анализ не проходит). Поскольку числа η_j различны, мы можем представить их в виде упорядоченной последовательности $\{\eta_i: \eta_i < \eta_j, \text{ если } i < j\}$. Нижний индекс мы сейчас используем для обозначения номера компоненты вектора; таким образом, уравнение (4.3.1) может быть записано в виде

$$K(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N} K_j(x, y, t), \text{ где } K_j(x, y, t) = h_j(x, t)\, e^{-\eta_j y}, \quad (4.3.11)$$

а (4.3.3) можно записать в виде системы линейных уравнений

$$K_j(x, x, t)\, e^{2\theta_j \eta_j} + \sum_{l=1}^{N} \frac{K_l(x, x, t)}{\eta_j + \eta_l} + 1 = 0, \quad (4.3.12)$$

где

$$\theta_j = x + C\left(-\eta_j^2\right) t - \delta_j,$$

$$\delta_j = \frac{1}{\eta_j} \log D_j^{1/2}(0).$$

Либо $C\left(-\eta_j^2\right) > C\left(-\eta_k^2\right)$, $j < k$, либо $C\left(-\eta_j^2\right) < C\left(-\eta_k^2\right)$, $j < k$, но поскольку второй случай превращается в первый преобразованием $t \to -t$, мы станем рассматривать только первую возможность. В окрестности прямой $x = \delta_j - C\left(-\eta_j^2\right) t$ имеем:

$$\begin{aligned} &\theta_k \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \quad k < j, \\ &\theta_k \to \mp\infty \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \quad k > j, \\ &\theta_j \approx 0. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Используя правило Крамера для решения (4.3.12), найдем, что K_j представляет собой отношение двух функций p_j и q. Функция q — общая для всех K_j и зависит от всех функций $e^{\eta_k \theta_k}$, $k = 1, \ldots, N$, тогда как функция p_j для каждого K_j своя и не зависит от $e^{\eta_j \theta_j}$.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} K_m &= 0 + O\left(e^{-\lambda t}\right), \quad m < j, \\ K_m &= K_m^0 + O\left(e^{-\lambda t}\right), \quad m \geqslant j \end{aligned}\right\} \text{ при } t \to \infty, \tag{4.3.14}$$

$$\left.\begin{aligned} K_m &= K_m^0 + O\left(e^{\lambda t}\right), \quad m \leqslant j, \\ K_m &= 0 + O\left(e^{\lambda t}\right), \quad m > j \end{aligned}\right\} \text{ при } t \to -\infty, \tag{4.3.15}$$

где λ — положительная константа. Поэтому главные члены асимптотического разложения функций $K_j(x, x, t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$t \to +\infty$

$$\begin{aligned} &K_j(x, x, t)\left(e^{2\theta_j \eta_j} + \frac{1}{2\eta_j}\right) + \sum_{l=j+1}^{N} \frac{K_l^0(x, x, t)}{(\eta_j + \eta_l)} + 1 = 0, \\ &\sum_{l=j+1}^{N} \frac{K_l^0(x, x, t)}{(\eta_k + \eta_l)} + \frac{K_j^0(x, x, t)}{(\eta_k + \eta_j)} + 1 = 0, \quad k \gtrless j. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

$t \to -\infty$

$$\begin{aligned} &K_j^0(x, x, t)\left(e^{2\theta_j \eta_j} + \frac{1}{2\eta_j}\right) + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{K_l^0(x, x, t)}{(\eta_j + \eta_l)} + 1 = 0, \\ &\sum_{l=1}^{j-1} \frac{K_l^0(x, x, t)}{(\eta_k + \eta_l)} + \frac{K_j^0(x, x, t)}{(\eta_k + \eta_j)} + 1 = 0, \quad k \gtrless j. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Все функции K_l^0 в уравнениях (4.3.16) и (4.3.17) при $|x| \to \infty$ имеют постоянные пределы, так что соответствующая функция Q подчиняется граничному условию $Q \to 0$ при $|x| \to \infty$. Решения, определенные соотношениями (4.3.16) и (4.3.17), являются солитонами, поскольку функция Q зависит только от переменной $\theta_j = -x + C(-\eta_j^2) + \delta_j$ и $Q \to 0$ при $|\theta_j| \to \infty$. Таким образом, N-солитонное решение разбивается на N односолитонных решений при $|t| \to \infty$, причем центр j-го солитона находится в точке $x = \delta_j - C(-\eta_j^2)\, t$ и движется со скоростью $-C(-\eta_j^2)$.

Мы видим, что при $t \to -\infty$, в соответствии со свойствами функции $C(-\eta_j^2)$, солитоны упорядочены таким образом, что самые быстрые находятся сзади, а самые медленные — впереди группы. Этот порядок превращается в противоположный при $t \to +\infty$, и поэтому N-солитонное решение может быть интерпретировано как взаимодействие N односолитонных решений. Замечательной чертой этого взаимодействия является то, что после столкновения солитоны возрождаются; единственное изменение, происходящее в результате столкновений, — это изменение фаз (как было уже показано для случая столкновения двух солитонов для уравнения КдФ в гл. 1). В терминах используемых здесь обозначений столкновение двух солитонов приводит к такому изменению их фаз:

$$\delta_1 = -\frac{1}{\eta_1} \log \left| \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right|, \quad \delta_2 = \frac{1}{\eta_2} \log \left| \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right|. \qquad (4.3.18)$$

Более медленный солитон получает отрицательный фазовый сдвиг, а более быстрый — положительный. Видно, что уравнения (4.3.17) и (4.3.18) включают только скорости других солитонов, образующихся из N-солитонного решения при $|t| \to \infty$, но не их фазы. Таким образом, общий фазовый сдвиг, приобретенный одним из солитонов при столкновении с более медленными солитонами, будет равен сумме фазовых сдвигов, полученных при попарных столкновениях.

Эта замечательная устойчивость солитонов при попарных столкновениях наводит на мысль заняться вопросом об устойчивости солитонов вообще. Один такой метод, предложенный Бенджамином [1972], использует сохраняющиеся плотности, ассоциированные с разрешимым уравнением, для определения меры различия между общим решением Q и солитонным решением Q_s:

$$\Delta C_3(Q, Q_s) = C_3(Q) - C_3(Q_s), \qquad (4.3.19)$$

где $C_3(Q)$ — третья плотность (подынтегральное выражение в третьем интеграле движения для уравнения) в бесконечной иерархии сохраняющихся плотностей для этого уравнения. Этот материал выходит за рамки нашей книги. Нам достаточно будет за-

метить только, что Бенджамин демонстрирует устойчивость солитонов для уравнения КдФ. Другой подход к этому вопросу состоит в том, чтобы работать, непосредственно начиная с уравнения Марченко. Однако на этом пути возникает масса технических сложностей, хотя некоторый частный результат был получен Захаровым [1971].

Одной из характерных черт разрешимых нелинейных уравнений является существование *преобразований Бэклунда*, связывающих между собой решения одного и того же уравнения или даже двух различных разрешимых уравнений. Математическое описание преобразований Бэклунда дано в разд. 6.3. Здесь же мы удовлетворимся перечислением обширного семейства таких преобразований. Здесь уместно вспомнить материал разд. 3.2, оттуда можно взять несколько частных примеров преобразований Бэклунда для уравнения КдФ.

Начнем с рассмотрения двух потенциалов Q и Q' и связанных с ними фундаментальных матричных решений Φ, Φ', удовлетворяющих уравнениям

$$\Phi_x = \mathbf{P}\Phi, \quad \Phi' = \mathbf{P}'\Phi, \tag{4.3.20}$$

где

$$\mathbf{P} \equiv (Q\sigma - \mathbf{F}(k)),$$

$$\mathbf{F}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(сравните с уравнениями (3.5.8)). Здесь мы предполагаем, что непрерывные спектры для двух операторов Шрёдингера $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(Q)$, $\mathbf{L}' \equiv \mathbf{L}(Q')$ совпадают, а дискретные спектры различны. Продолжая тем способом, которым было получено (3.5.15), найдем, что

$$(\mathbf{A}')^{-1}\Delta\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Q\,((\Phi')^{-1}\sigma\Phi)\,dx, \tag{4.3.21}$$

где

$$\Delta Q \equiv Q' - Q, \quad \Delta\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}' - \mathbf{A}$$

и $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}$ — матричные функции рассеяния (3.5.13), связанные с системами (4.3.20). Правая часть уравнения (4.3.21) включает произведения собственных функций двух разных операторов: $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$. Так же как в случае квадратов собственных функций, можно поставить задачу на собственные значения для функции $\varphi\varphi'$. Процедура состоит в выписывании уравнений (3.5.22)—(3.5.26) для собственных функций ${}_k u$, ${}_k v'$, операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ и применении

операций, приводящих к (3.5.27)—(3.5.28). Отсюда получаются соотношения

$$(u_{xx}v' + v'_{xx}u - 2u_xv'_x)(x) = \int_{-\infty}^{x} (Q_s + Q'_s)\,uv'\,ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} (Q - Q')\,(uv'_s - v'u_s)\,ds + (u_{xx}v' + v'_{xx}u - 2u_xv'_x)(-\infty), \quad (4.3.22)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (Q + Q')\right] uv' = -2k^2uv' + 2u_xv'_x,$$

$$(u_xv' - v'_xu)(x) = \int_{-\infty}^{x} (Q - Q')\,uv'\,ds + (u_xv' - v'_xu)(-\infty).$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$\mathbf{B}_1uv' = kuv' + \frac{1}{4}(u_{xx}v' + v'_{xx}u - 2u_xv'_x)(-\infty) +$$

$$+ \frac{1}{4}(v'_xu - u_xv')(-\infty) \int_{-\infty}^{x} (Q - Q')\,ds, \quad (4.3.23)$$

где

$$\mathbf{B}_1 \equiv -\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2} - 2(Q' + Q) + \int_{-\infty}^{x} ds\,(Q'_s + Q_s) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} ds\,(Q' - Q) \int_{-\infty}^{x} dy\,(Q' - Q)\right\}.$$

Заметим, что если $Q' = Q$, то оператор $\mathbf{B}_1$ совпадает с оператором $\mathbf{L}_1$, определенным в (3.5.31). Уравнения (4.3.20) можно переписать в виде

$$\Delta R_+ = \frac{1}{2ikaa'} I_\Delta(\varphi', \varphi),$$

$$1 + b'b - a\bar{a}' = -\frac{1}{2ik} I_\Delta(\bar{\varphi}', \varphi), \quad (4.3.24)$$

где

$$I_\Delta(u, v) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Quv\,dx.$$

Если вычислить (4.3.23) в пределе при $x \to +\infty$ для функции $\varphi\varphi'$, то мы получим соотношение

$$(R'_+ + R_+) =$$

$$= -\frac{1}{4k^2aa'} \int_{-\infty}^{\infty} [(Q'_x + Q_x) + (Q' - Q) \int_{-\infty}^{x} ds\,(Q' - Q)]\,\varphi\varphi'\,dx. \quad (4.3.25)$$

Если мы введем функцию $G(k^2)$, которая представляет собой либо вещественную аналитическую функцию, либо частное от деления двух вещественных аналитических функций, то, комбинируя (4.3.24) и (4.3.25), мы сможем получить равенство

$$(R'_- - R_+) + 2ikG(k^2)(R'_+ + R_+) =$$

$$= \frac{1}{2ikaa'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(Q' - Q) + G(k^2) \left((Q'_x + Q_x) + (Q' - Q) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \int_{-\infty}^{x} ds\,(Q' - Q) \right) \right] \varphi\varphi'\,dx. \quad (4.3.26)$$

Все это упоминалось в разд. 3.5, когда мы определяли разрешимые уравнения.

Кроме того, мы имеем

$$G(\mathbf{B}_1)\,\varphi\varphi' = G(k^2)\,\varphi\varphi', \quad (4.3.27)$$

так что мы можем повторить использованный там трюк для того, чтобы перенести действие оператора $\mathbf{B}_1$ на потенциальные функции, построив для этого сопряженный оператор

$$\mathbf{B}_1^{\Lambda} \equiv -\frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2(Q' + Q) + (Q'_x + Q_x) \int_x^{\infty} ds + \right.$$

$$\left. + (Q' - Q) \int_x^{\infty} (Q' - Q) \int_s^{\infty} dy \right\}. \quad (4.3.28)$$

После этого можно установить нетривиальное соотношение между функциями Q' и Q, если потребовать

$$R'_+ = \frac{(1 - 2ikG(k^2))}{(1 + 2ikG(k^2))} R_{1+}. \quad (4.3.29)$$

Тогда функции Q' и Q связаны соотношением

$$(Q' - Q) + G(\mathbf{B}_1^{\Lambda}) \left[(Q'_x + Q_x) + (Q' - Q) \int_x^{\infty} (Q' - Q)\,ds \right] = 0. \quad (4.3.30)$$

Из (3.5.51) следует, что

$$R'_{+t} = \frac{(1 - 2ikG(k^2))}{(1 + 2ikG(k^2))} R_{1+t} = -2ikC(k^2) R'_+, \quad (4.3.31)$$

где $C(k^2)$ является частным от деления двух аналитических действительных функций, определяющих разрешимое уравнение, которому удовлетворяет функция Q' (3.5.45). Поскольку R'_+ удовлетворяет тому же самому эволюционному уравнению, что

и R_+, отсюда следует, что Q' удовлетворяет этому же уравнению, и, следовательно, (4.3.30) определяет соответствие между некоторыми решениями разрешимого нелинейного уравнения.

Уравнение (4.3.30) представляет собой *обобщенное преобразование Бэклунда* или скорее половину от него, которую нам нужно определить, а (4.3.29) представляет собой соответствующее изменение коэффициента отражения. Впервые оно было получено Калоджеро и Дегасперисом [1976]. Метод вывода, который мы здесь используем, принадлежит Додду [1978]. Заметим, что (4.3.30) пригодно для всех разрешимых уравнений, поскольку не зависит от фазовой скорости линеаризованного уравнения, т. е. от функции $C(k^2)$. Другая половина преобразования получается подстановкой в уравнение (4.3.30) уравнений, которым удовлетворяют функции Q' и Q и перестановкой, при помощи которой получается симметрическое выражение относительно Q'_t и Q_t и производных этих функций по x. Простейшее преобразование, задаваемое уравнением (4.3.30), соответствует первой половине преобразования Бэклунда (3.1.21), определенного для уравнения КдФ. Для того, чтобы его получить, положим функцию $G(k^2)$ равной константе, $G(k^2) = 1/2p$, $p \neq 0$, и тогда найдем, что

$$(Q'_x + Q_x) + (Q' - Q)\left[2p + \int_x^\infty (Q' - Q)\,ds\right] = 0. \quad (4.3.32)$$

Если мы введем потенциальную функцию

$$w' = \frac{1}{2}\int_x^\infty Q\,ds + \alpha, \quad w = \frac{1}{2}\int_x^\infty Q\,ds + \beta, \quad (4.3.33)$$

где $\alpha - \beta = p$, то это можно будет переписать в виде

$$(w' + w)_x = p^2 - (w' - w)^2,$$

что является половиной преобразования Бэклунда, общей для всех разрешимых уравнений. В данном случае коэффициенты отражения связаны следующим образом:

$$R'_+ = -\frac{(k + ip)}{(k - ip)} R_+. \quad (4.3.34)$$

Если начинать с нулевого решения $Q = 0$, то нетрудно проверить, что (4.3.33) дает при интегрировании данное солитонное решение (4.3.9). Коэффициент при переменной t в решении, конечно, фиксируется фазовой скоростью $C(k^2)$ того линеаризованного варианта разрешимого уравнения, который мы рассматриваем. На самом деле это дает ключ к построению функции Q' для произвольной функции Q. Преобразование (4.3.33) «добавляет к функции Q солитон». Это ясно из рассмотрения соотношения (4.3.34),

если мы интерпретируем величину $-p^2$ как дополнительное собственное значение, которое присутствует в спектре $\sigma(\mathbf{L}(Q'))$, но отсутствует в спектре $\sigma(\mathbf{L}(Q))$. Как можно было видеть из первоначальных вычислений, солитонное решение, вычисленное таким образом, не единственно. Поэтому преобразование Бэклунда не является преобразованием (т. е. отображением) в обычном смысле, поскольку интегрирование вводит однопараметрическое семейство решений (переменная p фиксирована) и таким образом устанавливает *соответствие* между решениями. В случае, когда $Q = 0$, параметр включается в фазовый сдвиг солитонного решения, порожденного преобразованием Бэклунда.

Дальше выберем в качестве примера $G(k^2) = (1/2)(-k^2/abc + (ab + ac + bc)/abc)$, где $a + b + c = 0$, что соответствует сложному преобразованию Бэклунда, для которого

$$R'_+ = -\frac{(k+ia)(k+ib)(k+iC)}{(k-ia)(k-ib)(k-iC)} R_+, \quad a+b+c=0, \quad (4.3.35)$$

и, таким образом, спектр $\sigma(\mathbf{L}(Q'))$ имеет *три дополнительных собственных значения* $-a^2$, $-b^2$, $-(a+b)$. В общем случае выбор $G(k^2) = \sum_{i=0} a_i k^{2i}$ приводит к следующим изменениям:

$$R'_+ = -\prod_{j=1}^{2s-1} \frac{(k+i\alpha_i)}{(k-i\alpha_i)} R_+, \quad (4.3.36)$$

где α_i удовлетворяет условиям в количестве $(2s+1) - (s+1) = s$, и спектр $\sigma(\mathbf{L}(Q'))$ имеет $2s+1$ дополнительных собственных значений. Преобразования, соответствующие выражениям (4.3.24), (4.3.36), называются сложными по той причине, что они являются композициями преобразований, соответствующих (4.3.34).

В этой связи коммутационное соотношение, или «теорема о перестановке» для преобразования Бэклунда (4.3.34), обсуждавшееся в упражнениях к гл. 3, рассматривается как следствие того факта, что

$$R_{3+} = \frac{(k+ip_2)}{(k-ip_2)} R_{1+} = \frac{(k+ip_2)(k+ip_1)}{(k-ip_2)(k-ip_1)} R_{0+} =$$
$$= \frac{(k+ip_1)(k+ip_2)}{(k-ip_1)(k-ip_2)} R_{0+} = \frac{(k+ip_1)}{(k-ip_1)} R_{2+}. \quad (4.3.37)$$

Все это удобно представить с помощью коммутативной диаграммы (рис. 4.2), где Q_1, Q_2, Q_3 являются специальными решениями, полученными из Q_0 применением (4.3.32) к функции Q_0 с параметрами p_1 и p_2. Из (4.3.33) легко получить *принцип алгебраической суперпозиции*, который выводится из коммутационного соотношения (4.3.37):

$$w_3 = \frac{(p_1^2 - p_2^2) + w_0(w_1 - w_2)}{(w_1 - w_2)}. \quad (4.3.38)$$

Это w_3 представляет собой новое решение, полученное алгебраическим путем из данного решения w_0 и двух частных преобразований от него, w_1 и w_2, с параметрами p_1 и p_2. Дальнейшие решения можно получить, комбинируя семейства решений, получаемых этим способом. Таким образом может быть порождена целая «пирамида» решений.

Если обобщить преобразование Бэклунда (4.3.30), допустив зависимость функции G еще и от переменной t, то можно *формально* определить преобразования, связывающие решения различных

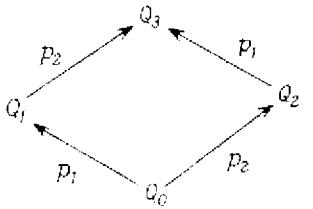


Рис. 4.2. Принцип алгебраической суперпозиции для разрешимых уравнений.

разрешимых уравнений. Допустим, таким образом, что Q' и Q — решения разрешимых уравнений, характеризующихся соответственно функциями C' и C. В этом случае

$$R'_{+t} = -2ikC(k^2)R'_+, \tag{4.3.39}$$

и мы принимаем, что R'_+ и R_+ связаны соотношением (4.3.29), так что при помощи интегрирования получим

$$G(k^2, t) = -\frac{1}{2ik}\operatorname{tg}\{k(C(k^2) - C'(k^2))(t - t_0) + F(k^2)\},$$

где

$$\operatorname{tg}(kF(k^2)) = -2ikG(k^2, t_0). \tag{4.3.40}$$

Таким образом, формальное преобразование определено соотношением (4.3.30) с функцией G, определенной уравнением (4.3.40).

Здесь имеет смысл рассмотреть действие преобразования Бэклунда на остальные данные рассеяния, в том числе на коэффициент прохождения T_+. Из (4.3.29) и из того, что сделано в разд. 5 гл. 3, немедленно следует, что

$$D_{+j'} = \frac{(1 - 2ikG(k^2))}{(1 + 2ikG(k^2))} D_{+j}, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{4.3.41}$$

Гораздо труднее выяснить действие преобразования Бэклунда на коэффициент прохождения T_+. Здесь мы получим формулу для случая $G(k^2) = 1/2p$ и выведем общий результат. Из (4.3.30) после интегрирования получается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Q' - Q)\,dx = -4p. \tag{4.3.42}$$

Одно из уравнений (4.3.24) можно записать в виде

$$a' - a = -\frac{1}{2ik} I_\Delta(\psi', \varphi), \tag{4.3.43}$$

что после использования уравнения (4.3.30) с $G(k^2) = 1/2p$ превращается в

$$a' - a = \frac{1}{4ikp} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(Q_x' + Q_x) + (Q' - Q) \int_x^{\infty} (Q' - Q)\, ds \right] \psi' \varphi\, dx. \tag{4.3.44}$$

Из (4.3.22) нетрудно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(Q_x' + Q_x) + (Q' - Q) \int_x^{\infty} (Q' - Q)\, ds \right] \psi' \varphi\, dx =$$

$$= 2k \left[2a'k - 2ak - ia \int_{-\infty}^{\infty} (Q' - Q)\, dx \right]. \tag{4.3.45}$$

Затем (4.3.44) при помощи (4.3.45) и (4.3.42) можно переписать в виде

$$T_+'(k) = \frac{(k - ip)}{(k + ip)} T_+(k). \tag{4.3.46}$$

Отсюда следует, что если спектр $\sigma(\mathbf{L}(Q'))$ имеет N дополнительных собственных значений по сравнению со спектром $\sigma(\mathbf{L}(Q))$, то, повторно применяя (4.3.32) (с разными параметрами p_j), мы придем к формулам

$$R_+'(k) = (-1)^N \prod_{j=1}^{N} \frac{(k + ip_j)}{(k - ip_j)} R_+(k), \tag{4.3.47}$$

$$T_+'(k) = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{k + ip_j}{k - ip_j} \right) T_+(k). \tag{4.3.48}$$

Теперь рассмотрим соотношение между собственными значениями изоспектральных операторов Шрёдингера, связанных преобразованием Бэклунда. Это даст другой метод для получения некоторых результатов разд. 4.1; здесь используется факторизационная техника разд. 2.2.

Предположим, что оператор $\mathbf{L}(Q) = -\partial^2/\partial x^2 + Q$ имеет ряд связанных состояний $\{-k_n^2 < \ldots < -k_1^2\}$, и пусть $\beta > k_1$, где g — решение уравнения

$$(\mathbf{L}(Q) + \beta^2 \mathbf{I})\, g = 0. \tag{4.3.49}$$

Заметим, что g *не* является собственной функцией оператора $\mathbf{L}(Q)$. Легко показать, что $\mathbf{L}(Q) + \beta^2 \mathbf{I}$ можно представить в виде

произведения операторов первого порядка:

$$\mathbf{L}(Q) + \beta^2\mathbf{I} = \mathbf{C}^A\mathbf{C}, \text{ где } \mathbf{C} \equiv \partial/\partial x + u \tag{4.3.50}$$

и

$$u^2 - u_x = Q + \beta^2. \tag{4.3.51}$$

Из этого разложения следует, что мы можем выбрать частную функцию u, определенную равенством

$$u = -g_x g^{-1}, \tag{4.3.52}$$

так что

$$\mathbf{C} = g\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}. \tag{4.3.53}$$

Дальнейшие вычисления показывают, что

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^A = \mathbf{L}(Q') + \beta^2\mathbf{I}, \tag{4.3.54}$$

где

$$Q'(x) = Q(x) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x).$$

Формальную эквивалентность, определенную равенством (4.3.54), можно строго обосновать в некотором оснащении гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$. Заметим затем, что

$$(\mathbf{L}(Q') + \beta^2\mathbf{I})g^{-1} = -\left(g\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\right)\left(g^{-1}\frac{\partial}{\partial g}g\right)g^{-1} = 0. \tag{4.3.55}$$

Тогда если

$$g_\alpha(x) = \alpha\varphi(x, i\beta) + \psi(x, i\beta), \tag{4.3.56}$$

то

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} a(i\beta)\alpha e^{\beta x}(1 + O(1)) & \text{при } x \to -\infty, \\ a(i\beta)e^{-\beta x}(1 + O(1)) & \text{при } x \to +\infty. \end{cases} \tag{4.3.57}$$

Величина β не является нулем функции a, так что функция g_α^{-1} непрерывна и принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$. Следовательно, g_α^{-1} является собственной функцией оператора $\mathbf{L}(Q')$ с собственным значением $-\beta^2$. Результат (4.3.57), который мы получили аналитическим продолжением граничных условий для решений Йоста (если предполагается, что функция Q имеет компактный носитель, то это условие можно ослабить), установлен непосредственно Дейфтом и Трубовицем [1979]. Очевидное у нас заключение о том, что $\sigma(L(Q')) = \{\sigma(L(Q)), -\beta^2\}$, доказывается с использованием фундаментального факта спектральной теории (Дейфт [1978]), состоящего в том, что если B — замкнутый оператор, то $\sigma(\mathbf{B}\mathbf{B}^A)\setminus\{0\} = \sigma(\mathbf{B}^A\mathbf{B})\setminus\{0\}$. Мы просто применяем этот результат к оператору $\mathbf{C}$, а затем присоединяем дополнительное собственное значение.

Соотношение между решениями Йоста для $\mathbf{L}(Q)$ и $\mathbf{L}(Q')$ легко получается из импликации

$$\mathbf{C}^A\mathbf{C}y = 0 \Rightarrow (\mathbf{C}\mathbf{C}^A)\mathbf{C}y = 0. \tag{4.3.58}$$

Кроме того, непосредственно из определения получаем, что

$$\int_{\pm a}^{\infty} |x|^j |Q'(\pm x)|\,dx = \int_{\pm a}^{\infty} |x|^j |-2\beta^2 + 2(g_{\alpha x}/g_\alpha)^2|\,dx + \\ + \int_{\pm\alpha}^{\infty} |x|^j |Q(\pm x)|\,dx, \quad j = 1, 2, \quad (4.3.59)$$

$$\frac{g_{\alpha x}}{g_\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_x(i\beta)}{\varphi(i\beta)} \text{ при } x \to +\infty, \\ \dfrac{\psi_x(i\beta)}{\psi(i\beta)} \text{ при } x \to -\infty. \end{cases} \quad (4.3.60)$$

Затем используем теорему 4.11 для того, чтобы убедиться, что

$$|-2\beta^2 + 2(g_{\alpha x}/\alpha)^2| = O(1/|x|^4) \text{ при } x \to \infty, \quad (4.3.61)$$

так что $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\,|Q'(x)|\,dx < \infty$. Заметим, наконец, что все приведенные выше рассуждения могут быть обращены для *удаления* собственной функции оператора $\mathbf{L}(Q)$.

Теорема 4.12. *Пусть*

(i) $\beta > k_j$, *где* $-k_j^2 \in \sigma(\mathbf{L})$, $j = 1, \ldots, N$, *и* $\alpha > 0$

(*присоединение связанного состояния*) *или*

(ii) $\beta = k_N$ (*удаление связанного состояния*). *Для* (i) *определим* $g_\alpha(x) = \alpha\varphi(x, i\beta) + \psi(x, i\beta)$ *и* $Q' = Q - 2\partial^2/\partial x^2 \ln g_\alpha$; *тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\,|Q'(x)|\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \sigma(\mathbf{L}(Q')) = \{\sigma(\mathbf{L}(Q)), -\beta^2\}.$$

Кроме того, данные рассеяния двух операторов связаны соотношениями

$$D'_{+j} = \left(\frac{\beta + k_j}{\beta - k_j}\right) D_{+j}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$D'_{+M+1} = \frac{2\beta}{\alpha} T_+(i\beta),$$

$$R'_- = -\left(\frac{k + i\beta}{k - i\beta}\right) R_+,$$

а для коэффициентов прохождения

$$T'_+ = \left(\frac{k + i\beta}{k - i\beta}\right) T_+.$$

Функция g_α^{-1} *является собственной функцией, отвечающей собственному значению* $-\beta^2$, *и решения Йоста для оператора* $\mathbf{L}(Q')$ *определяются следующим образом:*

$$\varphi'(x, k) = \frac{-1}{(ik-\beta)} g_\alpha \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha^{-1} \varphi(x, k),$$

$$\psi'(x, k) = \frac{1}{(ik-\beta)} g_\alpha \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha^{-1} \psi(x, k).$$

Для случая (ii)

$$D'_{+j} = \frac{\beta - k_j}{\beta + k_j} D_{+j}, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

$$R'_+ = -\left(\frac{k - i\beta}{k + i\beta}\right) R_+$$

и

$$T'_+ = \left(\frac{k - i\beta}{k + i\beta}\right) T_+.$$

Решения Йоста в этом случае связаны соотношениями

$$\varphi'(x, k) = \frac{-1}{(ik+\beta)} \psi(x, ik\beta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(x, k)}{\psi(x, i\beta)}\right),$$

$$\psi'(x, k) = \frac{1}{(ik+\beta)} \psi(x, i\beta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi(x, k)}{\psi(x, i\beta)}\right)$$

и

$$Q' = Q - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \psi(x, i\beta) \quad c \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) |Q'| \, dx < \infty,$$

$$\sigma(\mathbf{L}(Q')) = \delta(\mathbf{L}(Q)) \setminus -\beta^2.$$

Доказательство. Осталось только проверить, что данные рассеяния связаны именно таким способом.

Для случая (i) имеем

$$\varphi'(x, k) = -(ik - \beta) g_\alpha \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha^{-1} \varphi(x, k) \sim$$

$$\sim \frac{(\beta + ik)}{(ik-\beta)} a(k) e^{-ikx} - b(k) e^{ikx} \text{ при } x \to -\infty. \quad (4.3.62)$$

Результат для коэффициентов прохождения следует прямо отсюда, а результат для $\tilde{R}_+$ получается из определения.

Собственная функция g_α^{-1} имеет следующее асимптотическое поведение:

$$g_\alpha^{-1} \sim \begin{cases} (\alpha a)^{-1} e^{-\beta x}, & x \to +\infty, \\ a^{-1} e^{\beta x}, & x \to -\infty. \end{cases} \quad (4.3.63)$$

Если функция Q' имеет компактный носитель, то $\varphi_j' = b_j'\psi_j'$ для связанного состояния, где $b_j' = b'(ik_j)$. Из (4.3.63) следует, что $b_{N+1}' = -b_{N+1} = \alpha^{-1}$, и, таким образом,

$$D_{+N+1} = \frac{b_{N+1}'}{ia_{N+1}'} = \lim_{k \to i\beta} \left\{ \frac{1}{i} R_+'(k - i\beta) \right\} = -2\beta R_+(i\beta) = \\ = 2\beta\alpha^{-1} T_+(i\beta),$$

что верно и в том случае, когда функция Q' не имеет компактного носителя. Доказательства для случая (ii) проводятся аналогично.

Повторное применение теоремы 4.12 даст результаты, которые были раньше получены из обобщенного преобразования Бэклунда. Тот факт, что собственные значения могут быть изъяты из оператора $\mathbf{L}(Q)$, делает возможным построение единственного оператора $Q^{(\text{редуцир.})}$, для которого спектр $\sigma(\mathbf{L}(Q^{(\text{редуцир.})}))$ представляет собой пустое множество.

Существование единственной функции $Q^{(\text{редуцир.})}$ упрощает доказательство существования и единственности решения уравнения Марченко, как показано в разд. 4.1 и 4.2.

В случае, когда начальные условия гладкие, из результатов настоящей главы следует, что N-солитонное решение получается из начальных условий, имеющих в точности вид (4.3.6), где t — некоторое фиксированное число. Однако, как было показано в разд. 4.2, ситуация становится гораздо более сложной, если условия гладкости ослабить.

Обычно по поводу произвольных начальных условий хочется выяснить, сколько солитонов они порождают. В третьей главе была дана следующая оценка для числа солитонов:

$$N \leqslant 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |v| |F(v)| dv, \tag{4.3.64}$$

где $F(v) = Q(x, 0)$ кусочно-непрерывна. В случае специальных начальных условий можно вывести другие оценки. В литературе встречается много оценок такого сорта, но обычно при этом игнорируется влияние непрерывного спектра. Так, Березин и Карпман [1966] и Карпман [1968] использовали конечное число сохраняющихся плотностей $\{C_n\}$ для аппроксимации дискретного спектра. Более простую оценку числа собственных значений можно получить при использовании правила квантования Бора—Зоммерфельда. Это правило работает хорошо, если начальное возмущение велико, так что такая аппроксимация справедлива. В этом случае мы получаем (Ландау и Лифшиц [1965])

$$\oint p dx = \oint (\lambda - F(x))^{1/2} dx = 2\pi(N + 1/2), \tag{4.3.65}$$

где интеграл берется по полному циклу периодического классического движения. Отсюда выводим, что

$$N \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{1/2}\, dx. \tag{4.3.66}$$

Если $\lambda_0 = -\eta_0^2$ — собственное значение, самое большое по величине, то в этом случае

$$|\lambda_0| \approx \max\{|F(x)|\}. \tag{4.3.67}$$

Другое, более общее выражение для λ_0 можно получить из асимптотического разложения $a(k)$, данного в (3.3.73). Если предположить, что $|\lambda_0|$ достаточно велико, то мы получим

$$\eta_0 \approx -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(v)\, dv. \tag{4.3.68}$$

Еще лучшие оценки можно получить, если включить в асимптотическое разложение дальнейшие члены, приравнять левую часть уравнения нулю, и затем решить получившееся алгебраическое уравнение. Соотношение (4.3.68) показывает, что для того, чтобы солитоны отсутствовали, начальные данные должны удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\, dv > 0. \tag{4.3.69}$$

Решение уравнения Марченко для произвольных начальных условий не может быть записано в явном виде, но тем не менее можно получить некоторые общие черты асимптотики решений разрешимых уравнений при больших значениях времени для тех случаев, когда солитоны отсутствуют в начальных данных. Для уравнений, рассматриваемых в этой книге, оказывается, что существует асимптотическая область, где поведение при больших значениях времени подобно поведению линейных диспергирующих систем, а именно асимптотическая форма решения локально периодична со слабо меняющейся амплитудой и фазой. Решения такого типа могут быть получены непосредственным асимптотическим анализом уравнения, например методом многомасштабных разложений. Однако одни только асимптотические методы не могут доказать существование решения или дать точную зависимость от начальных данных. Для этого необходимо использовать некоторые свойства, связанные с обратным методом для разрешимого уравнения. В литературе встречаются два подхода, до некоторой степени перекрывающиеся. Первый начинается с изучения самой по себе изоспектральной задачи, второй использует законы сохранения, связанные с уравнением. Для уравнения КдФ изоспектральная задача была использована Захаровым и Манако-

вым [1976], а законы сохранения — Абловицем и Сигуром [1977]. Поскольку первый метод работает непосредственно с изоспектральным уравнением Шрёдингера, оказывается, что таким образом можно получить результаты сразу для целого семейства разрешимых уравнений. Действительно, это так, но для почти всех начальных условий результат оказывается применим только к части асимптотической области. Причина этого состоит в том, что для изоспектрального уравнения Шрёдингера $R_+(0) = -1$,

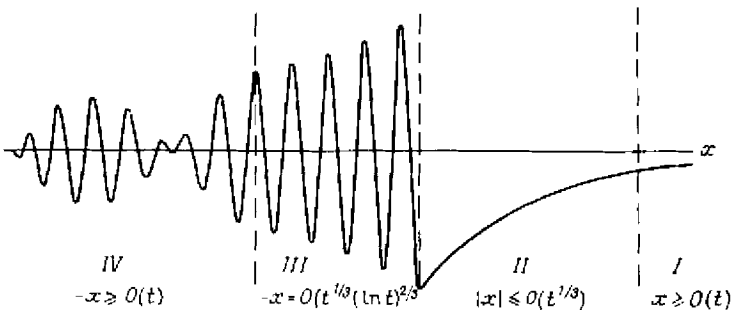


Рис. 4.3. Поведение решений на большом отрезке времени для случая начальных условий, свободных от солитонов.

кроме тех специальных случаев, когда существует солитон, который близок к тому, чтобы его можно было добавить к спектру оператора $\mathbf{L}$. Это приводит к включению в асимптотическую область внутреннего слоя, который можно найти, только изучая по отдельности каждое разрешимое уравнение. Такая ситуация не возникает для разрешимых уравнений систем АКНС, которые мы тоже рассмотрим в разд. 6.3 нашей книги.

По этой причине и потому, что этот анализ очень сложный и длинный, мы здесь представим только результаты для уравнения КдФ, полученные Абловицем и Сигуром [1977]. Их результаты получены для уравнения КдФ вида

$$Q_t + 6QQ_x + Q_{xxx} = 0, \tag{4.3.70}$$

что отличается от нашей формулировки (3.3.1) заменой $Q \to -Q$.

В общих чертах решение изображено графически на рис. 4.3 для $R_+(0) = -1$.

Подробный анализ приводит к необходимости исследования четырех разных асимптотических областей. Неопределенные константы и функции вычисляются путем сравнения решений на пересечении областей (смотри, например, главу о сращении асимптотических разложений в работе Найфэ [1973]). Внутри каждой из областей решение имеет следующий характер.

I. $x \gg O(t)$

Решение экспоненциально убывает и может быть получено методом наискорейшего спуска из уравнения Марченко

$$Q(x, t) = \frac{1}{2(3\pi t)^{1/2}} R_+\left[\frac{i}{2}\left(\frac{x}{3t}\right)^{1/2}\right]\left[\frac{x}{3t}\right]^{1/4} e^{-2(x/3t)^{3/2}t}(1 + O(t^{-1})).$$

Здесь $X \equiv x/t = O(1)$ и по t^{-1} ведется разложение.

II. $|x| \leqslant O(t^{1/3})$

Решение *автомодельно* и растет линейно при $(x/t^{1/3}) \to \infty$.

$$Q(x, t) = (3t)^{-2/3} F(\eta, t), \quad \eta = (3t)^{-1/3} x,$$

$$F(\eta, t) = f(\eta) + (3t)^{-1/3} f_1(\eta) + (3t)^{-2/3} f_2(\eta) + \ldots,$$

где $f(\eta)$ удовлетворяет автомодельному уравнению для уравнения КдФ:

$$f_{\eta\eta\eta} + 6ff_\eta - (2f + \eta f_\eta) = 0.$$

Два случая представляют интерес:

(a) $|R_+(0)| < 1$, f осциллирует при $\eta \to -\infty$. Тогда

$$f(\eta) \approx -\frac{i}{\pi^{1/2}} \ln\{1 - |R_+(0)|^2\}^{1/4} \cos\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \ln\{1 - |R_+(0)|^2\}^{1/2} (-\eta)^{-1/2} (1 - \cos 2\theta),$$

где

$$\theta \approx \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} + \frac{3}{4\pi} \ln\{-\eta(1 - |R_+(0)|^2\} + \theta_0;$$

(b) $|R_+(0)| = 1$, при $\eta \to \infty$ $f(\eta) = \frac{1}{2}\eta$ и при $\eta \to -\infty$

$$f(\eta) = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}(-2\eta)^{-1/2} + \frac{1}{2}(-2\eta)^{-2} -$$

$$- \frac{5}{2}(-2\eta)^{-7/2} + O((-2\eta)^{-5}).$$

Случай (b) — это та ситуация, которая возникает почти всегда.

III. $(-x) = O\{t^{1/3}(\ln t)^{2/3}\}$.

Упорядочение асимптотических рядов для функции F (случай (b) в области II) нарушается в пределе при $\eta \to -\infty$. Решение в этой области соответствует бесстолкновительной ударной волне, т. е. существует узкая область, в которой асимптотическое решение гладко переходит от одного типа поведения к другому без какой-либо диссипации. Тогда

$$Q(x, t) = (3t)^{-2/3}(-2\eta) g(Z),$$

где

$$g(Z) \approx a(Z) + b(Z) \operatorname{cn}^2(2K(\nu)\theta + \theta_0, \nu(z)),$$

$$a = \frac{-\nu}{4(2-\nu)}, \quad b = \frac{\nu}{2(2-\nu)},$$

$$z = \ln(1 + \varepsilon\xi), \quad \varepsilon^{-1} = \ln 3t + \frac{5}{4}\ln(2\ln 3t),$$

$$2\xi = (-2\eta)^{3/2} - 2\ln 3t - \frac{15}{4}\ln(-2\eta), \quad 0 = \varepsilon^{-1}\int_0^Z w(z)\,e^z\,dz,$$

$$w^2 = \frac{1}{(6K)^2(2-\nu)}$$

и

$$\frac{d\nu}{dZ} = -\frac{8}{3}\frac{(1-\nu/2)}{\nu}\left[\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{E}{K} - 1 + \nu\right].$$

Область значений переменной Z — интервал $]0, \infty[$, а $K(\nu)$, $E(\nu)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

IV. $(-x) \gg O(t)$

Решение в этой области имеет вид

$$Q(x, t) = \tau^{-1/2}(2d)\,x^{1/4}\cos\theta,$$

$$0 = \tau(2/3X^{3/2} - (2d^2)\frac{\ln\tau}{\tau} - \frac{1}{\tau}(\theta_0 - 3d^2\ln X)),$$

$$d^2(X) = -1/4\pi\ln(1 - |R - (X^{1/2})|^2),$$

$$X = -x/3t, \quad \tau = 3t.$$

Функция θ_0, которая не была определена Абловицем и Сигуром, может быть определена методом Захарова и Манакова (см. разд. 6.3).

4.4. Примечания

Раздел 4.1

1. После контрпримера Баргмана к работе Фрёберга и Гилларараса Левинсон [1949] показал, что отсутствие единственности объяснялось наличием дискретной части спектра. Марченко [1950, 1952] показал, что спектральная функция распределения определяет потенциал, и таким образом связал эту задачу с обратной задачей Штурма—Лиувилля, которая уже изучалась в литературе. Аналогичные результаты были выведены Боргом [1949], Йостом и Коном [1952] и Холмбергом [1952]. Гельфанду и Левитану [1951] принадлежит процедура, при помощи которой можно реконструировать потенциал по спектральной функции, решая линейное интегральное уравнение. Форма интегрального уравнения, которую мы используем, принадлежит Марченко [1955]. Необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять спектральная функция, были сформулированы Крейном [1953].

Во всех этих работах рассматривалось уравнение Шрёдингера на полупрямой. Распространение этих результатов для уравне-

ния Шрёдингера на всю прямую исследовалось Кеем и Мозесом [1956]. Детальное исследование для случая, когда реконструированный потенциал удовлетворяет условию типа $\int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)|(1+|v|)\,dv < \infty$, был проделан Фаддеевым [1964]. Ошибки в этом рассуждении были обнаружены Шаданом и Сабатье [1977] и Трубовицем и Дейфтом [1979].

2. Ньютон предложил два метода для реконструкции функции Q: один из них соответствует решению уравнения Гельфанда—Левитана, другой теории Марченко, которая в этом коротком резюме была нами опущена. Его метод в сущности состоит в введении функций $g_{\pm}(x, k)$, являющихся решениями уравнения (3.3.1) и, кроме того, удовлетворяющих *регулярным* граничным условиям при $x = 0$:

$$g_+(0, k) = 1, \quad g_{+x}(0, k) = ik,$$
$$g_-(0, k) = 1, \quad g_{-x}(0, k) = -ik.$$

Затем теория развивается примерно тем же путем, что и в случае полупрямой (Фаддеев [1963]), введением в данном случае матричной функции Йоста $\mathbf{J}$, связывающей решения Йоста с регулярными решениями:

$$(g_+, g_-) = (\psi, \varphi)\,\mathbf{J}.$$

Существует представление Повзнера—Левитана для функций $g_{\pm}$,

$$g_{\pm}(x) = \exp(\pm ikx) - \int_{-x}^{x} dy H(x, y) \exp(\pm iky),$$

где функция H удовлетворяет волновому уравнению, аналогичному тому уравнению, которому удовлетворяют функции $K_{\pm}$ при $Q_x \in L^1(\mathbb{R})$. Уравнение Гельфанда—Левитана, которое при этом получается, имеет вид

$$H(x, y) - \Theta(x, y) + \int_{-x}^{+x} H(x, u)\,\Theta(u, y)\,du = 0,$$

где

$$\Theta(x, y) = \sum_{j=1}^{M} P_j(x)\,P_j(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(x, k) \exp(iky)\,dk$$

и

$$P_j(x) = (r_{j1} \exp(-\eta_j x) + r_{j2} \exp(\eta_j x))\,\eta_j^{-1},$$

$$S(x, t) = M_{11}(k) \exp(ikx) + M_{12}(k) \exp(-ikx),$$

где

$$\mathbf{M}(k) = (\mathbf{J}^{\Lambda}(k)\,\mathbf{J}(k))^{-1} - \mathbf{I},$$

$r_j = (r_{j1}, r_{j2})$ — вектор-строка, такой что

$$i\eta_j \mathbf{J} \bar{r}_j = 0$$

и

$$\eta_j^2 = c_j^{-1} \{i(1, c_j)\, i\eta_j \mathbf{J} \bar{r}_j\} \{-i \operatorname{Res}_{k=i\eta_j} T_+(k)\}. \tag{1}$$

Единственность реконструированной функции Q гарантируется единственностью решения уравнения (1) при условиях теоремы 4.3. Функция H может быть единственным образом реконструирована по S_+. Однако подход, использованный Ньютоном, состоит в том, чтобы показать, что $\mathbf{J}$ единственным образом восстанавливается по $S(k)_{(\text{редуцир.})}$, где $S_{(\text{редуцир.})}$ — матрица рассеяния, построенная из S_+ путем удаления собственных значений из T_+. Таким образом, решение уравнения Гельфанда—Левитана приводит к потенциалу $Q_{(\text{редуцир.})}$. Собственные значения потом снова добавляются при помощи преобразования Бэклунда, описанного в разд. 4.3, для того, чтобы построить полный потенциал $Q(x)$.

Дейфт и Трубовиц выбрали совершенно другой подход. Они показали, что функция Q определена в терминах решений Йоста и данных рассеяния при помощи так называемой формулы следа:

$$Q(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} kR_+(k) \psi^2(x, k)\, dk + \sum_{j=1}^{M} \{2c_j \exp(-2\eta_j x)\}\, {}_x\psi_j^2(x).$$

Они работали с редуцированным потенциалом Q и затем добавляли в него решения типа связанного состояния, используя преобразования Бэклунда, т. е. использовали

$$Q_{(\text{редуцир.})}(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} kR_+(k) \exp(2ikx)\, h^2(x, k)\, dk, \tag{2}$$

где $h(x, k) = \exp(-ikx)\, \psi(x, k)$. Уравнение Шрёдингера можно при этом записать в виде

$$\begin{pmatrix} h(x, k) \\ l(x, k) \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \exp(-2ikx)\, l(x, k) \\ \exp(2ikx)\, h(x, k)\, Q_+(x, h) \end{pmatrix}, \quad x \in R_{(3)}, \tag{3}$$

где $Q_+(x, h)$ определяется как выражение в правой части (2).

Таким образом, в их методе должна быть решена обратная задача (3) с начальными (сингулярными) данными

$$\lim_{x \to \infty} \begin{pmatrix} h(x, k) \\ l(x, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Надо показать, что для определенного подходящим образом R_+ глобальное решение задачи (3), (4) существует и единственно. После этого можно показать, что функция $Q_{(\text{редуцир.})}$, определяемая (2), имеет коэффициент отражения R_+.

Раздел 4.2

1. Существует обширная литература по периодическим и условно периодическим задачам. Наверное, наилучший обзор литературы и библиография по этим задачам содержится в статье Кричевера [1977].

2. Для того, чтобы доказать лемму 4.9, необходимо изучить асимптотическое поведение функции

$$\widehat{R}_+(x,\ t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_+(k,\ 0)\exp(i\theta(k))\,dk,$$

где $\theta = k(x - 2C(k^2)t)$. Здесь мы все время предполагаем, что $C(k) = -\sum\limits_{i}^{s} a_i R^{2i}$ и $a_i > 0$. Рассмотрим случай, когда $x > 1$. Введем оператор D при помощи определения

$$D(f(k)) = -\frac{d}{dk}\left(\frac{f(k)}{x + \omega^{(1)}t}\right),$$

где $\omega = -2kC(k^2)$. Затем, интегрируя по частям, найдем, что

$$\widehat{R}^+(x,\ t) = \frac{1}{2\pi}(-i)^{-m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_m\{R_+(k,\ 0)\}\exp(i\theta(k))\,dk.$$

Этот интеграл определен при следующих условиях: (a) $x + \omega^{(1)}$ не равен нулю нигде в области определения (это условие удовлетворяется, поскольку $x > 1$ и $0 \leqslant t$); (b) $D^m(R(k,\ 0))$ существует и убывает по крайней мере не медленнее, чем $O(1/|k|)$ при $|k| \to \infty$. Условие (b) тоже удовлетворяется, когда $m \leqslant l - 3$ (см. лемму 4.8). Исследование подынтегральной функции в последнем уравнении показывает, что главный член T_{hij} в разложении для $D^m(R_+(k,\ 0))$, знаменатель которого равен $(x + \omega^{(1)}t)^{-(h+m)}$, равняется

$$R_+^{(i)}(k,\ 0)(\omega^{(2)})^j t^h\{x + \omega^{(1)}t\}^{-(h+m)}.$$

Главная часть его разложения имеет вид

$$R_+^{(i)}(k,\ 0)k^{(2s-1)j}t^h\{x + \omega^{(1)}t\}^{-(h+m)},$$

где $i + h = m$, $0 \leqslant j \leqslant h \leqslant m$. Отсюда мы получаем

$$\|T_{ijk}\| \leqslant \|R_+^{(i)}(k,\ 0)\|_{L_1}\sup_k\{k^{(2s-1)j}t^h(x + \omega^{(1)}t)^{-(h+m)}\} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\cdot|x|^{-m-j/2s}t^{\{h-(2s-1)j/2s\}}.$$

Наконец, из неравенства

$$|\widehat{R}_+(x,\ t)| \leqslant \text{const}\cdot t^n x^{-m}$$

мы получаем поведение $\widehat{R}_+(x, t)$ при $x, t \to +\infty$. Легко установить существование интегралов

$$\widehat{R}_{+x}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik) R_+(k, 0) \exp(i\theta)\, dk,$$

$$\widehat{R}_{+xx}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-k^2) R_+(k, 0) \exp(i\theta)\, dk,$$

из которых получим, применяя метод вывода предыдущего результата, что при $0 < t < T$

$$|\widehat{R}_+^{(i,\,0)}(x, t)| < \text{const} \cdot x^{-m+i/2s}$$

для $x > 0$. Отсюда следует, что $|x^2 \widehat{R}_{+xx}(x, t)| \leqslant \text{const} \cdot x^{-l+5+1/s}$. Поведение при $x \to -\infty$ дается методом стационарной фазы. С точностью до главного порядка

$$\widehat{R}_+^{(i,\,0)}(x, t) = o\{|x|^{-(j+n+1)/2s}\} \quad \text{при } x \to -\infty.$$

Раздел 4.3

1. Этот результат получили Абловиц, Крускал и Сигур [1959]. Набросок их рассуждений выглядит так. Для Q, такого что $\int_{-\infty}^{\infty} |Q|(1 + v^2)\, dv < \infty$, определим потенциал Q_L, имеющий компактный носитель, так: $Q_L = Q \cdot I_L$, $I_L = 1$ при $|x| \leqslant L$ и $I_L = 0$ во всех остальных случаях. Функция $\mu = \varphi_x/\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\mu_x + \mu^2 - Q + k^2 = 0.$$

В частности,

$$\mu_L(-L, k) = -ik,$$

$$\mu_L(L, k) = \frac{ik\,(e^{ikL} + R_{L+}(k)\, e^{ikL})}{(e^{-ikL} + R_{L+}(k)\, e^{ikL})},$$

откуда мы выводим, что

$$e^{2ikL} R_{L+}(k) = \frac{ik + \mu_L(L, k)}{ik - \mu_L(L, k)}.$$

Из разд. 3.3 мы знаем, что либо

(i) $R_+(k) = -1 + O(k)$ при $k \to 0$,

либо

(ii) $R_+(0) = \text{const} < 1$,

и поэтому существует разложение функции μ по теории возмущений при малых k:

$$\mu = \mu^0 + k\mu^1 + O(k^2) \text{ при } k \to 0.$$

Из этого мы получаем, что

(i) $\mu_L^0(L) \neq 0$

или

(ii) $\mu_L^0(L) = 0$.

Поскольку $\mu_L^0(L)$ представляет собой сложное выражение, зависящее от Q_L, то (ii) — особый случай, а случай (i) — обычное или типичное условие. Так как функция Q может быть сколько угодно точно аппроксимирована функцией Q_L при достаточно большом размере носителя L, а функция R непрерывна при $k = 0$, мы можем показать, что сходимость равномерна.

4.5. Задачи

Раздел 4.1

1. Показать, что итерация уравнения (4.1.24)

$$\Omega_x(2x) = \frac{1}{2} Q(x) + \int_x^\infty P(x, y)\, \Omega_y(2y)\, dy,$$

где

$$P(x, y) = 4\,(K(x, 2y - x) + (xK^* xK)(y)),$$

приводит к выражению

$$\Omega_x(2x) = \frac{1}{2}\Omega(x) + \frac{1}{2}\int_x^\infty dx_1 P(x, x_1) Q(x_1) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\left[\int_x^\infty dx_1 P(x, x_1) \int_{x_1}^\infty dx_2 P(x_1, x_2) \cdots \int_{x_{n-1}}^\infty dx_n P(x_{n-1}, x_n) Q(x_n)\right] +$$

$$+ \left[\int_x^\infty dx_1 P(x, x_1) \int_{x_1}^\infty dx_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^\infty dx_n P(x_{n-1}, x_n) \times\right.$$

$$\left. \times \int_{x_n}^\infty \Omega_{x_{n+1}}(2x_{n+1})\, P(x_n, x_{n-1})\, dx_{n+1}\right.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx}\widehat{R}_+(x) = g_1 + g_2, \quad g_1 \in L^1(\mathbb{R});\ g_2 \in L^2(\mathbb{R}),$$

показать, что

$$\int_{x_n}^\infty \Omega_{x_{n+1}}(2x_{n+1})\, P(x_n, x_{n+1})\, dx_{n+1} \in L^\infty(a, \infty), \quad -\infty < a,$$

и что, следовательно, вторая скобка в (*) сходится равномерно к 0 в области $x \geqslant a$.

Сделать вывод, что

$$\left|\Omega_x(2x) - \frac{1}{2}Q(x)\right| \leqslant C_1 R_0^2(x) \exp\left\{C_2 \int_x^\infty R_0(y)\,dy\right\},$$

и, таким образом, доказать неравенство (4.1.28).

2. Вывести уравнения (4.1.89) и (4.1.83)—(4.1.84) и вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 Q(x)\,\delta_2 P(x) - \delta_1 P(x)\,\delta_2 Q(x))\,dx, \quad P(x) = \int_{-\infty}^{x} Q(y)\,dy$$

используя соотношение для вронскианов

$$(v_x y - y_x v)_x = (k_1^2 - k_2^2)\,vy,$$

где $y(k_1)$ и $v(k_2)$ — собственные функции уравнения Шрёдингера (3.3.1). Необходимо интерпретировать функции как обобщенные функции, с тем чтобы были определены интегралы. Упрощения получающихся в результате формул достигаются широким использованием следующего результата теории обобщенных функций:

$$\underset{x\to\pm\infty}{P}\left(\frac{e^{ikx}}{k}\right) = \pm i\pi\delta(k).$$

Раздел 4.2

1. Вывести выражения для функций ${}_x\pi_1(y)$, $\pi_2(y)$, данные в (4.2.13), из (4.1.8) и (3.3.47)—(3.3.49).

2. Исследовать задачу Коши для уравнения КдФ с начальными условиями следующего вида:

$$Q(x,\ 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Раздел 4.3

1. Вывести двухсолитонное решение для второго члена иерархии уравнений КдФ, для которого $\Omega(k) = -2ik^5$, из принципа суперпозиции (4.3.33) и сравнить с результатом, полученным непосредственно из уравнения Марченко (4.3.10).

2. Получить явную формулу для асимптотического распада (при $t \to \infty$) двухсолитонного решения из формулы (4.3.10).

3. Уравнения КдФ и мКдФ инвариантны относительно масштабных преобразований. Таким образом, если функции $Q(x, t)$, $P(x, t)$ являются решениями уравнений

$$Q_t - 6QQ_x + Q_{xxx} = 0,$$
$$P_t - 6P^2P_x + P_{xxx} = 0$$

соответственно, то функции $Q'(x, t) = \lambda Q(\lambda^{1/2}x, \lambda^{3/2}t)$ и $P'(x, t) = \gamma P(\gamma x, \gamma^3 t)$, где λ, γ — константы, тоже будут решениями этих уравнений. Отсюда следует, что автомодельные решения, инвариантные относительно таких масштабных преобразований, имеют вид

$$Q(x, t) = (3t)^{-2/3}F(x(3t)^{-1/3}), \quad P(x, t) = (3t)^{-2/3}G(x(3t)^{-1/3}),$$

где F и G удовлетворяют уравнениям

$$\dddot{F} = 6F\dot{F} + 2F + \theta\dot{F},$$

$$\ddot{G} = 2G^3 + \theta G + \nu,$$

причем $F = F(\theta)$, $G = G(\theta)$, $\theta = x(3t)^{-1/3}$, и ν — константа. Уравнение, которому удовлетворяет функция G, называется уравнением Пенлеве II рода (Айнс [1956]). Соотношение между уравнениями для F и G легко получить из преобразования Миуры (3.1.3)

$$Q_\pm = P^2 \pm P_x,$$

что дает

$$F_\pm = G^2 \pm \dot{G}.$$

Кроме того, уравнение КдФ инвариантно относительно преобразования Галилея $Q'(x, t) = Q(x + 6\beta t, t) + \beta$.

4. Преобразование Бэклунда для уравнения КдФ, примененное к (4.3.4), дается в терминах потенциальной функции $W_x = \frac{1}{2}Q$ следующим образом:

$$(W + w)_x = k^2 + (W - w)^2,$$

$$(W - w)_t = 6(W - w)^2(W - w)_x + 6k^2(W - w)_x - (W - w)_{xxx},$$

где W и w являются решениями уравнения

$$W_t - 6W_x^2 + W_{xxx} = 0.$$

Показать, что параметр k в преобразовании возникает благодаря инвариантности уравнения КдФ относительно преобразований Галилея. Уравнение, которому удовлетворяет функция W, тоже имеет автомодельные решения. Они имеют вид $W = \frac{1}{2}(3t)^{-1/3} \times \Phi(\theta)$; $\theta = x(3t)^{-1/3}$, где Φ удовлетворяет уравнению

$$\dddot{\Phi} = 3\Phi^2 + \Phi + \theta\dot{\Phi}.$$

Кроме того, $\Phi_\pm = G^2 \pm \dot{G}$. Если сделать замену зависимой переменной $\Phi = -\frac{1}{4}\theta^2 + \Omega$, то уравнение для Ω можно один раз проинтегрировать:

$$\ddot{\Omega} = -2\theta\dot{\Omega} + \Omega + 3\dot{\Omega}^2,$$

$$\ddot{\Omega}^2 = -2\theta\dot{\Omega}^2 + 2\Omega\dot{\Omega} + 2\dot{\Omega}^3 + n^2,$$

где n — постоянная интегрирования. Если из этих уравнений исключить Ω, то получится уравнение

$$\dot{\Omega}(0,\ n^2) = G^2(\theta,\ \pm n) + \dot{G}(\theta,\ \pm n) \pm \frac{1}{2}\theta,$$

где функция G удовлетворяет уравнению Пенлеве II рода с $\nu_\pm = \pm n^{-1/2}$.

5. Используя соотношения, выведенные в предыдущей задаче, показать, что

$$G(\theta,\ \pm n) = \frac{1}{2\dot{\Omega}(\theta,\ n^2)}(\ddot{\Omega}(0,\ n^2) \pm n),$$

$$\Omega(\theta,\ n^2) = \left\{\left(G^2(\theta,\ \pm n) \pm \frac{1}{2}\theta\right)^2 - G^2(\theta,\ \pm n) \pm 2nG(\theta,\ \pm n)\right\}$$

при условии $\Omega \neq 0$. Если это так, показать, что $n = 0$, так что $G(\theta,\ 0)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{G} + G^2 + \frac{1}{2}\theta = 0.$$

Преобразование Галилея в терминах функции W задается так:

$$W'(x,\ t) = W(x + 6\beta t,\ t) + \frac{1}{2}\beta x + \frac{3}{2}\beta^2 t.$$

При этом преобразовании функция $\Omega(\theta)$ не преобразуется в решение уравнения

$$\dddot{\Omega} = -2\theta\Omega + \Omega + 3\dot{\Omega}^2.$$

Отсюда следует, что требуемая форма преобразования Бэклунда для этого уравнения такова:

$$\dot{\Omega} + \dot{\omega} = \theta + \frac{1}{2}(\Omega - \omega)^2,$$

$$\ddot{\Omega} - \ddot{\omega} = \frac{3}{2}(\Omega - \omega)^2(\Omega - \omega) + (\Omega - \omega) + \theta(\dot{\Omega} - \dot{\omega}).$$

Показать, что из этих уравнений следует

$$\omega(\theta,\ m^2) = \Omega(\theta,\ n^2) - \frac{1}{\dot{\Omega}(\theta,\ n^2)}(\ddot{\Omega}(\theta,\ n^2) + n^2),$$

где $m^2 = (n - 1)^2$. Из этого соотношения вывести, что

$$G(\theta,\ 1 - n) = -G(\theta,\ n),$$

а затем из выражения

$$G(\theta,\ \pm n) = \{2\dot{\Omega}(\theta,\ n^2)\}^{-1}(\ddot{\Omega}(\theta,\ n^2) \pm n)$$

вывести, что

$$G(\theta,\ -n) = G(\theta,\ n) + \frac{n}{\dot{G}(\theta,\ n) + G^2(\theta,\ n) + \theta/2}.$$

6. Использовать преобразование Бэклунда

$$G(\theta,\ 1-n) = -G(\theta,\ n),$$
$$G(\theta,\ -n) = G(\theta,\ n) + \frac{n}{\dot{G}(\theta,\ n) + G^2(\theta,\ n) + \theta/2}$$

для уравнения Пенлеве II рода

$$\ddot{G} = 2G^3 + \theta G + \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

для того, чтобы образовать семейство решений начиная с $G = 0$ для $n = 1/2$. Первые два члена этого семейства суть

$$G\left(\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right) = \theta^{-1},\quad G\left(\theta,\ -\frac{3}{2}\right) = -\theta^{-1} + \frac{3\theta^3}{4+\theta^4}.$$

7. Получить форму главного члена асимптотики решения для произвольного уравнения иерархии КдФ методом стационарной фазы и область ее применимости для начальных данных, в которых отсутствуют солитоны.

8. Как было показано в задаче 4.3.3, уравнение мКдФ

$$P_t - 6P^2P_x + P_{xxx} = 0$$

обладает автомодельным решением $P(x, t) = (3t)^{-2/3}\ G(\theta)$; $\theta = x\,(3t)^{-1/3}$. Для начальных данных, в которых отсутствуют солитоны и которые экспоненциально убывают при $|x| \to \infty$, показать, что уравнение мКдФ имеет «медленно меняющееся автомодельное решение» вида

$$P \approx \frac{(-\theta)^{1/4}\,d}{(3t)^{1/3}} \sin\left(\frac{2}{3}(-\theta)^{3/2} - \frac{3}{4}d^2 \ln(-\theta) + \varphi_0\right)$$

для $\theta \ll 1$.

Можно ли объяснить присутствие содержащего логарифм члена в выражении для фазы из общих соображений? Показать, что это решение сшивается с автомодельным решением, которое справедливо для $\theta = O(1)$.

9. Использовать преобразование Миуры для получения асимптотической формы решения без солитонов в области $\theta \leqslant O(1)$ для уравнения КдФ из результатов предыдущей задачи. В частности, показать, что слабо меняющееся автомодельное решение имеет вид

$$Q \approx \frac{d\,(\theta)^{1/4}}{(3t)^{2/3}} \cos\left(\frac{2}{3}(\theta)^{3/2} - \frac{3d^2}{4}\ln(\theta) + \varphi_0\right),$$

где $Q_t - 6QQ_x + Q_{xxx} = 0$.

Сравнить с результатами разд. 4.3 (после изменения масштаба уравнения). Объяснить различие в результатах (указание: типичным случаем является $R_+(0) = -1$).

5. ВЫДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА В НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРИМЕРАХ

5.1. Введение

В последних главах мы занимались техникой, необходимой для решения уравнения КдФ, показав, в частности, соответствие между солитонами и дискретным спектром потенциала квантового уравнения Шрёдингера. Теперь мы обратимся к исследованию нескольких случаев, когда уравнение КдФ возникает как реалистическая модель, описывающая движение волн в такой среде, где оказываются существенными слабые нелинейные эффекты. В этой главе мы ограничимся только уравнением КдФ и его обобщениями для того, чтобы не прерывать изложения, начатого в предыдущих трех главах. В последующих главах аналогичным образом будут рассмотрены уравнения sin-Гордон, нелинейное уравнение Шрёдингера и другие связанные с ними уравнения, имеющие подобные свойства.

Здесь мы ограничимся четырьмя примерами, отчасти из-за недостатка места, отчасти из-за того, что разбираемые здесь примеры весьма типичны и для многих других ситуаций, в которых возникает уравнение КдФ. Подобные методы могут быть использованы при анализе других схожих примеров, которые будут упомянуты в конце этой главы.

Первый пример — самый простой, он возникает в физике плазмы, где уравнение КдФ описывает движение длинных волн сжатия в плазме холодных ионов и горячих электронов. Мы начинаем с этого примера, поскольку на нем, вероятно, проще всего продемонстрировать, как работает метод возмущений. Задача о волнах на мелкой воде занимает второе место в нашем изложении из-за ее громоздкости: чтобы доказать результат Кортевега и де Фриза 1895 г., потребуется некоторая предварительная работа по постановке задачи. Третий интересный случай взят из метеорологии; он встречается при изучении распространения нелинейных волн Россби в однородных вращающихся жидкостях. Этот случай немного отличается от предыдущих и имеет некоторую математическую привлекательность, заключающуюся в том, что в исходных уравнениях присутствует вторая пространственная переменная (y) и коэффициенты окончательного уравнения КдФ находятся интегрированием по y. Последний, четвертый пример взят из теории электрических цепей, в которые входят нелинейные

емкости. В результате получается обобщенное уравнение КдФ порядка n, нелинейно зависящее от емкости. Мы выбрали этот пример, с тем чтобы показать, каким образом в определенных обстоятельствах может возникнуть модифицированное уравнение КдФ.

Само по себе уравнение КдФ представляет собой просто одно скалярное уравнение, включающее одну зависимую переменную и две независимых, и поэтому оно имеет совсем простую структуру. Однако исходные уравнения движения большинства физических систем не столь просты и, вообще говоря, содержат несколько зависимых переменных. Например, механика жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, которые содержат плотность жидкости $\rho(x, t)$, вектор скорости жидкости $\mathbf{v}(x, t)$ и, кроме того, возможно, несколько других переменных и уравнений состояния в зависимости от того, какие термодинамические соображения следует принимать в расчет. Нам нужна процедура, которая позволила бы систематическим образом сводить такие множества уравнений к простейшим формам. Такие процедуры по своей природе обычно связаны с возмущениями и известны как редуктивная теория возмущений. Одной из полезных черт этой формы теории возмущений является то, что она позволяет естественным образом подходить к длинным волнам, т. е. считать длинными такие волны, длина которых много больше, чем характерная длина. Например, в цитате, приведенной в гл. 1, Скотт Расселл заметил, что уединенная волна, образовавшаяся из массы воды перед носом лодки, была около тридцати футов в длину и один—полтора фута в высоту — типичная длинная волна для такого канала. С математической точки зрения, чтобы ввести такой масштаб в исходные уравнения движения, мы должны сделать масштабные преобразования растяжения пространства и времени, с тем чтобы получить пространственные и временные переменные, подходящие для описания длинноволновых явлений. Такое преобразование позволяет выделить из системы нужные нам уравнения движения, описывающие реакцию системы в новых масштабах пространства и времени. Оказывается, что для большого класса дисперсионных (недиссипативных) систем именно уравнение КдФ описывает такое слабо нелинейное длинноволновое поведение. Этот процесс редукции не вполне однозначен, поскольку подходящий масштаб приходится выбирать с помощью опыта или интуиции. Процесс можно упростить, если с самого начала все переменные в задаче сделать безразмерными; это позволяет избавиться от некоторых неудобных физических констант в уравнениях. Затем все зависимые переменные представляются в виде суммы слагаемых, пропорциональных различным степеням параметра возмущения ε. Например,

$$\rho = \rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \varepsilon^2\rho^{(2)}, \tag{5.1.1}$$

$$\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{v}^{(2)}. \tag{5.1.2}$$

Наличие или отсутствие первого слагаемого обычно определяется граничными условиями. В большинстве случаев, например, плотность описывается отклонением от своего состояния равновесия, и поэтому $\rho \to \rho_0$ при $x \to \infty$, тогда как $v \to 0$. Выбор здесь сильно зависит от физической ситуации. Следующий шаг состоит в определении масштабного преобразования переменных x и t. Если масштабное преобразование переменной x уже сделано каким-то образом, тогда дисперсионное соотношение может дать информацию о том, как реагирует на это преобразование временна́я часть системы. Дисперсионное соотношение для гармонических волн можно легко найти из линеаризованного варианта исходной системы уравнений. Решения будут иметь вид $\exp(i\theta)$, где $\theta = kx - \omega(k)\,t$. Функция $\omega(k)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению, где k — волновое число. Длинным волнам соответствует малое значение волнового числа k, т. е. большая длина волны. И хотя эти волны не являются гармоническими, мы можем использовать предельную форму дисперсионного соотношения, соответствующую длинноволновому пределу. Следовательно, мы пишем k как $k = \varepsilon^p \varkappa$, где $\varkappa$ — новое волновое число порядка $O(1)$ и p — некоторое неизвестное число, которое будет определено позже. Теперь $\theta(x, t)$ можно переписать в виде $\theta(x, t) = \varkappa\varepsilon^p x - \omega(\varepsilon^p \varkappa)\,t$. Мы рассматриваем только дисперсионные и недиссипативные системы, и поэтому разложение функции $\omega(k)$ в ряд Тейлора будет содержать либо только четные, либо только нечетные степени k. Чисто дисперсионные системы не могут содержать одновременно четные и нечетные степени. Примеры этой главы содержат только нечетные степени k, и, таким образом, первые два члена в разложении Тейлора дают $\omega(k) = \omega'(0)\,\varepsilon^p \varkappa + (1/6)\,\omega'(0)\,\varepsilon^{3p}\varkappa^3$. Функцию θ можно теперь переписать так:

$$\theta = \varkappa\varepsilon^p (x - \omega'(0)\,t) - (1/6)\,\varkappa^3 \varepsilon^{3p} \omega'''(0)\,t. \qquad (5.1.3)$$

Поскольку члены с первой и третьей производной от ω постоянны, то от одного из них можно избавиться, и тогда (5.1.3) даст естественные масштабные преобразования для x и t:

$$\xi = \varepsilon^p (x - at); \quad \tau = \varepsilon^{3p} t. \qquad (5.1.4)$$

Новые переменные ξ и τ будут длинными в том смысле, что для ощутимого изменения новых переменных ξ и τ требуется значительное изменение старых переменных x и t. Для определения величины p (которая не обязана быть целой) требуются дополнительные соображения, не всегда строгого характера. Когда основные уравнения разложены по степеням ε и пространственная и временна́я переменные преобразованы так, как в (5.1.4), выбор величины p часто становится очевидным. Интуитивно ясно, что если p выбрано слишком большим, то производные по τ не будут встречаться в разложении до достаточно высоких порядков ε.

Это может привести к тому, что многие зависимые переменные (такие, как некоторые производные $\rho^{(n)}$ и $v^{(n)}$ низких порядков) станут независимыми. Это нежелательно, потому что тогда для получения эволюционного уравнения пришлось бы рассматривать слагаемые высокого порядка в разложении по теории возмущений. В тех случаях, когда возникает уравнение КдФ, p обычно оказывается равным 1/2.

Процедуры, изложенные выше, в значительной степени эмпирические, и поскольку мы не намерены тратить слишком много времени на этот предмет, читателю, интересующемуся именно этим вопросом, рекомендуем обратиться к специальной литературе, например Найфэ [1974], Коул [1968] и Бендер и Орзаг [1978]. Множество более сложных примеров возникает в других разделах прикладной математики, где в различных областях пространства используются разные типы асимптотических разложений. Масштабирование пространственных и временной переменных в этих случаях тоже должно быть разным для разных областей. Поэтому возникает необходимость сшивать их на границах этих областей. Однако те четыре примера, которые рассматриваются в настоящей главе, гораздо проще и сводятся только к получению уравнения КдФ в качестве модельного уравнения, описывающего поведение длинных волн.

5.2. Ионно-акустические волны

Рассмотрим одномерное море частиц, состоящее из электронов, каждый из которых имеет массу m_e и заряд $-e$, с плотностью n_e в единице объема, и ионов, каждый массы m_i и с зарядом $+e$, с плотностью n_i в единице объема. Это образование принято называть плазмой электронов и ионов. Поскольку масса электрона много меньше массы любого иона, инерцией электронов можно пренебречь, в то время как электростатическим эффектом электронного заряда пренебрегать нельзя. Нужны какие-то способы выражения этого эффекта. Стандартный метод состоит в том, что электроны рассматривают как «газ» (Пайнз [1968]). Для описания электронного газа можно, используя задачу многих тел, в идеализированной ситуации записать уравнение состояния этого газа

$$p = k_B T_e n_e, \tag{5.2.1}$$

где k_B — константа Больцмана, а p — давление. Значение электронной температуры T_e является мерой того, насколько энергетичными, или горячими, будут электроны в газе. В рассматриваемой ситуации температура электронов обычно бывает гораздо выше, чем температура ионов. Таким образом, мы имеем дело с газом заряженных энергетичных (горячих) электронов, наложен-

ным на фон много более массивных, но менее энергетичных (холодных) ионов ($T_i \ll T_e$). Для моделирования этой ситуации нам потребуется несколько уравнений, связывающих электронную плотность n_e с электростатическим потенциалом φ. Для получения этого соотношения заметим, что электростатическая сила, действующая на электроны и возникающая благодаря потенциалу $\varphi(x, t)$, равна $en_e\varphi_x$ и что в электронном газе эта сила уравновешивается градиентом давления

$$en_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x}. \tag{5.2.2}$$

После интегрирования получаем

$$n_e = n_0 \exp\left[\frac{e}{k_B T_e}\varphi\right], \tag{5.2.3}$$

где n_0 — равновесная плотность. Другие уравнения для состояния электронов не нужны, так как (5.2.3) описывает взаимодействие между электронами и ионами через потенциал φ.

Уравнения сохранения массы и импульса для ионов имеют вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = 0, \tag{5.2.4}$$

$$m_i\left(\frac{D}{Dt} v_i\right) = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{5.2.5}$$

где полная производная дается выражением

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.2.6}$$

Уравнение Пуассона для электростатического потенциала имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \tag{5.2.7}$$

Схема теории возмущений, упомянутая в разд. 5.1, значительно упростится, если сделать такую замену переменных, при которой исчезнут все неприятные константы. Этот процесс совсем несложен. Вид уравнений (5.2.3) и (5.2.7) указывает, как можно промасштабировать переменные φ и n_i:

$$\Phi = \frac{e}{k_B T_e}\varphi', \quad n = n_i/n_0. \tag{5.2.8}$$

Используя эти новые переменные в уравнении (5.2.7), легко показать, что можно ввести новую безразмерную переменную x:

$$\bar{x} = \lambda^{-1}x, \quad \text{где } \lambda = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{k_B T_e}\right)^{-1/2}. \tag{5.2.9}$$

Константа λ известна под названием дебаевской длины для плазмы. Подставляя выражения для переменных Φ, n и $\bar{x}$ в урав-

нения (5.2.4) и (5.2.5), легко найти безразмерные переменные скорости и времени:

$$\bar{t} = \omega_p t; \quad v = (\lambda\omega_p)^{-1} v_i; \quad \omega_p = \left(\frac{4\pi n_0 e^3}{k_B T_e}\right)^{1/2}, \tag{5.2.10}$$

где ω_p известна как плазменная частота, а $\lambda\omega_p$ — как скорость ионного звука. Уравнения (5.2.4) и (5.2.5) теперь превращаются в набор гораздо более простых безразмерных уравнений движения:

$$\begin{aligned} n_{\bar{t}} + (nv)_{\bar{x}} &= 0, \\ v_{\bar{t}} + vv_{\bar{x}} &= -\Phi_{\bar{x}}, \\ \Phi_{\bar{x}\bar{x}} &= \exp\Phi - n. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Граничные условия теперь имеют вид $n \to 1$, $v, \Phi \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Применим теперь процедуру, описанную в разд. 5.1, и запишем асимптотические разложения для n, Φ и v:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots, & n^{(i)} &\to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \\ \Phi &= \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \cdots, & \Phi^{(i)} &\to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \\ v &= \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \cdots, & v^{(i)} &\to 0 \text{ при } |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Разложения (5.2.12) можно использовать для линеаризации уравнений (5.2.11). Исключая $v^{(1)}$, $n^{(1)}$ из линеаризованных уравнений, получим уравнение для $\Phi^{(1)}$:

$$\Phi^{(1)}_{\bar{x}\bar{x}\bar{t}\bar{t}} + \Phi^{(1)}_{\bar{x}\bar{x}} - \Phi^{(1)}_{\bar{t}\bar{t}} = 0. \tag{5.2.13}$$

Ему соответствует дисперсионное соотношение $\omega^2 = k^2 (1 + k^2)^{-1}$. Таким образом, для малых k ($k = \varepsilon^p_{\xi}\varkappa$; $p > 0$) первые два члена разложения $\omega(k)$ имеют порядки k и k^3. Используя соображения, приведенные в разд. 5.1, введем новые переменные ξ и τ вместо переменных x и t по формулам

$$\xi = \varepsilon^p (x - a\bar{t}), \quad \tau = \varepsilon^{3p}\bar{t}. \tag{5.2.14}$$

Уравнения (5.2.11) при этом приобретут вид

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\varepsilon^{3p}\frac{\partial}{\partial\tau} - a\varepsilon^p\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots\right] + \\ &+ \varepsilon^p\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 (v^{(2)} + \cdots + n^{(1)} v^{(1)}) \ldots\right], \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\varepsilon^{3p}\frac{\partial}{\partial\tau} - a\varepsilon^p\frac{\partial}{\partial\xi}\right)(\varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} \ldots) + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^p\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varepsilon^2 (v^{(1)})^2\right] + \varepsilon^p\frac{\partial}{\partial\xi}(\varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \cdots), \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

$$0 = \varepsilon^{2p}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \dots) - \varepsilon(\Phi^{(1)} - n^{(1)}) -$$
$$- \varepsilon^2\left[\Phi^{(2)} - n^{(2)} + \frac{1}{2}(\Phi^{(1)})^2\right] \dots . \qquad (5.2.17)$$

Сначала приведем подобные и выпишем коэффициенты при различных степенях ε, не приравнивая их пока к нулю, и используем соглашение о том, что нижние индексы означают частные производные по соответствующим переменным. Для уравнения (5.2.15) имеем:

$$\varepsilon^{p+1}: \quad -an_\xi^{(1)} + v_\xi^{(1)}, \qquad (5.2.18)$$
$$\varepsilon^{p+2}: \quad -an_\xi^{(2)} + v_\xi^{(2)} + (n^{(1)}v^{(1)})_\xi, \qquad (5.2.19)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon^{3p+1}: \quad n_\tau^{(1)}. \qquad (5.2.20)$$

Для уравнения (5.2.16):

$$\varepsilon^{p+1}: \quad -av_\xi^{(1)} + \Phi_\xi^{(1)}, \qquad (5.2.21)$$
$$\varepsilon^{p+2}: \quad -av_\xi^{(2)} + \Phi_\xi^{(2)} + v^{(1)}v_\xi^{(1)}, \qquad (5.2.22)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon^{3p+1}: \quad v_\tau^{(1)}. \qquad (5.2.23)$$

Для уравнения (5.2.17):

$$\varepsilon: \quad -(\Phi^{(1)} - n^{(1)}), \qquad (5.2.24)$$
$$\varepsilon^2: \quad -\left(\Phi^{(2)} - n^{(2)} + \frac{1}{2}(\Phi^{(1)})^2\right), \qquad (5.2.25)$$
$$\varepsilon^{2p+1}: \quad \Phi_{\xi\xi}^{(1)}, \qquad (5.2.26)$$
$$\varepsilon^{2p+2}: \quad \Phi_{\xi\xi}^{(2)}. \qquad (5.2.27)$$

Естественно, нам нужно, чтобы p было положительным; поэтому, используя граничные условия для слагаемых низших степеней (т. е. ε^{p+1} и ε), мы получим

$$n^{(1)} = v^{(1)} = \Phi^{(1)} \qquad (5.2.28)$$

для $a = +1$. Рассмотрим сначала случай $a = +1$, а случай $a = -1$ пока оставим. Результат (5.2.28) не зависит от выбора величины p ($p > 0$), поэтому для определения p придется рассмотреть члены более высоких порядков. Уравнения (5.2.18)—(5.2.23) показывают, что если $3p + 1 > p + 2$, то в членах порядка $p + 2$ производные по τ не встречаются. Это неудовлетворительно, так как из условия $3p + 1 > p + 2$ следует, что $p > 1/2$, что в свою очередь означает, что в выражении (5.2.26)

вторая производная от $\Phi^{(1)}$ в порядке ε^{2p+1} имеет порядок выше, чем ε^2. Тогда из трех уравнений можно исключить переменные $\Phi^{(2)}$, $n^{(2)}$ и $v^{(2)}$, после чего окажется, что $n^{(1)} = 0$. Если мы примем этот результат, то окажемся перед необходимостью использовать более высокие порядки теории возмущений для того, чтобы получить эволюционное уравнение для $n^{(1)}$. Однако если положить $3p + 1 = p + 2$, то $p = 1/2$ и члены с $n^{(1)}$ и $v^{(1)}$ окажутся одного и того же порядка ε^{p+2}, что и члены, в которых встречается квадратичная нелинейность от переменной $n^{(1)}$. Этот результат оказывается удовлетворительным и для третьего набора уравнений, так как собирает вместе слагаемое с квадратичной нелинейностью $(\Phi^{(1)})^2$ и дисперсионное слагаемое $\Phi^{(1)}_{\xi\xi\xi}$.

Таким образом, полагая $p = 1/2$, заменяя $v^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ на $n^{(1)}$ и приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени ε, получим уравнения

$$v^{(2)}_\xi - n^{(2)}_\xi + 2n^{(1)}n^{(1)}_\xi + n^{(1)}_\tau = 0, \tag{5.2.29}$$

$$\Phi^{(2)}_\xi - v^{(2)}_\xi + n^{(1)}n^{(1)}_\xi + n^{(1)}_\tau = 0, \tag{5.2.30}$$

$$n^{(1)}_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}(n^{(1)})^2 = \Phi^{(2)} - n^{(2)}. \tag{5.2.31}$$

Исключив $v^{(2)}$ из (5.2.29), (5.2.30) сложением, получим производную по ξ от выражения $\Phi^{(2)} - n^{(2)}$, которое, к счастью, содержится также и в уравнении (5.2.31). Теперь три уравнения вместе дают

$$\frac{1}{2}n^{(1)}_{\xi\xi\xi\xi\xi} + n^{(1)}n^{(1)}_\xi + n^{(1)}_\tau = 0, \tag{5.2.32}$$

что есть в точности уравнение КдФ. Солитоны представляют собой волны сжатия, потому что из выражений для линейного преобразования переменных (5.2.14) следует, что их скорости сравнимы с единицей скорости (скорость ионного звука) и что скорости солитонов положительны при той форме уравнения КдФ, которая дана в (5.2.32). Если выбрать $a = -1$, то результат от этого несколько изменится, так что получится $v^{(1)} = -n^{(1)} = -\Phi^{(1)}$, и окончательное уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}n^{(1)}_{\xi\xi\xi\xi\xi} + n^{(1)}n^{(1)}_\xi - n^{(1)}_\tau = 0. \tag{5.2.33}$$

Эта форма уравнения КдФ показывает, что солитоны двигаются налево, как в (5.2.14) при $a = -1$ (обращение времени).

Физическая интерпретация этого результата в свете предыдущих глав достаточно проста. Если в первоначально однородную плазму внесено возмущение электростатическим зондом (образующее начальные данные для уравнения КдФ), то число солитонов, которые при этом возникнут, в точности равно числу связанных состояний начального возмущения. Например, если начальное

возмущение имеет форму прямоугольной волны, которую легко воспроизвести экспериментально, то она распадается на такое количество солитонов, сколько было точек дискретного спектра. Это было проверено Хершковицем, Ромессером и Монтгомери [1972], которые рассчитали теоретически количества и энергию связанных состояний данной прямоугольной волны на входе, а затем воспроизвели этот же вход экспериментально. Расчет дискретного спектра начальных условий в виде прямоугольной ямы дается в упражнениях к главе (см. также вычисления и упражнения гл. 2).

5.3. Длинные волны на мелкой воде

Задача анализа поверхностных волн на воде сложна не только тем, что это граничная задача с подвижной границей, но и тем, что в ней могут встретиться различные типы волнового движения в зависимости от того, велико или мало отношение амплитуды волны к глубине. В этой главе мы ограничимся рассмотрением длинных поверхностных волн на мелкой воде, игнорируя эффекты трения; эта ситуация соответствует экспериментам Скотта Расселла и была теоретически исследована Буссинеском [1877], Кортевегом и де Фризом [1895] и некоторыми другими авторами. Здесь мы лишь выборочно рассмотрим несколько вопросов этой весьма обширной темы, и интересующемуся читателю рекомендуется обратиться к более подробным работам, рассматривающим различные типы волновых движений на воде, например к соответствующим главам таких книг, как Лэм [1932], Стоукер [1957], Уизем [1974], Лайтхилл [1978].

Этот предмет имеет довольно длинную и примечательную историю, восходящую ко времени сэра Джорджа Стокса и более ранним, т. е. к первой половине прошлого века. Наблюдения уединенной волны Скоттом Расселлом были произведены незадолго до открытия уравнений Навье — Стокса и, как мы видели в гл. 1, их истинная значимость долгое время оставалась непонятной. Тот факт, что для решения этой задачи необходимо нечто из квантовой механики, сразу сделал ее очень современной, несмотря на ее древнюю родословную.

Нам понадобится некоторое время для того, чтобы представить задачу в удобной форме, но наша основная цель, как отмечалось в разд. 5.1, состоит в том, чтобы получить простейшую систему уравнений движения, в которой все переменные приведены к безразмерной форме. Как только это будет достигнуто, процедуры возмущения будут применяться гораздо легче.

Рассмотрим невязкую несжимаемую жидкость плотности ρ с вектором скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ в системе координат (x, y, z).

Дно жидкости находится при $z = -h$, а невозмущенная поверхность — при $z = 0$. Силы трения мы проигнорируем, и единственной внешней силой, действующей на жидкость, будем считать силу тяжести: $F = -\rho g\hat{\mathbf{k}}$, где $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ — обычные единичные векторы. Нам понадобятся лишь два основных уравнения движения. Ввиду несжимаемости имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{5.3.1}$$

а уравнение импульса имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla P - g\rho\hat{\mathbf{k}}, \tag{5.3.2}$$

где P — давление в жидкости. Для безвихревого движения $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, откуда следует, что существует потенциальная функция φ, такая, что $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Далее, поскольку $\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, имеем

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right). \tag{5.3.3}$$

Используя результат (5.3.2) и интегрируя, найдем, что наши два уравнения движения приобретают вид

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{5.3.4}$$

$$P - P_0 = -\rho\left(\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gz\right), \tag{5.3.5}$$

где P_0 — атмосферное давление, действующее на поверхность жидкости. Ясно, что при интегрировании мы должны получить в качестве константы интегрирования произвольную функцию времени в (5.3.5), но ее можно ввести в состав функции φ, поэтому мы будем ее игнорировать. Основная сложность этой задачи состоит в том, что нас гораздо больше интересует то, что происходит на поверхности жидкости, чем то, что делается со значениями функций φ и P внутри жидкости. Именно движение верхней границы дает эволюционное уравнение длинных поверхностных волн, и, следовательно, нам нужно получить эволюцию границы из заданного решения во всей жидкости, а не наоборот. Поэтому определим свободную верхнюю поверхность (пока неизвестную) уравнением

$$\Gamma(x, y, z, t) = z - S(x, y, t) = 0. \tag{5.3.6}$$

Наша задача — найти уравнение для S. Любая деформация поверхности приведет к движению частиц, которые ее образуют, но в силу одного того факта, что они лежат на поверхности, они вернутся к исходному положению, когда влияние волны исчезнет. Поэтому интуитивно можно ожидать, что полная производная $D\Gamma/Dt$ функции Γ будет равна нулю. Доказать это математически

совсем легко. Пусть дана поверхность $z = S(x, y, t)$. Обозначим через $\hat{\mathbf{n}}$ направленный внутрь жидкости единичный нормальный вектор, т. е. положим

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{i}} S_x + \hat{\mathbf{j}} S_y - \hat{\mathbf{k}}}{(1 + S_x^2 + S_y^2)^{1/2}}. \tag{5.3.7}$$

Нормальная скорость жидкости равна $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Скорость поверхности $z = S(x, y, t)$ — это

$$\frac{-S_t}{(1 + S_x^2 + S_y^2)^{1/2}}. \tag{5.3.8}$$

Приравнивая эти два выражения, получим

$$v_1 S_x + v_2 S_y + S_t = v_3, \tag{5.3.9}$$

что и означает $D\Gamma/Dt = 0$.

Поскольку $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, уравнения (5.3.9) могут быть представлены в виде

$$\varphi_x S_x + \varphi_y S_y + S_t = \varphi_z \text{ на } z = S(x, y, t). \tag{5.3.10}$$

Заметим, что это граничное условие, и оно справедливо только при $z = S$, но не в жидкости в целом. Уравнение Бернулли (5.3.5) опять же дает интересующую нас информацию лишь на поверхности. Если проигнорировать изменения давления воздуха, которые пренебрежимы, то слагаемые, отвечающие давлению *на поверхности*, можно переписать так:

$$P - P_0 = -T(S_{xx} + S_{yy}), \tag{5.3.11}$$

где выражение в правой части (5.3.11) представляет собой поверхностное натяжение (Кортевег и де Фриз [1895], Уизем [1974, гл. 13]). Для таких жидкостей, как вода, силы поверхностного натяжения совсем малы, и пока мы будем пренебрегать ими, чтобы сделать вычисления как можно проще; мы вернемся к ним позже, в конце раздела. На свободной поверхности уравнение (5.3.5) теперь имеет вид

$$0 = \varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gS \text{ при } z = S(x, y, t). \tag{5.3.12}$$

Граничные условия требуют, чтобы нормальная составляющая скорости $\mathbf{v}$ была равна нулю на дне жидкости, т. е. $\varphi_z = 0$ при $z = -h$.

Таким образом, полная система уравнений выглядит так:

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ внутри жидкости } (-h < z < 0), \tag{5.3.13}$$

$$\varphi_x S_x + \varphi_y S_y + S_t = \varphi_z, \tag{5.3.14}$$

$$0 = \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + gS \text{ при } z = S(x, y, t), \tag{5.3.15}$$

$$\varphi_z = 0 \text{ при } z = -h. \tag{5.3.16}$$

Теперь нужно решить уравнение Лапласа в жидкости и затем применить три граничных условия. Кортевег и де Фриз в своей работе в журнале Philosophical Magazine искали решение уравнения Лапласа в виде быстро сходящегося ряда по Z, где $Z = h + z$ (Z — глубина жидкости, измеряемая от дна). Они утверждают, что следуют при этом методу, который использовал лорд Рэлей в его более ранней статье [1876]. Прежде чем мы начнем это делать, желательно перевести все переменные, включая глубину жидкости, в безразмерную форму. Это существенно для определения доминирующих слагаемых в случаях, когда длина волны велика или мала в сравнении с глубиной. Следовательно, необходимо ввести в задачу характерную длину волны λ и характерный масштаб времени. Временной масштаб можно получить, рассматривая фазовую скорость волн, которая получается из линеаризованного варианта уравнений (5.3.14), (5.3.15). В результате получается

$$\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0, \\ &\varphi_{tt} + g\varphi_z = 0, \quad z = 0, \\ &\varphi_z = 0, \quad z = -h. \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Рассмотрим решение уравнения (5.3.17) с разделенными переменными в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = R(z) \exp[i(k_1 x + k_2 y - \omega t)]. \tag{5.3.18}$$

Из уравнения Лапласа получается

$$R'' = (k_1^2 + k_2^2) R. \tag{5.3.19}$$

Возьмем решение уравнения (5.3.19) в виде

$$R(z) = C \operatorname{ch}[k(z + \delta)], \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{5.3.20}$$

и, применяя условие $\varphi_z = 0$ при $z = -h$, найдем, что $\delta = h$. Используя этот результат в граничных условиях на свободной поверхности $z = 0$, придем к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh), \tag{5.3.21}$$

правая часть которого является четной функцией переменной k. Дисперсионное соотношение (5.3.21) дает выражение для фазовой скорости c в виде

$$c^2 = gh \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(kh)}{(kh)}\right]. \tag{5.3.22}$$

Формула (5.3.22) показывает, что для *волн, имеющих длину, много большую глубины жидкости*, т. е. $kh \ll 1$, *верно соотношение* $c^2 = c_0^2 = gh$. Это полезный результат, потому что он дает удобный

масштаб времени для таких длинных волн: $t_0 = \lambda/c_0$. Таким образом, мы вводим новые безразмерные переменные

$$\bar{x} = x/\lambda; \quad \bar{t} = t/t_0; \quad \bar{z} = z/h. \tag{5.3.23}$$

Осталась только одна переменная, которую еще нужно преобразовать к безразмерному виду, — переменная S. Введем типичную амплитуду «a» и определим безразмерную форму для S:

$$u = S/a. \tag{5.3.24}$$

Начиная с этого момента мы перестанем принимать во внимание изменения по y, будем рассматривать только движение вдоль оси x, что уместно для случая движения по каналу. Следуя Кортевегу и де Фризу, мы используем обозначение $Z = h + z$, которое в нашем безразмерном случае примет вид $\bar{Z} = 1 + \bar{z}$. Теперь координата $\bar{Z}$ указывает расстояние от дна жидкости. Уравнения жидкости дают нам удобное преобразование масштаба для φ. Например, (5.3.15) теперь выглядит так:

$$u + \left(\frac{c}{ga\lambda}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{t}} + \frac{1}{2gah^2}\frac{h^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{Z}}\right)^2 = 0.$$

Отсюда ясно, что φ удобно преобразовать таким образом: $\Phi = c\varphi/ga\lambda$. Легко проверить, что переменная Φ безразмерна. Полная система уравнений в безразмерной форме теперь выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= u + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} + \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}\right)^2 + \frac{\nu}{\mu}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{Z}}\right)^2, \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{t}}\right) &+ \mu\nu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{x}}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{Z}}, \end{aligned}\right\} \text{ при } \bar{Z} = 1 + \nu u, \tag{5.3.25), (5.3.26}$$

$$\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{Z}^2} = 0 \text{ при } 0 < \bar{Z} < 1 + \nu u \tag{5.3.27}$$

и

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{Z}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{Z} = 0, \tag{5.3.28}$$

где безразмерные константы ν и μ даются формулами

$$\nu = a/h \quad \text{и} \quad \mu = (h/\lambda)^2. \tag{5.3.29}$$

Мы потратили некоторое время на то, чтобы получить уравнения (5.3.25)—(5.3.28), но зато они выгодно отличаются от уравнений (5.3.13)—(5.3.16) тем, что в них входят безразмерные константы ν и μ, величины которых указывают, являются ли волны длинными или короткими в сравнении с глубиной, и малыми или большими по амплитуде. Теперь мы готовы решать уравнение Лапласа с помощью ряда по $\bar{Z}$ и затем применить три граничных условия.

Возьмем Φ в форме

$$\Phi(\bar{x},\ \bar{Z},\ \bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Z}^n \rho_n(\bar{x},\ \bar{t}).$$

Подстановка в уравнение Лапласа этого ряда приводит к рекуррентному соотношению

$$\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial \bar{x}^2} + (n+2)(n+1)\rho_{n+2} = 0. \tag{5.3.30}$$

Из граничного условия $\partial\Phi/\partial\bar{Z} = 0$ на $Z = 0$ немедленно следует, что $\rho_1 = 0$, и поэтому все нечетные коэффициенты ρ_n равны нулю. Обозначим $\rho = \rho_0$. Тогда из (5.3.30) можно получить общую формулу для коэффициентов ρ_{2j} и после этого записать выражение для Φ в виде

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \mu^j \cdot \frac{\bar{Z}^{2j}}{(2j)!} \cdot \frac{\partial^{2j}\rho}{\partial \bar{x}^{2j}}. \tag{5.3.31}$$

Мы получили выражение для решения Φ в виде ряда всюду в жидкости, т. е. в области $0 \leqslant \bar{Z} \leqslant 1 + \nu u$. Теперь нас интересует, что происходит на поверхности $\bar{Z} = 1 + \nu u$, и поэтому мы подставляем (5.3.31) в оба граничных условия для свободной поверхности и собираем слагаемые по степеням μ. Уравнения делаются проще, если ввести переменную $w = \rho_{\bar{x}}$ и продифференцировать уравнение (5.3.25) по $\bar{x}$ после подстановки для облегчения введения этой переменной. Пара граничных условий для верхней поверхности после этого приобретает вид

$$0 = u_{\bar{t}} + [(1+\nu u)w]_{\bar{x}} - \mu\left[\frac{1}{6} w_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(1+\nu u)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1+\nu u)^2 u_{\bar{x}} w_{\bar{x}\bar{x}}\right] + O(\mu^2), \tag{5.3.32}$$

$$0 = u_{\bar{x}} + w_{\bar{t}} + \nu w w_{\bar{x}} -$$
$$- \frac{1}{2}\mu\left[(w_{\bar{x}\bar{x}\bar{t}} + \nu w w_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \nu w_{\bar{x}} w_{\bar{x}\bar{x}})(1+\nu u)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\nu u_{\bar{x}}(1+\nu u)(w_{\bar{x}\bar{t}} + \nu w w_{\bar{x}\bar{x}} - \nu w_{\bar{x}}^2)\right] + O(\mu^2). \tag{5.3.33}$$

В длинноволновом приближении, если пренебречь всеми членами, содержащими ν и μ ($a \ll h$, $\lambda \gg h$), от вышенаписанных уравнений останется лишь соотношение $u_{\bar{t}\bar{t}} - u_{\bar{x}\bar{x}} = 0$, т. е. попросту линейное волновое уравнение. Заметим, что лишь тогда можно пренебречь высшими членами по μ, когда $h \ll \lambda$, т. е. когда длины волн много больше, чем глубина. Если, однако, члены с ν сохранить, а членами с μ пренебречь, то получающиеся соотношения

известны как уравнения, описывающие поведение волн на мелкой воде:

$$0 = u_{\bar{t}} + w_{\bar{t}} + \nu (uw)_{\bar{x}}, \tag{5.3.34}$$

$$0 = u_{\bar{t}} + w_{\bar{t}} + \nu w w_{\bar{x}}. \tag{5.3.35}$$

Эти уравнения содержат нелинейные члены, но, как и прежде, не содержат дисперсионных членов. Для выделения из уравнений (5.3.32), (5.3.33) членов ведущего порядка в длинноволновом приближении недостаточно взять лишь члены низшего порядка по μ, поскольку нам необходимо также перестроить переменные $\bar{x}$ и $\bar{t}$. Следуя процедуре, намеченной в разд. 5.1, рассмотрим следующие разложения для u и w:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots, \\ w &= \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots. \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

Поскольку граничные условия для u и w таковы, что $u, w \to 0$ при $x \to \infty$, то в (5.3.36) отсутствуют члены при ε^0. Дисперсионное соотношение уже было выписано (уравнение (5.3.22)), и для волн, длина которых много больше глубины h ($kh \ll 1$), разложение гиперболического тангенса даст члены, как ожидалось, при степенях k и k^3 разложения для ω. Как в разд. 5.1, соответствующие пространственная и временная переменные имеют теперь вид

$$\xi = \varepsilon^p (x - at), \quad \tau = \varepsilon^{3p} t. \tag{5.3.37}$$

Совершая эту подстановку в (5.3.32), получим

$$\left(\varepsilon^{3p} \frac{\partial}{\partial \tau} - a\varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots) +$$

$$+ \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}[(\varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots) + (1 + \nu(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots))] -$$

$$- \frac{1}{6}\mu [1 + \nu(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots)]^3 +$$

$$+ \varepsilon^{3p} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}(\varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots) + \dots = 0. \tag{5.3.38}$$

Мы пренебрегли квадратичными членами в порядке $O(\varepsilon)$, потому что их порядок малости не меньше ε^{3p+2}, а удерживать члены столь высокого порядка нет необходимости. Аналогичным образом уравнение (5.3.33) приводится к виду

$$\left(\varepsilon^{3p} \frac{\partial}{\partial \tau} - a\varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(\varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots) +$$

$$+ \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots) + \frac{1}{2}\nu\varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}[\varepsilon^2 w^{(1)}]^2 + \dots -$$

$$-\frac{1}{2}\mu\,[1+\nu(\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\ldots)]^2\,\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Big[\Big(\varepsilon^{3\rho}\frac{\partial}{\partial\tau}-$$

$$-a\varepsilon^{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)(\varepsilon w^{(1)}+\varepsilon^2 w^{(2)}+\ldots)\Big]+\ldots=0. \quad (5.3.39)$$

Рассматривая последовательно каждое из этих двух уравнений и действуя, как в задаче об ионноакустических волнах разд. 5.2, получим, что $\rho = 1/2$. В каждом из уравнений нижний порядок по ε равен 3/2, а следующий за ним 5/2. Для уравнения (5.3.38) имеем

$$\varepsilon^{3/2}: -au_\xi^{(1)}+w_\xi^{(1)}=0,$$

$$\varepsilon^{5/2}: -au_\xi^{(2)}+w_\xi^{(2)}+u_\tau^{(1)}+[w^{(1)}n^{(1)}]_\xi-\frac{1}{6}\mu w_{\xi\xi\xi}^{(1)}=0,$$

а для уравнения (5.3.39) —

$$\varepsilon^{3/2}: \ -aw_\xi^{(1)}+u_\xi^{(1)}=0,$$

$$\varepsilon^{5/2}: \ -aw_\xi^{(2)}+u_\xi^{(2)}+w_\tau^{(1)}+\nu w_\xi^{(1)}w^{(1)}+\frac{1}{2}a\mu w_{\xi\xi\xi}^{(1)}=0.$$

Рассмотрение членов при $\varepsilon^{3/2}$ показывает, что $a^2 = 1$, и тогда, выбирая $a = +1$, мы в этом порядке будем иметь

$$u^{(1)}=w^{(1)}. \quad (5.3.40)$$

Подставляя это в два уравнения при порядке $\varepsilon^{5/2}$, замечая к тому же, что члены $u^{(2)}$ и $w^{(2)}$ взаимно уничтожаются, мы получаем в результате соотношение

$$u_\tau^{(1)}+\frac{3}{2}\nu u^{(1)}u_\xi^{(1)}+\frac{1}{6}\mu u_{\xi\xi\xi}^{(1)}=0, \quad (5.3.41)$$

представляющее собой уравнение КдФ. Введение переменных ξ и τ позволяет корректно ввести в этой задаче дисперсионный член, уравновешивающий нелинейный член. Несмотря на малое значение μ, дисперсионный член будет предотвращать разрушение волн, поскольку этот член всегда будет становиться значительным, когда волны станут достаточно крутыми, даже если коэффициент при нем будет малым. Если включить поверхностное натяжение (см. уравнение (5.3.11)), то дополнительный член $Tu_{\bar{x}\bar{x}}$ в (5.3.25) превратится в член вида $u_{\xi\xi\xi}$ в (5.3.33). Он должен быть включен в окончательное уравнение, поскольку он входит в порядок $\varepsilon^{5/2}$, однако его вклад сведется лишь к изменению коэффициента при $u_{\xi\xi\xi}^{(1)}$ в конечном уравнении КдФ. Взглянув на уравнение (1.2.1) гл. 1, в котором сформулирован результат Кортевега и де Фриза, мы видим, что вклад поверхностного натяжения включен в коэффициент при третьей производной. Наше уравнение выглядит отличающимся от (1.2.1) по той причине, что наши

амплитудные, пространственные и временные переменные безразмерны, а результат 1895 года не был записан в безразмерном виде.

Теперь наблюдения Скотта Расселла легко объяснить. В гл. 1 мы привели рисунок, изображающий один из его экспериментов (рис. 1.1), в котором вода перед перегородкой удерживалась на более высоком уровне, чем за перегородкой. Удаление перегородки повлечет за собой движение масс воды вперед и в зависимости от высоты и ширины потока будут рождаться солитоны. Это, разумеется, эквивалентно тому, что начальные данные для уравнения КдФ имели вид прямоугольной волны:

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad 0 < x < L, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ и } x > L. \end{cases} \tag{5.3.42}$$

Число дискретных собственных значений, соответствующих этому начальному условию, дает число солитонов, которые будут появляться и плыть вниз по желобу. (См. вычисления гл. 2 и 4.)

Мы заметим, что в задаче для уравнения Шрёдингера только прямоугольная потенциальная *яма*, а не прямоугольный потенциальный *барьер*, обладает связанными состояниями, но при той формулировке уравнения Шрёдингера, которая давалась в гл.2 и 3, нелинейный член входил в уравнение КдФ с отрицательным знаком (мы брали $\alpha = -6$),так что отрицательный потенциал в той задаче соответствует положительному потенциалу здесь, где нелинейный член входит в уравнение КдФ с положительным знаком.

5.4. Задача из геофизической динамики жидкостей

Третий пример, которым мы будем здесь заниматься, несколько отличается от предыдущих двух и относится к геофизической динамике жидкостей, т. е. к вопросам, касающимся изучения атмосферы и океанов. Наше рассмотрение будет намеренно несколько поверхностным и неполным, поскольку из этой очень большой и сложной темы мы попытаемся выделить лишь основные моменты. Мы будем изучать эволюцию крупномасштабных волновых движений в неглубоких вращающихся слоях однородной жидкости в невязком приближении. Эта ситуация, как мы увидим, приближенно моделирует эволюцию волн в атмосфере (волны Россби). Непосредственная задача первой части этого раздела состоит в том, чтобы кратко обрисовать идеи и приближения, необходимые для понимания уравнения завихренности, которое нам предстоит вывести и которое мы затем сведем к уравнению КдФ с помощью теории возмущений.

К крупномасштабным движениям обычно относят такие движения, на которые существенно влияет вращение Земли. Мерой этого влияния может служить безразмерное число, называемое *числом Россби*, которое определяется следующим образом. Если L и U — типичные масштабы горизонтальной длины и скорости соответственно, а Ω есть частота планетарного вращения, то число Россби ε (не следует его смешивать с числом ε, используемым в конце этой главы как малый параметр возмущения) определяется как

$$\varepsilon = U/L\Omega. \tag{5.4.1}$$

Следовательно, необходимое условие доминирования вращения заключается в том, чтобы $\varepsilon \ll 1$. Типичные значения L и U, которые определяются по наблюдаемым картинам погоды, имеют порядок 1000 км и 10 м/с соответственно. Отвечающие этим данным числа Россби, вычисленные по значению $\Omega = 7.3 \times 10\ c^{-1}$ для вращения Земли, варьируют от 0.1 до 0.5. Аналогичный расчет для океана дает значение числа Россби порядка 10^{-3}.

При формулировке задачи много удобнее работать с системой отсчета, связанной с вращающейся Землей, так как именно в этой системе производятся экспериментальные измерения. Это неинерционная система отсчета, и поэтому следует принять во внимание центробежные и кориолисовы силы. Центробежные силы малы, и их можно включить в эффективный гравитационный потенциал. Поэтому появление силы Кориолиса — это главный эффект вращения.

Во вращающейся системе отсчета, связанной с Землей, вектор угловой скорости которой равен Ω, уравнения Навье — Стокса для невязкой жидкости имеют вид

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = -\nabla P + \rho\nabla\varphi - \rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}, \tag{5.4.2}$$

где ρ и P — плотность и давление жидкости соответственно, $\mathbf{q}$ — вектор скорости в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, а φ — эффективный гравитационный потенциал. Для точного описания системы необходимы также и другие уравнения, например уравнение сохранения массы

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{q}. \tag{5.4.3}$$

Завихренность $\boldsymbol{\omega}$ определяется как

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{q}, \tag{5.4.4}$$

и поэтому, применяя операцию взятия ротора к уравнению (5.4.2), мы получим уравнение, описывающее поведение завихренности

во вращающейся системе, связанной с Землей:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = [(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla]\,\mathbf{q} - (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})(\nabla\cdot\mathbf{q}) + (\nabla\rho \times \nabla P)\,\rho^{-2}. \tag{5.4.5}$$

Поправочный член $2\boldsymbol{\Omega}$ к завихренности называется *планетарной завихренностью*. Объединяя (5.4.3) с (5.4.5), мы получим

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}/\rho) = \rho^{-1}[(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla]\,\mathbf{q} + \rho^{-3}(\nabla\rho\times\nabla P). \tag{5.4.6}$$

Предположим теперь, что некоторая сохраняемая величина λ уже существует, т. е. что

$$\frac{D\lambda}{Dt} = 0. \tag{5.4.7}$$

Легко тогда показать, что

$$(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\frac{D}{Dt}(\nabla\lambda) = -(\nabla\lambda)\cdot[(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla]\,\mathbf{q}. \tag{5.4.8}$$

Объединяя результат скалярного произведения (5.4.6) на $\nabla\lambda$ и уравнение (5.4.8), получим

$$\frac{D}{Dt}[\rho^{-1}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla\lambda] = (\nabla\lambda)\cdot\rho^{-3}(\nabla\rho \times \nabla P). \tag{5.4.9}$$

Правая часть в (5.4.9) может обратиться в нуль в двух случаях. Либо λ есть функция только от ρ и P, либо $\nabla\rho \times \nabla P = 0$. Последнее условие удовлетворяется, если жидкость *баротропная*, т. е. если плотность ρ постоянна на поверхности постоянного давления: $\rho = \rho(P)$ и, значит, $\nabla\rho \times \nabla P = 0$. В таком случае из (5.4.9) следует, что скалярная величина Π, называемая *потенциальной завихренностью*,

$$\Pi = \rho^{-1}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla\lambda, \tag{5.4.10}$$

сохраняется.

5.4.1. Геострофическое приближение и теорема Тейлора—Прудмана

Оценка отношения относительного ускорения к кориолисовой силе дается выражением

$$(U^2/L)/(2U\Omega) = (U/2L\Omega) = \varepsilon, \tag{5.4.11}$$

которое представляет собой число Россби. Как мы видели, число Россби мало для крупномасштабных атмосферных и океанических циркуляций. Поэтому мы предполагаем, что в основном баланс в уравнении Навье — Стокса определяется градиентом давления,

силой Кориолиса и силой тяжести. Математически это выражается равенством

$$2\Omega \times \mathbf{q} = -\rho^{-1}\nabla P + \nabla\varphi. \tag{5.4.12}$$

Если компоненты вектора $\mathbf{q}$ в локальной системе координат задаются тройкой (u, v, w), то соотношение (5.4.12) можно переписать следующим образом:

$$fu = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{5.4.13}$$

$$fv = \rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{5.4.14}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g, \tag{5.4.15}$$

где $f = 2\Omega$.

При выводе этих уравнений мы пренебрегли вертикальными движениями жидкости (или газа). Это пренебрежение вполне оправданно, поскольку движение происходит в тонком сферическом слое с горизонтальным масштабом в несколько тысяч километров, в то время как вертикальный масштаб порядка всего лишь одного километра. Уравнения (5.4.13)—(5.4.15) были выведены в том приближении, что движения в меридиональном направлении малы, так что можно применить локальную систему координат. Мы обозначаем через x координату в направлении с запада на восток, через y координату в направлении с юга на север и через z вертикальную координату.

Продифференцируем уравнение (5.4.13) по z и, объединяя получившийся результат с (5.4.15), будем иметь

$$f\frac{\partial u}{\partial z} = g\rho^{-1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho^{-2}\frac{\partial \rho}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{5.4.16}$$

Замечая теперь, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \rho g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P,$$

получим соотношение

$$f\frac{\partial u}{\partial z} = g\rho^{-1}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P\frac{\partial \rho}{\partial z}\right] = \rho^{-1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_P g. \tag{5.4.17}$$

Если жидкость баротропная, то $(\partial\rho/\partial y)_P = 0$ и u не зависит от z. Тот же результат справедлив также для v. Этот результат известен как *теорема Тейлора — Прудмана*: если жидкость находится в геострофическом равновесии и, кроме того, баротропна, то горизонтальные компоненты скорости не зависят от вертикальной координаты.

5.4.2. Уравнения движения для неглубокого слоя жидкости

Уместно моделировать земную атмосферу неглубоким слоем несжимаемой вращающейся жидкости постоянной плотности, который заключен между жесткой горизонтальной плоскостью сверху и переменной недеформируемой поверхностью снизу. Схематически эта модель представлена на рис. 5.1.

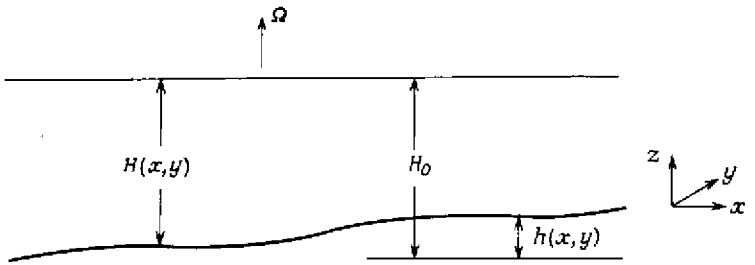


Рис. 5.1.

Жидкость автоматически оказывается баротропной, потому что она имеет постоянную плотность и, стало быть, применима теорема Тейлора — Прудмана. Можно показать, что этот результат, объединенный с уравнением неразрывности, ведет к соотношению

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{z-h(x,\ y)}{H(x,\ y)}\right]=0. \tag{5.4.18}$$

Функцию $(z-h)/H$ можно взять в качестве сохраняемой величины λ в определении потенциальной завихренности Π по формуле (5.4.10); она, таким образом, становится второй сохраняемой скалярной функцией. Главный вклад в потенциальную завихренность Π дает вертикальная компонента ζ вектора завихренности ω, и он представляется в локальных координатах выражением

$$\rho\Pi=(\zeta+2\Omega)\,\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla[z-h(x,\ y)/H)=(\zeta+2\Omega)/H. \tag{5.4.19}$$

В силу соотношений (5.4.13), (5.4.14) справедливо равенство

$$\zeta=\hat{\mathbf{k}}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{q}=(\rho f)^{-1}\nabla^2 P=\nabla^2\psi, \tag{5.4.20}$$

где $\psi=P\,(\rho f)^{-1}$ называется *геострофической функцией тока*.

Потенциальная завихренность Π есть сохраняемая величина, и поэтому для несжимаемой жидкости

$$\frac{D\,(\rho\Pi)}{Dt}=0, \tag{5.4.21}$$

и мы имеем уравнение

$$\zeta_t+u\zeta_x+v\zeta_y-(\zeta+f)\,(uh_x+vh_y)/H=0. \tag{5.4.22}$$

Уравнение (5.4.22) можно существенно упростить. Заменяя $(\zeta + f)$ на f (поскольку $\zeta \ll f$) и H на его среднее значение H_0, мы находим, что (5.4.22) превращается в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \frac{\partial [\psi;\ \nabla^2 \psi\,(fh/H_0)]}{\partial (x,\ y)} = 0. \tag{5.4.23}$$

Уравнение (5.4.23) называется *квазигеострофическим уравнением потенциальной завихренности*.

5.4.3. Волны Россби

Как видно из рис. 5.2, в силу кривизны поверхности Земли локальные координаты можно выбрать таким образом, чтобы

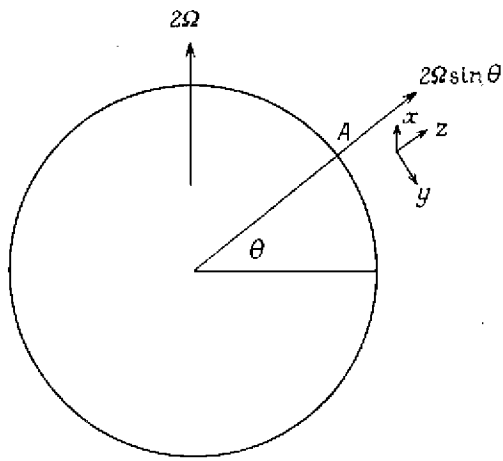


Рис. 5.2. Кривизна поверхности Земли в точке A учитывается введением локальных декартовых координат.

функция $h\,(x,\ y)$ могла приближенно представляться линейной функцией

$$h\,(x,\ y) = \alpha y. \tag{5.4.24}$$

Уравнение (5.4.23) теперь может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \tag{5.4.25}$$

где

$$\beta = (\alpha f/H_0). \tag{5.4.26}$$

Важной чертой этой поправки является то обстоятельство, что она вводит дисперсию в нелинейное уравнение завихренности.

Кроме того, уравнение (5.4.25), хотя и является нелинейным, обладает *точным* решением в виде плоской волны

$$\psi = A \cos (kx + ly - \omega t), \tag{5.4.27}$$

$$\omega = -(\beta k/(k^2 + l^2)). \tag{5.4.28}$$

Из соотношения (5.4.28) ясно, что при условии $\beta \neq 0$ возникают дисперсионные волны, называемые волнами Россби.

Нам понадобилось некоторое время, чтобы привести вышеизложенные идеи к законченному виду, но сейчас мы почти готовы к тому, чтобы применить нашу обычную процедуру растяжения координат для выделения длинных волн. Эти идеи были изложены в намеренно упрощенном виде, чтобы позволить читателям, систематически не изучавшим механику вращающейся жидкости, познакомиться тем не менее с происхождением уравнения потенциальной завихренности (5.4.25).

5.4.4. Уединенные волны Россби

Рассмотрим теперь вместо гармонических волн Россби длинноволновые решения уравнения (5.4.25). Сделанные приближения позволяют нам следить за распространением длинных волн лишь в x-направлении, но не в y-направлении.

В силу (5.4.13), горизонтальная компонента скорости u и геострофическая функция тока ψ связаны соотношением

$$u(x, y) = -(\partial\psi/\partial y). \tag{5.4.29}$$

Поэтому частное решение уравнения (5.4.25) можно выбрать в виде

$$\psi^U(y) = -\int^y U(s)\, ds, \tag{5.4.30}$$

где U — произвольный профиль скоростей, зависящий только от y. Поэтому соответствующее течение направлено строго по оси x. Рассмотрим теперь решения, представляющие собой возмущения течения (5.4.30):

$$\psi(x, y, t) = \psi^U(y) + \Psi(x, y, t). \tag{5.4.31}$$

Для возмущения $\Psi(x, y, t)$ получается уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right](\nabla^2\Psi) + (\beta - U'')\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0. \tag{5.4.32}$$

Очевидно, что если $U \neq \text{const}$, то уравнение (5.4.32) не имеет гармонических волновых решений, однако при $U = U_0$ суще-

ствуют гармонические волновые решения с дисперсионным соотношением

$$\omega = kU_0 - \beta k\,(k^2 + l^2)^{-1}, \tag{5.4.33}$$

которое для малых k, отвечающих длинноволновым движениям, может быть аппроксимировано рядом Тейлора

$$\omega = \omega_1 k + \omega_3 k^3 + \ldots \tag{5.4.34}$$

Тем самым, как в разд. 5.1, мы можем ввести в этом случае растянутые координаты

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - at), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \tag{5.4.35}$$

и применить стандартную теорию возмущений. В общем случае, когда $U \neq \text{const}$, мы все же можем пытаться применять эту технику с той же формой растянутых координат, но следует ожидать, что для ее успешного использования понадобятся некоторые изменения.

Рассмотрим разложение функции Ψ:

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Psi^{(m)}(\xi, y, \tau) \tag{5.4.36}$$

и, подставляя (5.4.35) и (5.4.36) в (5.4.32), найдем, что

$$\begin{aligned}\Big[\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon^{1/2}\overline{U}\frac{\partial}{\partial\xi} + \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}(\varepsilon\Psi^{(1)} + \cdots)\frac{\partial}{\partial y} - \\ - \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\Psi^{(1)} + \varepsilon^2\Psi^{(2)} + \cdots)\frac{\partial}{\partial\xi}\Big] \times \\ \times \Big[\Big(\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(\varepsilon\Psi^{(1)} + \varepsilon^2\Psi^{(2)} + \cdots)\Big] + \\ + \beta\varepsilon^{1/2}(\beta - \overline{U}'')\frac{\partial}{\partial\xi}(\varepsilon\Psi^{(1)} + \varepsilon^2\Psi^{(2)} + \cdots) = 0, \end{aligned} \tag{5.4.37}$$

$$\overline{U} = U - a. \tag{5.4.38}$$

В двух нижних порядках по ε получим следующие уравнения:

$$\varepsilon^{3/2}: \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\overline{U}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial y^2} + (\beta - \overline{U}'')\Psi^{(1)}\Big] = 0, \tag{5.4.39}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{5/2}: \quad &\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\overline{U}\frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial y^2} + (\beta - \overline{U}'')\Psi^{(2)}\Big] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial y^2} + \overline{U}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial y^3} - \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial\xi\,\partial y^2} = 0. \end{aligned} \tag{5.4.40}$$

Интегрируя (5.4.39) по ξ и полагая постоянную интегрирования равной нулю, мы немедленно обнаруживаем, что $\Psi^{(1)}$ удовлетво-

ряет линейному дифференциальному уравнению по y. Поэтому мы можем ввести в рассмотрение произвольную функцию $A(\xi, \tau)$, такую что

$$\Psi^{(1)} = A(\xi, \tau)\, Y(y), \tag{5.4.41}$$

где функция $Y(y)$ удовлетворяет уравнению

$$Y''(y) + \nu(y)\, Y(y) = 0, \tag{5.4.42}$$

где

$$\nu(y) = (\beta - \overline{U}'')\, \overline{U}, \tag{5.4.43}$$

и Y удовлетворяет на боковых стенках граничным условиям $Y(y_1) = Y(y_2) = 0$. Мы теперь видим, что a играет роль собственного значения в задаче (5.4.42) на собственные значения, если задан профиль скорости сдвига $U(y)$, см. (5.4.38).

Предположим теперь для простоты, что не возникает критического слоя, в котором существовало бы критическое значение y_c ($y_1 < y_c < y_2$), такое что $U(y_c) = a$. В противном случае наш анализ оказался бы несостоятельным, так как $\nu \to \infty$ при $y \to y_c$.

Рассматривая члены следующего порядка и пользуясь (5.4.41), мы находим, что $\Psi^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\overline{U}\frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial y^2} + (\beta - \overline{U}'')\,\Psi^{(2)}\right] =$$

$$= \overline{U} Y A_{\xi\xi\xi} + (YY''' - Y'Y'')\, AA_\xi + Y'' A_\tau. \tag{5.4.44}$$

Умножая левую часть этого уравнения на $Y/\overline{U}$ и интегрируя по y от y_1 до y_2, мы приведем левую часть к виду

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{y_2}^{y_1} Y(s)\left[\frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial s^2}(s) + \nu(s)\,\Psi^{(2)}(s)\right] ds. \tag{5.4.45}$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(Y\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial s} - \Psi^{(2)}\frac{\partial Y}{\partial s}\right)_{y_2}^{y_1}\right] + \int_{y_2}^{y_1} \Psi^{(2)}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \nu Y\right) ds. \tag{5.4.46}$$

Граничные условия и уравнение (5.4.39) показывают, что это выражение равно нулю. Поэтому те же самые операции, произведенные над правой частью (5.4.44), также должны давать нуль. Это приводит к следующему требованию к ранее произвольной функции $A(\xi, \tau)$:

$$A_\tau + \mu A A_\xi + \gamma A_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{5.4.47}$$

где

$$\mu = \left(\int_{y_2}^{y_1} (\nu Y^3/\overline{U})\, ds\right) \Big/ \left(\int_{y_2}^{y_1} (\nu Y^2/\overline{U})\, ds\right) \tag{5.4.48}$$

и

$$\gamma = \left(\int_{y_2}^{y_1} (Y^2)\, ds \right) \Big/ \left(\int_{y_2}^{y_1} (vY^2/\overline{U})\, ds \right). \tag{5.4.49}$$

Уравнение (5.4.47) является, разумеется, уравнением КдФ с постоянными коэффициентами. Как упоминалось выше, если существует критический слой, весь наш анализ не проходит. Это связано с тем обстоятельством, что интегралы, определяющие μ и γ, становятся в этой ситуации расходящимися.

Мы затратили много времени для того, чтобы изложить в этой главе некоторые элементы геофизической гидродинамики и дать некоторую основу не только для этого примера, но и для другого примера в гл. 10, который будет построен с использованием материала этого раздела. В частности, мы рассмотрим разновидность уравнения потенциальной завихренности (5.4.30), которая будет представлять собой уравнение СГ.

5.5. Модифицированное и обобщенное уравнения КдФ

В предыдущих трех примерах мы сосредоточились в основном на уравнении КдФ, для которого $p = 1/2$. Модифицированное уравнение КдФ также встречается во многих задачах с использованием того же самого метода растяжения координат, но значение p обычно берется равным единице. Этот метод, однако, тождествен уже описанному в одном из ранних разделов этой главы, поэтому не стоит отводить всю главу одному лишь уравнению мКдФ ради него самого. Заключительный пример этой главы будет посвящен случаю, когда степень нелинейности есть произвольное положительное целое число n. Необходимо сказать, что в таком случае значение p будет зависеть от n, и окончательное уравнение принимает вид

$$u_\tau + au^n u_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{5.5.1}$$

что представляет собой уравнение КдФ с $(n + 1)$-й степенью нелинейности. Это уравнение включает как уравнение КдФ ($n = 1$), так и уравнение мКдФ ($n = 2$), и только два этих уравнения оказываются интегрируемыми. Преимущество этого примера в том, что он показывает, как метод растяжения для этих двух уравнений может быть включен в общую схему.

Пример, который мы рассмотрим, относится к линии передачи в электронике, в которой потери отсутствуют. Это означает, что схема не содержит резисторов и что сопротивления элементов контура так малы, что их можно взять равными нулю. Модель, которую мы будем рассматривать, была введена Скоттом [1970].

Две индуктивности со значениями l и l_1 соединены с двумя емкостями, как показано на рис. 5.3, причем одна из емкостей представляет собой конденсатор с постоянной емкостью c, другая — конденсатор переменной емкости $c_1(v_1)$, которая изменяется в зависимости от разности потенциалов на нем. Эту разность мы обозначим через v_1, в то время как ток в этой части контура — через i_1.

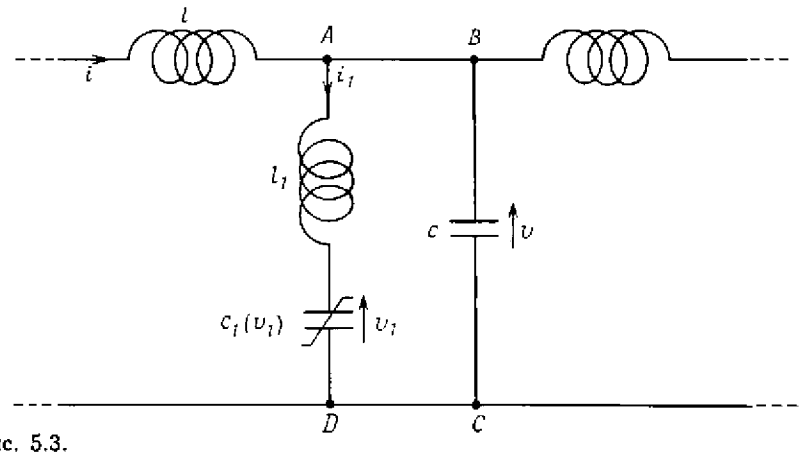


Рис. 5.3.

Вспоминая, что падение напряжения на индуктивности l равно $-l\partial i/\partial t$, где i — сила тока, мы воспользуемся законами Кирхгоффа для контура. Первое уравнение эквивалентно закону сохранения массы:

$$l\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{5.5.2}$$

Это значит, что падение напряжения на индуктивности l должно уравновешиваться изменением напряжения на единицу длины вдоль всего контура. Второе уравнение, выражающее тот факт, что суммарное падение напряжения вдоль замкнутого контура ABCD должно быть равно нулю, имеет вид

$$v_1-v+l_1\frac{\partial i_1}{\partial t}=0. \tag{5.5.3}$$

На конденсаторе c_1 должно выполняться равенство

$$c_1(v_1)\frac{\partial v_1}{\partial t}=i_1, \tag{5.5.4}$$

и, наконец, баланс токов вдоль ABCD дает

$$c\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial i}{\partial x}+i_1=0. \tag{5.5.5}$$

Эти уравнения не содержат членов, соответствующих потерям, так что получающаяся система оказывается дисперсионной, а не диссипативной. Это можно установить нахождением дисперсионного соотношения линеаризованной системы уравнений. Более удобно, исключая i_1, немедленно получить

$$v_1 - v = l_1 c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + l_1 \frac{\partial^2 i}{\partial x\, \partial t}, \tag{5.5.6}$$

$$c \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + c_1 (v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \tag{5.5.7}$$

$$l \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{5.5.8}$$

Линеаризуя около $i = v = v_1 = 0$, $c_1 = c_0$, мы получаем чисто вещественное дисперсионное соотношение и, как в предыдущих разделах, вводим растянутые координаты $\xi = \varepsilon^p (x - \alpha t)$; $\tau = \varepsilon^{3p} t$. Мы еще не уточнили выбор переменной емкости $c_1 (v_1)$. Будем считать, что $c_1 (v_1)$ имеет вид

$$c_1 (v_1) = c_0 (1 - a v_1^n), \tag{5.5.9}$$

где n — положительное целое число и c_0 и a также положительны. Физически это означает, что емкость нелинейная и меняется с изменением разности потенциалов на ней. Сейчас мы применим к уравнениям (5.5.6)—(5.5.8) обычный метод, в котором i, v и v_1 обладают разложениями вида

$$i = \varepsilon i^{(1)} + \varepsilon^2 i^{(2)} + \ldots . \tag{5.5.10}$$

Нет необходимости проводить в подробностях все вычисления, поскольку это делалось раньше. Вместо этого мы перечислим члены, полученные на каждом порядке по ε.

Для (5.5.6)

$$\begin{aligned}
&O(\varepsilon): && v_1^{(1)} - v^{(1)},\\
&O(\varepsilon^2): && v_1^{(2)} - v^{(2)},\\
&O(\varepsilon^m): && v_1^{(m)} - v^{(m)},\\
&O(\varepsilon^{2p+1}): && -[\alpha^2 l_1 c v_{\xi\xi}^{(1)} - \alpha l_1 i_{\xi\xi}^{(1)}].
\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

Для (5.5.7)

$$\begin{aligned}
&O(\varepsilon^{p+1}): && -\alpha c v_\xi^{(1)} + i_\xi^{(1)} - \alpha c_0 v_{1\xi}^{(1)},\\
&O(\varepsilon^{p+m}): && -\alpha c v_\xi^{(m)} + i_\xi^{(m)} - \alpha c_0 v_{1\xi}^{(m)},\\
&O(\varepsilon^{3p+1}): && c v_\tau^{(1)} + c_0 v_{1\tau}^{(1)},\\
&O(\varepsilon^{n+p+1}): && \alpha a c_0 [v_1^{(1)}]^n v_{1\xi}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Для (5.5.8)

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon^{p+1}): && -\alpha l i_\xi^{(1)} + v_\xi^{(1)}, \\ &O(\varepsilon^{p+m}): && -\alpha l i_\xi^{(m)} + v_\xi^{(m)}, \\ &O(\varepsilon^{3p+1}): && l i_\tau^{(1)}. \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Рассматривая вначале уравнения (5.5.11) и (5.5.13), которые оба являются нелинейными, мы пока не знаем, при каком порядке ε достигается баланс между членами порядка $O(\varepsilon^m)$ и членами со второй производной, с одной стороны, и с производной по τ — с другой. Однако, взяв в (5.5.11) члены $O(\varepsilon^m)$ для уравновешивания членов $O(\varepsilon^{2p+1})$, мы получим $m = 2p + 1$. Уравновешивая в (5.5.13) члены $O(\varepsilon^{p+m})$ с членами $O(\varepsilon^{3p+1})$, мы также получаем $m = 2p + 1$. Тот же самый результат мы имеем в (5.5.12), но должны, кроме того, принять во внимание нелинейности, которые возникают при $O(\varepsilon^{n+p+1})$. Поэтому мы выбираем $p + m = 3p + 1 = n + p + 1$ и, следовательно, $p = n/2$ и $m = n + 1$. Выражения (5.5.11)—(5.5.13) теперь приводятся к виду

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon^j): && v_1^{(j)} - v^{(j)}, \quad 1 \leqslant j < n+1, \\ &O(\varepsilon^{n+1}): && v_1^{(n+1)} - v^{(n+1)} = \alpha^2 l_1 c v_{\xi\xi}^{(1)} - \alpha l_1 i_{\xi\xi}^{(1)}, \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

$$O(\varepsilon^j): \quad -\alpha c v_\xi^{(j)} + i_\xi^{(j)} - \alpha c_0 v_{1\xi}^{(j)} = 0, \quad 1 \leqslant j < n+1, \tag{5.5.15}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^{3/2n+1}): \quad &-\alpha c v_\xi^{(n+1)} + i_\xi^{(n+1)} - \alpha c_0 v_{1\xi}^{(n+1)} + c v_\tau^{(1)} + c_0 v_{1\tau}^{(1)} + \\ &+ c_0 \alpha a \left[v_1^{(1)}\right]^n v_{1\xi}^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon^j): && -\alpha l i_\xi^{(j)} + v_\xi^{(j)} = 0, \quad 1 \leqslant j < n+1, \\ &O(\varepsilon^{(3/2)n+1}): && -\alpha l i_\xi^{(n+1)} + v_\xi^{(n+1)} + l i_\tau^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

Три линейных уравнения при $O(\varepsilon^j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$ легко решаются и дают

$$v_1^{(j)} = v^{(j)} = \alpha l i^{(j)}, \quad 1 \leqslant j < n+1, \tag{5.5.17}$$

в предположении, что

$$\alpha^2 = [l(c + c_0)]^{-1}. \tag{5.5.18}$$

Положительный корень (5.5.18) фиксирует значение α в растянутых координатах ξ и τ для волн, идущих направо. Окончательно мы получаем три уравнения:

$$v_1^{(n+1)} - v^{(n+1)} = -\alpha^3 l_1 l c_0 i_{\xi\xi}^{(1)}, \tag{5.5.19}$$

$$\begin{aligned} 0 = i_\xi^{(n+1)} - \alpha c v_\xi^{(n+1)} - \alpha c_0 v_{1\xi}^{(n+1)} + \alpha^{-1} i_\tau^{(1)} + \\ + \alpha a c_0 (\alpha l)^{(n+1)} \left[i^{(1)}\right]^n i_\xi^{(1)}, \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

$$0 = -\alpha l i_\xi^{(n+1)} + v_\xi^{(n+1)} + l i_\tau^{(1)}. \tag{5.5.21}$$

Умножая (5.5.20) на αl и складывая с (5.5.21), находим, что

$$\alpha^2 l c_0 \left[v_\xi^{(n+1)} - v_{1\xi}^{(n+1)}\right] + 2l i_\tau^{(1)} + \alpha a c_0 (\alpha l)^{n+2} \left[i^{(1)}\right]^n i_\xi^{(1)} = 0. \quad (5.5.22)$$

Пользуясь (5.5.19), исключим первое слагаемое в (5.5.22) и окончательно получим

$$(\alpha^5 l l_1 c_0^2)\, i_{\xi\xi\xi}^{(1)} + \alpha^2 a c_0 (\alpha l)^{n+1} \left[i^{(1)}\right]^n i_\xi^{(1)} + 2 i_\tau^{(1)} = 0. \quad (5.5.23)$$

Это уравнение КдФ со степенью нелинейности $(n+1)$. Растянутые координаты здесь вводятся следующим образом: $\xi = \varepsilon^{n/2} x$, $\tau = \varepsilon^{3n/2}(x - \alpha t)$. Если емкость конденсатора c_1 линейно зависит от напряжения ($n = 1$; $p = 1/2$), то мы получаем уравнение КдФ с точно такими же ξ и τ, как в уже рассмотренных примерах. Если емкость меняется по квадратичному закону, то мы получаем уравнение мКдФ ($n = 2$; $p = 1$).

5.6. Примечания

Разделы 1 и 2

Общая идея использования растянутых координат для анализа длинных волн, как в дисперсионных системах, описываемых уравнением КдФ, так и в диссипативных системах, описываемых уравнением Бюргерса

$$u_t + u u_x = \delta u_{xx} \quad (5.6.1)$$

(см. разд. 1.8), применялась достаточно давно. Коул [1951] пользовался этим методом для того, чтобы получить уравнение Бюргерса (5.6.1) для диссипативных ударных волн в газовой динамике. Мы не будем повторять здесь этих вычислений, поскольку они предложены в качестве одного из упражнений к этой главе. Рассматривая общий вывод как уравнения КдФ, так и уравнения Бюргерса, Су и Гарднер [1969] показали, что общий класс дисперсионных систем будет давать уравнение КдФ, а класс диссипативных систем — соответственно уравнение Бюргерса в длинноволновом масштабе. Таниути и Вей [1968] дали систематическое описание вывода уравнения КдФ для общих систем, применяя теорию возмущений. Кодама и Таниути [1978] и Итикава и др. [1976] рассмотрели более высокие порядки возмущений в этой теории. Общий перечень результатов и ссылок по общему методу теории возмущений, развитому Таниути и соавторами, можно найти в этой последней статье. Дальнейшая литература, в которой можно найти обсуждение различных методов теории возмущений, — это монографии Найфэ [1973] и Бендера и Орзага [1978]. Проницательный читатель может заинтересоваться общими принципами, которыми руководствуются при выборе величины ε. Во всех задачах, которые мы рассмотрели, уравнения движения переписывались в безразмерном виде и поэтому оказались обла-

дающими внутренними масштабами длины и времени. Величина ε, которая использовалась как мера амплитуды, в каждой задаче задается начальными данными и на этих масштабах длины и времени должна быть достаточно малой, чтобы ε можно было бы использовать как параметр разложения. Если все же эта величина велика, то приближение слабой нелинейности оказывается непригодным.

В отношении разнообразия применений уравнение КдФ является вездесущим, и работы, на которые мы ссылаемся в конце этих примечаний, несмотря на их многочисленность, были выбраны из многих других. Начиная с Кортевега и де Фриза [1895] обычное модифицированное уравнение КдФ наиболее часто встречалось в теории волн в нелинейных цепочках и решетках и в плазме. Гарднер и Морикава [1960] в неопубликованном сообщении отметили сходство между результатом, который они получили для слабых гидромагнитных длинных волн в плазме, и волнами на воде: в обоих случаях получалось уравнение КдФ. Васими и Таниути [1966] получили уравнение КдФ для слабо нелинейных ионноакустических волн сжатия в плазме, и в разд. 2 мы следовали их вычислениям. Березин и Карпман [1964, 1967] и Карпман [1967] получили независимо (численно и аналитически) сходные результаты — по поводу этих результатов см. книгу Карпмана [1973]. Статья Джеффри и Какутани [1969] содержит обзор результатов, относящихся к выводу уравнений КдФ для ионноакустических волн и гидромагнитных волн в плазме, в том числе ранних результатов. Как к основному руководству по методам в физике плазмы мы отсылаем к монографии Дейвидсона [1972]. Дальнейшие важные статьи, перечень которых далеко не исчерпывающий, — это работы по ионноакустическим солитонам Тапперта и Забуски [1971], Тапперта и Джудиса [1972], Тапперта [1972] и Конно и др. [1977] и по гидромагнитным волнам — Кавахары [1969], Кевера и Морикавы [1969], Мортона [1964], Таниути и Васими [1968] и Какутани и др. [1968]. Исчерпывающую библиографию по длинноволновым КдФ-солитонам в плазме можно найти у Итикавы [1979] и в обзоре Скотта, Чу и Маклохлина [1973]. Эксперименты по ионным акустическим уединенным волнам были выполнены Икези, Тейлором и Бейкером [1970] и Коном и Маккензи [1973]. Как упомянуто в тексте, Хершковиц, Ромессер и Монтгомери [1972] вычислили количество дискретных собственных значений и их величины для уравнения Шрёдингера при некоторых выбранных начальных данных и затем показали, что имеется хорошее согласие эксперимента с теорией.

Все приведенные выше расчеты по теории возмущений были выполнены для одномерного пространства. Кадомцев и Петвиашвили [1970] рассмотрели эволюцию слабо нелинейных длинных волн в диспергирующей среде, причем они учитывали поперечную

координату y. Они получили двумерный вариант уравнения КдФ

$$(u_{xxx} + 6u^2 + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0, \qquad (5.6.2)$$

который был также получен Како и Роулендзом [1976] для двумерного распространения ионноакустических солитонов.

Одновременно с появлением уравнения КдФ в различных областях физики плазмы оно появилось также как модельное уравнение в исследованиях по нелинейным решеткам, где основной вопрос был в том, как в нелинейной системе распределяется энергия по различным модам Фурье в решетке. Мы рассмотрели задачу ФПУ в разд. 1.3, и большая часть последующей работы по нелинейным решеткам и цепочкам выросла из этой задачи, причем работа Забуски, Крускала и других была основополагающей (см. Забуски [1967, 1968, 1969, 1973], Забуски и Крускал [1965]). Забуски, Дим и Крускал [1968] и один из авторов настоящей книги (Дж. К. Эйлбек) сделали фильмы, которые могут быть предоставлены для просмотра, показывающие распространение и взаимодействие солитонов.

Как показали Су и Гарднер [1969] и Таниути и Вей [1968], уравнение КдФ есть эволюционное уравнение, получения которого следует ожидать для некоторых видов слабонелинейных дисперсионных систем. Мы в основном ссылались на работы, описывающие различные случаи его появления в физике плазмы и нелинейных решеток. Очевидно, что существуют другие области, в которых это уравнение было найдено при моделировании различных физических ситуаций, отличающихся от примера волн на воде из следующего раздела. Тапперт и Варма [1970] и Нараянамурти и Варма [1970] отметили, что оно возникает при изучении распространения тепловых импульсов в твердых телах. Наирболи [1970] вывел его для описания распространения продольных дисперсионных волн в упругих стержнях; Лейбовиц [1970] и Вейнгаарден [1968] также вывели уравнение КдФ для слабо нелинейных волн во вращающихся жидкостях и двухфазных системах жидкость — газ с пузырями соответственно. Различные другие ссылки могут быть найдены в сборнике статей, изданном Лейбовицем и Сибасом [1968] (см. статью Р. Миуры), у Буллафа и Кодри [1980], Лонгрена и Скотта [1978] и у Калоджеро [1978]. По поводу различных аспектов слабо нелинейных волн в различных видах сред смотрите также книги Карпмана [1973], Уизема [1974] и Бхатнагара [1980].

Раздел 3

Вычисления этого раздела, хотя в основном и следуют Кортевегу и де Фризу [1895], все же имеют некоторые отличия, заключающиеся в том, что для упорядочения величин различных членов в разложениях были применены рассуждения, связанные с мас-

штабными преобразованиями переменных и теорией возмущений. Фриман и Джонсон [1970] показали, что те же вычисления проходят при наличии сдвигового течения в жидкости; коэффициенты полученного уравнения КдФ окажутся интегралами по сдвигу. Мадсен и Мей [1969] взяли уравнения Эйлера для описания движения жидкости по каналу с наклонным дном и численно обнаружили, что хотя уединенные волны и появляются, они разрушаются, проходя над наклонным дном. Используя этот численный результат, Джонсон [1973] показал, что в этом случае возникает разновидность уравнения КдФ с модифицированным нелинейным членом. Смотрите также Забуски и Галвин [1971] по поводу обсуждения уравнений КдФ и волн на мелкой воде. Если при изучении волн в мелком канале принять во внимание поперечное измерение, то возникает двумерное уравнение КдФ, подобное тому, что получилось у Кадомцева и Петвиашвили для плазмы, но с измененным знаком у члена u_{yy}. Фриман и Дэйви [1975] предприняли тщательный анализ предельных случаев двумерных волн на воде, рассматривая различные возможные преобразования координат, учитывающие в качестве характерных масштабов амплитуду волн, глубину и длину волны, и для длинных волн на мелкой жидкости они показали, что (5.6.2) с положительным знаком у члена u_{yy} является адекватным уравнением. В другом приближении они получили так называемые уравнения Дэйви — Стюартсона, которые обобщают на случай двух измерений уравнение НЛШ гл. 1 — см. примечания к гл. 8. Хаммак [1973] и Хаммак и Сигур [1974] попытались сравнить теорию и эксперимент, рассматривая эволюцию начальных данных в экспериментах с волнами в резервуаре и сравнивая их с предсказаниями, сделанными с помощью обратной задачи рассеяния.

Раздел 4

(а) Геофизическая гидродинамика — трудная тема, требующая тщательного изучения, если пытаться достичь хоть какой-то глубины. Часть этих трудностей заключается в том факте, что имеющиеся методы прикладной математики позволяют нам решать уравнения Навье — Стокса лишь для в высшей степени идеализированных и очень упрощенных ситуаций. Различные приближения и различные применяемые методы масштабирования должны поэтому приниматься с осторожностью. Недавняя книга Педлоски [1980] по геофизической динамике жидкости и книга Гринспана [1968] по вращающимся жидкостям представляют собой руководства, которые могут быть прочитаны без предварительного знакомства с предметом. Серия лекций Педлоски [1971] очень полезна для начинающих. Книга Дрейзина и Рейда [1981] по гидродинамической устойчивости является хорошим пособием для тех, кто желает изучать свойства устойчивости

и распространения волн во вращающихся и параллельных течениях.

(б) Уравнение завихренности (5.4.25) содержит член $\beta\partial\Psi/\partial x$, который в свою очередь порождается членом βy, добавленным к $\nabla^2\Psi$. Происхождение этого члена связано с наклоном канала из-за кривизны Земли. Этот член математически эквивалентен тому, что известно как приближение бета-плоскости Россби (Педлоски [1971]), которое очень просто локально учитывает сферичность планеты. Это обычно выводится следующим образом. Из рис. 5.2 ясно, что для канала с жидкостью в средних широтах уравнение потенциальной завихренности (5.4.19) должно в действительности записываться в виде

$$\rho\Pi = (\zeta + 2\Omega \sin\theta)/H, \tag{5.6.3}$$

где $2\Omega \sin\theta$ заменяет член 2Ω. Разлагая θ вблизи некоторого угла θ_0, можно переписать (5.6.3) приближенно в виде

$$\rho\Pi = (\zeta + f_0 + \beta y)/H, \tag{5.6.4}$$

где

$$f_0 = 2\Omega \sin\theta_0; \quad \beta = 2\Omega R^{-1} \cos\theta_0; \quad y = R\delta\theta. \tag{5.6.5}$$

Уравнение (5.6.4) можно получить из (5.4.2), если воспользоваться сферическими координатами. В этом случае $f = 2\Omega$ в уравнениях (5.4.13)—(5.4.15) заменяется на $f = 2\Omega \sin\theta$.

(в) Вывод уравнения КдФ, данный в этом контексте, принадлежит Редекоппу [1977], который аналогичным образом получил также уравнение мКдФ для стратифицированной жидкости. В той же самой статье Редекопп показывает, как вывести уравнение КдФ в случае, когда присутствуют критические слои.

Раздел 5

Модифицированное уравнение КдФ, выведенное в этом разделе, как мы показали, появляется почти так же, как и уравнение КдФ, но с использованием несколько иного выбора масштабов в растянутых координатах. Оно возникает, например, для некоторых ангармонических решеток (Забуски [1967]), альвеновских волн в плазме (Какутани и Оно [1973]), длинных волн в стратифицированной вращающейся жидкости (Редекопп [1977]), а также в примере с электрическим контуром, рассмотренным в этом разделе.

В связи с ангармонической решеткой в разд. 1.3 мы рассмотрели нелинейную цепочку с квадратичной и кубической нелинейностями, заданными соотношениями (1.3.2), (1.3.3), с уравнениями движения вида

$$\ddot{Q}_n = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}). \tag{5.6.6}$$

Точно так же, как в электрическом контуре, в котором мы выбрали зависимость емкости от напряжения в виде $c_1(v_1) = c[1 - av_1]$, мы рассмотрим нелинейности в $f(Q)$ вида

$$f(Q) = Q + \beta_n Q^n. \tag{5.6.7}$$

Следуя вычислениям разд. 1.3, мы придем к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left[\frac{1}{12}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \beta_n u^n + u\right] - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5.6.8}$$

Так же, как и прежде, мы введем «растянутые» координаты $\xi = \varepsilon^p(n - \alpha t)$; $\tau = \varepsilon^{3p} t$ и представим u в виде

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} \ldots . \tag{5.6.9}$$

Уравнение (5.6.8) теперь принимает вид

$$\varepsilon^{2p}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\varepsilon^{2p}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \ldots + \varepsilon^m u^{(m)} \ldots) + \beta_m (\varepsilon u^{(1)} \ldots)^n + \right.$$
$$\left. + (\varepsilon u^{(1)} + \ldots \varepsilon^m u^{(m)} \ldots)\right] =$$
$$= \left(\varepsilon^{3p}\frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha\varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 (\varepsilon u^{(1)} + \ldots \varepsilon^m u^{(m)} \ldots). \tag{5.6.10}$$

При различных порядках по ε мы получим:

$$\begin{aligned}
&Q(\varepsilon^{2p+1}): \quad u^{(1)}_{\xi\xi\xi} - \alpha^2 u^{(1)}_{\xi\xi},\\
&Q(\varepsilon^{2p+m}): \quad u^{(m)}_{\xi\xi} - \alpha^2 u^{(m)}_{\xi\xi},\\
&Q(\varepsilon^{4p+m}): \quad u^{(m)}_{\xi\xi\xi\xi} + 2\alpha u^{(m)}_{\xi\tau},\\
&Q(\varepsilon^{2p+m}): \quad \beta_n [(u^{(1)})^n]_{\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{5.6.11}$$

Для получения баланса между дисперсией и нелинейностью мы должны выбрать $4p + m = 2p + n$. Кроме того, очевидно, что нет необходимости брать значения m больше единицы, так что окончательно мы получаем $\alpha = 1$ и $p = (1/2)(n - 1)$. Это дает нам окончательное уравнение

$$u^{(1)}_{\xi\xi\xi} + \beta_n [(u^{(1)})^n]_\xi + 2u^{(1)}_\tau = 0, \tag{5.6.12}$$

которое представляет собой то же самое уравнение КдФ, что и (5.5.23).

5.7. Задачи

1. В динамике неидеального газа уравнения сохранения массы и импульса имеют вид

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P - \mu u_x)_x = 0,$$

где ρ и u — плотность и скорость соответственно, а μ — положительная постоянная. Переменная P, обозначающая давление,

связана с плотностью уравнением состояния $P = A(\rho/\rho_0)^\gamma$, где ρ_0 — равновесная плотность, а A — постоянная.

Рассматривая линеаризацию этих уравнений, покажите, что растянутые координаты, необходимые для получения информации об эволюции слабо нелинейных длинных волн, имеют вид

$$\xi = \varepsilon^p (x - \alpha t), \quad \tau = \varepsilon^{2p} t.$$

Разлагая плотность ρ и скорость u в ряды по ε, покажите, что $o = 1$ — как раз то значение показателя, которое дает для $\rho^{(1)}$ уравнение Бюргерса вида

$$2\rho_\tau^{(1)} + \alpha\rho_0^{-1}(1+\gamma)\rho^{(1)}\rho_\xi^{(1)} = \rho_0^{-1}\mu\rho_{\xi\xi\xi}^{(1)},$$

где $a^2 = A\gamma\rho_0^{-1}$.

2. Рассмотрите систему двух уравнений

$$N_x = -(1/2)(E^2)_t,$$
$$E_{xxt} + E_t = (EN)_x,$$

где $N \to -1$, $E \to 0$ при $|x| \to \infty$. Представляя E в виде

$$E = \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \dots,$$

найдите разложение для N и покажите, что $\xi = \varepsilon(x - t)$, $\tau = \varepsilon^3 t$ суть соответствующие растянутые координаты. Покажите, что в этих координатах эволюционное уравнение для E превращается в уравнение мКдФ

$$E_{\xi\xi\xi}^{(1)} + [1/2\,(E^{(1)})^3]_\xi = E_\tau^{(1)}.$$

3 (а). Уравнение Каца и ван Мёрбеке [1975] (КвМ) имеет вид

$$\dot{u}_n = 1/2\,[\exp(u_{n+1}) - \exp(u_{n-1})].$$

Переходя от дискретной переменной к континуальной, $u_n(t) \to u(n, t)$, покажите, что при включении нижних порядков дисперсионного и нелинейного членов уравнение КвМ аппроксимируется уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} + u\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n}.$$

(б). Определяя новую переменную x_n, такую что

$$u_n = x_n - x_{n+1},$$

покажите, рассматривая только четные точки ($\xi_j = x_{2n}$), что x_n удовлетворяет уравнению полурешетки Тоды (Мозер [1975])

$$\ddot{\xi}_j = \exp(\xi_{j-1} - \xi_j) - \exp(\xi_j - \xi_{j+1}).$$

4. Во многих матричных задачах, связанных с растяжением координат в одном пространственном измерении, типа КдФ,

содержащих еще одну переменную y, как в разд. 5.4, возникают уравнения вида

$$\boldsymbol{L}\varphi = \mathrm{f}_1(y)\, A_\tau + \mathrm{f}_2(y)\, A^m A_\xi + \mathrm{f}_3(y)\, A_{\xi\xi\xi} \equiv R,$$

где $\boldsymbol{L}$ — дифференциальный оператор по y. Покажите, что если $\varphi = \mathbf{u}$ — решение однородной задачи $\boldsymbol{L}\varphi = 0$, а $\mathbf{v}$ есть решение сопряженной задачи $\boldsymbol{L}^*\mathbf{v} = 0$, то условие разрешимости дается соотношением

$$\alpha_1 A_\tau + \alpha_2 A^m A_\xi + \alpha_3 A_{\xi\xi\xi} = 0,$$

где

$$\alpha_i = \langle \mathbf{v},\ \mathrm{f}_i(y) \rangle,$$

а ломаные скобки $\langle\ \rangle$ означают скалярное произведение.

5. Примените метод, описанный в предыдущей задаче, для вывода уравнения (5.4.47) из (5.4.44).

6. Уравнение

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + \alpha L (v^2)_{xx} + L^2 v_{xxtt} = 0$$

возникает при описании продольных волн в упругих стержнях (Островский и Сутин [1977]), где $L \gg 1$ ($\alpha,\ c \sim O(1)$). Используя L^{-1} в качестве малого параметра, покажите, что в растянутых координатах $\xi = (x - ct)\, L^{-1}$, $\tau = ctL^{-1}$ и $v = L^{-1}u$, если пренебречь производными по τ порядка, большего единицы, то получится уравнение

$$u_\tau = \alpha c^{-2} u u_\xi + (1/2)\, u_{\xi\xi\xi} - u_{\xi\xi\tau}.$$

7. Покажите, что для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^r}{\partial x^r}(u^m) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$n > r$; $m > 1$, при переходе к координатам $\xi = \varepsilon^p (x - t)$, $\tau = \varepsilon^{(n-1)p} t$ и $u = \varepsilon u^{(1)} + \ldots$ баланс между членами получается на нижнем порядке по ε, если выбрать p в виде $p = (m - 1)/(n - r)$.

8. Модель, обобщающая результаты разд. 5.4 на случай двухслойной жидкости, задается уравнением

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2 \psi_i + (-1)^i (\psi_1 - \psi_2) F + \beta y] = 0,$$

$$i \neq j = 1,\ 2.$$

В этом случае возникает двойная задача на собственные значения, и поэтому необходимы две фазовые скорости a_1 и a_2. Следовательно, мы должны слегка изменить растяжение координат ($\xi = \varepsilon^{1/2} x$; $\tau = \varepsilon^{3/2} t$) и ввести

$$\psi_i = -\int \overline{U}(y)\, dy + \Psi_i, \quad \overline{U} = U_i(y) - a_i, \quad i = 1,\ 2,$$

$$\Psi_i = \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi^{(2)} + \ldots.$$

Покажите, что с теми же самыми граничными условиями, что и в разд. 5.4 ($Y_i = 0$ при $y = y_1$ и $y = y_2$), задача на собственные значения задается уравнениями

$$Y_i'' + \nu_i(y) Y_i = 0,$$

где

$$\nu_i = [\beta - \overline{U}_i'' - (-1)^i F(\overline{U}_i - \overline{U}_j)] \overline{U}_i^{-1},$$

$$\Psi_i^{(1)} = A(\xi, \tau) Y_i(y), \quad i \neq j = 1, 2.$$

Применяя метод задачи 4 или действуя другим способом, покажите, что A должно удовлетворять уравнению КдФ

$$A_\tau + \mu A A_\xi + \gamma A_{\xi\xi\xi} = 0,$$

где μ и γ задаются выражениями

$$\mu = \sum_{i=1}^{2} \int_{y_2}^{y_1} \nu_i Y_i^3 / \overline{U}_i ds \Big/ \sum_{i=1}^{2} \int_{y_2}^{y_1} \nu_i Y_i^2 / \overline{U}_i ds,$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{2} \int_{y_2}^{y_1} Y_i^2 ds \Big/ \sum_{i=1}^{2} \int_{y_2}^{y_1} \nu_i Y_i^2 / \overline{U}_i ds.$$

6. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЗАХАРОВА—ШАБАТА/АКНС

6.1. Прямая задача Захарова—Шабата и класс интегрируемых уравнений

Метод обратной задачи рассеяния и структура КдФ-уравнений остались бы чисто математическим курьезом, если бы не было обнаружено, что этим методом могут быть решены и другие важные уравнения математической физики. В 1971 году своей фундаментальной работой Захаров и Шабат показали, что нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iQ_t + 2Q|Q|^2 + Q_{xx} = 0 \tag{6.1.1}$$

для начальных условий, затухающих достаточно быстро при $|x| \to \infty$, также может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. Найденная ими пара Лакса имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &\equiv i\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} - i(1-p^2)^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & -Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_1 &\equiv ip\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\begin{pmatrix} -(1-p)|Q|^2 & (1-p^2)^{1/2}Q_x^* \\ (1-p^2)^{1/2}Q_x & (1+p)|Q|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

где $p > 0$. Здесь $\mathbf{L}_1$ — изоспектральный оператор, т. е. его собственные значения не зависят от времени, если пара $(\mathbf{L}_1, \mathbf{A}_1)$ удовлетворяет уравнению Лакса

$$\mathbf{L}_{1t} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{L}_1]. \tag{6.1.3}$$

Непосредственная проверка показывает, что в этом случае уравнение (6.1.3) эквивалентно нелинейному уравнению Шрёдингера (6.1.1).

После преобразования собственных функций (Y_1) оператора $\mathbf{L}_1$

$$Y_1 = \exp(-ikp^{-1}x)\begin{pmatrix} 0 & (1-p)^{1/2} \\ (1+p)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} Y_2 \tag{6.1.4}$$

и растяжения собственных значений (λ) этого оператора по формуле

$$k = \lambda p\,(1-p^2)^{-1} \tag{6.1.5}$$

пара Лакса (6.1.2) может быть заменена операторами

$$\mathbf{L}_2 \equiv i\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -Q \\ -Q^* & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \tag{6.1.6}$$

$${}_f\mathbf{A}_2 \equiv \begin{pmatrix} i|Q|^2 - 2ik^2 & iQ_x + 2Qk \\ iQ_x^* - 2Q^*k & -i|Q|^2 + 2ik^2 \end{pmatrix} + f(k)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1.7}$$

где $f(k) = ik(p + p^{-1})$. При получении окончательной формулы (6.1.7) соотношение $\mathbf{L}_2 y = ky$ было применено дважды для того, чтобы исключить производные по x от собственных функций. Ясно, что мы пришли к семейству операторов ${}_f\mathbf{A}_2$, которое можно формально рассматривать как эволюционный оператор в уравнении Лакса, поскольку $\mathbf{L}_2$ коммутирует с диагональной матрицей, не зависящей от x. Заметим, что уравнение Лакса лишь формально можно считать справедливым, поскольку ${}_f\mathbf{A}_2$ зависит от собственной функции. Однако мы с легкостью можем обратить последний шаг на пути получения формулы (6.1.7) и записать её таким образом, чтобы соответствующий дифференциальный оператор или эволюционное уравнение Лакса от собственной функции не зависели. Обратим внимание также на то обстоятельство, что оператор $\mathbf{L}_2$ уже не является самосопряженным, так что анализ в этом и последующих разделах резко отличается от применяемого в обратной задаче рассеяния для изоспектрального уравнения Шрёдингера.

Принципиальное наблюдение, сделанное Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сигуром (АКНС) [1973], [1974], заключалось в том, что обратная задача, представленная соотношениями (6.1.6), (6.1.7), допускает обобщение следующего вида:

$$\mathbf{L} \equiv i\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -Q(x,\ t) \\ R(x,\ t) & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \tag{6.1.8}$$

$${}_f\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} A(x,\ t,\ k) & B(x,\ t,\ k) \\ C(x,\ t,\ k) & -A(x,\ t,\ k) \end{pmatrix} + f(k)\mathbf{I}. \tag{6.1.9}$$

Соответствующие этой паре нелинейные уравнения, порожденные формальным уравнением Лакса, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_x - QC + RB &= 0, \\ Q_t - B_x - 2AQ + 2ikB &= 0, \\ R_t - C_x + 2AR + 2ikC &= 0. \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Способ получения некоторых других ассоциированных уравнений состоит в представлении функций A, B и C в виде многочленов

от k и решении уравнений (6.1.10) рекуррентным образом. Применяя этот метод, можно быстро обнаружить, что, кроме нелинейного уравнения Шрёдингера, с изоспектральным оператором (6.1.8) ассоциируются следующие важные уравнения.

Модифицированное уравнение КдФ $Q_t \pm 6Q^2Q_x + Q_{xxx} = 0$:

$$A = -4ik^3 \pm 2iQ^2;$$
$$B = 4Qk^2 + 2iQ_xk \pm 2Q^3 - Q_{xx};$$
$$C = \pm 4Qk^2 \pm 2iQ_xk + 2Q^3 \pm Q_{xx};$$
$$R = \pm Q.$$

Уравнение КдФ $Q_t + 6QQ_x + Q_{xxx} = 0$:

$$A = -4ik^3 + 2iQ - Q_x;$$
$$B = 4Qk^2 + 2iQ_xk - 2Q^2 - Q_{xx};$$
$$C = -4k^2 + 2Q;$$
$$R = -1.$$

Заметим также, что если в представление для функций включить обратные степени k, то снова получатся интегрируемые уравнения.

Уравнение sin-*Гордон* $U_{xt} = \pm \sin U$:

$$A = \pm \frac{i}{4k} \cos U; \quad B = \pm \frac{i}{4k} \sin U; \quad C = \pm \frac{i}{4k} \sin U;$$
$$R = -Q = (1/2)\, U_x.$$

В этом случае соответствующий эволюционный оператор в уравнении Лакса является интегральным оператором. Действительно, нетрудно показать, что он определяется формулой

$$\mathbf{A} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_1 \end{pmatrix}, \tag{6.1.11}$$

где $I_1 v(x) = \int^x \cos\,[(1/2)\,(U(x) + U(y))]\, v(y)\, dy$

и $I_2 v(x) = \int^x \sin\,[(1/2)\,(U(x) + U(y))]\, v(y)\, dy$.

Для произвольного формального оператора $\mathbf{A}$ соответствующий оператор Лакса будет, вообще говоря, интегро-дифференциальным оператором. В большей части этого раздела мы не обращаем внимания на явную зависимость от t всех фигурирующих здесь функций, так как применяемые здесь операции включают лишь интегрирование и дифференцирование по переменным x и k при фиксированном t.

Сейчас мы введем в рассмотрение гильбертово пространство $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ комплексных функций со значениями в $\mathbb{C}^2$, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}$ по мере Лебега. Скалярное произведение в $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\langle V, U\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (v_1(x)\, u_1^*(x) + v_2(x)\, u_2^*(x))\, dx, \qquad (6.1.12)$$

$$V, U \in L^2_{(2)}(\mathbb{R}).$$

Используя дифференциальный оператор (6.1.8), мы можем определить оператор, по-прежнему обозначаемый через L, который действует в $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Потребуем, чтобы для $v \in D$ выполнялось соотношение $\mathbf{L}v \in D_{\mathbf{L}}$. Необходимо, чтобы, как и в случае изоспектрального оператора Шрёдингера, функции Q и R не были чересчур сингулярны. Пока мы предположим, что они суммируемы на каждом конечном интервале. Точные ограничения на Q и R, используемые в этой книге, содержатся в теоремах 6.1 и 6.6.

В оставшейся части этого раздела мы займемся прямой задачей рассеяния для оператора L в случае, когда ни одна из функций R или Q не является постоянной. Случай $R = \text{const}$ сводится к изоспектральному оператору Шрёдингера, прямая задача для которого, когда L — дифференциальный 2×2-матричный оператор первого порядка, была рассмотрена в упражнениях к гл. 3. И содержание, и ход изложения, которому мы следуем в этом разделе, в общих чертах соответствуют разд. 3.3, 3.4 и 3.5, посвященным изоспектральному оператору Шрёдингера. Читателю можно посоветовать иметь в виду это обстоятельство при чтении нижеследующего материала как в силу его сжатости, так и для того, чтобы сравнить оба метода.

Решения Йоста для уравнения

$$\mathbf{L}Y = kY \qquad (6.1.13)$$

определяются граничными условиями

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} e^{-ikx}\psi(x, k) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \lim_{x\to\infty} e^{ikx}\bar{\psi}(x, k) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \\ &\lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\varphi(x, k) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-ikx}\bar{\varphi}(x, k) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (6.1.14)$$

Таким образом, они ведут себя асимптотически при $|x| \to \infty$ так же, как собственные функции задачи (6.1.13), где $R \equiv 0$, $Q \equiv 0$. Для нахождения условий, обеспечивающих существование и единственность этих решений, а также возможность их аналитического продолжения на комплексные значения k, мы применим метод последовательных приближений для интегрального урав-

нения, равносильного дифференциальному уравнению (6.1.13) с граничными условиями (6.1.14). Мы получим, в частности, представление

$$e^{-ikx}\psi(x,\ k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^\infty \mathbf{P}(x,\ y,\ k)\, e^{-iky}\psi(y,\ k)\, dy, \quad (6.1.15)$$

где

$$\mathbf{P}(x,\ y,\ k) \equiv e^{ik(y-x)} \begin{pmatrix} 0 & e^{ik(y-x)}Q(y) \\ e^{-ik(y-x)}R(y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Определяя $H(x,\ k) = \exp(-ikx)\,\psi(x,\ k)$, мы должны показать, что ряд

$$H(x,\ k) = \sum_{j=0}^{\infty} H^j(x,\ k) \quad (6.1.16)$$

сходится равномерно к функции $H(x,\ k)$. Члены этого ряда определяются рекуррентными соотношениями

$$H^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1.17)$$

и

$$H^j(x,\ k) = \int_x^\infty \mathbf{P}(x,\ y,\ k)\, H^{j-1}(y,\ k)\, dy, \quad j \geqslant 1. \quad (6.1.18)$$

Введем в рассмотрение нормы

$$|Y(x)| = |y_1(x_0)| + |y_2(x_0)|$$

и

$$|\mathbf{P}(x_1,\ x_0,\ k)| = \sum_{i,\ j}^{2} |P_{ij}(x_1,\ x_0,\ k)|, \quad x_1,\ x_0, \in \mathbb{R}. \quad (6.1.19)$$

Пусть $V \in L^1_{(2)}(\mathbb{R})$, так что интеграл $\int_x^\infty |V(y)|\, dy$ существует, хотя функция V не обязательно принадлежит $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Имеем тогда

$$\left|\int_x^\infty V(y)\, dy\right| \leqslant \left|\int_x^\infty v_1(y)\, dy\right| + \left|\int_x^\infty v_2(y)\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^\infty |v_1(y)|\, dy + \int_x^\infty |v_2(y)|\, dy =$$

$$= \int_x^\infty |V(y)|\, dy. \quad (6.1.20)$$

Мы имеем также оценку

$$\mathbf{P}(x_1, x_0, k) Y(x_0) | \leqslant |\mathbf{P}(x_1, x_0, k)| |Y(x_0)| =$$
$$= e^{\eta(x_1-x_0)} \{e^{\eta(x_1-x_0)} |Q(x_0)| + e^{-\eta(x_1-x_0)} |R(x_0)|\} |Y(x_0)|, \quad (6.1.21)$$

где $\eta = \operatorname{Im} k$. Полагая $P = (|Q| + |R|)$, мы получим из (6.1.18), что

$$|H^j(x, k)| \leqslant \int_x^\infty P(y_j) e^{(\eta - |\eta|)(x-y_j)} \dots \int_{y_2}^\infty P(y_1) e^{(\eta-|\eta|)(y_2-y_1)} \times$$
$$\times dy_1 \dots dy_j. \quad (6.1.22)$$

Оценивая правую часть неравенства (6.1.22), мы найдем, что при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|H^j(x, k)| \leqslant \frac{1}{j!} \left(\int_x^\infty P(y)\, dy \right)^j \quad (6.1.23)$$

и, следовательно,

$$|H(x, k)| \leqslant \exp\left\{ \int_x^\infty P(y)\, dy \right\}. \quad (6.1.24)$$

Положим

$$S_j^{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |y|^j (|Q(y)| + |R(y)|)\, dy \quad (6.1.25)$$

и $S_j(\infty) = S_j^{\pm}(\infty)$, $j = 0, 1, \dots$.

Ясно, что в предположении $S_0(\infty) < \infty$ ряд (6.1.16) абсолютно и равномерно сходится при $x \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Доказательство единственности получается стандартным образом, а равномерная сходимость ряда для H обеспечивает аналитичность функции $\psi(x, k)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ и ее непрерывность в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Из (6.1.15) следует, что функции $H_k = \partial H/\partial k$ удовлетворяют уравнению

$$H_k(x, k) = -\int_x^\infty \mathbf{P}(x, y, k) H_k(y, k)\, dy - \int_x^\infty \mathbf{P}_k(x, y, k) H(y, k)\, dy. \quad (6.1.26)$$

Если предположить, что $\{S_0(\infty), S_1(\infty)\} < \infty$ и воспользоваться неравенством

$$|\mathbf{P}_k| \leqslant 2(y - x)(|Q| + |R|), \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \ y \geqslant x, \quad (6.1.27)$$

то легко показать, что существует постоянная K, такая что

$$\left| \int_x^\infty \mathbf{P}_k(x, y, k) H(y, k)\, dy \right| \leqslant K\{1 - \min(x, 0)\}. \quad (6.1.28)$$

Если, пользуясь (6.1.26), записать итерационный ряд для $H_k(x, k)$ и оценить каждый член этого ряда с помощью (6.1.28), то получится следующая оценка:

$$|H_k(x, k)| \leqslant K\{1 - \min(x, 0)\} \exp S_0^+(x). \qquad (6.1.29)$$

Итак, предполагая, что $S_0(\infty) < \infty$ и $S_1(\infty) < \infty$, из локальной равномерной сходимости ряда для $H_k(x, k)$ мы выводим, что функция $H_k(x, k)$ аналитична в области $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна в области $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Повторяя этот процесс, мы убеждаемся в том, что в предположении $S_j(\infty) < \infty$, $j = 0, \ldots, r$, r-я производная функции ψ существует и непрерывна для вещественных значений k. Если предположить, что $S_j(\infty) < \infty$ для всех j, то можно заключить, что функция ψ вещественно-аналитическая по k. Из доказательства существования функции ψ следует также, что если функции Q и R имеют компактный носитель, то ψ оказывается аналитической во всей комплексной k-плоскости. Аналогичные результаты легко получаются для других решений Йоста.

Теорема 6.1. *В предположении, что $S_0(\infty) < \infty$, изоспектральное операторное уравнение $\mathbf{L}y = ky$ имеет единственные решения, называемые решениями Йоста, которые удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:*

$$\psi(x, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} - \int_x^\infty \mathbf{M}(x, y, k)\psi(y, k)\,dy,$$

$$\varphi(x, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \mathbf{M}(x, y, k)\varphi(y, k)\,dy,$$

$$\bar{\psi}(x, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} - \int_x^\infty \mathbf{M}(x, y, k)\bar{\psi}(y, k)\,dy,$$

$$\bar{\varphi}(x, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + \int_{-\infty}^x \mathbf{M}(x, y, k)\bar{\varphi}(y, k)\,dy,$$

где

$$\mathbf{M}(x, y, k) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik(x-y)}Q(y) \\ e^{ik(x-y)}R(y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ решения $\varphi(x, k)$, $\psi(x, k)$ непрерывны по k в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ и аналитичны по k в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$. Если $S_1(\infty) < \infty$, то $\varphi_k(x, k)$ и $\psi_k(x, k)$ аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывны в замкнутой полуплоскости. Аналогичными свойствами обладают функции

$\bar{\varphi}(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$, $\bar{\varphi}_k(x, k)$ и $\bar{\psi}_k(x, k)$ в $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. Эти решения имеют равномерные асимптотические оценки вида

$$\psi(x, k) = e^{ikx}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + o(1)\right), \quad \bar{\psi}(x, k) = e^{-ikx}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + o(1)\right), \quad \bar{\varphi}(x, k) = e^{ikx}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + o(1)\right), \quad x \to -\infty.$$

Следствие 6.1.1. *Для всех $x \in \mathbb{R}$ и любого k, такого что $\operatorname{Im} k > 0$, существует положительное число C, обеспечивающее справедливость неравенств*

$$|\varphi(x, k)| \leqslant C \exp(\eta x), \quad |\psi(x, k)| \leqslant C \exp(-\eta x).$$

Следствие 6.1.2. *Если Q и R имеют компактный носитель, то решения Йоста аналитичны во всей комплексной плоскости k.*

В этом случае из уравнения (6.1.13) можно вывести следующее соотношение для вронскиана:

$$W({}_{k_1}U, {}_{k_2}V)(x_0) - W({}_{k_1}U, {}_{k_2}V)(x) =$$

$$= i(k_2 - k_1)\int_x^{x_0} (u_1(y, k_1)v_2(y, k_2) + u_2(y, k_1)v_1(y, k_2))\,dy. \quad (6.1.30)$$

Это соотношение показывает, в частности, что вронскианы решений Йоста, вычисленные при *одном и том же* значении k, *не зависят* от x. По аналогии с разд. 3.3 мы можем ввести в рассмотрение функции рассеяния a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ с помощью следующих вронскианов:

$$W(\varphi, \psi) \equiv a, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad W(\bar{\psi}, \varphi) \equiv b, \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad (6.1.31)$$

$$W(\bar{\psi}, \bar{\varphi}) \equiv \bar{a}, \quad \operatorname{Im} k \leqslant 0, \quad W(\bar{\varphi}, \psi) \equiv \bar{b}, \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad (6.1.32)$$

$$W(\psi, \bar{\psi}) \equiv -1, \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad W(\varphi, \bar{\varphi}) \equiv 1, \quad \operatorname{Im} k = 0. \quad (6.1.33)$$

Вронскианы в (6.1.33) вычисляются по асимптотическому поведению решений Йоста при $|x| \to \infty$. При выполнении условий теоремы 6.1 функции рассеяния определены не во всей комплексной плоскости: их область определения указана в правой части формул (6.1.31)—(6.1.33). При фиксированном k любая пара решений Йоста, определенных для этого значения k, может быть выбрана в качестве базиса в пространстве решений уравнения (6.1.13), если вронскиан этой пары отличен от нуля. Из (6.1.31)—(6.1.33) непосредственно следует, что

$$\varphi(x, k) = a(k)\bar{\psi}(x, k) + b(k)\psi(x, k),$$
$$\bar{\varphi}(x, k) = \bar{a}(k)\psi(x, k) + \bar{b}(k)\bar{\psi}(x, k). \quad (6.1.34)$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение фундаментальные матричные решения $\Phi = (\varphi, \bar{\varphi})$, $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$, столбцы которых являются решениями Йоста. В таком случае формулы (6.1.34) могут быть переписаны следующим образом:

$$\Phi(x, k) = \Psi(x, k) A(k), \tag{6.1.35}$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} b(k) & \bar{a}(k) \\ a(k) & \bar{b}(k) \end{pmatrix}.$$

Справедливо соотношение

$$W({}_k\varphi, {}_k\psi) W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\bar{\psi}) - W({}_k\varphi, {}_k\bar{\psi}) W({}_k\bar{\varphi}, {}_k\psi) = \\ = W({}_k\varphi, {}_k\bar{\varphi}) W({}_k\psi, {}_k\bar{\psi}), \tag{6.1.36}$$

из которого с помощью формул (6.1.31)—(6.1.36) можно вывести, что

$$a(k)\,\bar{a}(k) - b(k)\,\bar{b}(k) = 1. \tag{6.1.37}$$

Свойства функций рассеяния легко получить из их интегральных представлений. К ним можно прийти, пользуясь асимптотическими разложениями решений Йоста φ и $\bar{\varphi}$ при $x \to \infty$, применяя (6.1.34) и интегральные представления, фигурирующие в теореме 6.1. Таким образом получаются формулы

$$a(k) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} Q(y)\, e^{iky} \varphi_2(y, k)\, dy, \tag{6.1.38}$$

$$b(k) = \int_{-\infty}^{\infty} R(y)\, e^{-iky} \varphi_1(y, k)\, dy, \tag{6.1.39}$$

$$\bar{a}(k) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} R(y)\, e^{-iky} \bar{\varphi}_1(y, k)\, dy, \tag{6.1.40}$$

$$\bar{b}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(y)\, e^{iky} \bar{\varphi}_2(y, k)\, dy, \tag{6.1.41}$$

из которых следует, что функции рассеяния определены единственным образом и непрерывны при $\operatorname{Im} k = 0$. Функции a, $\bar{a}$ допускают однозначное аналитическое продолжение на полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Im} k < 0$ соответственно. В общей ситуации функции b, $\bar{b}$ не определены для комплексных значений k, если только коэффициенты Q и R не имеют компактных носителей или не подчиняются некоторым более строгим ограничениям, нежели тем, что даются теоремой 6.1. Однако функции b и $\bar{b}$ *определены* в нулях a, $\bar{a}$ соответственно, ибо в этом случае интегралы в (6.1.39) или в (6.1.41) сходятся. Формулы (6.1.31)—(6.1.33) показывают

что эти случаи соответствуют либо линейной зависимости φ и ψ (в нулях a), либо линейной зависимости $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ (в нулях $\bar{a}$). Считая, что k_j, $\bar{k}_j$ суть нули функций a, $\bar{a}$ соответственно, мы имеем

$$\varphi_j = b_j \psi_j, \quad \bar{\varphi}_j = \bar{b}_j \bar{\psi}_j, \tag{6.1.42}$$

где $V_j \equiv {}_{k_j}V$ и b_j, $\bar{b}_j$ суть значения функций b, $\bar{b}$, определенные формулами (6.1.39), (6.1.41) в точках k_j, $\bar{k}_j$ соответственно.

Теорема 6.1 и асимптотическое поведение решений Йоста при $|x| \to \infty$ показывают, что если $\operatorname{Im} k_j > 0$ или $\operatorname{Im} \bar{k}_j < 0$, то (6.1.42) определяют собственные функции оператора $\mathbf{L}$. В случае, когда $\operatorname{Im} k_j = 0$ или $\operatorname{Im} \bar{k}_j = 0$, соотношения (6.1.42) не могут дать настоящих собственных функций оператора $\mathbf{L}$. В этом случае $\{k_j, \bar{k}_j\}$ называются *точками сингулярного спектра* оператора $\mathbf{L}$.

Другое отличие от оператора Шрёдингера состоит в том, что оператор $\mathbf{L}$ может иметь кратные собственные значения. Однако прежде чем выяснять, как скажется это обстоятельство на спектральном разложении элемента $V \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$, займемся вопросом о числе собственных значений. Для этого мы получим асимптотические разложения функций a, $\bar{a}$ при $|k| \to \infty$. Для полноты мы рассмотрим свойства решений Йоста при больших k и изучим также поведение других функций рассеяния при $|k| \to \infty$. Эти результаты легко следуют из интегральных представлений теоремы 6.1 и соотношений (6.1.38)—(6.1.41).

Лемма 6.2. *Пусть $S_0(\infty) < \infty$, функции Q и R дифференцируемы в своих областях определения и Q_x, $R_x \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда при $|k| \to \infty$ для решений Йоста справедливы следующие равномерные асимптотические разложения:*

$$\varphi e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{x} R(y) Q(y)\, dy \\ R(x) \end{pmatrix} + o(|k|^{-1}),$$

$$\psi e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} Q(x) \\ -\int_{x}^{\infty} R(y) Q(y)\, dy \end{pmatrix} + o(|k|^{-1}),$$

$$\bar{\varphi} e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} Q(x) \\ \int_{-\infty}^{x} R(y) Q(y)\, dy \end{pmatrix} + o(|k|^{-1}),$$

$$\bar{\psi} e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} \int_{x}^{\infty} R(y) Q(y)\, dy \\ -R(x) \end{pmatrix} + o(|k|^{-1}).$$

Лемма 6.3. *В условиях теоремы* 6.1 *функции рассеяния* $a(k)$, $\bar{a}(k)$, $b(k)$, $\bar{b}(k)$ *существуют, однозначно определены и непрерывны в областях* $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Im} k = 0$ *соответственно. Функции* $a(k)$, $\bar{a}(k)$ *аналитичны в полуплоскостях* $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Im} k < 0$ *соответственно. Нули* k_0 *функций* a *или* $\bar{a}$ *являются либо собственными значениями* ($\operatorname{Im} k_0 > 0$ *или* $\operatorname{Im} k_0 < 0$), *либо точками сингулярного спектра* ($\operatorname{Im} k_0 = 0$) *оператора* $\mathbf{L}$. *Если коэффициенты* Q *и* R *дифференцируемы и* Q_x, $R_x \in L^1(\mathbb{R})$, *то функции рассеяния имеют асимптотические представления следующего вида:*

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} R(y) Q(y)\, dy + o(|k|^{-1}),$$

$$\bar{a}(k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} R(y) Q(y)\, dy + o(|k|^{-1}),$$

$$b(k) = o(|k|^{-1}), \quad \bar{b}(k) = o(|k|^{-1})$$

при $|k| \to \infty$.

Лемма 6.3 показывает, что функции a, $\bar{a}$ аналитичны и ограничены в верхней (соответственно в нижней) полуплоскостях комплексной k-плоскости. Поэтому множество нулей этих функций в верхней (соответственно нижней) полуплоскостях ограничено, не более чем счетно и может иметь предельные точки только на вещественной оси.

Определим теперь резольвенту ${}_k\mathbf{R}$ оператора $\mathbf{L}$ для описания непрерывного спектра оператора $\mathbf{L}$, а также для того, чтобы получить разложение единицы в терминах главных функций, ассоциированных с оператором $\mathbf{L}$. Резольвента оператора $\mathbf{L}$ — оператор ${}_k\mathbf{R} = (\mathbf{L} - k\mathbf{I})^{-1}$; он определяется соотношением

$${}_k\mathbf{R}V = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y, k) V(y)\, dy, \quad V \in L^2_{(2)}(\mathbb{R}), \tag{6.1.43}$$

где ядро резольвенты или функции Грина $R(x, y, k)$ удовлетворяет условиям

$$(\mathbf{L} - k\mathbf{I}) R(x, y, k) = \delta(x - y)\mathbf{I}, \tag{6.1.44}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} R(x, y, k) = 0, \quad \lim_{|y| \to \infty} R(x, y, k) = 0. \tag{6.1.45}$$

Ясно, что рассматривая $R(x, y, k)$ как функцию от x при фиксированных y и k ($\operatorname{Im} k > 0$), мы получаем

$$R(x, y, k) = {}_k\varphi(x)\, {}_kU^T(y) + {}_k\psi(x)\, {}_kV^T(y), \tag{6.1.46}$$

где T — операция транспонирования. Объединяя условия (6.1.45) с транспонированными к ним, получим, что

$$R(x, y, k) = \begin{cases} {}_k\psi(x)\,{}_k\varphi^T(y)\,{}_k\mathbf{M}, & x > y, \\ {}_k\varphi(x)\,{}_k\psi^T(y)\,{}_k\mathbf{M}, & x < y, \end{cases} \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{6.1.47}$$

Матрица ${}_k\mathbf{M}$ определяется условием скачка

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(x, y, k)\Big|_{x=y-\varepsilon}^{x=y+\varepsilon} = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1.48}$$

из которого после применения соотношения (6.1.31) для вронскиана следует, что

$${}_k\mathbf{M} = \frac{i}{a(k)}\sigma_1, \quad \text{где} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ввести определение

$$V^A \equiv V^T \sigma_1 = (v_2, v_1) \tag{6.1.49}$$

и повторить приведенные выше выкладки для случая $\operatorname{Im} k < 0$, то мы окончательно получим формулы

$$R(x, y, k) = \begin{cases} \dfrac{i}{a(k)}\psi(x, k)\varphi^A(y, k), & x > y, \\ \dfrac{i}{a(k)}\varphi(x, k)\psi^A(y, k), & x < y, \end{cases} \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{-i}{\bar{a}(k)}\bar{\psi}(x, k)\bar{\varphi}^A(y, k), & x > y, \\ \dfrac{i}{\bar{a}(k)}\bar{\varphi}(x, k)\bar{\psi}^A(y, k), & x < y. \end{cases} \quad \operatorname{Im} k < 0, \tag{6.1.50}$$

Таким образом, резольвентный оператор определен для значений k, не принадлежащих спектру оператора $\mathbf{L}$. Множество таких регулярных точек называется *резольвентным множеством* ($R_{\mathbf{L}}$) оператора $\mathbf{L}$. Множество нерегулярных точек, не являющихся собственными значениями, образует так называемый непрерывный спектр оператора $\mathbf{L}$. Мы сейчас покажем, что непрерывный спектр оператора $\mathbf{L}$ состоит из точек вещественной оси $\operatorname{Im} k = 0$. Сначала докажем лемму.

Лемма 6.4. *Для каждого* $\eta = \operatorname{Im} k > 0$ *равенства*

$$\mathbf{A}_0 V(x) = \exp(\eta x) \int_x^\infty \exp(-\eta y) V(y)\, dy,$$

$$\mathbf{B}_0 V(x) = \exp(-\eta x) \int_{-\infty}^x \exp(\eta y) V(y)\, dy$$

определяют в $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ *линейные непрерывные операторы, такие что*

$$\|\mathbf{A}_0\| \leqslant \frac{1}{|\eta|}, \quad \|\mathbf{B}_0\| \leqslant \frac{1}{|\eta|}.$$

Нормы операторов, определяемые соотношениями

$$\mathbf{C}_0 V(x) = \exp(-\eta x) \int_x^\infty \exp(\eta y) V(y)\, dy,$$

$$\mathbf{D}_0 V(x) = \exp(\eta x) \int_{-\infty}^x \exp(-\eta y) V(y)\, dy,$$

$\eta < 0$, *удовлетворяют тем же условиям.*

Доказательство. Пусть $V \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Положим $U = \mathbf{A}_0 V$. Имеем цепочку соотношений:

$$|U(x)| \leqslant \exp(\eta x) \int_x^\infty |\exp(-\eta y) V(y)|\, dy =$$

$$= \exp(\eta x) \int_x^\infty \begin{pmatrix} \exp(-\eta y) \\ \exp(-\eta y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |v_1(y)| \\ |v_2(y)| \end{pmatrix} dy \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\eta x) \left[\left\{ \int_{\frac{3x}{4}}^\infty \exp(-2\eta y)\, dy \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\frac{3x}{4}}^\infty |V(y)|_E^2\, dy \right\}^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \left| \int_x^{\frac{3x}{4}} \exp(-2\eta y)\, dy \right| \right\}^{1/2} \left\{ \left| \int_x^{\frac{3x}{4}} |V(y)|_E^2\, dy \right| \right\}^{1/2} \right] =$$

$$= 2\exp(\eta x) \left\{ \frac{\exp -(3\eta x/2)}{2\eta} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\frac{3x}{4}}^\infty |V(y)|_E^2\, dy \right\}^{1/2} +$$

$$+ 2 \left\{ \left| \frac{1 - \exp(\eta x/2)}{2\eta} \right| \right\}^{1/2} \left\{ \left| \int_x^{\frac{3x}{4}} |V(y)|_E^2\, dy \right| \right\}^{1/2},$$

где $|V(y)|_E^2 = |v_1(y)|^2 + |v_2(y)|^2$. Поэтому для $U(x)$ справедливо граничное условие $U(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $dU(x)/dx = \eta U(x) - V(x)$, то

$$\frac{d}{dx} |U(x)|_E^2 = \eta |U(x)|_E^2 - U^\dagger_{(x)} V_{(x)} - V^\dagger_{(x)} U_{(x)},$$

где $V^+ = (V^T)^*$. Из неравенства Коши—Буняковского следует, что $\|\mathbf{A}_0 V\| \leqslant 1/|\eta|\,(\|V\|)$. Поскольку $\|\mathbf{A}_0 V\| = \sup\limits_{\|V\|=1} \|\mathbf{A}_0 V\|$, то получается, что $\|A_0\| \leqslant 1/\eta$. Аналогичным образом получаются оценки для $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{D}_0$.

Теорема 6.5. *В условиях теоремы* 6.1 *резольвентный оператор* ${}_k\mathbf{R} = (\mathbf{L} - k\mathbf{I})^{-1}$ *является интегральным оператором вида*

$$ {}_k\mathbf{R}V(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x, y, k) V(y)\, dy $$

с ядром, определенным в (6.1.50). *Существует число* $C > 0$, *такое что*

$$ \|{}_k\mathbf{R}\| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{|a(k)|\,|\eta|}, & \operatorname{Im} k > 0, \\ \dfrac{C}{|\bar{a}(k)|\,|\eta|}, & \operatorname{Im} k < 0, \end{cases} $$

и для каждого $r > 0$ *существует число* $c_r > 0$, *такое что*

$$ \|{}_k\mathbf{R}\| \geqslant \begin{cases} \dfrac{c_r}{|a(k)|\,|\eta|^{1/2}}, & \operatorname{Im} k > 0, \\ \dfrac{c_r}{|\bar{a}(k)|\,|\eta|^{1/2}}, & \operatorname{Im} k < 0 \end{cases} $$

для всех k *из замкнутых областей* $\operatorname{Im} k \lesseqgtr 0$, $|k| \geqslant r$.

Доказательство. Пусть $V \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Представим ${}_k\mathbf{R}$ в виде

$$ {}_k\mathbf{R}V = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D})\, V, $$

где

$$ \mathbf{A}V = \int\limits_{x}^{\infty} \mathbf{R}(x, y, k) V(y)\, dy, \quad \operatorname{Im} k > 0, $$

$$ \mathbf{B}V = \int\limits_{-\infty}^{x} \mathbf{R}(x, y, k) V(y)\, dy, \quad \operatorname{Im} k > 0, $$

с аналогично определенными $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k < 0$. Применяя следствие 6.1.1, получим

$$ |\mathbf{A}V(x)| \leqslant \left|\frac{\varphi(x, k)}{a(k)}\right| \left| \int\limits_{x}^{\infty} \psi^A(y, k) V(y)\, dy \right| \leqslant $$

$$ \leqslant \left|\frac{\varphi(x, k)}{a(k)}\right| \int\limits_{x}^{\infty} |\psi^A(y, k)|\,|V(y)|\, dy \leqslant $$

$$\leqslant \frac{C}{|a(k)|} e^{\eta x} \int_x^\infty e^{-\eta y} |V(y)|\, dy =$$

$$= \frac{C}{|a(k)|} e^{\eta x} \int_x^\infty \begin{pmatrix} e^{-\eta y} \\ e^{-\eta y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(y)| \\ |v_2(y)| \end{pmatrix} dy.$$

Применяя затем лемму 6.4 и полагая $\overline{V} = (|v_1|, |v_2|)^T$, получим

$$|\mathbf{A}V(x)| \leqslant \frac{C}{|a(k)|} \mathbf{A}_0(\overline{V}(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|a(k)|} |\mathbf{A}_0(\overline{V}(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|a(k)|} \|\mathbf{A}_0\| \|V\|.$$

Таким образом,

$$\|A\| \leqslant \frac{C}{|a(k)|\,|\eta|}.$$

Для доказательства утверждения во второй части теоремы рассмотрим функцию

$$F_b(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}(x, k^*), & b < x < \infty, \\ 0, & -\infty < x < b, \end{cases} \quad \operatorname{Im} k > 0.$$

Ясно, что $F_b \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ и что в силу (6.1.50) справедливо соотношение

$${}_k\mathbf{R}F_b(x) = \frac{i}{a(k)} \varphi(x, k) \|F_b\|^2 \text{ для } -\infty < x < b.$$

Поэтому

$$\|{}_k\mathbf{R}F_b\|^2 \geqslant \int_{-\infty}^b |{}_k\mathbf{R}F_b(x, b)|_{\mathrm{E}}^2\, dx = \frac{\|F_b\|^4}{|a|^2} \int_{-\infty}^b |\varphi|_{\mathrm{E}}^2\, dx.$$

Выберем теперь b настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi|_{\mathrm{E}} > (1/2) \exp \eta x.$$

Имеем тогда

$$\int_{-\infty}^b |\varphi|_{\mathrm{E}}^2 \geqslant \frac{1}{8\eta} e^{2\eta b}$$

и

$$\|{}_k\mathbf{R}F_b\| \geqslant \frac{\|F_b\|^2 e^{2\eta b}}{|a(k)|\, 2\, (2\eta)^{1/2}}.$$

Окончательно получается, что $\| F_b \|^2 = \int_{-a}^{b} |\varphi|_E^2 dx \leqslant c_r$ для $|k| \leqslant r$, и теорема доказана.

Следствие 6.5.1. *Резольвентное множество* R_L *состоит из всех тех* k, *для которых* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ *или* $\operatorname{Im} k < 0$ *и* $a(k) \neq 0$, $\bar{a}(k) \neq 0$.

Следствие 6.5.2. *Сингулярный спектр принадлежит непрерывному спектру оператора* $\mathbf{L}$, *который совпадает с вещественной осью* $\operatorname{Im} k = 0$.

Следствие 6.5.1 немедленно следует из условий, которым подчинена функция R. Следствие 6.5.2 вытекает из того факта, что $\| {}_k\mathbf{R} \| \to \infty$ при $k \to k_0$ и $\operatorname{Im} k_0 = 0$.

Прежде чем перейти к рассмотрению вопроса о спектральных разложениях, мы наложим более строгие ограничения на потенциальные функции Q и R, что позволит нам изучить поведение резольвенты в окрестности точек сингулярного спектра.

Теорема 6.6. *Если функции* Q *и* R *удовлетворяют условиям*

$$|Q(x)| \leqslant C \exp(-2\varepsilon|x|),$$

$$|R(x)| \leqslant C_\varepsilon \exp(-2\varepsilon|x|),$$

то решения Йоста φ, $\bar{\varphi}$ *являются аналитическими функциями переменной* k *для* $\operatorname{Im} k > -\varepsilon$, *а функции* φ, $\bar{\varphi}$ *суть аналитические функции от* k *в области* $\operatorname{Im} k < \varepsilon$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1. Отсюда немедленно получаем

Следствие 6.6.1. *Функции рассеяния* a, $\bar{a}$ *аналитичны в областях* $\operatorname{Im} k > -\varepsilon$, $\operatorname{Im} k < \varepsilon$ *соответственно. Функции* b, $\bar{b}$ *аналитичны в полосе* $-\varepsilon < \operatorname{Im} k < \varepsilon$.

В оставшейся части этого раздела будем предполагать, что условия теоремы 6.6 выполнены. В силу следствия 6.6.1 и леммы 6.3 множества нулей функций a и $\bar{a}$ конечны. Пусть M, N — число вещественных (соответственно комплексных) нулей функции a. Через $\bar{M}$, $\bar{N}$ обозначим аналогичные числа для функции $\bar{a}$. Кратность m_j ($\bar{m}_j$) нуля k_j функции a ($\bar{k}_j$ для функции $\bar{a}$) называется *кратностью сингулярного значения* оператора $\mathbf{L}$.

В этом месте следует ввести операторы преобразования, ассоциированные с решениями Йоста задачи рассеяния (6.1.13). Это позволит нам довольно просто изучить производные по k от этих решений.

Теорема 6.7. *В условиях теоремы* 6.1 *операторы преобразования для задачи рассеяния* (6.1.13) *имеют треугольные представления вида*

$$\tilde{\Psi}(x, k) = \tilde{\Psi}_\infty(x, k) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, y)\,\tilde{\Psi}_\infty(y, x)\,dy,$$

$$\Phi(x, k) = \Phi_{-\infty}(x, k) + \int_{-\infty}^x \mathbf{K}_-(x, y)\,\Phi_{-\infty}(y, k)\,dy,$$

где

$$\tilde{\Psi} = (\bar{\psi}, \psi), \quad \mathbf{K}_+ = (\bar{K}_+, K_+), \quad \mathbf{K}_- = (K_-, \bar{K}_-),$$
$$\tilde{\Psi}_\infty = \Phi_{-\infty}(k, x) = \operatorname{diag}(e^{-ikx}, e^{ikx}).$$

Если, кроме того, R и Q дифференцируемы, то $\mathbf{K}_+$, $\mathbf{K}_-$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\sigma \mathbf{K}_{\pm x}(x, y) + \mathbf{K}_{\pm y}(x, y)\,\sigma - \sigma \mathbf{P}(x)\,\mathbf{K}_\pm(x, y) = 0,$$
$$\mathbf{K}_\pm(x, x)\,\sigma - \sigma \mathbf{K}_\pm(x, x) \mp \sigma \mathbf{P}(x, x) = 0,$$
$$\lim_{x, y \to \infty} \mathbf{K}_+(x, y) = 0; \qquad \lim_{x, y \to -\infty} \mathbf{K}_-(x, y) = 0,$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}; \quad \pm \sigma \{\mathbf{K}_\pm(x, x)\,\sigma - \sigma \mathbf{K}_\pm(x, x)\} = \mathbf{P}(x).$$

В этом случае функции $\mathbf{K}_\pm$ существуют и единственны. Если коэффициенты Q и R ограничены, то справедливы неравенства

$$|\mathbf{K}_+(x, y)| \leqslant |Q((1/2)(x+y))| +$$
$$+ 1/2 R_M T_Q^+((1/2)(x+y))\,[T_{\bar{Q}}((1/2)(x+y)) + 1] \exp(T_{\bar{Q}}(\infty)\,T_R^+(x)),$$
$$|\mathbf{K}_-(x, y)| \leqslant (1/2)|R((1/2)(x+y))| + (1/2) Q_M T_{\bar{R}}((1/2)(x+y)) \times$$
$$\times [T_R^+((1/2)(x+y)) + 1] \exp(T_R^+(-\infty)\,T_{\bar{Q}}(x)),$$

где

$$T_Q^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |Q(y)|\,dy, \quad T_R^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |R(y)|\,dy$$

и

$$R_M = \sup_{x \in \mathbb{R}} R(x), \quad Q_M = \sup_{x \in \mathbb{R}} Q(x).$$

Оценки для $\overline{\mathbf{K}}_\pm$ получаются заменой $\mathbf{K}_\pm$ на $\overline{\mathbf{K}}_\pm$, Q на R и R на Q.

Доказательство. Доказательство существования и единственности мы проведем только для ядра K_+. Для других ядер доказательства проводятся аналогично. Интегральное представление

для ψ, теорема 6.1 и определение ψ с помощью оператора преобразования, действующего на $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\exp(ikx)$, приводят к следующему соотношению:

$$\int_x^\infty K_+(x,\ y)\,e^{iky}dy = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\int_x^\infty Q(y)\,e^{-ik(x-2y)}dy - \\ -\int_x^\infty\int_y^\infty M(x,\ y,\ k)\,K_+(y,\ u)\,e^{iku}du\,dy. \qquad (6.1.51)$$

Если предположить допустимость перестановки порядка интегрирования в двойном интеграле в правой части равенства (6.1.51), то этот интеграл может быть переписан следующим образом:

$$\int_x^\infty\int_y^\infty \begin{pmatrix}K_{+2}(y,\ u)\,e^{-ik(x-y-u)}Q(y)\\ K_{+1}(y,\ u)\,e^{ik(x-y+u)}R(y)\end{pmatrix}du\,dy = \\ = \int_x^\infty e^{iky}dy\begin{Bmatrix}\int_x^{(1/2)(x+y)} Q(s)\,K_{+2}(s,\ y+x-s)\,ds\\ \int_x^\infty R(s)\,K_{+1}(s,\ y-x+s)\,ds\end{Bmatrix} \qquad (6.1.52)$$

Пользуясь единственностью представления функции в виде интеграла Фурье, получаем тогда, что

$$K_{+1}(x,\ y) = -(1/2)\,Q\left\{\frac{1}{2}(x+y)\right\} - \\ -\int_x^{(x+y)/2} Q(s)\,K_{+2}(s,\ y+x-s)\,ds, \qquad (6.1.53)$$

$$K_{+2}(x,\ y) = -\int_x^\infty K_{+1}(s,\ y-x+s)\,R(s)\,ds.$$

Если предположить, что коэффициенты Q и R ограничены, то факт существования ядра K_+ можно установить, итерируя уравнение (6.1.53). При этом получаются оценки

$$|K_{+1}(x,\ y)| \leqslant (1/2)\,|Q((1/2)(x+y))| + \\ +\frac{1}{2}R_M T_Q^+((1/2)(x+y))\,T_Q^-((1/2)(x+y))\exp(T_Q^-(\infty)\,T_R^+(x)), \qquad (6.1.54)$$

$$|K_{+2}(x,\ y)| \leqslant (1/2)\,R_M T_Q^+((1/2)(x+y))\exp(T_Q^-(\infty)\,T_R^+(x)),$$

откуда и следует утверждение теоремы. Если предположить, что функции Q и R дифференцируемы, то и дифференциальные урав-

нения в частных производных, и граничные условия, о которых шла речь в теореме, получаются непосредственно из (6.1.53). Если записать эти уравнения в характеристических координатах, то с помощью метода Римана можно установить, что существует единственное решение соответствующей задачи Гурса.

Следствие 6.7.1. *Если функции R и Q удовлетворяют условиям теоремы 6.6, то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные C_ε^+ и C_ε^-, такие что*

$$|K_+(x, y)| \leqslant C_\varepsilon^+ \exp(-\varepsilon(x+y)),$$

$$|K_-(x, y)| \leqslant C_\varepsilon^- \exp(\varepsilon(x+y)).$$

Следствие 6.7.2. *Если Q и R дифференцируемы, удовлетворяют условиям теоремы 6.6 и*

$$|R_x(x)| \leqslant C_\varepsilon^1 \exp(-2\varepsilon|x|), \quad |Q_x(x)| \leqslant C_\varepsilon^1 \exp(-2\varepsilon|x|),$$

то

$$|K_{\pm}(x, y)| \leqslant C_\varepsilon^{1\pm} \exp\{\mp\varepsilon(x+y)\}.$$

Доказательство. Дифференцируя по y обе части соотношений (6.1.53), получим систему интегральных уравнений вида

$$K_{+1y}(x, y) = -G[(1/2)(x+y)] - \int_x^{(1/2)(x+y)} Q(s) K_{+2y}(s, y+x-s)\,ds,$$

$$K_{+2y}(x, y) = -\int_x^{\infty} K_{+1y}(s, y-x+s) R(s)\,ds,$$

где

$$G[(1/2)(x+y)] = (1/4)\dot{Q}[(1/2)(x+y)] + (1/4) Q[(1/2)(x+y)] \int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(s) R(s)\,ds.$$

Применяя к последнему равенству оценки для $\dot{Q}$ и $\dot{R}$, получим, что

$$|G[(1/2)(x+y)]| \leqslant \tilde{C}_\varepsilon \exp(-\varepsilon|x+y|),$$

где $\tilde{C}_\varepsilon = \max(C_\varepsilon^1, C_\varepsilon)$. Этот результат легко получается с помощью следствия 6.7.1, если C_ε заменить на $\tilde{C}_\varepsilon$, так как интегральное уравнение для K_{+y} имеет тот же самый вид, что и уравнение для K_+. Оценка для K_{+x} следует из оценок для $K_+(x, y)$ и $K_{+y}(x, y)$ и системы интегральных уравнений

$$K_{+2x}(x, y) = \int_x^{\infty} K_{+1y}(s, y-x+s) R(s)\,ds + K_{+1}(x, y) R(x),$$

$$K_{+1x}(x, y) = -\frac{1}{4} Q[(1/2)(x+y)] + Q(x) K_{+2}(x, y) -$$

$$-(1/4)\,Q[(1/2)(x+y)]\int\limits_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(s)\,R(s)\,ds - \\ -\int\limits_{x}^{(1/2)(x+y)} Q(s)\,K_{+2y}(s,\ y+x-s)\,ds.$$

Аналогично получаются оценки для производных функций $\mathbf{K}_{\pm}$ более высоких порядков.

Заметим, что с помощью оценок в следствии 6.7.1 и операторов преобразования можно немедленно установить аналитичность решений Йоста в полуплоскостях, где $|\operatorname{Im} k| > \varepsilon$. Этот же факт был получен в теореме 6.6 непосредственно. Однако мы имеем возможность применить теорему 6.7 для изучения свойств функций

$$J^{(0,\ r)}_{(x,\ k_0)} \equiv \frac{\partial}{\partial k^r} J(x,\ y)\,|_{k=k_0}, \quad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

где J — решение Йоста, а $k = k_0$ — сингулярное значение оператора $\mathbf{L}$ кратности m (вещественное или комплексное). Функции $J^{(0,\ r)}(x,\ k_0)$, $r = 1,\ \ldots,\ m-1$, будем называть *присоединенными* к $J(x,\ k)$ функциями. Существование этих функций немедленно следует из представления решений Йоста операторами преобразования и следствий 6.7.1, 6.7.2. Мы можем ослабить условия на потенциалы, обеспечивающие существование этих функций, требуя, чтобы, как при доказательстве теоремы 6.1, выполнялись условия $\{S_l,\ l = 0,\ \ldots,\ m\} < \infty$.

Собственные функции и присоединенные функции удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{L}J = kJ, \\ \mathbf{L}J^{(0,\ j)} = kJ^{(0,\ j)} + jJ^{(0,\ j-1)}, \quad j = 1,\ \ldots,\ m-1. \tag{6.1.55}$$

Если $J(x,\ k_0)$, $\tilde{J}(x,\ k_0)$ суть пара собственных функций ($\operatorname{Im} k_0 > 0$, $\operatorname{Im} k_0 = 0$ или $\operatorname{Im} k_0 < 0$), то функции J со своими присоединенными функциями также должны удовлетворять соотношениям (6.1.55). Отсюда получается, что существуют комплексные числа d_l^s, такие что

$$\tilde{J}^{(0,\ s)}_{(x,\ k_0)} = \sum_{l=0}^{s} d_l^s J^{(0,\ l)}_{(x,\ k_0)}, \quad s = 0,\ \ldots,\ m-1. \tag{6.1.56}$$

Если рассмотреть аналитическую функцию $d(k)$, определенную в окрестности точки $k = k_0$ и такую, что $d^{s-l}(k_0) = d_l^s (C_l^s)^{-1}$, то соотношение (6.1.56) может быть переписано следующим образом:

$$\tilde{J}^{(0,\ s)}_{(x,\ k)} = \frac{\partial^s}{\partial k^s}(d(k)\,J(x,\ k))\,|_{k=k}. \tag{6.1.57}$$

Свойства собственных и присоединенных функций можно объединить следующей леммой.

Лемма 6.8. *Функции* $\psi^{(0,\,r)}(x,\ k_0)$, $\varphi^{(0,\,r)}(x,\ k_0)$, $\operatorname{Im} k_0 > 0$ *или* $\bar{\psi}^{(0,\,r)}(x,\ k_0)$, $\bar{\varphi}^{(0,\,r)}(x,\ k_0)$, $\operatorname{Im} k_0 \leqslant 0$, *где* $k_0 \in \sigma(\mathrm{L})$ *кратности* m $(r = 0, \ldots, m-1)$, *принадлежат* $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$.

Истинные собственные функции и их присоединенные называются *главными функциями дискретного спектра*. Решения Йоста при вещественных k называются главными функциями *непрерывного спектра*. Нам понадобятся также *главные функции сингулярного спектра*. Это решения Йоста и их производные по k, вычисленные при вещественном нуле функций a или $\tilde{a}$. Следствие 6.7.1 легко позволяет с помощью операторов преобразования установить следующую лемму.

Лемма 6.9. *Главные функции сингулярного спектра удовлетворяют условию*

$$\sup_{x \in R} \frac{\left| J^{(0,\,r)}(x,\ k_0) \right|}{(1+|x|)^r} < \infty,$$

где $J(x,\ k_0)$ *есть решение Йоста и* k_0 $(\operatorname{Im} k_0 = 0)$ — *точка сингулярного спектра* $(r = 0,\ 1, \ldots)$.

Интегральные представления (6.1.38)—(6.1.41) для функций рассеяния позволили нам увидеть, что функции b и $\bar{b}$ существуют в точках дискретного спектра $k_0 \in \sigma(\mathrm{L})$ (случаи $\operatorname{Im} k_0 > 0$, $\operatorname{Im} k_0 < 0$ относятся к функциям b, $\bar{b}$ соответственно). В качестве прямого следствия леммы 6.8 получается распространение этого факта на производные по k функций b, $\bar{b}$ вплоть до порядка $m-1$ в том случае, когда кратность собственного значения k_0 равна m. Отсюда следует, что в соотношения типа (6.1.57) вместо функций d можно формально подставить функции b $(\bar{b})$, поскольку в них фигурируют значения функций и их производных по k лишь в точках дискретного спектра.

Определение.

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s}\left(b(k) f(k)\right)\Big|_{k=k_0} \equiv \sum_{l=0}^{s} C_s^l b^{(s-l)}\left(k_0 f^{(l)}(k_0)\right),$$

где f — аналитическая функция, $k \in \sigma(\mathrm{L})$, $\operatorname{Im} k_0 > 0$ и k_0 имеет кратность $m \geqslant s+1$.

Аналогичное определение может быть дано, когда b заменяется на $\bar{b}$. Мы будем широко пользоваться этими определениями на протяжении оставшейся части этой главы. Следует заметить, что это определение работает лишь в рамках теоремы 6.7. Если условия этой теоремы ослабить, то может оказаться, что производные функций b или $\bar{b}$ не существуют. Так, если выполнено условие

$\{S_i,\ i = 0, \ldots, n\} < \infty$, то производные функции b существуют, вообще говоря, лишь до порядка n. В этом случае, если $k \in \sigma$ (L) имеет кратность $m > n$, последние $m - n$ членов в формуле (6.1.56) не могут быть выражены в терминах продолжений функции b и ее производных.

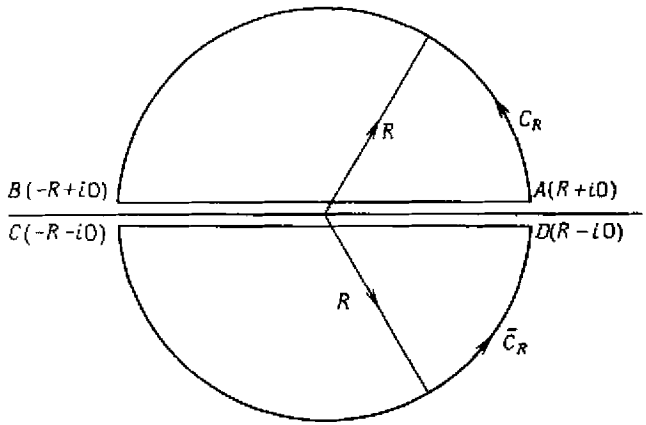


Рис. 6.1. Контур Γ_R.

Сейчас мы запишем разложение ядра резольвентного оператора с помощью главных функций и выведем отсюда формулу разложения единицы. Рассмотрим интеграл

$$I_R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{R(x, y, k)}{(k - z)}\, dk, \tag{6.1.58}$$

где Γ_R — контур, изображенный на рис. 6.1, и $z \in R_L$. Контур состоит из объединения дуги C_R и отрезка $[B, A]$ с дугой $\bar{C}_R$ и отрезком $[D, C]$. Радиус R выбирается настолько большим, чтобы все собственные значения оператора L и число z находились внутри Γ_R.

В силу теоремы Коши, имеем

$$I_R(x, y, z) = R(x, y, z) + \\ + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}_{k=k_j}\left\{\frac{R(x, y, k)}{(k - z)}\right\} + \sum_{j=1}^{\bar{N}} \mathrm{Res}_{k=\bar{k}_j}\left\{\frac{R(x, y, k)}{(k - z)}\right\}, \tag{6.1.59}$$

где $z \in R_L$. Введем в рассмотрение функции

$$p_j(k) = -\frac{i(k - k_j)^{m_j} b(k)}{(m_j - 1)!\, a(k)}, \quad j = 1, \ldots, N, \\ \bar{p}_j(k) = \frac{i(k - \bar{k}_j)^{\bar{m}_j} \bar{b}(k)}{(\bar{m}_j - 1)!\, \bar{a}(k)}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{6.1.60}$$

с помощью которых перепишем (6.1.59) в виде

$$I_R(x, y, z) = R(x, y, z) - \sum_{j=1}^{N} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_j-1} \frac{p_j(k)\,\psi(x, k)\,\psi^A(y, k)}{(k-z)} \right\}_{k=k_j} - \sum_{j=1}^{\bar{N}} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{\bar{m}_j-1} \frac{\bar{p}_j(k)\,\bar{\psi}(x, k)\,\bar{\psi}^A(y, k)}{(k-z)} \right\}_{k=\bar{k}_j}. \tag{6.1.61}$$

Рассмотрим теперь разрез, идущий вдоль вещественной k-оси, и будем считать точку сингулярного спектра k_j принадлежащей

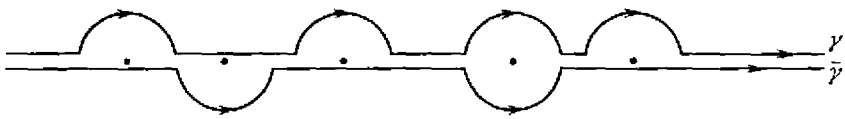


Рис. 6.2. Контуры γ, $\bar{\gamma}$ и $\Gamma = \gamma + \bar{\gamma}$.

верхней или нижней стороне разреза в зависимости от того, выполняется ли равенство $a(k_j) = 0$ или равенство $\bar{a}(k_j) = 0$. Заметим, что мы не исключаем случая, когда одновременно $a(k_j) = \bar{a}(k_j) = 0$. В этом случае мы будем считать, что точка k_j принадлежит как верхней, так и нижней сторонам разреза. Вокруг каждого k_j на верхней (нижней) стороне разреза опишем полуокружность, расположенную в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ ($\operatorname{Im} k \leqslant 0$), радиуса ($\delta$), выбранного таким образом, чтобы такие полуокружности взаимно не пересекались и чтобы $\delta < \varepsilon_0$, где по определению

$$\varepsilon_0 = \min\{|\operatorname{Im} k_0|,\ \varepsilon:\ k_0 \in \sigma(\mathbf{L})\}.$$

Определим контур γ ($\bar{\gamma}$) на верхнем (нижнем) краю разреза как множество, получаемое из вещественной оси после замены горизонтальных диаметров построенных кругов дугами полуокружностей в верхней (нижней) полуплоскости переменной k (см. рис. 6.2).

Применяя леммы 6.2, 6.3 и формулу (6.1.50), получим оценку

$$|R(x, y, k)| \leqslant C + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{при } |k| \to \infty. \tag{6.1.62}$$

Поэтому при $R \to \infty$ получаем следующее предельное соотношение:

$$I_\infty(x, y, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(x, y, k)}{(k-z)}\, dk - \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} \frac{R(x, y, k)}{(k-z)}\, dk. \tag{6.1.63}$$

Объединяя (6.1.61) и (6.1.63), получаем следующее интегральное уравнение для резольвенты:

$$R(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{R(x, y, k)}{(k-z)}\,dk - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{\gamma}} \frac{R(x, y, k)}{(k-z)}\,dk + \\ + \sum_{j=1}^{N}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{m_j-1} \frac{p_j(k)\,\psi(x, k)\,\psi^A(y, k)}{(k-z)}\right\}_{k=k_j} + \\ + \sum_{j=1}^{\overline{N}}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{\bar{m}_j-1} \frac{\bar{p}_j(k)\,\bar{\psi}(x, k)\,\bar{\psi}^A(y, k)}{(k-z)}\right\}_{k=\bar{k}_j}. \tag{6.1.64}$$

Разумеется, было бы удобно расположить контур интегрирования в (6.1.64) вдоль вещественной оси. Однако в этом случае интегралы будут расходящимися. Чтобы обойти это обстоятельство, надлежит провести следующую регуляризацию. Рассмотрим функции

$$f_{tj}(k) = \begin{cases} \dfrac{(k-k_t)^j}{j!} & |k-k_t|<\delta, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \\ 0 & |k-k_t|>\delta \text{ или } \operatorname{Im} k < 0, \end{cases} \\ \bar{f}_{tj}(k) = \begin{cases} \dfrac{(k-\bar{k}_t)^j}{j!} & |k-\bar{k}_t|<\delta \qquad \operatorname{Im} k \leqslant 0, \\ 0 & |k-\bar{k}_t|>\delta \text{ или } \operatorname{Im} k > 0, \end{cases} \tag{6.1.65}$$

где δ — радиус полуокружностей, входящих в контур Г. Ясно, что функция

$$f(g(k)) = g(k) - \sum_{t=N+1}^{M+N}\sum_{j=0}^{m_t-1} f_{tj}(k)\,g^{(j)}(k_j) - \\ - \sum_{t=\overline{N}+1}^{\overline{M}+\overline{N}}\sum_{j=0}^{\bar{m}_t-1} \bar{f}_{tj}(k)\,g^{(j)}(\bar{k}_t), \tag{6.1.66}$$

где $g(k)$ достаточно гладкая, имеет в каждой точке $k = k_t$ $(\bar{k}_t)$ нуль кратности m_t $(\bar{m}_t)$, поскольку например,

$$\left(\frac{d}{dk}\right)^j (f(g(k)))_{k=k_t} = g^j(k)|_{k=k_t} - g^j(k_t) = 0, \\ j = 0, 1, \ldots, m_t - 1. \tag{6.1.67}$$

Если воспользоваться (6.1.34), то в силу независимости интеграла (от аналитической функции) от контура интегрирования

мы можем переписать интеграл по контуру γ в (6.1.64) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{R(x,\ y,\ k)}{(k-z)}\,dk=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\left\{\frac{b(k)}{a(k)}f_1[\psi(x,\ k)\psi^A(y,\ k)/(k-z)]+\right.$$

$$\left.+(k-z)^{-1}[\psi(x,\ k)\bar{\psi}^A(y,\ k)h(x-y)+\bar{\psi}(x,\ k)\psi^A(y,\ k)h(y-x)]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=N+1}^{M+N}\sum_{j=0}^{m_i-1}\int\limits_{\gamma}\frac{b(k)\,dk}{a(k)}f_{ij}(k)\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^j\frac{\psi(x,\ k)\psi^A(y,\ k)}{(k-z)}\Bigg|_{k=k_i}\right\}, \tag{6.1.68}$$

где $f_1(g(k))\equiv f(g(k))$ при $\operatorname{Im}k>0$, $f_2(g(k))\equiv f(g(k))$ при $\operatorname{Im}k<0$
и

$$h(x)=\frac{(1/2)(x+|x|)}{|x|},\quad x\neq 0. \tag{6.1.69}$$

Повторяя такие же выкладки для интеграла вдоль контура $\bar{\gamma}$, получим окончательную формулу

$$R(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\left\{\frac{b}{a}(k)f_1\left(\frac{\psi(x,\ k)\psi^A(y,\ k)}{(k-z)}\right)+\right.$$

$$+\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)f_2\left(\frac{\bar{\psi}(x,\ k)\bar{\psi}^A(y,\ k)}{(k-z)}\right)+[\bar{\psi}(x,\ k)\psi^A(y,\ k)+$$

$$\left.+\psi(x,\ k)\bar{\psi}^A(y,\ k)](k-z)^{-1}\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{M+N}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1}\frac{p_i(k)\psi(x,\ k)\psi^A(y,\ k)}{(k-z)}\right\}_{k=k_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\bar{M}+\bar{N}}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{\bar{m}_i-1}\frac{\bar{p}_i(k)\bar{\psi}(x,\ k)\bar{\psi}^A(y,\ k)}{(k-z)}\right\}_{k=\bar{k}_i}, \tag{6.1.70}$$

где функции p_i, $\bar{p}_j$ для $i=M+1,\ \ldots,\ M+N$, $j=\bar{N}+1,\ \ldots,\ \bar{M}+\bar{N}$ определены равенствами

$$p_i^{(m_i-1-l)}(k_i)=\frac{1}{2\pi}\frac{j!\,(m_i-1-j)!}{(m_i-1)!}\int\limits_{\gamma}\frac{b(k)}{a(k)}f_{ij}(k)\,dk,$$

$$\bar{p}_i^{(\bar{m}_i-1-l)}(k_i)=\frac{1}{2\pi}\frac{j!\,(\bar{m}_i-1-j)!}{(\bar{m}_i-1)!}\int\limits_{\bar{\gamma}}\frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)}\bar{f}_{ij}(k)\,dk. \tag{6.1.71}$$

Функции f_{ij}, $\bar{f}_{ij}$ из последних двух формул можно заменить любыми другими, важно лишь, чтобы сохранялось их поведение

в окрестности точек сингулярного спектра. Примененный здесь метод регуляризации расходящихся интегралов представляет собой приспособление для этого случая метода Лянце [1965] для несамосопряженного оператора Шрёдингера. Формально разложение единицы можно получить из формулы (6.1.70), оперируя с $(\mathbf{L} - z\overline{\mathbf{L}})$:

$$\delta(x-y)I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{b}{a}(k) f_1(\psi(x,k)\psi^A(y,k)) + \right.$$

$$+ \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k) f_2(\bar{\psi}(x,k)\bar{\psi}^A(y,k)) + \bar{\psi}(x,k)\psi^A(y,k) +$$

$$\left. + \psi(x,k)\bar{\psi}^A(x,k)\right) + \sum_{i=1}^{M+N}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1} p_i(k)\psi(x,k)\psi^A(y,k)\right\}_{k=k_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\overline{M}+\overline{N}}\left\{\left(\frac{d}{dk}\right)^{\bar{m}_i-1}\bar{p}_i(k)\bar{\psi}(x,k)\bar{\psi}^A(y,k)\right\}_{k=\bar{k}_i}. \qquad (6.1.72)$$

Перейдем теперь к вопросу описания класса функций, допускающих разложение в соответствии с формулой (6.1.72). Обозначим через $H^m(\mathbb{R})$ гильбертово пространство функций F на $\mathbb{R}$ со значениями в C^2 и нормой, определенной равенством

$$\|F\|_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{2m}|F(x)|_E^2\,dx, \qquad (6.1.73)$$

так что, в частности, $H^0(\mathbb{R}) \equiv L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Определим затем

$$m_0 = \max\{m_{N+1}, \ldots, m_{M+N}, \bar{m}_{\overline{N}+1}, \ldots, \bar{m}_{\overline{M}+\overline{N}}\} \qquad (6.1.74)$$

и положим $H_+ = H^{m_0+1}(\mathbb{R})$, $H_- = H^{-(m_0+1)}(\mathbb{R})$. Тогда справедливы включения $H_+ \subset L^2_{(2)}(\mathbb{R}) \subset H_-$, и для функции $F \in H_+$ выполняется следующее соотношение между нормами:

$$\|F\|_+ \geqslant \|F\| \geqslant \|F\|_-. \qquad (6.1.75)$$

Из леммы 6.9 следует, что главные функции для точек сингулярного спектра принадлежат пространству H_-. $\mathbf{L}$-преобразование Фурье функции $F \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$, определенное равенством

$$J^m(F,k) = \int_{-\infty}^{\infty} J^{(0,m)}_{(x,k)}{}^A(x,k)F(x)\,dx \equiv (J^{(0,m)}, F), \quad \operatorname{Im} k \neq 0, \qquad (6.1.76)$$

где J — решение Йоста, существует для $k \in \sigma(L)$ и $m = 0, \ldots, m_k - 1$, где m — кратность точки спектра k. Если функция $F \in H_+$, то мы имеем также неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_0+l} J(F, k) \right|_E^2 dk \leqslant C_{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{2m_0+2} |F(x)|_E^2 \, dx, \quad \operatorname{Im} k = 0. \quad (6.1.77)$$

Из него следует, что если $F \in H_+$, то **L**-преобразование Фурье существует и справедлива формула обращения

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{b}{a}(k) f_1(\psi(x, k)\psi(F, k)) + \right.$$
$$+ \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k) f_2(\bar{\psi}(x, k)\bar{\psi}(F, k)) + \bar{\psi}(x, k)\psi(F, k) +$$
$$\left. + \psi(x, k)\bar{\psi}(F, k) \right] + \sum_{i=1}^{M+N} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{m_i-1} p_i(k)\psi(x, k)\psi(F, k) \right\}_{k=k_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\overline{M}+\overline{N}} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{\bar{m}_i-1} \bar{p}_i(k)\bar{\psi}(x, k)\bar{\psi}(F, k) \right\}_{k=\bar{k}_i}, \quad (6.1.78)$$

причем интеграл сходится по норме пространства H_-. Выражение $(d/dk)^{m_i-1}$ в этой формуле следует понимать чисто символически, поскольку $(d/dk)^{m_i-1} J(F, k)$ расходится всюду, кроме точки $k = k_i$. Мы введем следующую интерпретацию.

Определение.

$$\left(\frac{d}{dk}\right)^m J(F, k) \equiv J^m(F, k). \quad (6.1.79)$$

Можно показать, что для каждой функции $F \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ существуют функционалы $p_{ij}(F)$, $\bar{p}_{ij}(F)$ на $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$, такие что

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{b}{a} f_1(\psi(x, k))\psi(F, k) + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} f_2(\bar{\psi}(x, k))\bar{\psi}(F, k) + \right.$$
$$\left. + \bar{\psi}(x, k)\psi(F, k) + \psi(x, k)\bar{\psi}(F, k) \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{M+N} \int_{j=0}^{m_i-1} p_{ij}(F)\psi^{(0, j)}(x, k_i) + \sum_{i=1}^{\overline{M}+\overline{N}} \sum_{j=0}^{\bar{m}_i-1} \bar{p}_{ij}(F)\bar{\psi}^{(0j)}(x, \bar{k}_i), \quad (6.1.80)$$

где интеграл сходится в $H_{-m_0}(\mathbb{R})$.

Сравнение формул (6.1.78) и (6.1.80) показывает, что функционалы $p_{ij}(F)$, $\bar{p}_{lj}(F)$ $(i = 1, \ldots, N;\ l = 1, \ldots, \bar{N})$ могут быть в явном виде выражены через функционалы $\psi_j(F, k_i)$, $\bar{\psi}_j(F, k)$. Из асимптотических свойств функций $\psi_j(x, k_i)$, $\bar{\psi}_j(x, k_l)$ при $x \to \infty$, где $i = N+1, \ldots, M+N$, $l = \bar{N}+1, \ldots, \bar{M}+\bar{N}$, следует, что они линейно независимы по модулю $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$. Требование принадлежности правой части равенства (6.1.80) пространству $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ однозначно определяет числа $p_{ij}(F)$, $\bar{p}_{ls}(F)$, $i = N+1, \ldots, M+N$, $l = \bar{N}+1, \ldots, \bar{M}+\bar{N}$, $j = 0, \ldots, m-1$ и $s = 0, \ldots, \bar{m}_l - 1$.

Этим результатам можно придать более простую форму, если рассмотреть подкласс функций из пространства $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$, для которых справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\psi(F, k)}{a(k)} \right|_E^2 dk < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\bar{\psi}(F, k)}{\bar{a}(k)} \right|_E^2 dk < \infty. \quad (6.1.81)$$

С другой стороны, мы можем подчинить функции Q и R таким условиям, которые обеспечивали бы отсутствие точек сингулярного спектра. Разумеется, главная трудность заключается в том, что неизвестны общие ограничения на потенциалы Q и R, которые привели бы к такому результату. В более простом случае, когда спектр оператора L состоит из простых собственных значений, разложение единицы может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta(x-y)\, I = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}_{-\infty}}^{\infty} dk \Big\{ & \frac{b}{a}(k)\, \psi(x, k)\, \psi^A(y, k) + \\ & + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\, \bar{\psi}(x, k)\, \bar{\psi}^A(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\, \psi^A(y, k) + \\ & + \psi(x, k)\, \bar{\psi}^A(y, k) \Big\} + \\ & + \sum_{j=1}^{M} p_j \psi(x, k_j)\, \psi^A(y, k_j) + \sum_{j=1}^{M} \bar{p}_j \bar{\psi}(x, k_j)\, \bar{\psi}^A(y, k_j),\end{aligned} \quad (6.1.82)$$

где

$$p_j = -\frac{ib(k_j)}{a_k(k_j)}, \quad \bar{p} = \frac{i\bar{b}(k_j)}{\bar{a}_k(k_j)}.$$

Если мы распространим определение билинейной формы $(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty} U^A(x)\, V(x)\, dx$, введенное в (6.1.76), на обобщенные функции, то, применяя соотношение

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{e^{\pm ikx}}{ik}\right) = \pm\pi\delta(k),$$

мы сможем вычислить все скалярные произведения для главных функций с помощью (6.1.30).

Для собственных функций мы будем иметь

$$\begin{aligned}
&({}_{k_1}\varphi,\ {}_{k_2}\varphi) = 2\pi a(k_1)\, b(k_1)\, \delta(k_1 - k_2),\\
&({}_{k_1}\psi,\ {}_{k_2}\varphi) = 2\pi a(k_1)\, \delta(k_1 - k_2),\\
&({}_{k_1}\bar{\psi},\ {}_{k_2}\varphi) = 0,\\
&({}_{k_1}\varphi,\ {}_{k_2}\bar{\varphi}) = 2\pi a(k_1)\, \bar{a}(k_1)\, \delta(k_1 - k_2),\\
&({}_{k_1}\psi,\ {}_{k_2}\psi) = -2\pi a(k_1)\, b(k_1)\, \delta(k_1 - k_2),\\
&({}_{k_1}\psi,\ {}_{k_2}\bar{\psi}) = 2\pi a(k_1)\, \bar{a}(k_1)\, \delta(k_1 - k_2).
\end{aligned} \tag{6.1.83}$$

В равенствах (6.1.83) $\operatorname{Im} k_1 = \operatorname{Im} k_2 = 0$. Остальные ненулевые скалярные произведения получаются из (6.1.83) с помощью симметрии или операции «$\bar{}$», определенной формулами $(\bar{f}) = \bar{f}$, $\overline{(\bar{f})} = f$. Все другие возможные ненулевые скалярные произведения порождаются собственными функциями:

$$\begin{aligned}
&({}_{k_j}\psi,\ {}_{k_l}\varphi) = i\delta_{jl} a_k(k_j),\\
&({}_{\bar{k}_j}\bar{\psi},\ {}_{\bar{k}_l}\bar{\varphi}) = -i\delta_{jl}\bar{a}_k(\bar{k}_l), \quad k_j,\ k_l,\ \bar{k}_j,\ \bar{k}_l \in \sigma(L).
\end{aligned} \tag{6.1.84}$$

Для вычисления скалярных произведений присоединенных функций воспользуемся следующей формулой:

$$\begin{aligned}
&(U^m(k_1),\ V^{(r)}(k_2)) =\\
&\quad = \frac{r(U^{(m)}(k_1),\ V^{(r-1)}(k_2)) - m(U^{(m-1)}(k_1),\ V^{(r)}(k_2))}{(k_1 - k_2)} -\\
&\qquad - \left[\frac{W(U^{(m)}(k_1),\ V^{(r)}(k_2))}{i(k_1 - k_2)}\right]_{-\infty}^{\infty}.
\end{aligned} \tag{6.1.85}$$

Однако так определенная билинейная форма, вообще говоря, имеет особенности, кроме случая, когда у оператора L есть лишь простые собственные значения. Из теоремы 6.6 следует, что в случае, когда потенциалы Q, R имеют компактные носители, *функции рассеяния* a, b, $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *аналитичны во всей комплексной плоскости* k. Из (6.1.82) следует (может быть, это легче усмотреть из (6.1.72)),

что разложение единицы можно записать в следующем сжатом виде:

$$\delta(x-y)\,I = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C} dk\left\{\frac{b}{a}(k)\,\psi(x,\,k)\,\psi^{A}(y,\,k) + \right.$$
$$\left. + \bar{\psi}(x,k)\,\psi^{A}(y,k)\right\} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bar{C}} dk\left\{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\bar{\psi}(x,k)\bar{\psi}^{A}(y,k) + \right.$$
$$\left. + \psi(x,\,k)\,\bar{\psi}^{A}(y,\,k)\right\}, \qquad (6.1.86)$$

где C и $\bar{C}$ суть предельные положения контуров C_R, $\bar{C}_R$ при $R \to \infty$. Формулу (6.1.72) можно получить для случая некомпактных носителей деформированием контуров C, $\bar{C}$ в вещественную ось, если при этом интерпретировать $b(k)$, $\bar{b}(k)$ для комплексных значений k, $\bar{k}$ так, как мы уже это делали ранее в этом разделе. Таким образом, формула (6.1.86) представляет собой весьма удобную форму записи разложения единицы. Мы будем часто применять ее в следующем разделе.

До сих пор мы не рассматривали вырождения, которое может возникнуть из-за наличия связей между двумя рассеивающими потенциалами. Некоторые возможности такого типа приводятся в следующей лемме, которая может быть выведена из рассмотрения (6.1.13) и определяющих соотношений для функций рассеяния (6.1.31)—(6.1.33).

Лемма 6.10. (i) *Если* $R = \alpha Q$, α *— комплексное число, то* $\overline{M} = M$, $\overline{N} = N$ *и* $\bar{\psi}(x,\,k) = \mathbf{E}\psi(x,\,-k)$, $\bar{\varphi}(x,\,k) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}\varphi(x,\,-k)$, $\bar{a}(k) = a(-k)$, $\bar{b}(k) = \frac{1}{\alpha}b(-k)$, *где* $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$.

При этом собственные значения и точки сингулярного спектра в полуплоскостях $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ *связаны соотношениями* $k_j = -k_j$.

(ii) *Если* $R = \alpha Q^*$, α *— вещественное число, то* $\overline{M} = M$, $\overline{N} = N$ *и* $\Psi(x,\,k) = \mathbf{E}\psi^*(x,\,k^*)$, $\bar{\varphi}(x,\,k) = (1/\alpha)\,\mathbf{E}\varphi^*(x,\,k^*)$, $\bar{a}(k) = a^*(k^*)$, $\bar{b}(k) = (1/\alpha)\,b^*(k^*)$. *Собственные значения и точки сингулярного спектра связаны соотношениями* $k_j = k_j^*$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$.

(iii) *Если* $R = \alpha Q = \alpha Q^*$, α *— вещественное число, то* $\overline{M} = M$, $\overline{N} = N$ *и множества точек сингулярного спектра и собственных значений распадаются на множества* $\{\pm k_j,\ \mp k_j^*\}$, $j = 1, \ldots, p$, $\{\pm i\eta_j\}$, $j = 1, \ldots, q$, *где* $N = 2p + q$, *и* $\{k_j, -k_j\}$, $j = 1, \ldots, M/2$ *соответственно.*

(iv) *В частности, если* $R = Q^*$, *то оператор* $\mathbf{L}$ *самосопряженный, и дискретный спектр отсутствует.*

Для рассмотренного здесь несамосопряженного изоспектрального оператора можно точно так же, как в случае изоспектрального оператора, определенного для уравнения Шрёдингера, ввести понятия, аналогичные понятиям *спектрального семейства* и *спектральной функции*. Соответствующие обобщения называются *обобщенной спектральной мерой* и *обобщенной спектральной функцией*. Последнее чрезвычайно важно теоретически, так как позволяет прийти к *равенству Парсеваля* — основному факту в спектральной теории, записанному для несамосопряженного случая. Такое обобщение было получено Марченко [1960] и Фояшем [1960]. Восстановление потенциалов Q и R по обобщенной спектральной функции аналогично рассмотренному в гл. 3 и 4 самосопряженному случаю. Некоторые упражнения в конце этой главы устанавливают такую связь в самосопряженном случае. Мы начнем сейчас с определения данных рассеяния для этой задачи. Так же как и в самосопряженном случае, они определяются асимптотическими свойствами главных функций на бесконечности. А именно, данные рассеяния $S_{\pm}$ определяются как множества

$$S_+ = \left\{ R_+ = \frac{b}{a}, \quad \overline{R}_+ = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}, \quad k_j, \quad P_{+j}(x), \ \bar{k}_l, \ P_{+l}(x), \right.$$

$$\left. j = 1, \ldots, N, \quad l = 1, \ldots, \overline{N} \right\},$$

$$P_{+j}(x) = -ie^{-ik_j x} \operatorname{Res}_{k=k_j} \left\{ \frac{b(k)}{a(k)} e^{ikx} \right\},$$

$$P_{+l}(x) = ie^{i\bar{k}_l x} \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_l} \left\{ \frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)} e^{-ikx} \right\}, \tag{6.1.87}$$

$$S_- = \left\{ R_- = \frac{\bar{b}}{a}, \quad \overline{R}_- = \frac{b}{\bar{a}}, \quad k_j, \ P_{-j}(x), \ \bar{k}_l, \ \overline{P}_{-l}(x), \right.$$

$$\left. j = 1, \ldots, N, \ l = 1, \ldots, \overline{N} \right\},$$

$$P_{-j}(x) = -ie^{-ik_j x} \operatorname{Res}_{k=k_j} \left\{ \frac{1}{b(k)\, a(k)} e^{ikx} \right\},$$

$$\overline{P}_{-l}(x) = ie^{-i\bar{k}_l x} \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_l} \left\{ \frac{1}{\bar{b}(k)\, \bar{a}(k)} e^{-ikx} \right\}. \tag{6.1.88}$$

Множество S_- соответствует использованию решений Йоста φ и $\bar{\varphi}$ для определения обобщенной спектральной меры. Функции $P_{\pm j}(x)$ и $\overline{P}_{\pm j}(x)$ называются *нормировочными многочленами*. В случае одних лишь простых нулей они сводятся к нормировочным постоянным для собственных функций.

Восстановление коэффициентов a и $\bar{a}$ по $S_{\pm}$ будет надлежащим образом рассмотрено в следующем разделе, где эти коэффициенты определены по начальным данным. Однако интересно коснуться

этого вопроса и в настоящем контексте, ибо в случае, когда a и $\bar{a}$ однозначно определяются множествами $S_{\pm}$, как будет показано ниже, существует связь между нулями функций a и $\bar{a}$. Определим функции

$$f(k) = a(k) \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{k - \overline{K}_j}{k - k_j} \right)^{m_j}, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \tag{6.1.89}$$

$$\bar{f}(k) = \bar{a}(k) \prod_{j=1}^{\overline{N}} \left(\frac{k - K_j}{k - \bar{k}_j} \right)^{\bar{m}_j}, \quad \operatorname{Im} k < 0, \tag{6.1.90}$$

где $\{k_j, \bar{k}_l, j = 1, \ldots, N, l = 1, \ldots, \overline{N}\}$ суть множества дискретных собственных значений оператора $\mathbf{L}$ с кратностями m_j и $\bar{m}_l$. Числа $\{\overline{K}_j, K_l, \operatorname{Im} K_l > 0, \operatorname{Im} \overline{K}_j < 0, j = 1, \ldots, N, l = 1, \ldots, \overline{N}\}$ выбраны таким образом, чтобы множества $\{\overline{K}_j\}$, $\{K_l\}$ были отличны от множеств $\{\bar{k}_l\}$, $\{k_j\}$ соответственно. Нули a и $\bar{a}$ изолированы и, следовательно, функции f и $\bar{f}$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости k. Кроме того, для функций f, $\bar{f}$ имеют место следующие асимптотические формулы, справедливые при $|k| \to \infty$ (лемма 6.3): $f(k) = 1 + O(1/|k|)$, $\bar{f}(k) = 1 + O(1/|k|)$. Согласно теореме Коши, получаем равенства

$$\begin{aligned} \ln f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln f(z)}{(z-k)} dz, \quad \operatorname{Im} k > 0, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} \frac{\ln \bar{f}(z)}{(z-k)} dz, \quad \operatorname{Im} k > 0. \end{aligned} \tag{6.1.91}$$

Предполагается, что в этих формулах выбрано главное значение ln. Условия $\ln \bar{f}(z) \to 0$, $\ln f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, z вещественное, накладывают некоторые ограничения на поведение функций $\ln a(z)$, $\ln \bar{a}(z)$ при вещественном z, которые мы сейчас укажем. Выбирая ветви функций

$$h(z) = \sum_{j=1}^{N} \ln \left[\frac{z - \overline{K}_j}{z - k_j} \right]^{m_j}, \quad \bar{h}(z) = \sum_{j=1}^{\overline{N}} \ln \left[\frac{z - K_j}{z - \bar{k}_j} \right]^{\bar{m}_j}, \quad \operatorname{Im} z = 0 \tag{6.1.92}$$

так, чтобы выполнялись соотношения $h(z) \to 0$, $\bar{h}(z) \to 0$ при $z \to +\infty$, найдем, что

$$h(z) \to 2\pi i H, \quad \bar{h}(z) \to -2\pi i \overline{H} \text{ при } z \to -\infty, \ \operatorname{Im} z = 0, \tag{6.1.93}$$

где $H = \sum_{j=1}^{N} m_j$, $\overline{H} = \sum_{j=1}^{\overline{N}} \bar{m}_j$.

Поэтому при вещественных z функции $\ln a(z)$ и $\ln \bar{a}(z)$ должны обладать следующими асимптотиками:

$$\ln a(z) \to 0, \quad \ln \bar{a}(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$
$$\ln a(z) \to -2\pi i H, \quad \ln \bar{a}(z) \to 2\pi i \overline{H} \quad \text{при} \quad z \to -\infty. \tag{6.1.94}$$

Применяя (6.1.91), мы получим тогда формулу

$$a(k) = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{k-k_j}{k-\overline{K}_j}\right)^{m_j} \exp \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-k)} (\ln a(z) + h(z)) + \right.$$
$$\left. + \int_{\bar{\gamma}} \frac{dz}{(z-k)} (\ln \bar{a}(z) + \bar{h}(z)) \right\}, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{6.1.95}$$

Для восстановления функции a по данным рассеяния $S_{\pm}$ требуется так деформировать контур интегрирования, чтобы он проходил по вещественной оси. Определим функции

$$g_j(z) = \ln (z-k_j)^{m_j} \quad \text{при} \quad |z-k_j| < \delta,$$
$$0 \quad \text{при} \quad |z-k_j| > \delta, \quad j = N+1, \ldots, M+N,$$
$$\bar{g}_j(z) = \ln (z-\bar{k}_j)^{m_j} \quad \text{при} \quad |z-\bar{k}_j| < \delta,$$
$$0 \quad \text{при} \quad |z-\bar{k}_j| > \delta, \quad j = \overline{N}+1, \ldots, \overline{M}+\overline{N},$$

и перепишем равенство (6.1.95) следующим образом:

$$a(k) = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{k-k_j}{k-\overline{K}_j}\right)^{m_j} \exp \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-k)} (\ln (a(z)\,\bar{a}(z)) + h(z) + \right.$$
$$\left. + \bar{h}(z) - l(z) - \bar{l}(z)) + \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-k)} l(z) + \int_{\bar{\gamma}} \frac{dz}{(z-k)} \bar{l}(z) \right\}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{6.1.96}$$

где

$$l(z) = \sum_{j=N+1}^{M+N} g_j(z), \quad \bar{l}(z) = \sum_{j=\overline{N}+1}^{\overline{M}+\overline{N}} \bar{g}_j(z).$$

Однако функция a по-прежнему зависит от произвольного набора чисел $(K_j, \overline{K}_j)$. Внимательное рассмотрение формулы (6.1.96) показывает, что если $\overline{N} = N$ и $\overline{m}_j = m_j$, то интегральная формула Коши дает требуемое представление:

$$a(k) = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{k-k_j}{k-\bar{k}_j}\right)^{m_j} \exp \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-k)} (\ln (a(z)\,\bar{a}(z)) - \right.$$
$$\left. - l(z) - \bar{l}(z)) + \int_{\bar{\gamma}} \frac{dz\, l(z)}{(z-k)} + \int_{\gamma} \frac{dz\, \bar{l}(z)}{(z-k)} \right\}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{6.1.97}$$

где $a(z) \equiv (1 - R_+(z)\,\overline{R}_+(z)) \equiv (1 - \overline{R}_-(z)\,R_-(z))^{-1}$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Теорема 6.11. *Функции рассеяния* $a(k)$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $\bar{a}(k)$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, *однозначно определены и могут быть построены в явном виде по данным рассеяния* $S_{\pm}$ *в том и только в том случае, когда* $\overline{N} = N$ *и* $\overline{m_j} = m_j$. *Если эти условия выполнены, то справедливы соотношения*

$$\operatorname{Ind} a + \sum_{j=1}^{N} m_j = 0, \quad \operatorname{Ind} \bar{a} - \sum_{j=1}^{N} m_j = 0,$$

где через $\operatorname{Ind} a$ ($\operatorname{Ind} \bar{a}$) *обозначается разделенное на* 2π *приращение непрерывной ветви* $\arg a(k)$ ($\arg \bar{a}(k)$), *получающееся при движении* k *от* ∞ *к* $-\infty$ *по любой кривой* γ ($\bar{\gamma}$), *такой что комплексные нули* $a(k)$ ($\bar{a}(k)$) *остаются выше* γ (*ниже* $\bar{\gamma}$), *а вещественные нули — ниже* γ (*выше* $\bar{\gamma}$).

Точно так же, как в разд. 3.5 для изоспектрального уравнения Шрёдингера, здесь будет определен класс интегрируемых уравнений. Уравнение (6.1.13) может быть переписано в виде

$$\Phi_x = \mathbf{P}\Phi, \quad \operatorname{Im} k = 0, \tag{6.1.98}$$

где Φ — фундаментальное матричное решение

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

а

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -ik & Q \\ R & ik \end{pmatrix}.$$

Применим сейчас к обеим частям равенства (6.1.98) операцию Δ-варьирования. Получим соотношение

$$\Phi^{-1}\,\Delta\Phi\,\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-1}\,\Delta\mathbf{P}\Phi\,dx. \tag{6.1.99}$$

Так как фундаментальные матричные решения Φ, Ψ связаны между собой матрицей-функцией рассеяния $\mathbf{A}$ (см. (6.1.35)), то уравнение (6.1.99) устанавливает связь между Δ-вариацией функций рассеяния и Δ-вариацией рассеивающих потенциалов. Соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} &\Delta a = -I_{\Delta}(\varphi, \psi), \quad &&\Delta b = I_{\Delta}(\varphi, \bar{\psi}), \\ &\Delta \bar{a} = I_{\Delta}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \quad &&\Delta \bar{b} = -I_{\Delta}(\bar{\varphi}, \psi), \end{aligned} \tag{6.1.100}$$

где

$$I_{\Delta}(V, Y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta R v_1 y_1 - \Delta Q v_2 y_2)\,dx.$$

Представления (6.1.100) были получены при условии, что k вещественно и не является точкой сингулярного спектра оператора $\mathbf{L}$, а также что $\Delta Q \to 0$ «достаточно быстро» при $|x| \to \infty$.

Большой класс интегрируемых уравнений можно получить, если потребовать, чтобы функции рассеяния R_+, $\overline{R}_+$ (или R_-, $\overline{R}_-$) удовлетворяли линейным уравнениям. Из (6.1.100) мы выводим, что

$$\Delta R_+ = \frac{1}{a^2} I_\Delta(\varphi, \varphi), \quad \Delta \overline{R}_+ = -\frac{1}{\bar{a}^2} I_\Delta(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}). \tag{6.1.101}$$

Поэтому, налагая условия

$$\Omega R_+ = \frac{1}{a^2} I_\Delta(\varphi, \varphi), \quad \overline{\Omega R}_+ = -\frac{1}{\bar{a}^2} I_\Delta(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}), \tag{6.1.102}$$

где Ω, $\overline{\Omega}$ — известные функции k, находим, что R_+, $\overline{R}_-$ удовлетворяют линейным уравнениям

$$\Delta R_+ = \Omega R_+, \quad \Delta \overline{R}_+ = \overline{\Omega}\overline{R}_+. \tag{6.1.103}$$

Таким образом, как и в случае изоспектрального оператора Шрёдингера, рассмотренный нами класс интегрируемых уравнений может быть получен из ограничений (6.1.102).

Для простоты ограничимся случаем, когда Δ — оператор полного дифференцирования по времени, а функции Ω, $\overline{\Omega}$ зависят только от k. Пусть ${}_kV$, ${}_kY$ — пара решений уравнения (6.1.13). Непосредственно получаются соотношения

$$(v_2y_2)_x - R(y_1v_2 + v_1y_2) = 2iky_2v_2, \tag{6.1.104}$$

$$(v_1y_1)_x - Q(y_1v_2 + v_1y_2) = -2iky_1v_1, \tag{6.1.105}$$

$$(y_1v_2 + v_1y_2)(x) = (y_1v_2 + v_1y_2)(-\infty) + 2\int_{-\infty}^{x} (R(s)v_1(s)y_1(s) + Q(s)v_2(s)y_2(s))\,ds, \tag{6.1.106}$$

из которых можно вывести формулу

$$\mathbf{L}_1 V \circ Y(x) = kV \circ Y(x) - \frac{1}{2}(\sigma_2 U(x))(V^T\sigma_1 Y)(-\infty), \tag{6.1.107}$$

где

$$\mathbf{L}_1 \equiv \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} + 2Q\int_{-\infty}^{x} dsR & 2Q\int_{-\infty}^{x} dsQ \\ -2R\int_{-\infty}^{x} dsR & \frac{\partial}{\partial x} - 2R\int_{-\infty}^{x} dsQ \end{pmatrix}$$

и

$$V \circ Y \equiv \begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, обозначая $V^{(2)} \equiv V \circ V$ и применяя (6.1.107) и (6.1.106), получаем в пределе $x \to +\infty$ следующие соотношения:

$$\mathbf{L}_1 {}_k\varphi^{(2)} = k\, {}_k\varphi^{(2)}, \quad ab = \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot {}_k\varphi^{(2)}(x)\, dx = (U,\ {}_k\varphi^{(2)}), \tag{6.1.108}$$

$$\mathbf{L}_1 {}_k\bar{\varphi}^{(2)} = k\, {}_k\bar{\varphi}^{(2)}, \quad \bar{a}\bar{b} = \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot {}_k\bar{\varphi}^{(2)}(x)\, dx = (U,\ {}_k\bar{\varphi}^{(2)}). \tag{6.1.109}$$

Уравнения (6.1.109) вместе с (6.1.101) можно записать в виде

$$(\sigma_3 U_t - \Omega(k)\, U,\ {}_k\varphi^{(2)}) = 0, \quad (\sigma_3 U_t + \overline{\Omega}(k)\, U,\ {}_k\bar{\varphi}^{(2)}) = 0. \tag{6.1.110}$$

Если функции Ω, $\overline{\Omega}$ являются многочленами по k или отношениями двух многочленов $\Omega = C_1/C_2$, $\overline{\Omega} = \overline{C_1}/\overline{C_2}$, то (6.1.108) позволяет переписать (6.1.110) следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\sigma_3 U_t - \Omega(\mathbf{L}_1^A)\, U,\ {}_k\varphi^{(2)}) = 0, \\ &(\sigma_3 U_t + \overline{\Omega}(\mathbf{L}_1^A)\, U,\ {}_k\varphi^{(2)}) = 0, \end{aligned} \tag{6.1.111}$$

где

$$\mathbf{L}_1^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} + 2R \int\limits_x^{\infty} dsQ & -2R \int\limits_x^{\infty} dsR \\ 2Q \int\limits_x^{\infty} dsQ & -\dfrac{\partial}{\partial x} - 2Q \int\limits_x^{\infty} dsR \end{pmatrix}.$$

Если, в частности, $\overline{\Omega} = -\Omega$, то условия (6.1.100) заведомо выполняются при справедливости соотношения

$$C_2(\mathbf{L}_1^A)\, \sigma_3 U_t - C_1(\mathbf{L}_1^A)\, U = 0, \tag{6.1.112}$$

которое дает класс уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, ассоциированный с $\mathbf{L}$. Формально более широкий класс интегрируемых уравнений получается в случае, когда Ω, $\overline{\Omega}$ являются отношениями целых функций от k. Такие случаи уравнения при $\overline{\Omega} \neq -\Omega$ также являются интегрируемыми, и фактически один пример из этого класса физически важен. Мы еще вернемся в настоящем разделе к этому более общему классу и снова будем им заниматься в разд. 6.2.

Сейчас же мы сосредоточимся на классе уравнений, описываемом соотношением (6.1.112), где C_1 и C_2 суть многочлены от k. Вот некоторые частные случаи уравнений, содержащихся в классе (6.1.112).

Примеры, в которых Ω целая функция

(1) $\Omega(k) \equiv \alpha, \quad \sigma_3 U_t - \alpha U = 0$

(2) $\Omega(k) \equiv \alpha k, \ \sigma_3 U_t - \alpha (\mathbf{L}_1^A) U = 0$

$$\begin{pmatrix} R_t \\ -Q_t \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{(2i)} \begin{pmatrix} R_x \\ Q_x \end{pmatrix} = 0$$

(3) $\Omega(k) \equiv \alpha k^2, \ \sigma_3 U_t - \alpha (\mathbf{L}_1^A)^2 U = 0$

$$\begin{pmatrix} R_t \\ -Q_t \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{(2i)^2} \begin{pmatrix} R_{xx} - 2R^2 Q \\ Q_{xx} - 2Q^2 R \end{pmatrix} = 0$$

вырожденный случай: $R = \beta Q^*$, $\alpha = 4i$, $\beta = \pm 1$;
$iQ_t \mp |Q|^2 Q + Q_{xx} = 0$ (нелинейное уравнение Шрёдингера).

(4) $\Omega(k) \equiv \alpha k^3, \ \sigma_3 U_t - \alpha (\mathbf{L}_1^A)^3 U = 0$:

$$\begin{pmatrix} R_t \\ -Q_t \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{(2i)^3} \begin{pmatrix} R_{xxx} - 6RQR_x \\ -Q_{xxx} + 6RQQ_x \end{pmatrix} = 0;$$

вырожденный случай: $R = \beta Q^*$, $\alpha = 8i$, $\beta = \pm 1$;

$Q_t \pm 6|Q|^2 Q_x + Q_{xxx} = 0$ (комплексное модифицированное уравнение КдФ);

вырожденный случай: $R = \beta Q$, $\alpha = 8i$, $\beta = \pm 1$;

$Q_t \pm 6Q^2 Q_x + Q_{xxx} = 0$ (Q вещественное; модифицированное уравнение КдФ).

Примеры, в которых Ω — мероморфная функция

(5) $\Omega(k) \equiv \alpha/k, \quad (\mathbf{L}_1^A)\sigma_3 U_t - \alpha U = 0$

$$\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} R_{tx} + 2R \int_x^\infty (RQ)_t \, ds \\ Q_{tx} + 2Q \int_x^\infty (RQ)_t \, ds \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} = 0;$$

вырожденный случай: $R = \beta Q$, $\alpha = \pm 1/2i$, $\beta = -1$;

$$Q_{tx} - 2Q \int_x^\infty (Q)_t^2 \, ds \mp Q = 0.$$

Класс эквивалентности, определенный Ω, содержит также уравнение sin-Гордон $V_{xt} = \pm \sin V$;

нужно положить $V_x = -2Q$, предполагая, что $4(Q_t)^2 \ll 1$.

(6) $\Omega(k) \equiv -8ik^3 + \frac{i\alpha}{2k}$, $2\left(\mathbf{L}_1^A\right)\sigma_3 U_t + i\left(\alpha - 16\left(\mathbf{L}_1^A\right)^4\right)U = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} R_{xt} + 2R\int\limits_x^\infty (RQ)_t\,ds - \alpha R + R_{4x} - 8RQR_{2x} - 6R_x^2Q - \\ \qquad - 4RR_xQ_x + 6R^3Q^2 - 2R^3Q_{2x} \\ Q_{xt} + 2Q\int\limits_x^\infty (RQ)_t\,ds - \alpha Q + Q_{4x} - 8RQQ_{2x} - 6Q_x^2R - \\ \qquad - 4QR_xQ_x + 6R^2Q^3 - 2Q^2R_{2x} \end{array}\right\} = 0;$$

вырожденный случай: $R = Q\beta$, $\beta = -1$,

$$Q_{xt} - 2Q\int\limits_x^\infty (Q^2)_t\,ds - \alpha Q + Q_{4x} + 10Q^2Q_{2x} + 10QQ_x^2 + 6Q^5 = 0.$$

Класс эквивалентности, определенный Ω, содержит также модифицированное уравнение КдФ и уравнение sin-Гордон

$$Q_t - 6Q^2Q_x - Q_{xxx} + \frac{\alpha}{2}\sin\left(-2\int\limits_x^\infty Q\,ds\right) = 0.$$

Конно и др. [1974] предложили это уравнение как моделирующее влияние слабой дислокации на распространение волн в ангармоническом кристалле.

Функция Ω просто связана с дисперсионными соотношениями линеаризованных интегрируемых уравнений (6.1.112). Мы легко находим, что линеаризованные уравнения имеют вид

$$C_2\left(\frac{1}{2i}\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma_3 U_t - C_1\left(\frac{1}{2i}\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0. \qquad (6.1.113)$$

Полагая

$$U = \left(e^{i(2kx-\bar{\omega}t)},\ e^{i(-2kx-\omega t)}\right)^T, \qquad (6.1.114)$$

получаем, что

$$\Omega(k) = -i\bar{\omega}(2k) = i\omega(-2k). \qquad (6.1.115)$$

Задание линейного дисперсионного соотношения, т. е. в сущности Ω, определяет класс эквивалентности интегрируемых нелинейных уравнений. Элементы этого класса связаны функциями $E(k)$:

$$C_1^1(k) = E(k)\,C_1(k),\ C_2^1(k) = E(k)\,C_2(k), \qquad (6.1.116)$$

где $E(k)$ целая или мероморфная. В частности, выбор $E(k) = C_2^{-1}(k)$ приводит к тому, что уравнения снова принимают вид эволюционных в предположении, что можно придать смысл выражению $C_2^{-1}\left(\mathbf{L}_1^A\right)C_1\left(\mathbf{L}_1^A\right)V$. В самом деле, в приведенных выше примерах вырожденных случаев, т. е. для уравнения sin-Гор-

дон и уравнения, рассмотренного Конно и др. [1974], это можно сделать. Дальнейшее обсуждение этих уравнений в связи с их отношением к задаче Коши будет продолжено в следующем разделе.

В предыдущих рассмотрениях интегрируемых уравнений мы предполагали, что начальные условия, которым подчинены R и Q, таковы, что реконструированные функции удовлетворяют соответствующим уравнениям. Тогда Ω формально определяет класс эквивалентности интегрируемых уравнений. Подходящее условие такого рода приведено в разд. 3.5 и заключается в том, что реконструированные функции Q и R принадлежат общему классу Шварца.

Мы сейчас вернемся к определению эволюции данных рассеяния, уравнению (6.1.112). Техника раздела 3.5 приводит немедленно к следующей теореме.

Теорема 6.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.6. *Тогда данные рассеяния* $S_+(0)$ *однозначно определяются функциями* $R(x, 0)$ *и* $Q(x, 0)$. *Если* $\overline{\Omega} = -\Omega$, *то функция* $S_+(t)$ *формально определяет класс эквивалентности интегрируемых уравнений*

$$C_1 (\mathbf{L}_1^A)_3 U_t + C_2 (\mathbf{L}_1^A) U = 0,$$

где $\Omega = C_1/C_2$. *Каждый элемент этого класса имеет одну и ту же функцию* $S_+(t)$, *определенную следующим образом:*

$$(P_{+j}(x, t) e^{-\Omega_j t})_t = \frac{-ie^{-(ik_j x + \Omega_j t)}}{(m_j - 1)!} \sum_{s=0}^{m_j - 2} \left(\Omega^{(m_j - 1 - s)}(k) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{b}{a}(k, 0)(k - k_j)^{m_j} e^{ikx + \Omega(k) t} \right]^{(s)} \right)_{k = k_j},$$

$$\left(\overline{P}_{+l}(x, t) e^{\overline{\Omega}_l t}\right)_t = \frac{ie^{i\bar{k}_l x + \overline{\Omega}_l t}}{(\bar{m}_l - 1)!} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\bar{m}_l - 2} \left(\Omega^{(\bar{m}_l - 1 - s)}(k) \left[\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k, 0)(k - \bar{k}_l)^{\bar{m}_l} e^{-ikx + \Omega(k) t} \right]^{(s)} \right)_{k = \bar{k}_l},$$

$$R_{+t}(k, t) = \Omega(k) \cdot R_+(k, t),$$

$$\overline{R}_{+t}(k, t) = -\Omega(k) \cdot \overline{R}_+(k, t),$$

$$\sigma(\mathbf{L}(t)) = \sigma(\mathbf{L}(0)).$$

Числа Ω_j, $\overline{\Omega}_l$ определены равенствами $\Omega_j = \Omega(k_j)$, $\overline{\Omega}_l = \Omega(\bar{k}_l)$. При выводе этих уравнений мы допускаем, что Ω может быть сингулярной, однако ее особенности не должны совпадать с $\sigma(\mathbf{L})$ или с точками сингулярного спектра.

Из (6.1.107) легко вывести, что

$$(\mathbf{L}_1)^s \varphi \circ \psi = k^s \varphi \circ \psi - \frac{1}{2i} a(k) \left(\sum_{r=0}^{s-1} (\mathbf{L}_1)^r \right) (\sigma_2 U). \quad (6.1.117)$$

Установленная в упражнениях формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{L}_1^A)^s U \cdot \sigma_2 U \, dx = 0 \quad (6.1.118)$$

позволяет заключить, что

$$a_t = -I_t(\varphi, \psi) = -\int_{-\infty}^{\infty} U \cdot \Omega(\mathbf{L}_1) \varphi \circ \psi \, dx =$$

$$= -\Omega(k) \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot \varphi \circ \psi \, dx = 0. \quad (6.1.119)$$

Последнее равенство устанавливается с помощью (6.1.106). Используя (6.1.97) и определение a через S_+ по формуле (6.1.87), можно было бы дать другой вывод того же результата.

Аналогично

$$\bar{a}_t = 0. \quad (6.1.120)$$

Эволюцию во времени S_- также легко записать в этом случае. Уравнения, определяющие $S_+(t)$ в теореме 6.12, являются точными. Решения оказываются особенно простыми в том случае, когда a и $\bar{a}$ имеют только простые нули. В этом случае суммы в правой части выражений для нормировочных многочленов обращаются в нуль, нормировочные многочлены превращаются в нормировочные «постоянные» и $S_+(t)$ дается равенствами

$$\begin{aligned} P_{+j}(t) &= P_{+j}(0) e^{\Omega_j t}, \\ \overline{P}_{+l}(t) &= \overline{P}_{+l}(0) e^{-\overline{\Omega}_l t}, \\ R_+(k, t) &= R_+(k, 0) e^{\Omega(k) t}, \\ \overline{R}_+(k, t) &= \overline{R}_+(k, 0) e^{-\Omega(k) t}, \\ \sigma(\mathbf{L}(t)) &= \sigma(\mathbf{L}(0)). \end{aligned} \quad (6.1.121)$$

Для изоспектрального оператора Шрёдингера функция рассеяния a играет центральную роль в гамильтоновой структуре этой теории. Она служит порождающей функцией для бесконечного семейства интегралов движения, являющихся гамильтонианами для интегрируемых уравнений.

Как мы видели ранее, в случае, когда $\Omega = -\overline{\Omega}$, выполняются соотношения $a_t = 0$ и $\bar{a}_t = 0$. Сходная интерпретация может быть дана для функций a и $\bar{a}$. Подробное рассмотрение этой ситуации

выведет нас за рамки тематики настоящей книги, но мы все же попытаемся хотя бы формально получить некоторые результаты.

Исходя из определения резольвентного оператора, можно определить регуляризованный след как функционал вида

$$d(k) = \operatorname{tr}((\mathbf{L} - k\mathbf{I})^{-1} - (\mathbf{L}_0 - k\mathbf{I})^{-1}),$$

где $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(Q = 0,\ R = 0)$. Из (6.1.13) получается соотношение

$$-i(\varphi_{2k}\psi_1 - \psi_2\varphi_{1k})_x = \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0, \quad (6.1.122)$$

интегрируя которое мы приходим к формуле

$$(-\ln a)_k = i\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1}{a} - 1\right]dx, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \quad (6.1.123)$$

Поэтому из определения функционала-следа ясно, что

$$d(k) = \begin{cases} (-\ln a)_k, & \operatorname{Im} k > 0, \\ (-\ln \bar{a})_k, & \operatorname{Im} k < 0. \end{cases} \quad (6.1.124)$$

Формула для $(-\ln \bar{a})_k$ получается аналогичным образом, если в правой части равенства (6.1.123) заменить $\varphi \to \bar{\varphi}$, $\psi \to \bar{\psi}$, $a \to \bar{a}$, $i \to -i$. Из (6.1.106) получается, что

$$(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)(x, k) - a(k) = 2\int_{-\infty}^{x} U\cdot(\varphi\circ\psi)\,dy. \quad (6.1.125)$$

С помощью формулы (6.1.123) мы приходим тогда к формальному соотношению

$$(\ln a)_k = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\infty}^{x}(\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})^{-1}\,U\cdot\sigma_2 U\,dy\right)dx, \quad \operatorname{Im} k > 0. \quad (6.1.126)$$

Разлагая в формальный ряд и интегрируя, получим отсюда асимптотическое разложение при $|k| \to \infty$:

$$\ln a(k) \sim \sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j}{k^j} \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \quad (6.1.127)$$

где

$$C_j = \frac{i}{j}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}(\mathbf{L}_1^A)^j\,U\cdot\sigma_2 U\,dy\right). \quad (6.1.128)$$

Отсюда с учетом $(\ln a)_t = 0$ получается, что $\{C_j\}$ есть бесконечное семейство интегралов движения. Непосредственно вычисляя ин-

тегралы (6.1.128), можно указать несколько членов этого семейства:

$$C_1 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} RQ\,dx, \quad C_2 = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (R_xQ - Q_xR)\,dx, \quad (6.1.129)$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (R_{2x}Q + RQ_{2x} - R_xQ_x - 3R^2Q^2)\,dx.$$

Эти же самые законы сохранения можно получить аналогичным разложением $\ln \bar{a}(k)$, $\operatorname{Im} k < 0$ при $|k| \to \infty$. Корректность таких разложений можно проверить прямым асимптотическим разложением выражения (6.1.13) для решений Йоста.

Сейчас мы покажем, что функционалы $\{C_i\}$ (или их линейные комбинации) суть гамильтонианы интегрируемых *эволюционных* уравнений для этой системы (см. разд. 3.5) Соотношения, установленные в (6.1.104)—(6.1.106), приводят к формуле

$$(\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})\,\sigma_2\varphi \circ \psi = -\frac{a}{2}\,U. \quad (6.1.130)$$

Из (6.1.100) и (6.1.106) следует, что

$$\Delta a = -\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_3\,\Delta U \cdot \varphi \circ \psi)\,dx = \frac{a}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_1\,\Delta U \cdot (\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})^{-1}\,U)\,dx. \quad (6.1.131)$$

В разд. 3.5 показано, что Δ разумно интерпретировать как произвольную вариацию функций Q и R. Таким образом, если мы формально разложим (6.1.131) и воспользуемся (6.1.128), то получим

$$\sigma_1 \frac{\Delta C_j}{\Delta U} = \left(\frac{1}{2i}\right)(\mathbf{L}_1^A)^j\,U,$$

где

$$\sigma_1 \frac{\Delta C_j}{\Delta U} \equiv \left(\frac{\Delta C_j}{\Delta Q}, \quad \frac{\Delta C_j}{\Delta R}\right)^T. \quad (6.1.132)$$

Компоненты $\Delta C_j/\Delta U$ суть производные Фреше функционалов C_j по отношению к функциям R и Q соответственно.

Интегрируемые эволюционные уравнения имеют вид

$$\sigma_3 U_t - C\,(\mathbf{L}_1^A)\,U = 0, \quad (6.1.133)$$

где

$$C_1\,(\mathbf{L}_1^A) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,(\mathbf{L}_1^A)^j. \quad (6.1.134)$$

Итак, эволюционные уравнения можно записать следующим образом:

$$\sigma_3 U_t = \sigma_1 \frac{\Delta H}{\Delta U},$$

где

$$H = 2i \sum_{j=0}^{n} a_j C_j, \tag{6.1.135}$$

т. е. как гамильтоновы уравнения с гамильтонианом H. Заметим, что наряду с асимптотическими разложениями функционала-следа для больших k можно также находить его разложения в окрестности любой регулярной точки. Гамильтонианы, полученные этим способом, соответствуют нелинейным эволюционным уравнениям, определяемым сингулярными дисперсионными соотношениями (Ω мероморфна). В этом случае для того, чтобы обеспечить справедливость такой процедуры для вещественных k, следует наложить дополнительные условия на функции рассеяния b, $\bar{b}$. Разложения, которые мы получаем для функционала-следа, выводятся в предположении, что Q и R имеют независимые вариации (не связанные с леммой 6.10). В противном случае требуются дополнительные рассмотрения (см. Флашка и Ньюэлл [1975] и Додд и Буллаф [1979]).

Если $\bar{\Omega} \neq -\Omega$, мы по-прежнему можем найти интегрируемые уравнения, но в этом случае они не представляют собой гамильтонову систему (функционал-след не является интегралом движения). Мы помещаем здесь один пример такого типа, чтобы подчеркнуть, что существуют физически содержательные интегрируемые уравнения, не укладывающиеся в рамки гамильтоновой формулировки. Но перед этим мы изложим метод, позволяющий получать интегрируемые уравнения. По существу этот метод основан на том факте, что мы имеем возможность решать линейные уравнения, управляющие эволюцией во времени данных рассеяния. Опираясь на такую возможность, мы можем затем выяснить, к каким ограничениям на потенциал и квадраты собственных функций это приводит. Начнем с некоторых теоретико-операторных соображений, нужных для вывода интегрируемых уравнений.

Как мы уже видели, $\varphi^{(2)}$ и $\bar{\varphi}^{(2)}$ суть собственные функции оператора $\mathbf{L}_1$, и нетрудно показать, применяя (6.1.104)—(6.1.106), что $\psi^{(2)A} = (\psi_2^2, -\psi_1^2)$, $\bar{\psi}^{(2)A} = (\bar{\psi}_2^2, -\bar{\psi}_1^2)$ являются собственными функциями оператора $\mathbf{L}_1^A$. Если определить билинейную форму для вектора-строки V и вектора-столбца Y равенством

$$(V, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, Y(x)\, dx \tag{6.1.136}$$

и трактовать собственные функции для вещественных значений k как обобщенные функции, то можно будет вычислить скалярные произведения для квадратов собственных функций. В результате

для вещественных k получаются следующие формулы:

$$(_{k_1}\psi^{(2)\,A}, {}_{k_2}\varphi^{(2)}) = \pi a^2(k_1)\,\delta(k_1 - k_2),$$
$$(_{k_1}\bar{\psi}^{(2)\,A}, {}_{k_2}\bar{\varphi}^{(2)}) = -\pi \bar{a}^2(k_1)\,\delta(k_1 - k_2), \qquad (6.1.137)$$
$$(_{k_1}\psi^{(2)\,A}, {}_{k_2}\bar{\varphi}^{(2)}) = 0 = (_{k_1}\bar{\psi}^{(2)\,A}, {}_{k_2}\varphi^{(2)}).$$

Оказывается, что в случае отсутствия сингулярного спектра и соответствующих собственных значений из соотношений (6.1.137) можно вывести соотношение полноты (Кауп [1976]). Начиная с этого места мы будем проводить выкладки формально, предполагая для простоты, что мы имеем дело именно с этим случаем. Итак,

$$\delta(x-y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{1}{a^2(k)}\,{}_k\varphi^{(2)}(x)\,{}_k\psi^{(2)\,A}(y) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\bar{a}^2(k)}\,{}_k\bar{\varphi}^{(2)}(x)\,{}_k\bar{\psi}^{(2)\,A}(y), \quad x \geqslant y. \qquad (6.1.138)$$

Спектральное разложение функции $(\sigma_3 U_t(x))^T$ в таком базисе имеет поэтому следующий вид:

$$(\sigma_3 U_t(x))^T = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{a^2(k)}\,(\sigma_3 U_{t,\,k}\varphi^{(2)})\,{}_k\psi^{(2)\,A}(x) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\bar{a}^2(k)}\,(\sigma_2 U_{t,\,k}\bar{\varphi}^{(2)})\,{}_k\bar{\psi}^{(2)\,A}(x). \qquad (6.1.139)$$

Заметим далее, что выражение $\theta = (\psi_2\bar{\psi}_2 - \psi_1\bar{\psi}_1)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$(\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})(\theta^T) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}. \qquad (6.1.140)$$

Исходя из (6.1.13), можно показать, что для $V^{(2)}(x, k_1)$ и для $W \circ Y(x, k_2)$ (V, W, Y — собственные функции оператора L) справедлива формула

$$(W \circ Y^A, V^{(2)}) = -\frac{1}{2i(k_1 - k_2)}(v_2^2 y_1 w_1 + v_1^2 y_2 w_2 - v_1 y_2 w_1 v_2 -$$
$$- v_1 y_1 w_2 v_2)\Big|_{-\infty}^{\infty}. \qquad (6.1.141)$$

Таким образом, соотношение полноты и формула (6.1.141) позволяют написать спектральное разложение для функции θ. В частности, из такого разложения можно получить равенство

$$\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}^T \equiv (2i\,(\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})\,({}_k\theta^T))^T =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{b}{a}(k)\,{}_k\psi^{(2)\,A} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\,{}_k\bar{\psi}^{(2)\,A}. \qquad (6.1.142)$$

Если Ω — целая функция, то, действуя оператором $\Omega(\mathbf{L}_1^A)$ на выражение, транспонированное к (6.1.142), получим равенство

$$(\Omega(\mathbf{L}_1^A)\,U)^T = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{b}{a}(k)\,\Omega(k)\,{}_k\psi^{(2)A} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\,{}_k\bar{\psi}^{(2)A}. \tag{6.1.143}$$

Таким образом, в предположениях (6.1.102) при $\bar{\Omega} = -\Omega$ мы снова приходим к эволюционным уравнениям (6.1.112). Используя спектральную теорию, развитую в разд. 3.4, мы можем сформулировать для оператора $\mathbf{K} = \Omega(\mathbf{L}_1^A)$, определяющего интегрируемые уравнения, следующее утверждение. *В спектральном представлении* $\mathbf{L}_1^A$ *оператор* $\mathbf{K}$ *является диагональным* (Каup и Ньюэлл [1979]). Когда Ω и $\bar{\Omega}$ сингулярны, т. е. имеют полюса, аналогичное утверждение справедливо для соответствующих нелинейных операторов (соответствующие упражнения находятся в конце этой главы). Сосредоточимся, однако, на физическом примере, о котором мы выше упоминали. Пусть Ω и $\bar{\Omega}$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной k-плоскости и стремятся к нулю при $|k| \to \infty$. Тогда из (6.1.103) можно вывести соотношение

$$(\sigma_3 U_t)^T = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\Omega(k)\,\frac{b}{a}(k)\,{}_k\psi^{(2)A} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\Omega(k)\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\,{}_k\psi^{(2)A}, \tag{6.1.144}$$

тогда как из формулы (6.1.138) получаем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Omega(k) - \bar{\Omega}(k))\,{}_k\theta\,dk = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\Omega(k)\,\frac{b}{a}(k)\,{}_k\psi^{(2)A} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\bar{\Omega}(k)\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k)\,{}_k\bar{\psi}^{(2)A}. \tag{6.1.145}$$

Комбинируя эти уравнения с (6.1.105) и (6.1.104), мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk g(k)\begin{pmatrix} {}_k\bar{\lambda} \\ {}_k\lambda \end{pmatrix}, \\ \bar{\lambda}_x - RN &= 2ik\bar{\lambda}, \\ \lambda_x - QN &= -2ik\lambda, \\ N_x &= 2(R\bar{\lambda} + Q\lambda), \end{aligned} \tag{6.1.146}$$

где $g(k) = \Omega(k) - \bar{\Omega}(k)$, $N = (\psi_1\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1\psi_2)$, $\bar{\lambda} = \psi_1\bar{\psi}_1$ и $\lambda = \psi_2\bar{\psi}_2$. В том случае, когда $R = \pm Q^*$, это множество урав-

нений сводится к редуцированной системе уравнений Максвелла—Блоха, описывающей распространение импульса в среде, состоящей из двухуровневых атомов, с учетом неоднородного уширения (см. гл. 9). Поскольку в этом случае

$$a_t = -I_t(\varphi, \psi) = -((\sigma_3 U_t)^\tau, \varphi \circ \psi) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega(k) - \overline{\Omega}(k)) ({}_k\theta, {}_k\varphi \circ \psi)\, dk =$$

$$= \frac{i}{2} a(k) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(k') b\bar{b}(k')}{(k'-k)} dk', \qquad (6.1.147)$$

то единственными интегралами движения этой системы являются собственные значения.

6.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения ЗШ-АКНС

В этом разделе мы изложим метод обратной задачи рассеяния для задачи рассеяния ЗШ-АКНС (6.1.13). Мы выясним также, при каких начальных условиях существует решение задачи Коши для интегрируемого эволюционного уравнения. Таким образом, материал этого раздела аналогичен приведенному в гл. 4 для изоспектрального оператора Шредингера. Предлагаемый нами подход навеян работой Лянце [1967] о несамосопряженном операторе Шрёдингера на полуоси и заимствован из препринта Додда [1982].

Начнем с вывода уравнений Марченко для $\mathbf{L}$ и нахождения условий, позволяющих однозначно построить функции Q и R по этим уравнениям. Существует много способов, позволяющих получить уравнения Марченко. Мы выбираем простейший, предполагая дополнительно, что функции Q и R имеют компактный носитель. В этом случае, согласно следствию 6.1.2, решения Йоста и функции рассеяния аналитичны во всей k-плоскости. Вычисляя интеграл

$$I_1(x, k) = \int_C \frac{dz \varphi(x, z) e^{izx}}{a(z)(z-k)},$$

находим, что

$$I_1(x, k) = i\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$I_1(x, k) = \int_{C+\overline{C}} \frac{\bar{\psi}(x, z) e^{izx}}{z-k} dz + \int_C \frac{b(z) \psi(x, z) e^{izx}}{a(z)(z-k)} dz -$$

$$-\int\limits_{\overline{C}} \frac{\bar{\psi}(x,\ z)\, e^{izx}}{(z-k)}\, dz = 2\pi i \bar{\psi}(x,\ k)\, e^{ikx} + \\ + \int\limits_{C} \frac{b(z)\,\psi(x,\ z)\, e^{izx}}{a(z)\,(z-k)}\, dz - i\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.2.1)$$

Выражения в правой части формулы (6.2.1) найдены с помощью (6.1.31)—(6.1.32) и теоремы Коши для интеграла по кривой $C + \overline{C}$. Контуры C и $\overline{C}$ были определены в 6.1. Аналогично, взяв другие решения Йоста, получим следующие соотношения:

$$\psi(x,\ k)\, e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{C}} \frac{dz}{(z-k)} \frac{\bar{b}}{\bar{a}(z)} \bar{\psi}(x,\ z)\, e^{-izx},$$

$$\bar{\psi}(x,\ k)\, e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{dz}{(z-k)} \frac{b(z)}{a(z)} \psi(x,\ z)\, e^{izx},$$

$$\varphi(x,\ k)\, e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{C}} \frac{dz}{(z-k)} \frac{b(z)}{\bar{a}(z)} \bar{\varphi}(x,\ z)\, e^{izx},$$

$$\bar{\varphi}(x,\ k)\, e^{-ikx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{dz}{(z-k)} \frac{\bar{b}(z)}{a(z)} \varphi(x,\ z)\, e^{-izx}. \qquad (6.2.2)$$

Если заменить решения Йоста их представлениями в терминах операторов преобразования теоремы 6.7, то после перехода к преобразованиям Фурье получатся нестационарные уравнения Марченко:

$$\overline{K}_+(x,\ y,\ t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_+(x+y,\ t) + \int\limits_x^\infty K_+(x,\ s,\ t)\, F_+(s+y,\ t)\, ds = 0, \quad y \geqslant x,$$

$$K_+(x,\ y,\ t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{F}_+(x+y,\ t) + \int\limits_x^\infty \overline{K}_+(x,\ s,\ t)\, \overline{F}_+(s+y,\ t)\, ds = 0, \quad y \geqslant x, \qquad (6.2.3)$$

где

$$F_+(x,\ t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_C dk\, \frac{b(k,\ t)}{a(k,\ t)}\, e^{ikx},$$

$$\overline{F}_+(x,\ t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\overline{C}} dk\, \frac{\bar{b}(k,\ t)}{\bar{a}(k,\ t)}\, e^{-ikx}$$

и

$$\overline{K}_-(x, y, t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F_-(x+y, t) + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, s, t) F_-(s+y, t)\, ds = 0, \quad y \leqslant x,$$

$$K_-(x, y, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{F}_-(x+y, t) + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, s, t) \overline{F}_-(s+y, t)\, ds = 0 \quad y \leqslant x,$$

где

$$F_-(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_C dk \frac{b(k, t)}{a(k, t)} e^{-ikx}, \tag{6.2.4}$$

$$\overline{F}_-(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\overline{C}} dk \frac{b(k, t)}{\bar{a}(k, t)} e^{ikx}.$$

В том случае, когда потенциалы Q и R не являются финитными, но удовлетворяют условиям теоремы 6.6, нестационарные уравнения Марченко (6.2.3) и (6.2.4) остаются справедливыми, если контурные интегралы переписать следующим образом:

$$F_+(x, t) = \sum_{j=1}^{N} P_{+j}(x, t) e^{ik_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dk R_+(k, t) e^{ikx},$$

$$\overline{F}_+(x, t) = \sum_{l=1}^{\overline{N}} \overline{P}_{+l}(x, t) e^{-i\bar{k}_l x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\gamma}} dk \overline{R}_+(k, t) e^{-ikx},$$

$$F_-(x, t) = \sum_{j=1}^{N} P_{-j}(x, t) e^{-ik_j x} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dk R_-(k, t) e^{-ikx}, \tag{6.2.5}$$

$$\overline{F}_-(x, t) = \sum_{l=1}^{\overline{N}} \overline{P}_{-l}(x, t) e^{i\bar{k}_l x} - \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\gamma}} \overline{R}_-(k, t) e^{ikx}.$$

По-существу интегралы в правых частях (6.2.5) следует считать регуляризированными в том смысле, что рациональные дроби вида $(k - k_\pm)^{-m_\pm}$ заменяются обобщенными функциями $(k - k_\pm \pm i0)^{-m_\pm}$, где $k_\pm$ являются точками сингулярного спектра $a(k_+) = 0$, $\bar{a}(k_-) = 0$ кратности $m_\pm$ соответственно. Функции $R_+ = b/a$, $\overline{R}_+ = \bar{b}/\bar{a}$, $R_- = \bar{b}/a$ и $\overline{R}_- = b/\bar{a}$ суть обобщенные функции в пространстве медленно растущих функций. Обратные преобразования Фурье этих функций, определенные интегралами в (6.2.5), мы будем обозначать символами $\widehat{R}_+$, $\widehat{\overline{R}}_+$, $\widehat{R}_-$ и $\widehat{\overline{R}}_-$. Их

следует понимать как обобщенные функции над пространством C_0^∞ функций из C^∞, обладающих компактным носителем.

Лемма 6.13. *Преобразования Фурье* $\widehat{R}_+$, $\widehat{\overline{R}}_+$, $\widehat{R}_-$ *и* $\widehat{\overline{R}}_-$ *определены формулами*

$$\widehat{R}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} dk R_+(k)\, e^{ikx}, \quad \widehat{\overline{R}}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\gamma}} dk \overline{R}_+(k)\, e^{-ikx},$$

$$\widehat{R}_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} dk R_-(k)\, e^{-ikx}, \quad \widehat{\overline{R}}_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\gamma}} dk \overline{R}_-(k)\, e^{ikx},$$

где функции R_+, $\overline{R}_+$, R_- *и* $\overline{R}_-$ *мероморфны в полосе* $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$. *Для любого* δ, *такого что* $0 < \delta < \varepsilon_0/2$, *существуют постоянные* C_δ^+, $\overline{C}_\delta^+$, C_δ^- *и* $\overline{C}_\delta^-$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\pm\eta x}\widehat{R}_\pm(x)|^2\, dx < C_\delta^\pm,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\pm\eta x}\widehat{\overline{R}}_\pm(x)|^2\, dx < \overline{C}_\delta^\pm,$$

$$\delta \leqslant \eta \leqslant \varepsilon_0 - \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем это утверждение для $\widehat{R}_+$. Для других преобразований Фурье доказательства проводятся аналогично. Из интегральных представлений (6.1.38)—(6.1.41) и леммы 6.3 вытекает оценка

$$|R_+(k)| < \frac{C_\delta^{+\prime}}{|k|}, \quad \delta \leqslant |\operatorname{Im} k| \leqslant \varepsilon_0 - \delta.$$

Из определения R_+ и теоремы Коши следует справедливость представления

$$\widehat{R}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} R_+(k)\exp(ikx)\, dx,$$

так что

$$e^{\eta x}\widehat{R}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_+(\xi+i\eta)\exp i\xi x\, d\xi.$$

Применяя только что полученную оценку для $R_+(k)$, получим неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\eta x}\widehat{R}_+(x)|^2\, dx \leqslant \frac{(C_\delta^{+\prime})^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|\xi+i\eta|^2}.$$

Уравнения Марченко (6.2.2), (6.2.3) можно вывести непосредственно из соотношения полноты (6.1.86). Однако мы воспользуемся соотношением полноты для вывода обобщенного уравнения

Марченко для системы ЗШ—АКНС, являющегося аналогом уравнения Марченко для оператора Шредингера, приведенного в разд. 4.1. Вместо формул (6.2.5) удобно пользоваться формулами (6.2.4) для случая компактных носителей. Как мы уже указывали в предыдущем разделе, в том случае, когда выполнены условия теоремы 6.6, такая замена допускает строгое обоснование.

Пусть $\psi_{(i)}$, $\bar{\psi}_{(i)}$, $i = 1, 2$, суть решения Йоста для потенциальных функций (Q_i, R_i), $i = 1, 2$, и пусть $\mathbf{K}_{(i)}$, $i = 1, 2$, — ядра соответствующих операторов преобразования. Мы установим также существование и единственность обратных операторов с ядрами $\mathbf{M}_{(i)}$, $i = 1, 2$, такими, что

$$\tilde{\Psi}_{(i)\infty}(x, k) = \tilde{\Psi}_{(i)}(x, k) - \int_x^\infty \mathbf{M}_{(i)}(x, y)\, \tilde{\Psi}_{(i)}(y, k)\, dy, \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

$$\tilde{\Psi}_{(i)\infty}(x, k) = \begin{pmatrix} e^{-ikx} & 0 \\ 0 & e^{ikx} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{(i)} = (\bar{\psi}_{(i)}, \psi_{(i)}),$$

$$\mathbf{K}_{(i)} = (\bar{K}_{(i)}, K_{(i)}), \quad \mathbf{M}_{(i)} = (\bar{M}_{(i)}, M_{(i)}),$$

где

$$Q_i(x) = -2K_{(i)\,1}(x, x) = -2M_{(i)\,1}(x, x),$$

$$R_i(x) = -2\bar{K}_{(i)\,2}(x, x) = -2\bar{M}_{(i)\,2}(x, x),$$

$$\lim_{x, y\to\infty} \mathbf{K}_{(i)}(x, y) = 0, \quad \lim_{x, y\to\infty} \mathbf{M}_{(i)}(x, y) = 0,$$

$$\mathbf{L}(x)\, \mathbf{K}_{(i)}(x, y) - i\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{K}_{(i)}(x, y) = 0, \quad x < y < \infty, \tag{6.2.6}$$

$$\mathbf{M}_i(x, y)\left(\mathbf{L}(y) - i\sigma_3\frac{\partial}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{M}_{(i)}(x, y)\,\sigma_3 - \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{M}_{(i)}(x, y) = 0, \quad x < y < \infty,$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью операторов преобразования, ассоциированных с рассмотренными выше решениями Йоста, можно показать, что

$$\Psi_{(1)}(x, k) = \Psi_{(2)}(x, k) + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, y)\, \Psi_2(y, k)\, dy,$$

где $\Psi_{(i)} = (\psi_{(i)}, \bar{\psi}_{(i)})$, и что

$$\mathbf{K}(x, y) = \mathbf{K}_{(1)}(x, y) - \mathbf{M}_{(2)}(x, y) - \int_x^y \mathbf{K}_{(1)}(x, s)\, \mathbf{M}_{(2)}(s, y)\, ds,$$

$$Q_1(x) - Q_2(x) = -2K_{12}(x, x), \tag{6.2.7}$$

$$R_1(x) - R_2(x) = -2K_{21}(x, x).$$

Подобным образом можно доказать существование сопряженного оператора

$$\Psi^A_{(2)}(x, k) = \Psi^A_{(1)}(x, k) + \int_x^\infty \Psi^A_{(1)}(y, k)\, \mathbf{K}^A(y, x)\, dy. \quad (6.2.8)$$

Используя обозначения разд. 6.1, можно соотношения полноты для решения Йоста $\psi_{(i)}$, $\bar{\psi}_{(i)}$ записать, применяя (6.1.86), в следующем виде:

$$\delta(x-y)\,\mathbf{I} = -\frac{1}{2\pi}\int_C dk\,\big(R^{(i)}_+(k)\,\psi_{(i)}(x, k)\,\psi^A_{(i)}(y, k) + \\ + \bar{\psi}_{(i)}(x, k)\,\psi^A_{(i)}(y, k)\big) + \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{C}} dk\,\big(\bar{R}^{(i)}_+(k)\,\bar{\psi}_{(i)}(x, k)\,\bar{\psi}^A_{(i)}(y, k) + \\ + \psi_{(i)}(x, k)\,\bar{\psi}^A_{(i)}(y, k)\big). \quad (6.2.9)$$

С помощью (6.2.8) и (6.2.9) для $i = 1$ находим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \big(R^{(1)}_+(k)\,\psi_{(1)}(x, k)\,\psi^A_{(2)}(y, k) + \bar{\psi}_{(1)}(x, k)\,\psi^A_{(2)}(y, k)\big)\,dk - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{C}} \big(\bar{R}^{(1)}_+(k)\,\bar{\psi}_{(1)}(x, k)\,\bar{\psi}^A_{(2)}(y, k) + \psi_{(1)}(x, k)\,\bar{\psi}^A_{(2)}(y, k)\big)\,dk = \\ = -\delta(x-y) - \int_y^\infty \delta(x-s)\,\mathbf{K}^A(s, y)\,ds. \quad (6.2.10)$$

Применяя (6.2.9) для $i = 2$ и (6.2.7), получим обобщенное уравнение Марченко для этого метода (Додд и Буллаф [1979]):

$$\mathbf{K}(x, y, t) + \mathbf{F}(x+y, t) + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, s, t)\,\mathbf{F}(s+y, t)\,ds = 0, \quad x < y,$$

где

$$\mathbf{F}(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \big(R^{(1)}_+(k, t) - R^{(2)}_+(k, t)\big)\,\psi_{(2)}(x, k)\,\psi^A_{(2)}(y, k)\,dk + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{C}} \big(\bar{R}^{(1)}_+(k, t) - \bar{R}^{(2)}_+(k, t)\big)\,\bar{\psi}_{(2)}(x, k)\,\bar{\psi}^A_{(2)}(y, k)\,dk. \quad (6.2.11)$$

Таким образом, (6.2.11) вместе с (6.2.7) устанавливает соотношение между парами функций рассеяния. Если положить $Q_2 = R_2 = 0$, то уравнение (6.2.11) сведется к нестационарному уравнению Марченко (6.2.3). Это уравнение может быть применено также для исследования гамильтоновой структуры, ассоциированной с системой ЗШ—АКНС.

Мы теперь исследуем условия, которым следует подчинить функции рассеяния для того, чтобы реконструированные потенциалы Q и R удовлетворяли условиям теоремы 6.6. Разумеется, в случае, когда Q и R удовлетворяют произвольному эволюционному уравнению, должны быть введены дополнительные условия. Мы исследуем эти условия позднее в этом разделе. Будем работать с уравнением Марченко (6.2.3), опуская индекс «+» и явную зависимость от t всех рассматриваемых функций. Начнем с установления условий, которым удовлетворяют функции F и $\bar{F}$, если выполняются условия $|Q(x)| \leqslant C \exp(-2\varepsilon|x|)$ и $|R(x)| \leqslant C \exp(-2\varepsilon|x|)$. Положим $x = y$ в (6.2.3) и будем рассматривать получившееся уравнение как уравнение для F и $\bar{F}$.

$$\mathbf{F}(x) = -\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^\infty \mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{s}{2}\right)\mathbf{F}\left(\frac{s+x}{2}\right) ds,$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = (\bar{K}, K). \tag{6.2.12}$$

Итерируя это интегральное уравнение, получим неравенство

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}(x)| \leqslant{}& \left|\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x_1}{2}\right)\right| \times \\
&\times \left|\mathbf{K}\left(\frac{x+x_1}{4}, \frac{x+x_1}{4}\right)\right| dx_1 + \ldots + \frac{1}{2^{(1/2)\,l\,(j-1)}} \times \\
&\times \int_x^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x_1}{2}\right)\right| \int_{(x+x_1)}^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{x+x_1}{4}, \frac{x_2}{4}\right)\right| \ldots \\
&\ldots \int_{(x+x_1+\ldots+x_{j-2})}^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{1}{2^{j-1}}(x+x_1+\ldots+x_{j-2}), \frac{1}{2^{j-1}}x_{j-1}\right)\right| \times \\
&\times \left|\mathbf{K}\left(\frac{1}{2^j}(x+x_1+\ldots+x_{j-1}), \frac{1}{2^j}(x+x_1+\ldots+x_{j-1})\right)\right| \times \\
&\times dx_1 \ldots dx_{j-1} + \frac{1}{2^{(1/2)\,l\,(j+1)}} \int_x^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x_1}{2}\right)\right| \times \\
&\times \int_{(x+x_1)}^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{x+x_1}{4}, \frac{x_2}{4}\right)\right| \ldots \int_{(x+x_1+\ldots+x_{j-1})}^\infty \left|\mathbf{K}\left(\frac{1}{2^j}(x+x_1+\ldots \right.\right. \\
&\left.\left. \ldots + x_{j-1}), \frac{1}{2^j}x_j\right)\right| \times \\
&\times \left|\mathbf{F}\left(\frac{1}{2^j}(x+x_1+\ldots+x_j)\right)\right| dx_1 \cdots dx_j = I_1 + I_2. \qquad (6.2.13)
\end{aligned}$$

Нетрудно показать по индукции, используя следствие 6.7.1, что

$$I_1 \leqslant C_\varepsilon \exp - \varepsilon x \sum_{l=1}^{J} \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{C_\varepsilon e^{-\varepsilon x}}{\varepsilon} \right)^{l-1}, \qquad (6.2.14)$$

где C_ε — некоторая положительная постоянная, зависящая от ε. Оценка I_2 следует из неравенства

$$\int\limits_{(x+x_1+\ldots+x_{j-1})} \left| \mathbf{K}\left(\frac{1}{2^j}(x + x_1 + \ldots + x_{j-1}), \frac{1}{2^j} x_j \right) \right| \times$$

$$\times \left| \mathbf{F}\left(\frac{1}{2^j}(x + x_1 + \ldots + x_j) \right) \right| dx_j \leqslant C_\varepsilon e^{-2^{-J}\varepsilon (x+x_1+\ldots+x_{j-1})} \times$$

$$\times \int\limits_{(x+x_1+\ldots+x_{j-1})}^{\infty} e^{-2^{-j}\varepsilon x_j} |\mathbf{F}(x + x_1 + \ldots + x_j)| \, dx_j. \quad (6.2.15)$$

Применяя лемму 6.13 и (6.2.5), получим цепочку неравенств

$$\int\limits_y^\infty e^{-2^{-J}\varepsilon x} |\mathbf{F}(x+y)| \, dy \leqslant (\| e^{\eta x}\widehat{R}(x)\| + \| e^{\eta x}\widehat{\tilde{R}}(x)\|) \times$$

$$\times \left(\int\limits_y^\infty e^{-2(\eta + 2^{-J}\varepsilon)x} \, dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_y^\infty e^{-2^{-J}\varepsilon x} |P_j(x) e^{ik_j x}| \, dx + \sum_{l=1}^{\overline{N}} \int\limits_y^\infty e^{-2^{-J}\varepsilon x} |\overline{P}_l(x) e^{-i\bar{k}_l(x)}| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant D_\eta e^{-(\eta+2^{-J}\varepsilon)y} + \int\limits_y^\infty e^{-(2^{-J}\varepsilon+\gamma)x} P(|x|) \, dx. \quad (6.2.16)$$

Расшифруем символы, входящие в последнее выражение:

$$D_\eta = (\| e^{\eta x}\widehat{R}(x)\| + \| e^{\eta x}\widehat{\tilde{R}}(x)\|)/[2(\eta + 2^{-J}\varepsilon)]^{1/2},$$
$$\gamma = \min\{\operatorname{Im} k_j, \ |\operatorname{Im} \bar{k}_l|\}, \quad 0 < \eta < \varepsilon_0 - \delta,$$

где $0 < \delta < \varepsilon_0/2$ и $P(|x|) = \sum\limits_{j=1}^{N} |P_j(x)| + \sum\limits_{l=1}^{\overline{N}} |\overline{P}_l(x)|$. Предположим, что $\deg P(|x|) = m$, и рассмотрим интеграл в (6.2.16) для произвольного монома $|x|^l$, $1 \leqslant l \leqslant m$ (член $D_\eta e^{-(\eta+2^{-J}\varepsilon)y}/(\eta+2^{-J}\varepsilon)$ может быть оценен тем же путем, что и постоянный член). Заметим, что если $\lambda > 0$, то

$$\int\limits_y^\infty e^{-\lambda x} |x|^l \, dx = (\sigma)^l e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{l-1} k! \, C_k^l \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{k+1} y^{l-k} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{l+1} (1 - (-1)^l) \, l! \right) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} P_\lambda(y), \quad \sigma = \operatorname{sign}(y). \quad (6.2.17)$$

Последний член в правой части (6.2.17) отсутствует при $y > 0$; $P_\lambda(y)$ является многочленом степени l. Таким образом, последовательные интегрирования приводят к оценке

$$\int_x^\infty e^{-\varepsilon y_{n-1}} \int_{y_{n-1}}^\infty e^{-\varepsilon y_{n-2}} \dots \int_{y_1}^\infty e^{-(\varepsilon+\gamma/2)y} |y|^l \, dy \, dy_1 \dots dy_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma x} (e^{-\varepsilon x})^n P_{\gamma,\varepsilon}(x)}{(n\varepsilon+\gamma/2)((n-1)\varepsilon+\gamma/2)\dots(\varepsilon+\gamma/2)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-(1/2)\gamma x} P_{\gamma,\varepsilon}(x) \frac{(e^{-\varepsilon x})^n}{\varepsilon^n n!}. \quad (6.2.18)$$

Здесь $P_{\gamma,\varepsilon}$ — многочлен степени l. Отсюда можно заключить, что $I_2 \to 0$ равномерно, когда $n \to \infty$ при $-\infty < a \leqslant x$. Оценка для $\mathbf{F}$ следует тогда из (6.2.13) и (6.2.14):

$$|\mathbf{F}(x)| \leqslant C_\varepsilon \exp(-\varepsilon x \{\exp(C_\varepsilon \varepsilon^{-1} \exp - \varepsilon x)\}), \quad x \geqslant a \geqslant -\infty. \quad (6.2.19)$$

Если дополнительно предположить, что функции Q и R дифференцируемы и подчиняются оценкам следствия 2 теоремы 6.7, то окажется, что функция $\mathbf{F}_x(x)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{F}_x(x)| \leqslant C_\varepsilon(a) \exp(-\varepsilon x), \quad x \geqslant a > -\infty, \quad (6.2.20)$$

где $C_\varepsilon(x)$ — монотонная функция, убывающая при $x \to +\infty$ и возрастающая при $x \to -\infty$. Для доказательства этого факта заметим, что

$$\mathbf{F}(x) = -\mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) - \int_x^\infty \mathbf{K}\left(\frac{x}{2}, 2s - x\right) \mathbf{F}(s)\, ds,$$

и, значит,

$$\mathbf{F}_x(x) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{K}^{(1,0)}\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x\right) + \mathbf{K}^{(0,1)}\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x\right)\right) +$$

$$+ \mathbf{K}\left(\frac{1}{2}x, x\right)\mathbf{F}(x) - \frac{1}{2}\int_x^\infty \mathbf{K}^{(1,0)}\left(\frac{x}{2}, 2s - x\right)\mathbf{F}(s)\, ds +$$

$$+ \int_x^\infty \mathbf{K}^{(0,1)}\left(\frac{x}{2}, 2s - x\right)\mathbf{F}(s)\, ds. \quad (6.2.21)$$

Мы воспользовались здесь обозначением разд. 4.2:

$$f^{(i,j,k)}(x, y, t) \equiv \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial t^k} f(x, y, t).$$

Оценка (6.2.20) следует тогда из следствий 6.7.1 и 6.2.2 и оценки (6.2.19).

Следующая теорема характеризует данные рассеяния для потенциалов, удовлетворяющих теореме 6.6.

Теорема 6.14. Данные рассеяния $S_+ = \{R_+, \overline{R}_+, k_j, P_{+j}(x), \overline{k}_l, \overline{P}_{+l}(k), \operatorname{Im} k_j > 0, \operatorname{Im} \overline{k}_l < 0, j = 1, \ldots, N, l = 1, \ldots, \overline{N}\}$ для функций Q и R, подчиняющихся условиям теоремы 6.6, обладают следующими свойствами.

(i) Функции $R_+(k)$, $\overline{R}_+(k)$ мероморфны в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ и удовлетворяют неравенствам $R_+(k) = o(1)$, $\overline{R}_+(k) = o(1)$ при $|k| \to \infty$ равномерно в этой полосе.

(ii) Преобразования Фурье

$$\int_{\gamma} R_+(k) \exp(ikx)\, dk, \quad \int_{\overline{\gamma}} \overline{R}_+(k) \exp(-ikx)\, dk$$

определяют регулярные функционалы на пространстве медленно растущих функций. Функции $\widehat{F}_+$, $\widehat{\overline{F}}_+$, определенные формулами (6.2.5), удовлетворяют условиям

$$|\widehat{F}_+(x)| \leqslant C_\varepsilon^+(a) \exp(-\varepsilon x), \quad |\widehat{\overline{F}}_+(x)| \leqslant C_\varepsilon^+(a) \exp(-\varepsilon x)$$

для всех $x \geqslant a > -\infty$.

Если к тому же Q и R дифференцируемы и удовлетворяют оценкам следствия 2 теоремы 6.7, то выполняются неравенства

$$|F_{+x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^+(a) \exp(-\varepsilon x), \quad |\overline{F}_{+x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^+(a) \exp(-\varepsilon x)$$

и $R(k) = o(|k|^{-1})$, $R(k) = o(|k|^{-1})$ равномерно внутри полосы $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ при $|k| \to \infty$.

(iii) Степени многочленов P_{+j}, $\overline{P}_{+l}$ равны $m_j - 1$, $\overline{m}_l - 1$ соответственно, причем m_j, $\overline{m}_l$ суть кратности невещественных k_j, $\overline{k}_l$.

(iv) Данные рассеяния S_+ образуют полный набор в том смысле, что ими определяются асимптотические свойства главных функций при $|x| \to \infty$, и, наоборот, они определяются по этим асимптотическим свойствам в предположении, что выполняются условия теоремы 6.11. В этом случае матрицы рассеяния $\widetilde{S}$ и $\widehat{\overline{S}}$ имеют вид

$$\widetilde{S}(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & -R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\overline{S}}(k) = \begin{pmatrix} \overline{T}_-(k) & \overline{R}_+(k) \\ -\overline{R}_-(k) & \overline{T}_+(k) \end{pmatrix}$$

и $T_+ = T_- \equiv a^{-1}$, $\overline{T}_+ = \overline{T}_- = \bar{a}^{-1}$. Матрицы рассеяния представляют собой матрицы-функции, мероморфные в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ и подчиненные условию $\widetilde{S}\widehat{\overline{S}} = 1$.

Данные рассеяния S_- удовлетворяют условиям, аналогичным (i)—(iii). Оценки для F_-, $\overline{F}_-$ имеют вид

$$|F_-(x)| \leqslant C_\varepsilon^-(a)\exp \varepsilon x, \quad |F_{-x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^-(a)\exp \varepsilon x,$$

$$|\overline{F}_-(x)| \leqslant C_\varepsilon^-(a)\exp \varepsilon x, \quad |\overline{F}_{-x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^-(a)\exp \varepsilon x$$

для всех $x \leqslant a < \infty$.

(v) Коэффициенты нормировочных многочленов P_{+j}, P_{-j} и $\overline{P}_{+j}$, $\overline{P}_{-j}$ связаны. Если p_{+jl}, p_{-jl}, $\bar{p}_{+jl}$ и $\bar{p}_{-jl}$ суть коэффициенты этих многочленов при x^l соответственно, то выполняются соотношения

$$p_{-jl} = -(i)^{l+1} C_l^{m_j-1} \sum_{s=0}^{m_j-1-l} C_s^{m_j-1-l-s} [(f(k))^{-1}]_{k=k_j}^{m_j-1-l-s} \times$$

$$\times \left(\left[\frac{(k-k_j)^{m_j}}{a(k)(m_j-1)!} \right]^2 \right)_{k=k_j}^{(s)},$$

$$\bar{p}_{-jl} = -(-i)^{l+1} C_l^{\bar{m}_j-1} \sum_{s=0}^{\bar{m}_j-1-l} C_s^{\bar{m}_j-1-l-s} [(\bar{f}(k))^{-1}]_{k=\bar{k}_j}^{\bar{m}_j-1-l-s} \times$$

$$\times \left(\left[\frac{(k-k_j)^{\bar{m}_j}}{\bar{a}(k)(\bar{m}_j-1)!} \right]^2 \right)_{k=\bar{k}_j}^{(s)},$$

где f, $\bar{f}$ — любые аналитические функции, такие что

$$[f(k)]_{k=k_j}^{m_j-1-l} = -(-i)^{l+1} p_{+jl} [C_l^{m_j-1}]^{-1}; \quad [\bar{f}(k)]_{k=\bar{k}_j}^{\bar{m}_j-1-l} =$$

$$= -(i)^{l+1} \bar{p}_{+jl} [C_l^{\bar{m}_j-1}]^{-1}.$$

Утверждение (v) этой теоремы вытекает из формул (6.1.87) и (6.1.88). Функции $C_\varepsilon^\pm$ определены равенствами $C_\varepsilon^+(x) = C_\varepsilon(-x) \equiv C_\varepsilon(x)$.

Мы перейдем далее к изучению дальнейших свойств $\overline{\mathbf{F}}$, играющих существенную роль в решении обратной задачи.

Определение. Скажем, что матрица-функция $\mathbf{G}_\pm(x)$ типа $(\mathbf{G}_\pm, \varepsilon)$, если для $\mathbf{G}$ выполняются следующие условия:

(а) $|\mathbf{G}_\pm(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a)\exp(\mp\varepsilon x)$ при условии $x \geqslant a > -\infty$ для $\mathbf{G}_+$ и $x \leqslant a < \infty$ для $\mathbf{G}_-$;

(б) интегральное уравнение

$$_x\mathbf{Y}_\pm(u) = \pm \int_x^{\pm\infty} {}_x\mathbf{Y}_\pm(s)\,\mathbf{G}_\pm(s+u)\,ds$$

имеет только тривиальное решение ${}_x\mathbf{Y}_+(u) = 0$, $u \geqslant x$ (${}_x\mathbf{Y}_-(x) = 0$, $u \leqslant x$) в классе функций, для которых

$$\pm \int_x^{\pm\infty} |\, {}_x\mathbf{Y}_\pm(u)\,| \exp(\pm\varepsilon u)\, du < \infty.$$

Мы сейчас покажем, что порожденная оператором $\mathbf{L}$ матрица-функция $\mathbf{F}$ типа (G_+, ε). Оценка (6.2.19) показывает, что $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию (а) определения.

Заметим, что интегральное уравнение в (б) позволяет получить оценку

$$|\, {}_x\mathbf{Y}(u)\,| \leqslant \int_x^\infty |\, {}_x\mathbf{Y}(s)\,|\,|\,\mathbf{F}(s+u)\,|\, ds \leqslant C_\varepsilon'(a) \exp(-\varepsilon u). \tag{6.2.22}$$

Поэтому интегральное уравнение Вольтерры

$${}_x\mathbf{Y}(u) = {}_x\mathbf{Z}(u) + \int_x^u {}_x\mathbf{Z}(s)\,\mathbf{K}(s,\ u)\, ds, \quad u \geqslant x, \tag{6.2.23}$$

имеет единственное решение. Ядро $\mathbf{K}$ из (6.2.12) удовлетворяет оценкам, указанным в следствии 6.7.1 для K_+. Если подставить правую часть (6.2.23) в уравнение Фредгольма, которому удовлетворяет ${}_x\mathbf{Y}$, и воспользоваться уравнением Марченко

$$\mathbf{K}(x,\ u) + \mathbf{F}(x+u) + \int_x^\infty \mathbf{K}(x,\ s)\,\mathbf{F}(s+u)\, ds = 0, \quad u \geqslant x, \tag{6.2.24}$$

то для ${}_x\mathbf{Z}$ получится следующее уравнение Вольтерры:

$$\begin{aligned}
{}_x\mathbf{Z}(u) &= \int_x^u {}_x\mathbf{Z}(s)\,\mathbf{K}(s,\ u)\, ds + \int_x^\infty \left\{ {}_x\mathbf{Z}(s) - \int_x^s \mathbf{Z}(v)\,\mathbf{K}(v, s)\, dv \right\} \times \\
&\times \mathbf{F}(s+u)\, ds = \int_u^\infty {}_x\mathbf{Z}(s)\,\mathbf{F}(s+u)\, ds - \int_x^u {}_x\mathbf{Z}(s) \times \\
&\times \int_x^\infty \mathbf{K}(s, v)\,\mathbf{F}(v+u)\, dv\, ds - \int_x^\infty \left(\int_x^s {}_x\mathbf{Z}(v)\,\mathbf{K}(v, s)\, dv \right) \mathbf{F}(s+u)\, ds = \\
&= \int_x^\infty {}_x\mathbf{Z}(s) \left(\mathbf{F}(s+u) + \int_s^\infty \mathbf{K}(s,\ v)\,\mathbf{F}(v+u)\, dv \right) ds.
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Оценка для $\mathbf{K}$ показывает, что это уравнение является однородным уравнением Вольтерры с быстро убывающим ядром $\mathbf{K}(s,\ v)$ при $v \to \infty$, и, значит, это уравнение имеет единственное реше-

ние — тривиальное решение, ${}_x\mathbf{Z}(u) = 0$ для $u \geqslant x \geqslant a > -\infty$. Из (6.2.23) немедленно следует, что ${}_x\mathbf{Y}(u) = 0$ для $u \geqslant x \geqslant a > -\infty$. Таким образом, функция $\mathbf{F}$, порожденная $\mathbf{L}$, типа $(\mathbf{G}_+, \varepsilon)$.

Теорема 6.15. *Матрицы-функции* $\mathbf{F}_\pm$, *построенные по данным рассеяния* $S_\pm$ *оператора* $\mathbf{L}$, *являются функциями типа* $(\mathbf{G}_\pm, \varepsilon)$.

Следствие 6.15.1. *Данные рассеяния* $S_\pm$ *оператора* $\mathbf{L}$ *однозначно определяют* $\mathbf{L}$.

В обратной задаче рассеяния задаются данные рассеяния и требуется по ним построить потенциалы Q и R. Процедура аналогична описанной в шагах 1—5 разд. 4.1, где рассматривалась обратная задача для оператора Шрёдингера. Однако поскольку матрица-функция $\mathbf{F}$ была построена по данным рассеяния, критическим местом в анализе явилось существование и единственность решения $\mathbf{K}$ уравнения Марченко. Здесь существование и единственность были установлены для некоторого класса функций, которому принадлежат $\mathbf{F}$ и восстановленная матрица-функция $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}$.

Для самосопряженных операторов единственность решения уравнения Марченко можно установить, используя тот существенный факт, что матрица рассеяния в этом случае унитарна (см. шаг 1, разд. 4.1). Полезные работы по самосопряженной задаче Дирака на полуоси и всей оси были сделаны Гасымовым [1968] и Фроловым [1972]. Из определения и уравнения (6.2.24) ясно, что если построенная по данным рассеяния матрица-функция $\mathbf{F}$ типа $(\mathbf{G}_+, \varepsilon)$, то решение $\mathbf{K}$ уравнения (6.2.24) существует и единственно в классе функций $E_\varepsilon(x, \infty)$, таких что $\mathbf{Y} \in E_\varepsilon(x, \infty)$, если

$$\int_x^\infty |\mathbf{Y}(u)|\, e^{-\varepsilon u}\, du < \infty, \quad x \geqslant a > -\infty.$$

Аналогичные результаты получены для уравнения Марченко (6.2.4) в классе функций $E_\varepsilon(-\infty, x)$, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^x |\mathbf{Y}(u)|\, e^{\varepsilon u}\, du < \infty, \quad x \leqslant a.$$

Теорема 6.16. *Если* $\mathbf{F}_\pm$ *суть дифференцируемые функции типа* $(\mathbf{G}_\pm, \varepsilon)$, *удовлетворяющие неравенствам* $|\mathbf{F}_{\pm x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a)\, e^{\mp \varepsilon x}$,

где $(+)$ $-\infty < a \leqslant x$ *или* $(-)$ $x \leqslant a < \infty$, *то уравнения Марченко*

$$\mathbf{K}_+(x, u) + \mathbf{F}_+(x+u) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, s)\,\mathbf{F}_+(s+u)\,ds = 0, \quad u \geqslant x,$$

$$\mathbf{K}_-(x, u) + \mathbf{F}_-(x+u) + \int_{-\infty}^x \mathbf{K}_-(x, s)\,\mathbf{F}_-(s+u)\,ds = 0, \quad u \leqslant x,$$

имеют единственные решения $\mathbf{K}_+$, $\mathbf{K}_-$ *в классе функций* $E_\varepsilon(x, \infty)$, $E_\varepsilon(-\infty, x)$ *соответственно. Ядра удовлетворяют оценкам*

$$|\mathbf{K}_\pm(x, u)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp \varepsilon(x+u),$$

$$|\mathbf{K}_{\pm x}(x, u)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp \varepsilon(x+u),$$

$$|\mathbf{K}_{\pm u}(x, u)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp \varepsilon(x+u),$$

где ε *— положительное число. Предположим, что*

$$\tilde{\Psi}(x, k) = \tilde{\Psi}_\infty(x, k) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, u)\,\tilde{\Psi}_\infty(u, k)\,du,$$

где $\tilde{\Psi}_\infty(x, k) = \Phi_\infty(x, k) = \operatorname{diag}(e^{-ikx}, e^{ikx})$.

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{P}_\pm = \begin{pmatrix} 0 & Q_\pm \\ R_\pm & 0 \end{pmatrix}$, *где*

$$Q_+(x) = -2K_{+1}(x, x), \quad Q_-(x) = 2\overline{K}_{-1}(x, x),$$

$$R_+(x) = -2\overline{K}_{+2}(x, x), \quad R_-(x) = 2K_{-2}(x, x).$$

Тогда для $-\infty < a \leqslant x < \infty$, $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ *функция* $\tilde{\Psi}$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\mathbf{Y}_+(x, k) = \mathbf{P}_+(x)\,\mathbf{Y}(x, k) + ik\sigma\mathbf{Y}(x, k).$$

Аналогично функция Φ *удовлетворяет этому же уравнению для* $|\operatorname{Im} k| \leqslant \varepsilon$, $-\infty < x \leqslant a < \infty$ *с заменой функции* $\mathbf{P}_-$ *на* $\mathbf{P}_+$.

Для компонент матрицы-функции $\mathbf{P}_\pm$ *выполняются неравенства*

$$|Q_\pm(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp 2\varepsilon x, \quad |Q_{\pm x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp 2\varepsilon x,$$

$$|R_\pm(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp 2\varepsilon x, \quad |R_{\pm x}(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a) \exp \mp 2\varepsilon x.$$

Доказательство. Единственность решений $\mathbf{K}_\pm$ в $E_\varepsilon(x, \infty)$, $E_\varepsilon(-\infty, x)$ соответственно следует из того факта, что матрицы $\mathbf{F}_\pm$ типа $(\mathbf{G}_\pm, \varepsilon)$. Затем мы получим оценки для ядер $\mathbf{K}_\pm$. Заключительная часть доказательства аналогична шагу 4 разд. 4.1.

Уравнение Марченко может быть записано в виде

$$(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N}^\pm)\,\mathbf{K}_\pm + \mathbf{F}_\pm = 0, \tag{6.2.26}$$

где

$$ {}_x\mathbf{N}^{\pm}\mathbf{Y}(u) = \pm \int_x^{\pm\infty} \mathbf{Y}(s)\,\mathbf{F}_{\pm}(u+s)\,ds. $$

Далее, имеем

$$ \pm \int^{\pm\infty} |\,{}_x\mathbf{N}^{\pm}\mathbf{Y}(u)\,|\,e^{\mp\varepsilon u}\,du \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm} \int^{\pm\infty} e^{\mp 2\varepsilon u}\,du \int^{\pm\infty} |\,\mathbf{Y}(s)\,|\,e^{\mp\varepsilon s}\,ds, $$

так что $\|{}_x\mathbf{N}^{\pm}\|_{E_{\varepsilon}^{\pm}}$ существует. Применяя метод последовательных приближений (см. Гасымов [1968 I]), можно показать, что $(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N}^{\pm})^{-1}$ равномерно ограничена на (+) $-\infty < a \leqslant x < \infty$; (—) $-\infty < x \leqslant a < \infty$. Таким образом,

$$ \int^{\pm\infty} |\,\mathbf{K}_{\pm}(x,\,s)\,|\,e^{\mp\varepsilon s}\,ds \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm'}(a)\,e^{\pm\varepsilon x}\,\|(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{N}^{\pm})^{-1}\|_{E_{\varepsilon}^{\pm}} \int_x^{\pm\infty} e^{\mp\varepsilon s}\,ds. \tag{6.2.27} $$

Затем из уравнений Марченко и (6.2.27) мы выводим следующую оценку:

$$ |\,\mathbf{K}_{\pm}(x,\,u)\,| \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm'}(a)\,e^{\mp\varepsilon u}\left\{e^{\mp\varepsilon x} \pm \int_x^{\pm\infty} |\,\mathbf{K}_{\pm}(x,\,s)\,|\,e^{\pm\varepsilon s}\,ds\right\} \leqslant $$

$$ \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\exp\left[\mp\varepsilon\,(x+u)\right]. \tag{6.2.28} $$

Если $\mathbf{F}_{\pm}$ дифференцируемы и подчинены оценкам в условии теоремы, то из уравнений Марченко можно вывести, что $\mathbf{K}_{\pm x}(x,\,u)$ и $\mathbf{K}_{\pm u}(x,\,u)$ существуют и удовлетворяют неравенствам

$$ |\,\mathbf{K}_{\pm x}(x,\,u)\,| < C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\exp(\mp\varepsilon x), \qquad |\,\mathbf{K}_{\pm u}(x,\,u)\,| < C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\exp(\mp\varepsilon x). \tag{6.2.29} $$

Для функций $\mathbf{K}_{\pm x}$, $\mathbf{K}_{\pm u}$ выполняются уравнения

$$ \mathbf{K}_{\pm x}(x,\,u) + \mathbf{F}_{\pm x}(x+u) \pm \int_x^{\pm\infty} \mathbf{K}_{\pm x}(x,\,s)\,\mathbf{F}_{\pm}(s+u)\,ds \pm $$

$$ \pm\,\mathbf{K}_{\pm}(x,\,x)\,\mathbf{F}_{\pm}(x+u) = 0, $$

$$ \mathbf{K}_{\pm u}(x,\,u) + \mathbf{F}_{\pm u}(x+u) \pm \int_x^{\pm\infty} \mathbf{K}_{\pm}(x,\,s)\,\mathbf{F}_{\pm u}(s+u)\,ds = 0. \tag{6.2.30} $$

Поскольку $\sigma\,\mathbf{F}_{\pm} + \mathbf{F}_{\pm}\sigma = 0$, то получается, что

$$ (\sigma\mathbf{K}_{\pm x}(x,\,u) + \mathbf{K}_{\pm u}(x,\,u)\,\sigma) \pm \sigma\mathbf{K}_{\pm}(x,\,x)\,\mathbf{F}_{\pm}(x+u) \pm $$

$$ \pm \int_x^{\pm\infty} (\sigma\mathbf{K}_{\pm x}(x,\,s)\,\mathbf{F}_{\pm}(s+u) + \mathbf{K}_{\pm}(x,\,s)\,\mathbf{F}_{\pm u}\sigma)\,ds = 0. $$

Если мы теперь воспользуемся уравнениями Марченко, заменой для $\mathbf{F}_{\pm}$ и переменой порядка в соответствии с формулой $\mathbf{F}_{\pm u}\sigma = -\sigma\mathbf{F}_{\pm u}$, то после интегрирования по частям получим, что

$$(\sigma\mathbf{K}_{\pm x}(x, u) + \mathbf{K}_{\pm u}(x, u)\sigma \pm (\sigma\mathbf{K}_{\pm}(x, x)\mathbf{K}_{\pm}(x, u) - \\ - \mathbf{K}_{\pm}(x, x)\sigma\mathbf{K}_{\pm}(x, u)) \pm \int_{x}^{\pm\infty} (\sigma\mathbf{K}_{\pm x}(x, s) + \mathbf{K}_{\pm s}(x, s)\sigma \pm \\ \pm (\sigma\mathbf{K}_{\pm}(x, x)\mathbf{K}_{\pm}(x, s) - \mathbf{K}_{\pm}(x, x)\sigma\mathbf{K}_{\pm}(x, s)))\mathbf{F}_{\pm}(s + u)\, ds = 0. \tag{6.2.31}$$

Из того, что $\mathbf{F}_{\pm}$ суть матрицы типа $(\mathbf{G}_{\pm}, \varepsilon)$, следует, что эти уравнения имеют лишь тривиальные решения. Следовательно,

$$\sigma\mathbf{K}_{\pm x}(x, u) + \mathbf{K}_{\pm u}(x, u)\sigma - \sigma\mathbf{P}_{\pm}(x)\mathbf{K}_{\pm}(x, u) = 0,$$

где

$$\mathbf{P}_{\pm}(x) = \pm\sigma(\mathbf{K}_{\pm}(x, x)\sigma - \sigma\mathbf{K}_{\pm}(x, x)). \tag{6.2.32}$$

Теперь из определения функций $\tilde{\Psi}$ и Φ непосредственно следует, что

$$\tilde{\Psi}_x = \mathbf{P}_{+}(x)\tilde{\Psi} + ik\sigma\tilde{\Psi}, \qquad \Phi_x = \mathbf{P}_{-}(x)\Phi + ik\sigma\Phi. \tag{6.2.33}$$

Определяя $\mathbf{P}_{\pm}(x) = \begin{pmatrix} 0 & Q_{\pm} \\ R_{\pm} & 0 \end{pmatrix}$, мы получаем затем из (6.2.28) и (6.2.29) следующие неравенства:

$$|Q_{\pm}(x)| \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}, \quad |Q_{\pm}(x)| \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}, \\ |R_{\pm}(x)| \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}, \quad |R_{\pm}(x)| \leqslant C_{\varepsilon}^{\pm}(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}. \tag{6.2.34}$$

В действительности вовсе необязательно было предполагать, что $\mathbf{F}_{\pm}$ дифференцируемы. Такой же результат можно было бы получить, заменяя $\mathbf{F}_{\pm}$ последовательностью функций (см., например, Марченко и Агранович [1963] или Гасымов [1968]). На протяжении этого доказательства предполагалось, что индекс «+» указывал на область $-\infty < a \leqslant x$, в то время как индекс «—» указывал на область $a \leqslant x < \infty$. □

Сейчас мы укажем условия, которым должно удовлетворять множество данных для того, чтобы быть данными рассеяния для оператора $\mathbf{L}$, принадлежащего классу, который был определен в теореме 6.6. Предположим без потери общности, что заданные данные рассеяния будут определять S_+.

Теорема 6.17. *Пусть* $S_+ = \{R_+(k), \bar{R}_+(k), k_j, \bar{k}_l, P_j(x), \bar{P}_l(x), m_j, \bar{m}_l; j = 1, \ldots, N, l = 1, \ldots, \bar{N}\}$ *есть множество данных, такое что:*

(i) *Функции* $R_+(k)$, $\overline{R}_+(k)$ *мероморфны в полосе* $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0$, *где* $\varepsilon_0 < \min\{|\operatorname{Im} k_j|, |\operatorname{Im} \bar{k}_j|\}$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *и имеют лишь вещественные полюсы. Асимптотически* $R_+(k) = o(1/|k|)$, $\overline{R}_+(k) = o(1/|k|)$ при $|k| \to \infty$.

(ii) *Степени многочленов* P_{+j}, $\overline{P}_{+l}$ *равны* $m_j - 1$, $\bar{m}_l - 1$, *где* m_j, $\bar{m}_l$ *являются соответственно кратностями невещественных чисел* k, $\bar{k}_l$, $j = 1, \ldots, N$, $l = 1, \ldots, \bar{N}$.

(iii) $\widehat{S}_\pm$ *удовлетворяют условиям теоремы* 6.11.

(iv) *Функции* $\mathbf{F}_\pm$, *построенные по* $\widehat{S}_\pm$, *являются функциями типа* $(G_\pm, \varepsilon)$ *для некоторого* $\varepsilon > \varepsilon_0$; *более того, они дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам*

$$|\mathbf{F}_{\pm x}(x)| < C_\varepsilon^\pm e^{\mp \varepsilon x}.$$

Тогда $\widehat{S}_+$ *определяет оператор* L, *который удовлетворяет* (6.1.13) *и коэффициенты которого* Q *и* R *удовлетворяют неравенствам*

$$|Q(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{-2\varepsilon|x|}, \quad |Q_x(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{-2\varepsilon|x|},$$
$$|R(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{-2\varepsilon|x|}, \quad |R_x(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{-2\varepsilon|x|}.$$

Кроме того, данные рассеяния S_+ *для* L *в точности совпадают с* $\widehat{S}_+$.

Доказательство. Увеличим множество $\widehat{S}_+$, добавив к нему k_j $(\bar{k}_j)$, $j = N+1, \ldots, N+M$, — вещественные полюсы функций R_+ и $\overline{R}_+$ с кратностями m_j, $\bar{m}_j$ соответственно. Поскольку $\widehat{S}_+$ удовлетворяет условиям теоремы 6.11, то можно построить функции a, $\bar{a}$ таким образом, чтобы функции $R_- = \overline{R}_+ \bar{a} a^{-1}$ и $\overline{R}_- = R_+ a \bar{a}^{-1}$ также удовлетворяли условиям (i). Нормировочные многочлены P_{-j}, $\overline{P}_{-j}$ можно тогда построить по P_{+j}, $\overline{P}_{+j}$, применяя соотношения (v) теоремы 6.14. Затем мы образуем функции $\mathbf{F}_\pm$, которые, в силу пункта (iv) теоремы, будут функциями типа $(G_\pm, \varepsilon)$. Тогда применима теорема 6.15, согласно которой ядра $\mathbf{K}_\pm$ уравнений Марченко определены однозначно, так что построенные с их помощью функции

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(x, k) &= \widetilde{\Psi}_\infty(x, k) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, u)\, \widetilde{\Psi}_\infty(u, k)\, du, \\ \Phi(x, k) &= \Phi_{-\infty}(x, k) + \int_{-\infty}^x \mathbf{K}_-(x, u)\, \Phi_{-\infty}(u, k)\, du \end{aligned} \tag{6.2.35}$$

также однозначно определены в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$. Эти функции удовлетворяют уравнению (6.1.13) с потенциальными функциями $\mathbf{P}_\pm$ соответственно, где

$$|Q_\pm(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}, \quad |R_\pm(x)| \leqslant C_\varepsilon^\pm(a)\, e^{\mp 2\varepsilon x}. \tag{6.2.36}$$

Доказательство этой теоремы будет опираться на серию лемм.

Рассмотрим функции $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$, $\mathbf{J} = (J_1, J_2)$, определяемые соотношениями

$$\mathbf{H} = \tilde{\Psi}\begin{pmatrix} 1 & \overline{R}_+ \\ R_+ & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \Phi\begin{pmatrix} 1 & -R_- \\ -\overline{R}_- & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2.37}$$

Они мероморфны в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0$. Возьмем функцию $\mathbf{H}$. Из уравнения Марченко для $\mathbf{K}_+$ мы получим, что

$$\mathbf{K}_+(x, u) + \widehat{\mathbf{R}}_+(x+u) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, s)\,\widehat{\mathbf{R}}_+(s+u)\,ds = \widetilde{\mathbf{K}}_+(x, -u), \quad u \geqslant x, \tag{6.2.38}$$

где

$$\widehat{\mathbf{R}}_+(x) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & \int_{\nabla} \overline{R}_+(k)\, e^{-ikx}\,dk \\ \int_{\nabla} R_+(k)\, e^{ikx}\,dk & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_+(x, u) = -\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{M}_j(x-u) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, s)\,\mathbf{M}_j(s-u)\,ds\right)$$

и

$$\mathbf{M}_j(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{P}_j(x)\, e^{-ik_j x} \\ P_j(x)\, e^{ik_j x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Точно так же, как в предыдущей теореме, индекс «+» указывает на область $-\infty < a \leqslant x < \infty$, а индекс «—» относится к области $-\infty < x \leqslant a < \infty$. Если мы доопределим $\mathbf{K}_\pm(x, u) = 0$, $u < x$, то, применяя преобразование Фурье к (6.2.38) по отношению к матрице $\widehat{\Phi}_\infty(u, k)$, мы получим

$$\tilde{\Psi}(x, k) - \tilde{\Psi}_\infty(x, k) + \tilde{\Psi}(x, k)\begin{pmatrix} 0 & \overline{R}_+(x) \\ R_+(k) & 0 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{x} \widetilde{\mathbf{K}}_+(x, u)\,\tilde{\Psi}_\infty(u, -k)\,du. \tag{6.2.39}$$

Сравнивая это соотношение с (6.2.37), находим, что

$$\mathbf{H}(x, k) = \tilde{\Psi}_\infty(x, k) + \int_{-\infty}^{x} \widetilde{\mathbf{K}}_+(x, u)\,\tilde{\Psi}_\infty(u, -k)\,du, \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0. \tag{6.2.40}$$

Из свойств $\mathbf{K}_+(x, u)$, $\mathbf{K}_{+u}(x, u)$ следует, что $\bar{\psi}(x, k)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k < \varepsilon$, а $\psi(x, k)$ аналитична в полуплоскости

$\operatorname{Im} k > -\varepsilon$, где $\tilde{\Phi} = (\overline{\varphi}, \psi)$. Кроме того, для Φ имеет место следующее равномерное асимптотическое представление:

$$\tilde{\Psi}_\infty^{-1}(x, k)\tilde{\Psi}(x, k) = \mathbf{I} + o(1/|k|) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon. \tag{6.2.41}$$

Векторы-столбцы матрицы $\tilde{\Phi}_\infty^{-1}\tilde{\Phi}$ имеют такое же асимптотическое представление в соответствующих полуплоскостях.

Изучим теперь аналитические свойства ${}_x\mathbf{H}(k)$. Из определения $\tilde{\mathbf{K}}_+$ находим, что

$$\tilde{\mathbf{K}}_+(x, u) = -\sum_{j=1}^{N} \left(P_{+j}\left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)\left(e^{-iku}\psi(x, k)\right)\Big|_{k=k_j}, \right.$$

$$\left. \overline{P}_{+j}\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)\left(e^{iku}\overline{\psi}(x, k)\right)|_{k=\bar{k}_j}\right). \tag{6.2.42}$$

Положим

$${}_x\mathbf{D}(k)\tilde{\Psi}_\infty(x, k) = \mathbf{H}(x, k) - \tilde{\Phi}_\infty(x, k) - \int_\infty^x \mathbf{K}_+(x, k)\,\overline{\Psi}_\infty(u, -k)\,du.$$

Из асимптотики R_+ и $\overline{R}_+$ и из (6.2.37) следует, что для ${}_x\mathbf{D}$ справедлива равномерная асимптотическая формула

$${}_x\mathbf{D}(k) = o(1/|k|) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0. \tag{6.2.43}$$

Выбор подходящего контура в определении преобразования Фурье для ${}_x\mathbf{D} = ({}_xD_1, {}_xD_2)$ определяется выбором контура в преобразовании Фурье для $\mathbf{H}$:

$${}_x\hat{\mathbf{D}}(u) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\gamma {}_xD_1(k)\,e^{iku}\,dk, \int_\gamma {}_xD_2(k)\,e^{-iku}\,dk\right), \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0. \tag{6.2.44}$$

Из этого определения (или же переписывая уравнение Марченко в терминах ${}_x\mathbf{D}$) находим, что ${}_x\hat{\mathbf{D}}(u) = 0$ при $u \geqslant x$, так что обратное преобразование Фурье может быть записано в виде

$${}_x\mathbf{D}(k) = \int_{-\infty}^x {}_x\hat{\mathbf{D}}(u)\,\Psi_\infty(u, k)\,du. \tag{6.2.45}$$

Выберем $0 < \lambda < \varepsilon_0$ и положим $\eta = \operatorname{Im} k$. Применяя неравенство Шварца и равенство Парсеваля, получим оценки

$$\left|\int_{-\infty}^x {}_x\overline{D}_1(u)\,e^{-iku}\,du\right| \leqslant \int_\infty^x |{}_x\hat{D}_1(u)|\,e^{\eta u}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^x |{}_x\hat{D}_1(u)\,e^{\lambda u}|_{\mathrm{E}}^2\,du\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\infty}^x e^{2(\eta-\lambda)u}\,du\right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |D_1(\xi + i\lambda)|_E^2\, d\xi\right\}^{1/2} \frac{1}{(2(\eta-\lambda))^{1/2}}, \tag{6.2.46}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} {}_x\widehat{D}_2(u)\, e^{iku}\, du\right| \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |{}_xD_2(\xi - i\lambda)|_E^2\, d\xi\right\}^{1/2} \frac{1}{(2(\lambda-\eta))^{1/2}}. \tag{6.2.47}$$

Из неравенств (6.2.46), (6.2.47) и (6.2.43) следует, что функция ${}_x\mathbf{D}_1$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k > \lambda$, а функция ${}_x\mathbf{D}_2$ — в полуплоскости $\operatorname{Im} k < \lambda$. Если связать эту информацию с тем, что нам известно об аналитическом поведении ${}_x\mathbf{D}$, то можно будет заключить, что функции ${}_x\mathbf{D}_1$ и ${}_x\mathbf{D}_2$ мероморфны в полуплоскостях $\operatorname{Im} k > -\varepsilon_0$ и $\operatorname{Im} k < \varepsilon_0$ соответственно. Заметим, в частности, что именно вычисление интеграла, фигурирующего в определении ${}_x\mathbf{D}$, приводит к аналитическому продолжению. Применяя к обеим частям очевидного равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)^l e^{-i(k_j-k)u}\, du = \left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)^l \frac{e^{-i(k_j-k)x}}{-i(k_j-k)}, \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0 \tag{6.2.48}$$

преобразование Фурье, находим, что

$$P_{+l}\left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{-iku}\psi(x, k))_{k=k_j} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{m_j}\int\limits_{\psi}\left[\frac{F_{jl}(x)\, e^{-i(k_j-k)x}}{(k_j-k)^l}\right] e^{-iku}\, dk. \tag{6.2.49}$$

Комплекснозначные функции F_{jl} из последнего равенства ограничены на любом конечном интервале $[a, \infty[$, $a > -\infty$. Ясно, что выражение в квадратных скобках в (6.2.49) может быть аналитически продолжено в полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$, откуда и получается сформулированный выше результат.

В качестве немедленного следствия этого результата получаются формулы

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1(x, k)\} = -i\left\{P_{+l}\left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{ikx}\psi(x, k))\right\}_{k=k_j}, \tag{6.2.50}$$

$$\operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{e^{-ikx}H_2(x, k)\} = i\left\{\overline{P}_{+l}\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{-ikx}\bar{\psi}(x, k))\right\}_{k=\bar{k}_j}.$$

Кроме того, для $\mathbf{H}$ справедливы следующие равномерные асимптотические представления:

$$\begin{aligned} e^{ikx}H_1(x,\ k) &= o(1/|k|) \quad \text{при} \quad |k|\to\infty, \quad \operatorname{Im} k > -\varepsilon_0, \\ e^{-ikx}H_2(x,\ k) &= o(1/|k|) \quad \text{при} \quad |k|\to\infty, \quad \operatorname{Im} k < \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{6.2.51}$$

Поскольку $\mathbf{H}(x,\ k)$ мероморфна в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0$, к (6.2.37) можно применить теорему Коши. Заметим сначала, что преобразование Фурье (6.2.37) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} [\mathbf{H}(x,\ k) - \Psi_\infty(x,\ k)]\,\Psi_\infty(u,\ -k)\,dk = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} (\widetilde{\Psi}(x,\ k) - \Psi_\infty(x,\ k))\,\Psi_\infty(u,\ -k)\,dk + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} (\widetilde{\Psi}(x,\ k) - \Psi_\infty(x,\ k))\,\mathbf{R}_+(k)\,\Psi_\infty(u,\ -k)\,dk + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \Psi_\infty(x,\ k)\,\mathbf{R}_+(k)\,\Psi_\infty(u,\ -k)\,dk. \end{aligned} \tag{6.2.52}$$

Если мы замкнем контуры, используя интегралы вдоль контура $\bar{\gamma}$, то с учетом асимптотического поведения подынтегральных функций при $|k|\to\infty$ получим, что

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1(x,\ k)\} = \operatorname{Res}_{k=k_j}\{R_+(k)\,(e^{ikx}\psi(x,\ k))\}, \qquad \operatorname{Im} k_j = 0 \tag{6.2.53}$$

$$\operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{e^{-ikx}H_2(x,\ k)\} = \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{\bar{R}_+(k)\,(e^{-ikx}\bar{\psi}(x,\ k))\}, \quad \operatorname{Im}\bar{k}_j = 0.$$

Аналогичные соотношения можно установить для функций $\mathbf{J}$ и Φ.

Лемма 6.18. *Пусть выполняются условия теоремы* 6.15. *Тогда существуют и однозначно определены функции* $\widetilde{\Psi}(x,\ k)$, $\Phi(x,\ k)$, $\mathbf{H}(x,\ k)$ и $\mathbf{J}(x,\ k)$, *такие что*:

(i) *Функции* $\psi(x,\ k)$, $\varphi(x,\ k)$, ($\bar{\psi}(x,\ k)$, $\bar{\varphi}(x,\ k)$) *могут быть аналитически продолжены в верхнюю (нижнюю) полуплоскость* $\operatorname{Im} k > -\varepsilon$ ($\operatorname{Im} k < \varepsilon$), *в то время как* $H_1(x,\ k)$, $J_2(x,\ k)$ ($H_2(x,\ k)$, $J_1(x,\ k)$) *мероморфны в полуплоскостях* $\operatorname{Im} k > -\varepsilon_0$ ($\operatorname{Im} k < \varepsilon_0$) *соответственно. Функции* $H_1(x,\ k)$, $J_2(x,\ k)$ ($H_2(x,k)$, $J_1(x,\ k)$) *имеют полюсы порядка* m_j *в точках* k_j ($\bar{k}_j$), $j = 1, \ldots, N + M$, *соответственно.*

(ii) *Вычеты функции* $\mathbf{H}(x,\ k)$ ($\mathbf{J}(x,\ k)$) *связаны со значениями функции* $\widetilde{\Psi}(x,\ k)$ ($\Phi(x,\ k)$) *следующими формулами*:

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1(x,\ k)\} = -i\left\{P_{+j}\left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{ikx}\psi(x,\ k))\right\}_{k=k_j}, \qquad \operatorname{Im} k_j > 0,$$

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{-ikx}H_2(x,\ k)\} = i\left\{\overline{P}_{+I}\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{-ikx}\bar{\psi}(x,\ k))\right\}_{k=k_j},$$

$$\operatorname{Im} k_j < 0, \quad j = 1, \ \ldots, \ N,$$

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1(x,\ k)\} = \operatorname{Res}_{k=k_j}\{R_+(k)\,(e^{ikx}\psi(x,\ k))\}, \qquad \operatorname{Im} k_j = 0,$$

$$\operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{e^{-ikx}H_2(x,\ k)\} = \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{\overline{R}_+(k)\,(e^{-ikx}\psi(x,\ k))\},$$

$$\operatorname{Im} k_j = 0, \quad j = N+1, \ \ldots, \ N+M.$$

Аналогичные соотношения получаются для $\mathbf{J}(x,\ k)$ *и* $\Phi(x,\ k)$. *В этом случае в написанных выше формулах следует* H_1, H_2 *заменить на* J_2, J_1; P_+, $\overline{P}_+$ *— на* P_-, $\overline{P}_-$; R_+, $\overline{R}_+$ *— на* R_-, $\overline{R}_-$; ψ, $\bar{\psi}$ *— на* φ, $\bar{\varphi}$, *наконец,* i *— на* $-i$.

(iii) *Для больших* $|k|$ *справедливы следующие равномерные асимптотические представления при* $|k| \to \infty$:

$$\mathbf{H}(x,\ k)\,\Psi_\infty^{-1}(x,\ k) = \mathbf{I} + o(1/|k|),$$

$$\mathbf{J}(x,\ k)\,\Psi_\infty^{-1}(x,\ k) = \mathbf{I} + o(1/|k|),$$

$$\tilde{\Psi}(x,\ k)\,\Psi_\infty^{-1}(x,\ k) = \mathbf{I} + o(1/|k|),$$

$$\Phi(x,\ k)\,\Psi_\infty^{-1}(x,\ k) = \mathbf{I} + o(1/|k|),$$

которые выполняются в соответствующих областях аналитичности функций, стоящих в левых частях этих представлений.

(iv) *Имеют место формулы*

$$\mathbf{H}(x,\ k) = \tilde{\Psi}(x,\ k)\begin{pmatrix} 1 & \overline{R}_+(k) \\ R_+(k) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}(x,\ k) = \Phi(x,\ k)\begin{pmatrix} 1 & -R_-(k) \\ -\overline{R}_-(k) & 1 \end{pmatrix},$$

справедливые в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0$.

Докажем теперь лемму, которая эффективно решает обратную задачу.

Лемма 6.19. *Функции* $\Phi(x,\ k)$, $\tilde{\Psi}(x,\ k)$ *удовлетворяют соотношению*

$$\Phi(x,\ k) = \tilde{\Psi}(x,\ k)\,\tilde{\mathbf{A}}(k), \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0,$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(k) = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Определим функции

$$\mathbf{H}' = \Phi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1}, \quad \tilde{\Psi}' = \mathbf{J}\begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{6.2.54}$$

Векторы-столбцы этих матриц-функций $\mathbf{H}' = (H_1', H_2')$, $\tilde{\Psi}' = (\tilde{\psi}', \psi')$ таковы, что $\tilde{\psi}'$ и ψ' аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Im} k < \varepsilon_0$, $\operatorname{Im} k > -\varepsilon_0$ соответственно, в то время как функции H_1' и H_2' мероморфны в полуплоскостях $\operatorname{Im} k > -\varepsilon_0$, $\operatorname{Im} k < \varepsilon_0$ соответственно. Из определения J легко выводим, что

$$\mathbf{H}'(x, k) = \tilde{\Psi}'(x, k) \begin{pmatrix} 1 & \bar{R}_+(k) \\ R_+(k) & 1 \end{pmatrix}, \quad |\operatorname{Im} k| < \varepsilon_0. \tag{6.2.55}$$

Применяя те же соображения, которые позволили получить формулы (6.2.53), находим, что при $j = N+1, \ldots, N+M$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1'(x, k)\} = \operatorname{Res}_{k=k_j}\{R_+(k)\,(e^{ikx}\psi'(x, k))\}, \\ &\operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{e^{-ikx}H_2'(x, k)\} = \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{\bar{R}_+(k)\,(e^{-ikx}\tilde{\psi}'(x, k))\}. \end{aligned} \tag{6.2.56}$$

Используя аналитичность функций Φ и $\tilde{\Psi}'$ и их представления (6.2.54), получаем формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1'(x, k)\} &= \operatorname{Res}_{k=k_j}\left(e^{ikx}\frac{\varphi(x, k)}{a(k)}\right), \\ \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\{e^{-ikx}J_2(x, k)\} &= \operatorname{Res}_{k=\bar{k}_j}\left(e^{-ikx}\frac{\tilde{\psi}'(x, k)}{\bar{a}(k)}\right) \end{aligned} \tag{6.2.57}$$

с аналогичными выражениями для других компонент матриц-функций. Таким образом, применяя лемму 6.18 и вторую формулу из (6.2.57), приходим к равенству

$$\sum_{l=0}^{m_j-1} C_l^{m_j-1}\,(e^{-ikx}\psi'(x, k))_{k=k_j}^{(l)}\left(\frac{(k-k_j)^{m_j}}{(m_j-1)!\,a(k)}\right)_{k=k_j}^{(m_j-1-l)} = \sum_{l=0}^{m_j-1}(i)^{l+1}P_{-l}\frac{\partial^l}{\partial k^l}(e^{-ikx}\varphi(x, k))_{k=k_j}. \tag{6.2.58}$$

Первая формула из (6.2.57) вместе с пунктом (v) теоремы 6.14 позволяют получить равенство

$$\operatorname{Res}_{k=k_j}\{e^{ikx}H_1'(x, k)\} = -i\left\{P_{+l}\left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)(e^{ikx}\psi'(x, k))\right\}_{k=k_j}, \tag{6.2.59}$$

совпадающее с первым соотношением из (6.2.50). Второе соотношение из (6.2.50) удовлетворяется функциями H_2' и $\tilde{\psi}'$.

Далее легко получить представления (при $|k| \to \infty$)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(x, k)\,\Psi_\infty(x, -k) &= \mathbf{1} + o(1/|k|), \\ \tilde{\Psi}'(x, k)\,\Psi_\infty(x, -k) &= \mathbf{1} + o(1/|k|), \end{aligned} \tag{6.2.60}$$

дающие равномерную асимптотику в областях аналитичности функций $\mathbf{H}'$ и $\widetilde{\Psi}'$. Таким образом, в силу леммы 6.18 $\mathbf{H}' \equiv \mathbf{H}$ и $\widetilde{\Psi}' \equiv \widetilde{\Psi}$. Отсюда немедленно следует утверждение леммы. □

Лемма 6.19 требует, чтобы Φ и $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяли некоторому дифференциальному уравнению. Из теоремы 6.16 следует, что $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_- \equiv \mathbf{P}$ и что $\widehat{S}_+$ суть данные рассеяния S_+ оператора $\mathbf{L}$. Условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $\mathbf{L}$, также следуют из теоремы 6.16.

Мы решили обратную задачу при очень сильных ограничениях на данные рассеяния. Рассмотрение решений при произвольных начальных данных (см. следующий раздел) показывает, что такие ограничения в действительности могут оказаться излишними. Тем не менее главная трудность, связанная с этим методом, состоит в более точном выделении условий, которым должны удовлетворять потенциалы Q и R для того, чтобы обеспечить существование лишь конечного числа точек сингулярного спектра. В том случае, когда Q и R удовлетворяют уравнению для моментов, еще предстоит исследовать структуру этого спектра. Заметим, что любое ослабление условий на потенциалы приведет к исследованию тех же задач, которые были здесь рассмотрены (ясно, что многие результаты можно немедленно приспособить для более слабых ограничений на потенциальные функции). Наконец, мы упоминаем, что применение экспоненциальной функции в условиях, которым должны удовлетворять потенциалы, приводит к компактным формулам, с которым удобно работать.

Вернемся теперь к задаче Коши для интегрируемых эволюционных уравнений системы ЗШ—АКНС (см. (6.1.112)):

$$\begin{aligned} &\sigma_3 U_t - \Omega\left(\mathbf{L}_1^A\right) U = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \\ &U(x, 0) = F(x), \end{aligned} \tag{6.2.61}$$

где $U = (R, Q)^T$. Эволюционные уравнения имеют вид $U_t = \mathbf{K}(U)$, где $\mathbf{K}$ — локальный нелинейный оператор, содержащий лишь элементы матрицы U и их x-производные. Легко проверяется, что оператор $\Omega\left(\mathbf{L}_1^A\right)$ как раз такого типа, если $\Omega(k)$ — многочлен по k.

Рассматривая в гл. 4 интегрируемые эволюционные уравнения, ассоциированные с изоспектральным оператором Шрёдингера, мы показали, что если начальные данные достаточно гладкие и достаточно быстро убывают при $|x| \to \infty$, то задачу Коши для этого случая можно решить с помощью метода обратной задачи рассеяния. То же самое верно для интегрируемых эволюционных уравнений, ассоциированных с изоспектральным оператором ЗШ—АКНС. В большей части остающегося раздела мы будем для простоты предполагать, что функции Q и R не являются

линейно зависимыми. Наш метод разбит на шаги, схематично изображенные на рис. 6.3. Мы отсылаем читателя к разд. 4.2, где этот метод обсуждается в полном объеме. Здесь же мы объясняем его лишь в общих чертах, просто заменяя Q на U. Можно показать, в частности, что в линейном приближении этот метод сводится к методу Фурье решения линейных эволюционных уравнений (см. упражнения в конце этой главы.)

Следующее обстоятельство является существенным. Если мы хотим применить метод обратной задачи рассеяния для решения

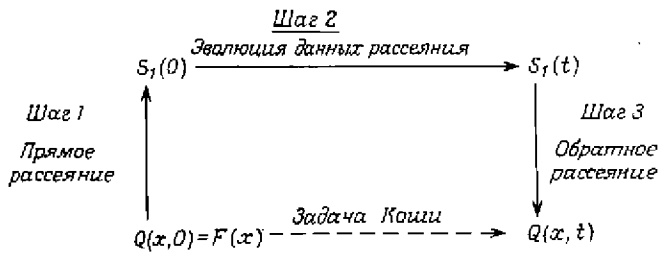


Рис. 6.3. Метод обратной задачи рассеяния.

задачи (6.2.61), то мы должны будем наложить дополнительные условия на начальные данные, обеспечивающие единственность восстановленной функции $U(x, t)$ на шаге 3, т. е. обеспечить достаточную гладкость U для того, чтобы могли выполняться уравнения (6.2.61). Очевидно, это будет зависеть от степени многочлена $\Omega(k)$. Наши рассуждения здесь весьма схожи с приведенными в разд. 4. Мы исследуем теперь вопрос о существовании решения задачи (6.2.61) для начальных данных, принадлежащих к классу функций, удовлетворяющих условиям теоремы 6.6. Единственность будет устанавливаться отдельно для каждого специфического уравнения. Для решения этой задачи нам понадобится ряд лемм и потребуются условия на $F(x)$, достаточные для существования решения. Эти условия даются в теореме 6.25.

Лемма 6.20. *Если* $F(x) \in C^n$ *и*

$$\left|F(x)^{(j)}\right| \leqslant C_\varepsilon^j e^{-2\varepsilon|x|}, \quad j \leqslant n,$$

то для $j+l \leqslant n$ *существуют функции* $K_\pm^{(j,l)}(x, y)$, *для которых выполняются следующие оценки:*

$$\left|K_\pm^{(j,l)}(x, y)\right| \leqslant C_\varepsilon^{(j+l)} \pm e^{\varepsilon(x+y)}.$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай K_+, результаты для $\overline{K}_+$, K_- и $\overline{K}_-$ доказываются аналогично. Дифференцируя

уравнения (6.1.59), мы получим, как и при доказательстве следствия 6.7.2, что

$$K_{+1}^{(0,\,1)}(x,\ y) = -G_{01}((1/2)(x+y)) - \int_{x}^{(1/2)(x+y)} Q(s)\, K_{+2}^{(0,\,1)}(s,\ y+x-s)\, ds,$$

$$K_{+2}^{(0,\,1)}(x,\ y) = -\int_{0}^{\infty} K_{+1}^{(0,\,1)}(s,\ y-x+s)\, R(s)\, ds,$$

$$K_{+1}^{(1,\,0)}(x,\ y) = -(1/4)\dot{Q}((1/2)(x+y)) + Q(x)\, K_{+2}(x,\ y) - (1/4)\, Q((1/2)(x+y)) \int_{(1/2)(x+y)}^{\infty} Q(s)\, R(s)\, ds - \int_{x}^{(1/2)(x+y)} Q(s)\, K_{+2}^{(0,\,1)}(s,\ y+x-s)\, ds,$$

$$K_{+2}^{(1,\,0)}(x,\ y) = \int_{x}^{\infty} K_{+1}^{(0,\,1)}(s,\ y-x+s)\, R(s)\, ds + K_{+1}(x,\ y)\, R(x),$$

где

$$G_{01}(x) = (1/4)\dot{Q}(x) + (1/4)\, Q(x) \int_{0}^{\infty} Q(s)\, R(s)\, ds. \qquad (6.2.62)$$

Отсюда, как уже делалось при доказательстве указанного следствия, легко вывести результат для $K_{+}^{(0,\,1)}$ и $K_{+}^{(1,\,0)}$ посредством вычислений, аналогичных случаю $K_{+}^{(0,\,0)}$. Теперь без вхождения в детали становится ясно, что результат леммы получается по индукции. Во всех случаях при переходе к следующему порядку, если результат для $K_{+}^{(l,\,l)}$ уже получен, то затем устанавливается результат для $K_{+}^{(l,\,l+1)}$.

Сейчас мы рассмотрим свойства функций рассеяния, ассоциированных с оператором $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{L}\ (t=0)$, определенным в лемме 6.13. Мы можем получить интегральные представления этих функций в терминах ядер $\mathbf{K}_{\pm}$, используя определения (6.1.31)—(6.1.33) и операторы преобразования с ядрами $\mathbf{K}_{\pm}$, определенные в теореме 6.7. Находим, что

$$e^{2ikx} b(k) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{x}\pi_1(y)\, e^{-2iky}\, dy, \quad e^{-2ikx}\bar{b}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{x}\bar{\pi}_1(y)\, e^{2iky}\, dy,$$

$$a(k) = 1 + \int_{0}^{\infty} \pi_2(y)\, e^{2iky}\, dy, \quad \bar{a}(k) = 1 + \int_{0}^{\infty} \bar{\pi}_2(y)\, e^{-2iky}\, dy,$$

где

$$ {}_x\pi_1(y) = B_{-2}(x, y) - \overline{B}_{+2}(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{\min(y, 0)} B_{-2}(x, v)\,\overline{B}_{+1}(x, y - v)\,dv - $$

$$ - \int\limits_{\max(0, y)}^{\infty} \overline{B}_{+2}(x, v)\,B_{-1}(x, y - v)\,dv, $$

$$ {}_x\bar{\pi}_1(y) = \overline{B}_{-1}(x, y) - B_{+1}(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{\min(0, y)} \overline{B}_{-1}(x, v)\,B_{+2}(x, y - v)\,dv - $$

$$ - \int\limits_{\max(0, y)}^{\infty} \overline{B}_{-2}(x, y - v)\,B_{+1}(x, v)\,dv, \quad (6.2.63) $$

$$ \pi_2(y) = B_{-1}(x, -y) + B_{+2}(x, y) + \int\limits_0^y B_{-1}(x, v - y)\,B_{+2}(x, v)\,dv - $$

$$ - \int\limits_0^y B_{-2}(x, v - y)\,B_{+1}(x, v)\,dv, $$

$$ \bar{\pi}_2(y) = \overline{B}_{+1}(x, y) + \overline{B}_{-2}(x, -y) + \int\limits_0^y \overline{B}_{+1}(x, v)\,\overline{B}_{-2}(x, v - y)\,dv - $$

$$ - \int\limits_0^y \overline{B}_{+2}(v, x)\,\overline{B}_{-1}(x, v - y)\,dv, $$

$$ B_{\pm}(x, y) = 2K_{\pm}(x, 2y + x). $$

Свойства дифференцируемости функций рассеяния уже известны. Именно, согласно условиям теоремы 6.6, они аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ и, стало быть, бесконечно дифференцируемы в этой полосе. Однако нам хотелось бы выделить те асимптотические свойства функций рассеяния, которые индуцируются дифференцируемостью и асимптотическими свойствами начальных данных. Тем же способом, каким была получена лемма 4.5, можно показать, что справедлива

Лемма 6.21. *Если* $F(x) \in C^n$, *то функции* $\{{}_x\pi_1^{(m)}(y), {}_x\bar{\pi}_1^{(m)}(y), m \leqslant n - 1\}$ *непрерывны.*

Из лемм 6.20, 6.21 и формул (6.2.63) вытекает следующий результат.

Лемма 6.22. *Если* $F(x) \in C^n$ *и* $|F^{(l)}(x)| \leqslant C_\varepsilon^l e^{-2\varepsilon|x|}$, *то функции* $\{{}_x\pi_1, {}_x\bar{\pi}_1, \pi_2, \bar{\pi}_2\}$ *принадлежат классу* C^{n-1} *и, кроме того,*

существуют постоянные $C_\varepsilon^{\pm l}$, $\bar{C}_\varepsilon^{\pm l}$, C_ε^l *и* $\bar{C}_\varepsilon^l$, *для которых выполняются неравенства*

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left|{}_0\pi_1^{(l)}(y)\exp(\pm 2\varepsilon y)\right| \leqslant C_\varepsilon^{\pm l}; \quad \lim_{y\to\pm\infty} \left|{}_0\bar{\pi}_1^{(l)}(y)\exp(\pm 2\varepsilon y)\right| \leqslant \bar{C}_\varepsilon^{\pm l};$$

$$\lim_{y\to\infty} \left|\pi_2^{(l)}(y)\exp(2\varepsilon y)\right| \leqslant C_\varepsilon^l; \quad \lim_{y\to\infty} \left|\bar{\pi}_2^{(l)}(y)\exp(2\varepsilon y)\right| \leqslant \bar{C}_\varepsilon^l.$$

Лемма 6.22 позволяет описать асимптотические свойства функций рассеяния. А именно, справедлива

Лемма 6.23. *Если* $F(x) \in C^n$ *и* $|F^{(l)}(x)| \leqslant C_\varepsilon^l e^{-2\varepsilon|x|}$, *то* $R_+(k)$, $\bar{R}_+(k)$, $R_-(k)$ *и* $\bar{R}_-(k)$ *суть мероморфные функции в полосе* $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$, *допускающие в этой полосе равномерные асимптотические разложения вида* $R^{(m)}(k) = o(|k|^{-(n+1)})$ *при* $|k| \to \infty$ *для всех* m.

Доказательство. Мы получим утверждение леммы для $R_+(k)$. Для других функций соответствующие результаты доказываются аналогично. Имеем

$$a^{(m)}(k) = \int_0^\infty (2iy)^m \pi_2(y) e^{2iky}\, dy,$$

$$b^{(m)}(k) = \int_{-\infty}^\infty (-2iy)^m {}_0\pi_1(y) e^{-2iky}\, dy$$

и

$$(2ik)^p b^{(m)}(k) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^p}{\partial y^p}(-2iy)^m {}_0\pi_1(y) e^{-2iky}\, dy.$$

Из свойств функций $\pi_2(y)$ и ${}_0\pi_1(y)$ ясно, что производные $a^{(m)}(k)$ и $b^{(m)}(k)$ существуют и ограничены для всех m. Из последнего равенства получается, что $b^{(m)}(k) = o(1/|k|^{n-1})$ для всех m. Окончательный результат вытекает тогда из определения $R_+ = ba^{-1}$ и известных асимптотических свойств R_+. □

Эволюция во времени данных рассеяния S_+ указана теоремой 6.11. В частности, мы можем написать формулы

$$R_+(k, t) = R_+(k, 0)e^{\Omega(k)t}, \quad \bar{R}_+(k, t) = \bar{R}_+(k, 0)e^{-\Omega(k)t} \tag{6.2.64}$$

Можно также формально записать выражения

$$\begin{aligned} \hat{R}_+(x, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma dk R_+(k, t)e^{ikx}, \\ \hat{\bar{R}}_+(x, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\gamma}} dk \bar{R}_+(k, t)e^{-ikx} \end{aligned} \tag{6.2.65}$$

и затем после вывода выражений для $P_{+j}(x, t)$, $\bar{P}_{+j}(x, t)$ образовать функцию $\mathbf{F}_+(x, t)$. Предполагая выполненными условия теоремы 6.17, можно по уравнениям Марченко однозначно восстановить функции $Q(x, t)$ и $R(x, t)$, для которых выполняется уравнение (6.1.13) с решениями Йоста $\Psi(x, t)$, $\Phi(x, t)$, построенными в соответствии с теоремой 6.16. Предположим временно, что $S_+(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 6.17. Тогда можно доказать следующую лемму.

Лемма 6.24. *Пусть для* $S_+(t)$ *выполнены условия теоремы* 6.17, *и пусть* $R^{(m, 0)}(k, t) = o(|k|^{-(n-1)})$ *в полосе* $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$ *для всех* m *при* $|k| \to \infty$. *Тогда* $U^{(j, l)}(x, t)$, $j + l \deg \Omega(k) \leqslant$ $\leqslant n - 2$ *существуют и удовлетворяют неравенствам* $|U^{(j, l)}(x, t)| \leqslant C_\varepsilon^{jl}(t) e^{-2\varepsilon|x|}$.

Доказательство. Поскольку $R_+(k, t)$ существует и удовлетворяет условиям леммы, то можно записать представление

$$\hat{R}_+^{(j, l)}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dk\, (ik)^{(j)} (\Omega(k))^{(l)} R_+(k, t). \qquad (6.2.66)$$

Пусть $\deg \Omega(k) = s$. Тогда $\hat{R}_+^{(j, l)}(k, t)$ существует для $j + ls \leqslant$ $\leqslant n - 2$, поскольку $R_+(k, t)$ имеет такое же асимптотическое поведение при $|k| \to \infty$, что и $R_+(k, 0)$. Если продифференцировать уравнение Марченко для $\mathbf{K}_+$, то получится, что

$$\mathbf{K}_+^{(0, l, 0)}(x, u, t) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+^{(0, l, 0)}(x, s, t) \mathbf{F}_+(s + u, t)\, ds =$$

$$= -\mathbf{F}_+^{(l, 0)}(x + u, t) - \sum_{m=0}^{l} C_m^l \int \mathbf{K}_+^{(0, l-m, 0)}(x, s, t) \mathbf{F}_+^{(m, 0)}(s + u, t)\, ds. \qquad (6.2.67)$$

Отсюда вытекает существование производных $K_+^{(0, l, 0)}(x, u, t)$ для $j \leqslant n - 2$. Можно теперь утверждать, что существуют производные $\mathbf{K}_+^{(i, l, 0)}(x, u, t)$, $i + j \leqslant n - 2$, и из формул (6.2.67) получить следующие оценки:

$$|\mathbf{K}_+^{(i, l, 0)}(x, u, t)| \leqslant C_\varepsilon^{ij+}(a, t) \exp[-\varepsilon(x + u)], \quad -\infty < a \leqslant x, \qquad (6.2.68)$$

где свойства функций $C_\varepsilon^{ij+}(a, t)$ еще подлежат изучению. Производные по t функции $\mathbf{K}_+$ удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{K}_{+t}(x, u, t) + \int_x^\infty \mathbf{K}_{+t}(x, s) \mathbf{F}_+(s + u) ds =$$

$$= -\sum_{l=0}^{s} a_l \left\{ \mathbf{F}_+^{(l, 0)}(x + u, t) + \int_x^\infty \mathbf{K}_+(x, s) \mathbf{F}_+^{(l, 0)}(s + u, t)\, ds \right\}. \qquad (6.2.69)$$

Применяя те же соображения, что и указанные в предыдущих случаях, приходим к неравенствам

$$\left|\mathrm{K}_{+}^{(j,\,l,\,1)}(x,\,u,\,t)\right| \leqslant C_{\varepsilon}^{jl+}(a,\,t)\exp\left[-\varepsilon(x+u)\right], \qquad -\infty < a \leqslant x. \tag{6.2.70}$$

Сходные вычисления для K_{-} и теорема 6.17 позволяют заключить, что функция $U(x,\,t)$ обладает непрерывными производными порядка j по x и l по t ($j + ls \leqslant n - 3$) и что функции Йоста $J(x,\,t,\,k)$ существуют вместе со своими производными $J^{(j,\,l,\,0)}(x,\,t,\,k)$, где $j + ls \leqslant n - 2$. Оценки для $U^{(j,\,l)}(x,\,t)$ следуют тогда из неравенств (6.2.70) и аналогичных оценок для ядра K_{-}. □

Теорема 6.25. *Пусть* $F(x) \in C^n$ *и* $\left|F_{(x)}^{(l)}\right| \leqslant C_{\varepsilon}^{l}e^{-2\varepsilon|x|}$, $j \leqslant n$, *где* $n \geqslant \deg\Omega(k) + 3$. *Тогда если данные* $S_{+}(t)$ *удовлетворяют условиям леммы* 6.24, *то функция* $U(x,\,t)$ *удовлетворяет уравнению* (6.2.61).

Доказательство. Из определения L_1^A (уравнение (6.1.112)) видно, что, если $\deg\Omega(k) = s$, то нам требуется существование $U(x,\,t)$ $(j,\,0)$ $(j \leqslant s + 1)$ и $U(x,\,t)$ $(0,\,1)$. Положим $n = s + 3$. Тем самым обеспечено существование выражения $\Omega(\mathrm{L}_1)\varphi^{(2)}$. Следовательно, можно записать соотношение

$$R_{+t}(k,\,t) - \Omega(k)R_{+}(k,\,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sigma_3 U_t - U\Omega(\mathrm{L}_1)\right]\varphi^{(2)}(x,\,k)\,dx. \tag{6.2.71}$$

Поскольку по определению левая часть равенства (6.2.71) есть тождественный нуль, то мы получим равенство

$$\sigma_3 U_t(x,\,t) - \Omega\left(\mathrm{L}_1^A\right)U(x,\,t) = 0. \tag{6.2.72}$$

Так как мы не исследовали свойства функций $C_{\varepsilon}^{jl}(t)$, то мы не выяснили, каким ограничениям, возникающим в лемме 6.24, следует подчинить функции $\Omega(k)$, $F(x)$.

Если $\Omega(k) = \sum_{j=0}^{s} a_j k^j$, то, как следует из (6.2.65) при вещественных k, функции $\widehat{R}_{+}$, $\widehat{\widetilde{R}}_{+}$ определены лишь в тех случаях, когда (а) a_j вещественно и отрицательно и k^j — четная степень k или (б) a_j — мнимое число. Без потери общности можно ограничиться рассмотрением многочленов $\Omega(k)$, состоящих полностью либо из членов типа (а), либо из членов типа (б). Функции типа (б) представляют особый интерес, так как интегрируемые уравнения для «редуцированной задачи», т. е. такие, для которых $R = \alpha Q$, $R = \alpha Q^*$ или $R = \mathrm{const}$, являются как раз уравнениями такого типа (см. задачу 1 к разд. 6.3). Этот класс интегрируемых урав-

нений содержит все важные с физической точки зрения уравнения. При рассматриваемых условиях на начальные данные функция $R_+(k, t)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon$. Мы также должны требовать, чтобы интеграл

$$\widehat{R}_+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} dk R_+(k, t)\, e^{ikx} \tag{6.2.73}$$

был определен для $\delta \leqslant \eta \leqslant \varepsilon_0 - \delta$ и $0 < \delta < \varepsilon_0/2$. Пусть $a_{jl} > \varepsilon_0$. Тогда интеграл (6.2.73) существует для широкого класса многочленов. В частности, мы видим, что он определен в тех случаях, когда функция $\Omega(k)$ совпадает с одним из выражений $-k^2$, $-k^4$, $-6a_{10}k^2$, ik и ik^3. В действительности можно выписать формулы для больших классов многочленов, для которых (6.2.73) определен. Например,

$$\Omega_1(k) = \sum_{l=0}^{J} ik^{(2l-1)} - 2l C_{2l+1}^{2l-1} a_l^{2(2l-1)}$$

с $a_{j0} = (C_+^{2j-1})^{1/2}$ определяет один из таких классов многочленов. Рассмотрим для простоты пример, когда $\Omega(k) \equiv ik^3$. В этом случае мы находим, что

$$|\widehat{R}_+(x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} d\xi\, |R_+(k, 0)|\, e^{-\eta x + (-3\eta\xi^2+\eta^3)t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} e^{\eta^3 t} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} d\xi\, |R_+(k, 0)|\, e^{-\eta x}, \quad t \geqslant 0. \tag{6.2.74}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{R}_+(x, t)\, e^{\eta x}|^2 dx\right]^{1/2} \leqslant e^{\eta^3 t} C_\delta^+, \quad t \geqslant 0. \tag{6.2.75}$$

Поскольку предполагается, что $S_+(t)$ удовлетворяет условиям леммы 6.24, то получается оценка

$$|\mathbf{F}_+(x, t)| \leqslant C(a, t) e^{-\varepsilon x}, \quad -\infty < a \leqslant x. \tag{6.2.76}$$

Теперь, поскольку $\mathbf{K}_+(x, t)$ определяется однозначно, то, рассуждая подобно тому, как мы делали при выводе (6.2.20) из уравнения Марченко и леммы 6.13, мы находим, что для рассматриваемого случая $\Omega(k) = ik^3$ функция $C(a, t)$ является монотонно растущей функцией от t. Итак, оказывается, что решение лишь тогда принадлежит классу функций $|U(x, t)| \leqslant Ce^{-2\varepsilon|x|}$, когда обратная задача решается на конечном интервале по времени. В конце концов любое такое начальное решение, для которого R_+ не является тождественным нулем, выйдет за рамки этого класса

(см. асимптотическое поведение решений интегрируемых уравнений для больших времен, рассмотренное в разд. 6.3). Проблемы такого рода не возникают в случае, когда $R_+(k, 0)$, $\overline{R}_+(k, 0)$ суть тождественные нули в $S_+(0)$. Класс интегрируемых уравнений, определенных функцией $\Omega_1(k)$, также допускает решения по начальным значениям в соответствии с теоремой 6.25, остающиеся внутри требуемого класса функций в течение конечного времени.

В итоге получается, что хотя мКдФ может быть решено для конечных времен в предположении, что выполнены условия теоремы 6.25, все же для нелинейного уравнения Шрёдингера мы не охватили случая непрерывного спектра; наши ограничения на класс решений исключают это. Что в действительности необходимо, так это оперирование с сингулярным спектром в случае, когда начальные данные удовлетворяют уравнению для моментов (см. теорему 6.1).

В упражнении в конце этой главы мы устанавливаем существование решений в задачах типа (6.2.61) для редуцированного класса уравнений $R = -Q^*$.

В заключение мы упомянем о необходимости изучения интегрируемых уравнений, определяемых сингулярными дисперсионными соотношениями. Если воспользоваться процедурой из разд. 6.4, то можно вывести формально из (6.1.130), что

$$(\mathbf{L}_1^A - k\mathbf{I})^{-1} U = -2a^{-1}\varphi \circ \psi. \tag{6.2.77}$$

Следовательно, если дисперсионное соотношение имеет вид $\Omega(k) = (k - k_1)^{-1}$, то из (6.1.112) в качестве интегрируемого уравнения получается

$$\sigma_3 U_t = (\mathbf{L}_1^A - k_1\mathbf{I})^{-1} U = -2\left(\frac{\varphi \circ \psi}{a}\right)_{k=k_1}. \tag{6.2.78}$$

Аналогично если $\Omega(k) = (k - k_1)^{-n}$, то интегрируемое уравнение имеет вид

$$\sigma_3 U_t = \frac{-2}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} \left(\frac{\varphi \circ \psi}{a}\right)_{k=k_1}. \tag{6.2.79}$$

Если $\operatorname{Im} k_1 = 0$, то из асимптотического представления (6.2.79) при $|x| \to \infty$ мы находим дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции рассеяния R_+ и $\overline{R}_+$. Легко видеть, что эти условия таковы:

$$\frac{\partial^m}{\partial k^m} R_+(k)\big|_{k=k_1} = 0, \quad \frac{\partial^m}{\partial k^m} \overline{R}_+(k)\big|_{k=k_1} = 0, \quad m = 0, \ldots, (n-1). \tag{6.2.80}$$

Тщательное изучение интегрируемых уравнений, подобных (6.2.79), еще предстоит выполнить.

6.3. Решения интегрируемых уравнений и их преобразования Бэклунда

Более богатая структура спектра оператора **L** по сравнению с оператором Шрёдингера (существование сингулярного спектра и кратных собственных значений) приводит к связанным с ним интегрируемым уравнениям, обладающим бо́льшим разнообразием точных решений. Таким образом, кроме солитонных решений, отвечающих этому методу, мы представим также некоторые решения, порожденные как кратными собственными значениями, так и точками сингулярного спектра. Дальнейшие осложнения могут возникнуть в том случае, когда спектр σ (**L**) содержит сингулярную точку дисперсионных соотношений или когда $\Omega \neq \neq -\Omega^*$. Однако эти случаи мы рассматривать не будем. Мы изложим развитие асимптотической техники Захарова—Манакова [1976]. Это позволит нам определить асимптотический вид решений произвольного интегрируемого уравнения в отсутствие солитонных решений. Используя этот метод, мы сможем далее определить область пригодности таких решений. Снова, как в случае уравнения Шрёдингера, будет найдено преобразование Бэклунда, связывающее решения интегрируемых уравнений. Этот материал будет помещен в конце раздела.

Начнем с построения солитонных решений. Они получаются, когда спектр σ (**L**) имеет только простые собственные значения, сингулярный спектр отсутствует и коэффициенты отражения суть нули. Для такого построения можно использовать либо S_+, либо S_-. Воспользуемся S_+ и уравнением Марченко (6.2.3). Односолитонные решения для Q и R получаются, если взять

$$\begin{aligned} F_+(x, t) &= D_+(t)\, e^{ikx+\Omega(k)\,t}, \\ \overline{F}_+(x, t) &= \overline{D}_+(t)\, e^{-(i\bar{k}x+\Omega(\bar{k})\,t)}, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где

$$D_+(t) = -\frac{ib(k, t)}{a_k(k, t)}, \qquad \overline{D}_+(t) = \frac{i\bar{b}(\bar{k}, t)}{\bar{a}_k(\bar{k}, t)} \tag{6.3.2}$$

— нормировочные константы для связанных состояний, σ (L) = $= \{k, \bar{k}, \operatorname{Im} k > 0, \operatorname{Im} \bar{k} < 0\}$. Рассмотрим билинейную форму

$$\{u, v\} = \int_x^\infty u(y)\, v(y)\, dy \tag{6.3.3}$$

и положим

$$\{U, V\} = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}^T. \tag{6.3.4}$$

Тогда уравнение Марченко (6.2.3) с помощью соответствующих скалярных произведений можно записать в виде

$$\{\bar{K}_+(x, s, t)e^{-iks}\} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} D_+(t)e^{ikx}\{1, e^{i(k-\bar{k})s}\} + \\ + D_+(t)\{1, e^{i(k-\bar{k})s}\}\{K_+(x, s, t), e^{iks}\} = 0, \quad (6.3.5)$$

$$\{K_+(x, s, t), e^{iks}\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{D}_+(t)e^{-ikx}\{1, e^{i(k-\bar{k})s}\} + \\ + \bar{D}_+(t)\{1, e^{i(k-\bar{k})s}\}\{K_+(x, s, t), e^{-iks}\} = 0, \quad (6.3.6)$$

где s — переменная интегрирования. Решая (6.3.6) относительно $\{K_+(x, s)$, exp (iks) и $\{\bar{K}_+(x, s)$, exp $(-i\bar{k}s)\}$ и подставляя результаты в уравнение Марченко, получаем решения

$$Q(x, t) = -2K_{+1}(x, x, t) = 2\bar{D}_+(t)e^{-2ikx}E^{-1}(x, t), \\ R(x, t) = -2K_{+2}(x, x, t) = 2D_+(t)e^{2ikx}E^{-1}(x, t), \quad (6.3.7)$$

где

$$E(x, t) = 1 + \frac{D_+(t)\bar{D}_+(t)e^{2i(k-\bar{k})x}}{(k-\bar{k})^2} \quad (6.3.8)$$

и

$$D_+(t) = D_+(0)e^{\Omega(k)t}, \quad \bar{D}_+(t) = \bar{D}_+(0)e^{-\Omega(\bar{k})t}, \quad (6.3.9)$$

в предположении, что $E(x, t) \neq 0$. Если, однако, $E(x, t) = 0$, то для $\{\bar{K}_+$, exp $(-i\bar{k}s)\}$, $\{K_+(x, s)$, exp $(iks)\}$ существует бесконечно много решений, так что соответствующие уравнения Марченко не обладают единственными решениями.

Из (6.3.7) мы выводим также равенство

$$\int_x^\infty Q(y, t)R(y, t)\,dy = \frac{2ie^{2i(k-\bar{k})x}D_+(t)\bar{D}_+(t)}{(k-\bar{k})E},$$

которое показывает, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} {}_tQ(y)\,{}_tR(y)\,dy$ не определен для произвольных значений t даже в том случае, когда начальные функции ограничены. Условия, которым следует подчинить Q и R для того, чтобы задача Коши имела единственное решение, были приведены в разд. 6.2.

Если предположить, что $E(x, t) \neq 0$, то решения (6.3.7) можно представить в более солитоноподобном виде:

$$Q(x, t) = A \operatorname{sech} \theta e^{-i\varphi}, \\ R(x, t) = \bar{A} \operatorname{sech} \theta e^{i\varphi}, \quad (6.3.10)$$

где

$$\theta(x, t) = \gamma + (1/2)(\Omega(k) - \Omega(\bar{k}))t + i(k - \bar{k})x,$$

$$\varphi(x, t) = (k + \bar{k})x - (1/2)i(\Omega(k) + \Omega(\bar{k}))t,$$

$$e^{2\gamma} = \frac{D_+(0)\overline{D}_+(0)}{(k - \bar{k})^2},$$

$$A = \overline{D}_+^{1/2}(0) D_+^{-1/2}(0)(k - \bar{k}),$$

$$\overline{A} = D_+^{1/2}(0)\overline{D}_+^{-1/2}(0)(k - \bar{k}).$$

Таким образом, односолитонные решения для интегрируемых уравнений в предположении, что θ и φ вещественны, представляют собой уединенные волновые пакеты с сохраняющей форму (форму секанса) огибающей. Мы перечислим формы, которые могут принимать солитоны в соответствии со случаями вырождения, приводимыми в лемме 6.10.

(i) $R = +Q$, Q комплексное

В этом случае решение становится сингулярным за конечное время и не может иметь формы, приведенной в (6.3.10). В качестве примера положим $\Omega(k) = -8ik$ и получим интегрируемое уравнение, являющееся комплексным модифицированным уравнением Кортевега—де Фриза:

$$Q_t \pm 6Q^2Q_x - Q_{xxx} = 0.$$

«Солитонное» решение имеет вид

$$Q(x, t) = e^{i\lambda(x, t)} f(x, t) + e^{-i\lambda(x, t)} g(x, t),$$

где

$$f = \xi(\operatorname{ch}\omega - \operatorname{sh}\omega)(\operatorname{ch}^2\omega - \sin^2\lambda)^{-1},$$

$$g = \xi(\operatorname{ch}\omega - \operatorname{sh}\omega)(\operatorname{ch}^2\omega - \sin^2\lambda)^{-1}$$

и

$$\omega(x, t) = 2\eta x + 8\eta(3\xi^2 - \eta^2)t, \quad \lambda = 2\xi x - 8\xi^2(\xi - 3\eta)t + \tau,$$

$$\gamma = \frac{\ln|D_+|}{4\xi} + i\tau, \quad k = \xi + i\eta.$$

Из вида решения становится ясно, что оно превращается в сингулярное за конечное время. Как правило, модели, отвечающие таким ситуациям, не физичны.

(ii) $R = -Q^*$

Заметим, что солитонные решения не появляются, когда $R = Q^*$, так как в этом случае задача (6.1.13) на собственные значения самосопряженная. Для случая (ii) $A = 2\eta \exp(-i\eta)$ и $\gamma = \ln(|D_+|/2\eta)$, где $k = \xi + i\eta$. Примером этого случая яв-

ляется нелинейное уравнение Шрёдингера, для которого $\Omega = 4ik^2$:

$$iQ_t + |Q|^2 Q + Q_{xx} = 0.$$

Односолитонное решение дается выражением

$$Q(x, t) = 2\eta \exp\{-i(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \tau)\} \operatorname{sech}(2\eta(x - x_0) + 8\eta\xi t),$$

где $x_0 = \gamma/2\eta$ есть положение максимума огибающей при $t = 0$. Скорость v солитона равна -4ξ, а амплитуда $|A|$ равна 2η.

(iii) $R = \alpha Q = \alpha Q^*$, α вещественно

Тогда с необходимостью $k = i\eta = -\bar{k}$, $\eta > 0$ и $\overline{D_+} = -D_+/\alpha = D_+^*/\alpha$, так что $A = \pm 2\eta\alpha^{-1/2}$. В качестве примеров мы имеем

Модифицированное уравнение КдФ ($\Omega = 8ik^3$, $R = \pm Q$):

$$Q_t \pm 6Q^2 Q_x + Q_{xxx} = 0,$$

$$Q(x, t) = 2\eta\alpha_\pm^{-1/2} \operatorname{sech}(2\eta(x - 4\eta^2 t) - \gamma), \quad \text{где} \quad \alpha_\pm = \pm 1.$$

Уравнение sin-*Гордон* ($\Omega = \pm 1/2ik$, $R = -Q = U_x/2$):

$$U_{xt} = \pm \sin U,$$

$$Q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2\eta}(4\eta^2 \pm t) - \gamma\right),$$

$$U(x, t) = 4 \operatorname{arctg}\left(\exp\left(\gamma - \frac{1}{2\eta}(4\eta^2 x \pm t)\right)\right).$$

В этом случае, как было упомянуто в гл. 1, решение для U называется кинком. Скорость мКдФ-солитона равна $4\eta^2$, а скорость кинка уравнения СГ, соответствующая выбору отрицательного знака у аргумента, равна $1/4\eta^2$.

Важно отметить, что в случае, когда дисперсионное соотношение (Ω) содержит сингулярный член, хотя мы исключаем возможность совпадения собственного значения с сингулярностью, может оказаться, что собственное значение очень близко расположено от точки сингулярности. Так, в случае уравнения СГ, рассмотренного выше, и уравнения Конно и др. [1974] дисперсионное соотношение имеет сингулярность в точке $k = 0$. Скорости соответствующих солитонов равны $1/4\eta^2$ и $4\eta^2 + \alpha/4\eta^2$ соответственно. В физической системе координат эти модели имеют солитоны, которые могут передвигаться с предельной скоростью модели (например, скорость света (единица) в уравнении СГ).

N-солитонные решения получаются из уравнения Марченко в предположении, что спектр оператора $\mathbf{L}$ состоит лишь из простых собственных значений. В этом случае уравнение Марченко имеет вырожденное ядро и может быть решено с помощью стан-

дартной техники линейной алгебры. Применяя оператор преобразования теоремы 6.7, запишем в таком случае уравнения Марченко (6.2.3) в виде

$$\overline{K}_+(x, y) + \sum_{j=1}^{N} D_{+j}\psi_j(x)e^{ik_j y} = 0, \tag{6.3.11}$$

$$K_+(x, y) + \sum_{j=1}^{N} \overline{D}_{+j}\bar{\psi}_j(x)e^{-i\bar{k}_j y} = 0, \tag{6.3.12}$$

где

$$\psi_j(x) \equiv \psi(x, k_j), \qquad \bar{\psi}_j(x) \equiv \bar{\psi}(x, \bar{k}_j).$$

Если положить

$$f_j = \sqrt{iD_{+j}}\,\psi_j, \qquad \bar{f}_j = \sqrt{i\overline{D}_{+j}}\,\bar{\psi}_j \tag{6.3.13}$$

и

$$\lambda_j = (iD_{+j})^{1/2}e^{ik_j x}, \quad \bar{\lambda}_j = (j\overline{D}_{+j})^{1/2}e^{-i\bar{k}_j x}, \tag{6.3.14}$$

то уравнения (6.3.11), (6.3.12) примут вид

$$\begin{aligned} f_s(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_s\bar{\lambda}_j f_j(x)}{(k_s - \bar{k}_j)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_s, \\ \bar{f}_s(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\bar{\lambda}_s\lambda_j \bar{f}_j(x)}{(\bar{k}_j - k_s)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\bar{\lambda}_s. \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

Если ввести в рассмотрение $2N$-координатные векторы-столбцы $F = (f_s^{(1)}, \bar{f}_s^{(1)})^T$, $\overline{F} = (f_s^{(2)}, \bar{f}_s^{(2)})^T$, где индексы в скобках относятся к координатам, а нижний индекс пробегает значения от 1 до N, то уравнения (6.3.15) можно будет переписать в виде системы

$$\begin{aligned} AF &= \Lambda, \\ A\overline{F} &= \overline{\Lambda}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= (0, \ldots, 0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_N)^T, \\ \overline{\Lambda} &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0)^T \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

являются $2N$-координатными векторами-столбцами. Тогда, согласно правилу Крамера (в предположении, что $\det A \neq 0$), если обозначить через $F^{(k)}$ k-координату F, получаем, что

$$F^{(k)} = \frac{\det A_{(k)}}{\det A}, \tag{6.3.17}$$

где $A_{(k)}$ получается из A заменой k-го столбца на Λ. В частности, заметим, что если $1 \leqslant k \leqslant N$, то

$$i\lambda_k F^{(k)} = \frac{\det A_k}{\det A}, \tag{6.3.18}$$

где A_k получается из A дифференцированием k-го столбца по переменной x. Аналогично из (6.3.16) мы находим для $N+1 \leqslant k \leqslant 2N$, что

$$i\bar{\lambda}_{k-N}\bar{F}^{(k)} = \frac{\det A_k}{\det A}. \tag{6.3.19}$$

Суммируя левые и правые части (6.3.18) и (6.3.19), приходим к выражению

$$i\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j f_j^{(1)} + \bar{\lambda}_j \bar{f}_j^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2N}\frac{\det A_k}{\det A} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(\det A). \tag{6.3.20}$$

Этим результатом можно воспользоваться для получения точной формулы для произведения Q и R. Возьмем асимптотические разложения для ψ и $\bar{\psi}$ из леммы 6.10 и соответствующие разложения в N-солитонном случае из формул (6.2.2). Тогда мы получим равенства

$$\begin{pmatrix} Q \\ -\int_x^\infty R(y)Q(y)\,dy \end{pmatrix} = 2\sum_{j=1}^{N}\bar{D}_{+j}\bar{\psi}_j e^{-ik_j x},$$

$$\begin{pmatrix} \int_x^\infty R(y)Q(y)\,dy \\ -R \end{pmatrix} = -2\sum_{j=1}^{N}D_{+j}\psi_j e^{ik_j x}, \tag{6.3.21}$$

из которых вытекает соотношение

$$\int_x^\infty R(y)Q(y)\,dy = i\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j f_j^{(1)} + \bar{\lambda}_j \bar{f}_j^{(2)}) = \frac{\partial}{\partial x}\ln(\det A). \tag{6.3.22}$$

Если продифференцировать это соотношение, мы получим формулу для произведения RQ, похожую на N-солитонную формулу разд. 4.3:

$$RQ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(\det A), \tag{6.3.23}$$

где

$$A = 1 + B\bar{B}$$

и

$$B_{js} = i\frac{\sqrt{D_{+j}\bar{D}_{+s}}}{(k_j - k_s)}\exp[i(k_j - k_s)x],$$

$$\bar{B}_{js} = i\frac{\sqrt{\bar{D}_{+j}D_{+s}}}{(k_j - k_s)}\exp[-i(k_j - k_s)x].$$

Невырожденность системы уравнений (6.3.16) следует, как показано в разд. 6.2, из единственности решения уравнения

Марченко. В случае, когда $R = \alpha Q^*$ или $R = \alpha Q$, Q вещественное, формула (6.3.23) дает соответственно модуль N-солитонного решения или квадрат N-солитонного решения.

Подобно случаю N-солитонного решения для интегрируемых уравнений, ассоциированных с изоспектральным уравнением Шрёдингера, здесь можно показать, что при некоторых условиях N-солитонное решение распадается на N солитонов при $|t| \to \infty$. Дополнительные условия в этом случае необходимы, так как более богатая структура интегрируемых уравнений дает возможность солитонам не разделяться при $|t| \to \infty$. Из (6.3.10) мы находим, что в общем случае скорость солитона равна

$$v = \operatorname{Re}\left(\frac{\Omega(k) - \Omega(k)}{2i(k-k)}\right). \tag{6.3.24}$$

Так что если $k = \xi + i\eta = k = \bar{\xi} + i\bar{\eta}$, то получается уравнение вида

$$h(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}; v) = 0, \tag{6.3.25}$$

которое определяет семейство солитонов с одной и той же скоростью v. Если мы временно исключим такую возможность, то мы сможем упорядочить солитоны N-солитонного решения по их скоростям:

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_N. \tag{6.3.26}$$

Мы будем рассматривать лишь тот случай, когда $R = \pm Q$, включающий, в частности, подслучай $R = \pm Q^* = \pm Q$. Из (6.3.13) и (6.3.14) легко находим, что

$$|\lambda_j(x, t)| = |\lambda_j(0)| \exp(-\eta_j y_j), \tag{6.3.27}$$

$$y_j = x - v_j t. \tag{6.3.28}$$

Итак, оказывается, что

$$\begin{array}{ll} \text{при } y_j \to +\infty & |\lambda_j| \to 0 \quad \text{для } j < m, \\ \text{при } y_j \to -\infty & |\lambda_j| \to \infty \quad \text{для } j > m \end{array} \tag{6.3.29}$$

вдоль линии $y_m = \text{const}$, когда $|t| \to \infty$. Таким образом, система (6.3.16) для N-солитонных решений сводится в этом пределе к редуцированной системе уравнений вида

$$\begin{aligned} f_m^{(1)} + \frac{|\lambda_m|}{2i\eta_m} f_m^{(2)*} &= -\lambda_m \sum_{j=m+1}^{N} \frac{1}{(k_m - k_j^*)} g_j^{(2)*}, \\ \frac{|\lambda_m|^2}{2i\eta_m} f_m^{(1)} + f_m^{(2)*} &= \lambda_m^* + \lambda_m^* \sum_{j=m+1}^{N} \frac{g_j^{(1)}}{(k_m^* - k_j)} \end{aligned} \tag{6.3.30}$$

$$\sum_{j=m+1}^{N} \frac{1}{(k_l - k_j^*)} g_j^{(2)*} = -\frac{\lambda_m^*}{(k_l - k_m)} f_m^{(2)*},$$

$$-\sum_{j=m+1}^{N} \frac{g_j^{(1)}}{(k_l^* - k_j)} = 1 + \frac{\lambda_m f_m^{(1)}}{(k_l^* - k_m)}, \tag{6.3.31}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$g_l = \lambda_l f_l, \quad f_l = (f_l^{(1)}, f_l^{(2)})^T. \tag{6.3.32}$$

Мы можем решить (6.3.31) тем же путем, каким Захаров и Шабат [1972] решили аналогичную систему уравнений для нелинейного уравнения Шрёдингера ($v_j = -4\xi_j$). Решение представляется в виде

$$g_j^{(1)} = a_j + \frac{2i\eta_m}{a_m} \frac{a_j f_m^{(2)} \lambda_m}{(k_j - k_m)}, \quad g_j^{(2)} = \frac{2i\eta_m}{a_m} \frac{a_j f_m^{(1)} \lambda_m}{(k_j - k_m)}, \tag{6.3.33}$$

где

$$a_l = \prod_{p=m+1}^{N} (k_l - k_p^*) \Big/ \prod_{m<p\neq j} (k_l - k_p),$$

$$a_m = 2i\eta_m \prod_{p=m+1}^{N} \frac{k_m - k_p^*}{k_m - k_p}.$$

Наконец, мы получим из (6.3.30) уравнения

$$f_{ml} + \frac{|\lambda_m^+|^2}{2i\eta_m} f_{m2}^* = 0,$$

$$\frac{|\lambda_m^+|^2}{2i\eta_m} f_{ml} + f_{m2}^* = (\lambda_m^+)^*, \tag{6.3.34}$$

где

$$\lambda_m^+ = \lambda_m \prod_{p=m+1}^{N} \frac{(k_m - k_p)}{(k_m - k_p^*)}.$$

Если сравнить эту формулу с выражением (6.3.15) для односолитонного случая, то легко обнаружить, что формула (6.3.34) представляет солитон со смещенным максимумом x_{0m}^+ ($x_0 = \operatorname{Re} \gamma/2\eta$) и фазой τ^+ ($\tau = \arg(A/2\eta)$) по сравнению с тем, который при $t = 0$ задается формулами:

$$x_{0m}^+ - x_{0m} = \frac{1}{\eta_m} \sum_{p=m+2}^{N} \ln \left| \frac{k_m - k_p}{k_m - k_p^*} \right| < 0, \tag{6.3.35}$$

$$\tau_m^+ - \tau_m = -2 \sum_{p=m+1}^{N} \arg \left(\frac{k_m - k_p}{k_m - k_p^*} \right). \tag{6.3.36}$$

Для $t \to -\infty$ аналогичные формулы получаются из соотношения

$$\lambda_m^- = \lambda_m \prod_{p=1}^{m-1} \frac{k_m - k_p}{k_m - k_p^*}. \tag{6.3.37}$$

Эти формулы позволяют дать следующую интерпретацию N-солитонному решению. Когда $t \to -\infty$, решение разбивается на N солитонных решений с самым медленным солитоном впереди и самым быстрым сзади. Когда $t \to +\infty$, расположение солитонов меняется на обратное. Полное изменение в положении центра и фазы m-го солитона в решении, когда t меняется от $-\infty$ до ∞, дается формулами

$$\Delta x_{0m} = x_{0m}^+ - x_{0m}^- = \frac{1}{\eta_m}\left(\sum_{j=m+1} \ln\left|\frac{k_m - k_j}{k_m - k_j^*}\right| - \sum_{j=1}^{m-1} \ln\left|\frac{k_m - k_j}{k_m - k_j^*}\right|\right), \tag{6.3.38}$$

$$\Delta\tau_m = \tau_m^+ - \tau_m^- = 2\sum_{j=1}^{m-1} \arg\left(\frac{k_m - k_j}{k_m - k_j^*}\right) - 2\sum_{j=m+1}^{N} \arg\left(\frac{k_m - k_j}{k_m - k_j^*}\right). \tag{6.3.39}$$

Таким образом, N-солитонное решение можно рассматривать как представляющее попарное столкновение N солитонов. Эти столкновения упорядочены по скоростям, так что каждый солитон взаимодействует лишь один раз с другим солитоном. Многочастичные эффекты здесь не возникают.

В случае, упомянутом ранее, когда имелось N-солитонное решение, односолитонные компоненты которого движутся с одной и той же скоростью, очевидно, что приведенный выше анализ неприменим, а решение представляет связанное состояние. В случае нелинейного уравнения Шрёдингера связанное состояние получается из мультисолитонных решений, солитонные компоненты которых характеризуются различными собственными значениями, удовлетворяющими уравнению $\operatorname{Re} k = k_0$. Для уравнений мКдФ и СГ ограничения на собственные значения имеют вид $4\,(\operatorname{Re} k)^2 - |k|^2 = k_0$ и $|k| = k_0$ соответственно. Частный случай для уравнения СГ задается парой собственных значений $(k, -k^*)$, $\operatorname{Im} k > 0$:

$$U(x, t) = 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta \cos\xi\,(2x \mp t/2k_0^2 + \alpha)}{\xi \operatorname{ch}\eta\,(2x \pm t/2k_0^2 + \beta)}\right), \tag{6.3.40}$$

$$\alpha = (\gamma + \gamma^*)/2\xi, \quad \beta = -i(\gamma - \gamma^*)/2\eta.$$

В частности, в физической системе координат $X = x + t$, $T = x - t$ значение $|k| = 1/2$ дает колебательное решение с фиксированным местоположением. Решения могут быть получены не-

посредственно, либо прямым решением уравнения Марченко, либо с помощью метода Хироты, обсуждавшегося в гл. 1. В конце этой главы мы покажем, как эти решения можно получить с помощью преобразований Бэклунда. Зачастую этот метод оказывается наиболее простым, особенно в двухсолитонном случае.

Другое полезное применение техники преобразования Бэклунда относится к нахождению решений, соответствующих кратным собственным значениям. В общем методе требуется решить уравнение Марченко с подходящими нормировочными многочленами. Другой способ — рассматривать решения такого типа как результат слияния двух или более простых собственных значений, хотя прямое применение этой идеи к N-солитонным решениям пока не было осуществлено. В случае кратных собственных значений нормировочные многочлены нелинейного уравнения Шрёдингера (6.1.87) можно записать в виде

$$P_+(x,\ t) = (a_1(t) + a_2(t)\,x)\,e^{ikx}, \tag{6.3.41}$$

где

$$a_1(t) = a_1(0)\,(1 + 8\gamma k t)\,e^{4ik^2t},$$
$$a_2(t) = a_2(0)\,e^{4ik^2t}.$$

Захаров и Шабат [1972] получили решение

$$Q(x,\ t) = \left(\frac{-4\eta f^* 2a_2^*}{1 + |a_2|^2\,|f|^4}\right) \times \left(\frac{-2 + |f|^4\,g a_2^*}{1 + |g|^2\,|f|^4}\right), \tag{6.3.42}$$

где

$$g = \frac{2\eta\left(a_1 + 2\left(x + \frac{1}{2\eta}\right)a_2\right)}{1 + |a_2|^2\,|f|^4}, \qquad f = \frac{e^{ikx}}{2\eta},$$

прямо решая уравнение Марченко. Фактически в этом случае они показали, что связанное состояние, отвечающее двум различным собственным значениям ($k_1 = i\eta_1$, $k_2 = i\eta_2$), является периодическим с частотой, характеризуемой разностью $\eta_1^2 - \eta_2^2$. В пределе, когда $k_2 \to 0$, колебания затухают и решение превращается в солитон. Переход к пределу $k_2 \to k_1$ дает апериодическое решение, представленное формулой (6.3.42). Асимптотический анализ при $|t| \to \infty$ показывает, что решение представляется в виде суперпозиции двух солитонов с амплитудой η, расстояние между которыми увеличивается со временем как $\ln(4\eta^2 t)$. В конце этого раздела мы покажем, как можно получить некоторые из этих решений, используя преобразования Бэклунда.

Остается еще один тип частных решений, который стоит рассмотреть, — это те решения, которые возникают вследствие наличия сингулярного спектра у начального оператора $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(Q(x,\ 0))$. Этот вид решений, по-видимому, нигде не изучался подробно, исключая один частный случай, когда $a(0) = 0$, $\bar{a}(0) = 0$ (Абловиц и др. [1974]).

При $k = 0$ решения Йоста уравнения (6.1.13) могут быть точно указаны, если $R = \alpha Q$:

$$ {}_0\varphi(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\alpha^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{x} Q(y)\,dy\right) \\ \alpha^{1/2}\operatorname{sh}\left(\alpha^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{x} Q(y)\,dy\right) \end{bmatrix}, \tag{6.3.43} $$

$$ {}_0\psi(x) = \begin{bmatrix} \alpha^{-1/2}\operatorname{sh}\left(-\alpha^{1/2}\int\limits_{x}^{\infty} Q(y)\,dy\right) \\ \operatorname{ch}\left(-\alpha^{1/2}\int\limits_{x}^{\infty} Q(y)\,dy\right) \end{bmatrix}. \tag{6.3.44} $$

В этом случае

$$ \tilde{a}(0) = a(0) = \operatorname{ch}\left(\alpha^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(y)\,dy\right), \tag{6.3.45} $$

так что требование $a(0) = 0$ равносильно равенству

$$ \alpha^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(y)\,dy = i\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right), \quad m \in Z. \tag{6.3.46} $$

В частности, для уравнения СГ $U_x/2 = Q = R$ и U удовлетворяет граничным условиям $(\pi/2 + m\pi)$-импульса (имеется в виду площадь под Q):

$$ \begin{aligned} U &\to 0 && \text{при} \quad x \to -\infty, \\ U &\to \left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) && \text{при} \quad x \to +\infty. \end{aligned} \tag{6.3.47} $$

Как показал Лэм [1977], эти решения получаются из автомодельной формы уравнения СГ. Поскольку уравнение СГ обладает масштабной симметрией $x \to lx$, $t \to l^{-1}t$, то соответствующей автомодельной переменной является $z = xt$, и СГ-уравнение преобразуется к следующему виду:

$$ zV_{zz} + V_z - \sin V = 0, \quad V(z) = U(xt). \tag{6.3.48} $$

В действительности это уравнение преобразуется к каноническому виду — уравнению, определяющему третий трансцендент Пенлеве (Айнс [1956]). Нужные нам решения — это, очевидно, решения уравнения (6.3.48) с граничными условиями (6.3.47).

Возможность присутствия сингулярного спектра делает анализ устойчивости солитонов технически трудным. В случае, когда такой спектр отсутствует, Захаров и Шабат [1972] показали, что солитон остается устойчивым относительно возмущений, вызы-

ваемых непрерывным спектром, для (самофокусирующегося) нелинейного уравнения Шрёдингера. Работа Абловица и Сегура [1977] показала, что сингулярный спектр приводит к бесстолкновительным ударным волнам в длинноволновых асимптотических разложениях решений нелинейного уравнения Шрёдингера в случаях, когда солитоны отсутствуют. Этот результат, возможно, применим к другим интегрируемым уравнениям. Он соответствует аномальному поведению коэффициента отражения в уравнении Марченко для изоспектрального оператора Шрёдингера (разд. 4.3).

Если функция рассеяния a удовлетворяет условию

$$|a(k)-1|<1, \tag{6.3.49}$$

то очевидно, что a не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. В этом случае из интегрального представления (6.1.38) для a мы находим, что

$$|a(k)-1| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Q(y)|\, e^{iky}\varphi_2(y,\ k)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |P(y)|\, |e^{iky}\varphi(y,\ k)|\, dy \leqslant \exp(S_0(\infty)) - 1. \tag{6.3.50}$$

Таким образом, условие, обеспечивающее отсутствие солитонов или решений, отвечающих сингулярному спектру в начальном операторе, имеет вид

$$S_0(\infty,\ 0)<\ln 2 \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (|Q(x,\ 0)| + R(x,\ 0)|)\, dx < 0.35. \tag{6.3.51}$$

Более точный анализ для начального оператора L_0, имеющего лишь непрерывный спектр, дает оценку

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |R(x,\ 0)|\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Q(x,\ 0)|\, dx\right) < 0.817. \tag{6.3.52}$$

Оценка для наибольшего по абсолютной величине собственного значения k_0 может быть получена из асимптотических разложений леммы 6.3. Таким образом, предполагая, что

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R(x,\ 0)\, Q(x,\ 0)\, dx\right\} < 0,$$

получаем соотношение

$$2ik_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} R(x,\ 0)\, Q(x,\ 0)\, dx. \tag{6.3.53}$$

Лучшие оценки для k_0 можно получить, если включить дальнейшие члены в асимптотическое разложение для $a(k)$ и решить полиномиальное уравнение, получающееся после приравнивания правой части разложения к нулю, полагая, что $k = k_0$. Получается, что если

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R(x, 0)\, Q(x, 0)\right\} dx > 0, \tag{6.3.54}$$

то начальный оператор не имеет дискретного спектра.

До сих пор мы не рассматривали общего решения интегрируемого уравнения. Когда начальные данные таковы, что начальный оператор $L_0 = (Q(x, 0))$ имеет лишь непрерывный спектр, можно дать описание решения в асимптотической (большие времена) области, используя вполне стандартные асимптотические методы. Как было упомянуто в разд. 4.3, существует много других подходов, и обычно для получения равномерно пригодных решений на всей вещественной оси пользуются комбинацией этих методов. Один из интересных аспектов такого анализа, приводящий к изучению интегрируемых нелинейных *обыкновенных* дифференциальных уравнений, связан с существованием области, определяемой решениями эволюционного уравнения в автомодельной форме. Для АКНС-системы некоторые из этих решений не приводятся к известным трансцендентным функциям анализа и поэтому называются трансцендентами Пенлеве. Мы не даем полного асимптотического описания решений для больших времен для системы АКНС, за исключением случая нелинейного уравнения Шрёдингера.

Мы снова отсылаем читателя к разд. 4.3, где приводятся результаты асимптотического анализа для уравнения КдФ, иллюстрирующие комментарии, изложенные выше.

Здесь мы опишем и применим технику, созданную Захаровым и Манаковым для получения решений интегрируемых уравнений в одной из почти-линейных асимптотических областей. Этот метод интересен по многим причинам. Во-первых, поскольку метод отталкивается от задачи рассеяния, результаты могут быть получены для целого класса интегрируемых уравнений. Специфическая информация об индивидуальном уравнении (в действительности, дисперсионное соотношение Ω) добавляется лишь на финальной стадии. Во-вторых, метод восстанавливает решение в терминах начальных данных. По существу этот метод следовало бы назвать асимптотическим методом обратной задачи рассеяния.

Этот метод может быть применен к двум типам уравнений, принадлежащим к тем интегрируемым уравнениям, для которых $\overline{\Omega} = -\Omega$:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad R = \pm Q^*. \\ &\text{(ii)} \quad R = \pm Q^* = \pm Q. \end{aligned} \tag{6.3.55}$$

Если мы сделаем замену переменных в (6.1.13)

$$u_1 = -iy_2e^{-ikx}, \quad u_2 = y_1e^{ikx}, \tag{6.3.56}$$

то получим систему, примененную Захаровым и Манаковым для нелинейного уравнения Шрёдингера (ii):

$$iu_{1x} - (Re^{i\lambda x})\,u_2 = 0. \tag{6.3.57}$$

$$\lambda = -2k,$$

$$iu_{2x} + (Qe^{-i\lambda x})\,u_1 = 0. \tag{6.3.58}$$

Мы сейчас предположим, что мы находимся в асимптотической области, характеризуемой почти линейным поведением типа ВКБ. Тем самым мы предполагаем, что R и Q могут быть представлены как медленно меняющиеся амплитуды, модулирующие быстро меняющуюся фазу. Итак, предполагается, что Q допускает следующие представления в каждом из двух случаев:

$$\text{(i)} \qquad Q = \varepsilon^{1/2}A\,(\varepsilon x)e^{i\Phi}, \qquad \Phi = \varepsilon^{-1}p\,(\varepsilon x); \tag{6.3.59}$$

$$\text{(ii)} \qquad Q = \varepsilon^{1/2}A\,(\varepsilon x)\cos\Phi, \quad \Phi = \varepsilon^{-1}p\,(\varepsilon x). \tag{6.3.60}$$

Параметр ε еще подлежит определению, но уже ясно, что он должен зависеть от t. Позже будет оправдана форма $\varepsilon^{1/2}A\,(\varepsilon x)$, в которой представлена амплитуда. В случае (i) мы применяем метод многомасштабных разложений, который в этом случае оперирует только с двумя масштабами ($X = \varepsilon x$, $\theta = \Phi - \lambda$), в то время как случай (ii) требует трех масштабов ($X = \varepsilon x$, $\theta_1 = \Phi - \lambda x$, $\theta_2 = \Phi + \lambda x$). Здесь мы подробно излагаем случай (ii) и приводим результаты для случая (i). Уравнения, которыми мы будем заниматься, имеют вид

$$\begin{aligned} iu_{1x} \mp \varepsilon^{1/2}A\,(e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1})\,u_2 = 0, \\ iu_{2x} + \varepsilon^{1/2}A\,(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2})\,u_1 = 0. \end{aligned} \tag{6.3.61}$$

Из сделанных нами предположений вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial X} + \theta_{1x}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \theta_{2x}\frac{\partial}{\partial\theta_2}, \tag{6.3.62}$$

$$u_1(x) \equiv U\,(X,\ \theta_j,\ \varepsilon^{1/2}) = \sum_{i=0} U_i\,(X,\ \theta_j)\,(\varepsilon^{1/2})^i \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{6.3.63}$$

$$u_2(x) \equiv V\,(X,\ \theta_j,\ \varepsilon^{1/2}) = \sum_{i=0} V_i\,(X,\ \theta_j)\,(\varepsilon^{1/2})^i \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.3.64}$$

Запишем равенства, получающиеся при приравнивании коэффициентов разложения по степеням $\varepsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned} &i(\theta_{1x}U_{1\theta_1} + \theta_{2x}U_{2\theta_2}) \mp A\,(e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1})\,V_0 = 0, \\ &i\,(\theta_{1x}V_{2\theta_1} + \theta_{2x}V_{2\theta_2}) + A\,(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2})\,U_0 = 0 \qquad (\varepsilon^{1/2}), \end{aligned} \tag{6.3.65}$$

$$\begin{aligned} &i\,(\theta_{1x}U_{2\theta_1} + \theta_{2x}U_{2\theta_2}) + iU_{0x} \mp A\,(e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1})\,V_1 = 0, \\ &i\,(\theta_{1x}V_{2\theta_1} + \theta_{2x}V_{2\theta_2}) + iV_{0x} + A\,(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2})\,U_1 = 0 \qquad (\varepsilon). \end{aligned} \tag{6.3.66}$$

Приравнивание коэффициентов при ε^0 дает $U_0 = U_0(X)$, $V_0 = V_0(X)$. Поскольку $\theta_{ix} = \theta_{ix}(X)$, то мы можем легко проинтегрировать (6.3.65) после следующей замены независимой переменной:

$$U_1 = \mp A\left(\frac{e^{i\theta_2}}{\theta_{2x}} - \frac{e^{-i\theta_1}}{\theta_{1x}}\right) V_0, \tag{6.3.67}$$

$$V_1 = A\left(\frac{e^{i\theta_1}}{\theta_{1x}} - \frac{e^{-i\theta_2}}{\theta_{2x}}\right) U_0. \tag{6.3.68}$$

Эти формулы имеют смысл, если мы не находимся в резонансной области, где

$$\theta_{1x} \approx 0 \quad \text{или} \quad \theta_{2x} \approx 0. \tag{6.3.69}$$

В противном случае асимптотические разложения (6.3.62) — (6.3.64) оказываются некорректными. Для того чтобы предотвратить появление секулярных членов при порядке ε, когда в (6.3.66) подставляется (6.3.67), (6.3.68), мы потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} iU_{0x} \mp A^2\left(\frac{1}{\theta_{1x}} - \frac{1}{\theta_{2x}}\right) U_0 = 0, \\ iV_{0x} \pm A^2\left(\frac{1}{\theta_{1x}} - \frac{1}{\theta_{2x}}\right) V_0 = 0. \end{aligned} \tag{6.3.70}$$

Если мы отождествим вышенаписанные разложения с решением, для которого $\lim_{x\to-\infty}(u_1, u_2) = (0, 1)$, то мы сможем проинтегрировать (6.3.70) и получить

$$U_0 = 0,$$

$$V_0 = \exp\left[\pm i \int_{-\infty}^{X} A^2\left(\frac{i}{\theta_{1x}} - \frac{1}{\theta_{2x}}\right) dX\right]. \tag{6.3.71}$$

Мы будем предполагать, что для заданного λ существует единственная точка x_0, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi_x(x_0) \pm \lambda = 0, \tag{6.3.72}$$

для которой выше написанные разложения теряют смысл. Это предположение совместимо с классом уравнений, который мы рассматриваем в данном методе. Поскольку x_0 меняется, можно записать, что $x_0 = x(\lambda)$. Предположим дополнительно, что $\lambda > 0$. В резонансной области, определенной формулой (6.3.72), введем переменную

$$Z = (x - x_0)\,\Phi_{xx}^{1/2}(x_0) \tag{6.3.73}$$

и предположим, что $\Phi_{xx}(x_0) > 0$. Принимая во внимание, что при $x \to x_0$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \lambda(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)\Phi_{xx}(x_0) + O((x - x_0)^3), \tag{6.3.74}$$

перепишем уравнения (6.3.61) в виде

$$i\left(\Phi_{xx}^{1/2}(x_0)u_{1Z} + \theta_{1x}u_{1\theta_1} + \theta_{2x}u_1\theta_2\right) \mp$$

$$\mp \varepsilon^{1/2} A(X_0)\left(e^{2i\Phi} + 1\right)\exp\left[-i\left(\Phi(x_0) - \lambda x + \frac{1}{2}Z^2\right)u_2\right] = 0, \tag{6.3.75}$$

$$i\left(\Phi_{xx}^{1/2}(x_0)u_{2Z} + \theta_{1x}u_{2\theta_1} + \theta_{2x}u_{2\theta_2}\right)$$

$$+ \varepsilon^{1/2} A(X_0)\left(e^{-2i\Phi} + 1\right)\exp\left[i\left(\Phi(x_0) - \lambda x_0 + \frac{1}{2}Z^2\right)u_1\right] = 0. \tag{6.3.76}$$

Из предположения о форме Φ, $\Phi = \varepsilon^{-1}p(\varepsilon x)$, выводим, что $\Phi_{xx} = \varepsilon\ddot{p}$. Следовательно,

$$\Phi_{xx}(x_0) = \varepsilon\ddot{p}(X_0) \equiv \varepsilon g^2(X_0).$$

Соответствующие асимптотические разложения для u_1, u_2 имеют вид

$$u_1(x) \equiv \overline{U}(Z, \Phi, \varepsilon^{1/2}) = \sum_{i=0} \overline{U}_i(Z, \Phi)(\varepsilon^{1/2})^i,$$
$$u_2(x) \equiv \overline{V}(Z, \Phi, \varepsilon^{1/2}) = \sum_{i=0} V_i(Z, \Phi)(\varepsilon^{1/2})^i. \tag{6.3.77}$$

В этом случае, приравнивая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$, мы получим в качестве уравнений порядка $O(1)$ соотношения $\overline{U}_0 = \overline{U}_0(Z)$, $\overline{V}_0 = \overline{V}_0(Z)$.

Для того, чтобы предотвратить появление сингулярностей при $O(\varepsilon^{1/2})$, нужно требовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\overline{V}_{0zz} - iZ\overline{V}_{0Z} \pm \alpha^2 V_0 = 0,$$
$$\overline{U}_0 = -i\exp\left[-i\left(\Phi(x_0) - \lambda x_0 + \frac{1}{2}Z^2\right)\right]\overline{V}_{0z}/\alpha, \tag{6.3.78}$$

где

$$\alpha^2(\lambda) = A^2(X_0)g^{-2}(X_0), \quad x_0 = x_0(\lambda).$$

Из (6.3.75), (6.3.76) следует, что для получения нетривиального результата в этом порядке необходимо требовать, чтобы амплитуда имела вид $(\varepsilon^{1/2}A(X))$ — тот самый, который мы вначале выбрали. Следовательно, наш начальный выбор оправдан. Реше-

ния (6.3.78) могут быть выражены через функции параболического цилиндра (А. Эрдейи и др. [1953])

$$\overline{V}_0 = e^{iZ^2/4}\left(c_1 D_{-1\mp i\alpha^2}\left(Zi^{-1/2}\right) + c_2 D_{-1\mp i\alpha^2}\left(-Zi^{-1/2}\right)\right). \quad (6.3.79)$$

Для сшивки решений в резонансной и асимптотической областях нам понадобятся пределы $Z \to -\infty$ в (6.3.79) и $X \uparrow X_0(\lambda)$ в (6.3.71). Нужное нам асимптотическое поведение функций параболического цилиндра представляют следующие формулы:

$$D_{-1\mp i\alpha^2}\left(Ze^{-i\pi/4}\right) = e^{-i\pi/4} e^{iZ^2/4} e^{\mp\pi\alpha^2/4} Z^{\mp i\alpha^2 - 1} + O\left(|Z|^{-2}\right)$$

при $Z \to +\infty$, (6.3.80)

$$D_{-1\mp i\alpha^2}\left(-Ze^{-i\pi/4}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1 \pm i\alpha^2)} e^{\pm\pi\alpha^2/4} Z^{\pm i\alpha^2} e^{-iZ^2/4} +$$

$$+ e^{-3\pi i/4} e^{\pm 3\pi\alpha^2/4} Z^{-1\pm i\alpha^2} e^{iZ^2/4} + O\left(|Z|^{-2}\right) \text{ при } Z \to +\infty. \quad (6.3.81)$$

В области перекрытия, интегрируя (6.3.71) по частям, получим, что

$$U_0 = 0,$$

$$V_0 = \left|\frac{(X - X_0) g^2}{2\lambda}\right|^{\pm i\alpha^2} \exp\left[\mp i \int_{-\infty}^{X_0} \ln\left|\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right| \frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}\right) dX\right]. \quad (6.3.82)$$

Из равенств (6.3.79) и (6.3.82) находим, что

$$c_2 = c_1 e^{\pm\pi\alpha^2},$$

$$c_1 = \left(\frac{ge^{1/2}}{2\lambda}\right)^{\pm i\alpha^2} \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{\mp\pi\alpha^2/4} \exp\left[\mp i \int_{-\infty}^{X_0} \ln\left|\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right| \frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}\right) dX\right]. \quad (6.3.83)$$

При $X \to +\infty$ имеем $(u_1, u_2) = (-ib, a)$, и (6.3.70) в этой области дает

$$U_0 = -ib \exp\left[\pm i \int_X^{\infty} A^2 \left(\frac{1}{\theta_{1x}} - \frac{1}{\theta_{2x}}\right) dX\right],$$

$$V_0 = a \exp\left[\mp i \int_X^{\infty} A^2 \left(\frac{1}{\theta_{1x}} - \frac{1}{\theta_{2x}}\right) dX\right]. \quad (6.3.84)$$

Когда $X \downarrow X_0(\lambda)$, эти функции сшиваются с $\overline{U}_0$, $\overline{V}_0$ в пределе при $Z \to +\infty$:

$$U_0 = -ib\left[\frac{(X-X_0)g^2}{2\lambda}\right]^{\mp i\alpha^2}\exp\left[\mp i\int_{X_0}^{\infty}\ln\left(\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right)\frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}\right)dX\right],$$

$$V_0 = a\left[\frac{(X-X_0)g^2}{2\lambda}\right]^{\pm i\alpha^2}\exp\left[\pm i\int_{X_0}^{\infty}\ln\left(\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right)\frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}\right)dX\right]. \tag{6.3.85}$$

Таким образом, приравнивая эти два предела, мы получаем, что

$$a(\lambda, t) = \exp(\pm\pi\alpha^2 \mp i(L_1 + L_2)),$$

$$b(\lambda, t) = \mp\frac{i\sqrt{2\pi}}{\alpha\Gamma(\mp i\alpha^2)}e^{\pm\pi\alpha^2/2}\exp i\left[\lambda x_0 - \Phi(x_0) - \frac{3\pi}{4} \pm \right.$$
$$\left. \pm (L_1 - L_2) \pm \alpha^2(\ln\Phi_{xx} - 2\ln 2\lambda)\right], \tag{6.3.86}$$

где

$$L_1(\lambda, t) = \int_{X_0(\lambda)}^{\infty}\ln\left(\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right)\frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}(X, t)\right)dX =$$
$$= \int_{\lambda}^{\infty}\ln\left(\frac{\xi-\lambda}{\xi+\lambda}\right)\frac{d}{d\xi}(\alpha^2(\xi, t))\,d\xi, \tag{6.3.87}$$

$$L_2(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{X_0(\lambda)}\ln\left(\frac{\theta_{1x}}{\theta_{2x}}\right)\frac{d}{dX}\left(\frac{A^2}{\Phi_{xX}}(X, t)\right)dX =$$
$$= \int_{-\infty}^{\lambda}\ln\left|\frac{\xi-\lambda}{\xi+\lambda}\right|\frac{d}{d\xi}(a^2(\xi, t))\,d\xi. \tag{6.3.88}$$

Если мы воспользуемся формулой

$$|\Gamma(\pm i\alpha^2)|^2 = \pi(\alpha^2\operatorname{sh}\pi\alpha^2)^{-1}, \tag{6.3.89}$$

то сможем непосредственно проверить, что

$$|b(\lambda)|^2 \mp |a(\lambda)|^2 = 1 \quad \text{для} \quad \lambda > 0 \tag{6.3.90}$$

в двух случаях: $R = \pm Q = \pm Q^*$. Кроме того, из (6.3.86) следует, что функция $a(\lambda)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и не имеет нулей в этой полуплоскости.

После исследования прямой задачи проблема теперь сводится к тому, чтобы решить обратную задачу с начальными данными, определенными формулами (6.3.86), при больших t. Согласно

теории разд. 6.1, мы имеем для класса рассматриваемых уравнений

$$b_t(\lambda, t) = \omega(\lambda)\, b(\lambda, 0),$$
$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad \omega(\lambda) \equiv \Omega\left(-\frac{1}{2}\lambda\right). \tag{6.3.91}$$

Поэтому мы можем непосредственно привязать нашу проблему к начальным данным $a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, 0)$, которые получаются из начальной функции $Q(x, 0)$. Мы немедленно убеждаемся в том, что L_1, L_2 не зависят от t и что

$$\alpha^2(\lambda) = \frac{A^2}{\Phi_{xx}} = \pm\frac{1}{\pi}\ln|a(\lambda)|. \tag{6.3.92}$$

Для того, чтобы получить Φ, определим

$$\widetilde{\Theta}_\pm(\lambda, t) = \mu_\pm + \Theta(\lambda, t) \mp (L_1(\lambda) - L_2(\lambda)) + \arg\Gamma(\mp i\alpha^2) - \frac{\pi}{2},$$

где

$$\widetilde{\Theta}(\lambda, t) = \arg b(\lambda, t), \quad (\mu_+, \mu_-) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right). \tag{6.3.93}$$

Тогда из (6.3.91) мы получим

$$\widetilde{\Theta}_\pm(\lambda, t) = \operatorname{Im}(\omega(\lambda))\, t + \widetilde{\Theta}_{0\pm}(\lambda),$$
$$\widetilde{\Theta}_{0\pm}(\lambda) = \widetilde{\Theta}_\pm(\lambda, 0). \tag{6.3.94}$$

Формулы (6.3.86) приводят к соотношениям

$$\Delta_\pm(\lambda, t) = \lambda x - \Phi(x, t) \pm \alpha^2 \ln\Phi_{xx}(x, t).$$
$$\Phi_x = \lambda \tag{6.3.95}$$

и

$$\Delta_\pm(\lambda, t) \equiv \widetilde{\Theta}_\pm(\lambda, t) \pm 2\alpha^2 \ln 2\lambda = (\operatorname{Im}\omega(\lambda))_t + \Delta_{0\pm}(\lambda),$$
$$\Delta_{0\pm}(\lambda) = \Delta_\pm(\lambda, 0). \tag{6.3.96}$$

Дифференцируя затем *известную* функцию $\Delta_\pm(\lambda, t)$ в (6.3.96) по λ, приходим при $t \to \infty$ к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\operatorname{Im}\omega(\lambda)) = \frac{x}{t} \equiv X, \tag{6.3.97}$$

в котором мы отождествили $\varepsilon^{-1} = t$. Тем самым получено единственное решение λ, для которого (6.3.95) превращается в тождество

$$\varepsilon^{-1}H(X) + K_\pm(X) - \varepsilon^{-1}X\lambda(X) \equiv \Phi(x, \varepsilon) \pm \alpha_\pm^2(X)\ln[\Phi_{xx}(x, \varepsilon)], \tag{6.3.98}$$

где $H(X) = \omega(\lambda(X))$ и $K_\pm(X) = \Delta_{0\pm}(\lambda(X))$.

Тогда стандартное асимптотическое разложение для Φ имеет вид (Додд и Моррис [1982])

$$\varphi(x,\ \varepsilon) = \varepsilon^{-1}(X\lambda(X) - \operatorname{Im}\omega(\lambda(X))) \pm \alpha^2 \ln\varepsilon - \Delta_{0\pm}(\lambda(X)) \pm$$
$$\pm \alpha_\pm^2 \ln\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X}. \qquad (6.3.99)$$

Таким образом, решая алгебраическое уравнение (6.3.97), можно получить требуемый асимптотический вид решения интегрируемого нелинейного уравнения. Формулы значительно упрощаются, если предположить, что $\omega(\lambda) = -i\lambda^{2n+1}$, $n \geqslant 0$, или что $\omega(\lambda) = i\lambda^{-(2n+1)}$, $n \leqslant 0$. Полагая $X = [-x/(2n+1)\,t]$, мы приходим в этих двух случаях к следующему виду для решения:

$\omega = -i\lambda^{2n+1};\ n \geqslant 0$

$$(\varepsilon A^2) = \frac{1}{(2n+1)\,2n\pi t}(X)^{1/2n-1}\ln\left(\left|a\left(X^{1/2n}\right)\right|^{\mp 1}\right),$$

$$\Phi(x,\ t) = -t\left[2nX^{1/2n+1}\right] \mp \alpha^2\left[\ln(2n+1)\,t + \right.$$
$$\left. + \left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln X\right] + \varphi_0, \qquad (6.3.100)$$

$$\varphi_0 = \mp i\pi\alpha^2 + \tilde{\Theta}_{0\pm}\left(X^{1/2n}\right) \mp \alpha^2 \ln 8n.$$

$\omega = i\lambda^{-(2n+1)};\quad n \geqslant 0$

$$(\varepsilon A^2) = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)\pi t}(X)^{-\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)}\ln\left(\left|a\left(X^{-\frac{1}{(2n+2)}}\right)\right|^{\pm 1}\right),$$

$$\Phi(x,\ t) = -t\left[(2n+2)\,X^{-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)}\right]\alpha^2[\ln(2n+1)\,t + \ln X] + \varphi_0, \qquad (6.3.101)$$

$$\varphi_0 = \tilde{\Theta}_{0\pm}\left(X^{-\frac{1}{(2n+2)}}\right) \mp \alpha^2 \ln 8\,(n+1).$$

Заметим, что в этих выражениях $\varepsilon = 1/(2n+1)\,t$, в то время как область применимости соответствующих разложений имеет вид $(-x) \gg [(2n+1)\,t]$ для $\omega = i\lambda^{-(2n+1)}$, $n > 0$ и $(-x) \gg [(2n+1)\,t]^{1+(2n+2)/(2n+3)}$ для $\omega = i\lambda^{-(2n+1)}$, $n \geqslant 0$. В частности, $\omega = i\lambda^3$ и $\omega = i\lambda^{-1}$ дают результаты для уравнений мКдФ и СГ соответственно. Для СГ-уравнения $U_{x,t} = \pm\sin U$ результаты даются в терминах функции $Q = -U_x/2$, но результаты для U легко найти интегрированием. Если $\lambda < 0$, то для проверки того обстоятельства, что формулы для A и Φ остаются справедливыми в этом случае, необходимо повторить проведенные выше выкладки.

Для случая (i) результат может быть формально получен заменой $\Delta_\pm$ на $\Theta_\pm$ в соответствующих формулах. Нелинейное уравнение Шрёдингера дает особенно интересный пример этого случая, и именно его исследовали Захаров и Манаков [1976]. Абловиц и Сигур [1977] и Сигур и Абловиц [1976] исследовали соответственно действие сингулярного спектра и дискретных собственных значений (солитонов) на асимптотический вид решений нелинейного уравнения Шрёдингера.

Преобразования Бэклунда для интегрируемых уравнений, удовлетворяющих условию $\bar{\Omega} = -\Omega$, может быть определено точно таким же образом, как оно было введено для изоспектрального оператора Шрёдингера в разд. 3.5. Итак, мы получим вначале соотношение между функциями рассеяния A, A' и соответствующими множествами потенциалов (Q, R), (Q', R'), удовлетворяющими (6.1.13), с фундаментальными решениями Φ, Φ' соответственно:

$$(A')^{-1}\,\Delta A = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi')^{-1}\,\Delta\mathbf{P}\Phi\,dx, \tag{6.3.102}$$

где

$$\Delta F \equiv F' - F, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -ik & Q \\ R & +ik \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & \bar{a} \\ a & \bar{b} \end{pmatrix}.$$

В этом случае можно показать, что собственные функции ${}_kV$, ${}_kY'$ операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$, имеющих одинаковый непрерывный спектр, но отличающихся дискретным спектром, удовлетворяют соотношениям

$$-(y_1'v_1)_x + (Qy_1'v_2 + Q'y_2'v_1) = 2iky_1'v_1, \tag{6.3.103}$$

$$(y_2'v_2)_x - (Ry_2'v_1 + R'y_1'v_2) = 2iky_2'v_2, \tag{6.3.104}$$

$$y_2'v_1(x) = y_2'v_1(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} \left(Q(s)\,y_2'(s)\,v_2(s) + R'(s)\,y_1'(s)\,v_1(s)\right) ds, \tag{6.3.105}$$

$$y_1'v_2(x) = y_1'v_2(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} \left(Q'(s)\,y_2'(s)\,v_2(s) + R(s)\,y_1'(s)\,v_1(s)\right) ds. \tag{6.3.106}$$

Эти соотношения можно объединить формулой

$$B_1V \circ Y' = kV \circ Y' - \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} Q(x)\,y_1'v_2(-\infty) + Q'(x)\,y_2'v_1(-\infty) \\ -R(x)\,y_2'v_1(-\infty) - R'(x)\,y_1'v_2(-\infty) \end{pmatrix}, \tag{6.3.107}$$

где

$$B_1 \equiv \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} + Q\int\limits_{-\infty}^{x} dsR + Q'\int\limits_{-\infty}^{x} dsR', & Q\int\limits_{-\infty}^{x} dsQ' + Q'\int\limits_{-\infty}^{x} dsQ \\ -R\int\limits_{-\infty}^{x} dsR' - R'\int\limits_{-\infty}^{x} dsR, & -R\int\limits_{-\infty}^{x} dsQ - R'\int\limits_{-\infty}^{x} dsQ' + \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Переходя затем к пределу в (6.3.105)—(6.3.107) при $x \to +\infty$, получим для решений φ, φ' следующие соотношения:

$$B_1\varphi \circ \varphi' = k\varphi \circ \varphi', \tag{6.3.108}$$

$$a'b + b'a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (U + U') \cdot_k (\varphi \circ \varphi')\, dx \equiv (U + U', {}_k(\varphi \circ \varphi')). \tag{6.3.109}$$

Равенства (6.3.102) можно записать в виде

$$1 + \bar{b}'b - \bar{a}'a \equiv -I_\Delta(\bar{\varphi}', \varphi), \tag{6.3.110}$$

$$\Delta\overline{R}_+ = -\frac{1}{\bar{a}\bar{a}'} I_\Delta(\bar{\varphi}', \bar{\varphi}), \tag{6.3.111}$$

$$\Delta R_+ = \frac{1}{aa'} I_\Delta(\varphi', \varphi), \tag{6.3.112}$$

$$1 + b'\bar{b} - a'\bar{a} = I_\Delta(\varphi', \bar{\varphi}), \tag{6.3.113}$$

где $I_\Delta(\cdot, \cdot)$ — очевидная подгонка определения (6.1.100) к настоящей ситуации. Теперь из формул (6.3.111), (6.3.112) и (6.3.109) получим, что

$$\Delta R_+ - \Lambda(k)(R'_+ + R_+) = \frac{1}{aa'}(\sigma_2\Delta U - \Lambda(k)(U + U'), {}_k(\varphi \circ \varphi')),$$

$$\Delta\overline{R}_+ - \overline{\Lambda}(k)(\overline{R}'_+ + \overline{R}_+) = -\frac{1}{\bar{a}\bar{a}'}(\sigma_2\Delta U + \overline{\Lambda}(k)(U + U'), {}_k(\varphi \circ \varphi')). \tag{6.3.114}$$

Функции $\Lambda(k)$ и $\overline{\Lambda}(k)$ суть произвольные многочлены от переменной k или рациональные функции от k. Если образовать оператор, сопряженный к B по отношению к билинейной форме $(\,,\,)$, определенной в (6.3.109), то в предположении, что $\overline{\Lambda}(k) = -\Lambda(\bar{k})$, можно определить обобщенное преобразование Бэклунда

для интегрируемых уравнений. Оно задается формулами

$$\sigma_2 \Delta U - \Lambda\left(B_1^A\right)\left(U' + U\right) = 0, \tag{6.3.115}$$

$$B_1^A \equiv \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + R\int\limits_x^\infty dsQ + R'\int\limits_x^\infty dsQ, & -R\int\limits_x^\infty dsR' - R'\int\limits_x^\infty dsR \\ Q\int\limits_x^\infty dsQ' + Q'\int\limits_x^\infty dsQ, & -\frac{\partial}{\partial x} - Q'\int\limits_x^\infty dsR - Q\int\limits_x^\infty dsR \end{pmatrix}$$

и

$$U = (R,\ Q)^T.$$

Соответствующая связь между коэффициентами отражения задается равенствами

$$R'_+ = \frac{(1 + \Lambda(k))}{(1 - \Lambda(k))} R_+, \tag{6.3.116}$$

$$\overline{R}'_+ = \frac{(1 - \Lambda(k))}{(1 + \Lambda(k))} \overline{R}_+. \tag{6.3.117}$$

Вначале эти результаты были получены Калоджеро и Дегасперисом [1976]. Изложенный здесь метод их вывода принадлежит Додду и Буллафу [1977].

Простейшее преобразование в этом множестве, $\Lambda = \text{const} = \alpha$, попросту означает изменение масштаба переменных: $R' = \lambda R$, $Q' = \lambda^{-1} Q$, $\lambda = (1 + \alpha)(1 - \alpha)^{-1}$. Следующее простейшее преобразование возникает, когда $\Lambda(k) = (ak + b)^{-1}$, а числа $k_1 = (1 - b)/a$, $\bar{k}_1 = -(1 + b)/a$ удовлетворяют условиям $\operatorname{Im} k_1 > 0$, $\operatorname{Im} \bar{k}_1 < 0$. В этом случае коэффициенты отражения связаны формулами

$$R_{1+} = \frac{(k - \bar{k}_1)}{(k - k_1)} R_{0+}, \quad \overline{R}_{1+} = \frac{(k - k_1)}{(k - \bar{k}_1)} \overline{R}_{0+}. \tag{6.3.118}$$

Можно интерпретировать это преобразование, сказав, что $\sigma(\mathbf{L}_1)$ содержит дополнительные к $\sigma(\mathbf{L}_0)$ собственные значения k_1, $\bar{k}_1$. Соответствующее преобразование Бэклунда для интегрируемых нелинейных уравнений задается равенствами

$$(R_1 - R_0)_x + (R_1 + R_0) J_{10} + p_1 R_1 - \bar{p}_1 R_0 = 0,$$

$$(Q_1 - Q_0)_x + (Q_1 + Q_0) J_{10} - \bar{p}_1 Q_1 + p_1 Q_0 = 0,$$

$$J_{ij}(x) = \int\limits_x^\infty \left(R_i(y) Q_i(y) - R_j(y) Q_j(y)\right) dy, \tag{6.3.119}$$

$$\bar{p}_j = -2i\bar{k}_j \quad p_j = -2ik_j.$$

Эти формулы соответствуют «половине» классического преобразования Бэклунда, другая половина получается с помощью их

подстановки в конкретное интегрируемое уравнение, которому удовлетворяют (R_1, Q_1), (R_0, Q_0), и такой перестройки в нем, чтобы уравнения оказались уравнениями первого порядка относительно производных по t от переменных (R_1, Q_1) и (R_0, Q_0).

Заметим по этому поводу, что если

$$R_{+0t} = \Omega R_{+0}, \tag{6.3.120}$$

$$R_{+1t} = \left(\frac{k-k_1}{k-\bar{k}_1}\right) R_{+0t} = \Omega R_{+1}, \tag{6.3.121}$$

то преобразования связывают решения одного и того же уравнения. Это наблюдение, очевидно, остается справедливым в случае произвольного преобразования Бэклунда, для которого Λ не зависит от t. Если мы допустим, чтобы Λ зависело от t, то, как в случае преобразования Бэклунда, связанного с изоспектральным уравнением Шрёдингера, мы получим формальные преобразования между различными элементами интегрируемого семейства. Преобразование не является взаимнооднозначным ни в каком направлении. Это можно увидеть, выбирая либо (R_1, Q_1), либо (R_0, Q_0) нулевым и интегрируя (6.3.119). Для фиксированных k_1, $\bar{k}_1$ и Ω получается семейство солитонов (6.3.7). Ясно, что для решений, связанных преобразованием Бэклунда, существует теорема о перестановочности. Таким образом, для четырех решений (R_i, Q_i), $i = 0, 1, 2, 3$, связанных соотношением Бэклунда (6.3.119), мы имеем

$$\begin{aligned} R_{3+} &= \frac{(k-\bar{k}_2)}{(k-k_2)} R_{1+} = \frac{(k-\bar{k}_2)}{(k-k_2)} \times \frac{(k-\bar{k}_1)}{(k-k_1)} R_{0+} = \\ &= \frac{(k-\bar{k}_1)}{(k-k_1)} \times \frac{(k-\bar{k}_2)}{(k-k_2)} R_{0+} = \frac{(k-\bar{k}_1)}{(k-k_1)} R_{1+}, \end{aligned} \tag{6.3.122}$$

и, конечно, подобные соотношения имеются между $\bar{R}_{i+}$. Это устанавливает взаимоотношения между связанными преобразованием Бэклунда решениями (R_i, Q_i), $i = 0, \ldots, 3$. В том частном случае, когда R_i связано с Q_i посредством леммы 6.10, эта взаимосвязь алгебраическая; она обеспечивает принцип суперпозиции для решений, связанных преобразованием Бэклунда. Таким образом, новое решение интегрируемого уравнения (Q_3) может быть определено в этом случае алгебраическими средствами по данному решению (Q_0) и его двум преобразованиям Бэклунда (6.3.119), т. е. по Q_1, Q_2. Общий принцип суперпозиции дается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &R_3(J_{21} + (p_2 - p_1)) + R_2((\bar{p}_1 - p_2) - J_{30}) + \\ &\quad + R_1((p_1 - \bar{p}_2) + J_{30}) + R_0(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) + J_{12}) = 0, \end{aligned} \tag{6.3.123}$$

$$\begin{aligned} &Q_3(J_{21} - (\bar{p}_2 + \bar{p}_1)) + Q_2((\bar{p}_2 - p_1) - J_{30}) + \\ &\quad + Q_1((p_2 - \bar{p}_1) + J_{30}) + Q_0((p_1 - p_2) + J_{12}) = 0. \end{aligned} \tag{6.3.124}$$

Умножая затем (6.3.123) на $(Q_1 - Q_2)$ и (6.3.124) на $(R_1 - R_2)$ и вычитая из одного уравнения другое, получим алгебраическое соотношение между Q_3 и R_3 и решениями Q_i, $i = 0, 1, 2$, но Q_3 или R_3 по-прежнему нужно определять из интегрального уравнения.

В случае, когда $R = \pm Q$, преобразование Бэклунда (6.3.119) имеет вид

$$(Q_1 - Q_0)_x \pm (Q_1 + Q_0) \int_x^\infty \left(Q_1^2(y) - Q_0^2(y)\right) dy = p\,(Q_1 + Q_0). \quad (6.3.125)$$

Если мы умножим это уравнение на $(Q_1 - Q_0)$, проинтегрируем и затем решим квадратное уравнение, то мы получим

$$\int_x^\infty \left(Q_1^2(y) - Q_0^2(y)\right) dy = \pm \left(p - \left(p^2 \pm (Q_1 - Q_0)^2\right)^{1/2}\right). \quad (6.3.126)$$

Отсюда, дифференцируя, сокращая на a и затем снова интегрируя, мы находим, что в случае $R = -Q$ справедливы равенства

$$Q_1 = Q_0 + p \sin(W_1 + W_0),$$

$$W(x) = \int_x^\infty Q(y)\, dy. \quad (6.3.127)$$

В случае когда $R = +Q$, sin заменяется на sh. Для различных собственных значений k_1, k_2, $\operatorname{Im} k_i > 0$, принцип суперпозиции записывается в виде

$$\sin W_3 = [\sin W_0 ((p_1^2 + p_2^2)\cos(W_1 - W_2) - 2p_1p_2) + (p_1^2 - p_2^2)\cos W_0 \sin(W_1 - W_2)]\,[p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(W_1 - W)]^{-1}. \quad (6.3.128)$$

Принцип суперпозиции для кратного собственного значения $k_2 = k_1$ легко может быть получен из этой формулы, если положить $Q_2 = Q_1 + \delta Q$, $k_2 = k_1 + \delta k$ и затем взять предел при $\delta k \to 0$ или воспользоваться правилом Лопиталя. Это приведет к соотношениям

$$\sin W_3 = \sin W_0 + 2p_1 \dot{W}_1 (\cos W_0 - p_1 W_1 \sin W_0)\,(1 + p_1^2 \dot{W}_1^2)^{-1}, \quad (6.3.129)$$

$$\dot{W}_1 = \frac{i}{2} W_{1k}\,|_{k=k_1}.$$

Мы подчеркиваем, что обе эти формулы применимы к целому классу интегрируемых уравнений, для которых $R = -Q$. В частности, если мы рассмотрим СГ-уравнение, $U = 2W$, $\Omega(k) = \pm 1/2ik$, то непосредственно из этих формул мы сможем полу-

чить как двухсолитонное решение, рассмотренное ранее в этом разделе, так и решение, отвечающее кратному собственному значению. В обоих случаях мы предполагаем, что мы начинаем с $Q_0 = 0$, так что преобразованные по Бэклунду решения (6.3.118) являются солитонами. В первом случае для двух собственных значений $k = i\eta_1$ и $k_2 = i\eta_2$ (см. лемму 6.10) мы получаем двухсолитонное решение. Сначала заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}W_3 = \left(\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(W_1 - W_2), \tag{6.3.130}$$

так что, полагая $W_i = 2\operatorname{arctg}(\exp(\theta_i))$, $\theta_i = \gamma_i - 1/2\eta_i(\eta_i^2 x - t)$, получаем решение

$$U = 4\operatorname{arctg}\left\{\frac{(\eta_1+\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)}\cdot\frac{\operatorname{sh}[(\theta_1-\theta_2)/2]}{\operatorname{ch}[(\theta_1+\theta_2)/2]}\right\}. \tag{6.3.131}$$

Подобным образом для этого случая можно найти решение в виде связанного состояния (6.3.40) (см. задачи в конце этой главы). Наконец, мы найдем решение СГ-уравнения, отвечающее кратному собственному значению $k_1 = i\eta_1$. Из (6.3.129) получаем

$$\operatorname{tg} W = \frac{4\eta_1\dot{W}_1}{\left(1-4\eta_1^2\dot{W}_1^2\right)}, \tag{6.3.132}$$

$$\dot{W} = -\left(2x + \frac{1}{2\eta_1^2}t\right)\operatorname{sech}\theta_1, \tag{6.3.133}$$

так что

$$U = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(2\eta_1 x + \frac{1}{2\eta_1}t\right)\operatorname{ch}\theta_1}{2\left(2\eta_1 x + \frac{1}{2\eta_1}t\right)\operatorname{ch}^2\theta_1}\right). \tag{6.3.134}$$

Для случая $R = \pm Q^*$ принцип суперпозиции дается равенствами (6.3.125)—(6.3.126). Для кратного собственного значения $p = -2ik$ вариации δp и δp^* независимы, и тогда, если $Q_0 = 0$, то из (6.3.125)—(6.3.126) получается, что

$$Q_3 = \frac{-\left[Q_1 + Q_{1p}\left((\bar{p}-p) \mp \int_x^\infty |Q_3(y)|^2\,dy\right)\right]}{\pm\int_x^\infty |Q_1(y)|_p^2\,dy},$$

$$\int_x^\infty |Q_3(y)|^2\,dy = \frac{\left(1 \mp \int_x^\infty |Q_1|_{\bar p}^2\,dy\right)[Q_1 + Q_{1p}(\bar p - p)] \pm \int_x^\infty |Q_1|_{\bar p}^2\,dy\,[Q_1 + Q_{1p}(\bar p - p)]}{Q_{\bar p}\int_x^\infty |Q_1|_p^2\,dy \pm \left(1 \mp \int_x^\infty |Q_1|_p^2 dy\right) Q_{1p}}. \tag{6.3.135}$$

Если взять односолитонное решение для нелинейного уравнения Шрёдингера, то эта формула воспроизведет решение (6.3.42).

В заключение мы заметим, что КдФ-уравнение (интегрируемое методом обратной задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера) связано с мКдФ-уравнением (интегрируемым методом обратной задачи рассеяния для АКНС-системы) специальным видом преобразования Бэклунда, называемым преобразованием Миуры (см. разд. 3.2).

В действительности целое семейство уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния для уравнений Шрёдингера, можно подобным образом связать с подсистемой уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния для системы АКНС, определенных равенством $R = +Q$. Этот материал развит в упражнениях.

6.4. Интегрируемые нелинейные уравнения и метод обратной задачи рассеяния

На протяжении этой книги наше внимание было приковано к методу обратной задачи рассеяния для интегрируемых нелинейных уравнений, ассоциированных с двумя наиболее изученными линейными операторами: оператором Шрёдингера в гл. 3 и 4 и оператором АКНС—ЗШ, определенным на вещественной оси. Даже для этих методов обратной задачи рассеяния многие вопросы остаются открытыми. Примерами служат строгий математический подход к интегрируемым нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям; задача Коши для нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния для системы АКНС—ЗШ, для начальных данных, подчиняющихся более слабым ограничениям, нежели те, которых требует теорема 6.25; интерпретация сингулярного спектра в физических задачах. Более того, некоторые обобщения представляют физический интерес; например, метод обратной задачи рассеяния с начальными данными, не стремящимися к нулю при $|x| \to \infty$ (Кавата и Ино [1978] и Кавата и др. [1980]), и теория возмущений для почти интегрируемых уравнений. Последнее обобщение особенно

важно. Хотя интегрируемые уравнения могут служить моделью, все же реально мы неизбежно вынуждены работать с нелинейными уравнениями, которые сами не являются интегрируемыми, но в некоторых случаях могут быть представлены как возмущения интегрируемых уравнений. Хотя теоретические методы исследования далеко продвинуты, однако во многих случаях они обладают серьезным недостатком — трудностями в интерпретации результатов (в некоторых случаях мы в конце концов приходим к уравнениям, численное решение которых столь же трудно, как для исходных уравнений).

Для интегрируемых уравнений, у которых регуляризированный функционал-след резольвентного оператора является интегралом движения, возможна гамильтонова формулировка метода обратной задачи рассеяния (Захаров и Фаддеев [1971], Фаддеев и Тахтаджян [1974], Захаров и Манаков [1974], Захаров и др. [1974], Флашка и Ньюэлл [1975], Додд и Буллаф [1979]). Тогда преобразование обратной задачи рассеяния соответствует симплектическому отображению, действующему между многообразиями, для которых данные рассеяния (S) и функции, появляющиеся в L (P), суть локальные координаты. Специальный выбор координат на S переводит исходную симплектическую форму на P в каноническую. В этой системе координат эволюционные уравнения для данных рассеяния становятся преобразованными гамильтоновыми уравнениями на S из исходных нелинейных интегрируемых уравнений, записанных в виде гамильтоновых систем на P. Канонические координаты на S превращаются тогда в координаты типа действие—угол.

Такая формулировка метода обратной задачи рассеяния помимо присущей ей привлекательности обладает тем свойством, что она позволяет проквантовать некоторые физически интересные нелинейные интегрируемые уравнения. Например, нелинейное уравнение Шрёдингера (Кауп [1975]) и СГ-уравнение (Фаддеев и Тахтаджян [1974]) были проквантованы именно таким образом. Это так называемая полуклассическая (квазиклассическая) процедура, и она согласуется с приближениями первого порядка по $\hbar$, использующими функциональные интегралы или другие методы (Дашен и др. [1974, 1975], Корепин и Фаддеев [1975] и, например, Лютер [1976]).

В оставшейся части этого раздела мы исключим из рассмотрения периодические и дискретные задачи и обратим внимание на обобщение методов этой книги для получения других интегрируемых нелинейных уравнений.

Как было хорошо известно математикам, таким как Пенлеве, Гарнье и Шлезингер, работавшим в начале этого столетия над теорией дифференциальных уравнений, интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения возникают как условия инте-

грируемости, когда обыкновенные линейные дифференциальные уравнения преобразуются таким образом, чтобы сохранить некоторые «характеристики» уравнений. Так, интегрируемые нелинейные уравнения для двух независимых переменных, которые возникают благодаря изоспектральным деформациям, получаются из уравнений вида

$$Y_x(k) = \mathbf{P}(k)\, Y(k), \tag{6.4.1}$$

где $Y(k) = Y(x, t, k)$ есть n-координатный вектор-столбец в некотором функциональном пространстве, подвергаемый деформациям

$$Y_t(k) = \mathbf{Q}(k)\, Y(k), \tag{6.4.2}$$

сохраняющим спектр ($k_t = 0$, если $Y(k)$ есть решение). Легко проверить, что условия интегрируемости $Y_{xt} = Y_{tx}$ дают уравнение

$$\mathbf{P}_t(k) - \mathbf{Q}_x(k) - [\mathbf{P}(k),\ \mathbf{Q}(k)] = 0. \tag{6.4.3}$$

Производные в (6.4.3) суть полные производные для матричных функций $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, которые, вообще говоря, зависят от множества функций $\{p_i(x, t),\ i = 1, \ldots, m\}$ и их производных по x. Уравнения (6.4.3) должны быть независимы от k. Легко видеть, что два примера гл. 3 и 6 укладываются в эту схему. Возможны и другие виды деформаций, которые приводят к интегрируемым уравнениям. Во всех случаях законы сохранения позволяют просто вычислять деформации характеристических данных, ассоциированные с задачей. Например, в изоспектральной задаче эволюция данных рассеяния $S_\pm$ легко может быть получена для интегрируемых уравнений. Решение задачи при произвольных значениях независимых переменных восстанавливается затем с помощью преобразования обратной задачи рассеяния по этим характеристическим данным. Таким образом, метод, приспособленный для решения интегрируемых нелинейных уравнений, полученных деформациями с сохранением характеристики A, подобен методу обратной задачи рассеяния (см. разд. 4.2 и 6.2); мы назовем его обратным A-методом. Аналогично уравнения (6.4.2) тогда следует назвать изо-A деформациями. Мы сейчас приведем краткий обзор результатов в этой области, появившихся за последнее десятилетие.

6.4.1. Методы обратной задачи рассеяния

Главное направление работ, связанных с этими методами, состоит в поиске интегрируемых уравнений, ассоциированных со специальными видами функций $\mathbf{P}(k)$ и $\mathbf{Q}(k)$ для уравнений (6.4.1) и (6.4.2). Метод обратной задачи рассеяния для интегрируемых уравнений затрагивается здесь по существу поверхностным образом, хотя солитонные решения и их аналоги были получены во многих случаях.

Методы нахождения интегрируемых уравнений

(а) *Прямая подстановка*

Предположим, что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ рациональны по k; подставим выражения для них в (6.4.3) и потребуем, чтобы получающиеся матричные уравнения были совместны и независимы от k.

Пример.

$$\mathbf{P} = \frac{u_x}{k - k_1}, \quad \mathbf{Q} = \frac{u_t}{k + k_1}.$$

Тогда интегрируемое нелинейное уравнение, получающееся из (6.4.3), имеет вид

$$2k_1 u_{xt} - [u_x, u_t] = 0$$

(Захаров [1980], Захаров и Шабат [1975, 1980], Захаров и Михайлов [1979]).

(б) *Техника, развитая для специальных видов матрицы* $\mathbf{P}$

Большой класс интегрируемых уравнений получен в том случае, когда $\mathbf{P}$-уравнение сводится к задаче на собственные значения

$$\mathbf{L}Y = kY.$$

(б1) ($\mathbf{L}$, $\mathbf{A}$)-*пары*

Предположим, что оператор $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L} = l_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}},$$

где $u_i = u_i(x, t)$ и l_0 — постоянная матрица. Относительно оператора $\mathbf{A}$ ($\equiv -\mathbf{Q}$) предположим, что он имеет аналогичное представление

$$\mathbf{A} = a_0 \frac{\partial^m}{\partial x^m} + \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}},$$

где $v_i = v_i(x,t)$ и a_0 — постоянная матрица. В соответствии с хорошо известной формулировкой Лакса, интегрируемые уравнения задаются соотношением

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{L}, \mathbf{A}]. \tag{6.4.4}$$

Предположим, что существуют пределы $u_i \to l_i$, $v_i \to a_i$, $|x| \to \infty$, где l_i и a_i — постоянные матрицы. Если потребовать, чтобы стремление к пределу было «достаточно быстрым», то окажется, что соответствующие операторы $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(x \to \pm\infty)$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(x \to \pm\infty)$ удовлетворяют соотношению

$$[\mathbf{L}_0, \mathbf{A}_0] = 0. \tag{6.4.5}$$

Фактически оператор $\mathbf{A}$ однозначно определяется операторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_0$.

Пример. Пусть $\mathbf{L} = l_0\,\partial/\partial x + u_1$, $\mathbf{A} = a_0\,\partial/\partial x$. Предположим, что $u_1 = [l_0, u]$, где $u = u(x, t)$. В силу (6.4.5) имеем $[l_0, a_0] = 0$. Представления для $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}_0$ тогда приводят к формулам

$$\mathbf{A} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} + a_1, \quad a_1 = [a_0, u],$$

$$u_{1_t} = [u_1, a_1] + l_0 a_{1_x} - a_0 u_{1_x}.$$

Это уравнение содержит, в частности, уравнения, описывающие свободное движение n-мерного твердого тела (Манаков [1977]).

В случае скалярных уравнений Лакса u_i — вещественнозначные функции, а матрица l_0 превращается в скаляр, который изменением масштаба может быть сведен к единице. Этот случай был широко изучен в серии статей Гельфандом и Диким [1975—1978]. Помимо исследования гамильтоновой структуры ассоциированных эволюционных операторов они показали, что оператор A полностью определяется резольвентой оператора L, ${}_kR = (L - kI)^{-1}$.

(б2) *Техника обобщенных вронскианов*

Создателями этой техники были Калоджеро [1975] и Калоджеро и Дегасперис [1976], которые применили ее к матричному виду уравнения Шрёдингера

$$\mathbf{L}Y = k^2 Y, \quad \mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial x^2} + u. \tag{6.4.6}$$

Недавно этот метод был распространен также на другие системы. Этот метод похож на развитый АКНС [1974] тем, что и в том и в другом случаях не требуется явный вид эволюционного оператора (**Q**). Матрица-функция $u \to 0$ «достаточно быстро», когда $|x| \to \infty$. Асимптотические свойства системы характеризуются матрицей рассеяния (см. гл. 3 и 4), которая может быть построена по данным рассеяния. Предположим для простоты, что дискретный спектр отсутствует. Тогда коэффициенты отражения $\mathbf{R}(k)$ и прохождения $\mathbf{T}(k)$ определяются линейными соотношениями, которые связывают решения Йоста для системы

$$\mathbf{T}(k)\,\varphi(x, k) = \psi(x, -k) + \mathbf{R}(k)\,\psi(x, k). \tag{6.4.7}$$

Калоджеро и Дегасперис показали, что вводя в рассмотрение целые функции f и g и постоянные матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, можно получить из (6.4.6) два выражения, которые, подобно обычному соотношению с вронскианом, не зависят от x. Из этих соотношений можно вывести следующий факт. Если коэффициенты отражения удовлетворяют линейному уравнению

$$f_0(-4k^2)\,\mathbf{R}_t = f_n(-4k^2)\,[\mathbf{M}_n, \mathbf{N}] + 2ikg_n(-4k^2)\,\{\mathbf{N}_n, \mathbf{R}\} + \\ + 2ikg_0(-4k^2)\,\mathbf{R}, \tag{6.4.8}$$

то интегрируемое эволюционное уравнение имеет вид

$$f_0(\mathrm{L})\,u_t = f_n(\mathrm{L})\,[\mathbf{M}_n,\ u] - g_n(\mathrm{L})\,G\mathbf{N}_n + 2g_0(\mathrm{L}), \qquad (6.4.9)$$

где f_i, g_i — произвольные целые функции, $\mathbf{M}_n$, $\mathbf{N}_n$ — произвольные постоянные матрицы и

$$\mathbf{LY} = \mathbf{Y}_{xx} - 2\{u,\ \mathbf{Y}\} + \mathbf{G}\int_x^\infty dy\,\mathbf{Y}(y),$$

$$\mathbf{GY} = \{u_x,\ \mathbf{Y}\} + \left[u,\ \int_x^\infty dy\,[u(y),\ \mathbf{Y}(y)]\right]. \qquad (6.4.10)$$

Скобки $\{\ ,\ \}$ и $[\ ,\ ]$ означают соответственно антикоммутатор и коммутатор.

В классе уравнений, задаваемых формулами (6.4.10), специально изучались «уравнения бумерона»

$$\begin{aligned} \underline{V}_t(x,\ t) &= \underline{b}\cdot\underline{V}_x(x,\ t), \\ \underline{V}_{x_t}(x,\ t) &= \underline{V}_{xx}(x,\ t)\,\underline{b} + \underline{a}x\underline{V}_x(x,\ t) - \\ &\quad - 2\underline{V}_x(x,\ t)\,x\,(\underline{V}(x,\ t)\,x\underline{b}), \end{aligned} \qquad (6.4.11)$$

где $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ — постоянные векторы. Эти уравнения имеют решения, которые, начинаясь от $x = +\infty$, затем «бумерангом» возвращаются обратно к $x = +\infty$.

(63) *Обобщенная АКНС-техника*

Ньюэлл [1979] рассмотрел системы, для которых $\mathbf{P} = k\mathbf{R} + \mathbf{U}$, где $\mathbf{R}$ есть постоянная диагональная матрица с нулевым следом и $\mathbf{U} \to 0$ достаточно быстро, когда $|x| \to \infty$. Пользуясь процедурой гл. 6, легко получить соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-1}\mathbf{U}_t\Phi\,dx, \\ \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C},\ \mathbf{A}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-1}[\mathbf{C},\ \mathbf{U}]\,\Phi\,dx, \end{aligned} \qquad (6.4.12)$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная диагональная матрица, $\mathbf{A}$ — матрица рассеяния, связывающая решения Йоста $\Phi = \Psi\mathbf{A}$, определенные их асимптотическими свойствами при $x \to \pm\infty$. Если элементы в $\mathbf{R}$ различны, то из $\mathbf{P}$-уравнения следует, что существует оператор $\mathbf{D}$, определенный равенством

$$\mathbf{DH}_0 = \mathbf{H}_{0x} + [\mathbf{H}_0,\ \mathbf{U}] + \left[\int_x^\infty [\mathbf{H}_0,\ \mathbf{U}_0]\,dy,\ \mathbf{U}\right],$$

где $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} - \operatorname{diag}\mathbf{H}$,

$$\mathbf{D}^A\mathbf{S}_0^{ij} = k[\mathbf{R},\ S_0^{ij}], \quad (\mathbf{S}_0^{ij})_{lm} = \hat{\varphi}_{li}\varphi_{mj}$$

и $\hat{\Phi}_{il}$, Φ_{mj} суть соответствующие элементы в Φ^{-1} и Φ. Определим $\tilde{H}_{jk} = H_{jk}(\alpha_j - \alpha_k)^{-1}$, где diag $\mathbf{R} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, так что $\mathbf{DM} = \mathbf{DH}$. Тогда в силу (6.4.12) легко видеть, что если $\mathbf{A}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_t)_0 = \Omega(k)(\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C}, \mathbf{A}])_0, \tag{6.4.13}$$

где $\Omega(k)$ — произвольная целая функция, то соответствующие интегрируемые уравнения задаются формулой

$$\mathbf{U}_t = \Omega(\tilde{\mathbf{D}})[\mathbf{C}, \mathbf{U}]. \tag{6.4.14}$$

Ясно, что подход с обобщенным вронскианом и обобщенная АКНС-техника очень похожи. Метод обобщенного вронскиана дает оператор рекурсии $\mathbf{L}$, который немедленно возникает в определяющем соотношении для интегрируемых нелинейных уравнений, но должен быть вычислен в рамках АКНС-метода. Насколько эта работа (и изобретательность, которой она требует!) сравнима с работой по вычислению итераций методом обобщенного вронскиана — вопрос, который, по-видимому, решается индивидуальными предпочтениями. Заметим, что преобразование Бэклунда, которое возникает в методе обобщенного вронскиана, может быть также получено модификацией подхода АКНС (см. разд. 4.3. и 6.3).

Возможны дальнейшие обобщения этого метода. Так, в приведенном выше примере некоторые α_i в $\mathbf{R}$ могут совпадать. Если мы выберем $\mathbf{R} = i\,\mathrm{diag}\,(-2, 1, 1)$ и

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & Q & R \\ \alpha Q^* & 0 & 0 \\ \beta R^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = 9i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.4.15}$$

то получим уравнения, описывающие распространение огибающей поляризованной волны в нелинейной среде (Манаков [1974]):

$$\begin{aligned} Q_t &= i(Q_{xx} - 2\alpha Q^2 Q^* - 2\beta R R^* Q), \\ R_t &= i(R_{xx} - 2\alpha Q Q^* R - 2\beta R^2 R^*). \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

Интегрируемые нелинейные уравнения могут быть распространены на более высокие размерности, если включить в формализм дополнительные переменные. Один из путей, ведущих к этому, состоит, например, в добавлении к оператору $\mathbf{A}$ из $(\mathbf{L}, \mathbf{A})$-пары дополнительного линейного дифференциального оператора, действующего на дополнительные переменные. Если

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{L}) \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{A}_1, \tag{6.4.17}$$

то интегрируемое уравнение принимает вид

$$\mathbf{L}_t + [\mathbf{L},\ \mathbf{A}_1] + \sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{L})\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y_i} = 0. \qquad (6.4.18)$$

Аналогичная техника для обобщенного вронскиана/обобщенного метода АКНС заключается в замене оператора ∂_t в эволюционном уравнении для данных рассеяния на оператор вида

$$\partial = \partial_t + \sum_{i=1}^{N} f_i(k,\ y)\frac{\partial}{\partial y_i},$$

где f_i — целые функции по k. Уравнениям, порожденным этими функциями, трудно, по-видимому, придать физический смысл. Другая возможность состоит во включении в $\mathbf{L}$ дополнительного оператора. Определим, например,

$$\mathbf{L}_1 = a\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}.$$

Затем уравнение, определяемое как интегрируемое, записывается в виде $\mathbf{L}_t - a\mathbf{A}_y = [\mathbf{L},\ \mathbf{A}]$. В случае скалярного оператора

$$\mathbf{L} = \partial_x^3 - \frac{3}{4}(u_x + 2u\partial_x) + \frac{3}{2}w + \nu^2\partial x;\quad \mathbf{A} = ib(\partial_x^2 - u) \qquad (6.4.19)$$

после замены переменных $x \to ix$, $y \to t$, $t \to y$ приходим к уравнению Кадомцева—Петвиашвили [1971]:

$$u_{xt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\nu^2 u + \frac{1}{4}u_{xx} + \frac{3}{4}u^2\right] + \frac{3}{4}\beta^2 u_{yy}, \qquad (6.4.20)$$

если

$$\beta = -i\alpha \quad \text{и} \quad \alpha = i\beta^{-1}\left[\frac{2}{3}\right]^{1/2}.$$

Другие системы такого типа возникают из триад $[\mathbf{L},\ \mathbf{A},\ \mathbf{B}]$, определяющие уравнения для которых имеют вид

$$\mathbf{L}Y = 0,\quad Y_t + \mathbf{A}Y = 0. \qquad (6.4.21)$$

Тогда из равенства $(\mathbf{L}_t - \mathbf{L}\mathbf{A})\,Y = 0$, и того, что $\mathbf{Z}\mathbf{L}Y = 0$ для некоторого оператора $\mathbf{Z}$, следует, что разложение $\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ приводит к интегрируемому уравнению вида

$$\mathbf{L}_t - [\mathbf{L},\ \mathbf{A}] = \mathbf{B}\mathbf{L} \qquad (6.4.22)$$

(Захаров [1980], Манаков [1976]).

Включение независимой переменной в задачу рассеяния приводит к дальнейшему расширению класса интегрируемых уравнений (Ньюэлл [1979], Калоджеро и Дегасперис [1978]). Наиболее интересный пример такого рода — уравнение Эриста в общей

теории относительности. Решения этого уравнения определяют пустое аксиально симметричное пространство-время. Уравнение Эрнста имеет вид

$$(\mathrm{Re}\,\mathscr{E})\,\nabla^2\mathscr{E} = \nabla^2\mathscr{E}\cdot\nabla\mathscr{E}, \tag{6.4.23}$$

где

$$\nabla^2\mathscr{E} = x_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \mathscr{E} = f + ig.$$

Функция g является «потенциалом кручения», который определен равенством $(-g_{x_2}, g_{x_1}) = -x_1^{-1}f\,(\omega_{x_1}, \omega_{x_2})$, где f и ω суть коэффициенты канонической формы Льюиса для метрики

$$ds^2 = f\,(dt + \omega\,d\varphi)^2 - f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left[dx_1^2 + dx_2^2\right] + x_1^2\,d\varphi^2\right]. \tag{6.4.24}$$

Задачу линейных деформаций для уравнения Эрнста изучали Нойгебауэр и Крамер [1980], Харрисон [1980] и Додд и Моррис [1982]. Она имеет вид

$$\begin{aligned} Y_z &= -\frac{1}{2}f^{-1}\begin{pmatrix} -i\gamma^{1/2}f_z & g_z\left(1-i\gamma^{1/2}\right) \\ -g_z\left(1+i\gamma^{1/2}\right) & i\gamma^{1/2}f_z \end{pmatrix} Y, \\ Y_{\bar z} &= -\frac{1}{2}f^{-1}\begin{pmatrix} i\gamma^{-1/2}f_{\bar z} & g_{\bar z}\left(1+i\gamma^{-1/2}\right) \\ -g_{\bar z}\left(1-i\gamma^{-1/2}\right) & -i\gamma^{-1/2}f_{\bar z} \end{pmatrix} Y, \end{aligned} \tag{6.4.25}$$

где $\gamma = (\bar z + ik)/(z - ik)$, $z = x_1 + ix_2$. Решения уравнений (6.4.25) были найдены Захаровым и Белинским [1978] посредством анализа операторного пучка, связанного с (6.4.25) (Додд и Моррис [1982]), и они имеют вид

$$\begin{aligned} Y_z - \frac{2\eta}{(2i\eta - (z+\bar z))}\cdot Y_\eta &= -\frac{2\,(z+\bar z)\,CY}{(2i\eta - (z+\bar z))}, \\ Y_{\bar z} + \frac{2\eta}{(2i\eta + (z+\bar z))}\cdot Y_\eta &= \frac{2(z+\bar z)\,CY}{(2i\eta + (z+\bar z))}, \end{aligned} \tag{6.4.26}$$

где $C = \frac{1}{2}h_z\omega h^{-1}$ и h есть матрица

$$\begin{pmatrix} f & \omega f \\ f & \omega^2 f - x_1^2 f^{-1} \end{pmatrix}.$$

Как заключительный пример, указывающий на богатство и многообразие класса интегрируемых нелинейных уравнений, сейчас будет приведено промежуточное уравнение, описывающее стратифицированную жидкость конечной глубины (промежуточное уравнение в том смысле, что предельный случай мелкой воды есть КдФ-уравнение, а предельный случай глубокой воды — уравнение Бенджамина—Оно):

$$Q_t + 2QQ_x + \mathrm{T}\,(Q_{xx}) = 0,$$

где

$$\mathbf{T}(f) \equiv P \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\delta} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi(x-y)}{2\delta}\right] + \frac{1}{2\sigma} \operatorname{sgn}(x-y) \right] f(y)\, dy. \quad (6.4.27)$$

Вопросы, связанные с преобразованием Бэклунда, законами сохранения и методом обратной задачи рассеяния для этого уравнения, были рассмотрены в работе Кодамы и др. [1982]. Последнее замечание: оператор рекурсии (см. выше) не обязательно определяет все интегрируемые уравнения, ассоциированные с данным оператором **L** из (**L**, **A**)-пары. Таким образом, например, уравнения генерации простых гармоник (Каул [1978]) имеют операторы **P**, **Q**, представляющиеся в виде (см. также гл. 8)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -ik & Q \\ Q^* & ik \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} R^*R & R^2 \\ -R^{*2} & -RR^* \end{pmatrix}. \quad (6.4.28)$$

Уравнения же такие: $R_x = QR^*$, $Q_t = -2R^2$; так что они бездисперсионные и, очевидно, находятся вне АКНС-схемы.

Очень важная тема, которую мы не включили в этот короткий обзор, — проблема редукции. Она возникает всякий раз, когда элементы матриц **P** и **Q** связаны некоторым образом. В общем случае требуется, чтобы матрицы **P** и **Q** допускали какую-нибудь симметрию или инволюцию. Для подробного изучения этих вопросов мы отсылаем читателя к статьям Михайлова [1981] и Калоджеро и Дегасперис [1981].

Техника решений

(а) *Метод обратной задачи рассеяния*

Именно этот метод систематически используется в настоящей книге. Он применим всегда, когда уравнения для **P** и **Q** допускают **L**, **A**-пару. Для большинства систем этот метод применялся лишь формально. Это значит, что необходимые и достаточные условия (на данные рассеяния) существования и единственности решения (т. е. однозначной определимости коэффициентов u_i в **L**) получены не были. Аналогичные соображения можно, разумеется, высказать и по поводу задачи Коши для интегрируемых уравнений этих систем. Скалярная задача третьего порядка была исследована Каупом [1980]. Общая скалярная задача третьего порядка, равно как и задача n-го порядка, была исследована Кодри [1980, 1982].

Существует множество методов, позволяющих восстановить функции u_i по данным рассеяния.

(а1) *Решая уравнение Марченко*

Решения нелинейного интегрируемого уравнения описываются в терминах решений специального уравнения Фредгольма, назы-

вающего уравнением Марченко (в русской литературе — фундаментальным уравнением); см. гл. 4 и 6.

(а2) *Решая задачу Римана—Гильберта*

Захаров и Шабат [1972] решили обратную спектральную задачу рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера, восстанавливая кусочно-аналитическую функцию $H(k)$ по ее следу (разности предельных значений) на вещественной оси

$$\varphi(\xi) = H(\xi + iO) - H(\xi - iO), \quad \varphi(\xi) = R_+(\xi) e^{i\xi x} \varphi(x, \xi) \quad (6.4.29)$$

и вычетам в полюсах функции $H(k)$. В результате получаем набор сингулярных интегральных уравнений для решений Йоста (как собственных, так и несобственных функций), решение которых определяет решение нелинейного уравнения Шрёдингера (техника применения преобразования Фурье в такой ситуации изложена в разд. 6.2). Недавно этот подход был применен Захаровым и Шабатом [1980], Захаровым и Белинским [1978] (см. также Захаров [1980]) в качестве техники решений для операторных пучков (т. е. для общих уравнений, которым удовлетворяют матричные функции **P** и **Q**, введенные выше). Дальнейшие комментарии к этому методу будут приведены в пунктах (б) и (в) ниже.

(б) *Техника оператора одевания*

Захаров и Шабат [1974] развили формальную операторную технику для получения решений уравнений, порожденных (**L**, **A**)-парами. Она включает и тот случай, кратко обрисованный ранее, когда операторы содержат более двух независимых переменных. По существу этот метод можно рассматривать как формальное спектральное преобразование обратной задачи рассеяния.

Введем операторы преобразования

$$\mathbf{K}_\pm Y = \pm \int_x^{\pm\infty} \mathbf{K}_\pm(x, y) Y(y)\, dy, \quad \Psi = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_+)\Psi_0,$$

$$\Phi = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_-)\Psi_0, \quad (6.4.30)$$

где Ψ_0 — фундаментальное матричное решение задачи на собственные значения для $\mathbf{L}_0$ — «раздетого», или «голого», оператора. Ясно, что одетый оператор **L** для собственных функций Ψ, Φ задается равенством $\mathbf{L} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_\pm)^{-1} \mathbf{L}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{K}_\pm)$, в предположении, что обратные операторы существуют. Так как Ψ и Φ суть фундаментальные решения, то существует матрица данных **A** (можно считать, что она представима в виде $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{R}$), которая связывает эти решения: $\Phi = \Psi(\mathbf{I} + \mathbf{R})$. Из этого вытекает, что можно предположить существование оператора Фредгольма **F**, такого что

$$\mathbf{I} + \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_+)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{K}_-),$$

где

$$\mathbf{F}\Psi_0 = \Psi_0\mathbf{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(x, y)\, Y(y)\, dy. \qquad (6.4.31)$$

В классе операторов F, определенных формулой (6.4.31), выбираются такие, которые коммутируют с голым дифференциальным оператором $\mathbf{M}_0$. Это легко показать, предполагая, что одетый оператор $\mathbf{M}$ однозначно определен и также является дифференциальным оператором.

Дифференциальный оператор $\mathbf{M}_0$ определяет, в нашей старой терминологии, «эволюцию» преобразования Фурье данных рассеяния. Таким образом, одеванию оператора $\mathbf{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}_0$ в линейном уравнении с частными производными соответствует определение эволюции $\mathbf{F}$ во времени t.

Одетые операторы $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{L}$ (может существовать несколько дифференциальных операторов, коммутирующих с $\mathbf{F}$) однозначно определяются своими «голыми» операторами с помощью коммутационных соотношений с $\mathbf{F}$ и ядер оператора преобразования $\mathbf{M}_i(\mathbf{I} + \mathbf{K}_\pm) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_\pm)\,\mathbf{M}_{0i}$. Кроме того, для $y > x$ из (6.4.31) получаем уравнение

$$\mathbf{F}(x, y) + \mathbf{K}_+(x, y) + \int_x^{\infty} \mathbf{K}_+(x, s)\,\mathbf{F}(s, y)\, ds, \qquad (6.4.32)$$

которое можно рассматривать как уравнение Вольтерры, определяющее $\mathbf{F}$ при заданном $\mathbf{K}_+$, или как уравнение Фредгольма, определяющее $\mathbf{K}_+$ при заданном $\mathbf{F}$. Задача Коши для интегрируемого уравнения вида $\mathbf{L}_t - a\mathbf{A}_u = [\mathbf{L}, \mathbf{A}]$, где $\mathbf{M}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}$ и $\mathbf{M}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L}$, может быть решена по следующей схеме:

$$u_t(0) \xrightarrow{\text{I}} \mathbf{K}_+(0) \xrightarrow{\text{II}} \mathbf{F}(0) \xrightarrow{\text{III}} \mathbf{F}(t) \xrightarrow{\text{IV}} \mathbf{K}_+(t) \xrightarrow{\text{V}} u_t(t).$$

I. Определим $\mathbf{K}_+(0)$, решая задачу Гурса

$$a\mathbf{K}_{+u}(0) + \mathbf{L}(0)\,\mathbf{K}_+(0) - \mathbf{L}_0^A\mathbf{K}_+(0) = 0.$$

II. Решим уравнение (6.4.32) для $\mathbf{F}(0)$.

III. Решим линейное эволюционное уравнение для $\mathbf{F}(t)$.

IV. Решим (6.4.32) с ядром $\mathbf{F}(t)$ для $\mathbf{K}_+(t)$.

V. Определим $\mathbf{L}(t)$ из уравнения

$$a\mathbf{K}_{+u}(t) + \mathbf{L}(t)\,\mathbf{K}_+(t) - \mathbf{L}_0^A\mathbf{K}_+(t) = 0.$$

Замечание. Шаги IV и V представляют собой обратное преобразование. Оператор $\mathbf{L}_0^A$ действует на второй аргумент (y) в $\mathbf{K}_+$.

Захаров и Шабат [1980] и Захаров [1980] показали, что можно одеть «голые» операторы $\mathbf{P}_0(k)$, $\mathbf{Q}_0(k)$ для того, чтобы получить операторные пучки $\mathbf{P}(k, x, t)$ и $\mathbf{Q}(k, x, t)$. Аналогичные идеи можно использовать для получения преобразований Бэклунда.

(в) *Преобразования Бэклунда*

В гл. 4 и 6 мы показали, как по заданным решениям уравнения Шрёдингера или системы АКНС—ЗШ можно построить новые решения. Эта техника хорошо работает в том случае, когда интегрируемое уравнение порождается оператором $\mathbf{L}$, т. е. когда $\mathbf{A}$ определен оператором $\mathbf{L}$. В общем случае, однако, это не так, но можно воспользоваться методом, развитым в работах Захарова и Шабата [1980] и Захарова и Михайлова [1979]. Предположим, что мы имеем заданное решение $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$ уравнения (6.4.3) и хотим построить новое решение $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ удовлетворяют тому же самому уравнению, то мы можем предположить для простоты, что мы имеем дело с задачей Римана с нулями. В этом случае мы можем предположить далее, что имеем дело с некоторым классом специальных решений, для которых задача Римана имеет решение

$$\Psi(k) = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}}{(k-\mu)}\right)\Psi_0(k), \tag{6.4.33}$$

где $\mathbf{R}$ — сингулярная матричная функция, а Ψ есть решение (6.4.3) для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Тем самым предполагается специальная нормировка, допустимая для того класса уравнений, с которым мы работаем. Преобразование Бэклунда может быть теперь записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{H}_x\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{P}_0\mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{H}_t\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{Q}_0\mathbf{H}^{-1}, \end{aligned} \tag{6.4.34}$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{R}/(k-\mu)$.

Красивый пример этого подхода содержится в работе Захарова и Белинского [1978].

(г) *Техника Хироты*

Примеры, демонстрирующие этот метод, приводились в вводной главе настоящей книги (Хирота [1976, 1980]). Недавно Джимбо и Мива [1981] показали, что техника Хироты имеет глубокий теоретический смысл. Зависимые переменные Хироты оказались в интерпретации этих авторов введенными ими τ-функциями, появляющимися в анализе деформаций, которые сохраняют монодромию (см. следующий раздел).

6.4.2. Другие методы обратной задачи

Существует тесная связь между изучаемыми здесь интегрируемыми нелинейными эволюционными уравнениями и обыкновенными дифференциальными нелинейными уравнениями типа Пенлеве. Эти уравнения характеризуются подвижными критическими точками (точками ветвления и существенными сингулярностями) (Айнс [1956]). Например, Лэм [1977] показал, что π-импульс в усилителе (гл. 7) по существу дается решениями автомодельной формы уравнения СГ, совпадающей со специальным случаем уравнения Пенлеве третьего типа. Абловиц и Сигур [1977] показали, что автомодельные решения, обусловленные уравнениями Пенлеве второго типа, играют существенную роль в асимптотическом поведении решений уравнения КдФ. В самом деле, оказалось, что медленно меняющиеся автомодельные решения дают основной вклад в асимптотику решений (см. разд. 4.3 и 6.3). В серии статей Абловиц, Рамани и Сигур [1978, 1980] показали, что специальные случаи пяти трансцендентов Пенлеве возникают из автомодельных форм хорошо известных интегрируемых эволюционных уравнений и поэтому после замены переменных могут быть исследованы методом обратной задачи рассеяния. Однако этот метод не позволяет получить более общие решения уравнений, поскольку он предполагает граничные условия быстрого убывания. Любопытно, что эта задача была исследована Гарнье [1912] и Шлезингером [1912]. Рассмотрим в качестве примера уравнение мКдФ $Q_t - 6Q^2Q_x + Q_{xxx} = 0$. Это уравнение может быть решено методом обратной задачи рассеяния с операторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ вида

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -i\zeta & Q \\ Q & i\zeta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4\zeta^3 - 2i\zeta Q^2 & 4Q^2 + 2i\zeta Q_x - Q_{xx} + 2Q^3 \\ 4\zeta^2 Q - 2i\zeta Q_x - Q_{xx} + 2Q^3 & 4\zeta^3 + 2i\zeta Q^2 \end{pmatrix}. \tag{6.4.35}$$

Автомодельная переменная для этого уравнения — это $z = x/(3t)^{1/3}$. Введем новую переменную $k = \zeta\,(3t)^{1/3}$, затем, слегка изменяя задачу (включение члена ν/k в $\mathbf{Q}$), запишем новую задачу деформации в виде

$$Y_x = \mathbf{P}Y, \quad Y_k = \mathbf{Q}Y, \tag{6.4.36}$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -ik & U \\ U & ik \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4ik^2 - i\,(z + 2U^2) & 4kU + \dfrac{\nu}{k} + 2ikU_x \\ 4kU + \dfrac{\nu}{k} - 2iU_x & 4ik^2 + i\,(z + 2U^2) \end{pmatrix},$$

а интегрируемое уравнение, которое получается из условий интегрируемости, является уравнением Пенлеве II-го типа:

$$U_{zz} - zU - 2U^3 + \nu = 0. \qquad (6.4.37)$$

Возникает вопрос, что сохраняется при деформации, описываемой (6.4.36)? Для ответа на этот вопрос будем рассматривать **Q**-уравнение как фундаментальное, и пусть **P**-уравнение определяет деформации. Точка $k = 0$ является регулярной особой точкой **Q**-уравнения, а точка $k = \infty$ — нерегулярной особой точкой. С нерегулярной особой точкой связано явление Стокса. Фундаментальные решения **Q**-уравнения, имеющие асимптотическое разложение одного и того же вида в окрестности точки $k = \infty$, определены на непрерывных областях римановой поверхности (в этом случае — римановой сферы), иногда называемыми областями Стокса. Два таких решения, определенных на примыкающих областях, связаны матричной функцией, элементы которой называются множителями Стокса. Фундаментальное матричное решение **Q**-уравнения является многозначным в окрестности точки $k = 0$. Соотношение между двумя последовательными ветвями на римановой поверхности ($k = 0$ есть точка ветвления) имеет вид $Y(k \exp(2\pi i)) = Y(k)\,\mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ — матрица монодромии, связанная с точкой $k = 0$. Эти фундаментальные решения, определенные асимптотическими разложениями в окрестностях точек $k = 0$ и $k = \infty$ соответственно, выражаются одно через другое с помощью матрицы связи. Можно показать, что матрица монодромии может быть выражена через множители Стокса и матрицы связи, которые и образуют данные монодромии для уравнения. Задача восстановления **Q**-уравнения по данным монодромии состоит в обобщении задачи Римана для регулярной особой точки на случай нерегулярной особой точки (см. Биркгоф [1913]). Флашка и Ньюэлл [1980] показали, что данные монодромии не меняются, когда **Q**-уравнение деформируется **P**-уравнением, определенным в (6.4.36) (т. е. не зависят от z). В этой статье уравнение Пенлеве II-го типа они решают методом обратной задачи с монодромией, вкратце описанным выше. Обратная задача была решена восстановлением $Y(k)$ при произвольных значениях z по данным монодромии. Решение удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению для $Y(k)$, из которого может быть восстановлена U.

В трех очень интересных статьях Джимбо, Мива и Уено [1981] исследовали общую задачу, когда **Q** имеет произвольные рациональные коэффициенты и особенности. К тому же они показали, что единственное **P**-уравнение может быть заменено произвольным числом уравнений с соответствующим числом деформационных параметров. На этом пути им удалось включить в рассмотре-

ние изоспектральные деформации внутри изомонодромической структуры. Статьи Флашки и Ньюэлла [1981] и Джимбо и Мивы [1981] содержат дальнейшее развитие этих идей.

6.5. Примечания

Раздел 6.1

1. Мы использовали другие граничные условия, чем АКНС [1974]. Граничные условия у этих авторов были связаны с их методом обобщения работы Захарова и Шабата [1972]. Легко приспособить формулы к двум различным условиям. В большинстве случаев необходимо лишь помнить, что $\bar{a}$ у АКНС $= -a$ и $\bar{\varphi}$ у АКНС $= -\bar{\varphi}$. Определение, которым мы пользуемся, означает, что большинство формул превращается в «двойственные» к ним операцией «—»: $(\overline{f}) = f$, $\overline{(\overline{f})} = f$). Под двойственной формулой мы понимаем выражение для $(\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi})$, имеющее ту же функциональную форму, что и для $(\bar{\varphi}, \varphi, \bar{\psi}, \psi)$. Сюда входят формулы, содержащие дифференцирование по x, t и k (см., например, (6.1.34)).

2. *Обобщенной спектральной мерой* в гильбертовом пространстве H называют функцию P, обладающую следующими свойствами:

(1а) P определена на некотором классе $D(P)$ борелевских подмножеств комплексной k-плоскости.

(1б) Класс $D(P)$ вместе с каждым множеством содержит любое его борелевское подмножество.

(1в) Класс $D(P)$ вместе с каждой парой элементов содержит их объединение.

(2а) Значениями функции P являются линейные операторы $P(\Delta)$, $\Delta \in D(P)$, определенные на всем пространстве H и отображающие его непрерывно в себя.

(2б) $P(\Delta_1) P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, $\Delta_1, \Delta_2 \in D(P)$.

(2в) Для любого разложения множества $\Delta \in D(P)$ на попарно непересекающиеся борелевские подмножества $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, ряд $\sum P(\Delta_n)$ сильно сходится к $P(\Delta)$.

(2г) Если $f \in H$ и $P(\Delta) f = 0$ для всех $\Delta \in D(P)$, то $f = 0$.

(2д) Если $f \in H$ и $[P(\Delta)]^* f = 0$ для всех $\Delta \in D(P)$, то $f = 0$.

Для оператора L борелевскими подмножествами $D(P)$ комплексной плоскости k являются такие подмножества, замыкание которых не содержит точек сингулярного спектра k_j, $\bar{k}_m$, $j = 1, \ldots, N$,

$m = 1, \ldots, \bar{N}$. Для каждого $\Delta \in D(P)$ и для каждой функции $F \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ определим

$$P(\Delta) F(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta \cap]-\infty,\ \infty[} dk \left(\frac{b}{a}(k) \psi(x, k) \psi(F, k) - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(k) \psi(x, k) \psi(F, k) + \psi(x, k) \psi(F, k) - \psi(x, k) \psi(F, k) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k_j \in \Delta \\ j=1, \ldots, M}} \left\{ \left(\frac{d}{dk} \right)^{m_j - 1} p_j(k) \psi(x, k) \psi(F, k) \right\}_{k=k_j} +$$

$$+ \sum_{\substack{k_j \in \Delta \\ j=1, \ldots, M}} \left\{ \left(\frac{d}{dk} \right)^{\bar{m}_j - 1} \bar{p}_j(k) \psi(x, k) \psi(F, k) \right\}_{k=k_j}.$$

Функция P, заданная этой формулой, является обобщенной спектральной мерой в пространстве $L^2_{(2)}(\mathbb{R})$.

Для каждой финитной функции $F \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ мы можем определить преобразования Фурье, точнее L-преобразования Фурье $\psi(F, k)$ и $\bar{\psi}(F, k)$. Для каждой пары финитных функций F, $G \in L^2_{(2)}(\mathbb{R})$ функция $\psi_{FG}(k) = (\psi(F, k) \psi(\tilde{G}, k), \psi(F, k) \bar{\psi}(\tilde{G}, k), \bar{\psi}(F, k) \bar{\psi}(\tilde{G}, k), \psi(F, k) \psi(\tilde{G}, k))$, где $\tilde{G} = (G_1, G_2)$, принадлежит некоторому линейному пространству Z. Для регулярных собственных функций, т. е. таких, которые определяются регулярными граничными условиями в точке $x = 0$, из теории Марченко вытекает существование непрерывного линейного функционала R на Z, обобщающего равенство Парсеваля. Имея в виду наш случай, мы предположим также, что это справедливо для функционала

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot F(x)\, dx = R(\Psi_{FG}),$$

где функционал R есть обобщенная спектральная функция. По аналогии с самосопряженным случаем определенная выше спектральная мера показывает, что

$$S_+ = \{R_+, \overline{R}_+, k_j, P_{+j}(x), \overline{k}_l, \overline{P}_{+l}(x), \quad j = 1, \ldots, M, l = 1, \ldots, \overline{M}\}$$

суть данные рассеяния для $\mathbf{L}$. Нормировочные многочлены $P_j(x)$ имеют степень $m_j - 1$. Из определения спектральной меры легко выводится, что коэффициенты при x^m в $P_{+j}(x)$, $0 \leqslant m \leqslant m_j - 1$ представляют собой коэффициенты $(\psi(x, k) \psi(F, k))_{(m)k}$ в разложении.

Раздел 6.3

1. Как было упомянуто в разд. 6.1, в случае, когда $\Omega \neq -\overline{\Omega}$, обратная задача по-прежнему разрешима, но функции рассеяния a и $\bar{a}$ не являются интегралами движения. В этом случае система уравнений не может быть записана как гамильтонова. Конкретный пример, имеющий физический смысл, дают уравнения СИП (самоиндуцированная прозрачность) в нелинейной оптике (Абловиц, Кауп и Ньюэлл [1974]).

Более общее уравнение такого рода имеет вид

$$\begin{pmatrix} R \\ -Q \end{pmatrix}_t + 2M\left(\mathbf{L}_1^A\right)\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k)\left(\theta^A\right)^T,$$

где

$$\Omega(k) = H(k) + M(k), \quad \overline{\Omega}(k) = \overline{H}(k) + M(k),$$

$$g(k) = \frac{2}{\pi}\left(\overline{\Omega}(k) - \Omega(k)\right) \text{ и } \theta \text{ определено в 6.1.}$$

В случаях, которые мы рассматриваем в тексте и для которых $\Omega = -\overline{\Omega}$, автоматически оказывается, что точки дискретного спектра являются интегралами движения. Однако как показали Кауп и Ньюэлл [1979], интегрируемые уравнения могут допускать подвижные собственные значения. В этом случае дисперсионные соотношения сингулярны. Новым признаком таких уравнений оказывается то обстоятельство, что некоторые сингулярности в дисперсионных соотношениях совпадают с $\sigma(L)$. Специфический пример такого рода дает система, для которой $\Omega(k) = -\overline{\Omega}(k) = \frac{\overline{M}_j}{k-k_j} + \frac{\overline{M}_j}{k-k_j}$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}_t^T = -4iM_j\theta^A(x, k_j) - 4i\overline{M}_j\theta^A(x, \bar{k}),$$

$$\left(\mathbf{L}_1^A - k_j\right)\left(\theta^A(x, k_j)\right)^T = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathbf{L}_1^A - \bar{k}\right)\left(\theta^A(x, \bar{k})\right)^T = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}.$$

Эволюционные уравнения для данных рассеяния представляются в виде следующей системы:

$$R_{-t} = \Omega(k) R_-, \quad \overline{R}_{-t} = -\Omega(k)\overline{R}_-,$$

$$D_{tt}^{-} = \Omega_t D_t^{-}, \quad k_{tt} = 0 \quad (k_t \neq k_j),$$

$$D_{it}^{-} = \overline{\Omega}_i \overline{D}_i^{-}, \quad k_{it} = 0 \quad (k_i \neq k_j),$$

$$D_{jt}^{-} = \left(\frac{\overline{M}_j}{k_j - k_j}\right) D_j^{-} + M_j D_j, \quad k_{jt} = M_j,$$

$$\overline{D}_{jt}^{-} = \left(\frac{M_j}{k_j - k_j}\right) \overline{D}_{j-} + \overline{M}_j \overline{D}_{j-}, \quad k_{jt} = \overline{M}_j.$$

2. Последние несколько лет так называемые трансценденты Пенлеве подверглись интенсивному изучению. Как оказалось, многие из работ этого направления повторяли результаты, полученные еще в начале века и впоследствии забытые. Только сейчас снова стали возвращаться к этим работам в связи с тем, что обнаружилась глубокая связь между изученными классиками математики обыкновенными интегрируемыми дифференциальными уравнениями и интегрируемыми нелинейными уравнениями в частных производных. Этот материал кратко рассмотрен в разд. 6.4.

3. Преобразование Бэклунда возникло как обобщение теории контактных преобразований. Общая теория контактных преобразований была развита Софусом Ли (см., например, книгу Форсайта [1959]). Контактными преобразованиями называются такие преобразования, которые сохраняют контактный модуль, ассоциированный с уравнением. Для уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными контактный модуль (локально) порожден 1-формой

$$\theta = dz - p\,dx - q\,dt$$

на многообразии с локальными координатами (x, t, p, q). Когда контактный модуль сужается к решению уравнения

$$P(z, z_x, z_t) = 0,$$

то он аннулируется в локальных координатах $z = z(x, t)$, $p = z(x, t)$, $q = z(x, t)$. Контактное преобразование определяется функциями

$$\begin{aligned} x^1 &= X(x, t, z, p, q), \\ t^1 &= T(x, t, z, p, q), \\ z^1 &= Z(x, t, z, p, q), \\ p^1 &= P(x, t, z, p, q), \\ q^1 &= Q(x, t, z, p, q), \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

которые являются симметриями контактного модуля. Таким образом,

$$(dZ + P\,dX - Q\,dt) = \theta(x, t, z, p, q)(dz - p\,dx - q\,dt).$$

Решение этой проблемы в конечном итоге сводится к решению системы Майера. Эта теория, которая возникла из теории поверхностей (соприкосновение — первого порядка контакт поверхностей), сыграла важную роль в развитии общей теории пре-

образований для уравнений в частных производных первого порядка. К сожалению, распространение результатов этой теории на уравнения более высоких порядков пока привело только к тривиальным результатам.

Обобщение, предложенное Бэклундом, состоит в том, чтобы допустить преобразования вида

$$\begin{aligned} x^1 &= X(x, t, z, p, q, z^1), \\ t^1 &= T(x, t, z, p, q, z^1), \\ p^1 &= P(x, t, z, p, q, z^1), \\ q^1 &= Q(x, t, z, p, q, z^1) \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

и потребовать, чтобы преобразованные контактные формы были вполне интегрируемыми. Это условие приводит к уравнению Монжа — Ампера (в сущности к уравнению в частных производных второго порядка, линейному относительно старших производных). Таким образом, формулы (6.5.2) производят преобразование между уравнением, которому удовлетворяет z^1, и, если такое уравнение Монжа — Ампера не содержит z и производных по z^1, уравнением, которому удовлетворяет z^1. Если формулы (6.5.2) допускают обращение, то можно определить преобразование от переменных z^1 к переменным z. Легко получить обобщения этих фактов на более высокие порядки и на большее число переменных. Обычно $x^1 = x$ и $t^1 = t$, так что (6.5.2) состоит из двух уравнений. Таким образом, автопреобразование Бэклунда (уравнения, которым удовлетворяют z и z^1, имеют один и тот же вид) для уравнения СГ $z_{xt} = \sin z$ записывается следующим образом:

$$z^1_x = z_x + 2a \sin\left[\tfrac{1}{2}(z^1 + z)\right],$$

$$z^1_t = -z_t + 2a^{-1} \sin\left[\tfrac{1}{2}(z^1 - z)\right].$$

Дальнейшие детали и дальнейшее развитие этих вопросов можно найти в сборнике под ред. Миуры «Преобразование Бэклунда» [1974] и в статье Додда и Морриса [1979].

6.6. Задачи

Раздел 6.1

1. Покажите, что в формулировке ЗШ—АКНС оператор Лакса **A** для уравнения СГ $U_{xt} = \pm \sin U$ задается формулой

$$\mathbf{A} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \int_x^z dy \cos \frac{U(x)+U(y)}{2}, & -\int_x^z dy \sin \frac{U(x)+U(y)}{2} \\ \int_x^z dy \sin \frac{U(x)+U(y)}{2}, & \int_x^z dy \cos \frac{U(x)+U(y)}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Если Q и R имеют компактный носитель, то таким же свойством обладает $P = (|Q| + |R|)$. Следуя методу последовательных приближений, примененному для доказательства теоремы 6.1, докажите следствие 6.1.2.

3. Покажите, что $\varphi(x, k) e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и R подчиняются теореме 6.1, но не обязательно дифференцируемы.

4. Докажите теорему 6.6, приспособив для этого доказательство теоремы 6.1.

5. Итерируя уравнения

$$K_{+1}(x, y) = -\frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \int_x^{\frac{x+y}{2}} Q(s) K_{+2}(x, y+x-s)\, ds,$$

$$K_{+2}(x, y) = 1 - \int_x^{\infty} K_{+1}(s, y-x+s) R(s)\, ds,$$

получите оценки (6.1.54).

6. Получите результат леммы 6.10 непосредственно из уравнения (6.1.13) с помощью подстановки в одно из специальных функциональных соотношений леммы.

7. Для самосопряженного случая, когда $R = Q^*$, оператор L имеет вид

$$L \equiv L^s = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -Q \\ Q^* & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

В таком случае применима стандартная теория самосопряженных линейных дифференциальных операторов (см. разд. 3.4). В частности, поскольку L не имеет дискретного спектра, равенство Парсеваля имеет особенно простой вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|v_1(x)|^2 + |v_2(x)|^2)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_1(k)|^2 + |u_2(k)|^2)\, d\left(\frac{k}{2\pi}\right),$$

где $V \in L_2^{(2)}(\mathbb{R})$ $(\equiv L_x)$ и $u_1(k) = \langle V, {}_k m^- \rangle_x$, $u_2(k) = \langle V, {}_k P^- \rangle_x$.

Здесь $\langle ., . \rangle_x$ — скалярное произведение в L_x и

$$k^{m-(x)} = \frac{\varphi(x, k)}{a(k)}, \quad k^{p-(x)} = \frac{\psi(x, k)}{a(k)}.$$

Векторы $U(k)$ принадлежат гильбертову пространству L_σ, состоящему из C^2-значных функций на $\mathbb{R}$, интегрируемых с квадратом по мере $d\sigma = \frac{1}{2\pi} dk$.

8. Пусть $V \in L_x$, и пусть $U(k) \in L_{00}$ является L_0^s-представителем, где $L_0^s \equiv L^s$ ($Q = 0$, $R = 0$). Определим оператор Мюллера U_- равенством

$$U_- V_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(k)\, {}_x m^-(k) + u_2(k)\, {}_x p^-(k))\, dk,$$

где ${}_x p(k) = {}_k p^-(x)$, ${}_x m^-(k) = {}_k \tilde{m}(x)$ определены в (6.1.10). Имеем $U_- = U_+ S$, где S — унитарный оператор рассеяния. Используя соотношение между фундаментальными решениями

$$\Phi = \Psi A,$$

покажите, что L_0^s-представителем S является оператор

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b^*}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Собственные функции суть $m^+ = \Psi/\bar{a}$, $p^- = \Phi/\bar{a}$.

9. Определим h как главную ветвь в выражении $e^h = \varphi_1 e^{ikx}$. Тогда граничные условия для h имеют вид $h \to 0$ при $x \to -\infty$ и $h = \ln a$ при $x \to +\infty$. Покажите с помощью (6.1.13), что h удовлетворяет уравнению

$$2ikh_x = -QR + Q\frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}h_x) + (h_x)^2.$$

Докажите, что это уравнение допускает асимптотическое разложение

$$h_x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(2ik)^n} \text{ при } |k| \to \infty$$

и что

$$p_1 = -QR,$$

$$p_{n+1} = Q\frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}p_n) + \sum_{j+k=n} p_j p_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Интегрируя асимптотическое разложение (равномерность разложения при этом сохраняется), покажите, далее, что

$$\ln a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \frac{1}{(2i)^n} \int_{-\infty}^{\infty} p_n\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} C_n \text{ при } |k| \to \infty.$$

Вычислите первые несколько членов разложения:

$$C_1 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,R(x)\,dx, \quad C_2 = \frac{1}{(2i)^2}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,R_x(x)\,dx,$$

$C_3 = ?$, $C_4 = ?$

10. Покажите, что следующее уравнение

$$Q_{tx} - 2Q\int_x^{\infty} (Q^2)_t\,ds \pm Q = 0$$

равносильно уравнению СГ

$$V_{xt} = \pm \sin V,$$

$V_x = -2Q$ в предположении, что $4(Q_t)^2 \leqslant 1$. Приступая к доказательству этого, используйте Q_t как интегрирующий множитель:

$$Q_t^2 + \left(\int_x^{\infty} (Q^2)_t\,ds\right) \pm \left(\int_x^{\infty} (Q^2)_t\,ds\right) = 0.$$

Решая это уравнение относительно $y = \int_x^{\infty} (Q^2)_t\,ds$, покажите, как отсюда вытекает результат. Аналогичным образом из уравнения

$$Q_{xt} - 2Q\int_x^{\infty} (Q^2)_t\,ds - \alpha Q + Q_{4x} + 10Q^2Q_{2x} + 10QQ_x^2 + 6Q^5 = 0$$

получите уравнение

$$Q_t - 6Q^2Q_x - Q_{xxx} + \frac{1}{2}\alpha \sin\left(-2\int_x^{\infty} Q\,ds\right) = 0.$$

Раздел 6.3

1. В случае, когда $R = -Q$, покажите, что задача рассеяния (6.1.13) может быть записана в виде

$$-z_{xx} = Pz = k^2 z,$$

где $z = y_1 - iy_2$ и $P = iQ_x - Q^2$. Это как раз изоспектральное уравнение Шрёдингера гл. 3 и 4. Таким образом, если P удовлетворяет одному из уравнений, интегрируемых этим методом, то $P = iQ_x - Q^2$ является преобразованием Миуры (преобразованием Бэклунда), переводящим интегрируемое уравнение, которому удовлетворяет Q, в это уравнение. Преобразование Миуры является преобразованием Бэклунда, обладающим тем свойством, что $Q \to P$ однозначно определяет некоторое отображение, в то время как обратное преобразование ($P \to Q$) многозначно. Покажите, что когда $R = -Q$, интегрируемые уравнения задачи рассеяния ЗШ—АКНС задаются скалярным операторным уравнением.

Сначала заметим, что

$$\mathbf{L}_1^A(R \equiv -Q) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 2Q\int\limits_x^\infty dsQ & -2Q\int\limits_x^\infty dsQ \\ 2Q\int\limits_x^\infty dsQ & -\frac{\partial}{\partial x} + 2Q\int\limits_x^\infty dsQ \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{L}_1^A = \sigma_3\gamma_1(\alpha+\beta) + \sigma_3\gamma_2(\alpha-\beta),$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее мы находим, что

$$[\mathbf{L}_1^A]^{2n} = \gamma_2[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)]^n + \gamma_1[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]^n,$$

$$[\mathbf{L}_1^A]^{2n+1} =$$

$$= \sigma_3\gamma_1(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]^n + \sigma_3\gamma_3(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)]^n.$$

В предположении, что Ω нечетно, $\Omega(k) = ikD(k^2)$, из (6.1.112) мы получаем, что

$$Q_t + D(\mathbf{G})Q_x = 0,$$

где

$$\mathbf{G}[Q] = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - Q^2 + Q_x\int\limits_x^\infty dsQ,$$

что определяет класс интегрируемых уравнений в случае, когда $R = -Q$. Покажите, что

$$\mathbf{F}[Q^2 - iQ_x]\left[\left[2Q - i\frac{\partial}{\partial x}\right]y(x,t)\right] = \left[2Q - i\frac{\partial}{\partial x}\right]\widehat{\mathbf{G}}[Q]\,y(x,t),$$

где

$$\widehat{\mathbf{G}}[Q] \equiv \mathbf{G}[Q] + Q_x\int\limits_{-\infty}^{\infty} dsQ,$$

$$\mathbf{F}[Q] \equiv -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x^2} - 4Q + 2Q_x\int\limits_x^\infty ds\right].$$

$\mathbf{F}$ — оператор рекурсии или производящее выражение для интегрируемых уравнений, ассоциированных с уравнением Шрёдингера (см. 3.5). В частности, мы имеем соотношение

$$(\mathbf{F}[Q^2 - iQ_x])^n\left[2Q - i\frac{\partial}{\partial x}\right]y \equiv \left[2Q - i\frac{\partial}{\partial x}\right](\widehat{\mathbf{G}}[Q])^n\,y,$$

справедливое при любом целом n. Получается, что для любого интегрируемого уравнения, ассоциированного с системой ЗШ—АКНС, для которой $R = Q$, существует преобразование Миуры в интегрируемое уравнение, ассоциированное с уравнением Шрёдингера. Связь между уравнениями дается формулой

$$P_t + D(\mathbf{F}) P_x = \left[2Q - i\frac{\partial}{\partial x}\right](Q_t + D(\mathbf{G}) Q_x).$$

(При доказательстве этой последней формулы обратите внимание на то обстоятельство, что $\widetilde{\mathbf{G}}Q_x = \mathbf{G}Q_x$.)

2. Установите результат, аналогичный полученному в (6.3) для случая $R = +Q$.

3. Примените формулу (6.3.135) для получения решения (6.3.42) нелинейного уравнения Шрёдингера, отвечающего кратному собственному значению.

4. Для уравнения СГ

$$U_{xt} = \sin U$$

из ограничения $2 + (1/2) \mid k \mid^{-2} = \nu$ на пару собственных значений $(k, -k^*)$ получено решение в виде связанного состояния (6.3.40). В этом случае легко показать, что ввиду $R = -Q$ выполняются равенства $\overline{k} = -k$, $\overline{D} = -D$. Покажите, применяя (6.3.7), что

$$W_1(x, t) = \int_x^\infty Q(y, t)\, dy = 2 \operatorname{arctg}\left\{\frac{iD(0)}{2k} \exp\left[2ikx + \Omega(k) t\right]\right\}.$$

Затем из (6.3.23) для связанного состояния получается, что

$$U = 4 \operatorname{arctg}\left[\frac{i\eta}{\xi} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(W_1 - W_2)\right],$$

где $k = \xi + i\eta$. Отсюда следует, что решение в виде связанного состояния представляется следующим образом:

$$U = 4 \operatorname{arctg}\left\{\frac{\eta \cos \xi \left(\alpha + 2x \mp \frac{1}{2k_0^2} t\right)}{\xi \operatorname{ch} \eta \left(\beta + 2x \pm \frac{1}{2k_0} 2t\right)}\right\},$$

где $\alpha = (2\xi)^{-1}(\gamma + \gamma^*)$, $\beta = -i(2\eta)^{-1}(\gamma - \gamma^*)$, $\exp(i\gamma) = iD(0)/2k$. Геометрическое место точек задается окружностью $\mid k \mid = k_0$, k_0 — вещественное число.

5. Следующая диаграмма представляет собой схему, в соответствии с которой с помощью преобразования Бэклунда может быть получено 4-солитонное решение интегрируемого уравнения в случае, когда $R = -Q$.

Примените принцип алгебраической суперпозиции для получения 4-солитонного решения в случае уравнения СГ.

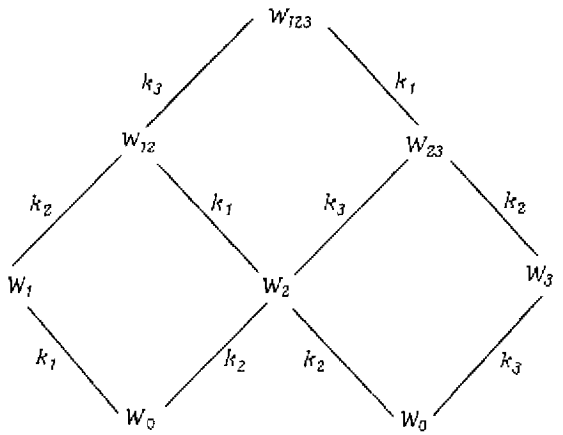


Рис. 6.4. Задача Коши для $\mathbf{L}_t - a\mathbf{A}_u = [\mathbf{L}, \mathbf{A}]$.

6. Рассмотрите асимптотический метод обратной задачи рассеяния Захарова и Манакова для случая $R = \pm Q^*$.

7. Асимптотический метод Захарова и Манакова применим также для установления иерархии интегрируемых уравнений, ассоциированных с изоспектральным уравнением Шрёдингера. Уравнение Шрёдингера имеет вид

$$-y_{xx} + Qy = k^2 y. \tag{6.6.1}$$

Введем в рассмотрение функции u_1, u_2:

$$y = u_1 e^{ikx} + u_2 e^{-ikx}.$$

Тогда Y есть решение уравнения (6.6.1), если u_1 и u_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &-(u_{1xx} + 2iku_{1x}) + Qu_2 e^{-2ikx}, \\ &-(u_{2xx} - 2iku_{2x}) + Qu_1 e^{2ikx}. \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

Предположим, что

$$Q = 2\varepsilon^{1/2}\tilde{A}(X)\cos\Phi,$$

$$\Phi = r(X)\ln\varepsilon \to p(X)\varepsilon^{-1} + q(X) + O(1),$$

$$X = \varepsilon x.$$

Полагая $\lambda = -2k$, $\theta_1 = \Phi + \lambda x$, $\theta_2 = \Phi - \lambda x$, совершите многомасштабное разложение в (6.6.2). Этот анализ подобен приведенному в разд. 6.3. По существу выражение $A = \tilde{A}k^{-1}$ — это основное отличие в анализе для порядка $O(1)$.

7. КИНКИ И УРАВНЕНИЕ СГ

7.1. Топологические рассмотрения и механическая модель

Мир субъядерных частиц демонстрирует замечательные закономерности. Некоторые из этих закономерностей могут быть описаны в рамках единой теории, если постулировать существование аппроксимирующих групп симметрии. Мы говорим об аппроксимирующих группах, имея в виду то обстоятельство, что групповые соображения могут запрещать некоторые результаты, которые обнаруживаются экспериментально, но с низкой вероятностью появления. С такими симметриями мы можем связывать сохраняемые величины. В качестве примера рассмотрим сохранение электрического заряда. Даже в реакции вида

$$p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0,$$

в которой столкновение протона с антипротоном приводит к появлению трех π-мезонов, мы еще можем говорить о сохранении заряда, если образовать заряженные пары частиц. Аналогично столкновение положительно заряженного позитрона e^+ с отрицательно заряженным электроном e^- в результате процесса аннигиляции

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$$

приводит к образованию пары фотонов γ-лучей — квантов электромагнитного поля. Образование этих двух фотонов обеспечивает сохранение импульса.

Неуничтожимость этих сохраняющихся величин, таких как электрический заряд, позволяет, по-видимому, предположить, что они играют фундаментальную роль в устройстве реального мира. Однако как мы можем воплотить в математической модели такую сущность, как электрический заряд, который не может быть уничтожен? Существует очень простая умозрительная модель, иллюстрирующая одну из таких возможностей.

Рассмотрим прямоугольную упругую ленту PQRS, изображенную на рис. 7.1(a). Предположим, что конец PS закреплен в показанном на рисунке вертикальном положении. Прежде чем закрепить другой конец QR, повернем его вокруг горизонтальной оси симметрии ленты на угол 2π. Результат представлен на рис. 7.1(b). Скрутка между T и T' оказалась теперь «в ловушке» и не может быть удалена. Другими словами, эта скрутка блокиро-

вана граничными условиями на концах ленты. На рис. 7.1(c) показана та же самая лента, но с отмеченными единичными нормальными векторами вдоль горизонтальной оси симметрии C.

При движении вдоль линии C от одного закрепленного конца к другому нормальный вектор поворачивается на угол, в точности равный 2π. Если лента достаточно узка по сравнению с ее длиной, то нормальный вектор поворачивается очень медленно на больших расстояниях от места скрутки TT′, быстро меняя угол поворота лишь в самой области скрутки.

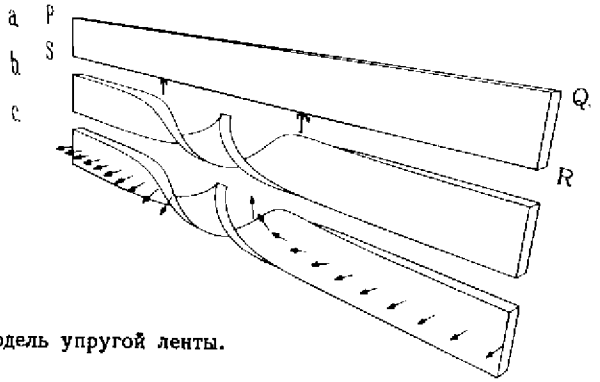


Рис. 7.1. Модель упругой ленты.

Вот некоторые эксперименты, которые мы можем выполнить с такой лентой. Предположим, что мы пальцами перетянем область скрутки в сторону от положения равновесия к концу PS и задержим ее там. Если мы разожмем пальцы, то удерживавшиеся ранее силы упругости смогут себя свободно проявить и скрутка вернется в исходное положение равновесия. При этом скрутка будет распространяться вдоль ленты. Такое локализованное распространяющееся возмущение оказывается очень похожим на частицу. Предположим теперь, что прежде, чем освободить скрутку у конца PS, мы освободим ленту у конца QR, совершим скрутку в противоположном направлении, снова зафиксируем конец QR и, наконец, перетянем новую скрутку к концу QR, зафиксировав ее у этого конца. Таким образом, мы создали конфигурацию, эквивалентную после освобождения неперекрученной ленте. Поэтому, когда мы освободим систему из двух удерживаемых пальцами скруток, они начнут двигаться вдоль ленты навстречу друг другу подобно частицам перед столкновением. Когда они встретятся, происходит аннигиляция, после которой остается лишь возбужденная, но неперекрученная лента. Эта ситуация, когда освобожденная энергия аннигиляции переходит в энергию колебательных движений ленты, в точности копирует ситуацию, когда аннигилирующие электрон и позитрон передают свою энергию электромагнитному полю. При этом скрутка в направлении по часовой стрелке

ведет себя подобно частице, заряженной, например, положительно, и тогда скрутка в направлении против часовой стрелки подобна отрицательно заряженной частице.

Любое реалистическое уравнение, описывающее динамику такой ленты, должно допускать решения, которые описывают только что приведенные локализованные возмущения. Такие решения известны как кинки, и одна из наших целей заключается в том, чтобы выделить не на интуитивном уровне, а достаточно строго те свойства решений, которых здесь можно ожидать. Классические теории, в которых появляются решения-кинки, так же как их квантовые варианты, служат моделями, которые могут помочь нам разобраться в поведении элементарных частиц.

Рассмотрим более строго топологию в этой ситуации. Каждая конфигурация ленты определяет гладкое отображение центральной линии симметрии ленты на единичную окружность. Это отображение можно, например, построить, сопоставляя каждой точке линии C точку на единичной окружности, определяемую концом нормального вектора к ленте, о котором шла речь выше. Когда скрутка движется вдоль ленты, мы можем в каждый момент времени ввести в рассмотрение функцию, описывающую мгновенное состояние ленты. Необходимость изучения такой системы приводит нас к рассмотрению семейства этих отображений. Поэтому мы с неизбежностью приходим к топологическим рассмотрениям.

Если длина нашей ленты равна L, то в качестве координаты мы можем выбрать $z = x/L$, где x означает расстояние, измеряемое вдоль C от конца PS. Тогда каждая конфигурация определяет отображение φ: $I \to S^1$, где через I обозначается единичный интервал $[0, 1]$, а через S^1 — единичная окружность. В общем случае мы будем пользоваться обозначением I^n для декартова произведения n экземпляров I и S^n для n-мерной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$. Граничные условия закрепленных концов выражаются требованиями

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \varphi(1),$$

где φ_0 — произвольная точка окружности, выбор которой был определен отображениями φ. Функция φ определяет *замкнутую кривую* или *петлю* в S^1 в точке φ_0. Рассматриваемые отображения не различают точки 0 и 1, и мы можем эти точки отождествить. Таким образом, мы в действительности рассматриваем гладкие отображения из S^1 в S^1. Изменения функции φ, отвечающие распространению кинка или деформации ленты вручную в предположении, что мы не рвем ленту и не допускаем складок на ней, представляют собой, как подсказывает интуиция, непрерывный и обратимый процесс. Для того, чтобы такое интуитивное понятие сделать строгим, мы введем математическое понятие *гомотопии*.

Назовем два гладких отображения φ_i: $I \to S^1$ $(i = 1, 2)$ гомотопичными в точке φ_0, если можно найти одно отображение H: $I^2 \to S^1$, задаваемое в координатах формулами $(s, z) \to H(s, z) = H^s(z)$ и обладающее следующими свойствами:

(i) H^s есть петля в точке φ_0 для всех значений $s \in [0, 1]$.

(ii) $H^0 = \varphi_1$ и $H^1 = \varphi_2$.

Этим объясняется следующее интуитивное наблюдение. Когда мы переводим ленту из конфигурации φ_1 в другую конфигурацию φ_2, то мы проходим через бесконечное количество физически допустимых промежуточных конфигураций. Функцией H^s как бы метятся эти интерполирующие состояния. На рис. 7.2 эта ситуация изображена графически.

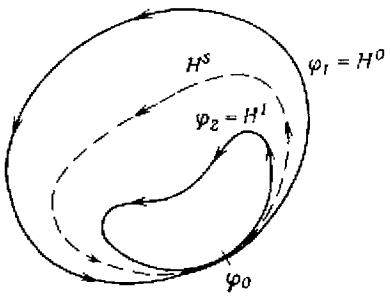


Рис. 7.2.

В общем случае S^1 заменяется топологическим пространством X. Две функции f_i: $I \to X$ $(i = 1, 2)$ называются взаимно гомотопными в точке $x \in X$, если существует непрерывная функция H: $I^2 \to X$, такая, что

(I) для каждого значения $s \in [0, 1]$ образ H^s представляет собой петлю в точке $x \in X$,

(II) $H^0 = f_1$ и $H^1 = f_2$.

На множестве всех таких петель естественным образом можно определить операцию умножения. А именно, мы определим произведение $f_1 \circ f_2$ как петлю, полученную в результате прохождения сначала петли, определенной f_1, а затем петли, определенной f_2. В координатах это можно выразить следующим образом:

$$f_1 \circ f_2 : z \to \begin{cases} f_2(2z), & 0 \leqslant z \leqslant 1/2, \\ f_2(2z-1), & 1/2 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

Наглядно это изображено на рис. 7.3.

Отметим, что только что введенное умножение не наделяет множество всех петель с отмеченной точкой групповой структурой. Это происходит из-за того, что мы всегда связываем с петлями специфические отображения. В результате необходимый для групповой структуры ассоциативный закон в данном случае не выполняется. Действительно, хотя для любых трех петель f_i $(i = 1, 2, 3)$ петля, отвечающая отображению $f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$, та же самая, что и петля, отвечающая отображению $(f_1 \circ f_2) \circ f_3$, но сами эти отображения имеют отличающиеся функциональные формы. Для того, чтобы исключить зависимость от параметризации и сосредо-

точить внимание именно на самих петлях, мы должны отождествить все различные отображения, которым отвечает одна и та же петля. Это можно сделать, если каждой петле f сопоставить множество всех петель $\bar{f}$, гомотопных петле f в точке x. Тем самым мы разделяем петли на классы взаимно гомотопных петель, которые мы называем *гомотопическими классами*.

На множестве гомотопических классов теперь можно определить операцию умножения

$$\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{f \circ g},$$

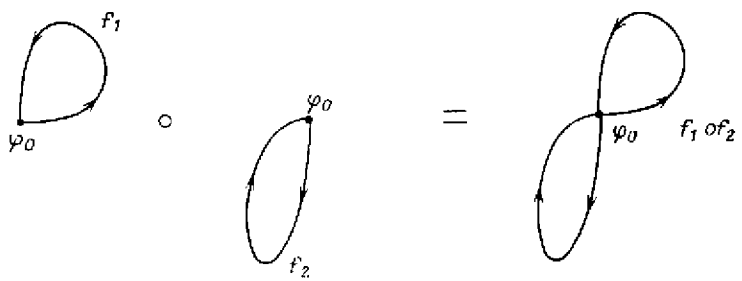


Рис. 7.3.

которая, как легко показать, на этот раз оказывается корректной в смысле образования групповой структуры. Наделяя этим умножением множество всех гомотопических классов петель в точке x топологического пространства X, мы образуем группу, называемую *фундаментальной группой пространства X в точке x* и обозначаемую $\pi_1(X, x)$. Если каждая точка пространства X может быть соединена с любой другой точкой этого пространства путем, целиком лежащим в X, то, как нетрудно показать, фундаментальные группы, определенные в этих двух точках, изоморфны. Единственная абстрактная группа, которой изоморфны все такие фундаментальные группы в произвольных точках связного в указанном смысле топологического пространства, обозначается $\pi_1(X)$ и называется *фундаментальной группой пространства X*.

Для случая упругой ленты интересующий нас объект — это группа $\pi_1(S^1)$. Существенный момент, который мы хотели бы выделить, заключается в том, что любая заданная начальная конфигурация ленты, принадлежащая некоторому гомотопическому классу, какова бы ни была динамика ленты, деформируется под ее действием непрерывно. Таким образом, начальная конфигурация ленты, развиваясь во времени, преобразуется в конфигурации, принадлежащие тому же самому гомотопическому классу. Это ограничение на систему является самым существенным.

Для случая ленты различные числа скруток приводят к различным отображениям, не преобразующимся одно в другое. Поэтому число скруток отображения приписывает его к некоторому определяемому этим числом гомотопическому классу. Простой пример такого класса задается формулой S_n: $z \longrightarrow (\cos 2\pi nz, \sin 2\pi nz)$. Когда z пробегает интервал I, образ отображения S_n покрывает единичную окружность n раз. Целое число n показывает, сколько раз пространство S^1 покрывается отображением S_n. В этом частном случае целое число n зачастую называется *числом витков* (оборотов), а группа $\pi_1(S^1) = Z$ является аддитивной группой целых чисел.

Существует простой механический аналог упругой ленты, который может помочь понять, как эти топологические рассмотрения связаны с динамикой в некоторой конкретной ситуации.

7.1.1. Механический маятник

Если предположить, что масса нашей упругой ленты сосредоточена вдоль одного ее края, то можно будет дискретизировать массу вдоль этой кромки и заменить непрерывное распределение масс дискретным распределением единичных масс. Способность закручиваться является, очевидно, наиболее важным свойством такой системы, которую мы должны моделировать. Мы естественно приходим к модели, сконструированной из N маятников, связанных пружинками, момент кручения которых пропорционален углу закрутки. Возвращающий момент кручения Γ, производимый такой пружинкой, когда происходит поворот на угол θ, связан с этим углом линейным соотношением $\Gamma = \varkappa\theta$, где $\varkappa$ — постоянная, называемая постоянной кручения пружин. На рис. 7.4 показана такая механическая аналогия. Если обозначить через φ_i угол, образованный i-м маятником с направленным вниз отвесом, то угловая скорость ω_i i-го маятника будет задаваться выражением $\dot{\varphi}_i$. Для совокупности идентичных маятников, обладающих одними и теми же моментами инерции J, уравнения движения Ньютона будут иметь вид

$$J\dot{\omega}_i = \Gamma_i \text{ (вклад момента кручения пружины)} + \\ + \Gamma_i \text{(вклад силы тяжести)}. \qquad (7.1.1)$$

Если все маятники имеют одну и ту же массу M, то момент кручения, созданный силой тяжести, дается формулой

$$\Gamma_i \quad \text{(вклад силы тяжести)} = -Mdg \sin\varphi_i, \qquad (7.1.2)$$

где d — это расстояние от центра масс до центральной оси. Момент кручения i-го маятника, созданный пружинками, зависит лишь от двух пружинок, расположенных по обе стороны от маятника.

Моменты, представляющие вклад пружинок, расположенных перед маятником и за ним, даются выражениями $\varkappa(\varphi_{i-1} - \varphi_i)$ и $\varkappa(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$ соответственно. Тем самым мы приходим к суммарному моменту, представляющему вклад этих пружинок:

$$\Gamma_i \text{ (вклад момента кручения пружинок)} = \varkappa(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}), \tag{7.1.3}$$

и уравнение (7.1.1) записывается в виде

$$J\ddot{\varphi}_i = \varkappa(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - K_G \sin\varphi_i, \tag{7.1.4}$$

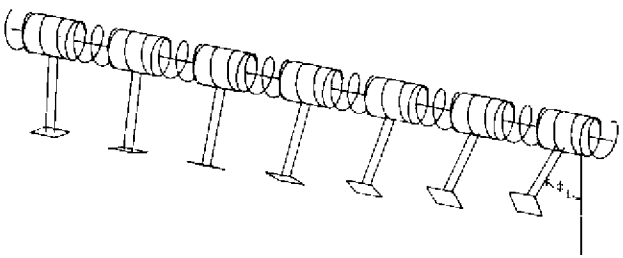


Рис. 7.4. Связанные между собой маятники.

где $K_G = Mdg$. Уравнения (7.1.4) можно вывести из гамильтониана

$$H(\mathbf{P}, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} ((1/2) J (P_i)^2 + K_G(1 - \cos\varphi_i) + (1/2)\varkappa(\varphi_i - \varphi_{i+1})^2) \tag{7.1.5}$$

с помощью уравнений движения Гамильтона

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}. \tag{7.1.6}$$

Решения-кинки, которыми мы интересуемся, представляют собой нелинейные собственные колебания этой дискретной динамической системы. Поскольку φ_i есть отображение вида $\{1, 2, \ldots, N\} \to S^1$, наши топологические рассмотрения пока еще неприменимы.

Рис. 7.5 показывает смоделированную стробоскопическую фотографию возбужденного кинка, распространяющегося справа налево, в системе именно того типа, который мы только что описали. Заметим, что кинк замедляется благодаря трению. Обратим внимание на одно обстоятельство, которое иллюстрирует рис. 7.5. Эта система является в некотором смысле «системой с двумя устойчивыми состояниями». В отличие от одиночного маятника, для которого угол φ остается малым, маятники в описанной выше системе могут совершать полные вращения. Существуют две равновесные конфигурации, отвечающие $\varphi = 0 \bmod (2\pi)$ и

$\varphi = \pi \bmod (2\pi)$, в зависимости от того, направлен ли маятник прямо вниз или вверх соответственно. Последнее состояние, очевидно, неустойчиво, в то время как первое устойчиво. Показанное движение состоит из серии переходов между этими двумя конфигурациями. Позже будет обнаружено, что уравнение СГ часто ассоциируется с такими квазибистабильными системами.

Для того чтобы получить непрерывную модель, для которой окажутся уместными наши топологические рассмотрения, следует в уравнениях (7.1.4) попытаться совершить предельный переход. Если обозначить расстояние между соседними маятниками через h

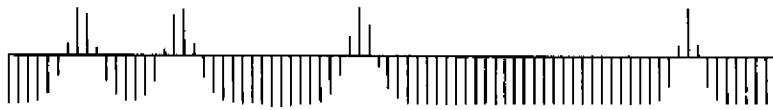


Рис. 7.5. Одиночный кинк.

и положить $\varkappa = Kh^{-2}$, то, допуская, что $h \to 0$, а K остается конечным, мы приходим к следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$J\varphi_{,tt} = K\varphi_{,xx} - K_G \sin\varphi. \tag{7.1.7}$$

Нижние индексы после запятой означают частную производную.

Если с помощью равенств

$$T = (K_G/J)^{1/2}t, \quad X = (K_G/K)^{1/2}x \tag{7.1.8}$$

ввести новые пространственные и временные переменные X и T, то уравнение (7.1.7) можно свести к стандартному виду уравнения СГ:

$$\varphi_{,TT} - \varphi_{,XX} + \sin\varphi = 0. \tag{7.1.9}$$

Подходящие граничные условия для этого случая могут быть те же, что и для ленты:

$$\varphi(t,\ 0) = (t,\ L) = 0 \bmod (2\pi), \tag{7.1.10}$$

однако допустимы и другие возможности, скажем

$$\varphi_{,X}(t,\ 0) = \varphi_{,X}(t,\ L) = 0, \tag{7.1.11}$$

в зависимости от конкретной ситуации, которую мы моделируем. Граничные условия (7.1.10) наиболее обычны для конечной ленты. Для бесконечной ленты естественно ввести граничные условия

$$\varphi(t,\ -\infty) = \varphi(t,\ +\infty) = 0 \bmod (2\pi). \tag{7.1.12}$$

По предыдущим главам мы уже знаем, что функция

$$\varphi_v^t(x) = 4 \operatorname{arctg}(\exp \pm \gamma(x - x_0 + vt)), \tag{7.1.13}$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, есть решение-кинк, отвечающее граничным условиям (7.1.12) на бесконечной прямой. Эта функциональная форма подсказывает несколько более общее представление, которое может быть использовано для построения решений уравнения СГ с другими граничными условиями.

Если попытаться искать решения (7.1.9) в виде

$$\varphi^t(x) = 4 \operatorname{arctg}(f(x)\, g(t)), \tag{7.1.14}$$

то можно убедиться в том, что функции f и g удовлетворяют уравнению

$$(f''g - g''f)(1 + f^2g^2) + 2((g')^2 f^3 g - (f')^2 g^3 f) = \\ = fg(1 - f^2g^2). \tag{7.1.15}$$

Для того чтобы отыскать точные решения, следует разбить это уравнение на более простые, содержащие порознь f и g. Заметим, что в уравнении содержатся лишь степени f и g, и это позволяет предположить, что решения f и g удовлетворяют отношениям вида

$$\begin{aligned} (f')^2 &= Af^4 + Bf^2 + C, \\ (g')^2 &= Dg^4 + Eg^2 + F. \end{aligned} \tag{7.1.16}$$

Из последних уравнений мы получим, что

$$\begin{aligned} f'' &= 2Af^3 + Bf, \\ g'' &= 2Dg^3 + Eg. \end{aligned} \tag{7.1.17}$$

Подстановка выражений (7.1.16), (7.1.17) в уравнение (7.1.15) дает

$$2f^3g(A + F) - 2g^3f(C + D) + \\ + fg(1 - f^2g^2)(B - E - 1) = 0. \tag{7.1.18}$$

Если мы положим $A = -F = \alpha$, $B = E + 1 = \beta$ и $C = -D = \gamma$, где α, β, γ суть постоянные, то мы получим подходящее решение, образованное любой парой функции f и g, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} (f')^2 &= \alpha f^4 + \beta f^2 - \gamma, \\ (g')^2 &= \gamma g^4 + (\beta - 1) g^2 - \alpha. \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

Прежде чем определить точные решения (7.1.19), мы должны решить, каким граничным условиям их подчинить. Мы выберем граничные условия (7.1.11), которые до сих пор в этой книге еще не рассматривались. Эти условия с необходимостью приводят к следующим условиям на функцию f:

$$f'(0) = 0 = f'(L). \tag{7.1.20}$$

Эллиптическая функция Якоби $\mathrm{sn}\,(x, \lambda)$ определяется как решение уравнения

$$(f')^2 = (\lambda^2 f^4 - (\lambda^2 + 1) f^2 + 1) = (1 - f^2)(1 - \lambda^2 f^2) \quad (7.1.21)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1. \quad (7.1.22)$$

Постоянная λ называется *модулем* эллиптической функции; $0 < \lambda < 1$.

С эллиптической функцией $\mathrm{sn}\,(x, \lambda)$ ассоциируются две функции $\mathrm{cn}\,(x, \lambda)$ и $\mathrm{dn}\,(x, \lambda)$, определенные алгебраическими соотношениями

$$\mathrm{cn}^2(x, \lambda) = 1 - \mathrm{sn}^2(x, \lambda); \quad \mathrm{dn}^2(x, \lambda) = 1 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2(x, \lambda). \quad (7.1.23)$$

Как легко показать, функция $\mathrm{cn}\,(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$(f')^2 = (1 - \lambda^2) + (2\lambda^2 - 1) f^2 - \lambda^2 f^4 \quad (7.1.24)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \quad (7.1.25)$$

Имея в виду выполнение наших граничных условий (7.1.20), уместно для построения решения остановиться на функции $\mathrm{cn}\,(x, \lambda)$, записав решение в виде

$$f = A\,\mathrm{cn}\,(\varkappa x, \lambda_f), \quad g = \mathrm{cn}\,(\Omega t, \lambda_g), \quad (7.1.26)$$

где предполагается, что A, $\varkappa$, Ω, λ_f и λ_g удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A^2\varkappa^2(1 - \lambda_f^2) &= \alpha = \lambda_g^2\Omega^2, \\ \Omega^2(1 - \lambda_g^2) &= \gamma = A^{-2}\varkappa^2\lambda_f^2, \\ 1 + \Omega^2(2\lambda_g^2 - 1) &= \beta = \varkappa^2(2\lambda_f^2 - 1). \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

Из этих уравнений можно выразить модули λ_f и λ_g через A, $\varkappa$ и Ω следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_f^2 &= A^2(1 + A^2)^{-1}\varkappa^{-2}(\varkappa^2(1 + A^2) + 1), \\ \lambda_g^2 &= A^2(1 + A^2)^{-1}\Omega^{-2}(\Omega^2(1 + A^2) + 1). \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

Мы получим также соотношение

$$(\Omega^2 - \varkappa^2) = (1 - A^2)(1 + A^2)^{-1}, \quad (7.1.29)$$

которое представляет собой некую разновидность *дисперсионного соотношения*, аналогичного рассмотренному в гл. 1.

Теперь на это решение нужно наложить граничные условия (7.1.20). Функция $\mathrm{cn}\,(x, \lambda)$ периодична с периодом $4K(\lambda)$, где $K(\lambda)$ задается формулой

$$K(\lambda) = \int_0^1 dy\,(1 - y^2)^{-1/2}(1 - \lambda^2 y^2)^{-1/2}. \quad (7.1.30)$$

Функция $(\mathrm{cn}(x, \lambda))'$ также является периодической с нулями, расположенными в точках $2nK(\lambda)$, где n пробегает множество всех целых чисел. Поэтому граничные условия, которым должна удовлетворять функция f вида (7.1.26), требуют, чтобы волновое число $\varkappa$ принимало лишь значения $\varkappa_n$, задаваемые формулой

$$\varkappa_n = 2nL^{-1}K(\lambda_f). \tag{7.1.31}$$

Итак, окончательное решение, которое мы получили, имеет следующий вид:

$$\varphi_n = 4\,\mathrm{arctg}\,(A\,\mathrm{cn}\,(2nK(\lambda_f)\,L^{-1}x,\ \lambda_f)\,\mathrm{cn}\,(\Omega_n t,\ \lambda_g)), \tag{7.1.32}$$



Рис. 7.6.

где $\Omega_n^2 = 4K(\lambda_f)\,L^{-2}n^2 + (1 - A^2)\,(1 + A^2)^{-1}$. На рис. 7.6 показано это периодическое решение. Его интересной особенностью является то обстоятельство, что в пределе стремящейся к нулю амплитуды A одновременно λ_f и λ_g также стремятся к нулю, и решение принимает предельную форму

$$\varphi_n \sim \cos(n\pi x/L)\cos\Omega t, \tag{7.1.33}$$

где $\Omega^2 = n^2\pi^2L^{-2} + 1$. Последнее равенство представляет собой попросту дисперсионное соотношение для уравнений Клейна — Гордона, получающихся в результате линеаризации уравнения СГ. Мы указываем на это для того, чтобы подчеркнуть взгляд на такие решения, как на нелинейные собственные колебания системы.

7.2. Свойства частиц

На рис. 7.7 изображена серия графиков функции $\psi^{\pm}(x) = 4\,\mathrm{arctg}\,(\pm m(x - q_0))$. В каждом случае мы видим, что область изменения функции представляет собой интервал с центром в точке $x = q_0$. Кроме того, видно, что с ростом m длина этого интервала уменьшается. Поэтому если такая функция представляет локализованное возмущение, то величину q_0 можно интерпретировать как его «положение», а величину m^{-1} как «ширину» возмущения. Функция $\psi^{\pm}(x)$ есть стационарное решение массы m уравнения СГ.

Уравнение СГ инвариантно относительно двумерной группы преобразований Лоренца

$$L(v): (x, t) \to (\gamma(x - vt), \gamma(t - vx)). \tag{7.2.1}$$

Односолитонное (антисолитонное) решение

$$\psi_v^{\pm}(x, t) = 4 \operatorname{arctg}(\pm \gamma m(x - q(t))), \tag{7.2.2}$$

где $q(t) = vt + q_0$ можно получить из $\psi^{\pm}(x)$ с помощью преобразования Лоренца $L(v)$. Мы видим, что локализованное возмуще-

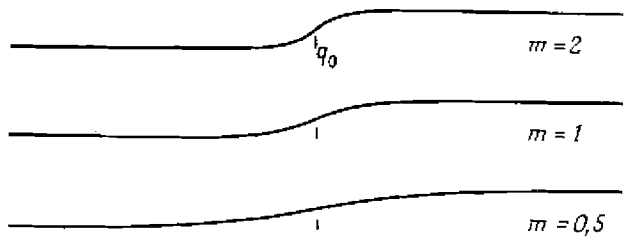


Рис. 7.7. Кинк уравнения СГ как функция от m.

ние, описанное в (7.2.2), имеет «положение», которое движется с линейной скоростью v, и «ширину» $\gamma^{-1} = (1 - v^2)$. Следовательно, мы имеем «лоренцево сжатие» импульса, когда он движется со скоростью v. Это точный аналог движения релятивистской частицы. С той же легкостью можно продемонстрировать аналогию между солитонами, антисолитонами и положительно и отрицательно заряженными частицами. Рис. 7.8 показывает развитие во времени начального состояния из двух статичных кинков, локализованных в точках $x = +d$ и $x = -d$ соответственно. Граничные условия те же, что в (7.1.12). Мы видим, что кинки разбегаются, и, стало быть, имеем ситуацию «отталкивания». Аналогично на рис. 7.9 показано развитие во времени начального состояния, образованного кинком и антикинком, расположенными в точках $x = +d$ и $x = -d$ соответственно. В этом случае мы видим, что два возмущения движутся навстречу друг другу, что имитирует ситуацию «притяжения». Причина этого интуитивно ясна из рисунка. Все объясняется граничными условиями. Для двух одинаково ориентированных кинков решение уравнения СГ, развившееся со временем из начальной конфигурации, должно измениться на 2π на коротком промежутке. Это приводит к высоким градиентам поля и, как следствие, к большим вкладам в энергию. Система движется так, чтобы уменьшить свою энергию, и в результате кинки расходятся. Для решения, которое развивается из начального условия, состоящего из двух противоположно ориентированных кинков, не требуется такого быстрого изме-

нения, и чем ближе сходятся кинки, тем ниже становится энергия. Следовательно, два противоположно ориентированных кинка сливаются.

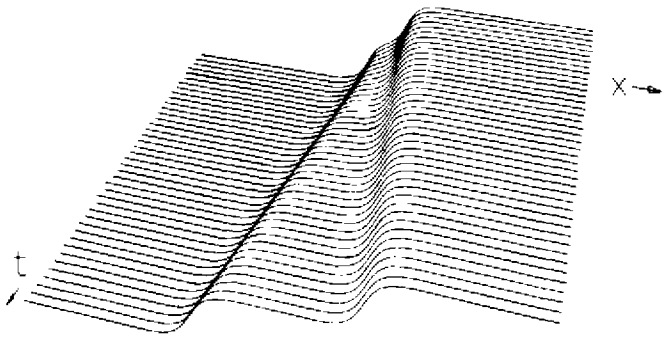


Рис. 7.8. Взаимное отталкивание двух кинков.

Уравнение СГ можно вывести из плотности гамильтониана

$$\mathscr{H}(\pi,\ \varphi) = (1/2)\left(\pi^2 + \varphi_{,x}^2 + 4\sin^2(\varphi/2)\right) \qquad (7.2.3)$$

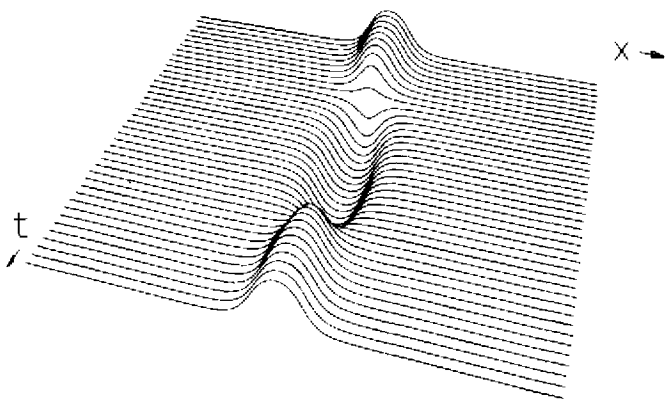


Рис. 7.9. Взаимное притяжение кинка и антикинка.

с помощью гамильтоновых уравнений поля:

$$\begin{aligned} \varphi_{,t} &= \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi}, \\ \pi_{,t} &= \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\varphi} = -\left(-\varphi_{,xx} + 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\right). \end{aligned} \qquad (7.2.4)$$

Эти уравнения представляют собой непрерывный аналог уравнений (7.1.6). Для любой функции Ψ, не обязательно являющейся решением уравнения СГ, определим

$$\mathscr{E}_\Psi(x, t) = \mathscr{H}(\Psi_{,t}(x, t), \Psi(x, t)). \tag{7.2.5}$$

Если Ψ является решением уравнения СГ, то энергия этого решения дается формулой

$$E_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathscr{E}_\Psi(x, t). \tag{7.2.6}$$

Для уединенного решения-кинка (7.2.2), имеющего единичную массу, мы получим, что

$$E_{\Psi_v^\pm} = 8\gamma, \tag{7.2.7}$$

т. е. энергия зависит от скорости v стандартным образом, а именно как в специальной теории относительности. Решение-кинк является поэтому примером решения с конечной энергией. Такие решения представляют независимые от времени пакеты энергии, которые сохраняют свою целостность благодаря сильным самовзаимодействиям.

Рассмотрим систему, у которой возможные значения энергии ограничены снизу. Нижние энергетические состояния такой системы называются ее *основными состояниями*. Может существовать одно или несколько решений с одной и той же наименьшей энергией, которую можно положить равной нулю. Пусть $\mathscr{H}$ есть плотность гамильтониана такой системы. Если величина E_Ψ, отвечающая $\mathscr{H}$, обладает тем свойством, что для всех несингулярных решений Ψ она положительна и равна нулю лишь для основных состояний системы, то в случае, когда

$$\lim_{t\to\infty} \max_x \mathscr{E}_\Phi(x, t) = 0, \tag{7.2.8}$$

мы будем говорить, что решение Φ *диссипативно*. Решения большинства классических линейных полевых уравнений, таких, например, как уравнения Максвелла, являются диссипативными. Решение-кинк $\psi_v^\pm$ дает пример недиссипативного решения, и существование таких решений является отличительной чертой нелинейных полевых теорий. Заметим, что свойства недиссипативности решения не равносильно свойству обладания конечной энергией. Недиссипативные решения не являются солитонами того типа, на рассмотрении которых сосредоточены наши усилия в этой книге. В гл. 1 мы рассмотрели уравнения φ^4, возникающие в физике частиц. Для вещественного поля φ они принимают вид

$$\varphi_{,xx} - \varphi_{,tt} = \lambda\varphi^3 - m^2\varphi. \tag{7.2.9}$$

Плотность гамильтониана $\mathscr{H}$ можно взять равной

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = (1/2)(\pi^2 + \varphi_{,x}^2 + (1/2)\lambda(\varphi^2 - m^2/\lambda)^2), \quad (7.2.10)$$

и уравнение (7.2.9) выводится из уравнения Гамильтона вида

$$\begin{aligned} \varphi_{,t} &= \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \pi}, \\ \pi_{,t} &= -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \varphi} = -(-\varphi_{,xx} + \lambda\varphi^3 - m^2\varphi). \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Энергия $F_\Psi(x, t)$ для решений положительна и обращается в нуль лишь для двух основных состояний:

$$\varphi^{\pm} = \pm (m^2/\lambda)^{1/2}. \quad (7.2.12)$$

Решение уравнения (7.2.9) задается формулой

$$\varphi_v^{\pm} = \varphi^{\pm} \operatorname{th}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\gamma(x - vt) + \delta\right). \quad (7.2.13)$$

График этого решения изображен на рис. 7.10.

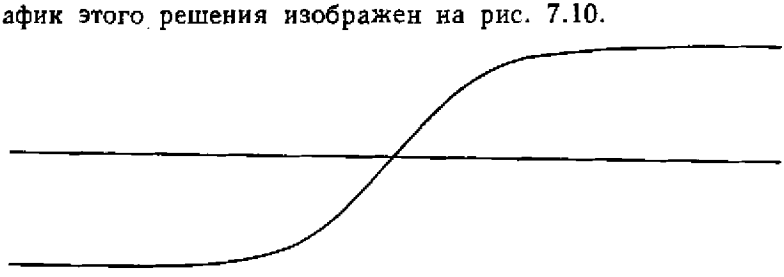


Рис. 7.10. Решение уравнения φ^4 в виде одиночного кинка.

Это решение имеет локальную плотность энергии

$$\mathscr{E}_{\varphi_v^{\pm}}(x, t) = \frac{1}{2}\gamma^2 (m^4/\lambda) \operatorname{sech}^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\gamma(x - vt) + \delta\right), \quad (7.2.14)$$

а его полная энергия равна

$$E_{\varphi_v^{+}} = (2\sqrt{2}/3)(m^3/\lambda)\gamma. \quad (7.2.15)$$

Поэтому решение-кинк модели φ^4 недиссипативно и обладает конечной полной энергией. Однако, как мы видели при численном моделировании в гл. 1, эти решения-кинки не обладают столкновительными свойствами солитонов, которые нас интересуют. Мы сохраним термин *солитоны* лишь для решений-кинков, обладающих свойством сохранять свою целостность даже после столкновения. Обозначение «кинк» мы оставим для более общих недиссипативных решений, таких как φ^4-кинк, рассмотренный выше.

Результат (7.2.7) означает, что даже для получения статичного кинка потребуется минимальная энергия по крайней мере в 8 единиц. Поэтому для возбуждения кинковых мод в систему должна быть подана энергия. В связи с этим обстоятельством физически важным оказывается другое решение. На рис. 7.11 показывается решение уравнения СГ, называемое бризером. Это решение задается формулой

$$\varphi_{B''} = 4 \operatorname{arctg}\left((1-\omega^2)^{1/2}\omega^{-1}\sin\omega\gamma(t-vx)\operatorname{sech}(\gamma(1-\omega^2)^{1/2}(x-vt))\right). \tag{7.2.16}$$

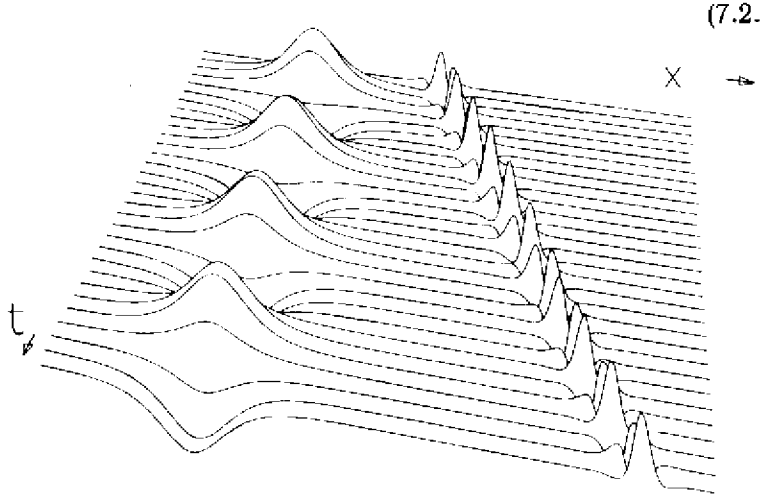


Рис. 7.11. Два бризера уравнения СГ, один покоющийся, другой движущийся.

Важность этого решения объясняется тем, что его энергия покоя имеет вид

$$E_{\varphi_{B0}} = 16(1-\omega^2)^{1/2} \tag{7.2.17}$$

и меняется от 16, массы покоя двух солитонов, до нуля, когда ω стремится к единице. Следовательно, даже малого количества энергии может оказаться достаточным для возбуждения бризерных мод.

Если мы введем в рассмотрение граничные условия (7.1.12), то сохраняющаяся величина, отвечающая числу скруток, задается выражением

$$\mathcal{Q}^t(\varphi) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi^t{}_{,x}(x) = (2\pi)^{-1}\left(\varphi^t(\infty)-\varphi^t(-\infty)\right) =$$

$$= (\text{число кинков}) - (\text{число антикинков}) \tag{7.2.18}$$

и, очевидно, принимает лишь целочисленные значения. Поскольку $\mathcal{Q}^t(\varphi)$ непрерывно зависит от t и принимает лишь целые значения, то единственный способ совместить эти два свойства состоит в требовании сохранения величины $\mathcal{Q}^t(\varphi)$ независимо от динамики системы. Это наблюдение отвечает тому факту, что с динамической точки зрения это тривиальный закон сохранения, вытекающий из уравнения непрерывности

$$\rho_{,t} + j_{,x} = 0, \tag{7.2.19}$$

где кинковая плотность заряда ρ и кинковая плотность тока j даются формулами

$$\rho = \varphi_{,x}, \quad j = -\varphi_{,t}. \tag{7.2.20}$$

Эти уравнения никак не связаны с динамикой и попросту накладывают на φ требование гладкости. Важным обстоятельством являются граничные условия и тот факт, что поле принимает значения, принадлежащие единичной окружности S^1. Величина $\mathcal{Q} = (2\pi)^{-1}\int dx\rho(x)$, принимающая целочисленные значения, обычно называется *топологическим зарядом*.

Отвлекаясь от специфической роли такой нелинейной теории поля во многих физических моделях, мы надеемся сейчас выяснить, какие элементы нужны для построения моделей более высоких размерностей, чем 2, имеющих частицеподобные решения. Важным элементом многих полевых теорий, допускающих кинковые решения, является топологический заряд. Поэтому целесообразно обобщить это понятие на случай более высоких размерностей. Соответствующие уравнения, описывающие такие модели, можно рассматривать как многомерные аналоги уравнения СГ. В последнем разделе мы встретимся с физической реализацией такой модели в связи с ферромагнетизмом.

7.3. Топологический заряд

Для получения более общей структуры приведем уравнения СГ к несколько иному виду. Функция φ определяет точку на единичной окружности с декартовыми координатами φ_1 и φ_2, причем

$$\varphi_1 = \cos\varphi, \quad \varphi_2 = \sin\varphi \text{ и } \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1. \tag{7.3.1}$$

Поэтому каждая функция φ определяет гладкое отображение $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^1$, записываемое в координатах следующим образом: $(t, x) \longrightarrow (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))$.

Мы можем обобщить эту ситуацию, рассматривая гладкие отображения $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$, имеющие в координатах вид $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \to (\varphi_1(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \varphi_n(x_0), \ldots, x_{n-1}))$, где $\varphi_1^2 +$

$+ \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2 = 1$. Последнее попросту означает, что вектор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ имеет единичную длину, что дает обобщение уравнения непрерывности (7.2.19). Дифференцируя соотношение $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ по x_a, приходим к уравнению

$$\langle \varphi, \partial_a \varphi \rangle = 0. \tag{7.3.2}$$

Таким образом, $\partial\varphi$, матрица размером $(n \times n)$ с элементами $\partial_a \varphi^b$, должна быть вырожденной. Мы знаем, что в этом случае определитель матрицы $\partial\varphi$ должен равняться нулю. Поэтому, переходя к компонентам матрицы $\partial\varphi$, мы получаем равенство

$$\varepsilon^{a_1 \cdots a_n} \varepsilon_{b_1 \ldots b_n} \partial_{a_1} \varphi^{b_1} \ldots \partial_{a_n} \varphi^{b_n} = 0, \tag{7.3.3}$$

которое можно переписать в виде

$$\partial_{a_1} \left(\varepsilon^{a_1 \cdots a_n} \varepsilon_{b_1 \ldots b_n} \varphi^{b_1} \partial_{a_2} \varphi^{b_2} \ldots \partial_{a_n} \varphi^{b_n} \right) = 0. \tag{7.3.4}$$

Таким образом, n-компонентный вектор тока J^a, определенный равенством

$$J^a = \varepsilon^{ac_1 \cdots c_{n-1}} \varepsilon_{b_1 \ldots b_n} \varphi^{b_1} \partial_{c_1} \varphi^{b_2} \ldots \partial_{c_{n-1}} \varphi^{b_n}, \tag{7.3.5}$$

сохраняется в том смысле, что

$$\partial_a J^a = 0. \tag{7.3.6}$$

В случае уравнения СГ, когда $n = 2$, мы имеем

$$J^\alpha = \varepsilon^{ac} \varepsilon_{bd} \varphi^b \partial_c \varphi^d, \tag{7.3.7}$$

причем координаты вектора J могут быть записаны в явном виде:

$$J^0 = (\varphi^1 \partial_x \varphi^2 - \varphi^2 \partial_x \varphi^1), \quad J^1 = (\varphi^2 \partial_t \varphi^1 - \varphi^1 \partial_t \varphi^2). \tag{7.3.8}$$

Совершая подстановку в соответствии с параметризацией (7.3.1), получим уравнения

$$J^0 = \varphi_{,x}, \quad J^1 = -\varphi_{,t} \tag{7.3.9}$$

в соответствии с равенствами (7.2.20).

Обобщение топологического заряда дается формулой

$$Q^{x_0}(\varphi) = \frac{1}{(n-1)!\,\Omega_{n-1}} \int\limits_{R^{n-1}} J^0(\varphi)\, dx^1 \ldots dx^{n-1}, \tag{7.3.10}$$

где $\Omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь поверхности единичной сферы S^{n-1}, равная 2π для случая (7.2.18), когда $n = 2$.

Для вычисления интеграла и обоснования свойства целозначности функции $Q^{x_0}(\varphi)$ необходимо ввести еще одно математическое понятие — *степень Брауэра* гладкого отображения. Пусть M и N — две компактные поверхности размерности m и f: $M \to$

$\to N$ — гладкое отображение M в N. Для каждого $y \in N$ определим множество $f^{-1}(y) \in M$ следующим образом:

$$f^{-1}(y) = \{x \in M: f(x) = y\}. \tag{7.3.11}$$

Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения f, если якобиан ∂f отличен от нуля в каждой точке множества $f^{-1}(y)$. Предполагая, что поверхность N связна, можно показать, что величина $\deg(f)$, определенная равенством

$$\deg(f) = \sum_{f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det(\partial f)), \tag{7.3.12}$$

где y — регулярное значение отображения f, не зависит от специального выбора регулярного значения y. Ясно, что величина $\deg(f)$ принимает лишь целые значения. Она называется *степенью Брауэра* гладкого отображения f.

Если ввести в рассмотрение вещественнозначную функцию g: $N \to \mathbb{R}$, то можно определить суперпозицию $(g \circ f)$: $M \to \mathbb{R}$, и мы приходим к соотношению

$$\int_M dx^1 \ldots dx^m (g \circ f)(x^1, \ldots, x^m) \det \partial y = \deg(f) \times$$

$$\times \int_N dy^1 \ldots dy^m g(y^1, \ldots, y^m). \tag{7.3.13}$$

Если теперь компактифицировать $\mathbb{R}^{n-1}$ с помощью отображения π: $\mathbb{R}^{n-1} \cup (\infty) \to S^{n-1}$, то легко можно будет убедиться в том, что формула (7.3.13) и есть решение нашей проблемы. Действительно, из того, что

$$Q^x \circ (\varphi) = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int dx^1 \ldots dx^{n-1} (\det g_{ab})^{1/2} \det \partial y, \tag{7.3.14}$$

где $(y^1, \ldots, y^{n-1})$ — внутренние координаты на сфере, а

$$g_{ab} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y^a}, \frac{\partial \varphi}{\partial y^b} \right\rangle \tag{7.3.15}$$

есть метрический тензор на S^{n-1}, немедленно следует, что величина

$$Q^x \circ (\varphi) = \deg(\varphi \circ \pi^{-1}) \Omega_{n-1}^{-1} \int dy^1 \ldots dy^{n-1} (\deg g_{ab})^{1/2} =$$

$$= \deg(\varphi \circ \pi^{-1}) \tag{7.3.16}$$

целозначна.

Обобщение гомотопий для отображений из S^n в топологическое пространство X строится следующим образом. Два отображения f, g; $I^n \to X$ называют гомотопными в точке $x \in X$, если они обладают тем свойством, что

$$f(\partial I^n) = x = g(\partial I^n),$$

т. е. отображения f и g действительно определены на S^n и существует непрерывное отображение H: $I^{n+1} \to X$, такое, что отображение H^s: $I^n \leftarrow X$, имеющее в координатах вид H^s: $(z_1, \ldots, z_n) \to$ $\to H(s, z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяет условиям

(i) $H^s(\partial I^n) = x$ для всех $s \in I$,

(ii) $H^0 = f$ и $H^1 = g$.

Множество классов эквивалентности взаимно гомотопных отображений можно наделить групповой структурой с умножением, определенным формулой

$$(f \circ g)(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{cases} f(2z_1, z_2, \ldots, z_n), & 0 \leqslant z_1 \leqslant 1/2, \\ g(2z_1 - 1, z_2, \ldots, z_n), & 1/2 \leqslant z_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Получающаяся группа называется n-й *гомотопической группой* в точке $x \in X$ и обозначается $\pi_n(X, x)$. Если пространство X линейно связно, то все группы, отвечающие различным точкам $x \in X$, изоморфны между собой, и единственная абстрактная группа, которой они все изоморфны, обозначается $\pi_n(X)$ и называется n-й *гомотопической группой пространства* X.

Топологическое содержание предыдущего анализа можно выразить следующим результатом: $\pi_n(S^n) = Z$, где Z — аддитивная группа целых чисел.

Мы рассматриваем лишь модели, которые являются непосредственным обобщением уравнения СГ, поскольку делать общие утверждения в других случаях затруднительно. Происхождение топологического заряда, проявляющегося в сохранении «числа солитонов», для таких уравнений, как КдФ или НШ, проследить гораздо труднее. Для того, чтобы применить только что установленные результаты, мы должны рассмотреть соответствие между решением рассматриваемого уравнения и некоторым отвечающим ему отображением между сферами. Для этого нам понадобится преобразование обратной задачи рассеяния.

7.4. Нелинейные уравнения Клейна — Гордона

Как уравнение СГ, так и уравнение φ^4 являются примерами общего нелинейного уравнения Клейна — Гордона

$$\varphi_{,xx} - \varphi_{,tt} = U'(\varphi), \tag{7.4.1}$$

отвечающего плотности гамильтониана вида

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = (1/2)(\pi^2 + \varphi_{,x}^2 + 2U(\varphi)). \tag{7.4.2}$$

Для случая уравнения СГ потенциальная функция $U_1(\varphi)$ дается равенством

$$U_1(\varphi) = (1 - \cos\varphi), \tag{7.4.3}$$

для случая модели φ^4 потенциал $U_2(\varphi)$ представляется формулой

$$U_2(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2. \tag{7.4.4}$$

Эскизы графиков этих потенциалов изображены на рис. 7.12.

Мы всегда можем прибавить к потенциальной функции $U(\varphi)$ произвольную постоянную и этой свободой в каждом из рассмотренных выше случаев можно воспользоваться, полагая $U(\varphi) = 0$ для основного состояния системы. Если мы всегда будем посту-

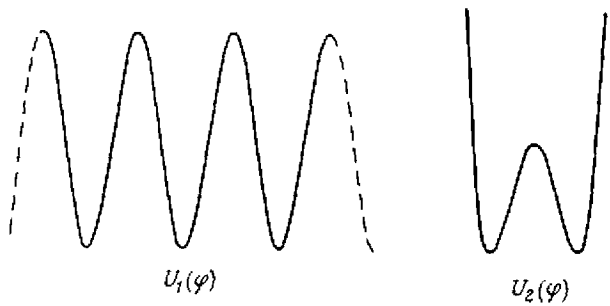


Рис. 7.12. Потенциальные функции СГ (слева) и φ^4 (справа).

пать таким образом, то собственные значения основных состояний окажутся нулями функции $U(\varphi)$.

Если решение должно обладать конечной энергией и имеет асимптотическое поведение вида

$$\varphi \to \varphi_\pm(t) \text{ при } x \to \pm\infty, \tag{7.4.5}$$

то с необходимостью мы должны иметь

$$U(\varphi_\pm) = 0. \tag{7.4.6}$$

Следовательно, возможные асимптотические значения решений с конечной энергией обязаны быть нулями потенциальной функции $U(\varphi)$, отвечающими основным состояниям системы. Для уравнения СГ нули потенциальной функции $U_1(\varphi)$ суть $\{2n\pi: n \in Z\}$, и поэтому единственно допустимые граничные условия для решений с конечной энергией представляются в виде

$$\varphi \to 0 \bmod (2\pi) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.4.7}$$

Для модели φ^4 множество нулей потенциальной функции имеет вид $\{\varphi_+, \varphi_-\}$, и мы получаем другие асимптотические предельные значения. Если, как в этом случае, нули функции $U(\varphi)$ дискретны, то получается равенство

$$\partial_t \varphi_{\pm\infty}(t) = 0, \tag{7.4.8}$$

так что $\varphi_{\pm}$ есть сохраняемая величина. Это заставляет нас по-другому смотреть на топологический заряд. Пространство F несингулярных решений конечной энергии для нелинейного уравнения Клейна — Гордона (7.4.1) можно разбить на некоторое число подпространств, помеченных асимптотическими значениями полей в каждом из этих подпространств. Например, в случае уравнения φ^4 мы имеем четыре подпространства:

$$A^{\alpha\beta} = \left\{ \varphi \in F\colon \varphi \to \begin{cases} \varphi^{\alpha}, & x \to \infty \\ \varphi^{\beta}, & x \to -\infty \end{cases} \right\}, \tag{7.4.9}$$

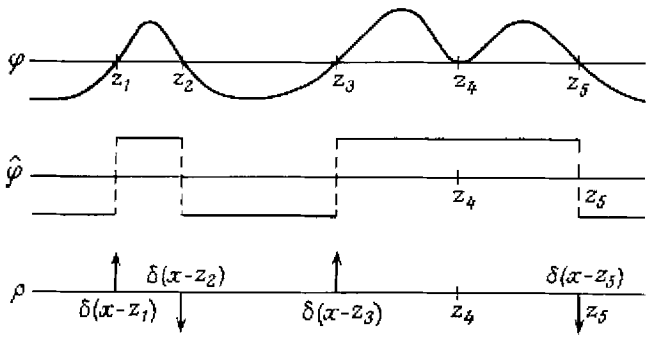


Рис. 7.13.

каждое из которых характеризуется парой чисел из множества ± 1. В этом случае топологически сохраняемые величины не принимают произвольных целых значений. Несмотря на это, такая величина может быть определена и здесь.

Интегральные результаты предыдущего раздела, вообще говоря, нельзя непосредственно применить к нелинейному уравнению Клейна — Гордона. Однако в случае вещественного поля φ мы можем рассмотреть поле направлений $\hat{\varphi}$, определенное равенством

$$\hat{\varphi} = \varphi / |\varphi|. \tag{7.4.10}$$

Поле $\hat{\varphi}$ сингулярно в нулях функции φ, предполагаемой непрерывной. Кинковая плотность $\rho = \hat{\varphi}_{,x}$ все же может быть вычислена, хотя она имеет сингулярности типа дельта-функций в нулях функции φ. Если $z_1, \ldots, z_m$ суть нули функции φ, то мы получим формулу

$$\rho = \sum_{j=1}^{m} d(\varphi, z_j)\, \delta(x - z_j)\, d(\varphi, z) = \lim_{x \to z} \operatorname{sgn}(\varphi_{,x}(x)). \tag{7.4.11}$$

На рис. 7.13 изображена эта ситуация для функции φ с пятью нулями.

Суммарный топологический заряд можно определить формулой

$$\mathcal{Q}^t(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, t) = \sum_{j=1}^{m} d(\varphi, z_j). \qquad (7.4.12)$$

Поскольку функция φ предполагается непрерывной, то возможные значения величины $\mathcal{Q}^t(\varphi)$ суть $+1$ и 0. Однокинковые решения $\varphi_v^{\pm}$ для уравнения φ^4, заданные формулой (7.2.13), имеют

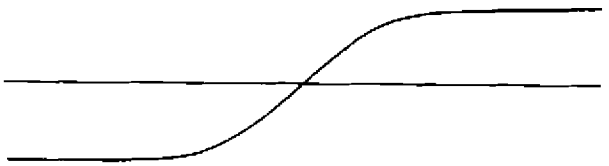


Рис. 7.14. Решение уравнения (7.4.14) в виде кинка.

заряд $\mathcal{Q}^t(\varphi_v^{\pm}) = 1$, и для подпространств $A^{\alpha\beta}$, определенных в (7.4.9), мы имеем

$$\mathcal{Q}(A^{++}) = 0 = \mathcal{Q}(A^{--}) \text{ и } \mathcal{Q}(A^{+-}) = +1 = -\mathcal{Q}(A^{-+}).$$

Другой пример дается потенциалом

$$U_3(\varphi) = (\varphi^2 + a^2)(1 - \varphi^2)^2 \left(\frac{\lambda^2}{8(1+a^2)}\right), \qquad (7.4.13)$$

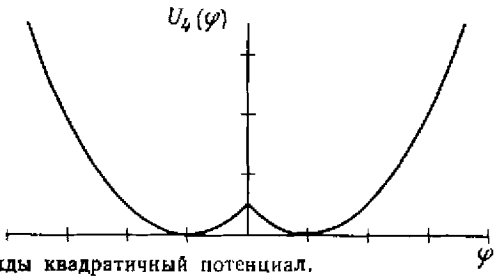


Рис. 7.15. Дважды квадратичный потенциал.

который имеет два основных состояния $\varphi = \pm 1$. Модель, отвечающая этому потенциалу, имеет статическое кинк-решение

$$\varphi(x) = [1 + a^{-2} + \operatorname{sh}^2((1/2)\lambda x)]^{-1/2} \operatorname{sh}((1/2)\lambda x), \qquad (7.4.14)$$

которое изображено на рис. 7.14. Для этого решения $\dot{\varphi} = \operatorname{sgn} x$, и как элемент подпространства A^{+-}, отвечающего этой модели, это решение имеет топологический заряд, равный $+1$.

В физике иногда (для смещенных ферроэлектриков) вместо модели φ^4 пользуются другой моделью, в которой потенциал задается формулой

$$U_4(\varphi) = (1/2)\omega^2(|\varphi| - 1)^2. \qquad (7.4.15)$$

График этого потенциала изображен на рис. 7.15.

Ассоциированное с этим потенциалом уравнение Клейна — Гордона принимает вид

$$\varphi_{,tt} - \varphi_{,xx} + \omega^2 (|\varphi| - 1) \operatorname{sgn} \varphi = 0. \qquad (7.4.16)$$

Оно имеет кинк-решения

$$\varphi_{\pm} = \pm \operatorname{sgn} (\gamma (x - vt)) [1 - \exp (-\omega\gamma |x - vt|)]. \qquad (7.4.17)$$

Форма статичной кинк-волны показана на рис. 7.16. Сходство этого кинка с кинком уравнения φ^4 очевидно. Мы снова получаем недиссипативное решение с зарядом $+1$.

Если, как в случаях, рассмотренных выше, потенциальная функция $U(\varphi)$ имеет более одного дискретного нуля, то мы ока-

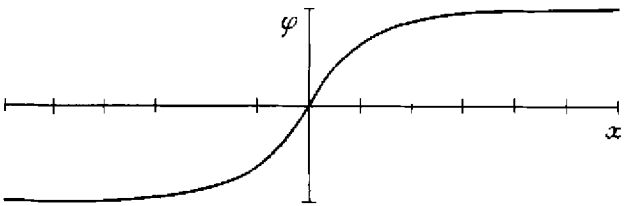


Рис. 7.16. Решение уравнения (7.4.17) в виде кинка.

жемся в ситуации, когда существует не только нетривиальный топологический заряд, но и недиссипативное решение. Если α и β — пара нулей потенциальной функции и существует несингулярное решение с конечной энергией, обладающее асимптотикой

$$\varphi \to \begin{cases} \alpha, & x \to -\infty, \\ \beta, & x \to +\infty, \end{cases}$$

то

$$\mathscr{E}_{\varphi} (x, t) > \max U (\varphi)_{\varphi \in [\alpha, \beta]} > 0 \qquad (7.4.18)$$

и, стало быть, (7.2.8) не может выполняться.

Ситуация становится более интересной, если потенциальная функция $U(\varphi)$ имеет континуум нулей, и особенно интересной в том случае, когда имеется более одной пространственной переменной. Гамильтониан

$$\mathscr{H} (\pi, \varphi) = (1/2) (\pi^2 + \varphi^2_{,x} + \varphi^2_{,y} + (1/2) \lambda (|\varphi|^2 - 1)^2) \qquad (7.4.19)$$

представляет комплексную модель φ^4 с двумя пространственными переменными. Каждая точка на окружности S^1 является возможным состоянием системы. Для моделей с двумя пространственными переменными, подобных только что рассмотренной, аналогом стремления переменной x в одномерной модели к $\pm\infty$ служит

стремление радиальной переменной $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ к бесконечности вдоль лучей, исходящих из начала координат. Получаемый результат будет тогда зависеть, вообще говоря, от выбранного луча. Поэтому каждое несингулярное решение φ конечной энергии определяет отображение $\tilde{\varphi}$: $S^1 \to S^1$, записываемое в координатах следующим образом:

$$\tilde{\varphi}\colon\ \hat{n} \to \lim_{r\to\infty} \varphi\,(r\hat{n},\ t) = \tilde{\varphi}\,(\theta,\ t). \tag{7.4.20}$$

Поскольку $\pi_1\,(S^1) = Z$, то кажется правдоподобным, что в этой модели мы получаем решения типа кинка. Здесь, однако, имеются трудности. Энергия решения φ записывается в виде

$$E_\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\,dr\ (1/2)\,(\varphi_{,t}^2 + \varphi_{,r}^2 + r^{-2}\varphi_{,\theta}^2 + (1/2)\,\lambda\,(|\varphi|^2 - 1)^2). \tag{7.4.21}$$

Формула (7.4.21) показывает, что для того, чтобы избежать логарифмической расходимости в случае несингулярного решения с конечной энергией, необходимо потребовать, чтобы $\varphi_{,\theta} = 0$. А это означает, что отображение $\tilde{\varphi}$ может быть лишь тривиальным. В следующем разделе мы увидим, что эта ситуация может быть разрешена введением новых типов полей, называемых калибровочными полями, которые являются обобщениями обыкновенных электромагнитных полей. Однако здесь имеется другой более общий результат, с которым не так просто справиться.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — статическое решение общего нелинейного уравнения Клейна — Гордона с N пространственными переменными, включающее некоторое множество скалярных полей φ_a. Энергия такого решения состоит из двух слагаемых:

$$\mathscr{E}_\varphi = \mathscr{E}_\varphi^1 + \mathscr{E}_\varphi^2, \quad \mathscr{E}_\varphi^{1,2} \geqslant 0, \tag{7.4.22}$$

где

$$\mathscr{E}_\varphi^1 = (1/2) \sum_{a=1}^{m} \int dx^1 \ldots dx^N\,(\nabla\varphi_a)^2,$$

$$\mathscr{E}_\varphi^2 = \int dx^1 \ldots dx^N U\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m).$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство полевых конфигураций ${}_\lambda\varphi$, определенное формулой

$${}_\lambda\boldsymbol{\varphi}\colon\ \mathbf{x} \to \varphi\,(\lambda\mathbf{x}). \tag{7.4.23}$$

Энергия произвольной конфигурации из этого семейства имеет вид

$$\mathscr{E}_{{}_\lambda\varphi} = \lambda^{2-N}\mathscr{E}_\varphi^1 + \lambda^{-N}\mathscr{E}_\varphi^2. \tag{7.4.24}$$

Для статического решения ${}_1\varphi$ можно записать равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{E}_{\lambda\varphi}\right)_{\lambda=1}=0, \tag{7.4.25}$$

из которого следует, что

$$(N-2)\,\mathscr{E}^1_\varphi+N\mathscr{E}^2_\varphi=0. \tag{7.4.26}$$

В случае $N=1$ мы находим из последнего равенства, что $\mathscr{E}^1_\varphi=\mathscr{E}^2_\varphi$ и что суммарная энергия статического решения в этом случае равна $2\mathscr{E}^1_\varphi$. Этот факт часто упрощает ее вычисление. Однако если $N>2$, то единственное возможное решение, совместимое с неотрицательностью компонент энергии, получается, когда $\mathscr{E}^1_\varphi=\mathscr{E}^2_\varphi=0$. Это означает, что при $N\geqslant 2$ не существует статических решений конечной энергии. Этот отрицательный результат известен как *теорема Деррикса*. Важно понять, что существуют модели с независящими от времени недиссипативными решениями.

Другой аспект, заслуживающий упоминания, заключается в том, что релятивистские полевые теории не обязаны описываться нелинейными уравнениями типа Клейна — Гордона. Например, комплексная полевая теория, отвечающая плотности лагранжиана вида

$$\mathscr{L}=\frac{|\psi,_t|^2-|\psi,_x|^2}{(1-\lambda^2|\psi|^2)}-m^2|\psi|^2, \tag{7.4.27}$$

допускает настоящие солитонные решения и при этом нелинейна. Существует проблема квантования таких моделей, но на классическом уровне она вполне приемлема. Другие уравнения, такие как

$$\psi,_{tt}-\psi,_{xx}=\exp(-\psi)-\exp(+2\psi) \tag{7.4.28}$$

для комплексного поля ψ, не порождаются потенциальной функцией $U(\psi,\bar\psi)$. Однако уравнение (7.4.28) имеет солитонные решения и допускает гамильтонов формализм, но не стандартной формы.

7.5. Вихри, монополи и инстантоны

В предыдущем разделе мы испытали некоторую трудность при конструировании нетривиальных зарядов для решений конечной энергии комплексной модели φ^4 с двумя пространственными переменными. Как мы видели, существование такого топологического заряда полезно для доказательства существования недиссипативных кинк-решений в этих моделях. Один из путей обхода такой трудности состоит в попытке несколько изменить модель, вводя в рассмотрения дополнительные поля, известные как калибровочные поля. Помимо того что на этом пути можно

достичь решения проблемы, оказывается, что уравнения, которым удовлетворяют эти новые поля, обладают рядом замечательных свойств и подобными кинкам решениями, известными, в зависимости от ситуации, как вихри, монополи и инстантоны. В этом разделе мы попытаемся дать краткое описание природы этих решений «солитонного типа» и ассоциированных с ними топологических зарядов. Для удобства мы сначала ограничимся описанием статической, не зависящей от времени ситуации.

7.5.1. Абелевы калибровочные поля

Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона с двумя пространственными переменными вида

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = 2\frac{\partial U}{\partial \bar{\Phi}}(\Phi, \bar{\Phi}). \tag{7.5.1}$$

Это уравнение может быть получено минимизацией функционала энергии или действия, определенного формулой

$$\mathscr{E}_\Phi = \frac{1}{2}[|\Phi_{,x}|^2 + |\Phi_{,y}|^2 + 2U(\Phi, \bar{\Phi})]. \tag{7.5.2}$$

Если потенциальная функция $U(\Phi, \bar{\Phi})$ имеет специальный вид

$$U(\Phi, \bar{\Phi}) = V(|\Phi|), \tag{7.5.3}$$

то полевые уравнения инвариантны относительно преобразования симметрии

$$\Phi(x) \to ({}_\alpha\Phi)(x) = e^{i\alpha}\Phi(x) = \tilde{\alpha}\Phi, \tag{7.5.4}$$

где α — вещественная постоянная. Такие преобразования называются *калибровочными преобразованиями*. Фаза α может быть выбрана так, чтобы классическое поле $\Phi(x)$ оказалось вещественным в какой-нибудь заданной точке x. Однако после того, как такой выбор сделан, фаза Φ фиксируется во всех других точках.

Рассмотрим теперь более общее преобразование

$$\Phi(x) \to ({}_\beta\Phi)(x) = e^{i\beta(x)}\Phi(x) = \tilde{\beta}(x)\Phi(x), \tag{7.5.5}$$

в котором фаза β теперь зависит от координаты x и функция $\tilde{\beta}$: $R^2 \to S^1$ определена соотношением $\tilde{\beta}$: $x \to e^{i\beta(x)}$. Мы назовем такие преобразования *координатно зависимыми калибровочными преобразованиями*. Очевидно, что множество всех таких координатно зависимых фазовых преобразований, отвечающих гладким отображениям $\tilde{\beta}$: $R^2 \to S^1$, можно наделить структурой группы. Здесь речь идет о непрерывной группе или группе Ли преобразований. Эта группа для любой заданной точки совпадает с группой $U(1)$ унимодулярных комплексных чисел.

Возникает следующий вопрос. Как можно изменить уравнение (7.5.1), с тем чтобы оно стало инвариантным относительно действия этой калибровочной группы? Величина $\Phi\bar{\Phi}$ инвариантна по отношению к таким калибровочным группам, т. е.

$$\Phi(x)\,\bar{\Phi}(x) \to ({}_\beta\Phi(x))\,({}_\beta\bar{\Phi}(x)) = \Phi(x)\,\bar{\Phi}(x), \qquad (7.5.6)$$

и, следовательно, потенциальный член в (7.5.1) ведет себя так же, как в случае постоянной фазы. Поэтому остается лишь рассмотреть члены, содержащие производные. Отдельная производная $\Phi_{,a}$ ($a = x$ или y) преобразуется в соответствии с правилом

$$\Phi_{,a}(x) \to e^{i\beta(x)}\,(\Phi_{,a} + \tilde{\beta}^{-1}(x)\,\tilde{\beta}_{,a}(x)). \qquad (7.5.7)$$

Таким образом, уравнение (7.5.1) в том виде, в котором оно записано, не является инвариантным при таком преобразовании, но его можно сделать инвариантным, если каким-то образом устранить мешающий член $\tilde{\beta}^{-1}(x)\,\tilde{\beta}_{,a}(x)$. Это делается введением нового вещественнозначного поля $A_a(x)$, называемого *абелевым калибровочным полем*. Если каждую производную $\Phi_{,a}$ в (7.5.1) заменить комбинацией $D_a\Phi$, определенной равенством

$$D_a\Phi = (\Phi_{,a} - iA_a\Phi), \qquad (7.5.8)$$

то под действием калибровочной группы эта величина будет преобразовываться простым образом:

$$D_a\Phi(x) \to ({}_\beta D_a\Phi)(x) = e^{i\beta(x)}\,(D_a\Phi)(x), \qquad (7.5.9)$$

как преобразовывались Φ и $\Phi_{,a}$ в случае постоянной фазы, если действие калибровочной группы на поле $A_a(x)$ определяется выражением

$$A_a(x) \longmapsto ({}_\beta A_a)(x) = A_a(x) - i\tilde{\beta}^{-1}(x)\,\beta(x)_{,a}. \qquad (7.5.10)$$

Выражение $D_a\Phi$ называется *ковариантной производной* функции Φ, поле A_a называется абелевым калибровочным полем, поскольку $U(1)$ — абелева группа.

Модифицированные полевые уравнения теперь принимают вид

$$(\partial_x - iA_x)^2\,\Phi + (\partial_y - iA_y)^2\,\Phi = \frac{\partial V}{\partial\bar{\Phi}}(|\Phi|) \qquad (7.5.11)$$

и остаются инвариантными под действием непрерывной группы преобразований

$$\Phi \to {}_\beta\Phi, \quad A_a \to {}_\beta A_a, \qquad (7.5.12)$$

определенных формулами (7.5.5) и (7.5.10), где $\beta\colon R^2 \to S^1$ гладкое отображение. Уместно обратить внимание, что новое поле A_a входит в уравнения точно таким же образом, как векторный потенциал электромагнитного поля в классической механике. Это наблюдение позволяет нам интерпретировать новое калибро-

вочное поле как электромагнитное поле и предполагать, что в отсутствие Ф-поля оно будет удовлетворять уравнениям Максвелла в свободном пространстве. Они обычно записываются в виде

$$F_{ab,\,a} = 0 \tag{7.5.13}$$

(повторяемый индекс означает суммирование по нему), где электромагнитный тензор определен равенством

$$F_{ab} = (A_{b,\,a} - A_{a,\,b}). \tag{7.5.14}$$

Полевой тензор F_{ab}, подобно $|\Phi|^2$, инвариантен относительно калибровочной группы (7.5.12):

$$F_{ab}(x) \to (_{\beta}F_{ab})(x) = F_{ab}(x). \tag{7.5.15}$$

Парные полевые уравнения (7.5.13) можно получить минимизацией функционала энергии

$$\mathscr{E}_F = \frac{1}{2} \| F \|^2, \tag{7.5.16}$$

где

$$\| F \|^2 = \frac{1}{2} F_{ab} F_{ab}. \tag{7.5.17}$$

Плотность энергии объединенной системы скалярного и электромагнитного полей дается формулой

$$\mathscr{E}_{\Phi,\,F} = \mathscr{E}_{\Phi} + \mathscr{E}_F = \frac{1}{2} [\,| D_x\Phi |^2 + | D_y\Phi |^2 + \| F \|^2 + 2V(|\Phi|)]. \tag{7.5.18}$$

Полевые уравнения получаются минимизацией этого действия и принимают следующий вид:

$$F_{ab,\,a} = J_b, \tag{7.5.19}$$

$$(D_x^2 + D_y^2)\Phi = 2\frac{\partial}{\partial\bar{\Phi}} V(|\Phi|), \tag{7.5.20}$$

где

$$J_b = \operatorname{Im}(\Phi\overline{D_b\Phi}) \tag{7.5.21}$$

есть электрический ток, индуцированный полем Φ и входящий в уравнения Максвелла как источник. Мы заметим, что тем самым требуется модификация этих уравнений, поскольку ток зависит явным образом от калибровочного поля.

Требование конечности энергии накладывает на поля Φ и A_a следующие ограничения типа граничных условий. А именно, соотношения

$$|\Phi| \to c, \tag{7.5.22}$$

$$| D_x\Phi |^2 + | D_y\Phi |^2 \to 0, \tag{7.5.23}$$

$$\| F \|^2 \to 0 \tag{7.5.24}$$

равномерно справедливы при $|x| \to \infty$. При этом c есть нуль функции V, т. е.

$$V(c) = 0. \tag{7.5.25}$$

Соответствующий топологический заряд можно построить двумя различными путями. Из (7.5.24) следует, что при $|x| \to \infty$ выполняется соотношение

$$F_{ab} \to 0. \tag{7.5.26}$$

Однако отсюда не вытекает, что калибровочные поля становятся нулевыми. Поле F_{ab} должно стремиться к нулю быстрее, чем $|x|^{-2}$, и, следовательно, мы приходим к соотношению

$$A_a = -i\tilde{\chi}^{-1}\tilde{\chi}_{,a} + O(|x|^{-1-\varepsilon}) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{7.5.27}$$

где $\tilde{\chi} = \exp i\chi$ есть функция полярного угла φ, которую можно представлять как функцию, действующую из S^1 в S^1. Калибровочное преобразование с гладкой калибровочной функцией $\omega(x)$ переводит A_a в ${}_\omega A_a$, причем для последнего поля выполняются следующие асимптотические соотношения:

$${}_\omega A_a = -i(e^{i\chi}\partial_a e^{i\chi}) - i(e^{-i\omega}\partial_a e^{i\omega}) + O(|x|^{-1-\varepsilon}) = \tag{7.5.28}$$

$$= -i(e^{-i(\chi+\omega)}\partial_a e^{i(\chi+\omega)}) + O(|x|^{-1-\varepsilon}). \tag{7.5.29}$$

Для того, чтобы исключить $\tilde{\chi}$, нужно выбрать $\exp i\omega = \exp(-i\chi)$. Однако в отличие от $\tilde{\chi}$ $\tilde{\omega}$ должно быть определено всюду. В частности, $\tilde{\omega}$ должна быть независимой от φ, когда $r = 0$, и функция $\tilde{\omega}$ гомотопна тождественному преобразованию. Это означает, что калибровочное преобразование, такое как в (7.5.28), не может изменить гомотопический класс функции $\tilde{\chi} = \exp i\chi$. Поэтому отображение $\tilde{\chi}$ наделяет эту модель топологическим зарядом, равным числу витков отображения $\tilde{\chi}$. Простое выражение для заряда можно получить, если рассмотреть вектор V_a, определенный формулой

$$V_a = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{ab}A_b. \tag{7.5.30}$$

Радиальная компонента $V_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}$ имеет при $|x| \to \infty$ асимптотическое поведение

$$V_r = \frac{1}{2\pi|x|}\chi_{,\theta} + O(|x|^{-1-\varepsilon}). \tag{7.5.31}$$

Поэтому, интегрируя функцию $|x|V_r$ по окружности радиуса R и затем устремляя $R \to \infty$, получим равенство

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta\,|x|\,V_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\chi_{,\theta} = \mathcal{Q}[\tilde{\chi}], \tag{7.5.32}$$

где $\mathcal{Q}[\tilde{\chi}]$ есть топологическая степень отображения $\tilde{\chi}$: $S^1 \to S^1$.

С другой стороны, предполагая, что векторное поле V_a ведет себя достаточно хорошо, можно применить теорему Гаусса — Остроградского о расходимости и получить равенство

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta R V_r = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|=R} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = \int_{R^2} \operatorname{div}\mathbf{V}\, d^2x. \qquad (7.5.33)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{ab}A_{b,a} = \frac{1}{2\pi}(A_{y,x} - A_{x,y}) = \frac{1}{2\pi}F_{xy}, \qquad (7.5.34)$$

получаем нашу окончательную интегральную формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} F_{xy}\, d^2x = \mathcal{Q}[\tilde{\chi}] = N, \qquad (7.5.35)$$

где N — целое число. С физической точки зрения F_{xy} есть магнитное поле, а интеграл $\int F_{xy}d^2x$ представляет собой суммарный магнитный поток через плоскость (x, y). Равенство (7.5.35) утверждает, что этот суммарный поток квантуется как целое число, умноженное на 2π. Мы еще вернемся к этому разд. 7.6, когда такая ситуация возникнет в контексте сверхпроводимости.

Другой подход заключается в рассмотрении поля Φ. В частном примере разд. 7.4 мы попытались построить топологический заряд, рассматривая отображение $\tilde{\Phi}$: $S^1 \to X$, определенное формулой

$$\tilde{\Phi}:\ \hat{n} \to \lim_{r\to\infty}\Phi(r\hat{n}), \qquad (7.5.36)$$

где X — это множество нулей потенциала $V(|\Phi|)$. Рассмотренный нами частный пример относился к комплексному потенциалу φ^4 вида

$$V(|\Phi|) = \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 1)^2. \qquad (7.5.37)$$

В этом случае множество нулей представляет собой множество всех точек единичной окружности и, следовательно, $X \cong S^1$. Поскольку $\pi_1(S^1) = Z$, это могло бы нам дать целочисленный заряд, если бы $\tilde{\Phi}$ было нетривиальным. Однако такое построение оказывается несостоятельным, так как отображение $\tilde{\Phi}$ из-за требования конечности энергии вынуждено быть тривиальным, ибо в силу этого требования

$$\Phi_{,\theta} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \qquad (7.5.38)$$

Калибровочные поля позволяют немедленно разрешить возникшую трудность, выраженную в (7.5.38). Для решения с конечной энергией мы теперь потребуем выполнения свойства

$$\Phi_{,0} - i\,|x|\,A_0\Phi \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.5.39}$$

Это означает, что для решения с конечной энергией выполняется соотношение

$$A_0 = O(|x|^{-1}) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.5.40}$$

Из (7.5.27) и (7.5.29) мы находим, что с точностью до постоянного калибровочного преобразования мы имеем

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\chi}, \tag{7.5.41}$$

и оба различных корня приводят к одному и тому же топологическому заряду.

7.5.2. Вихри

Модель, представленная уравнениями φ^4 с потенциалом (7.5.37) и модифицированная включением калибровочного поля U (1), называется *абелевой моделью Хиггса*. Функционал действия для нее задается равенством

$$\mathscr{E}_{\Phi,F} = \frac{1}{2}\left[\,|D_x\Phi|^2 + |D_y\Phi|^2 + \|F\|^2 + \frac{\lambda}{2}(|\Phi|^2 - 1)^2\right]. \tag{7.5.42}$$

Для специального значения параметра λ, равного 1/2, этот функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\Phi,F} &= \frac{1}{2}[(\Phi_{1,x} + A_1\Phi_2) \mp (\Phi_{2,y} - A_2\Phi_1)]^2 = \\ &= \frac{1}{2}[(\Phi_{1,y} + A_2\Phi_2) \pm (\Phi_{2,x} - A_1\Phi_1)]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[F_{xy} \pm \frac{1}{2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 1)\right]^2 + \frac{1}{2}F_{xy},\end{aligned} \tag{7.5.43}$$

где

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2. \tag{7.5.44}$$

Мы видим, что в силу (7.5.35) суммарная энергия $\int \mathscr{E}_{\Phi,F}\,d^2x$ удовлетворяет ограничению

$$\int_{R_1} \mathscr{E}_{\Phi,F}\,d^2x \geqslant \pi N. \tag{7.5.45}$$

Энергия будет минимальной и в (7.5.46) будет иметь место равенство в том и только в том случае, когда справедливы уравнения

$$(\Phi_{1,x} + A_1\Phi_2) - \varepsilon(\Phi_{x,y} - A_2\Phi_1) = 0, \tag{7.5.46}$$

$$(\Phi_{1,y} + A_2\Phi_2) + \varepsilon(\Phi_{2,x} - A_1\Phi) = 0, \tag{7.5.47}$$

$$F_{xy} - (1/2)\,\varepsilon\left(\Phi_1^2 + \Phi^2 - 1\right) = 0, \tag{7.5.48}$$

где

$$\varepsilon N > 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{7.5.49}$$

Хотя замкнутая форма решений этих уравнений неизвестна, доказательство существования решений можно получить. Можно показать, что для заданного N ($N > 0$) и множества N точек $\{z_i\}$ ($i = 1, \ldots, N$) в $\mathbf{C}$, существует решение с конечным действием уравнений (7.5.46)—(7.5.49), единственное с точностью до калибровочных преобразований, со следующими свойствами:

(i) Решение принадлежит глобально C^∞.

(ii) Нули функции $\Phi(z, \bar{z})$, $z = x + iy$, суть точки $\{z_i\}$ ($i = 1, \ldots, N$), и $\Phi(z, \bar{z}) \sim (z - z_j)^{n_j}$, $z \to z_j$, где n_j — кратность точки z_j из множества нулей.

Такие решения для $N > 0$ называются *N-вихревыми решениями*, а аналогичные решения для $N < 0$ называются *N-антивихревыми решениями*.

Несмотря на то что выражение в замкнутом виде для N-вихревых решений неизвестно, систему уравнений (7.5.46)—(7.5.49) можно свести к более простой. Наши топологические рассмотрения помогут нам угадать форму, которую могут принимать решения. Отображение $\tilde{\chi}_n\colon S^1 \to S^1$, определенное выражением

$$\tilde{\chi}_n\colon z \to z^n, \quad |z| = 1, \tag{7.5.50}$$

имеет заряд n, и это подсказывает, что решение Φ мы должны искать в виде

$$\Phi_1 + i\Phi_2 = e^{in\theta} f(r), \tag{7.5.51}$$

где

$$f(\infty) = 1. \tag{7.5.52}$$

Для этого отображения $\chi = n\theta$, и поэтому калибровочное поле принимает асимптотически следующий вид:

$$A_a = (n\theta)_{,a} = -\frac{n\varepsilon_{ab}\hat{x}_b}{r}, \quad \hat{x}_b = x_b/r. \tag{7.5.53}$$

Поэтому есть надежда отыскать решение в виде

$$A_a = -\frac{n\varepsilon_{ab}\hat{x}_b}{r}\,a(r), \tag{7.5.54}$$

где

$$a(\infty) = 1. \tag{7.5.55}$$

Подставляя выражения (7.5.51) и (7.5.54) в уравнения (7.5.46)—(7.5.49), мы сводим для $N > 0$ эти уравнения к следующей паре обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$r\frac{\partial f}{\partial r} - n(1-a)f = 0, \tag{7.5.56}$$

$$\frac{2n}{r}\frac{da}{dr} + (f^2 - 1) = 0. \tag{7.5.57}$$

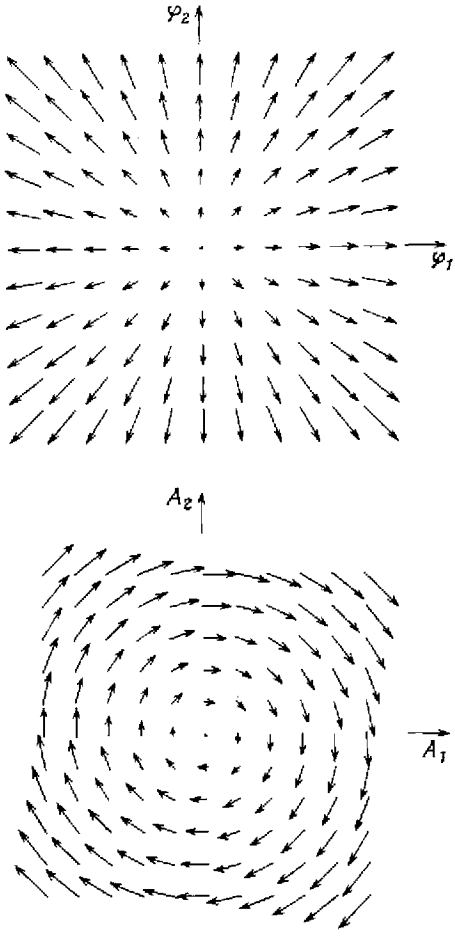


Рис. 7.17. Решение с одиночным вихрем.

В окрестности точки $r = 0$ решения имеют асимптотику

$$f \sim cr^n, \tag{7.5.58}$$

$$a \sim \frac{1}{4n}r^2, \tag{7.5.59}$$

и, значит, Φ имеет в точке 0 нуль порядка n. На рис. 7.17 показано решение с одиночным вихрем для Φ и для калибровочного поля вблизи сингулярной точки $r = 0$, где оно имеет следующий асимптотический вид:

$$\mathbf{A} = \pm\frac{r}{4}\hat{e}_\theta + O(r^2). \tag{7.5.60}$$

Из этого рисунка становится понятно, почему мы называем такие решения *вихрями*. Аналогичный анализ можно провести и для случая $\lambda \neq 1/2$. Можно показать, что если $0 < \lambda \leqslant 1/2$, то решения с конечной энергией и зарядом N существуют для всех N. Решения с положительным N мы называем *вихрями*, а с отрицательным N — *антивихрями*.

Уравнения с зависимостью от времени принимают форму

$$F_{ab} = (A_{b,a} - A_{a,b}), \tag{7.5.61}$$

$$F_{tb} = (A_{b,t} - A_{t,b}) = E_b \tag{7.5.62}$$

(они определяют поля F_{ab} и E_b) вместе с динамическими уравнениями

$$E_{b,t} = (F_{ab,a} - J_b), \tag{7.5.63}$$

$$E_{b,b} = -\rho, \tag{7.5.64}$$

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2)\,\Phi = -\lambda\Phi\,(|\,\Phi\,|^2 - 1), \tag{7.5.65}$$

где J_b определено в (7.5.21). Плотность заряда ρ мы определим формулой

$$\rho = -\mathrm{Im}\,(\Phi\overline{D_t\Phi}). \tag{7.5.66}$$

Латинские индексы принимают обычные значения. Из (7.5.61), (7.5.62) мы выводим уравнение неразрывности

$$F_{xy,t} = E_{y,x} - E_{x,y} = \mathrm{div}\,(E_y, -E_x). \tag{7.5.67}$$

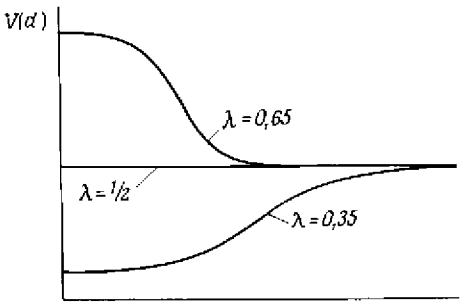


Рис. 7.18. Межвихревой потенциал как функция расстояния между вихрями.

Это уравнение и теорема расходимости (Гаусса — Остроградского) показывают, что заряд

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} F_{xy}d^2x \tag{7.5.68}$$

не зависит от времени, в предположении, что $|\mathbf{E}|$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ достаточно быстро. Это означает, что, если мы начинаем следить за развитием системы, находящейся, скажем, в состоянии с двумя вихрями, то мы увидим, что она будет эволюционировать во времени, переходя к состояниям из того же гомотопического класса. В разд. 7.2 мы рассмотрели силы взаимодействия между солитонами уравнения СГ. Сходный анализ может быть проведен для сил взаимодействия между вихрями. Джекобс и Ребби [1979] провели компьютерное исследование двухвихревого потенциала абелевой модели Хиггса (7.5.42) для различных значений λ. На рис. 7.18 показаны некоторые полученные ими результаты. Для специального случая $\lambda = 1/2$, когда уравнения могут быть редуцированы к (7.5.46)—(7.5.48), межчастичная сила оказывается нулевой и вихри не взаимодействуют. В этом случае могут возникать n-вихревые решения, такие как найденные при рассмотрении уравнений (7.5.56)—(7.5.57). Это значение λ разбивает множество значений λ на две различные области. Если $\lambda < 1/2$, то двухвихревой потенциал отрицательный

и силы оказываются притягивающими. Если же $\lambda > 1/2$, то потенциал положительный, а это приводит к силам отталкивания. Нетрудно видеть, что эта система (так же, как общее уравнение Клейна — Гордона с модифицированным калибровочным полем) имеет некоторые черты точно интегрируемых солитонных систем, которым посвящена эта книга. Однако здесь нет, по-видимому, ни бесконечной последовательности сохраняемых плотностей, ни преобразования Бэклунда. В разд. 7.9 мы вернемся к родственной системе, которая имеет как целочисленно заряженные кинки, так и преобразование Бэклунда.

7.6. Дислокация в кристаллах и параметры порядка

Когда металлический кристалл непрерывно деформируется силами сдвига, он отвечает на это скольжением одной плоскости атомов в кристалле вдоль другой. На рис. 7.19 схематически представлены две области такого металлического кристалла. Верхняя область скользит вдоль нижней области под действием силы сдвига в указанном направлении. Ведущий край верхней области и участки за ним скользят вдоль нижней области, в то время как участки, расположенные еще дальше назад от этого края, еще не начали скользить. Такое отставание приводит к деформации кристаллической решетки в локализованной области кристалла, в данном случае в плоской области, перпендикулярной к направлению сдвига, которая распространяется по кристаллу. Такой тип дислокации известен как *краевая дислокация*.

Можно построить очень простую модель этой ситуации, если считать, что нижняя область остается неподвижной, и ввести периодический потенциал, в котором атомы верхней области движутся. На рис. 7.20 показаны два слоя, непосредственно примыкающих к плоскости скольжения. Если шаг решетки в направлении плоскости скольжения обозначить через α, то возможный вид периодического потенциала, описывающего воздействие неподвижного нижнего слоя на k-й атом верхнего слоя, дается формулой

$$U(\varphi_k) = A\,(1 - \cos(2\pi\varphi_k/\alpha)), \tag{7.6.1}$$

где через φ_k обозначается отклонение k-го атома от его положения равновесия. Если силы между атомами в кристаллическом слое подобны тем, что возникают в линейной теории упругости с силовой константой β, как было рассмотрено в гл. 1 при изучении задачи ФПУ, то уравнение движения k-го атома имеет вид

$$m\ddot{\varphi}_k = -2\pi A\alpha^{-1}\sin(2\pi\varphi_k/\alpha) + \beta(\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}). \tag{7.6.2}$$

С помощью тривиального изменения масштабов уравнение (7.6.2) приводится к уравнению (7.1.4), описывающему механический маятник. Если сделать замены $\Phi_k = (2\pi\varphi_k/\alpha)$, $A = \alpha^2\bar{A}$, $\beta = \beta\alpha^{-2}$ и устремить α к нулю, то в пределе при переходе к непрерывному распределению атомов в решетке мы получим уравнение СГ

$$m\Phi_{,tt} = \bar{\alpha}\Phi_{,xx} - (2\pi)^2\,\bar{A}\sin\Phi. \tag{7.6.3}$$

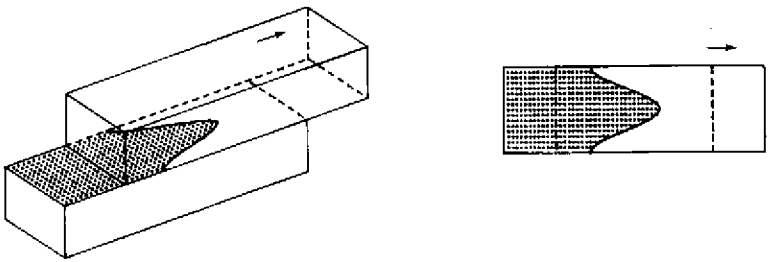


Рис. 7.19. Процесс скольжения.

Два состояния равновесия $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$ этой системы отвечают либо ситуации решеточной упорядоченности, либо сдвигу полуплоскости на одну позицию, как показано на рис. 7.19. Дислокация движется быстрой последовательностью «полускачков».

На этом примере мы ясно видим, как энергия упругости «накапливается» в таких дислокациях. Пользуясь уравнением (7.2.6) и гамильтонианом, соответствующим (7.6.3), мы находим, что

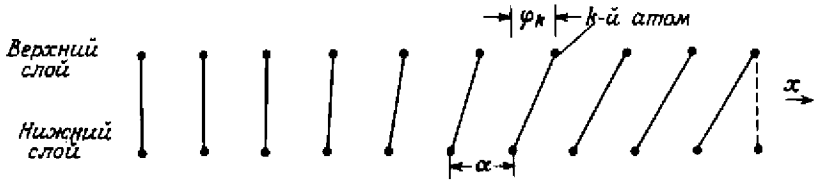


Рис. 7.20.

энергия, необходимая для создания статического односолитонного решения вида

$$\Psi = 4\,\mathrm{arctg}\,(\exp(2\pi x\,(\bar{A}/\bar{\beta})^{1/2})), \tag{7.6.4}$$

равна (в соответствии с уравнением (7.2.6), использующим гамильтониан, соответствующий уравнению (7.6.3))

$$E_{\min} = 4\pi^{-1}\,(\bar{A}\alpha)^{1/2}. \tag{7.6.5}$$

Интересно отметить, что, как было найдено из экспериментов, металлы с низким значением $E_{\min}$ оказываются более пластич-

ными. Это объясняется большей легкостью появления солитоноподобных дислокаций. Выше мы рассмотрели лишь краевые дислокации. Заметим для полноты, что в общем случае граница между скользящей и неподвижной областями в металлическом кристалле криволинейна, она называется *линией дефектов*. Энергия, накапливаемая в таких дефектах, пропорциональна длине дефекта, и мы получаем ситуацию, подобную той, что возникала в связи с поверхностным натяжением. Когда система развивается во времени, то она ведет себя таким образом, чтобы понизить свою энергию, а это обстоятельство способствует возникновению линейных дефектов, представляющих собой замкнутые кривые. Ситуация подобна той, что получается при образовании мыльных пузырей. Если задаться вопросом, как два таких линейных дефекта в кристалле взаимодействуют, то мы как раз и столкнемся с проблемой, для исследования которой важны те топологические понятия, которые мы здесь ввели.

Упорядоченная система, такая, как кристалл, позволяет нам в каждой точке области пространства, занятой системой, определить некоторую величину Ψ, называемую *параметром порядка*. Параметр порядка показывает степень организованности (упорядоченности) системы в окрестности заданной точки объема, занятого системой. В декартовых координатах мы описываем состояние системы функцией $\Psi\colon x \to \Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывной в некотором смысле; ее возможные значения образуют пространство, известное как *пространство параметров порядка* S_Ψ для этой системы.

Существует много различных способов определения параметра порядка, и конкретный выбор обычно зависит от того специального свойства физической системы, которое надлежит изучить. Говорят, что среда находится в *упорядоченном состоянии*, если функция Ψ принимает одно и то же значение во всех точках системы.

Функция Φ, введенная выше для описания непрерывного аналога дискретного кристалла, является параметром порядка для этой системы. Точно так же угол поворота φ континуальной модели механического маятника, рассмотренной в разд. 2, является параметром порядка. Однократная скрутка эластичной ленты или односолитонная дислокация в кристалле разделяют две области, в каждой из которых система находится в упорядоченном состоянии. Параметр порядка быстро меняется лишь в окрестности скрутки или линии дефекта. В каждом из этих двух случаев пространство параметра порядка представляет собой единичную окружность S^1. В случае ленты это утверждение справедливо, так как параметр порядка φ есть угол, в случае же краевой дислокации это является следствием периодической структуры кристаллической решетки. Легче всего это увидеть,

если рассмотреть какую-либо физическую величину, скажем плотность. Если $\rho_0(x)$ есть плотность совершенного, недеформированного одномерного кристаллического слоя и если шаг решетки равен α, то мы имеем

$$\rho_0(x+\alpha) = \rho_0(x). \tag{7.6.6}$$

Если плотность $\tilde{\rho}$ деформированного кристалла можно представить в виде

$$\tilde{\rho}(x) = \rho_0(x + \varphi(x)), \tag{7.6.7}$$

то φ является параметром порядка для системы, принимающим значение 0 в упорядоченном состоянии. Функция φ не является периодической, но, изменяя значение φ на величину, кратную шагу решетки α, мы получаем конфигурацию, неразличимую, если измерять лишь плотность, от той, когда она не изменялась вовсе. Преобразование (7.6.7) является элементом группы T сдвигов

$$T_L\colon\ x \to x + L, \quad (\overline{T}_L f)(x) = f(x+L). \tag{7.6.8}$$

Если $H_\alpha = \{\overline{T}_L \in T\colon L = n\alpha,\ n \in Z\}$ есть подгруппа сдвигов, кратных шагу решетки α, то пространство параметров порядка $S_\Phi = T/H_\alpha \cong S^1$.

Преимущество рассмотрения пространств, возникающих в качестве фактор-пространств, заключается в том, что они очень облегчают выделение подходящих гомотопических групп. А это в свою очередь помогает нам решать вопрос о существовании подобных кинкам решений. Большинство параметров порядка, которые обычно возникают в физике твердого тела, ассоциированы с группой преобразований G, действующих транзитивно на пространство параметров порядка. Для частного значения ψ параметра порядка мы определим H_ψ, *изотропную группу* для ψ, как подгруппу группы G, определенную формулой

$$H_\psi = \{g \in G\colon\ g\psi = \psi\}.$$

Вообще говоря, H_ψ не является нормальной подгруппой группы G. Поскольку G действует транзитивно на S_Ψ, то две любые изотропные группы изоморфны в силу существования внутреннего автоморфизма. Структура, которую мы обрисовали, позволяет нам трактовать S_Ψ как фактор-пространство G/H_ψ левых классов смежности H_ψ. Поэтому существование кинк-решений в физике твердого тела тесно связано со структурой гомотопических групп $\pi_n(G/H)$.

Существуют два физических явления, связанных с наличием упорядоченного состояния вещества, для изучения которых уравнения СГ особенно полезны. Это ферромагнетизм и сверхпроводимость. Явление ферромагнетизма будет рассмотрено в разд. 7.7.

В этом разделе, а также в разд. 7.8 мы рассмотрим явление сверхпроводимости. Вначале мы опишем физическое явление как таковое, а затем изложим классическую теорию Ландау и Гинзбурга, представленную в терминах комплекснозначного параметра порядка. Когда мы вернемся к дальнейшему обсуждению сверхпроводимости в разд. 7.8, мы коснемся вопроса о квантовомеханическом туннелировании и эффекте Джозефсона. Это позволит нам развить некоторые необходимые квантовомеханические понятия.

Сверхпроводимость

Сверхпроводящее состояние вещества представляет собой упорядоченную фазу, характеризуемую рядом различных замечательных свойств. Наиболее важные из этих явлений — бесконечная проводимость и эффект Мейсснера.

Бесконечная проводимость

Если некоторые металлы, такие как свинец, ртуть или ниобий, охлаждать, то при нескольких градусах выше абсолютного нуля, при вполне определенной температуре $T = T_c$, они внезапно теряют все следы электрического сопротивления. Электрический ток, однажды возникший в кольце из такого материала, будет циркулировать в нем бесконечно долго. Экспериментально нижняя граница времени затухания определена в 10^5 лет, но теоретически ток будет существовать по крайней мере $10^{10^{10}}$ лет, прежде чем исчезнуть из-за термодинамических флуктуаций, которые порождают при температуре ниже $T = T_c$ эффективное электрическое сопротивление. Интересно отметить, что те же самые термодинамические флуктуации при температуре выше $T = T_c$ могут привести к усилению эффекта сверхпроводимости. Такое перекрытие двух режимов вследствие флуктуационных эффектов является типичным для квантовых систем. Например, для ртути такое квантовомеханическое поведение ожидается при температуре 4.2 K, и при такой низкой температуре мы попадаем в область физики, которая очень далека от привычного нам мира. На такой неизведанной территории, в области субатомных частиц, квантовомеханические рассмотрения приобретают, очевидно, первостепенное значение, а обычные законы физики могут оказаться несостоятельными.

Эффект Мейсснера

Если металл охлаждается в присутствии постоянного магнитного поля H, то критическая температура оказывается зависящей от H, $T_c = T_c(H)$. На рис. 7.21 приведена экспериментально определенная форма кривой $T_c = T_c(H)$. Заметим, что если $H > H_c$, то даже температура $T = 0$ не вызовет переход в сверх-

проводящую фазу, и такие поля разрушают состояние сверхпроводимости.

Когда температура, уменьшаясь, подходит к критической температуре, магнитное поле, которое в нормальной фазе проникало в металл, начинает выталкиваться из сверхпроводящего образца. Это выталкивание поля из образца, когда он из нормальной фазы переходит в сверхпроводящую, называется *эффектом Мейсснера*. Оказывается, что поле не полностью вытесняется, а проникает в образец на некоторую глубину λ от поверхности материала. Величина λ называется *глубиной проникновения*. Типичное значение глубины проникновения около 10^{-5} см.

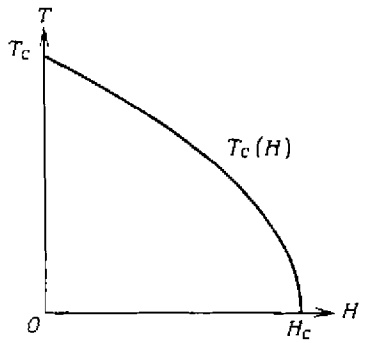


Рис. 7.21.

Сверхпроводящее состояние представляет определенную термодинамическую фазу, отмеченную скачкообразным изменением термодинамических величин, например свободной энергии, в условиях, когда температура пересекает критическую.

Существенным элементом большинства теорий, которые были предложены для объяснения специальных свойств сверхпроводящего состояния, является идея пар Купера, или сверхпроводящих электронов.

Пары Купера

Фундаментальным представлением в теории, развитой Бардиным, Купером и Шриффером, является тот факт, что свободные электроны проводимости в сверхпроводящем металле в результате взаимодействия с решеткой из ионных ядер могут образовывать связанные пары. Идея проста. Если мы рассмотрим два изолированных электрона, но обратим внимание вначале на один из электронов, образующих пару, мы увидим, что он будет притягивать положительные ионы. Облако из положительных ионов, окружающих первый электрон, будет тогда притягивать второй из электронов пары. Хотя интуитивно кажется, что эффект от такого притяжения будет малым, более глубокое рассмотрение показывает, что то, что представлялось незначительным экранирующим эффектом, порождает притягивающую силу. Эта сила взаимодействия приводит к образованию связанного состояния, т. е. к составному объекту, имеющему более низкую энергию, нежели каждая из его компонент в отдельности. Такой объект называется парой Купера либо, иногда, сверхпроводящим электроном. Это связанное состояние имеет двойной заряд электрона, примерно двойную массу электрона, и, что особенно важно, оно

не обладает внутренним (собственным) спином. Обыкновенному электрону приписывается внутреннее квантовое число, называемое спином, которое принимает значения $\pm 1/2$. Такие частицы со спинами называются *фермионами*, и фундаментальное свойство этих фермионов состоит в следующем. В агрегате, состоящем из многих фермионов, каждый фермион должен находиться в квантовом состоянии, отличном от других фермионов системы. Частицы с нулевым внутренним спином называются *бозонами*, и в агрегате из бозонов все составляющие могут обладать одной и той же квантовой конфигурацией. Фермионы подчиняются статистике Ферми, а бозоны — статистике Бозе. Связанная пара действует как бозон, поскольку если электроны в паре поменять местами, знак у волновой функции изменится дважды.

Пары Купера имеют пространственную протяженность порядка второй характеристической длины ξ, известной как *длина когерентности*. Для типичного сверхпроводника ξ приблизительно равно 10^{-4}, и отношение глубины проникновения к длине когерентности, известное как параметр Ландау — Гинзбурга, обычно меньше единицы. Два электрона в паре могут далеко отстоять друг от друга, и среднее расстояние между параметрами много меньше размера пары.

Вследствие межэлектронных сил притяжения, порожденных взаимодействием с ионной решеткой, электронный газ неустойчив к образованию пар Купера, и спаривание продолжается до тех пор, пока не будет достигнута некоторая точка равновесия. В результате бозонной природы пар образуется система, состоящая из крупномасштабного конденсата куперовских пар, большинство из которых находится в самом нижнем энергетическом состоянии. Теперь ясно, почему сверхпроводники так резко отличаются от нормальных металлов.

Одна из наиболее ранних и наиболее успешных феноменологических теорий, которая систематизировала экспериментальные факты, известные ко времени ее создания, была построена Ландау и Гинзбургом. Она явилась плодом замечательной физической интуиции; краткий набросок, который мы помещаем ниже, связан со многими интерпретациями, сделанными много позже момента, когда теория была построена в ее оригинальном варианте. Действительно, только в 1959 году Горьков смог связать эту в высшей степени плодотворную теорию непосредственно с микроскопической теорией.

Теория Ландау — Гинзбурга

Мы напомним, что в гл. 2 мы интерпретировали волновую функцию квантовой частицы как плотность вероятности. Такая интерпретация не является оригинальной интерпретацией Шрёдингера, а была позднее предложена Борном. Шрёдингер перво-

начально интерпретировал волновую функцию в терминах плотности заряда и плотности тока, задаваемых формулами $\rho = e\psi\psi^*$ и $\mathbf{j} = ie\hbar/2m\ (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$, которые он считал физической плотностью электрического заряда и электрическим током квантовомеханического электрона, описываемого волновой функцией ψ. Если бы такая интерпретация была бы правильной, то электрический ток породил бы электромагнитные поля, и система, такая, как атом водорода, испускала бы свет и, стало быть, была бы неустойчивой. Поскольку это в действительности не так, то реинтерпретация Борна оказалась существенной для успеха теории. Однако существует ситуация, для которой оригинальная точка зрения Шрёдингера разумна. Рассмотрим ситуацию, в которой большое число частиц, с необходимостью бозонов, находится в одинаковом состоянии, и пусть Φ — волновая функция, описывающая эту конфигурацию. В этой ситуации $|\Phi|^2$ можно интерпретировать как плотность частиц, и если каждая из них имеет заряд, равный q, то $q\,|\,\Phi\,|^2$ есть плотность электрического заряда. Это в точности та ситуация, которая возникает внутри сверхпроводника. Ландау и Гинзбург ввели в рассмотрение комплексную псевдоволновую функцию Φ как параметр порядка Бозе-конденсата из куперовских пар. Величина n, определенная равенством

$$n\,(x) = |\Phi\,(x)|^2, \tag{7.6.9}$$

интерпретируется, следуя исходной идее Шрёдингера, как локальная плотность сверхпроводящих электронов. Если материал состоит из областей, находящихся в нормальной фазе и в сверхпроводящей, то n обращается в нуль в области с нормальной фазой и принимает приблизительно постоянное значение в сверхпроводящей области. Сущность идеи Ландау — Гинзбурга заключается в том, что Φ медленно меняется в пространстве всюду, кроме областей, расположенных вблизи границ нормальных и сверхпроводящих зон. Эта идея реализуется предположением о том, что плотность свободной энергии сверхпроводящей фазы может быть разложена в ряд вида

$$f = f_0 + f_2\,|\,\Phi\,|^2 + f_4\,|\,\Phi|^4 + \frac{1}{2m^*}\,|\,(-ih\,\nabla\Phi - e^*\mathbf{A}\Phi)\,|^2, \tag{7.6.10}$$

где f_0 есть плотность свободной энергии нормальной фазы, величины f_i $(i = 2, 4)$ суть зависящие от температуры постоянные, m^* — эффективная масса пары Купера и $e^* = 2e$ — это ее заряд. Волновая функция сверхпроводящих электронов связана с электромагнитным полем, описываемым векторным потенциалом $\mathbf{A}$ калибровочно инвариантным образом, как это было сделано в разд. 7.5.

После изменения масштаба и добавления физически безразличной постоянной величины выражение (7.6.10) можно переписать в виде

$$f = (1/2)\sum_{a=1}^{3} | D_a\Phi |^2 + \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 1)^2, \qquad (7.6.11)$$

в котором мы немедленно распознаем статическую, $d = 3$, абелеву модель Хиггса разд. 7.5. Уравнения Ландау — Гинзбурга получаются минимизацией свободной энергии, так же как в предыдущем разделе минимизировалось действие в абелевой модели Хиггса. Уравнения полностью эквивалентны. В предыдущем разделе мы обнаружили, что модель Хиггса имеет вихревые решения. Силы между вихрями зависят от того, будет ли λ больше или меньше 1/2. Описанные свойства сверхпроводимости соответствуют системам, описывающим модели Хиггса с $\lambda < 1/2$, а сверхпроводники с такими свойствами называются сверхпроводниками I рода. Системы, которые отвечают моделям Хиггса с $\lambda > 1/2$, называются сверхпроводниками II рода.

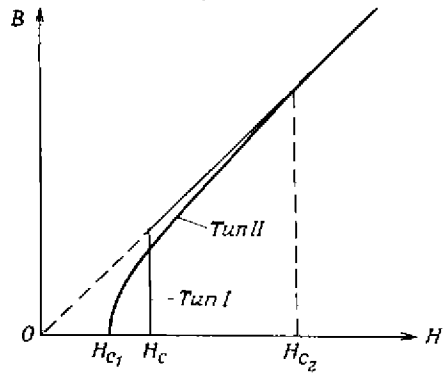


Рис. 7.22. Сверхпроводники I и II родов.

На рис. 7.22 показано различие в проникновении потоков магнитного поля внутрь сверхпроводников I и II родов. В обоих случаях поток в конечном итоге выталкивается, но для материала II рода выталкивание происходит не при каком-то определенном значении внешнего поля. Для сверхпроводника II рода существуют два критических значения внешнего поля: H_{c_1} и H_{c_2}. Когда величина поля возрастает, переходя H_{c_1}, поток начинает проникать в сверхпроводник. Однако в отличие от потока для материалов I рода, остающегося ламинарным, сверхпроводник II рода пронизывается большим числом вихревых трубок, которые регулярно располагаются в пространстве и образуют решетку. Индивидуальные вихревые трубки расположены порознь из-за их взаимного отталкивания, и суммарное число трубок определяется суммарным потоком, который, согласно (7.5.35), квантуется в N единиц потока. Каждая трубка несет в сверхпроводник квант потока. Этот нитевидный процесс продолжается до тех пор, пока H не становится равным H_{c_2} и внутреннее магнитное поле не согласуется с внешним, и тогда система приходит в свою нор-

мальную фазу. Для значений H, расположенных между H_{c_1} и H_{c_2}, система находится в промежуточной фазе или, как иногда говорят, в фазе Шубникова. Как показано Эссманом и Трюбле, решетка из вихрей — экспериментально наблюдаемая структура.

Поскольку вихри ассоциируются с топологическими аспектами уравнений, описывающих состояние сверхпроводимости, не удивительно, что они будут еще нам встречаться при исследовании смежных вопросов. В нашем следующем примере, относящемся к ферромагнетизму, снова появятся вихри, и многие замечания этого раздела окажутся уместными также и там.

7.7. Ферромагнетизм и солитоны

Кристалл магнетика может рассматриваться как решетка из магнитных диполей. В парамагнитном материале магнитные ионы, образующие решетку прежде, чем кристалл обнаружит магнитный момент, должны быть выравнены внешним магнитным полем. Для случая ферромагнитных материалов нет необходимости прилагать такое магнитное поле. Ферромагнитные кристаллы обладают магнитным дипольным моментом даже в отсутствие внешнего поля. Взаимодействия между магнитными ионами в ферромагнитном случае достаточно для того, чтобы индуцировать дальнодействующую упорядоченность элементарных диполей, которая необходима для воспроизведения макроскопического эффекта.

Ферромагнетик не всегда, однако, может обладать магнитным моментом и может нуждаться для этого в «намагничивании» приложенным полем. Для этого достаточно даже поля с очень низкой интенсивностью. Даже в том случае, когда внешнее магнитное поле удалено, постоянный магнитный момент сохраняется. Это результирующее намагничивание может быть разрушено механическим сотрясением или нагреванием.

При высоких температурах ферромагнитные вещества ведут себя как парамагнетики, которые спонтанно развивают постоянный магнитный момент при критической температуре, известной как температура Кюри T_c. Ниже температуры Кюри взаимное выстраивание происходит в большой области, в которой все диполи параллельны друг другу. Такие области известны как *ферромагнитные домены*. Вектор намагниченности меняется от одного домена к другому. Образуется несколько доменов (больше одного), поскольку это позволяет магнитной энергии кристалла существенно уменьшаться.

Границы, разделяющие эти области, известны как *стенки Блоха*. Мы увидим, что для некоторых конфигураций возможно движение этих границ, которое описывается уравнением СГ. Стенки Блоха представляют собой поверхности внутри ферро-

магнитной системы, на которых вектор намагниченности не может быть определен. Они являются сингулярными поверхностями, аналогичными линиям дефекта.

В континуальной модели мы рассмотрим решетку, пространственно распределенную в соответствии с некоторой функцией плотности. Вместо $\mathbf{m}_i$ — магнитного момента диполя с местоположением i в решетке — мы будем иметь дело с полем магнитного момента $\mathbf{m}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ — плотность магнитного момента в точке с координатой $\mathbf{x}$. Функция $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ представляет собой типичный параметр порядка. Вектор магнитного момента имеет постоянную длину

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = M^2 \tag{7.7.1}$$

для всех x, и, значит, пространство параметров порядка для этой системы совпадает с S^2.

Если бы каждый из магнитных моментов в кристалле был свободен и независим от других магнитных моментов, то его изменение во времени определялось бы только внешним магнитным полем. В интуитивной теории Ландау — Лифшица таких магнитных материалов влияние взаимодействия между различными диполями характеризуется «эффективным магнитным полем».

Обозначим плотность магнитной энергии в отсутствие внешнего поля через W. В случае, когда внешнее поле имеется, оно задается выражением

$$\overline{W} = W - \mathbf{H}\cdot\mathbf{m}, \tag{7.7.2}$$

где $\mathbf{H}$ есть интенсивность магнитного поля внутри кристалла.

Распределение моментов внутри кристалла определяется требованием, чтобы суммарная энергия $\overline{E}$, определенная формулой

$$\overline{E} = \int d^3\mathbf{x}\,\overline{W}, \tag{7.7.3}$$

была минимальной. Сохраняя $\mathbf{H}$ фиксированным и меняя $\mathbf{m}$, получим

$$\overline{\delta E} = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{\delta W}{\delta \mathbf{m}} - \mathbf{H}\right)\cdot\delta\mathbf{m} = 0. \tag{7.7.4}$$

Это уравнение показывает, что вектор $(\delta W/\delta\mathbf{m} - \mathbf{H})$ всегда параллелен $\mathbf{m}$. Это следует из того, что $\delta\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$, поскольку $\mathbf{m}$ — вектор постоянной длины. Магнитные диполи выстраиваются под действием поля $(\mathbf{H} - \delta W/\delta\mathbf{m})$, и это обстоятельство позволило Ландау и Лифшицу интерпретировать величину $(\mathbf{H} - \delta W/\delta\mathbf{m})$ как «эффективное магнитное поле», обозначаемое через $\mathbf{H}_{\text{eff}}$:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} - \left[\frac{\delta W}{\delta \mathbf{m}}\right]. \tag{7.7.5}$$

Если вращающий момент $\mathbf{\Gamma}$ элементарного магнитного момента пропорционален $\mathbf{H}_{\text{eff}}$,

$$\mathbf{\Gamma} = \gamma \mathbf{H}_{\text{eff}}, \tag{7.7.6}$$

то мы получаем уравнение движения

$$\mathbf{m}_{,t} = -\gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \wedge \mathbf{m}. \tag{7.7.7}$$

Макроскопическое поле $\mathbf{H}$ определяется уравнениями Максвелла магнитостатики внутри кристалла. Эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{m}) &= 0, \end{aligned} \tag{7.7.8}$$

и к ним нужно присоединить граничные условия. На границе между двумя различными средами 1 и 2 должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{1t} &= \mathbf{H}_{2t}, \\ (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{m})_{1n} &= (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{m})_{2n}, \end{aligned} \tag{7.7.9}$$

где нижние индексы t и n означают тангенциальную и нормальную компоненты вектора у границы.

Часто экспериментально обнаруживается, что ферромагнитные кристаллы легче намагничиваются вдоль одной оси, нежели другой. Такие оси называются *легкими осями*. Если мы ограничимся ситуацией, когда намагниченные слои располагаются перпендикулярно легкой оси, которую мы выберем в качестве z-оси, то мы можем пытаться искать решения, которые зависят только от горизонтальной x-координаты в слое. Аналогия между этим случаем и случаем краевой дислокации, рассмотренным в разд. 7.9, ясно прослеживается.

Для этого одномерного случая уравнения Максвелла (7.7.8) сводятся к следующей системе:

$$H_{y,x} = 0, \quad H_{z,x} = 0, \quad (H_x + 4\pi m_x)_{,x} = 0. \tag{7.7.10}$$

Если внешнее поле отсутствует, то решение этих уравнений, подчиненное граничным условиям (7.7.9) на поверхности кристалла, которая предполагается горизонтальной, имеет вид

$$H_x = -4\pi m_x, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0. \tag{7.7.11}$$

Это решение может быть переписано в виде

$$\mathbf{H} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} (2\pi m_x^2). \tag{7.7.12}$$

Используя этот результат, уравнения движения можно записать в виде

$$\mathbf{m}_{,t} = -\gamma \frac{\delta \overline{W}}{\delta \mathbf{m}} \wedge \mathbf{m}, \tag{7.7.13}$$

где

$$\overline{W} = W + 2\pi m_x^2$$

есть суммарная магнитная энергия. Мы будем называть уравнение (7.7.13) уравнением *Ландау — Лифшица*.

Рассмотрим ферромагнитный кристалл с легкой осью. В теории Ландау — Лифшица суммарная плотность магнитной энергии таких кристаллов W предполагается состоящей из двух вкладов, W_I и W_A:

$$W = W_I + W_A. \tag{7.7.14}$$

Вклад W_I вызван неоднородным распределением магнитных моментов внутри кристалла. Энергия на единицу объема, получающаяся из-за этой неоднородности, моделируется выражением

$$W_I = A\,[(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2]. \tag{7.7.15}$$

В одномерном случае это выражение превращается в

$$\tilde{W}_I = A\,(\mathbf{m}_{,x})^2. \tag{7.7.16}$$

Вклад W_A вызван существованием легкой оси. Если мы выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль легкой оси, то эта *энергия магнитной анизотропии* на единицу объема моделируется выражением

$$W_A = K\,(m_x^2 + m_y^2), \tag{7.7.17}$$

которое обращается в нуль, когда $\mathbf{m}$ направлен вдоль легкой оси. Поскольку вектор $\mathbf{m}$ имеет постоянную абсолютную величину, мы можем заменить W_A на

$$\tilde{W}_A = -Km_z^2. \tag{7.7.18}$$

Это добавляет лишь постоянный член к суммарной энергии системы и не оказывает влияния на уравнение Ландау — Лифщица (7.7.13).

Для одномерного случая плотность суммарной энергии дается равенством

$$\tilde{W} = [2\pi m_x^2 + A\,(m_{,x})^2 - Km_z^2]. \tag{7.7.19}$$

Подстановка этого выражения в уравнение Ландау — Лифшица приводит к уравнению движения для одномерной модели.

Перейдем к представлению $\mathbf{m}$ в полярных координатах:

$$\mathbf{m} = M\,(\sin\theta\cos\psi,\ \sin\theta\sin\psi,\ \cos\theta). \tag{7.7.20}$$

Это показано на рис. 7.23.

Уравнение Ландау — Лифшица (7.7.13) можно записать в виде

$$M \sin\theta\psi_{,t} = \gamma \frac{\delta\tilde{W}}{\delta\theta}, \qquad M \sin\theta\theta_{,t} = -\gamma \frac{\delta\tilde{W}}{\delta\psi}, \tag{7.7.21}$$

где $\tilde{W}$ принимает вид

$$\tilde{W} = 2\pi M^2 \sin^2\theta\cos^2\psi - K\cos^2\theta + A\,[\sin^2\theta\,(\psi,_x)^2 + (\theta,_x)^2]. \tag{7.7.22}$$

Окончательные уравнения имеют вид

$$\gamma^{-1}M\psi,_t \sin\theta = 4\pi M^2\cos^2\psi\cos\theta\sin\theta + 2K\sin\theta\cos\theta - 2A\theta,_{xx}, \qquad \gamma^{-1}M\theta,_t \sin\theta = 4\pi M^2\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi - 2A\,(\sin^2\theta\psi,_x),_x. \tag{7.7.23}$$

Теперь предположим, что

$$\psi = \pi/2 + \varepsilon, \tag{7.7.24}$$

где $\varepsilon \ll 1$ и ψ настолько медленно меняющаяся функция переменной x, что последним членом во втором уравнении (7.7.23) можно пренебречь. Уравнения (7.7.23) принимают тогда следующий приближенный вид:

$$M\gamma^{-1}\varepsilon,_t \sin\theta \sim K\sin 2\theta - 2A\theta,_{xx}, \qquad M\gamma^{-1}\theta,_t \sim 4\pi M^2\sin\theta\varepsilon. \tag{7.7.25}$$

Исключая ε, мы получим уравнение

$$\theta,_{tt} = -4\pi\gamma^2\,(K\sin 2\theta - 2A\theta,_{xx}). \tag{7.7.26}$$

После замен

$$\Phi = 2\theta,\ X = \left(\frac{A}{K}\right)^{-1/2} x, \qquad T = (8\pi\gamma^2 K)^{-1/2}\, t \tag{7.7.27}$$

уравнение (7.7.26) примет стандартную форму

$$\Phi,_{tt} - \Phi,_{xx} + \sin\Phi = 0 \tag{7.7.28}$$

уравнения СГ. Солитонные решения этого уравнения СГ представляют собой ферромагнитные доменные стенки с изменением ориентации на 180°. Солитоны интерполируют между двумя состояниями равновесия, отличающимися на угол, кратный 2π, определяемый топологическим зарядом решения. Следовательно, они описывают изменение намагниченности между доменами, ориентированными вверх и вниз. Одиночный солитон отвечает движущейся стенке между зонами

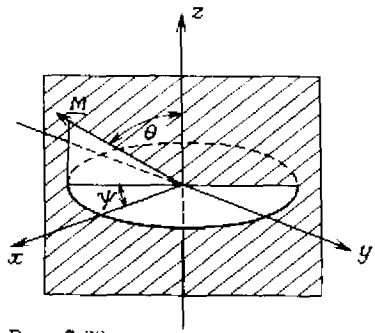


Рис. 7.23.

с намагниченностью «вверх» и «вниз». Солитон-антисолитонное решение и солитон-солитонное решение отвечают двум стенкам, разделяющим три домена: два домена с ориентацией «вверх» разделяются одним с ориентацией «вниз». Решение в форме бризера периодично во времени и представляет собой локализованное отклонение плотности намагниченности от направления, параллельного легкой оси (может быть выбрано одно из двух возможных направлений).

7.7.1. Изотропный ферромагнетик Гейзенберга

Уравнения Ландау — Лифшица определяют общий класс моделей, порожденных единственной функцией W. Изотропный ферромагнетик Гейзенберга определяется магнитной плотностью

$$W = A\,(\nabla \mathbf{m})^2 \tag{7.7.29}$$

с соответствующим уравнением Ландау — Лифшица

$$\mathbf{m}_{,t} = -\gamma A \mathbf{m} \wedge \Delta \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}^2 = M^2. \tag{7.7.30}$$

Подходящим образом изменяя масштаб переменных, мы можем это уравнение свести к следующему каноническому виду:

$$\mathbf{S}_{,t} = \mathbf{S} \wedge \Delta \mathbf{S}, \quad |\mathbf{S}|^2 = 1. \tag{7.7.31}$$

Уравнение (7.7.31) имеет форму, рассмотренную в разд. 7.4. Каждое решение определяет отображение $\tilde{S}^t\colon S^2 \to S^2$, имеющее в координатах вид

$$\tilde{S}^t\colon \hat{\mathbf{n}} \to \lim_{r\to\infty} \mathbf{S}(r\hat{\mathbf{n}},\ t), \quad (\hat{\mathbf{n}})^2 = 1, \tag{7.7.32}$$

аналогичное отображению, определенному на S^1 уравнением (7.4.20). Для такого отображения мы имеем топологически сохраняющийся заряд

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2} d\theta\, d\varphi \tilde{S}^t \cdot [\tilde{S}^t_{,\theta} \wedge \tilde{S}^t_{,\varphi}], \tag{7.7.33}$$

который не зависит от t.

Решения, которые согласуются с граничными условиями

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},\ t) \to \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{S}_0 \text{ постоянно, при } |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{7.7.34}$$

будут иметь нулевой заряд (7.7.33). Однако следует отметить, что такое граничное условие означает, что каждое решение $\mathbf{S}$ в действительности определяет отображение из S^3 (компактифицированное $\mathbb{R}^3$) в S^2. С этой точки зрения каждое решение (7.7.31) с граничным условием (7.7.34) можно связать с элементом группы $\pi_3(S^2)$. Поскольку $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$, можно определить целочисленный топологический заряд для таких решений, по характеру не-

локальный. Мы хотим лишь обратить внимание на то обстоятельство, что может существовать более одного топологического заряда, связанного с данной задачей.

Особенно интересным множеством решений (7.7.31) является множество статичных, не зависящих от времени решений. Эти решения удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{S} \wedge \Delta \mathbf{S} = 0. \tag{7.7.35}$$

Поскольку S имеет единичную длину, то получается, что

$$\Delta \mathbf{S} = \lambda(\mathbf{x})\,\mathbf{S}, \tag{7.7.36}$$

где $\lambda(\mathbf{x})$ — некоторая скалярная функция. Легко показать, что

$$\lambda(\mathbf{x}) = -\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}, \tag{7.7.37}$$

и уравнение (7.7.36) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta \mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S})\,\mathbf{S} = 0. \tag{7.7.38}$$

Решения этого уравнения могут классифицироваться в соответствии с их топологическим зарядом, определенным в (7.7.33). Элементы гомотопической группы $\pi_2(S^2)$ характеризуют возможные сингулярные точки в ферромагнетике, в которых не определен вектор магнитного момента.

В случае плоских спинов в плоскости (x, y) уравнения (7.7.30) принимают вид

$$\mathbf{S}_{,xx} + \mathbf{S}_{,yy} + (|\mathbf{S}_{,x}|^2 + |\mathbf{S}_{,y}|^2)\,\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} \in S^2. \tag{7.7.39}$$

Решением для этого плоского случая является функция S, отображающая $\mathbb{R}^2$ в S^2. Следуя теории, изложенной в разд. 7.3, мы можем для таких решений определить топологический заряд формулой

$$Q[\mathbf{S}] = \frac{1}{8\pi} \int\int \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{abc} S_{,\mu}{}^{a} S_{,\nu}{}^{b} S^{c}\, d^2x. \tag{7.7.40}$$

Уравнения (7.7.39) получаются минимизацией функционала

$$W[\mathbf{S}] = \int\int d^2x\,(|\mathbf{S}_{,x}|^2 + |\mathbf{S}_{,y}|^2), \tag{7.7.41}$$

подчиненного ограничению $|\mathbf{S}|^2 = 1$.

Следуя анализу вихрей из разд. 7.5, мы можем, применяя формулу (7.7.40), переписать $W[\mathbf{S}]$ в виде

$$W[\mathbf{S}] = \int\int d^2x \left((1/2) \sum_{\mu=1}^{2} |K_{\pm}^{\mu}|^2 \right) \mp 8\pi Q[\mathbf{S}], \tag{7.7.42}$$

где

$$K_{\pm}^{\mu a} = [S^{a}_{,\mu} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{abc} S^{b}_{,\nu} S^{c}]. \tag{7.7.43}$$

Это означает, что

$$W[\mathbf{S}] \geqslant 8\pi |Q[\mathbf{S}]| \tag{7.7.44}$$

и что функционал будет минимизирован в классе решений заряда N, когда

$$K_{\varepsilon}^{\mu a} = 0, \quad \varepsilon N < 0 \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{7.7.45}$$

Эти уравнения представляют собой прямой аналог уравнений (7.5.46)—(7.5.49). Решения уравнения (7.7.39), удовлетворяющие (7.7.45), также называются вихрями.

После введения параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin\theta\cos\Phi,\ \sin\theta\sin\Phi,\ \cos\theta) \tag{7.7.46}$$

уравнение (7.7.45) принимает вид

$$\Phi_{,\mu} = -\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\theta\varepsilon_{\mu\nu}\theta_{,\nu}. \tag{7.7.47}$$

Это уравнение может быть приведено к его простейшему виду, если отобразить сферу — образ отображения $\mathbf{S}$ — на комплексную плоскость. Если $\mathbf{S}$ удовлетворяет граничному условию

$$\mathbf{S} \to (0,\ 0,\ -1) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{7.7.48}$$

то наиболее удобный выбор комплексной переменной дается формулой

$$\omega = \mathrm{ctg}\,(\theta/2)\,e^{-i\Phi} = \omega_1 + i\omega_2, \tag{7.7.49}$$

и уравнение (7.7.47) сводится к линейному вида

$$\omega_{1,\mu} = -\varepsilon\varepsilon_{\mu\nu}\omega_{2,\nu} \tag{7.7.50}$$

и представляет собой попросту уравнения *Коши — Римана*.

Мы можем теперь выписать общее N-вихревое решение. Если мы определим

$$\xi = x + iey \tag{7.7.51}$$

и предположим, что существенные особенности отсутствуют, то общее решение (7.7.50) окажется равным

$$\omega(\xi) = \omega_0 \prod_i (\xi - \xi_i)^{n_i} \prod_j (\xi - \tilde{\xi}_j)^{-m_j} \quad (n_i,\ m_j > 0). \tag{7.7.52}$$

Точно так же, как в разд. 7.5, заряд, отвечающий $\omega(\xi)$, дается нулями функции $\omega(\xi)$, и смешанных вихревых-антивихревых состояний не существует. Если поля спинов, отвечающие $\omega(\xi)$, обозначить через $\mathbf{S}[\omega]$, то

$$Q[S[\omega]] = \sum_i n_i. \tag{7.7.53}$$

Для получения одновихревого поля выберем $\omega_1 = i\xi$ и найдем, что

$$\Phi = \varphi - \pi/2, \quad \theta = 2\,\mathrm{arcctg}\,\rho \tag{7.7.54}$$

с соответствующим вектором спина

$$\mathbf{S} = \left[\frac{2\rho}{1+\rho^2}\sin\varphi,\ -\frac{2\rho}{1+\rho^2}\cos\varphi,\ \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right]. \qquad (7.7.55)$$

На рис. 7.24а изображена спиновая компонента S_3. Мы видим, что поле спинов представляет собой упорядоченное состояние.

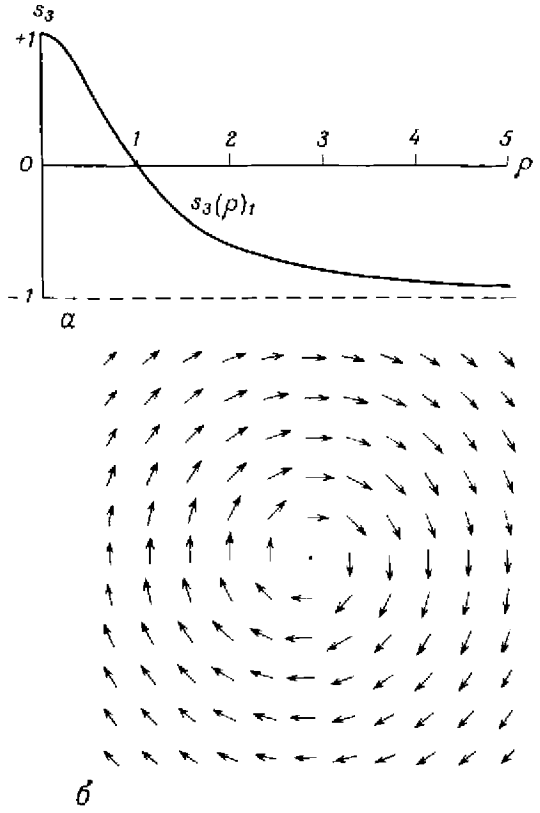


Рис. 7.24. а) Спиновая компонента S_3. б) Проекция векторного поля $\mathbf{S}$ на плоскость (x, y).

Оно перпендикулярно спиновой плоскости, за исключением круговой области в окрестности начала координат. Рис. 7.24б иллюстрирует поле направлений в плоскости (x, y), и видно, что поле имеет типичную вихревую структуру, уже знакомую по разд. 7.5.

Хотя уравнение (7.7.39) не является эволюционным, оно может быть связано с некоторой обратной задачей рассеяния нестандартного вида.

Если ввести комплексную переменную

$$\xi = x + iy, \tag{7.7.56}$$

то можно увидеть, что уравнение (7.7.39) вытекает из условий интегрируемости линейной задачи рассеяния

$$\psi_{,\xi} = (1-\gamma)(\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{,\xi}) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i} \psi, \tag{7.7.57}$$

$$\psi_{,\bar{\xi}} = (1-\gamma^{-1})(\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{,\bar{\xi}}) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i} \psi, \tag{7.7.58}$$

где через $\boldsymbol{\sigma}$ обозначаются матрицы Паули, определенные формулами

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.7.59}$$

а γ играет роль спектрального параметра. Техника решений, применяемая для анализа задач такого типа, выходит за рамки этой книги и является в настоящее время предметом многих исследований. Краткий обзор этой техники помещен в разд. 6.4. Мы еще вернемся к уравнениям (7.7.39) в конце этого раздела, где будет показано, что эти уравнения эквивалентны в некотором смысле евклидовой форме уравнений СГ.

7.7.2. Модель непрерывной цепочки Гейзенберга

Для одномерного пространства уравнение (7.7.31) принимает вид

$$\mathbf{S}_{,t} = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{,xx}, \quad |\mathbf{S}^2| = 1. \tag{7.7.60}$$

Эти уравнения вместе с граничными условиями

$$\mathbf{S}(x, t) \to \mathbf{S}_0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{7.7.61}$$

где $\mathbf{S}_0$ — постоянная, описывают модель *непрерывной спиновой цепочки Гейзенберга*. Поскольку $\pi_1(S^2) = 0$, то, казалось бы, есть основание подозревать, что у этого уравнения отсутствуют недиссипативные кинк-решения. Как мы увидим, это весьма далеко от истины. В связи с этим важно напомнить, что появление с очевидностью сохраняемых топологических величин, вообще говоря, влечет за собой существование кинк-решений, однако явное отсутствие таких величин все же не позволяет отрицать наличие кинк-решений.

Единичный вектор $\mathbf{S}$ можно параметризовать, как в (7.7.46):

$$\mathbf{S} = (\sin\theta(x, t)\cos\varphi(x, t), \sin\theta(x, t)\sin\varphi(x, t), \cos\theta(x, t)). \tag{7.7.62}$$

Для определения решений солитонного типа положим

$$\theta(x, t) = \theta(x - vt), \quad \varphi(x, t) = \Omega t + \hat{\varphi}(x - vt). \tag{7.7.63}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (7.7.60), (7.7.61) позволяет проинтегрировать получающиеся уравнения и найти, что

$$\hat{\Phi}_{,\chi} = v\,(1 + \sin\theta)^{-1}, \tag{7.7.64}$$

$$(\theta_{,\chi})^2 = 4\Omega\left[\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right]\left[\frac{1+\sin\theta}{2} - \frac{v^2}{4\Omega}\right], \tag{7.7.65}$$

где $\chi = (x - vt)$.

После стандартных тригонометрических преобразований уравнение (7.7.65) можно привести к более простому виду

$$(\beta_{,\chi})^2 = \Omega\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\,(\cos^2\beta - \cos^2\beta_0), \tag{7.7.66}$$



Рис. 7.25. S_3 из уравнения (7.7.69). Ось абсцисс совпадает с осью x, по оси ординат $\cos\theta$ (x).

где β и β_0 определены следующим образом:

$$\beta = \frac{1}{2}\theta, \quad \frac{v^2}{4\Omega} = \cos^2\beta_0 = 1 - b^2. \tag{7.7.67}$$

Уравнение (7.7.66) можно легко проинтегрировать, что даст

$$\sin\beta = b\,\mathrm{sech}\,(b\sqrt{\Omega}\,(\chi - x_0)). \tag{7.7.68}$$

Это приводит к решению

$$S_3 = \cos\theta = 1 - 2b^2\,\mathrm{sech}^2\,(b\sqrt{\Omega}\,(x - x_0 - vt)), \tag{7.7.69}$$

с помощью которого мы теперь можем проинтегрировать уравнение (7.7.64) и получить

$$\hat{\Phi}(x,\ t) = \varphi_0 + (1/2)\,v\,(x - x_0 - vt) + \\ + \mathrm{arctg}\left[\left(\frac{b^2}{1-b^2}\right)^{1/2}\mathrm{th}\,(b\sqrt{\Omega}\,(x - x_0 - vt))\right]. \tag{7.7.70}$$

На рис. 7.25 приведен график S_3 (χ). Это недиссипативное решение с конечной энергией

$$E = 4b\sqrt{\Omega}, \tag{7.7.71}$$

которое, следовательно, является кинк-решением для уравнения (7.7.60). Однако заметим, что оно подобно бризерному решению уравнения СГ, поскольку его энергия может быть произвольно мала в зависимости от величины Ω. Это означает, что лишь малой энергии достаточно для возбуждения такого решения.

На вопрос о том, будет ли это уравнение иметь солитонные решения, подобные рассматриваемым в этой книге, ответить довольно трудно. Тьёп и Райт [1977] провели численное исследование процесса столкновения двух таких кинк-решений. Столкновение представляется упругим, причем вначале два кинка взаимно проникают друг в друга, а затем вновь восстанавливаются как два отдельных кинка. По-видимому, излучения не происходит, но ясно обнаруживается сдвиг фазы.

Уравнения (7.7.60) и в самом деле входят в класс точно интегрируемых систем. Если мы определим матрицу S равенством

$$S = \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{7.7.72}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, т. е.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.7.73}$$

то уравнения (7.7.60) можно переписать в виде

$$S_{,t} = \tfrac{1}{2i}(S,\ S_{,xx}), \tag{7.7.74}$$

$$S^2 = I, \quad S^+ = S, \quad \operatorname{tr} S = 0. \tag{7.7.75}$$

Если взять $\mathbf{S}_0 = (0,\ 0,\ 1)$, то условие (7.7.61) переходит в следующее:

$$S(x,\ t) \to \sigma_z \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.7.76}$$

Уравнения (7.7.74) представляют собой условия интегрируемости обратной задачи рассеяния

$$\psi_{,x} = i\lambda S\psi, \tag{7.7.77}$$

$$\psi_{,t} = (\lambda S S_{,x} + 2i\lambda^2 S)\,\psi. \tag{7.7.78}$$

Эта обратная задача рассеяния допускает тот же подход, что и примененный к АКНС-системе в гл. 6. Для (7.7.77), (7.7.78) могут быть построены уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко и определены солитонные решения, включающие (7.7.69), (7.7.70).

Обратная задача рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\varphi_{,t} + \varphi_{,xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{7.7.79}$$

задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{,x} &= \left[i\lambda\sigma_z + \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\bar{\varphi} & 0 \end{pmatrix}\right]\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_{,t} &= \left[-i\begin{pmatrix} \varphi\bar{\varphi} & \bar{\varphi}_{,x} \\ \varphi_{,x} & -\varphi\bar{\varphi} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & 2\bar{\varphi} \\ -2\varphi & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda^2\sigma_z\right]\tilde{\psi}. \end{aligned} \tag{7.7.80}$$

Применяя преобразование вида

$$\psi = g(x, t)\,\tilde{\psi}, \tag{7.7.81}$$

где $g(x, t)$ — независящая от λ матрица, можно систему (7.7.77), (7.7.78) преобразовать к системе, имеющей вид (7.7.80). Таким образом, нелинейное уравнение Шредингера и уравнения линейной цепочки модели Гейзенберга являются в том смысле, как мы определили, эквивалентными. Преобразование вида (7.7.81) волновой функции задачи рассеяния известно как *калибровочное преобразование*. Две системы, связанные таким образом, называются *калибровочно эквивалентными*.

Другой уместный пример взаимоотношений такого типа касается уравнений Гейзенберга для ферромагнетиков. Задача рассеяния

$$\psi_\xi = \left[\zeta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \varphi_{,\xi} & 0 \\ 0 & -\varphi_\xi \end{pmatrix}\right]\psi, \tag{7.7.82}$$

$$\psi_{,\xi} = \zeta^{-1}\begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.7.83}$$

где $\xi = x + iy$, может быть ассоциирована с *эллиптическим уравнением СГ*

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 4\sin\varphi. \tag{7.7.84}$$

Пусть Ψ — фундаментальное матричное решение системы (7.7.82)—(7.7.83). Нетрудно показать, что Ψ можно выбрать принадлежащим $SU(2)$. Если мы определим матрицы g и Φ равенствами

$$g = \Psi(\zeta = 1), \quad \Psi = g\Phi, \tag{7.7.85}$$

то, производя простые вычисления, мы сможем показать, что Φ удовлетворяет уравнениям

$$\Phi_{,\xi} = (\zeta - 1)\, g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g\Phi, \tag{7.7.86}$$

$$\Phi_{,\xi} = (\zeta^{-1} - 1)\, g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} g\Phi. \tag{7.7.87}$$

Матрица S, определенная формулой

$$S = g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g, \tag{7.7.88}$$

обладает следующими свойствами:

$$SS_{,\xi} = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g, \tag{7.7.89}$$

$$SS_{,\xi} = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} g\Phi. \tag{7.7.90}$$

Если S выражается через матрицы Паули равенством $S = \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, то $SS_{,a} = iS \wedge S_{,a}\cdot\sigma (a = \xi, \bar{\xi})$, и с помощью формул (7.7.89) — (7.7.90) уравнения (7.7.86)—(7.7.87) можно переписать в виде

$$\Phi_{,\xi} = \frac{1}{2i}(1-\zeta)\,\mathbf{S}\wedge\mathbf{S}_{,\xi}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Phi, \tag{7.7.91}$$

$$\Phi_{,\bar{\xi}} = \frac{1}{2i}(1-\zeta^{-1})\,\mathbf{S}\wedge\mathbf{S}_{,\bar{\xi}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Phi. \tag{7.7.92}$$

А это как раз и есть уравнения Гейзенберга обратной задачи рассеяния для ферромагнетиков, ранее приведенные в виде (7.7.57), (7.7.58). Следовательно, у нас есть средство, позволяющее по решениям эллиптического уравнения СГ (7.7.84) конструировать решения для ферромагнетиков. Процедура очень похожа на ту, что была связана с преобразованием Бэклунда. Задавая вначале решение уравнения (7.7.84), можно решить уравнения (7.7.82), (7.7.83) при $\zeta = 1$ и построить фундаментальную матрицу. Если бы полное преобразование обратной задачи рассеяния оказалось бы пригодным для (7.7.82), (7.7.83), то, решая уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко, можно было бы одновременно получить солитон и матрицу g. К сожалению, для эллиптического случая необходимых для этого уравнений не существует. Однако если матрица g найдена, то построить $\mathbf{S}$ легко. Действительно, если записать

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \tag{7.7.93}$$

то из (7.7.88) получается, что

$$S_1 = i\,(a^*b - b^*a), \tag{7.7.94}$$

$$S_2 = (a^*b + b^*a), \tag{7.7.95}$$

$$S_3 = |a|^2 - |b|^2. \tag{7.7.96}$$

7.8. Квантовая механика и уравнение СГ в квантовой оптике

Во второй главе мы объясняли, что с каждым состоянием квантовой системы можно связать комплексную, интегрируемую с квадратом волновую функцию Ψ^t. Эта волновая функция развивается во времени в соответствии с зависящим от времени уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\Psi^t_{,\,t} = \hat{H}\Psi^t, \tag{7.8.1}$$

где $\hat{H}$ — это оператор, представляющий классический гамильтониан, или оператор энергии. Для удобства обозначений, если это не вызовет недоразумений, мы в дальнейшем будем опускать

индекс t у Ψ^t. Поскольку Ψ интегрируема с квадратом, мы будем интерпретировать вещественное число $|\Psi|^2$ как плотность вероятности, соответствующую квантовой конфигурации, описываемой волновой функцией Ψ. Несколько примеров таких нормированных функций были подробно разобраны в гл. 2, где оператор $\hat{H}$ задавался формулой

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\right). \tag{7.8.2}$$

Каждый оператор, представляющий измеряемую величину, например m_z, т. е. z-компоненту магнитного момента заряженной частицы, с необходимостью обладает свойством самосопряженности: $m_z = m_z^\dagger$. Например, z-компонента магнитного момента частицы с зарядом e, описываемой нерелятивистским гамильтонианом (7.8.2), может быть выбрана равной

$$\hat{m}_z = \frac{ie\hbar}{2m}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{e}{2m}\hat{J}_z. \tag{7.8.3}$$

Тем самым обеспечивается вещественность собственных значений такого оператора, и эти значения интерпретируются как возможные измеренные значения представленных величин. Каждый такой самосопряженный оператор называется *наблюдаемой величиной*. Квантовое состояния, представленное собственной функцией наблюдаемой величины $\hat{U}$, называется собственным состоянием величины (оператора) $\hat{U}$, и мы будем использовать одно и то же обозначение и для квантового состояния, и для ассоциированной с ним волновой функции.

Одно из основных предположений квантовой механики состоит в том, что собственные функции, ассоциированные с любой наблюдаемой величиной $\hat{U}$, образуют *полную систему*. Это означает, что любое квантовое состояние или любая волновая функция могут быть представлены в виде линейной комбинации конечного или бесконечного числа собственных функций. Например, предположим, что собственные значения λ_n образуют дискретный набор и что каждому собственному значению λ_n отвечает лишь одна нормируемая собственная функция, u_n, такая что

$$\hat{U}u_n = \lambda_n u_n. \tag{7.8.4}$$

Волновые функции u_n можно нормировать таким образом, чтобы они образовали ортонормированную систему функций относительно скалярного произведения $\langle u, v\rangle = \int u^*(x)\, v(x)\, dx$. Мы можем тогда записать

$$\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{nm}. \tag{7.8.5}$$

Полнота системы u_n означает, что любая волновая функция Ψ допускает разложение в виде линейной комбинации функций этой системы u_n:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n. \tag{7.8.6}$$

Из (7.8.5) следует, что коэффициенты a_n в (7.8.6) определяются формулами

$$a_n = \langle u_n, \Psi \rangle. \tag{7.8.7}$$

Если функция Ψ нормированная, то из (7.8.6) вытекает равенство Парсеваля

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2. \tag{7.8.8}$$

В итоге мы можем интерпретировать коэффициенты a_n из (7.8.7) как плотности вероятности. Величина $p_n = |a_n|^2$ может пониматься как вероятность того, что величина Ψ будет находиться в собственном состоянии u_n, т. е. как вероятность того, что наблюдаемая в эксперименте величина U даст при измерении результат λ_n. *Ожидаемое значение* наблюдаемой величины $\hat{U}$ в состоянии Ψ будет определяться равенством

$$\langle \hat{U} \rangle_\Psi = \langle \Psi, \hat{U}\Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \lambda_n. \tag{7.8.9}$$

Интерпретируя $|a_n|^2$ как вероятность получения значения λ_n при измерении величины U на системе, представленной волновой функцией Ψ, мы видим, что правая часть (7.8.9) как раз является статистически ожидаемым значением экспериментальной величины U, возможные значения λ_n которой имеют вероятности появления p_n. Вещественное число $\langle \hat{U} \rangle_\Psi$ — это наиболее точное описание квантового состояния с волновой функцией Ψ, которое можно получить, характеризуя его неким определенным значением наблюдаемой $\hat{U}$.

Произвольную волновую функцию Ψ можно разложить по не зависящим от времени волновым функциям φ_n:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n. \tag{7.8.10}$$

Подставляя это представление в зависящее от времени уравнение Шрёдингера, получим уравнения для меняющихся со временем коэффициентов a_n:

$$i\hbar a_{n,t} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{H}_{nm} a_m, \tag{7.8.11}$$

где матрица $\tilde{H}_{nm}$ задается соотношениями

$$\tilde{H}_{nm} = \langle u_n, \hat{H} u_m \rangle. \tag{7.8.12}$$

Это множество линейных уравнений для коэффициентов a_n является простой переформулировкой задачи для зависящего от времени уравнения Шрёдингера.

Ожидаемое значение наблюдаемой величины $\hat{A}$ в состоянии Ψ дается формулой

$$\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \sum_{nm} a_n^* a_m \langle u_n, \hat{A} u_m \rangle, \tag{7.8.13}$$

которую можно переписать в матричном виде

$$\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \mathrm{tr}\,(\rho \tilde{A}), \tag{7.8.14}$$

где ρ и $\tilde{A}$ суть две самосопряженные матрицы, определенные равенствами

$$\tilde{A}_{nm} = \langle u_n, \hat{A} u_m \rangle = \tilde{A}^\dagger_{nm}, \tag{7.8.15}$$

$$\rho_{nm} = a_n a_m^*. \tag{7.8.16}$$

Матрица ρ называется *матрицей плотности*, соответствующей состоянию Ψ. Поскольку Ψ нормирована, должно выполняться равенство

$$\mathrm{tr}\,\rho = 1. \tag{7.8.17}$$

Эволюция во времени коэффициентов a_n определяется уравнениями (7.8.11), откуда можно легко найти, что эволюция во времени матрицы плотности подчиняется уравнению

$$i\hbar \rho_{,t} = [\tilde{H}, \rho], \tag{7.8.18}$$

которое известно, как *уравнение Лиувилля* по аналогии с соответствующим уравнением классической механики. Для произвольной наблюдаемой величины уравнение Шрёдингера принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + [\tilde{H}, \tilde{A}], \tag{7.8.19}$$

для которого (7.8.18) является специальным случаем.

В качестве примера квантовой системы, которую можно свести к уравнению СГ, мы рассмотрим взаимодействие световой волны с газом. Атомы, составляющие газ, для целей нашего анализа могут пониматься как квантовые системы с двумя состояниями — основным состоянием и единственным возбужденным состоянием. Поэтому перед рассмотрением этой ситуации мы конкретизируем изложенный выше формализм для случая системы с двумя состояниями.

Квантовая система с двумя состояниями

Рассмотрим квантовую систему с двумя состояниями, описываемую гамильтонианом $\hat{H}_0$ с двумя собственными значениями энергии E_0 и E_1 и с соответствующими собственными функциями φ_0 и φ_1, так что

$$\hat{H}_0\varphi_0 = E_0\varphi_0, \quad \hat{H}_0\varphi_1 = E_1\varphi_1, \tag{7.8.20}$$

где $E_0 < E_1 = E_0 + \hbar\omega$. При включении взаимодействия с посторонней внешней средой (например, полем) гамильтониан изменится и станет равным

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I^t, \tag{7.8.21}$$

где $\hat{H}_I^t$ — вклад, связанный с дополнительной энергией взаимодействия и называемый *гамильтонианом взаимодействия*. Взаимодействие, которое может явно зависеть от времени, вызывает переход между двумя состояниями невозмущенной системы.

Для случая этой двумерной ситуации существует удобное векторное представление для уравнений Лиувилля. Его можно ввести следующим образом. Матрицы Паули, введенные в разд. 7.7 соотношениями (7.7.73), обладают следующими коммутационными свойствами:

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c. \tag{7.8.22}$$

Вместе с единичной матрицей I они образуют базис в векторном пространстве 2×2-матриц. Поэтому ρ и $\tilde{H}$ мы можем представить в виде

$$\rho = (1/2)\,(1 + \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad \tilde{H} = (1/2)\,\hbar\,(\omega_0 I + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{7.8.23}$$

где

$$\omega_0 = \operatorname{tr}\tilde{H}, \quad \rho = \operatorname{tr}(\rho\sigma), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\hbar}\operatorname{tr}(\tilde{H}\boldsymbol{\sigma}). \tag{7.8.24}$$

При выводе этих соотношений было принято во внимание равенство (7.8.17). Соотношение (7.8.18) для матрицы плотности переписывается в виде

$$(1/2)\,i\hbar\boldsymbol{\rho}_{,t}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{4}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}] = \frac{\hbar i}{2}(\boldsymbol{\rho}\wedge\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{7.8.25}$$

что можно представить в компактной форме

$$\boldsymbol{\rho}_{,t} = \boldsymbol{\rho}\wedge\boldsymbol{\omega}, \tag{7.8.26}$$

известной как *уравнения Блоха*; они подобны уравнениям Ландау—Лифшица разд. 7.7.

Для атома с двумя состояниями, взаимодействующего с внешним электрическим полем, оператор гамильтониана взаимодействия принимает вид

$$\hat{H}_I^t = -\mathbf{E}^t \cdot \hat{\mathbf{P}}, \tag{7.8.27}$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ — оператор диполя вида

$$\hat{\mathbf{P}} = -e\hat{\mathbf{x}}.$$

Если φ_0 и φ_1 — пара не зависящих от времени собственных функций оператора $\hat{H}_0$, фазы которых выбраны так, чтобы эти функции были вещественными, то матричное представление оператора $\mathbf{P}$ принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathscr{P}\sigma_x, \tag{7.8.28}$$

где

$$\mathscr{P} = -e \int \varphi_0 \hat{x} \varphi_1 \, d^3x. \tag{7.8.29}$$

Макроскопическая поляризация $\mathbf{p}$ этой системы с двумя состояниями дается формулой

$$\mathbf{p} = \operatorname{tr}(\rho\tilde{P}) = \mathscr{P} \operatorname{tr}(\rho\sigma_x) = \mathscr{P}\rho_1. \tag{7.8.30}$$

Матричное представление полного гамильтониана имеет вид

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 + \hbar\omega \end{pmatrix} - \mathbf{E}^t \cdot \mathscr{P}\sigma_x, \tag{7.8.31}$$

а соответствующее выражение ω в уравнениях Блоха представляется в виде

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{2}{\hbar}(\mathbf{E}^t \cdot \mathscr{P})\hat{i} - \omega\hat{k}. \tag{7.8.32}$$

Уравнения Блоха тогда принимают форму

$$\begin{aligned} \rho_{1,t} &= \omega\rho_2, \\ \rho_{2,t} &= -\omega\rho_1 + \frac{2}{\hbar}\mathbf{E}^t \cdot \mathscr{P}\rho_3, \\ \rho_{3,t} &= -\frac{2}{\hbar}\mathbf{E}^t \cdot \mathscr{P}\rho_2. \end{aligned} \tag{7.8.33}$$

К этой системе уравнений мы должны добавить уравнения Максвелла, которым подчиняется электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. В такой квазиклассической модели электрическое поле остается неквантованным, и уравнения электрического поля для плотности n_0, соответствующие газу с атомами в двух состояниях, имеют вид

$$\Delta\mathbf{E} - \mathbf{E}_{,tt} = 4\pi n_0 \mathbf{p}_{tt} = 4\pi n_0 \mathscr{P}\rho_{1,tt}. \tag{7.8.34}$$

Уравнения (7.8.33), (7.8.34) суть классические *уравнения Максвелла—Блоха*. Измененная в масштабе двумерная форма этих уравнений уже рассматривалась в разд. 9 гл. 1, где мы привели результаты численных экспериментов, показывающих, что они не представляют собой точно интегрируемую систему. Очевидно, что понадобится некоторая регуляризация, если мы захотим все же получить в точности интегрируемую систему, подобную уравнению СГ.

Обозначим через E^* меру напряженности электрического поля. Пусть $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{P}$ — векторы одного и того же направления $\hat{\mathbf{e}}$; тогда вся проблема сводится к одномерной и по пространственным переменным, и по времени. Определим безразмерные величины ε и $\overline{E}(x, t)$ равенствами

$$\varepsilon = \frac{E^* |\mathscr{P}|}{\hbar\omega}, \quad \overline{E}(x, t) = \frac{E \cdot \hat{e}}{E^*}. \tag{7.8.35}$$

Теперь мы можем переписать уравнения (7.8.33, 7.8.34) в виде

$$\begin{aligned} \overline{E}_{,xx} - \overline{E}_{,tt} &= -2\gamma\omega^2\varepsilon(\rho_1 - 2\varepsilon\overline{E}\rho_3), \\ \rho_{1,tt} + \omega^2\rho_1 &= 2\varepsilon\overline{E}\rho_3, \\ \rho_{3,t} &= -2\varepsilon\overline{E}\rho_2\omega = -2\varepsilon\overline{E}\rho_{1,t}; \end{aligned} \tag{7.8.36}$$

при этом мы предположили, что плотность газа мала, т. е.

$$\frac{2\pi}{E^*} |\mathscr{P}| n_0 = \varepsilon\gamma, \quad \gamma = 0(1).$$

В ситуации, когда $\varepsilon \ll 1$, мы можем решить эту систему уравнений методом многомасштабных растяжений. Определим медленные пространственную и временну́ю переменные равенствами

$$X = \varepsilon\omega x, \quad T = \varepsilon\omega t \tag{7.8.37}$$

и предположим, что для $\overline{E}(x, t)$, ρ_1 и ρ_3 справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} \overline{E}(x, t) &= E_0(x, t, X, T) + \varepsilon E_1(x, t, X, T) + O(\varepsilon^2), \\ \rho_1(x, t) &= \rho_{10}(x, t, X, T) + \varepsilon\rho_{11}(x, t, X, T) + O(\varepsilon^2), \\ \rho_3(x, t) &= \rho_{30}(x, t, X, T) + \varepsilon\rho_{31}(x, t, X, T) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{7.8.38}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (7.8.38), получим для членов порядка $O(\varepsilon^0)$ уравнения

$$E_{0,xx} - E_{0,tt} = 0, \tag{7.8.39}$$

$$\rho_{10,tt} + \omega^2\rho_{10} = 0, \tag{7.8.40}$$

$$\rho_{30,t} = 0, \tag{7.8.41}$$

а для членов порядка $O(\varepsilon)$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} E_{1,xx} - E_{1,tt} + 2\omega\,(E_{0,xX} - E_{0,tT}) &= -2\omega^2\gamma\rho_{10}, \\ \rho_{11,tt} + \omega^2\rho_{11} + 2\omega\rho_{10,tT} &= 2\omega^2 E_0\rho_{30}, \\ \rho_{31,t} + \omega\rho_{30,T} &= -2E_0\rho_{10,t}. \end{aligned} \tag{7.8.42}$$

В качестве решения уравнения (7.8.39) мы выберем бегущую волну

$$E_0 = \mathrm{Re}\,[e^{i\omega(x-t)}\varepsilon_0(X,\ T)], \tag{7.8.43}$$

а для уравнения (7.8.40) сделаем аналогичный выбор

$$\rho_{10} = \mathrm{Re}\,[e^{i\omega(x-t)}U_0(X,\ T)]. \tag{7.8.44}$$

Подставляя эти формы решений в (7.8.42) и исключая секулярные члены, получим

$$\begin{aligned} i\,(\varepsilon_{0,X} + \varepsilon_{0,T}) &= -\gamma U_0, \\ -iU_{0,T} &= \varepsilon_0\rho_{30}, \\ \rho_{30,T} &= -\frac{i}{2}(\varepsilon_0\overline{U}_0 - \bar{\varepsilon}_0 U_0). \end{aligned} \tag{7.8.45}$$

Если мы предположим, что ε_0 вещественное, и введем обозначения

$$U_0 = -iP, \quad \rho_{30} = -N, \tag{7.8.46}$$

где P и N вещественные, то уравнения (7.8.45) сведутся, далее, к виду

$$\varepsilon_{0,X} + \varepsilon_{0,T} = \gamma P, \tag{7.8.47}$$

$$P_T = \varepsilon_0 N, \tag{7.8.48}$$

$$N_T = -\varepsilon_0 P. \tag{7.8.49}$$

Из (7.8.48), (7.8.49) мы находим, что $(P^2 + N^2)_{,T} = 0$, и мы можем положить

$$P^2 + N^2 = 1 \tag{7.8.50}$$

Это позволяет нам параметризовать P и N:

$$P = \pm\sin\Phi, \quad N = \pm\cos\Phi. \tag{7.8.51}$$

Из (7.8.49) вытекает, что

$$\varepsilon_0(x,\ t) = \Phi_{,T}, \tag{7.8.52}$$

и подстановка (7.8.51), (7.8.52) в (7.8.47) дает

$$\Phi_{,XT} + \Phi_{,TT} = \pm\gamma\sin\Phi. \tag{7.8.53}$$

Если мы введем новые пространственную и временную переменные $\bar{x}$ и $\bar{t}$, определенные равенствами

$$\bar{x} = \sqrt{\gamma}\,(T - 2x), \quad \bar{t} = \sqrt{\gamma}T, \tag{7.8.54}$$

то эти уравнения примут стандартную форму

$$\Phi_{,xx} - \Phi_{tt} \pm \sin \Phi = 0 \qquad (7.8.55)$$

уравнения СГ. Дальнейшие подробности, касающиеся физики этого примера, будут помещены в гл. 9. В нашем втором примере мы снова вернемся к явлению сверхпроводимости. Сначала мы расширим рамки теории разд. 7.6 с тем, чтобы затем показать, что уравнение СГ снова возникает как модель распространения потока в линии передачи Джозефсона.

7.8.1. Нестационарная теория Ландау—Гинзбурга

В нестационарной теории сверхпроводимости Ландау—Гинзбурга куперовские пары находятся в одном и том же состоянии и описываются единой волновой функцией Φ, которая в этом случае удовлетворяет феноменологическому уравнению Шрёдингера в нестационарном виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})^2 \Phi + V(x)\Phi + \lambda\Phi |\Phi|^2. \qquad (7.8.56)$$

Функция $V(x)$ есть скалярный потенциал, а e^* и m^* суть заряд и масса куперовской пары. Величина $\mathbf{A}(x)$ обозначает векторный потенциал внешнего электромагнитного поля.

По аналогии с результатами для одномерного уравнения Шрёдингера, полученными в гл. 2, легко показать, что уравнение (7.8.56) можно записать в консервативном виде

$$\rho_{,t} = \nabla \cdot \mathbf{j}, \qquad (7.8.57)$$

где

$$\rho = e^* |\Phi|^2, \qquad (7.8.58)$$

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m^*} e^* (\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*) + \frac{(e^*)^2}{2m^*} |\Phi|^2 \mathbf{A}. \qquad (7.8.59)$$

Для нормированной волновой функции Φ скалярная величина $|\Phi|^2$ по-прежнему интерпретируется как нестационарное распределение куперовских пар в сверхпроводящем материале. Векторная величина $\mathbf{j}$ интерпретируется как вектор электрического тока, порожденный электромагнитным полем $\mathbf{H}$, удовлетворяющим уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \qquad (7.8.60)$$

Заметим, что это фактически приводит к модификации уравнений Максвелла, поскольку векторный потенциал $\mathbf{A}$ входит явно в выражение для тока $\mathbf{j}$.

Рассмотрим экспериментальную конфигурацию, в которой два сверхпроводника разделены барьером из изолирующего материала. На рис. 7.26 изображена эта ситуация. Обычно исполь-

зуют слои из свинца и ниобия, разделенные слоем из окиси ниобия. В гл. 2 мы видели, что квантовая частица имеет ненулевую вероятность просочиться через потенциальный барьер, который был бы непреодолим для соответствующей классической частицы. Это явление проникновения через барьер обычно называется *квантовым туннелированием*. Совершенно аналогичным образом куперовская пара может туннелировать через промежуточный

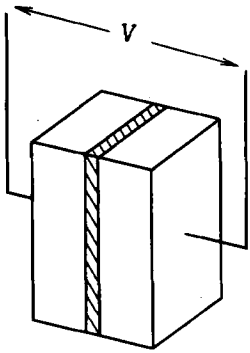


Рис. 7.26. Контакт Джозефсона, образованный двумя слоями сверхпроводника, разделенных барьером из несверхпроводящего материала.

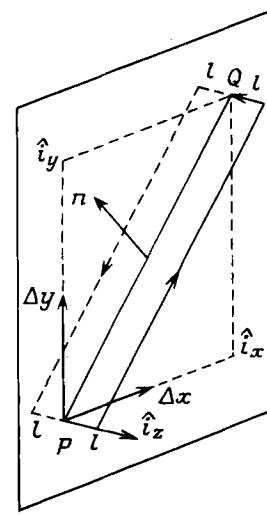


Рис. 7.27 (справа). Граница раздела.

слой, отделяющий два сверхпроводника. Это явление сверхпроводящего туннелирования было рассмотрено Джозефсоном в его докторской диссертации в Кембридже в 1962 г. Мы сейчас рассмотрим это явление в контексте теории Ландау—Гинзбурга.

Контакты Джозефсона

Прежде чем перейти к рассмотрению квантовой стороны вопроса, мы сначала подробно рассмотрим классические электромагнитные аспекты этой проблемы.

Если мы запишем

$$\Psi = \rho^{1/2} e^{i\Phi}, \tag{7.8.61}$$

то подстановка в (7.8.59) показывает, что сверхпроводящий электрический ток дается формулой

$$\mathbf{j} = -\frac{e^{*2}\rho}{m^*}\left[\mathbf{A} - \frac{\hbar}{e^*}\nabla\Phi\right], \tag{7.8.62}$$

которая может быть переписана в виде

$$\nabla\Phi = \frac{e^*}{\hbar}\left[A + \frac{m^*}{e^{*2}\rho}\,\mathbf{j}\right]. \tag{7.8.63}$$

Это выражение справедливо лишь для сверхпроводников. Если мы определим φ как изменение фазы волновой функции поперек барьера,

$$\varphi\,(x,\ y,\ t) = \Phi\,(x,\ y,\ 0^+,\ t) - \Phi\,(x,\ y,\ 0^-,\ t), \tag{7.8.64}$$

то следующие простые рассуждения показывают, что функция φ нетривиальна. На рис. 7.27 изображена граница раздела, взятая в качестве плоскости (x, y), P и Q — две произвольные точки в барьере. Интегрируя вдоль замкнутой кривой C, показанной на рис. 7.27, и предполагая, что l больше глубины проникновения, получаем

$$\varphi\,(\mathrm{Q}) - \varphi\,(\mathrm{P}) = \frac{e^*}{\hbar}\oint_C \left[\mathbf{A} + \frac{m^*}{e^{*2}\rho}\,\mathbf{j}\right] d\mathbf{r}, \tag{7.8.65}$$

где P и Q — две точки в непроводящем барьере с координатами $(x, y, 0)$ и $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$ соответственно. Получается, что

$$\varphi\,(\mathrm{Q}) - \varphi\,(\mathrm{P}) = \varphi_{,x}\,\Delta x + \varphi_{,y}\,\Delta y. \tag{7.8.66}$$

По теореме Стокса

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}, \tag{7.8.67}$$

где S — любая поверхность, имеющая своей границей кривую C. Выбирая в качестве S прямоугольник, показанный на рис. 7.27, мы легко находим, что

$$d\mathbf{S} = 2l\,(\hat{\mathbf{i}}_x \Delta x - \hat{\mathbf{i}}_y\,\Delta y), \tag{7.8.68}$$

и если мы предположим, что $\mathbf{B}$ постоянна вдоль плоскости, то получим, что

$$\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} \approx \Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} = (B_y\,\Delta x - B_x\,\Delta y)\,2l. \tag{7.8.69}$$

Устремляя Δx и Δy к нулю, мы получим систему уравнений

$$\varphi_{,x} = \frac{e^*}{\hbar}B_y\cdot 2l = \alpha B_y, \tag{7.8.70}$$

$$\varphi_{,y} = -\frac{e^*}{\hbar}B_x\cdot 2l = -\alpha B_x, \tag{7.8.71}$$

где

$$\alpha = \frac{2e^*l}{\hbar}. \tag{7.8.72}$$

Эти уравнения дают нам информацию о пространственном изменении φ, но мы хотели бы также знать, как эта величина меняется во времени и как она связана с сверхпроводящим током через барьер.

Для получения нужного нам соотношения мы будем следовать анализу Фейнмана, в котором эта ситуация моделируется квантовой системой с двумя состояниями. На рис. 7.28 представлена такая модель; эта конфигурация известна как переход (контакт) Джозефсона.

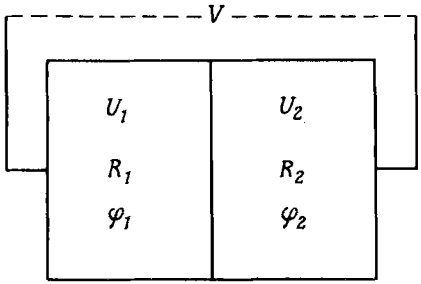


Рис. 7.28. Схема перехода Джозефсона, представленная двумя областями из одного и того же сверхпроводника, разделенных в начале координат тонким слоем диэлектрика.

В каждой из сверхпроводящих областей система описывается псевдоволновой функцией. В области 1 она обозначается через φ_1, а в области 2 — через φ_2. Если у нас имеется информация о потенциальном барьере, отвечающем непроводящему слою, то мы можем попытаться решить задачу рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера (7.8.56). Простая модель, рассмотренная Джозефсоном, относится к статической ситуации, когда волновые функции подчиняются стационарному нелинейному уравнению Шрёдингера в каждой из сверхпроводящих областей с потенциалом $V(x)$. Внутри непроводящего барьера волновая функция удовлетворяет обыкновенному уравнению Шрёдингера с отталкивающим потенциалом. Соответствующие уравнения Шрёдингера решаются в каждой из областей, а затем эти решения сшиваются на границе раздела так же, как это было сделано при решении элементарной задачи рассеяния в гл. 2. Однако вычисления довольно сложны, и подобные результаты проще получить, следуя интуитивным соображениям и используя аналогию между этой ситуацией и квантовой системой с двумя состояниями.

Предположим для простоты, что два сверхпроводника изготовлены из одного материала. Если бы две сверхпроводящих области не были связаны, то волновые функции в каждой области удовлетворяли бы нестационарному уравнению Шрёдингера вида

$$i\hbar\varphi_{i,t} = \hat{H}_0\varphi_i \qquad (i = 1, 2). \tag{7.8.73}$$

Предположим далее, что в каждой из областей 1 и 2 система находится в собственном энергетическом состоянии с энергиями U_1 и U_2 соответственно:

$$\hat{H}_0\varphi_i = U_i\varphi_i \qquad (i = 1, 2). \tag{7.8.74}$$

Каждый сверхпроводящий электрон заключен в своей области и не выходит за ее пределы, поэтому волновая функция φ_1 обращается в нуль в области 2, а волновая функция φ_2 обращается в нуль в области 1. Значения U_i представляют собой собственные энергии сверхпроводящих электронов в разделенных областях и потому не связаны между собой. Рассмотрим теперь ситуацию контакта Джозефсона, в которой непроводящий слой тонок и есть возможность квантового туннелирования. Волновая функция взаимодействующей системы теперь ненулевая в обеих областях. Собственные энергии больше не являются независимыми. Если имеется разность потенциалов V по разные стороны от контакта, то собственные энергии будут удовлетворять соотношению

$$U_2 - U_1 = e^*V. \tag{7.8.75}$$

Предположим, что наличие непроводящего слоя можно моделировать с помощью гамильтониана взаимодействия $\hat{H}_T$, известного как *гамильтониан туннелирования*. Тогда суммарная квантовая система описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_T. \tag{7.8.76}$$

Особенно простая модель получается, если предположить, что через барьер туннелирует одна куперовская пара. Такую модель мы получим, если будем рассматривать нашу систему как систему с двумя состояниями. Мы будем считать, что контакт может находиться в двух состояниях. В первом состоянии, описываемом волновой функцией φ_1, куперовская пара находится слева от барьера, во втором состоянии, описываемом волновой функцией φ_2, куперовская пара находится справа от барьера. Волновая функция, описывающая взаимодействующую систему, как следует из общей теории, развитой ранее, представляется в виде линейной комбинации этих двух основных состояний. Равенства (7.8.11) превращаются в систему

$$\begin{aligned} iha_{1,\,t} &= U_1a_1 + Ka_2, \\ iha_{2,\,t} &= U_2a_2 + Ka_1, \end{aligned} \tag{7.8.77}$$

где мы предположили, что

$$(\varphi_i,\ \hat{H}_T\varphi_j) = \delta_{ij}K. \tag{7.8.78}$$

Выбирая точку начала отсчета энергии посредине между U_1 и U_2, запишем уравнения в следующем симметричном виде:

$$\begin{aligned} i\hbar b_{1,\,t} &= {}^1\!/_2e^*Vb_1 + Kb_2, \\ i\hbar b_{2,\,t} &= -{}^1\!/_2e^*Vb_2 + Kb_1. \end{aligned} \tag{7.8.79}$$

Величины $|b_1|^2$ и $|b_2|^2$ являются вероятностями нахождения куперовской пары слева или справа от изолирующего слоя. Если мы

выберем фазы основных состояний φ_1 и φ_2 так, чтобы эти вероятности были вещественными, то мы сможем записать равенство

$$b_i = \sqrt{\rho_i}\, e^{i\theta_i}. \tag{7.8.80}$$

Обозначая разность фаз через φ, т. е.

$$\varphi = (\theta_2 - \theta_1), \tag{7.8.81}$$

и подставляя эти значения в (7.8.79), получим после отделения вещественной и мнимой частей следующую систему:

$$\rho_{1,t} = \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin\varphi, \tag{7.8.82}$$

$$\rho_{2,t} = \frac{1}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin\varphi, \tag{7.8.83}$$

$$\theta_{1,t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos\varphi - \frac{e^* V}{2\hbar}, \tag{7.8.84}$$

$$\theta_{2,t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos\varphi + \frac{e^* V}{2\hbar}. \tag{7.8.85}$$

Волновая функция в области R_i имеет вид

$$\psi_i = \sqrt{\rho_i}\, e^{i\theta_i} \varphi_i, \tag{7.8.86}$$

где каждая из базисных волновых функций φ_i нормирована единицей на R_i. Для каждой из областей справедлив закон сохранения (7.8.57), и поэтому интегрирование по области R_i позволяет получить следующий результат:

$$j_{iz} = \rho_{i,t}. \tag{7.8.87}$$

В реальном контакте Джозефсона функции ρ_1 и ρ_2 приблизительно совпадают с их общим значением ρ_0 и являются также приближенно постоянными во времени. На первый взгляд кажется, что это последнее свойство находится в противоречии с уравнениями (7.8.82)—(7.8.85). Однако это не так, поскольку не все характерные черты этой задачи были включены в уравнения. Из (7.8.87) мы видим, что $\rho_{1,t}$ есть сверхпроводящий ток из области 1. Этот ток вскоре зарядил бы область 2, если бы не то обстоятельство, что имеется внешняя батарея, обеспечивающая разность потенциалов через барьер. Ток, который течет в цепи батареи, не был принят во внимание, хотя именно благодаря ему ρ_1 и ρ_2 смогли достичь постоянного значения ρ_0. Из-за того, что мы не учли вклада дополнительной цепи, уравнения (7.8.84) показывают лишь, как плотности начнут изменяться и какой ток начнет течь в первый момент. Объединяя (7.8.82)—(7.8.85) и (7.8.87), мы получим окончательный результат для сверхпроводящего тока, проходящего через барьер:

$$j_{iz} = \bar{J} \sin\varphi, \tag{7.8.88}$$

где

$$\bar{J} = \frac{2K\rho_0}{\hbar}. \tag{7.8.89}$$

Внутри изолирующего слоя выполняются обычные уравнения Максвелла и появляется дополнительная плотность тока смещения

$$j_{dz} = c_s V_{,t}, \tag{7.8.90}$$

где c_s есть емкость на единицу площади контакта. Уравнение Максвелла (7.8.60) теперь приводится к виду

$$B_{y,x} - B_{x,y} = \mu_0 (j_{1z} + j_{dz}). \tag{7.8.91}$$

Вычитая из (7.8.85) выражение (7.8.84), получим наш окончательный результат:

$$\varphi_{,t} = \frac{e^*}{\hbar} V. \tag{7.8.92}$$

Если мы объединим теперь уравнения (7.8.70), (7.8.72), (7.8.88) и (7.8.92), то мы придем к известному уравнению

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} - \frac{1}{c^2}\varphi_{,tt} = \frac{1}{\beta^2}\sin\varphi, \tag{7.8.93}$$

где

$$\beta = (\hbar/\mu_0 e^* \bar{j} l)^{1/2}, \quad c = (\mu_0 c_s l)^{-1/2}. \tag{7.8.94}$$

Если переход, который мы рассматриваем, очень узкий в том смысле, что изменениями в y-направлении можно пренебречь, то это уравнение сводится к стандартному виду уравнения СГ с одной пространственной и одной временной переменными.

Односолитонное решение задается формулой

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp[\beta^{-1}\gamma (x - cvt)], \tag{7.8.95}$$

и соответствующее магнитное поле в y-направлении имеет вид

$$B_y = 2\gamma\alpha^{-1} \operatorname{sech}[\beta^{-1}\gamma (x - cvt)]. \tag{7.8.96}$$

Типичный импульс магнитного поля в форме гиперболического секанса распространяется вдоль перехода. Легко находится, что плотность тока j_{1z} равна

$$j_{1z} = -2\bar{j} \operatorname{sech}[\beta^{-1}\gamma (x - cvt)] \operatorname{th}[\beta^{-1}\gamma (x - cvt)]; \tag{7.8.97}$$

график этой функции при t = 0 изображен на рис. 7.29. Из (7.8.69) мы находим, что суммарный поток магнитного поля, проходящий через барьер, выражается формулой

$$\frac{h}{e^*}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{,x}\, dx = \frac{2\pi\hbar}{e^*}\mathcal{O}(\varphi). \tag{7.8.98}$$

Таким образом, мы видим, что поток «квантуется» на порции размером $2\pi\hbar/e^*$. Этот эффект впервые был предсказан Лондоном,

который, однако, предполагал, что заряд e^* есть заряд электрона. Когда же квантование потока было экспериментально продемонстрировано Дивером и Фэрбанком, квантовая единица оказалась равной половине ожидаемого значения. Теперь мы понимаем, что e^* есть заряд куперовской пары, равный $2e$. Таким образом, односолитонное решение (7.8.95) представляет отдельный квант потока вдоль перехода. Сходным образом, N-солитонные решения несут N единиц потока, и их часто называют *N-флюксонными решениями*. Решение (7.8.95) называется *флюксоном*. Иногда эти решения называют также *вихревыми решениями* по аналогии с соответствующими решениями типа II для сверхпроводников, упомянутыми в разд. 7.6.

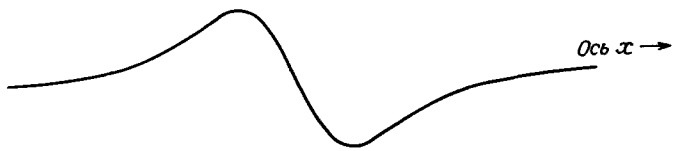


Рис. 7.29.

Рассмотренные выше солитонные решения относятся к стандартному типу решений с граничными условиями на бесконечности. Они менее пригодны для контакта Джозефсона, где граничные условия типа

$$\varphi_{,x}(0) = A, \quad \varphi_x(L) = B \tag{7.8.99}$$

лучше подходят для описания экспериментальных конфигураций. Они ведут к более общим эллиптическим решениям того типа, что описаны в разд. 7.2.

7.9. Неабелевы калибровочные поля, монополи и инстантоны

В разд. 7.5 мы видели, что введение калибровочных полей позволило нам построить нелинейные уравнения Клейна—Гордона с нетривиальными топологическими зарядами. Были найдены кинкподобные решения, такие, как вихри, которые, вообще говоря, солитонами в том смысле, как они понимаются в нашей книге, не являются. Такие существенные черты, как (1) существование бесконечного числа законов сохранения и (2) существование преобразования Бэклунда, у них отсутствуют. Для получения систем, которые обладают как целочисленно заряженными кинками, так и преобразованиями Бэклунда, мы должны повысить размерность пространства и обобщить понятие калибровочного поля.

7.9.1. Неабелевы калибровочные поля

В разд. 7.5 мы ввели в рассмотрение абелевы калибровочные поля, ассоциированные с группой $U(1)$ одномерных комплексных унитарных матриц. В качестве обобщения мы можем рассмотреть более общую группу унитарных матриц G, содержащуюся в общей линейной группе всех невырожденных комплексных $(n\times n)$-матриц $GL(n, C)$. Мы ограничимся рассмотрением групп унитарных матриц, параметризованных $p < n^2$ вещественными параметрами. Можно показать, что элементы g таких p-параметрических непрерывных групп матриц могут быть представлены в виде

$$g = \exp iL_A\alpha^A, \quad A = 1, \ldots, p, \quad \alpha^A \in \mathbb{R}, \tag{7.9.1}$$

где L_A $(A = 1, 2, \ldots, p)$ — множество p эрмитовых матриц, размера $n\times n$, которые удовлетворяют множеству коммутационных соотношений вида

$$[L_A, L_B] = iC_{ABC}L_C. \tag{7.9.2}$$

Параметры C_{ABC} суть постоянные характеристики p-параметрической группы, известные как *структурные постоянные* этой группы. Матрицы L_A называются образующими элементами группы, на них натянуто линейное векторное пространство $\mathbf{L}$. Из (7.9.2) следует, что коммутатор $[\ ,\ ]$ определяет отображение $\mathbf{L}\times\mathbf{L}\to\mathbf{L}$ и превращает $\mathbf{L}$ в алгебру, известную как *алгебра Ли* группы G.

Естественное скалярное произведение на $GL(n, C)$ определяется формулой

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B). \tag{7.9.3}$$

Часто оказывается возможным выбрать образующие L_A так, чтобы они были ортогональны относительно этого скалярного произведения, т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$\langle L_A, L_B\rangle = C_A\delta_{AB}, \tag{7.9.4}$$

где иногда удобно выбирать $C_A \neq 1$.

В случае, когда группа неабелева, существует естественное действие группы G на ее алгебре Ли $\mathbf{L}$, известное как сопряженное действие и определенное следующим образом:

$$\Phi \to {}_g\Phi = g\Phi g^{-1}. \tag{7.9.5}$$

Эта операция выбирается как обобщение (7.5.5), причем матрица Φ заменяет скалярное поле φ. Каждое из p скалярных полей, параметризующих Φ, преобразуется с помощью $(p\times p)$-матрицы, которая заменяет (1×1)-матрицу $\tilde{\beta}$. Преимущество такого выбора заключается в том, что норма $\|\Phi\|$, определенная формулой

$$\|\Phi\|^2 = \langle\Phi, \Phi\rangle, \tag{7.9.6}$$

инвариантна относительно сопряженного действия и обобщает инвариант $|\varphi|^2$ единственного скалярного поля φ. Заметим, однако, что возможны другие G-инвариантные комбинации полей Φ, по которым можно построить G-инвариантный потенциал. В случае d пространственных переменных наше обобщение (7.5.1), инвариантное относительно группы G, определяется действием

$$\mathscr{E}_\Phi = \frac{1}{2}\left[\sum_{a=1}^{d} \|\Phi_{,a}\|^2 + 2V(\|\Phi\|)\right]. \tag{7.9.7}$$

Преобразование (7.9.5) представляет собой обобщение *калибровочного преобразования*, а группу G называют *калибровочной группой*.

Рассмотрим теперь координатнозависимые калибровочные преобразования, определенные гладкими отображениями g: $\mathbb{R}^d \to G$, имеющими в координатах следующий вид:

$$g\colon\ x \to \exp\left[iL_A\beta^A(x)\right]. \tag{7.9.8}$$

Все функции β^A: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($A = 1, 2, \ldots, p$) гладкие.

Для того, чтобы сделать уравнения, соответствующие (7.9.7), инвариантными относительно этих координатнозависимых калибровочных преобразований, мы введем в рассмотрение d калибровочных полей A_a, принадлежащих $\mathbf{L}$, и построим ковариантную производную

$$D_a\Phi = (\Phi_{,a} - i[A_a, \Phi]), \tag{7.9.9}$$

следуя (7.5.8), но допуская выбор сопряженного действия на матрице Φ.

Действие калибровочной группы на калибровочных полях A_a определяется требованием того, чтобы $D_a\Phi$ преобразовывалось таким же образом, как Φ, а именно

$$(D_a\Phi)(x) \to ({}_gD_a\Phi)(x) = g(x)(D_a\Phi)(x)g^{-1}(x). \tag{7.9.10}$$

В результате получается преобразование

$$A_a(x) \to ({}_gA_a)(x) = g(x)A_a(x)g^{-1}(x) + ig(x)g^{-1}(x)_{,a}. \tag{7.9.11}$$

В абелевом случае полевой тензор F_{ab} был инвариантным, но в неабелевом случае он таковым не является и должен быть заменен соответствующей инвариантной комбинацией. Определим полевой тензор G_{ab} формулой

$$G_{ab} = F_{ab} - i[A_a, A_b]. \tag{7.9.12}$$

Тогда G_{ab} преобразуется так же, как Φ и $D_a\Phi$,

$$G_{ab}(x) \to ({}_gG_{ab})(x) = g(x)G_{ab}(x)g^{-1}(x), \tag{7.9.13}$$

и действие, по которому можно построить калибровочные модифицированные уравнения (если выбрать $C_A = 1$ ($A = 1, 2, \ldots, p$)), представляет собой функционал вида

$$\mathscr{E}_{\Phi, G} = \frac{1}{2}\left[\sum_{a=1}^{d} \| D_a \Phi \|^2 + \| G \|^2 + 2V(\| \Phi \|)\right], \qquad (7.9.14)$$

где $\|G\|^2$ есть инвариантная норма, определенная формулой

$$\| G \|^2 = \frac{1}{2} \sum_{ab} \langle G_{ab}, G_{ab} \rangle. \qquad (7.9.15)$$

Если скалярное поле отсутствует, то уравнения, отвечающие члену $(1/2)\|G\|^2$, являются обобщениями уравнений Максвелла и называются *уравнениями Янга—Миллса*:

$$D_a G_{ab} = 0. \qquad (7.9.16)$$

Если предположить, что потенциальная функция имеет конечное число нулей c_i ($i = 1, 2, \ldots, M$), то пространство решений с конечной энергией, обозначим его F, разбивается на M секторов A_i, определенных следующим образом:

$$A_i = \{(\Phi, A_a) \in F: \| \Phi \| \to c_i \quad \text{при} \quad \| x \| \to \infty\}. \qquad (7.9.17)$$

В каждом секторе функция $\|\Phi\|$ принимает своё асимптотическое значение на сфере в L радиуса c_i.

Поэтому если $\Phi \in A_i$, то можно определить отображение $\tilde{\Phi}$: $S^{d-1} \to S^{p-1}$ с помощью формулы

$$\tilde{\Phi}: \hat{n} \to \lim_{|x| \to \infty} \Phi(|x|\hat{n})\, c_i^{-1}. \qquad (7.9.18)$$

Существование топологического заряда определяется свойствами $\pi_{d-1}(S^{p-1})$.

7.9.2. SU (2)-инвариантные уравнения Клейна—Гордона

Для иллюстрации приведенной выше конструкции рассмотрим группу унитарных матриц 2×2 с определителем, равным $+1$. Такая группа называется группой $SU(2)$. Любая матрица, принадлежащая $SU(2)$, может быть параметризована парой комплексных чисел a и b и записана в виде

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \qquad (7.9.19)$$

откуда ясно, что $SU(2) \cong S^3$. Матрицы этого вида могут быть представлены формулой

$$g = \exp\,[iS_A \beta^A], \qquad (7.9.20)$$

где матрицы S_A ($A = 1, 2, 3$) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[S_A, S_B] = i\varepsilon_{ABC}S_C. \tag{7.9.21}$$

Множество эрмитовых матриц, удовлетворяющих этим соотношениям, таково, что $S_A = (1/2)\,\sigma_A$, где σ_A — матрицы Паули, определенные формулами

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.9.22}$$

Если мы запишем равенства

$$A_a = A_a{}^R S_R, \quad \Phi = \Phi^R S_R, \tag{7.9.23}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ и $\mathbf{A}_a$ вещественны, то $D\Phi$, G_{ab} и $\|\Phi\|$ можно будет выразить через вещественные векторы $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$ и $\mathbf{A}_a = (A_a^1, A_a^2, A_a^3)$. Применяя коммутационные соотношения (7.9.21), легко показать, что

$$D_a\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_{,a} + (\mathbf{A}_a \wedge \boldsymbol{\Phi}), \tag{7.9.24}$$

$$\mathbf{G}_{ab} = \mathbf{A}_{b,a} - \mathbf{A}_{a,b} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{A}_b, \tag{7.9.25}$$

$$\|\Phi\|^2 = (\Phi^1)^2 + (\Phi^2) + (\Phi^3)^2 = |\boldsymbol{\Phi}|^2, \tag{7.9.26}$$

где нормированное скалярное произведение на $\mathbf{L}$ есть $\langle a, b\rangle = 2\,\mathrm{tr}\,(a^+b)$ и $\langle S_A, S_B\rangle = \delta_{AB}$.

Размерность алгебры Ли равна $p = 3$, и, значит, поскольку $\pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$, то нетривиальный топологический заряд мы получим, если выберем $d = 3$. С таким выбором действие (7.9.14) может быть выражено через векторные поля равенством

$$\mathscr{E}_{\Phi, C} = \frac{1}{2}\left[\sum_{a=1}^{3} |(\boldsymbol{\Phi}_{,a} + \mathbf{A}_a \wedge \boldsymbol{\Phi})|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{ab} |(\mathbf{A}_{b,a} - \mathbf{A}_{a,b} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{A}_b)|^2 + 2V(|\Phi|)\right]. \tag{7.9.27}$$

Соответствующие этому действию полевые уравнения имеют вид

$$D_a^2\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi_i} V(\|\boldsymbol{\varphi}\|), \tag{7.9.28}$$

$$D_b\mathbf{G}_{ab} = -\boldsymbol{\varphi} \wedge D_a\boldsymbol{\varphi}. \tag{7.9.29}$$

Если мы выберем потенциальную функцию в виде (7.5.37), то полученные уравнения как раз являются уравнениями *неабелевой модели Хиггса* $SU(2)$.

Аналогом формулы (7.5.35) является следующая интегральная формула для топологического заряда:

$$N = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \langle \varepsilon_{abc} G_{ab},\ D_c \Phi \rangle\, d^3x. \tag{7.9.30}$$

Эта формула дает топологический заряд отображения $\tilde{\Phi}$: $S^2 \to S^2$, определенного в (7.9.18).

Для модели Хиггса $SU(2)$ мы можем, используя (7.9.30), переписать (7.9.14) в виде, аналогичном (7.5.43):

$$\mathscr{E}_{\Phi,\, G} = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} G_{bc} \mp D_a \Phi \right\|^2 + \frac{\lambda}{4} (\| \Phi \|^2 - 1)^2 \pm 4\pi \langle \varepsilon_{abc} G_{ab},\ D_c \Phi \rangle. \tag{7.9.31}$$

Отсюда мы находим, что

$$\int\limits_{R^3} d^3x \mathscr{E}_{\Phi,\, G} \geqslant 4\pi N, \tag{7.9.32}$$

причем равенство здесь имеет место только если $\lambda = 0$ и выполняются следующие уравнения:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} G_{bc} = -\varepsilon D_a \Phi, \quad \varepsilon N > 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{7.9.33}$$

Эти уравнения можно переписать следующим образом через векторы $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{A}_a$:

$$\mathbf{A}_{b,\, a} - \mathbf{A}_{a,\, b} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{A}_b = -\varepsilon \varepsilon_{abc} (\mathbf{\Phi}_{,\, a} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{\Phi}). \tag{7.9.34}$$

Существует несколько способов, с помощью которых можно найти частные решения этих уравнений. Мы предпочитаем применить для этой системы преобразование Бэклунда, поскольку с его помощью можно показать, что кинк-решения являются солитонами именно того типа, какие рассматриваются в нашей книге. Уравнения (7.9.33) известны как *уравнения Богомольного*.

7.9.3. Преобразования Бэклунда и решения-монополи

Мантон [1978] предложил параметризацию, относительно которой уравнения (7.9.34) принимают наиболее простую форму. Эта параметризация основана на переходе к цилиндрическим координатам, в соответствии с которыми

$$\mathbf{\Phi} = (0,\ \varphi_1,\ \varphi_2), \tag{7.9.35}$$

$$\mathbf{A}_\Phi = (0,\ \eta_1,\ \eta_2), \tag{7.9.36}$$

$$\mathbf{A}_z = (\omega_1,\ 0,\ 0), \tag{7.9.37}$$

$$\mathbf{A}_\rho = (\omega_2,\ 0,\ 0), \tag{7.9.38}$$

где $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, а η_a, φ_a и w_a являются функциями только от z и ρ. Полярные компоненты калибровочного поля связаны с декартовыми формулами

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_\rho \cos \varphi - \mathbf{A}_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho}, \tag{7.9.39}$$

$$\mathbf{A}_y = \mathbf{A}\rho \sin \varphi + \mathbf{A}_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho}, \tag{7.9.40}$$

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_z. \tag{7.9.41}$$

В этих переменных уравнения (7.9.34) принимают вид

$$\rho^{-1}(\mathbf{A}_{\varphi,\rho} + \mathbf{A}_\rho \wedge \mathbf{A}_\varphi) = -(\varphi_{,z} + \mathbf{A}_z \wedge \varphi), \tag{7.9.42}$$

$$\mathbf{A}_{z,\rho} - \mathbf{A}_{\rho,z} + \mathbf{A}_\rho \wedge \mathbf{A}_z = \rho^{-1}\mathbf{A}_\varphi \wedge \varphi, \tag{7.9.43}$$

$$\rho^{-1}(\mathbf{A}_{\varphi,z} - \mathbf{A}_\varphi \wedge \mathbf{A}_z) = (\varphi_{,\rho} + \mathbf{A}_\rho \wedge \varphi). \tag{7.9.44}$$

Подставляя выражения (7.9.35)—(7.9.38) в эти уравнения, мы получим следующую систему скалярных уравнений:

$$\varphi_{1,z} - w_1\varphi_2 = \rho^{-1}(\eta_{1,\rho} - w_2\eta_2), \tag{7.9.45}$$

$$\varphi_{2,z} + w_1\varphi_1 = \rho^{-1}(\eta_{2,\rho} + w_2\eta_1), \tag{7.9.46}$$

$$w_{1,\rho} - w_{2,z} = \rho^{-1}(\varphi_1\eta_2 - \varphi_2\eta_1), \tag{7.9.47}$$

$$\varphi_{1,\rho} - w_2\varphi_2 = -\rho^{-1}(\eta_{1,z} - w_1\eta_2), \tag{7.9.48}$$

$$\varphi_{2,\rho} + w_2\varphi_2 = -\rho^{-1}(\eta_{2,z} + w_1\eta_1) \tag{7.9.49}$$

Это позволяет нам определить важный подкласс решений уравнений (7.9.34), в который включены мультикинковые решения. Уравнения (7.9.45)—(7.9.49) могут быть далее сведены к единому комплексному уравнению, если ввести две вещественные функции f и ψ и параметризовать поля Мантона следующим образом:

$$\varphi_1 = f^{-1}\psi_{,z} = -w_1, \tag{7.9.50}$$

$$\varphi_2 = -f^{-1}f_{,z}, \tag{7.9.51}$$

$$\eta_1 = -\rho f^{-1}\psi_{,\rho} = \rho w_2, \tag{7.9.52}$$

$$\eta_2 = \rho f^{-1}f_{,\rho}. \tag{7.9.53}$$

Тогда можно показать, что комплексное поле E, определенное формулой

$$E = f + i\psi, \tag{7.9.54}$$

удовлетворяет единственному комплексному уравнению

$$\operatorname{Re} E(E_{,\rho\rho} + \rho^{-1}E_{,\rho} + E_{,zz}) + (E_\rho^2 + E_z^2). \tag{7.9.55}$$

Это и есть знаменитое *уравнение Эрнста*, которое дает другую формулировку задачи о статическом осесимметрическом гравитационном поле.

Для уравнения Эрнста можно определить преобразование Бэклунда тем же путем, как это было сделано в предыдущих главах. Ситуация здесь усложняется тем, что линейная задача рассеяния, отвечающая уравнению Эрнста, более запутана, чем для обыкновенной АКНС—ЗШ-системы.

Мы не будем заниматься выводом преобразования Бэклунда, а попросту покажем, как его можно применить для получения однокинкового решения уравнения Богомольного.

По заданному решению E^0 уравнения Эрнста (7.9.55) построим следующие выражения:

$$M_1^0 = (1/2) f_0^{-1} E^0_{,\zeta}, \tag{7.9.56}$$

$$M_2^0 = (1/2) f_0^{-1} \overline{E}^0_{,\zeta}, \tag{7.9.57}$$

$$N_1^0 = (1/2) f_0^{-1} \overline{E}^0_{,\bar{\zeta}} = \overline{M}_1^0, \tag{7.9.58}$$

$$N_2^0 = (1/2) f_0^{-1} E_{,\bar{\zeta}} = \overline{M}_2^0, \tag{7.9.59}$$

где ζ — комплексная переменная вида

$$\zeta = \rho + iz. \tag{7.9.60}$$

Если можно решить уравнение Риккати

$$q_{,\zeta} = -[(M_2^0 - M_1^0) q + \gamma(w)(M_2^0 - M_1^0 q^2)], \tag{7.9.61}$$

$$q_{,\bar{\zeta}} = -[(N_1^0 - N_2^0) q + \gamma^{-1}(w)(N_1^0 - N_2^0 q^2)], \tag{7.9.62}$$

где

$$\gamma(w) = [(w - i\bar{\zeta})(w + i\zeta)^{-1}]^{1/2} \tag{7.9.63}$$

а w — вещественное число, которое играет роль спектрального параметра для обратной задачи рассеяния, отвечающей уравнению Эрнста, то новое решение уравнения Эрнста дается формулами

$$M_1 = \left[\frac{\gamma + q}{1 + \gamma q}\right]\left[q^{-1} M_2^0 + \frac{\gamma}{4\rho}\right] = \overline{N}_1, \tag{7.9.64}$$

$$M_2 = \left[\frac{\gamma + q}{1 + \gamma q}\right]\left[q N_2^0 + \frac{1}{4\gamma\rho}\right] = \overline{N}_2. \tag{7.9.65}$$

Однокинковое решение можно построить, если исходить из начального решения вида

$$f = e^z, \quad \psi = 0, \tag{7.9.66}$$

которое соответствует тривиальному решению уравнения Богомольного

$$\Phi(0,\ 0,\ -1), \qquad \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{A}_z = \mathbf{A}_\rho = 0. \tag{7.9.67}$$

Уравнения Риккати (7.9.61), (7.9.62) принимают вид

$$q_{,\zeta} = \frac{i}{4}(1-q^2)\,\gamma(w), \tag{7.9.68}$$

$$q_{,\bar{\zeta}} = -\frac{i}{4}(1-q^2)\,\gamma^{-1}(w). \tag{7.9.69}$$

Объединяя их, получим уравнение

$$\frac{dq}{(1-q^2)} = \frac{1}{2}\,d\left[(w-i\bar{\zeta})^{1/2}(w+i\zeta)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\,dR, \quad R^2 = (w-z)^2+\rho^2, \tag{7.9.70}$$

которое легко проинтегрировать и получить для q выражение

$$q(\zeta,\bar{\zeta}) = \operatorname{th}((1/2)R + K), \tag{7.9.71}$$

где K — постоянная. Если мы выберем $K = 0$, то мы получим следующие выражения для M_1 и N_2 из равенств (7.9.64), (7.9.65):

$$M_1 = \left[\frac{\gamma+\operatorname{th}(R/2)}{1+\gamma\operatorname{th}(R/2)}\right]\left[-\frac{i}{4}\operatorname{cth}(R/2)+\gamma/4\rho\right], \tag{7.9.72}$$

$$N_2 = \left[\frac{\gamma+\operatorname{th}(R/2)}{1+\gamma\operatorname{th}(R/2)}\right]\left[\frac{i}{4}\operatorname{th}(R/2)+\frac{1}{4\gamma\rho}\right]. \tag{7.9.73}$$

Поля Мантона связаны с M_1 и N_2 формулами

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = 2(M_1 - N_2), \tag{7.9.74}$$

$$\eta_2 + i\eta_1 = 2\rho(M_1 + N_2). \tag{7.9.75}$$

Используя тот факт, что

$$\gamma(w) = \frac{1}{R}[(w-z) - i\rho], \tag{7.9.76}$$

и формулу двойного угла для гиперболической функции, мы получим, что

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{i}{2}\left[\frac{w-z+R\operatorname{th}(R/2)-i\rho}{R+(w-z)\operatorname{th}(R/2)-i\rho\operatorname{th}(R/2)}\right]\left[\operatorname{cth}R - \frac{1}{R}\right]. \tag{7.9.77}$$

Из последней формулы определяются φ_1 и φ_2.

Вследствие специального вида уравнений Богомольного можно показать, что заряд N выражается только через поля φ_i в виде

$$N = \frac{1}{8\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{|x|=r} dS\cdot\nabla(\varphi_1^2+\varphi_2^2). \tag{7.9.78}$$

Из формулы (7.9.77) мы находим, что

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2 = \left[\operatorname{cth}R - \frac{1}{R}\right]^2, \tag{7.9.79}$$

и на рис. 7.30 показана зависимость этой функции от R. Подстановка этой функции в (7.9.78) и несложные вычисления показывают, что мы имеем решение с $N = 1$. Аналогично случаю уравнения СГ принцип нелинейной суперпозиции можно построить по уравнениям Риккати (7.9.68), (7.9.69) и использовать его для нахождения точных решений уравнения Эрнста. Указанный принцип суперпозиции и то обстоятельство, что однокинковое решение мы уже определили, позволяет найти точные N-кинковые решения. Эти функции выглядят исключительно сложно, но в принципе их найти не труднее, чем N-солитонные решения уравнения СГ.

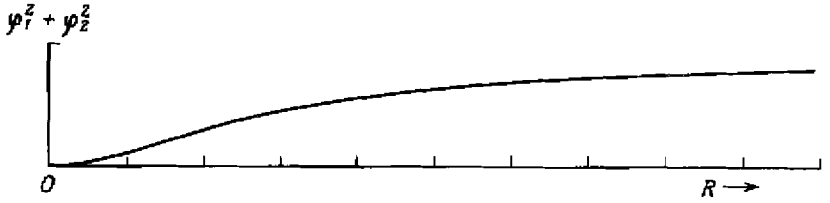


Рис. 7.30.

Эти кинк-решения известны как *монополи*, поскольку они аналогичны сингулярным решениям уравнений Максвелла, отвечающим изолированным магнитным зарядам.

7.9.4. Автодуальные уравнения Янга—Миллса и инстантоны

Для последней модели с ее решениями-монополями в формуле (7.9.31) $\lambda = 0$, так что точная форма потенциала не отражается на решении. В действительности мы не решали настоящее уравнение Клейна—Гордона. Поле Φ появилось почти таким же образом, как калибровочные поля A_a, поэтому естественно спросить, не существует ли формулировки, в которой оба эти поля в точности однотипны? Оказывается, что так оно и есть.

Рассмотрим чистую SU(2)-теорию Янга—Миллса в R^4 и остановимся на решениях, которые независимы от координаты x_4. Полевой тензор $G_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, 4$) в трехмерном подпространстве с координатами (x_1, x_2, x_3) имеет компоненты $\mathbf{G}_{ab}$ ($a, b = 1, 2, 3$), задаваемые формулами

$$\mathbf{G}_{ab} = \mathbf{A}_{b,a} - \mathbf{A}_{a,b} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{A}_b, \tag{7.9.80}$$

а в случае $\mu = 4$ компоненты имеют вид

$$\mathbf{G}_{4a} = \mathbf{A}_{a,4} - \mathbf{A}_{4,a} - \mathbf{A}_4 \wedge \mathbf{A}_a = -D_a\mathbf{A}_4, \tag{7.9.81}$$

тогда как $\mathbf{A}_{a,4} = 0$. Свободные уравнения Янга—Миллса выражаются следующим образом:

$$\mathbf{G}_{\mu\nu,\,\nu} + \mathbf{A}_\nu \wedge \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0. \tag{7.9.82}$$

Они распадаются на два набора уравнений:

$$\mathbf{G}_{ab,\,b} + \mathbf{A}_b \wedge \mathbf{G}_{ab} = -\mathbf{A}_4 \wedge D_a\mathbf{A}_4, \tag{7.9.83}$$

$$\mathbf{G}_{4a,\,a} + \mathbf{A}_a \wedge \mathbf{G}_{4a} = 0. \tag{7.9.84}$$

Если мы положим

$$\mathbf{\Phi} = -\mathbf{A}_4, \tag{7.9.85}$$

то увидим, что эти уравнения представляют собой не что иное, как уравнения (7.9.28), (7.9.29) с $V = 0$. Это означает, что на самом деле монополи являются решениями четырехмерных уравнений Янга—Миллса. Поэтому мы можем предположить, что у этих уравнений существуют более общие кинкоподобные решения. На самом деле так и есть, и можно построить точные N-кинковые решения этих уравнений, называемые либо *инстантонами*, либо *псевдочастицами*. Мы не собираемся обсуждать здесь вопрос о том, почему такие инстантонные решения столь важны в физике частиц, но можем лишь сказать, что они относятся к явлениям, анализ которых невозможен в рамках обычной теории возмущений. Завершим это короткое знакомство с «солитонами» физики частиц объяснением того, что топологические понятия, которые мы так широко применяли, могут помочь нам определить инстантонные решения для уравнений Янга—Миллса. Потребуем, чтобы для решений уравнений Янга—Миллса с конечной энергией выполнялось соотношение

$$\|G\| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.9.86}$$

Как и в случае вихрей, это требование не означает, что калибровочные поля A_μ должны быть асимптотически тривиальными, но только лишь то, что они должны асимптотически быть чистыми калибровочными преобразованиями вида

$$A_\mu = ig(x)\,g^{-1}(x)_{,\,\mu} + O(|x|^{-3-\varepsilon}), \qquad |x| \to \infty. \tag{7.9.87}$$

Этим определяется отображение g: $S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ ($\cong S^3$ из (7.9.19)), которое имеет целый топологический заряд. Для этого заряда можно указать интегральную формулу, аналогичную формулам (7.5.35) и (7.9.30):

$$N = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{R^4} d^4x \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\mu\nu}, \tag{7.9.88}$$

где тензор $\tilde{\mathbf{G}}_{\mu,\,\nu}$ определяется формулой

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\mathbf{G}_{\sigma\tau}. \tag{7.9.89}$$

и называется дуальным полевым тензором. Этот результат позволяет записать функционал действия в виде

$$\mathscr{E}_G = \frac{1}{8}|\mathrm{G}_{\mu\nu} \pm \tilde{\mathrm{G}}_{\mu\nu}|^2 \mp \frac{1}{4}\mathrm{G}_{\mu\nu}\tilde{\mathrm{G}}_{\mu\nu}, \tag{7.9.90}$$

и мы получим оценку

$$\int d^4x \mathscr{E}_G \geqslant \pm\pi^2 N. \tag{7.9.91}$$

Эта оценка является точной в том и только в том случае, когда

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} = \tilde{\mathrm{G}}_{\mu\nu}, \quad \varepsilon N > 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{7.9.92}$$

Эти уравнения известны как *автодуальные уравнения Янга—Миллса.*

Если мы ищем решение с единичным зарядом, то оно будет иметь асимптотическое поведение (7.9.87), где g: $S^3 \to SU(2)$ с единичным зарядом. Тождественное отображение I: $S^3 \to SU(2) \cong S^3$ определяется формулой

$$I(x) = \frac{x_4 + i\sigma\cdot\mathbf{x}}{r}, \qquad r^2 = x_4^2 + |\mathbf{x}|^2, \tag{7.9.93}$$

и имеет единичный заряд. Это подсказывает, что решение нужно искать в виде

$$A_\mu = if(r)\, I(x)\, (I^{-1}(x))_{,\mu}, \tag{7.9.94}$$

содержащем единственную функцию $f(r)$. Из (7.9.94) следует, что векторы $\mathbf{A}_\mu$ имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = (x_4, -x_3, x_2)\, a(r), \tag{7.9.95}$$

$$\mathbf{A}_2 = (x_3, x_4, -x_1)\, a(r), \tag{7.9.96}$$

$$\mathbf{A}_3 = (-x_2, x_1, x_4)\, a(r), \tag{7.9.97}$$

$$\mathbf{A}_4 = (-x_1, -x_2, -x_3)\, a(r), \tag{7.9.98}$$

где

$$a(r) = 2f(r)\, r^{-2}. \tag{7.9.99}$$

Подстановка этих выражений в (7.9.92) с $\varepsilon = 1$ дает уравнение

$$\frac{1}{4}a'(r) = -a^2(r), \tag{7.9.100}$$

интегрирование которого приводит к результату

$$a(r) = \frac{2}{(r^2 + c)}, \tag{7.9.101}$$

где c — произвольная постоянная. Окончательная форма для A_μ принимает тогда вид

$$A_\mu = \frac{ir^2}{r^2 + c}\, I(x)\, (I^{-1}(x))_{,\mu}. \tag{7.9.102}$$

Это решение представляет собой знаменитое *одноинстантонное решение Белавина, Полякова, Тяпкина и Шварца* (БПТШ).

Исследуя и обобщая структуру векторных уравнений (7.9.95)—(7.9.98), можно построить и более общие решения. Эти уравнения записываются в виде

$$\mathbf{A}_\nu = -\eta_{\mu\nu} x^\mu a(r), \tag{7.9.103}$$

где постоянные векторы $\eta_{\mu\nu}$ определены самими уравнениями (7.9.103) и носят название *матриц Хуфта*. Если ввести параметризацию

$$\mathbf{A}_\nu = -\tilde{\eta}_{\mu\nu} \partial^\mu \ln \varphi, \tag{7.9.104}$$

где коэффициенты $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ определяются выражением

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = [(-1)^{\delta_{\mu 4} + \delta_{\nu 4}}] \eta_{\mu\nu}, \tag{7.9.105}$$

то формулы (7.9.95)—(7.9.98) заменяются следующими:

$$\mathbf{A}_1 = (\varphi_{,4},\ \varphi_{,3},\ -\varphi_{,2})\ \varphi^{-1}, \tag{7.9.106}$$

$$\mathbf{A}_2 = (-\varphi_{,3},\ \varphi_{,4},\ \varphi_{,1})\ \varphi^{-1}, \tag{7.9.107}$$

$$\mathbf{A}_3 = (\varphi_{,2},\ -\varphi_{,1},\ \varphi_{,4})\ \varphi^{-1}, \tag{7.9.108}$$

$$\mathbf{A}_4 = (-\varphi_{,1},\ -\varphi_{,2},\ -\varphi_{,3})\ \varphi^{-1}. \tag{7.9.109}$$

Прямая подстановка показывает, что (7.9.106)—(7.9.109) определяют решение в том случае, если φ удовлетворяет линейному волновому уравнению

$$\Box \varphi = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} + \varphi_{,44} = 0. \tag{7.9.110}$$

Если мы хотим, чтобы решение зависело только от r, то уравнение для такого решения мы сможем свести к виду

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = 0. \tag{7.9.111}$$

Сингулярное решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = c_0 + c_1 r^{-2}, \tag{7.9.112}$$

и можно показать, что решение, отвечающее такому выбору, является инстантоном с зарядом, равным 1, калибровочно эквивалентным БПТШ-решению.

Более общее решение уравнения (7.9.110), получающееся из принципа суперпозиции для линейных уравнений, представляется в виде

$${}_k\Phi = c_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{|(x - x_j)|^2}, \tag{7.9.113}$$

где x_i — произвольное множество точек в $\mathbb{R}^4$. Можно показать, что поле, отвечающее ${}_k\Phi$, имеет заряд, равный k, и является *k-инстантонным решением*.

В этой главе мы попытались дать представление о том, каким образом кинк-решения возникли и продолжают возникать в различных областях физики и техники. Особенно подробно мы остановились на уравнении СГ. Этот случай особенно важен, поскольку оно часто встречается в приложениях и поскольку, как было обнаружено в предыдущих разделах, оно обладает свойством полной интегрируемости. Однако следует помнить, что мы в основном рассматривали уравнение СГ с тривиальными граничными условиями и в координатах светового конуса. В обычных лабораторных координатах, на конечном интервале и с граничными условиями, подобными указанным в (7.8.99), изложенная выше теория мало что дает.

Особое ударение было сделано на существовании топологически сохраняемых величин, поскольку благодаря им можно, с одной стороны, распознавать потенциально интегрируемые уравнения, а с другой — конструировать точные кинк-решения.

Наши примеры были выбраны из широкого круга физических теорий, но это никоим образом не исчерпывает всех существующих возможностей. В последующих главах изучение некоторых из этих примеров будет продолжено и, кроме того, будут рассмотрены новые приложения уравнения СГ в метеорологии.

7.10. Примечания

Раздел 7.1

1. Механическую модель легко сконструировать, и она не должна быть особенно тщательно изготовленной, чтобы на ней можно было продемонстрировать поведение кинка. Кусок резинки-«лапши» с прямоугольным сечением, который можно приобрести в магазинах, где продаются материалы для детского технического творчества, может служить подходящей «закручивающейся пружиной». Достаточно куска длиной в два фута ($\approx$60 см). По всей длине резинки воткните в нее булавки с большими головками, которые обычно используют в картографии, с интервалом в полдюйма ($\approx$1 см), так, чтобы они располагались с одной стороны резинки. Теперь вы имеете наглядное пособие, которое может быть использовано и для демонстраций в классе, и для индивидуальных экспериментов.

2. Элементарный обзор по гомотопической теории, подходящий для студентов-математиков, может быть найден, например, в книгах Хокинга и Янга [1961] или Крума [1978]. Книг, ориентированных на физика или инженера, очень мало, и мы рекомен-

дуем вместо них статьи Мермина [1979] и Мичела [1980]. Более подготовленному читателю обычно рекомендуют руководства Спанье [1966] и Хилтона [1966]. К наиболее ранним статьям, в которых была указана связь между топологическими понятиями и «частицеподобными» характеристиками, относятся работы Скирма [1958] и Финкелстайна с соавторами (Финкелстайн и Мизнер [1959], Финкелстайн [1966], Финкелстайн и Рубинстайн [1968], Финкелстайн и Вейль [1978]). Большинство из этих статей может быть легко и с пользой прочтено студентами старших курсов.

3. Дальнейшие подробности, относящиеся к механическому маятнику, читатель может найти в работах Скотта [1969, 1970] или в более поздних исследованиях Фултона [1977].

4. Элементарное изложение теории эллиптических функций, пригодное для студентов-математиков, можно найти в учебнике Уиттекера и Ватсона [1962], а с более современной точки зрения — в монографии Ленга [1973]. Для физиков и инженеров полезна книга Берда и Фредмана [1954]. Специальные решения типа $\varphi^t = 4 \operatorname{arctg} [f(x)\, g(x)]$ были впервые подробно рассмотрены Лэмом [1971] и недавно обобщены Констабиле и др. [1978].

Раздел 7.2

1. Первые статьи, в которых подробно были рассмотрены столкновительные и частицеподобные свойства солитонов уравнения СГ, принадлежали Перрингу и Скирму [1962] и Рубинстайну [1970].

Раздел 7.3

1. Наш подход к понятию топологического заряда в этом разделе следует неопубликованной работе Патани и др. [1976] и статье Арафуне и др. [1975]. Дальнейшие математические результаты можно найти в книгах Милнора [1965] и Гийемина и Поллака [1974]. Гомотопические группы для сфер вычислены и могут быть найдены в книге Тоды [1962].

2. Одна из тем, которую мы не рассматривали в основном тексте, относится к *спину*. Мы показали в этом разделе, что множество всех отображений φ: $R^n \to X$, обладающих свойством $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to x$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$, может быть разделено на множество классов эквивалентности Q_μ гомотопически эквивалентных путей. Природа множества индексов μ зависит, разумеется, от X, и набор гомотопических классов Q_μ образует n-ю гомотопическую группу $\pi_n(X, x)$. Если, например, $X = S^n$, то можно показать, что $\pi_n(S^n) = Z$, где Z — аддитивная группа целых чисел, и гомотопические классы можно пометить элементами из Z,

так что мы обозначим их через Q_n. Функции, принадлежащие классу Q_n, все имеют степень m. В случае $n = 1$ они соответствуют m скруткам на угол 2π.

Предположим, что $n = 3$, и мы рассматриваем поля, определенные на обычном евклидовом пространстве. Если уравнения, которым удовлетворяет поле, инвариантны относительно группы вращений на $\mathbb{R}^3$, то мы ожидаем, что множество решений уравнения будет отображаться в себя под действием таких преобразований. Поскольку вращение на угол 2π вокруг какой-нибудь оси в $\mathbb{R}^3$ не изменяет $\mathbb{R}^3$, то естественно предположить, что в результате индуцированного действия на поле, отвечающего такому вращению на угол 2π, поле также не изменится. Поле имеет спин, равный 1/2, если под действием такого 2π-вращения оно не остается неизменным, но меняет свой знак. Очевидно, что вращение на угол 4π вернет поле к исходному состоянию. Если φ принадлежит гомотопическому классу Q, то при рассмотрении 1-параметрической группы вращений вокруг одной оси мы получим 1-параметрическое семейство функций в Q, отвечающих действию элемента этой группы на φ. Поскольку угол, увеличиваясь, меняется от 0 до 2π, то поле проходит путь в Q, который начинается с φ и заканчивается $-\varphi$. Теперь становится ясным, что существование полей со спином 1/2 в данной модели связано с первой гомотопической группой $\pi_1(Q)$ классов эквивалентности $\pi_n(X)$. Для заданной теории поля, обладающей кинк-решениями, условимся говорить, что теория «допускает спин», если существуют пути, начинающиеся и заканчивающиеся в некоторой точке $\varphi \in Q$, отвечающие повороту на угол 2π вокруг некоторой оси и не принадлежащие к одному и тому же гомотопическому классу. Это означает, что $\pi_1(Q)$ должна содержать элемент порядка 2, но одного этого условия недостаточно, поскольку этот элемент, кроме того, должен отвечать вращению на угол 2π. За деталями, относящимися к вычислению $\pi_1(Q)$, мы можем отослать к статье Уильямса и др. (Уильямс [1970], Уильямс и Звенгровски [1977]).

Раздел 7.4

1. В этом разделе мы следуем лекциям Колемана [1977]. Несколько более строгую трактовку некоторых аспектов этих лекций можно найти в книге Джаффе и Тобза [1980].

2. Для классического нелинейного уравнения Клейна—Гордона основные состояния даются решениями уравнения $U'(\varphi) = 0$. В окрестности любого заданного решения η этого уравнения уравнение Клейна—Гордона можно линеаризовать. Когда система квантуется, эта линейная теория поля описывает элементарные возбуждения около основного состояния φ, определенные выражением $\langle\varphi\rangle = \eta$, где скобки означают среднее значение в вакууме.

В классической модели мы вводим новое поле χ, определенное формулой $\varphi = \eta + \chi$, и полевые уравнения принимают вид $(\Box\chi + U''(\eta)\chi) = O(\chi^2)$. Величина $U''(\eta)$ теперь заменяет m в этой локальной форме уравнения Клейна—Гордона, и она отождествляется с квадратом массы соответствующего элементарного возбуждения. Если Φ — многокомпонентное поле, то мы получим *матрицу массы* $M_{ab} = \partial^2 U/\partial\varphi_a\partial\varphi_b$, и ее собственные значения определяют квадраты масс элементарных возбуждений. В этом случае мы получаем *спектр масс*. Если потенциал U инвариантен относительно внутренней группы симметрии G, то применение преобразования $g \in G$, вообще говоря, изменит основное состояние на другое основное состояние $g\eta$. В квантовом случае вакуумное состояние не инвариантно относительно группы G. Состояния элементарных частиц, которые отвечают линеаризации около η, известны как *бозоны Хиггса*, и их спектр масс не проявляет симметрии G. Однако если мы определим подгруппу H_η группы G формулой $H_\eta = \{h \in G: h\eta = \eta\}$, то спектр масс бозонов Хиггса будет иметь симметрию H. Симметрию G называют *нарушенной симметрией*, и механизм этого нарушения заключается в том, что основное состояние системы может оказаться не инвариантным относительно G, несмотря на то что гамильтониан, описывающий фундаментальные взаимодействия, такой инвариантностью обладает. В этом отличие такого нарушения от механизма нарушения симметрии добавлением к гамильтониану членов, описывающих взаимодействие и не инвариантных относительно G (исходный гамильтониан симметрией G обладал). Такой механизм известен как *спонтанное нарушение симметрии*. Элементарное описание этого явления можно найти у Дашена [1969]. Если $\dim G = g$ и $\dim H = h$, то матрица масс имеет ядро размерности $g - h$. Это означает, что существует в точности $g - h$ бозонов Хиггса нулевой массы. Эти частицы, лишенные массы, известны как *бозоны Голдстоуна*. Это обстоятельство кажется странным, поскольку в реальном мире известно очень мало частиц, лишенных массы. Однако оказывается, что после введения калибровочных полей эти частицы приобретают массу. За дальнейшей информацией мы отсылаем к статьям в сборнике Мохапатры и Лая [1981].

Мы видим, что в предположении транзитивности действия группы G множество основных состояний может быть отождествлено с факторпространством G/H левых классов смежности H в G. Это означает, что вопрос о существовании или отсутствии кинк-решений тесно связан с гомотопическими группами типа $\pi_n(G/H)$. Читатель может обратить внимание на сходство этой ситуации с той, которая возникла в разд. 7.6 при обсуждении общих параметров порядка. Анализ гомотопических групп такого вида, как здесь рассмотренные, можно найти в статье Годдарда и др. [1977].

3. Двойной квадратичный потенциал исследуется несколько иначе, поскольку потенциал U недифференцируем в начале координат. Анализ кинк-решений и ссылки на их применение в моделировании смещенных ферроэлектриков могут быть найдены в статье Трулинджера [1979].

4. Теорема Деррика применяется лишь к статическим решениям, но является важным результатом из-за ее общности. Она может быть найдена в статье Деррика [1964]. Пример нестатического кинка приведен в статье Ли [1976].

5. Уравнение (7.4.27) представляет собой модель, рассмотренную впервые Гетмановым [1977], она эквивалентна модели Регге—Лунда (см. Лунд и Регге [1976] и Лунд [1977]). Эта модель является вполне интегрируемым обобщением уравнения СГ.

6. Уравнение (7.4.28) появилось в работе Додда и Буллафа [1977]. Это уравнение связано с той же самой обратной задачей третьего порядка, что и уравнение Буссинеска (Форди и Гиббонс [1981]).

7. Существует большое число исследований, посвященных моделированию уравнений Клейна—Гордона в двух и большем числе измерений. Как основной источник ссылок читатель может использовать обзор Маханькова [1978]. Заключительная глава настоящей книги также содержит дополнительные детали. Численное моделирование так называемых СГ-цепей было произведено Шнейдером и Штоллем (см. ссылки в статьях Бишопа и Шнейдера [1978]) с использованием техники молекулярной динамики и периодическими граничными условиями. Эти моделирования дали также материал для компьютерных фильмов цюрихской группы фирмы IBM.

Раздел 7.5

1. Нашими основными ссылками остаются лекции Коулмана [1977] и книга Джаффе и Тобза [1980]. Желающие больше узнать о калибровочных полях в физике частиц могут обратиться к книге Мохапатры и Лая [1981].

2. Обсуждение электромагнитных полей в контексте классической механики имеется в книге Голдстайна [1980].

3. Уравнения (7.5.46)—(7.5.48) иногда называются уравнениями Богомольного абелевой модели Хиггса (Богомольный [1976]).

4. Численное моделирование, проведенное Джекобсом и Ребби, описано в их статьях (Джейкобс и Ребби [1979], Ребби [1980]). В общем случае, если теория, описываемая плотностью энергии

$\mathscr{E}(\Phi)$, имеет одно кинковое решение ψ, то межчастичный потенциал $V(d)$ определяется формулой

$$V(d) = \mathscr{E}({}_{12}\psi) - \mathscr{E}({}_{1}\psi) - \mathscr{E}({}_{2}\psi),$$

где ${}_1\psi$ и ${}_2\psi$ — два однокинковых решения, расположенных при $t = 0$ на расстоянии d друг от друга, а ${}_{12}\psi$ есть решение полевых уравнений, которое развивается из этого начального состояния. Для уравнения СГ (Перринг и Скирм [1962])

$$V \sim \begin{cases} 32\exp(-d), & d \to \infty, \\ 2\pi d^{-1}, & d \to 0. \end{cases}$$

Работа Джекобса и Ребби основана на более ранней работе (Де Вега и Шапошник [1976]).

5. Вихревые решения, отвечающие $\lambda = 1/2$, ведут себя очень похоже на солитоны, которые мы рассматривали в предыдущих главах. Действительно, уравнения Богомольного (7.5.46)—(7.5.49) допускают сведение к одному уравнению

$$\Delta u = \exp(u) - 1, \qquad (*)$$

где $u = 2\mathrm{Re}(\ln \Phi)$. Уравнение очень похоже на точно интегрируемое уравнение Лиувилля

$$\Delta u = \exp(u),$$

и поэтому можно ожидать, что (*) также окажется ассоциировано с некоторой обратной задачей рассеяния.

Раздел 7.6

1. Элементарное введение в теорию дефектов в кристалле можно найти в книге Розенберга [1975].

2. Модель с простым периодическим потенциалом, ведущая к уравнению СГ, впервые была предложена Френкелем и Конторовой [1939]. Этой работе следовало много авторов, среди которых мы можем упомянуть Франка и Ван дер Мёрве [1949, 1950], Зеегера, Донта и Кохендорфера [1953], Зеегера и Шиллера [1966].

3. Возможность представлять пространства параметров порядка как факторпространства групп часто оказывается удобной, поскольку существуют алгебраические результаты, позволяющие упрощать вычисление гомотопических групп типа $\pi(G/H)$ в случае, когда G и H известны. Эти результаты лучше всего выражаются на языке *точных последовательностей*. Если G_1, G_2 и G_3 — три группы и отображения $i\colon G_1 \to G_2$ и $j\colon G_2 \to G_3$ являются гомоморфизмами, то диаграмма

$$G_1 \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{j} G_3$$

называется *точной последовательностью*, если

$$\ker j = \operatorname{im} i.$$

Понятие точной последовательности позволяет удобно выражать взаимоотношения между группами. Например, тот факт, что последовательность

$$0 \to G_1 \to G_2 \to 0 \tag{1}$$

точна, равносилен утверждению о том, что G_1 и G_2 изоморфны. Сходным образом если группы G_i абелевы, то тот факт, что последовательность

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0 \tag{2}$$

точная, равносилен утверждению о том, что группа G_3 изоморфна G_2/G_1.

Основной результат гомотопической теории (Хилтон [1966]) заключается в том, что последовательность

$$\to \pi_n(H) \to \pi_n(G) \to \pi_n(G/H) \to \pi_{n-1}(H) \to \cdots \tag{3}$$

точна на любом своем участке. Последовательность заканчивается гомотопической группой нулевого порядка, определенной выражением

$$\pi_0(H) = \begin{cases} H, & \text{если } H \text{ дискретна,} \\ 0, & \text{если } H \text{ связана.} \end{cases}$$

Если нам будут известны некоторые из групп в длинной точной последовательности (3), то может оказаться, что нам встретятся сегменты вида (1), (2), что позволит нам идентифицировать изоморфные группы. Вот некоторые полезные результаты в этом направлении:

(i) $\pi_n(H) = 0$, $n \neq 0$, если H дискретна;
(ii) $\pi_2(G) = 0$ для всех компактных групп G;
(iii) если $G = G_1 \times G_2$, то $\pi_n(G_1 \times G_2) = \pi_n(G_1) \times \pi_n(G_2)$.

Например, мы видели, что параметром порядка в кристалле была S^1 и что S^1 можно представить в виде T/H_α. Записав точную последовательность

$$\to \pi_1(H_\alpha) \to \pi_1(T) \to \pi_1(S^1) \to \pi_0(H_\alpha) \to \pi_0(T)$$

(которая следует из (3), если выбрать $G = T$ и $H = H_\alpha$), мы получим

$$0 \to \pi_1(S^1) \to H_\alpha \to 0,$$

так как $T \cong R$ и $\pi_1(R) = 0$, $\pi_0(R) = 0$. Из (1) мы находим, что

$$\pi_1(S^1) \cong H \cong Z.$$

Этот пример тривиальный, но служит иллюстрацией такого подхода к определению гомотопических групп. Более интересный пример касается кратных топологических зарядов. В разд. 9 мы рассмотрим неабелевы модели Хиггса. Если исходная теория инвариантна относительно односвязной компактной калибровочной группы G, но основные состояния инвариантны относительно ее подгруппы J, то существование кинк-решений зависит от гомотопической группы G/J. Если $d = 3$, то нам необходимо вычислить гомотопическую группу $\pi_2(G/J)$. В таких моделях обнаруживается (Годдард и др. [1977]), что J с необходимостью является прямым произведением тора T_1 и односвязной подгруппы G_1. Написанная выше точная последовательность делает вычисление $\pi_2(G/J)$ тривиальным. Длинная точная последовательность дает

$$\to \pi_2(G) \to \pi_2(G/J) \to \pi_1(J) \to \pi_1(G) \to \ldots .$$

Поскольку G компактна и односвязна, то

$$\pi_2(G) = 0, \quad \pi_1(G) = 0,$$

и мы получим последовательность вида (1). Таким образом,

$$\pi_2(G/J) = \pi_1(J).$$

Так как $J = G_1 \times T_1$, то результат (iii) дает

$$\pi_1(J) = \pi_1(G_1) \times \pi_1(T_1).$$

В силу односвязности G_1 имеем $\pi_1(G_1) = 0$. Поэтому если ранг тора T_1 равен m, то мы получим равенство

$$\pi_1(J) = Z^m = \pi_2(G/J).$$

Это очень интересно, поскольку означает, что вместо единственного топологического заряда мы будем иметь множество целозначных топологических зарядов.

4. За основополагающей работой Ландау и Гинзбурга [1950] последовала феноменологическая теория Бардина, Купера и Шриффера [1957]. Существует много книг и обзоров по сверхпроводимости. Среди них мы хотим обратить внимание на обширную подборку статей, изданную Парксом [1969], и монографии Рикайзена [1965] и Тинкема [1975]. Завершающее звено, связывающее раннюю теорию Ландау—Гинзбурга с микроскопической теорией БКШ, было указано Горьковым [1959, 1960]. Экспериментальное наблюдение решетки из вихрей было описано Эссманом и Тройбле [1967].

Раздел 7.7

1. Элементарное введение в теорию ферромагнетизма, подходящее для наших целей, можно найти в книге Розенберга [1975].

2. Оригинальное изложение теории Ландау и Лифшица можно найти в собрании трудов Л. Д. Ландау [1969] и в курсе «Электродинамика сплошных сред» [1959]. В последней книге содержится библиография, являющаяся полезным источником ссылок на более новые работы.

3. Наиболее ранний вывод уравнения СГ при описании движения стенок Блоха был сделан Дорингом [1948] и Енцем [1964]. Интересна более новая статья Карри [1977], посвященная СГ-модели стенок Блоха. В частности, в ней показано, как с помощью аналитического продолжения формулы Хироты для N-солитонных решений можно получить решения-бризеры.

4. Функционал энергии $W[S]$ изотропного ферромагнетика может быть выражен через комплексную переменную w. Если обозначить энергию через $\tilde{W}(w)$, то можно показать, что

$$W(w) = 8\int\int d^2x\,|w_{,\xi}|^2(1-|w|^2)^{-2} = 8\pi Q(w),$$

где $Q(w)$ — заряд, выраженный как функционал от w. Поскольку энергия двухвихревого решения определяется его зарядом, ясно, что межвихревой потенциал равен нулю. Это верно для любого уравнения типа уравнения Богомольного в силу его конструкции.

5. Пространство Минковского, аналогичное изотропному ферромагнетику, определено уравнениями

$$\partial^\mu\partial_\mu q^a + (\partial^\mu q^b\,\partial_\mu q^b)\,q^a = 0,$$

где индексы μ и ν принимают значения 0, 1, 2, 3 с метрикой $-q_{11} = -q_{22} = -q_{33} = 1$. Эта модель называется *нелинейной σ-моделью*. Анализ линейной задачи на собственные значения, ассоциированной с этой задачей, в случае одной пространственной и одной временной переменных впервые был проведен Люшером и Полмейером [1978]. Эта модель калибровочно эквивалентна (в смысле уравнения (7.7.81)) обычному уравнению СГ.

6. Утверждение о нетривиальности группы $\pi_3(S^2)$, установленное Хопфом, важно для истории вопроса, ибо оно выявляет разницу между гомотопией и гомологией. Хопф построил специальную образующую группы $\pi_3(S^2)$, известную как *отображение Хопфа*. Это отображение строится следующим образом. Область S^3 представляется в виде пары комплексных чисел (z_1, z_2) с тем свойством, что $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$. Тогда S^2 представляется как факторпространство этого S^3 по отношению эквивалентности

$$(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2'),$$

если существует $\lambda \in C$ такое, что $z_1 = \lambda z_1'$ и $z_2 = \lambda z_2'$. Обозначим класс эквивалентности элемента (z_1, z_2) через $[z_1 : z_2]$. Заметим,

что тем самым получена реализация S^2 в виде факторпространства

$$S^2 \equiv SU(2)/U(1) \equiv S^3/S^1.$$

Отображение Хопфа H определяется как естественное отображение H: $S^3 \to S^2$, координатное представление которого имеет вид

$$(z_1, z_2) \to [z_1 : z_2].$$

Это отображение может быть выражено иным образом с помощью *спинового отображения*. Спин $S^3 \to S^2$ определяется на языке матриц Паули (7.7.73) следующим образом:

$$\text{Spin: } Z \; \mathbf{S} = Z + \sigma Z, \quad \text{где} \quad Z = (z_1, z_2), \quad z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1.$$

Заметим, что отображение появилось в последнем разделе в уравнениях (7.7.94)—(7.7.96). Каждое отображение F: $S^3 \to S^3$ определяет отображение $f = (\text{Spin}_0 F)$: $S^3 \to S^2$. Поскольку $\pi_3(S^3) = Z$, то каждое такое отображение F имеет определенный топологический заряд N. Поэтому отображение $S^3 \to S^2$ наследует такой топологический заряд, если его с помощью спинового отображения опять отобразить назад к S^3.

Из формул (7.3.5) и (7.3.10) мы уже знаем, что величина

$$\mathcal{Q}[F] = \frac{1}{3!\,\Omega_3} \int_{S^3} J^0(F),$$

где

$$J^0 = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{b_1b_2b_3b_4} F^{b_1}\partial_i F^{b_2}\partial_j F^{b_3}\partial_k F^{b_4}$$

является целозначным топологическим зарядом для отображения F: $S^3 \to S^3$. Если ввести выражения

$$A_i = -i(Z^+\partial_i Z),$$
$$F_{jk} = -i(\partial_j Z^+\partial_k Z - \partial_k Z^+\partial_j Z),$$

то можно будет плотность заряда J^0 представить в виде

$$J_0 = \frac{3}{2}\varepsilon_{ijk}A_i F_{jk} = 3\mathbf{A}\cdot\text{rot}\,\mathbf{A}.$$

Отправляясь от определяющего соотношения $\mathbf{S} = Z^+\sigma Z$, можно показать, что

$$(\text{rot}\,\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}S_a\partial_j S_b\partial_k S_c.$$

Поэтому по заданному $\mathbf{S}$ это уравнение определяет векторное поле $\mathbf{A}$ как нелокальный функционал от $\mathbf{S}$, и топологический заряд для $\mathbf{S}$ задается формулой

$$\Omega_3\mathcal{Q}[S] = (1/2)\int_{S^3}\mathbf{A}\cdot\text{rot}\,\mathbf{A}.$$

Этот инвариант известен как инвариант Хопфа (Уайтхед [1947]).

7. Солитоны спиновой цепочки Гейзенберга были впервые численно обнаружены Тьёном и Райтом [1977]. Полная интегрируемость системы была доказана Тахтаджяном [1977]. Калибровочная эквивалентность этой модели нелинейному уравнению Шрёдингера была доказана Захаровым и Тахтаджяном [1979].

Раздел 7.8

1. Существует большое количество руководств по основам квантовой механики. Мы рекомендуем книги Мерцбахера [1961], Готтфрида [1966] и Мессиа [1961, 1962]. Изложение квантовой теории магнетизма можно найти в книге Уайта [1971].

2. Для нерелятивистской частицы вектор магнитного момента дается формулой $\hat{\mathbf{m}} = e\,(2m)^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$, и для нахождения температурного среднего $\tilde{\mathbf{m}}$ мы должны найти ожидаемое значение этого оператора в некотором состоянии и затем усреднить по всем состояниям, через которые система проходит, эволюционируя во времени. Другой подход состоит в том, чтобы рассматривать не одну и ту же систему в разные времена, а ансамбль систем в одно и то же время. Если имеется N систем, то каждая из них будет описываться матрицей плотности $\rho^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$. Среднее по времени может быть теперь заменено средним по ансамблю. Таким путем мы получим усредненную по ансамблю матрицу плотности, определенную формулой

$$\tilde{\rho} = N^{-1} \sum_n \rho^{(n)}.$$

Матрица плотности $\tilde{\rho}$ удовлетворяет всем уравнениям для нормальных матриц плотности, и термически усредненный магнитный момент имеет вид

$$\mathbf{M} = \langle\langle \hat{\mathbf{m}} \rangle\rangle = \operatorname{tr}(\tilde{\rho}\tilde{m}).$$

Динамические уравнения для этого среднего магнитного момента, в силу (7.8.19), представляются следующим образом:

$$\hbar \frac{d\mathbf{M}}{dt} = -i \langle\langle [\tilde{\mathbf{m}},\ \tilde{H}] \rangle\rangle. \qquad (*)$$

Если гамильтониан H имеет вид

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 - \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля внутри кристалла, обусловленная внешне приложенным полем, а относительно $\tilde{H}_0$ предполагается, что он коммутирует с $\tilde{\mathbf{M}}$. Поэтому мы имеем ситуацию, описанную в модели Ландау—Лифшица в разд. 7.

В общем случае $\mathbf{M}$ пропорционально суммарному моменту количества движения $\mathbf{J}$,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \beta \tilde{\mathbf{J}},$$

и квантовомеханические операторы момента количества движения удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\tilde{J}_i, \tilde{J}_j] = \varepsilon_{ijk} \tilde{J}_k.$$

Уравнение (*) сводится тогда к

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \Delta \mathbf{H},$$

где $\beta = \gamma\hbar$. Это квантовый вывод уравнений Блоха.

3. Модель, состоящая из системы атомов с двумя состояниями, взаимодействующей с лазером, была рассмотрена Лэмом [1964].

4. Уравнения Блоха получили свое название по сходному набору уравнений, которые появились в статье Блоха [1946].

5. Наш вывод уравнения СГ из нелинейного уравнения Ландау—Гинзбурга заимствован из книги Солимара [1972].

6. Нестационарное уравнение Ландау—Гинзбурга было впервые получено на основании микроскопической теории Горьковым и Элиашбергом [1969]. Уравнение принимает вид (Тинкем [1975])

$$D^{-1}(\partial_t + ie^*\psi\hbar^{-1})\Delta + \xi^{-2}(|\Delta|^2 - 1)\Delta + \left(i\nabla + \frac{e^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \Delta = 0,$$

где D есть диффузионная постоянная, представляющая собой электрохимический потенциал, деленный на заряд электрона. Волновая функция Δ есть так называемый «щелевой параметр», который играет важную роль в БКШ-теории сверхпроводимости.

7. Модель Джейкобсона описана в его статье [1965].

8. Идея рассматривать контакт Джозефсона как систему с двумя состояниями принадлежит Фейману [1969].

9. В обзорной статье Парментера [1978] рассмотрены некоторые вопросы периодических решений из разд. 4 и связи с контактами Джозефсона.

Раздел 7.9

1. Элементарное изложение теории калибровочных полей содержится в первоначальной статье Янга и Миллса [1954] или в статье Бернстайна [1974]. Имеется несколько недавних обзоров, посвященных математическим аспектам калибровочной теории для физиков. Например, можно рекомендовать Егути и др. [1980] или Мадоре [1981].

2. Уравнение Богомольного впервые было выведено в статье Богомольного [1976].

3. Подход, который позволяет редуцировать уравнение Богомольного к уравнению Эрнста [1968], был указан Мантоном [1977]. Саму редукцию провели Форгач и др. [1980].

4. Обратная задача рассеяния для уравнения Эрнста была обнаружена Харрисоном [1978] и в родственной форме Нойгебауером и Крамером [1980], Мейзоном [1979], Доддом и Моррисом [1980] и Захаровым и Белинским [1978].

5. Полезным источником дальнейшей информации о солитонах являются лекции Коулмана [1977] или Оливе и др. [1979].

7.11. Задачи

1. Покажите, что

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \{A\, dn [\beta (x - x_0);\ \lambda_f] \operatorname{sn} [\Omega (t - t_0);\ \lambda_g]\},$$

где

$$\lambda_f = 1 - \{1 - \beta^2 (1 + A^2)\} \{\beta^2 A^2 (1 + A^2)\}^{-1},$$
$$\lambda_g = \{A^2 [1 - \Omega^2 (1 + A^2)]\} \{\Omega^2 (1 + A^2)\}^{-1}$$

есть решение уравнения СГ с граничными условиями

$$\varphi_x (0) = 0 = \varphi_x (l)$$

в предположении, что справедливо *дисперсионное соотношение*

$$\beta = A\Omega.$$

Покажите, что граничные условия приводят к собственным значениям вида

$$\beta_n = (n/l)\, K (\lambda_f).$$

Выберите β так, чтобы абсолютная величина λ_f равнялась тождественно единице, и воспользуйтесь тождествами

$$\operatorname{dn} (x,\ 1) = \operatorname{sech} x, \quad \operatorname{sn} (x,\ 0) = \sin x,$$

чтобы показать, что это решение есть обобщение бризерного решения на бесконечной прямой. Какое получится решение, если β выбрать так, чтобы $\lambda_f \equiv 0$?

2. Рассмотрим уравнение СГ

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0. \tag{1}$$

Для проверки устойчивости односолитонного решения этого уравнения мы линеаризуем уравнение (1), вводя новое поле f, определенное выражением

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \exp (x) + f (x) \exp (-i\omega t),$$

и удержим лишь члены первого порядка. Покажите, что это ведет к решению уравнения Шрёдингера

$$-f'' + (1 - \operatorname{sech}^2 x) f = \omega^2 f.$$

Используя результаты гл. 2, покажите, что существует одно «связанное состояние» с нулевой энергией и волновой функцией

$$_0f(x) = 2 \operatorname{sech} x \tag{2}$$

и что остающиеся собственные функции образуют континуум с $\omega_k^2 = k^2 + 1$ и имеют вид

$$_kf(x) = (2\pi)^{-1/2} (\omega_k)^{-1} (k - i \operatorname{th} x) \exp(ikx). \tag{3}$$

Солитонные решения нарушают трансляционную симметрию, и поэтому нулевую моду можно считать бозоном Голдстоуна.

Поскольку функции f_0 и f_k являются собственными функциями самосопряженного оператора, то они удовлетворяют некоторым соотношениям ортогональности и полноты. Найдите эти соотношения.

Уравнение СГ часто появляется в модифицированном виде

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = F,$$

где F — постоянная внешняя сила. Для малых F это уравнение можно рассматривать как возмущение стандартного уравнения СГ. Предположим, что односолитонное решение свободного уравнения СГ входит в область, где действуют эти возмущающие силы. Можно ожидать, что вид солитонного решения будет сохранен, но что его физические характеристики, скажем, скорость или ширина, изменятся. Рассмотрим начальное однокинковое решение и будем искать новое возмущенное решение в виде

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \exp(x - vt) + \psi(x, t).$$

Покажите, что в первом порядке поле ψ будет удовлетворять уравнению

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + (1 - 2 \operatorname{sech}^2 x) \psi = F. \tag{4}$$

Это уравнение можно решить, если применить преобразование Фурье по времени

$$\tilde{\psi}(z, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \psi(x, t) dt$$

и разложить $\tilde{\psi}(z, \omega)$ по полному набору функций (2) и (3):

$$\tilde{\psi}(z, \omega) = \psi_b(\omega)_b f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi(k, \omega) (_kf(x)).$$

Решите уравнение (4).

3. Докажите, что топологический заряд, определенный формулой

$$Q[\varphi] = \frac{1}{(n-1)!\,\Omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varepsilon^{c_1 \dots c_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} \varphi^{b_1} \partial c_1 \varphi^{b_2} \partial c_2 \dots dx^1 \dots dx^n,$$

может быть представлен в виде

$$Q[\varphi] = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int dx^1 \dots dx^{n-1} (\det g_{ab})^{1/2} \det \partial y,$$

где $(y^1, \dots, y^{n-1})$ — внутренние координаты на сфере и

$$g_{ab} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y^a}, \frac{\partial \varphi}{\partial y^b} \right\rangle$$

— метрический тензор на S^{n-1}.

4. Элементарная частица в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(t, \mathbf{x})$ описывается отображением φ: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, имеющим в координатах вид $(x_0, \mathbf{x}) \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Вводя поле направлений Φ: $\mathbb{R}^4 \to S^2$, определенное формулой

$$\widehat{\varphi} = \varphi / \|\varphi\|,$$

мы можем определить для таких полей целозначный топологический заряд следующей формулой:

$$\overline{Q}[\widehat{\varphi}] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \varepsilon_{b_1 b_2 b_3} \partial_{c_1} \widehat{\varphi}^{b_1} \partial_{c_2} \widehat{\varphi}^{b_2} \partial_{c_3} \widehat{\varphi}^{b_3}, \quad \partial_t \overline{Q}[\widehat{\varphi}] = 0.$$

Вычислите топологические заряды следующих стационарных полей:

(i) $\varphi^1 = x^1 f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi^2 = x^2 f(x_1, x_2, x_3)$,
$\varphi^3 = x^3 f(x_1, x_2, x_3)$;

(ii) $\varphi^1 = 2x^1 f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi^2 = 2x^2 f(x_1, x_2, x_3)$,
$\varphi^3 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2 - 1) f(x_1, x_2, x_3)$;

(iii) $\varphi^1 = x^1 f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi^2 = x^2 x^3 f(x_1, x_2, x_3)$,
$\varphi^3 = ((x^3)^2 - 1) f(x_1, x_2, x_3)$.

Найдите проекцию $\hat{\varphi}$ на плоскость $x_1 = 0$ как вектор циркуляции ${}_2\hat{\varphi}$. Изобразите векторное поле ${}_2\hat{\varphi}$ вокруг сингулярных точек каждого из указанных выше полей, нарисовав фазовый портрет системы обыкновенных дифференциальных уравнений в каждом из следующих случаев:

$$\dot{x}_2 = {}_2\hat{\varphi}^2(x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = {}_2\hat{\varphi}^3(x_2, x_3).$$

Постройте поле, имеющее заряд 3.

5. В упражнении 4 рассматривался частный случай отображения $\mathbb{R}^n \to S^{n-2}$ для $n = 4$. Покажите, что если $\hat{\varphi}$: $\mathbb{R}^n \to S^{n-2}$

есть гладкое отображение всюду, за исключением конечного числа точек, то можно обобщить технику разд. 3 и доказать, что поток

$$\overline{J} = \frac{1}{(n-1)!\,\Omega^{n-1}}\, e^{ac_1,\ \ldots,\ c_n}\varepsilon_{b_1b_2\ldots b_n}\,\partial_{c_1}\hat{\Phi}^{b_1}\,\partial_{c_2}\hat{\Phi}^{b_2}\ \ldots\ \partial_{c_n}\hat{\Phi}^{b_n}$$

является сохраняемой величиной. Для получения решения с конечным зарядом нужно, чтобы

$$\hat{\Phi} \to \hat{\Phi}_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \to \infty,$$

где $\hat{\Phi}_0$ — постоянная. Сохраняемый заряд можно тогда определить формулой

$$\overline{Q}[\widehat{\varphi}] = \int \overline{J}^0\, dx' \cdot -dx^n, \quad \partial_t \overline{Q}[\widehat{\varphi}] = 0.$$

Покажите, что если отображение ${}_t\hat{\Phi}\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ определено формулой

$${}_t\bar{\Phi}(\hat{n}) = \lim_{r\to\infty} \hat{\Phi}(t,\ r\hat{n}),$$

то

$$\overline{Q}[\widehat{\varphi}] = \deg({}_t\widetilde{\varphi}).$$

6. Уравнение Додда—Буллафа представляет собой частный случай уравнений

$$\theta_{xt} = e^{2\theta} - e^{-\theta}\cos 3\varphi, \tag{1}$$

$$\varphi_{xt} = e^{-\theta}\sin 3\varphi, \tag{2}$$

отвечающий $\varphi = 0$ (Форди и Гиббонс [1981]).

Непосредственно определяя бегущую волну в виде

$$\theta = \theta(x - vt), \quad \varphi = \varphi(x - vt),$$

найдите односолитонное решение

$$\theta = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1+e^{3\eta}}{(1+e^{\eta})^3}\right\}, \tag{3}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{3}\,e^{\eta}}{2-e^{-\eta}}\right\}, \tag{4}$$

где $\eta = kx + 3k^{-1}t$.

Покажите, что равенства

$$\partial_x(\bar{\theta}^{(n)} - \theta^{(n+1)}) = -k\{\exp(\theta^{(n+1)} - \bar{\theta}^{(n+1)}) - \exp(\theta^{(n)} - \bar{\theta}^{(n)})\},$$

$$\partial_t(\theta^{(n)} - \bar{\theta}^{(n)}) = -k^{-1}\{\exp(\bar{\theta}^{(n)} - \theta^{(n+1)}) - \exp(\bar{\theta}^{(n-1)} - \theta^{(n)})\}$$

(где $\theta^{(1)} = \theta + i\varphi$, $\theta^{(2)} = -2i\varphi$, $\theta^{(3)} = -\theta + i\varphi$ и индексы берутся по mod 3) определяют преобразование Бэклунда для уравнений (1) и (2). Воспользуйтесь ими для еще одного вывода формул (3) и (4).

Рассмотрим два преобразования Бэклунда. Одно из них с параметром k_1 переводит решение (θ, φ) в решение $(\bar\theta, \bar\varphi)$, другое — с параметром k_2 переводит то же самое решение в решение $(\hat\theta, \hat\varphi)$. Если мы потребуем, чтобы те же самые преобразования переводили $(\hat\theta, \hat\varphi)$ и $(\bar\theta, \bar\varphi)$ в одно и то же решение $(\tilde\theta, \tilde\varphi)$ (перестановочность), мы получим обобщение формулы суперпозиции для уравнения СГ. В этом случае она принимает вид

$$\exp\left(\theta^{(n+1)}+\tilde\theta^{(n)}\right)=\left\{\frac{k_1\exp\left(-\bar\theta^{(n)}\right)-k_2\exp\left(-\hat\theta^{(n)}\right)}{k_1\exp\left(-\bar\theta^{(n+1)}\right)-k_2\exp\left(-\hat\theta^{(n+1)}\right)}\right\}\exp\left(\bar\theta^{(n)}+\hat\theta^{(n)}\right).$$

Примените этот результат для построения двухсолитонного решения уравнений (1) и (2).

7. Рассмотрим модель, описываемую тремя вещественными скалярными полями φ^i $(i = 1, 2, 3)$, для которых выполняются полевые уравнения

$$\Box\,\varphi^i+\langle\partial_\mu\varphi,\ \partial^\mu\varphi\rangle\,\varphi^i=0, \tag{1}$$

$$\langle\varphi,\ \varphi\rangle=1. \tag{2}$$

(а) Покажите, что параметризация

$$\varphi=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\alpha\\ \sin\beta & \sin\alpha\\ \cos\alpha & \end{bmatrix}$$

приводит полевые уравнения (1) и (2) к виду

$$\Box\,\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\,\partial_\mu\beta\,\partial^\mu\beta, \tag{3}$$

$$\partial^\mu\left(\sin^2\alpha\,\partial_\mu\beta\right)=0. \tag{4}$$

(б) Предполагая, что решение ищется в виде

$$\beta=\lambda\theta,\quad \alpha=\alpha(r),$$

где r и θ — полярные координаты, покажите, что α удовлетворяет уравнению

$$\alpha_{,rr}+r^{-1}\alpha_{,r}-\frac{\lambda^2}{2}r^{-2}\sin 2\alpha=0.$$

(в) Вводя новую переменную z, определенную равенством $r = \exp zn^{-1}$, покажите, что модель имеет решение вида

$$\varphi=\operatorname{sgn}(n)\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix} & \dfrac{2r^n}{1+r^{2n}}\\ \dfrac{1-r^{2n}}{1+r^n} & \end{bmatrix}.$$

(г) Покажите, что топологический заряд для этой модели принимает вид

$$Q[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \sin\alpha \left|\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x_1, x_2)}\right|.$$

(е) Покажите, что $Q|\varphi_n| = n$.

8. Общий класс моделей, представляющий интерес в физике элементарных частиц и общей теории относительности, определяется полевыми уравнениями вида

$$\partial^\mu(\partial_\mu g g^{-1}) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

где g — элемент группы матриц.

Введем в пространстве Минковского криволинейные координаты (S, θ, ρ, ψ), определенные равенствами

$$x = (s \times \operatorname{ch}\theta, s \times \operatorname{sh}\theta, \rho\cos\psi, \rho\sin\psi),$$

обобщающими полярные координаты в $\mathbb{R}$.

Покажите, что если искать решения полевых уравнений (1) в виде функций, зависящих только от s и ρ, то уравнение (1) сведется к виду

$$(g_s g^{-1})_s + s^{-1} g_s g^{-1} = (g_\rho g^{-1})_\rho + \rho^{-1} g_\rho g^{-1}.$$

Вводя новые переменные $r = s\rho$ и $t = (s^2 + \rho^2)$, приведите это уравнение к виду

$$(g_t g^{-1})_t = (g_r g^{-1})_r + r^{-1} g_r g^{-1}. \tag{2}$$

Выбирая g из группы унитарных матриц 2×2, для которых $g^2 = -I$, покажите, что этот элемент может быть записан в виде $g = i\sigma.\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^3$. Используя эту параметризацию, покажите, что полевые уравнения, которым удовлетворяет $\mathbf{n}$, имеют вид

$$\mathbf{n}_{tt} - r^{-1}(r\mathbf{n}_r)_r + (\mathbf{n}_t^2 - \mathbf{n}_r^2)\,\mathbf{n} = 0.$$

Это то же самое уравнение, которое получилось бы при отыскании радиально симметричных решений в пространстве Минковского уравнений Гейзенберга для ферромагнетиков с двумя пространственными переменными. Если t взять чисто мнимым, мы получим обыкновенные евклидовы уравнения.

Покажите, что условия интегрируемости для линейной задачи

$$[(\mu - \mu^{-1})\partial_r + (\mu + \mu^{-1})\mu/_r\partial_\mu - g_t g^{-1} + \mu^{-1} g_r g^{-1}]\Psi = 0, \tag{3}$$

$$\left[\mu\left(\partial_r - \frac{\mu}{r}\partial_\mu\right) + \partial_t - g_t g^{-1}\right]\Psi = 0 \tag{4}$$

в точности совпадают с уравнением (2). Это обобщенная обратная задача рассеяния для уравнения (2) того вида, о котором упоминалось в разд. 6.4. Ищите решение уравнений (3) и (4) в виде ряда

$$\Psi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(r, t)\,\mu^{-k}$$

и, предполагая существование всех необходимых интегралов, покажите, что величины Q_k, определенные формулами

$$Q_k = \lim_{r\to\infty} r^k \psi_k(r, t),$$

не зависят от t. Тем самым вы докажете, что эта модель, подобно уравнению СГ, обладает бесконечным множеством нелокальных законов сохранения.

Покажите, что первые две сохраняемые величины имеют вид

$$Q_1 = \int^{\infty} g_t g^{-1} r\, dr, \quad Q_2 = \int^{\infty} g_t g^{-1} \int^{r} g_t g^{-1} r'\, dr' r\, dr.$$

9. Уравнения Богомольного $SU(2)$ принимают вид

$$\partial_a \mathbf{A}_b - \partial_b \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_a \times \mathbf{A}_b = -\varepsilon_{abc}(\partial_c \mathbf{\Phi}_c + \mathbf{A}_c \times \mathbf{\Phi}).$$

Покажите, что решения этого уравнения могут быть найдены в виде

$$\mathbf{\Phi}_j = f(r)\frac{x_j}{r}, \quad (A_j)^k = -g(r)\,\varepsilon_{jkl}\frac{x}{r}\,t,$$

где f и g удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(fr^{-1})' + (gr^{-1})' = -r^{-1}g\,(g + f), \tag{1}$$

$$r\,(gr^{-1})' + fg = -r^{-1}\,(2g - f). \tag{2}$$

Покажите, что эти уравнения можно упростить, если ввести в рассмотрение новые функции, определенные равенствами

$$F = f + r^{-1}, \quad G = g - r^{-1},$$

и уравнения (1) и (2) привести к виду

$$F' = -G^2, \tag{3}$$

$$G' = -GF. \tag{4}$$

Покажите, что из (3) и (4) следует соотношение

$$F^2 - G^2 = C^2,$$

где C — постоянная, после чего получите решение (3) и (4) в виде

$$F = C\left\{\operatorname{th}\left(\frac{r - r_0}{C}\right)\right\}^{-1},$$

$$G = C\left\{\operatorname{sh}\left(\frac{r - r_0}{C}\right)\right\}^{-1}.$$

Если мы наложим граничные условия $F \to 1$ при $r \to \infty$ и $F(0) = 1$, то найденные нами решения окажутся монополями *Прасада—Зоммерфельда*, полученными в разд. 9 с помощью техники преобразований Бэклунда. Хотя этот путь много легче, он не дает информации о том, как определять мультимонопольные решения.

8. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА И РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

8.1. Введение

В гл. 1 и затем в гл. 6 мы упоминали уравнение

$$\beta \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma A \mid A \mid^2 = i \frac{\partial A}{\partial t} \tag{8.1.1}$$

как пример интегрируемого эволюционного уравнения, но не касались вопроса о его физическом смысле. Название *нелинейное уравнение Шрёдингера* (НЛШ-уравнение, или просто НУШ) было присвоено ему именно потому, что структура этого уравнения в точности совпадает со структурой квантовомеханического уравнения Шрёдингера, где $| A |^2$ играет роль потенциала. Однако в большинстве ситуаций, где появляется НУШ, с настоящим уравнением Шрёдингера из квантовой механики его связывает лишь название. В действительности оно играет существенную роль в теории распространения огибающих волновых пакетов во многих устойчивых дисперсионных физических системах, в которых не происходит рассеяния. Поскольку такие уравнения имеют широкую область приложения, мы весь этот раздел посвящаем обсуждению метода многомасштабных разложений из теории возмущений, с тем чтобы продемонстрировать незнакомому с предметом читателю простую технику нахождения эволюционных уравнений для огибающих волновых пакетов, распространяющихся в нелинейной дисперсионной системе. Физические примеры будут рассмотрены в последующих разделах.

Многие естественные нелинейные системы допускают решения в виде гармонических волновых пакетов

$$\varphi = a \exp [i (kx - \omega (k) t)], \tag{8.1.2}$$

в предположении что амплитуда a достаточно мала. Тем самым предполагается, что нелинейные члены достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь, и в таком случае амплитуда будет оставаться неизменной во времени, как показано на рис. 8.1.

Изменение амплитуды таких синусоидальных осцилляций в пространстве и во времени происходит из-за эффектов нелинейности, благодаря обратному воздействию высших гармоник, порожденных нелинейными членами, на исходную волну. Мы хотим рассмотреть ситуацию, когда основное состояние системы

представляет собой линейную гармонику, которая, хотя и мала по амплитуде, но все же не столь, чтобы можно было пренебречь эффектами нелинейности. Мы ограничимся случаем, когда огибающая волны медленно меняется как по пространственной, так и по временной переменным по сравнению с несущей волной.

Такие примеры обычны в повседневной жизни. Например, АМ- (амплитудно-модулированные) радиоволны служат примером быстро осциллирующей несущей волны с относительно медленно меняющейся огибающей. Радиоприемник выделяет амплитуду и

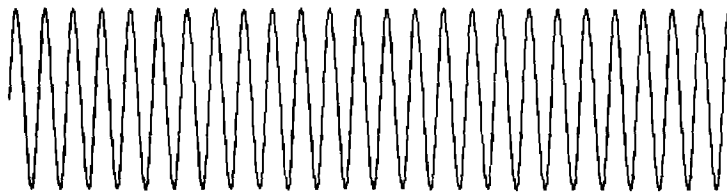


Рис. 8.1. Синусоидальные колебания постоянной амплитуды.

частоту огибающей волн и превращает их в звуковые волны: мы слышим волновую огибающую, а не несущую волну. На рис. 8.2 представлено синусоидальное колебание с медленно меняющейся огибающей.

Следующая важная область приложений, в которой медленно меняющаяся огибающая модулирует несущую волну, относится к когерентной лазерной оптике. Например, когерентный оптический импульс продолжительностью в одну наносекунду, скажем в области голубого света, будет иметь около 10^6 колебаний несущей волны внутри огибающей импульса. В нелинейной оптике имеются способы, позволяющие из исходных уравнений движения получать эволюционные уравнения для медленно меняющихся огибающих (и фаз). Для этого обычно приходится жертвовать производными более высоких порядков у огибающих и несущими высшими гармониками в исходных уравнениях движения. Наиболее естественное применение это находит в случае, когда частота падающей волны находится в резонансе с собственной частотой активной среды (скажем, с атомной частотой двухуровневой атомной системы). Эти идеи применимы к целому ряду областей, таких как физика плазмы, гидродинамика или оптика; ключевая идея заключается в нахождении слабо нелинейных разложений для колебаний рассматриваемых систем. Для резонансных систем колебания, которые приводят к различным результатам в нерезонансных ситуациях, могут порождать неустойчивость. В этой главе мы будем заниматься лишь слабо нелинейным нерезонансным случаем, для которого, как мы покажем, типичными амплитудными уравнениями будут нелинейные уравнения Шрёдингера.

Резонансный случай (неустойчивый) будет обсуждаться в следующей главе.

Можно неформальным образом показать, как нелинейное уравнение Шрёдингера возникает в качестве эволюционного уравнения для огибающей несущей волны (Хасегава [1975]). Настоящие линейные системы характеризуются дисперсионным соотношением, которое не зависит от амплитуды. Предположим, однако, что развитие гармонической волны в слабо нелинейной системе может быть представлено дисперсионным соотношением, которое зависит от амплитуды (такая ситуация в самом деле встречается в нелинейной оптике или теории плазмы, когда показатель

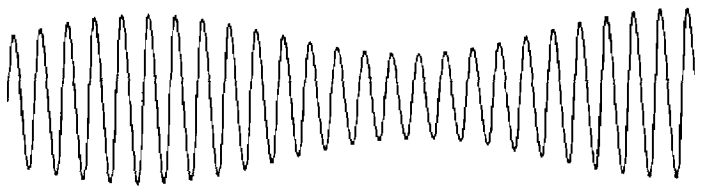


Рис. 8.2. Синусоидальные колебания с медленно меняющейся амплитудой.

преломления или диэлектрическая постоянная среды зависят от электрического поля):

$$\omega = \omega\,(k;\ |A|^2). \tag{8.1.3}$$

Разложение Тейлора для ω в окрестности фиксированных волнового числа k_0 и частоты ω_0 имеет следующий вид:

$$\omega - \omega_0 = \left[\frac{\partial\omega}{\partial k}\right]_0 (k-k_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right]_0 (k-k_0)^2 + \\ + \left[\frac{\partial\omega}{\partial(|A|^2)}\right]_0 |A|^2 + \ldots . \tag{8.1.4}$$

Равенство (8.1.4) можно рассматривать как эквивалент (в пространстве фурье-образов) операторного уравнения, которое, действуя на A, дает

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{\partial\omega}{\partial k}\right]_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) A + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right]_0 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial\omega}{\partial(|A|^2)}\right]_0 \cdot A\,|A|^2 = 0 \tag{8.1.5}$$

(если отбросить члены высших порядков). Уравнение (8.1.5) есть нелинейное уравнение Шрёдингера, и этот эвристический вывод показывает, как можно грубо моделировать эффект нелинейного члена, полагая, что система имеет зависящее от амплитуды дисперсионное соотношение. Этот простой метод показывает нам, как получаются НУШ, но, к сожалению, в конкретных случаях он не дает значений коэффициентов в окончательном урав-

нении, в частности коэффициента $\partial\omega/\partial(|A|^2)$. Как мы увидим в следующем разделе, знак этого коэффициента весьма существен. Ввиду этого полезнее на данном этапе представить более формальный математический метод, который может быть применен к большому классу нелинейных уравнений в случаях, когда мы хотим знать развитие медленно меняющейся огибающей, модулирующей быструю несущую волну.

Это последнее свойство означает, что длина волны огибающей во много раз больше длины несущей волны. Следовательно, $\lambda_c\lambda_e^{-1} \ll 1$, где λ_c, λ_e — типичные длины волн несущей волны и огибающей соответственно. Если x и t — обычные пространственная и временна́я переменные для несущей волны, то мы можем ввести набор «медленных» временной и пространственной переменных $T_n = \varepsilon^n t$, $X_n = \varepsilon^n x$ ($\varepsilon \ll 1$). Эти медленные временна́я и пространственная переменные являются переменными, в которых естественно описывать движение огибающей, и отныне мы их будем рассматривать как независимые переменные. Изложение метода нахождения эволюционного уравнения для огибающей колебаний, отвечающих данному нелинейному уравнению, лучше начать с примера. Этот метод по понятным причинам часто называют *методом многомасштабных разложений* или *методом двухвременных разложений*.

Возьмем нелинейное уравнение Клейна—Гордона с кубическим нелинейным членом

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \alpha\varphi - \beta\varphi^3, \tag{8.1.6}$$

которому отвечает плотность гамильтониана

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_t^2) + \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 - \frac{1}{4}\beta\varphi^4 \tag{8.1.7}$$

и, следовательно, потенциал

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 - \frac{1}{4}\beta\varphi^4. \tag{8.1.8}$$

Нарисовав график этого потенциала, видим, что при $\varphi = 0$ он имеет минимум, а при $\varphi = \pm(\alpha/\beta)^{1/2}$ — максимумы. Поэтому решение $\varphi = 0$ уравнения (8.1.6) дает положение устойчивого равновесия, и, значит, мы можем разложить это решение в асимптотический ряд по степеням ε^p, где p пока — некоторое неизвестное положительное число:

$$\varphi = \varepsilon^p\varphi^{(1)} + \varepsilon^{2p}\varphi^{(2)} + \ldots . \tag{8.1.9}$$

Дифференциальные операторы $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ в (8.1.6) также должны быть преобразованы так, чтобы была учтена зависимость медленных переменных X_n и T_n от x и t. После перехода к этим медленным пространственному, временно́му и амплитудному масштабам си-

стему можно назвать *слабо нелинейной*. Производные $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ преобразуются при этом так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{n=1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial X_n}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial T_n}. \tag{8.1.10}$$

Начиная с этого места, мы будем считать переменные x, X_n, t и T_n независимыми. Подставляя (8.1.9) и (8.1.10) в (8.1.6), получим

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} \cdots\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \cdots\right)^2 - \alpha\right\} \times$$
$$\times \left(\varepsilon^p \varphi^{(1)} + \varepsilon^{2p} \varphi^{(2)} \ldots\right) + \beta \left[\varepsilon^p \varphi^{(1)} + \varepsilon^{2p} \varphi^{(2)} \ldots\right]^3 = 0. \tag{8.1.11}$$

Отсюда можно найти коэффициенты при различных степенях ε:

$$O(\varepsilon^p): \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right) \varphi^{(1)}, \tag{8.1.12}$$

$$O(\varepsilon^{p+1}): \quad 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\right) \varphi^{(1)}, \tag{8.1.13}$$

$$O(\varepsilon^{2p}): \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right) \varphi^{(2)}, \tag{8.1.14}$$

$$O(\varepsilon^{2p+1}): \quad 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\right) \varphi^{(2)}, \tag{8.1.15}$$

$$O(\varepsilon^{p+2}): \quad 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_2} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_2}\right) \varphi^{(1)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\right) \varphi^{(1)}, \tag{8.1.16}$$

$$O(\varepsilon^{3p}): \quad \beta (\varphi^{(1)})^3 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right) \varphi^{(3)}. \tag{8.1.17}$$

Для нахождения разумного значения p применим теперь правдоподобное рассуждение, аналогичное примененному в гл. 5. Очевидно, что уравнение, получающееся приравниванием выражения (8.1.12) нулю, представляет собой линейную задачу и не может дать информации о p. Имеются лишь две возможности нетривиального выбора p в нижних порядках: (a) $p + 1 = 2p$, (b) $p + 1 = 3p$. В случае (b) мы получим $p = 1/2$, но тогда нельзя разумно выбрать решение $\varphi^{(1)}$. Остается случай (a), который дает $p = 1$. Приравнивая нулю члены в (8.1.11) одинакового порядка по ε, приходим к уравнениям

$$O(\varepsilon): \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right) \varphi^{(1)} = 0, \tag{8.1.18}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right) \varphi^{(2)} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\right) \varphi^{(1)}, \tag{8.1.19}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right)\varphi^{(3)} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right)\varphi^{(2)},$$
$$-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_2}\right)\varphi^{(1)} - \beta(\varphi^{(1)})^3 - \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\right)\varphi^{(1)}. \tag{8.1.20}$$

Мы можем выбрать решение уравнения (8.1.18) в виде гармоники, но, поскольку дифференциальные операторы здесь относятся к быстрым переменным x и t, полезно записать $\varphi^{(1)}$ в виде [1])

$$\varphi^{(1)} = A(X_1, X_2, \ldots; T_1, T_2, \ldots)\exp(i\theta) + \text{с. с.}, \tag{8.1.21}$$

$$\theta = kx - \omega t + \delta, \tag{8.1.22}$$

$$\omega^2 = k^2 + \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{8.1.23}$$

Функция A в (8.1.21) является произвольной (пока!) комплексной амплитудой, зависящей *от медленных переменных*. Тем самым на первой стадии наших вычислений, в нижнем порядке, мы получили линейное колебание, огибающая которого представляет собой функцию, зависящую лишь от медленных переменных. Таким образом, мы достигли разделения медленных и быстрых переменных. Подставляя (8.1.21) в $O(\varepsilon^2)$-уравнение, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right)\varphi^{(2)} = -2i\left(k\frac{\partial A}{\partial X_1} + \omega\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)\exp(i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.1.24}$$

Решая это уравнение относительно $\varphi^{(2)}$, мы сразу сталкиваемся со следующей проблемой. Однородная часть решения такая же, как у уравнения (8.1.21), именно потому, что линейные операторы в этих уравнениях одинаковы. Следовательно, правая часть в (8.1.24) «резонирует» с этим решением, поскольку она также содержит член $\exp(i\theta)$. Поэтому частный интеграл для $\varphi^{(2)}$ будет содержать член типа $\theta\exp(i\theta)$. Когда $t \to \infty$, член такого вида «взрывается» и теория возмущений становится неприменимой при временах $t > \varepsilon^{-1}$. Члены такого вида обычно называются *секулярными*. Для предотвращения такой возможности у нас есть лишь два выхода. Первый состоит в том, чтобы считать A постоянной, так чтобы правая часть в (8.1.24) обращалась в нуль. Второй, более общий, — потребовать, чтобы A удовлетворяла уравнению

$$k\frac{\partial A}{\partial X_1} + \omega\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0. \tag{8.1.25}$$

Ввиду этого требования полезно ввести новую переменную

$$\overline{X}_1 = X - c_g T_1, \tag{8.1.26}$$

---

[1]) Ниже с. с. обозначает комплексно-сопряженное (complex conjugate) выражение. — *Прим. ред.*

где $c_g = d\omega/dk$ — групповая скорость волнового пакета. Поэтому амплитудная функция может быть записана в виде $A = A(\bar{X}, X_2, T_2)$. Следовательно, в системе, движущейся с групповой скоростью, секулярные члены исчезают. Мы все еще удерживаем переменные X_2 и T_2, так как это дает нам возможность иметь в A две (или более) независимые переменные.

Переходя к $O(\varepsilon^3)$-члену, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\right)\varphi^{(3)} = -2i\left(k\frac{\partial A}{\partial X_2} + \omega\frac{\partial A}{\partial T_2}\right)\exp(i\theta) -$$

$$-\left[(1-c_g^2)\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + 3\beta A^2 A^*\right]\exp(i\theta) - \beta A^3\exp(3i\theta) + \text{с. с.} \quad (8.1.27)$$

Мы опустили член, содержащий $\varphi^{(2)}$, потому что этот член, в силу (8.1.26), автоматически равен нулю. Снова видно, что все члены с $\exp(i\theta)$ в (8.1.27) являются секулярными. Однако член $\exp(3i\theta)$ не секулярен, так как он не резонирует с однородным решением. Поэтому для того чтобы теория возмущений работала при временах $t > \varepsilon^{-1}$, мы должны потребовать, чтобы коэффициент при $\exp(i\theta)$ обращался в нуль. Мы заключаем, что A должно изменяться в соответствии с уравнением

$$(1-c_g^2)\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + 3\beta A^2 A^* + 2i\left(k\frac{\partial A}{\partial X_2} + \omega\frac{\partial A}{\partial T_2}\right) = 0. \quad (8.1.28)$$

Теперь видно, что вовсе не обязательно сохранять обе переменные X_2 и T_2, поскольку всегда можно, перейдя к новой системе координат, исключить одну из них. Опустим на время X_2 и перепишем уравнение (8.1.28) в виде

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + 3\beta\omega^2\alpha^{-1}A|A|^2 + 2ik\omega^2\alpha^{-1}\frac{\partial A}{\partial T_2} = 0. \quad (8.1.29)$$

Это — нелинейное уравнение Шрёдингера из глав 1 и 6 (см. уравнения (1.6.1) и (6.1.1)). Переменная $\bar{X}$ в этом уравнении — это «пространственная» переменная, а T_2 — «временна́я» переменная, поэтому автоматический временной масштаб, на котором действует уравнение огибающей, достаточно велик, ибо единица времени в шкале T_2 составляет ε^{-2} единиц реального времени. Функция $A(X, T_2)$ комплексная и, значит, содержит информацию о фазе волны. Если представить A в виде

$$A(\bar{X}, T_2) = a(\bar{X}, T_2)\exp[i\Phi(\bar{X}, T_2)], \quad (8.1.30)$$

где a и Φ вещественны, то мы найдем, что

$$\varphi^{(1)} = 2a(\bar{X}, T_2)\cos[kx - \omega t + \Phi(\bar{X}, T_2)], \quad (8.1.31)$$

где $2a(\bar{X}, T_2)$ — вещественная медленно меняющаяся амплитудная функция, а Φ — медленно меняющаяся фаза. Чтобы решать

задачи Коши для уравнения (8.1.29), нужно, разумеется, задать начальные условия для $a(\bar{X}, T_2)$ и $\Phi(\bar{X}, T_2)$. Односолитонное решение уравнения (8.1.29) для огибающей принимает вид (см. (1.6.2))

$$A = a\sqrt{2/\beta}\exp[i\Phi]\operatorname{sech}[a(x-bt)], \tag{8.1.32}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}bx - \left(\frac{1}{4}b^2 - a^2\right)t, \tag{8.1.33}$$

где экспоненциальный множитель представляет собой, как было показано выше, фазовый член, а a и b — произвольные постоянные. Возможность медленного изменения фазы означает, что частота и волновое число волнового пакета могут отходить от своего центрального значения, отличаясь от него на величину, медленно меняющуюся в пространстве и во времени. В нелинейной оптике это явление известно как «чириканье».

Результат (8.1.29) справедлив также и в случае, если рассмотреть эволюцию малых колебаний для уравнения СГ

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi. \tag{8.1.34}$$

Поскольку нас интересуют разложения в окрестности устойчивого состояния $\varphi = 0$, достаточно в правой части оставить лишь члены $\varphi - \varphi^3/6$, поскольку вплоть до $O(\varepsilon^5)$-уравнений члены пятого и более высоких порядков в разложении правой части (8.1.34) не понадобятся. Поэтому для получения указанного результата для уравнения СГ достаточно в (8.1.29) положить $\alpha = 1$ и $\beta = 1/6$.

8.2. Класс уравнений, приводящих к нелинейному уравнению Шрёдингера

Вычисления, связанные с методом многомасштабных разложений (см. разд. 8.1), обнаруживают некоторые структурные особенности, позволяющие предположить, что возможны обобщения. Например, в левой части всегда появляется оператор $\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2 - \alpha$, а другие операторы, такие как $2(\partial^2/\partial x\,\partial X_1 - \partial^2/\partial t\,\partial T_1)$, очевидно, являются следующими членами в разложении Тейлора этого специального оператора, если считать ε малым параметром разложения.

Поэтому рассмотрим класс уравнений в частных производных вида

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = \sum_i (M^{(i)}\varphi)(N^{(i)}\varphi) + \sum_i (P^{(i)}\varphi)(R^{(i)}\varphi)(Q^{(i)}\varphi), \tag{8.2.1}$$

где L, M, N, P, Q, R — скалярные дифференциальные операторы относительно $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$. Предположим, что исходные уравнения движения уже разложены в некоторой окрестности точки устойчивого равновесия: $\varphi \to \varphi_0 + \varphi$. Представим φ в виде асимптотического ряда по ε:

$$\varphi = \varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \ldots, \tag{8.2.2}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1},$$

и разложим операторы, представляя их рядами Тейлора около $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x$:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2};\ \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1} + \ldots\right) \to$$
$$\to L\left(\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(L_1\frac{\partial}{\partial X_1} + L_2\frac{\partial}{\partial T_1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(L_{11}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + 2L_{12}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial T_1} + L_{22}\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2L_1\frac{\partial}{\partial T_1}\right) + \ldots. \tag{8.2.3}$$

Подстрочные индексы 1 и 2 обозначают дифференцирование по $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ соответственно. Подставляя эти разложения в (8.2.1), получаем

$$O(\varepsilon): \quad L\varphi^{(1)} = 0, \tag{8.2.4}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L\varphi^{(2)} = -\left(L_1\frac{\partial}{\partial X_1} + L_2\frac{\partial}{\partial T_1}\right)\varphi^{(1)} + \sum_l (M^{(l)}\varphi^{(1)})(N^{(l)}\varphi^{(1)}), \tag{8.2.5}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad L\varphi^{(3)} = -\left(L_1\frac{\partial}{\partial X_1} + L_2\frac{\partial}{\partial T_1}\right)\varphi^{(2)} - \frac{1}{2}\left[L_{11}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + 2L_{12}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial T_1} + L_{22}\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2L_2\frac{\partial}{\partial T_2}\right] + \text{кубические нелинейные члены}. \tag{8.2.6}$$

Уравнение (8.2.4) есть попросту линеаризированный вариант уравнения (8.2.1). В соответствии со сказанным в разд. 8.2 выберем в качестве основного состояния волновую гармонику с амплитудой, зависящей от медленных переменных:

$$\varphi^{(1)} = A(X_1, T_1, T_2)\exp(i\theta) + \text{с. с.}, \tag{8.2.7}$$
$$\theta = k\omega - \omega t$$

и

$$l(-i\omega, ik) = 0. \tag{8.2.8}$$

Мы воспользовались обозначением

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\exp(i\theta) = (\exp(i\theta))\,l(-i\omega;\ ik),$$

где большой буквой обозначается операторная функция от $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$, а маленькой — функция от k и ω.

Уравнение (8.2.8) является дисперсионным соотношением. В этом месте стоит указать, что мы рассматриваем только такие системы, для которых вещественные значения ω получаются при всех k, т. е. чисто дисперсионные системы. Системы, которые при некоторых значениях k дают мнимые или комплексные значения для ω, окажутся неустойчивыми, потому что в (8.2.7) появятся члены экспоненциального роста. Системы такого вида ведут себя не так, как полностью устойчивые, и их поведение будет рассмотрено в следующей главе.

Подстановка (8.2.7) в (8.2.5) дает

$$\begin{aligned} L\varphi^{(2)} = -i\left[l_\omega\frac{\partial A}{\partial T_1} - l_k\frac{\partial A}{\partial X_1}\right]\exp(i\theta) + \\ + \sum_i m^{(i)}n^{(i)}A^2\exp(2i\theta) + \\ + \sum_i m^{(i)}n^{(i)*}|A|^2 + \text{с. с.} \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Как мы объясняли в предыдущем разделе, $\exp(i\theta)$ является секулярным членом, и для применимости теории возмущений нужно потребовать, чтобы A менялось в соответствии с уравнением

$$l_\omega\frac{\partial A}{\partial T_1} - l_k\frac{\partial A}{\partial X_1} = 0. \tag{8.2.10}$$

Вычисляя полную производную от дисперсионного соотношения (8.2.8) по k, находим

$$\begin{gathered} l_k + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)l_\omega = 0, \\ l_{kk} + 2l_{k\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^2 l_{\omega\omega} + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)l_\omega = 0 \end{gathered} \tag{8.2.11}$$

и, следовательно, в силу (8.2.10),

$$A = A(\overline{X},\ T_2), \tag{8.2.12}$$

$$\overline{X} = X_1 - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)T_1. \tag{8.2.13}$$

Поэтому по первым медленным временно́й и пространственной переменным волны движутся с групповой скоростью.

Член mn^*AA^* в (8.2.9) также может явиться причиной появления секулярностей для операторов L определенного вида. Например, если L содержит постоянную, как в уравнении (8.1.2),

то такой член не доставит хлопот, так как в разложении $\varphi^{(2)}$ не появится секулярных членов типа $x\exp(i\theta)$ или $t\exp(i\theta)$. Однако если L не содержит постоянного члена и каждый его член является нетривиальным оператором, то $\varphi^{(2)}$ будет содержать секулярные члены. Для таких L операторы M и N должны подчиняться условию

$$\sum_i m^{(i)}n^{(i)} + \text{с. с.} = 0, \tag{8.2.14}$$

для того чтобы секулярные члены не возникали.

Частное решение $\varphi^{(2)}$ представляется в виде

$$\varphi^{(2)} = \alpha_1 A^2 \exp(2i\theta) + \alpha_2 |A|^2 + B(\overline{X}, T_2) + \text{с. с.}, \tag{8.2.15}$$

где B возникает как постоянная интегрирования, но может зависеть от медленных переменных. Величина α_2 может обращаться в нуль, но может и не обращаться, в зависимости от вида L. Подставим (8.2.15) в (8.2.6) и проследим за секулярными членами. Они могут быть двух видов. Секулярности первого вида связаны с выражением $\exp(i\theta)$ и уже встречались нам. Члены второго вида, которые являются функциями лишь медленных переменных (например, B и $|A|^2$ и их медленные производные), будут секулярными, если L не содержит постоянной. Поскольку в силу (8.2.13) все медленные производные должны относиться к $\partial/\partial\overline{X}$, отсюда следует, что B — либо нуль, либо пропорционально $|A|^2$. Удаление секулярных членов, связанных с $\exp(i\theta)$, приводит тогда к нелинейному уравнению Шрёдингера вида

$$2il_\omega \frac{\partial A}{\partial T_2} + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \overline{X}^2} + \gamma A|A|^2 = 0. \tag{8.2.16}$$

Коэффициент $\partial^2\omega/\partial k^2$ можно получить из (8.2.10) с помощью уравнения (8.2.11); он может оказаться сложной функцией одновременно от k и ω. Заметим, что уравнение (8.2.16) есть нелинейное уравнение Шрёдингера того же самого вида, что и (8.1.5), за исключением того, что мы игнорируем пространственную переменную X_2. Знак будет зависеть от L, а вид нелинейности и знак $\partial^2\omega/\partial k^2$ при данном k будут зависеть от вида дисперсионного соотношения.

Прежде чем перейти к физическим примерам, стоит возвратиться к оператору обратной задачи рассеяния нелинейного уравнения Шрёдингера и рассмотреть критерии для получения солитонов. Здесь важны относительные знаки у β и γ в (8.1.1), поскольку они определяют, будет ли изоспектральный оператор НУШ самосопряженным или кососимметричным. Повторяя вычисления гл. 6, находим, что соответствующий оператор Захарова—Шабата [1972,

1976], имеющий постоянный спектр во все моменты времени, задается уравнениями

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\lambda\psi_1 = q\psi_2, \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\lambda\psi_2 = r\psi_1, \tag{8.2.17}$$

где

$$g = (\gamma/2\beta)^{1/2}A, \qquad r = -(\gamma/2\beta)^{1/2}A^*. \tag{8.2.18}$$

Очевидно, что если $\beta\gamma > 0$, то $r = -q^*$, так что оператор будет кососимметричным с мнимыми собственными значениями. Из результатов глав 2—4 и 6 следует, что солитоны порождаются дискретным спектром, который в свою очередь возникает из-за связанных состояний с отрицательной энергией. Состояниям с отрицательной энергией отвечают мнимые собственные значения. Если $\beta\gamma < 0$, то $r = q^*$ и наш оператор является самосопряженным с вещественными сообственными значениями. Появление солитонов в этом случае невозможно.

Знак величины $\beta\gamma$ может меняться от задачи к задаче, поскольку он зависит от вида нелинейности и различных параметров, сопутствующих рассматриваемой задаче. Можно трактовать случай $\beta\gamma > 0$ как случай, когда происходит фокусировка или группирование огибающей волн, а случай $\beta\gamma < 0$ — как расфокусировку. В разд. 8.4 мы будем рассматривать оптическую фокусировку и расфокусировку в среде, где показатель преломления нелинейно меняется в зависимости от поля. Аналогичный пример упоминается также в разд. 8.7. в примечаниях; он связан с возможностью распространения солитонов по оптическому волокну. Общий принцип, согласно которому положительный или отрицательный знак $\beta\gamma$ отвечает фокусировке или расфокусировке волн соответственно, применим к любым нерезонансным устойчивым слабонелинейным системам, будь то в жидкости, плазме или в устройствах лазерной оптики.

Как мы видим выше, критерий $\beta\gamma \gtrless 0$ важен для решения вопроса о том, как будут развиваться во времени начальные данные. Возникающие две возможности — группирование в солитоны либо развитие в автомодельную форму без группирования — напоминают ситуацию с известным критерием Бенджамина—Фейра (Бенджамин и Фейр [1967], Бенджамин [1967]), касающимся устойчивости или неустойчивости волн на воде в связи с воздействием побочных гармоник на фундаментальную частоту. Речь идет о том, чтобы определить, будет ли несущая волна дестабилизироваться из-за нелинейности в исходных уравнениях движения. Хотя окончательным уравнением для амплитуды в любом случае будет нелинейное уравнение Шрёдингера, тем не

менее в вопросе о том, станет ли несущая волна неустойчивой в результате воздействия побочных гармоник, решающим фактором является знак $\beta\gamma$. Применяя очень простой и элегантный метод Стюарта и Ди Примы [1978], легко показать, что $\beta\gamma > 0$ отвечает неустойчивости, как и следовало ожидать.

Прежде всего линеаризуем наше уравнение в окрестности какого-нибудь решения, не зависящего от x. Такое решение легко находится:

$$A_0(t) = a_0 \exp(i\gamma |a_0|^2 t), \tag{8.2.19}$$

где a_0 — произвольное комплексное число. Положим теперь

$$A_0(x, t) = A_0(t)(1 + B(x, t)) \tag{8.2.20}$$

и, применяя (8.2.20), линеаризуем НУШ. Далее, легко показать, что уравнение для B имеет вид

$$i\frac{\partial B}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \gamma |a_0|^2 (B + B^*) = 0. \tag{8.2.21}$$

Поскольку уравнение (8.2.21) линейно, можно искать решение в виде

$$B = B_1 \exp[i(lx + \Omega t)] + B_2 \exp[-i(lx + \Omega^* t)]. \tag{8.2.22}$$

Отметим, что Ω комплексно и тот факт, что $\operatorname{Im}\Omega \neq 0$ указывает на неустойчивость волн. Для коэффициентов в (8.2.22) мы получим два уравнения:

$$\gamma |a_0|^2 B_1^* + B_2(\Omega^* - \beta l^2 + \gamma |a_0|^2) = 0, \tag{8.2.23}$$

$$(-\Omega - \beta l^2 + \gamma |a_0|^2) B_1 + \gamma |a_0|^2 B_2^* = 0. \tag{8.2.24}$$

Условие того, что эта пара уравнений допускает нетривиальное решение, имеет следующий вид:

$$\Omega^2 = \beta l^2 (\beta l^2 - 2\gamma |a_0|^2). \tag{8.2.25}$$

Вне зависимости от знака β легко показать, что $\Omega^2 < 0$, если

$$\beta\gamma > \frac{\beta^2 l^2}{2|a_0|^2} > 0. \tag{8.2.26}$$

Если $\beta\gamma > 0$, то волновые числа $l < 2|\gamma\beta^{-1}|^{1/2} a_0$ будут неустойчивыми. Этот критерий согласуется с полученным выше из преобразования обратной задачи рассеяния.

В заключение этого раздела мы приведем пример того, как НУШ возникает в качестве уравнения огибающей, применяя обобщенное уравнение КдФ, попадающее в общую категорию уравнений вида (8.2.1). Это КдФ-уравнение возьмем в таком виде:

$$u_t + u_x + \beta_1 (u^3)_x + \beta_2 (u^2)_x + u_{xxx} = 0. \tag{8.2.27}$$

В этом случае для оператора L получается выражение

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \tag{8.2.28}$$

а дисперсионное соотношение принимает вид $\omega = k - k^3$. Рассматривая разложение u в ряд

$$u = \sum_{n=1} \varepsilon^n u^{(n)} \tag{8.2.29}$$

и ограничиваясь членами порядка $O(\varepsilon)$, находим, что

$$u^{(1)} = A(X_1, T_1, T_2) \exp(i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.2.30}$$

Переходя далее к членам порядка $O(\varepsilon^2)$, получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right] u^{(2)} = -\left[\frac{\partial A}{\partial T_1} + (1 - 3k^2)\frac{\partial A}{\partial X_1}\right] \exp(i\theta) - \\ - 2\beta_1 ikA^2 \exp(2i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.2.31}$$

Поскольку член $\exp(i\theta)$ является секулярным, можно ввести переменную

$$\bar{X} = X_1 - (1 - 3k^2) T_1. \tag{8.2.32}$$

Интегрируя уравнение (8.2.31), мы находим, что

$$u^{(2)} = \frac{\beta_1}{3k^2}[A^2 \exp(2i\theta) + A^{*2} \exp(-2i\theta)] + B(\bar{X}, T_2), \tag{8.2.33}$$

где $B(\bar{X}, T_2)$ — постоянная интегрирования по отношению к быстрым переменным x и t, которая может быть функцией медленных переменных. Рассматривая теперь члены порядка $O(\varepsilon^3)$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) u^{(3)} + \left(3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right) \times \\ \times \left[\frac{\beta_1}{3k^2} A^2 \exp(2i\theta) + \frac{\beta_1}{3k^2} A^{*2} \exp(-2i\theta) + B\right] + \\ + \left[3\frac{\partial^3}{\partial x \partial X_1^2} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right][A \exp(i\theta) + A^* \exp(-i\theta)] = \\ = -\beta_2 \frac{\partial}{\partial x}[A|A|^2 \exp(i\theta) + \ldots] - \\ - 2\beta_1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(AB + \frac{\beta_1}{3k^2} A|A|^2\right) \exp(i\theta) + \ldots\right] - \\ - \beta_1 \frac{\partial}{\partial X_1}[A^2 \exp(2i\theta) + 2|A|^2 + A^{*2} \exp(-2i\theta)]. \tag{8.2.34}$$

В выражении (8.2.34) имеются секулярные члены двух видов: те, которые зависят только от медленных переменных и приводят к появлению членов в u^3, явно зависящих от x и t. Их удаление дает уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right) B = -2\beta_1 \frac{\partial}{\partial X_1}(|A|^2). \tag{8.2.35}$$

Из (8.2.32) вытекает, что

$$B = -\frac{2\beta_1}{3k^2}|A|^2. \tag{8.2.36}$$

Удаление секулярных членов, связанных с $\exp(i\theta)$, приводит к уравнению

$$3ik\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + \frac{\partial A}{\partial T_2} = -i\beta_2 kA|A|^2 + \frac{2i\beta_1^2}{3k}A|A|^2, \tag{8.2.37}$$

которое окончательно может быть записано в виде НУШ:

$$i\frac{\partial A}{\partial T_2} = 3k\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + k\left(\beta_2 - \frac{2\beta_1^2}{3k^2}\right)A|A|^2. \tag{8.2.38}$$

Критерий $\beta\gamma > 0$ для решения в этом случае принимает вид

$$3k^2\beta_2 > 2\beta_1^2. \tag{8.2.39}$$

«Чистое» КдФ-уравнение (случай $\beta_2 = 0$) не позволяет появляться солитонам огибающей «поверх» волн непрерывного спектра, в то время как мКдФ-уравнение (случай $\beta_1 = 0$) позволяет это, если $\beta_2 > 0$. Вспоминая гл. 6, где мы показали, что решения-бризеры (комплексно-сопряженные собственные значения) могут существовать для мКдФ-уравнения при $\beta_2 > 0$, но не могут при $\beta_2 < 0$, и не могут существовать для КдФ-уравнения, видим, что это согласуется с результатами настоящего раздела для НЛШ-уравнения, поскольку решения-бризеры в высокочастотном пределе становятся солитонами огибающей, модулирующими несущую волну.

Итак, мы показали в этом разделе, что устойчивые консервативные системы подчиняются НЛШ-уравнениям — характерным уравнениям для огибающих. В следующих двух разделах мы сосредоточим внимание на двух рабочих примерах, первый из которых представляет собой небольшое отклонение от общего случая (выводится двумерное НШЛ-уравнение, описывающее оптическую самофокусировку, в котором пространственные переменные трансверсальны к направлению распространения падающей волны).

8.3. Оптическая самофокусировка

В случае когда нейтральный (незаряженный) диэлектрик подвергается воздействию интенсивного лазерного луча, находящегося вне резонанса, может оказаться, что поляризация P диэлектрика нелинейно зависит от поля E. Для слабых полей мы обычно принимаем

$$P = \alpha E, \tag{8.3.1}$$

где α — тензор поляризуемости, элементы которого определяются кристаллической структурой. Для простоты будем в этом случае рассматривать плавное распределение центрально-симметричных атомов диэлектрика с плотностью n атомов на кубический сантиметр, образующих изотропную среду. Поляризацию P представим в виде ряда

$$P = \alpha_1 E + \alpha_3 E^3 + \ldots, \tag{8.3.2}$$

где α_1 — линейная, а α_3 — нелинейная поляризуемость. Уравнения Максвелла, описывающие эволюцию поля E, в этом случае записывается в виде

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} E_{tt} = \frac{4\pi n}{c^2} P_{tt}. \tag{8.3.3}$$

Это можно переписать так:

$$\nabla^2 E - \beta E_{tt} = \gamma (E^3)_{tt}, \tag{8.3.4}$$

где

$$\beta = c^{-2}(1 + 4\pi n \alpha_1), \tag{8.3.5}$$

$$\gamma = 4\pi n \alpha_3 c^{-2}. \tag{8.3.6}$$

Предположим, что линейно поляризованная волна распространяется лишь вдоль оси z, и рассмотрим медленные амплитудные изменения выражения $\exp[i(kz - \omega t) + \delta]$. Если ввести медленные пространственные и временну́ю переменные

$$X_n = \varepsilon^n x, \quad Y_n = \varepsilon^n y, \quad Z_n = \varepsilon^n z \tag{8.3.7}$$

и представить E в виде ряда

$$E = \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \cdots, \tag{8.3.8}$$

то уравнение (8.3.4) в развернутом виде запишется следующим образом

$$\left[\left(\nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + 2\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial Y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial Z_1} - \beta \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\right) + \right.$$

$$+ \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_2} + \right.$$

$$\left. \left. + 2\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial Y_1} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial Z_2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_2}\right) + \cdots\right]\left(\varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \cdots\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots\right)\left(\varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \ldots\right). \tag{8.3.9}$$

Последовательно рассматривая члены различного порядка по ε, получаем уравнения

$$O(\varepsilon): \quad \left(\nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(1)} = 0, \tag{8.3.10}$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \left(\nabla^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(2)} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial Y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial Z_1} - \beta\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right) E^{(1)}, \tag{8.3.11}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \left(\nabla^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(3)} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial Y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial Z_1} - \beta\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right) E^{(2)} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(E^{(1)})^3] - \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial Y_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial Z_2} - 2\beta\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_2}\right) E^{(1)}. \tag{8.3.12}$$

Уравнение (8.3.10) линейно, и одним из его решений будет

$$E^{(1)} = \mathscr{E}(X_n, Y_n, Z_n, T_n)\exp(i\theta) + \text{с. с.}, \tag{8.3.13}$$

где

$$\theta = kz - \omega t + \delta, \tag{8.3.14}$$

$$\omega^2 = k^2/\beta, \quad d\omega/dk = \beta^{-1/2}. \tag{8.3.15}$$

Это решение представляет собой волну, поляризованную вдоль оси z, с медленно меняющейся огибающей $\mathscr{E}$. Поскольку экспонента $\exp(i\theta)$ зависит лишь от одной пространственной переменной z, первые два члена в правой части (8.3.11) равны нулю, что дает

$$\left(\nabla^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(1)} = -2\beta i\omega\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T_1} + \beta^{-1/2}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial Z_1}\right)\exp(i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.3.16}$$

Как и в большинстве таких задач, члены в правой части (8.3.16) секулярны, и их надо удалить. С этой целью положим

$$\xi = Z_1 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) T_1. \tag{8.3.17}$$

Тогда $O(\varepsilon^3)$-уравнение приводится к виду

$$\left(\nabla^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(3)} = -\left[\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial Y_1^2} + 2ik\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial Z_1} + 2i\beta\omega\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T_2}\right]\exp(i\theta) + \gamma\omega^2[9\mathscr{E}^3\exp(3i\theta) - 3\mathscr{E}^2\mathscr{E}^*\exp(i\theta)] + \text{с. с.} \tag{8.3.18}$$

Производные по ξ здесь не появляются ввиду взаимного сокращения членов $\partial^2\mathscr{E}/\partial Z_1^2$ и $\partial^2\mathscr{E}/\partial T_1^2$. Наконец, удаление секулярных

членов из уравнения (8.3.18) приводит к амплитудному уравнению для $\mathscr{E}$:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial Y_1^2} + 3\gamma\omega^2 \mathscr{E} |\mathscr{E}|^2 + i \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \bar{Z}} = 0; \qquad (8.3.19)$$

мы перешли к системе отсчета, движущейся с групповой скоростью вдоль оси z.

Уравнение (8.3.19) представляет собой НЛШ-уравнение с двумя пространственными переменными. В случае одного трансверсального пространственного измерения это уравнение при $\gamma > 0$ допускает солитоны огибающей, и поскольку оно интегрируемо методом обратной задачи рассеяния (по поводу общего решения см. гл. 6, разд. 3), некоторый начальный профиль будет порождать «солитоны». Асимптотически ($\bar{Z} \to \infty$) эти решения будут выглядеть следующим образом:

$$|\mathscr{E}|^2 = 4 \sum_{i=1} a_i^2 \operatorname{sech}^2 \{2a_i X_1 - 8a_i b_i \bar{Z} + \delta_i\}, \qquad (8.3.20)$$

где подразумевается, что переменная $\bar{Z}$ играет теперь роль «времени».

Каждый «солитон» представляет собой канал (нить, волокно), отклоненный от оси z на угол, равный $\operatorname{arctg}(4b_i)$. Такая группировка начального профиля в «нить» (*филаментация*) называется *самофокусировкой*. Если, однако, γ отрицательно, то обратная задача рассеяния приводит к самосопряженной проблеме на собственные значения, так что солитоны не появляются и возникает лишь непрерывный спектр, который рассеивается при увеличении Z. Эта ситуация эквивалентна случаю расфокусировки. Поскольку X_1 и Y_1 — трансверсальные переменные, фокусировка в данном случае сводится к группированию в нити, идущие в трансверсальных направлениях. Осевая переменная ξ, определенная в (8.3.17), не появляется, так как в этом направлении рассеяния не происходит. В других примерах, где распространение солитона окажется осевым, фокусировка будет сводиться к группированию несущей волны в импульсы (солитоны) вдоль направления распространения волны, как было объяснено в разд. 8.2. Такая фокусировка имела бы место при наличии осевого рассеяния.

8.4. Ленгмюровские волны в плазме

Обратимся теперь к одной задаче из физики плазмы, очень похожей на те, что были рассмотрены в гл. 5. Там мы рассматривали движение длинных волн плотности заряженных ионов в плазме, пренебрегая массой электрона. Теперь исследуем ситуацию, когда ионы совершенно холодные, а следовательно, стацио-

нарные. Тогда уже нельзя трактовать электроны просто как заряженный газ, но надо учитывать инерцию электронов; мы ищем уравнение для амплитуды, описывающее эволюцию колебаний электронной плазмы (ленгмюровские волны). Вклад ионов проявляется лишь в уравнении Пуассона, где следует принять во внимание эффект их зарядов. Запишем уравнение неразрывности, уравнение сохранения импульса и уравнение Пуассона для электронов в безразмерном виде, пользуясь процедурой пересчета из разд. 5.2. Обозначим через n и v соответственно плотность и скорость электронов, а через φ — электростатический потенциал. Граничные условия имеют вид $n \to 1$, φ, $v \to 0$ при $|x| \to \infty$, а уравнения, о которых мы только что говорили, записываются так:

$$n_t + (nv)_x = 0, \tag{8.4.1}$$

$$v_t + vv_x = \varphi_x - n_x/n, \tag{8.4.2}$$

$$\varphi_{xx} = n - 1. \tag{8.4.3}$$

член -1 в (8.4.3) отвечает постоянному промасштабированному заряду ионов, который считаем равным 1, член n_x/n в (8.4.2) представляет давление электронов, как объяснялось в гл. 5. В гл. 5 из-за того, что мы пренебрегали массой электрона, член $v_t + vv_x$ не принимался во внимание, что позволило нам проинтегрировать уравнение (8.4.2) (с нулевой левой частью) и прийти к формуле $n = \exp(\varphi)$. Поскольку мы теперь включаем в рассмотрение инерцию электрона, уже нельзя считать верным это последнее соотношение между плотностью и потенциалом.

В духе настоящей главы мы хотим сейчас изучить эволюцию амплитуды осцилляций плотности электронов. Эти осцилляции известны как ленгмюровские волны. Процедура пересчета масштаба здесь та же, что и прежде, за исключением того, что мы имеем теперь систему нелинейных уравнений в частных производных с тремя зависимыми переменными, а не одно уравнение. Вводя медленные пространственные и временну́ю переменные $X_1 = \varepsilon x$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ и разлагая n, v, и φ в ряд около их равновесных значений, получим

$$n = 1 + \sum_{i=1} \varepsilon^i n^{(i)}, \tag{8.4.4}$$

$$v = \sum_{i=1} \varepsilon^i v^{(i)}, \tag{8.4.5}$$

$$\varphi = \sum_{i=1} \varepsilon^i \varphi^{(i)}. \tag{8.4.6}$$

Мы опустим переменную X_2, потому что ее можно убрать изменением системы отсчета. Вместо полного разложения дифференциальных операторов и зависимых переменных, которое заняло

бы слишком много места, мы ограничимся последовательным выписыванием уравнений в приближениях порядка $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^3)$ для уравнений (8.4.1)—(8.4.3). Для (8.4.1):

$$O(\varepsilon): \quad n_t^{(1)} + v_x^{(1)} = 0, \tag{8.4.7}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad n_t^{(2)} + v_x^{(2)} = -\left[\frac{\partial n^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial X_1} + (n^{(1)}v^{(1)})_x\right], \tag{8.4.8}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad n_t^{(3)} + v_x^{(3)} = -\left[\frac{\partial n^{(2)}}{\partial X_1} + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial T_2} + (v^{(2)}n^{(1)} + v^{(1)}n^{(2)})_x\right]. \tag{8.4.9}$$

Для (8.4.2):

$$O(\varepsilon): \quad v_t^{(1)} - \varphi_x^{(1)} + n_x^{(1)} = 0, \tag{8.4.10}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad v_t^{(2)} - \varphi_x^{(2)} + n_x^{(2)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{1}{2}(v^{(1)2} - n^{(1)2})_x + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial X_1} - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial X_1} = 0, \tag{8.4.11}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad v_t^{(3)} - \varphi_x^{(3)} + n_x^{(3)} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial T_1} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial X_1} + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial X_1} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_1}(v^{(1)2} - n^{(1)2}) + (v^{(1)}v^{(2)} - n^{(1)}n^{(2)})_x + n^{(1)}n_x^{(1)} = 0. \tag{8.4.12}$$

Для (8.4.3):

$$O(\varepsilon): \quad \varphi_{xx}^{(1)} = n^{(1)}, \tag{8.4.13}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \varphi_{xx}^{(2)} + 2\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x\, \partial X_1} = n^{(2)}, \tag{8.4.14}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \varphi_{xx}^{(3)} + 2\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x\, dX_1} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial X_1^2} = n^{(3)}. \tag{8.4.15}$$

Для членов порядка $O(\varepsilon^3)$ в уравнении (8.4.1) и членов порядка $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^3)$ в уравнении (8.4.2) мы перегруппировали соответствующие выражения и последовательно использовали уже полученные формулы для упрощения последующих. Линейная задача может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -1 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{(1)} \\ v^{(1)} \\ \varphi^{(1)} \end{pmatrix} = 0. \tag{8.4.16}$$

Напомним, что мы ищем осцилляционные решения вида $\exp(i\theta)$, $\theta = kx - \omega t + \delta$. Дисперсионное соотношение можно найти,

полагая определитель матрицы в (8.4.16) равным нулю; это условие попросту представляет собой условие существования нетривиальных решений $n^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ и $v^{(1)}$. Итак, мы находим, что

$$\det\begin{pmatrix} -i\omega & ik & 0 \\ ik & -i\omega & -ik \\ -1 & 0 & -k^2 \end{pmatrix} = 0, \tag{8.4.17}$$

откуда следует, что

$$\omega^2 = k^2 + 1, \quad d\omega/dk = k/\omega, \tag{8.4.18}$$

и мы получаем решение линейной задачи в виде

$$\begin{pmatrix} n^{(1)} \\ v^{(1)} \\ \varphi^{(1)} \end{pmatrix} = A(X_1, T_1, T_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega/k \\ -1/k^2 \end{pmatrix}\exp(i\theta) + \text{с. с.}, \tag{8.4.19}$$

где $A(X_1, T_1, T_2)$ — комплексная амплитудная функция.

Можно было бы действовать и иначе — исключить $v^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$ и получить уравнение

$$n_{tt}^{(1)} - n_{xx}^{(1)} + n^{(1)} = 0. \tag{8.4.20}$$

Заметим здесь, что, как и во всех задачах такого рода, при переходе к приближению следующего порядка по ε вид линейной части получающегося уравнения остается одним и тем же; это ясно из результатов разд. 8.2. Поэтому в каждом порядке мы получим уравнения вида

$$n_t^{(i)} + n_x^{(i)} = \alpha^{(i)}, \tag{8.4.21}$$

$$v_t^{(i)} - \varphi_x^{(i)} + n_x^{(i)} + \beta^{(i)} = 0, \tag{8.4.22}$$

$$\varphi_{xx}^{(i)} + \gamma^{(i)} = n^{(i)}, \tag{8.4.23}$$

где $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ и $\gamma^{(i)}$ — остаточные члены в порядках $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^3)$.

Отсюда получаем

$$n_{tt}^{(i)} - n_{xx}^{(i)} + n^{(i)} = \alpha_t^{(i)} + \beta_x^{(i)} + \gamma^{(i)}. \tag{8.4.24}$$

Очевидно, что правая часть в (8.4.24) содержит члены с множителем $\exp(i\theta)$, которые окажутся секулярными и должны быть удалены для того, чтобы можно было пользоваться теорией возмущений. Для $i = 2$ находим, что

$$\alpha_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} + \gamma^{(2)} = 2i\omega\left[\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{k}{\omega}\frac{\partial A}{\partial X_1}\right]\exp(i\theta) - \\ - (2 + 4\omega^2)A^2\exp(2i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.4.25}$$

Так как k/ω — это групповая скорость, то, поступая обычным образом, положим

$$\bar{X} = X_1 - \left(\frac{k}{\omega}\right)T_1, \tag{8.4.26}$$

с тем чтобы удалить секулярные члены в (8.4.25). Не входя в подробности вычислений, заметим просто, что можно проинтегрировать эти уравнения в порядке $O(\varepsilon^2)$ и получить

$$n^{(2)} = \frac{2}{3}(2\omega^2 + 1) A^2 \exp(2i\theta) + \text{с. с.} + B_1, \tag{8.4.27}$$

$$v^{(2)} = \frac{\omega}{3k}(4\omega^2 - 1) A^2 \exp(2i\theta) + \\ + \frac{i}{\omega k^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \bar{X}} \exp(i\theta) + \text{с. с.} + B_2, \tag{8.4.28}$$

$$\varphi^{(2)} = -\frac{1}{6k^2}(2\omega^2 + 1) A^2 \exp(2i\theta) - \\ - \frac{2i}{k^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial X} \exp(i\theta) + \text{с. с.} + B_3. \tag{8.4.29}$$

Секулярные члены в $O(\varepsilon^3)$ в медленных переменных дают только то, что $B_1(\bar{X}, T_2) = B_2(\bar{X}, T_2) = 0$ и

$$B_3 = \frac{1}{2} k^{-2} |A|^2; \tag{8.4.30}$$

наконец, секулярные члены при $\exp i(\theta)$ после некоторых алгебраических преобразований дают уравнение

$$2i \frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} - \frac{1}{3\omega}(8k^4 + 21k^2 + 12) A |A|^2 = 0. \tag{8.4.31}$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, коэффициент при $\partial^2 A/\partial \bar{X}^2$ в точности равен $d\omega^2/dk^2$.

8.5. Квадратичный резонанс

При выводе НЛШ-уравнений в разд. 2 эти уравнения всегда получались как результат удаления секулярных членов в порядке $O(\varepsilon^3)$, с тем чтобы обеспечить пригодность теории возмущений. Мы будем говорить об этом как о *кубическом резонансе*. Если, однако, рассматриваемая система имеет квадратичные нелинейности, то можно получить квадратичный резонанс в порядке $O(\varepsilon^2)$, рассматривая не одно, а несколько волновых чисел и частот; такие ситуации действительно возникают в физике, когда происходит взаимодействие различных мод в одной и той же системе. Для изучения эффекта нескольких взаимодействующих мод вернемся к нашим вычислениям из разд. 8.2 и линейное решение в порядке $O(\varepsilon)$ возьмем в виде

$$\varphi^{(1)} = A_1 \exp(i\theta_1) + A_2 \exp(i\theta_2) + \\ + A_3 \exp(i\theta_3) + \text{с. с.} \tag{8.5.1}$$

Предположим также, что волны образуют «триаду», удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} k_3 &= k_1 + k_2 \text{ (сохранение импульса)}, \\ \omega_3 &= \omega_1 + \omega_2 \text{ (сохранение энергии)}, \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

так что

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2. \tag{8.5.3}$$

Квадратичный член $(M\varphi)(N\varphi)$ в (8.2.1) в порядке $O(\varepsilon^2)$ дает различные гармоники, большинство из которых не резонирует с L. Однако в силу равенства $0_3 = \theta_1 + \theta_2$ три из них будут резонировать с L. Выписывая члены порядка $O(\varepsilon^2)$, получаем

$$\begin{aligned} L\varphi^{(2)} = &- \sum_{j=1}^{3} \left(l_{\omega_j} \frac{\partial A}{\partial T_1} - l_{k_j} \frac{\partial A}{\partial X_1} \right) \exp(i\theta_j) + \\ &+ (m_1 n_2 + m_2 n_1) A_1 A_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)] + \\ &+ (m_3 n_1^* + m_1^* n_3) A_3 A_1^* \exp[i(\theta_3 - \theta_1)] + \\ &+ (m_3 n_2^* + m_2^* n_3) A_3 A_2^* \exp[i(\theta_3 - \theta_2)] + \text{с. с.} + \\ &+ \text{несекулярные квадратичные члены}, \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

где l_{k_j} обозначает производную l по k, вычисленную при $k = k_j (j = 1, 2, 3)$. Учитывая тот факт, что $0_3 = \theta_1 + \theta_2$, мы можем удалить секулярные члены и получить окончательно

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \right) A_1 = \mu_1 A_2^* A_3, \tag{8.5.5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial X_1} \right) A_2 = \mu_2 A_3 A_1^*, \tag{8.5.6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_3 \frac{\partial}{\partial X_1} \right) A_3 = \mu_3 A_1 A_2. \tag{8.5.7}$$

Эти уравнения общеизвестны как уравнения трехволнового резонанса. Квадратичные члены дают резонанс исключительно ввиду соотношений между частотами и волновыми числами. Хотя кажется, что с физической точки зрения трудно удовлетворить условиям (8.5.2), все же многие системы устроены так, что каждое из этих условий выполняется автоматически за счет того, что создается третья волна. Например, в нелинейной оптике лазер подходящей частоты, действующий как насос, может индуцировать волны Стокса посредством процесса Рамана, и третья волна появляется как акустическая (фононная) волна в материале. Уравнениям (8.5.2) много легче удовлетворить в случае более высокой пространственной размерности (что и с физической точки зрения более уместно):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \\ \omega_3 &= \omega_1 + \omega_2. \end{aligned} \tag{8.5.8}$$

Для заданного дисперсионного соотношения мы теперь имеем много больше степеней свободы: удовлетворить уравнениям (8.5.8) легче. В пространстве двух измерений, например, нам надо ввести еще одну медленную переменную $Y_1 = \varepsilon y$, что приводит к уравнениям с шестью групповыми скоростями, которые могут быть вычислены по трем частотам:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_{11}\frac{\partial}{\partial X_1} + c_{12}\frac{\partial}{\partial Y_1}\right) A_1 = \mu_1 A_2^* A_3, \tag{8.5.9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_{21}\frac{\partial}{\partial X_1} + c_{22}\frac{\partial}{\partial Y_1}\right) A_2 = \mu_2 A_3 A_1^*, \tag{8.5.10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_{31}\frac{\partial}{\partial X_1} + c_{32}\frac{\partial}{\partial Y_1}\right) A_3 = \mu_3 A_1 A_2. \tag{8.5.11}$$

Трехволновой резонанс, или феномен *смешивания*, — очень важный эффект во всех нелинейных системах, так как он допускает обмен энергиями между модами. Он также допускает подкачку энергии по одной моде и затем передачу этой энергии в другую моду. Захаров и Манаков [1973; 1976; 1976] и Кауп [1976] показали, что пространственно одномерный вариант трехволновых уравнений интегрируем с помощью преобразования обратной задачи рассеяния, а Захаров [1976] то же самое установил для двумерного случая. Проследив, как возникают эти уравнения, нетрудно понять, что такие резонансы естественно должны обнаруживаться в широком классе физических систем, включая нелинейную оптику, электронику, теорию плазмы и гидродинамику. Обширный и превосходный обзор этой тематики дан Каупом, Рейманом и Берсом [1979] и Рейманом [1979]. В этих статьях нашел отражение почти каждый аспект теории трехволнового взаимодействия, и в них можно найти полный перечень ссылок, в том числе на работы по неустойчивостям, вызванным затуханием, и взрывным неустойчивостям. Кауп [1981] рассмотрел, кроме того, трехволновый резонанс в случае трех пространственных измерений.

Проблема интегрируемости уравнений (8.5.5)—(8.5.7) методом обратной задачи рассеяния — это довольно трудная проблема, выходящая за рамки настоящей книги. Однако дело упрощается, если рассмотреть двухволновую версию уравнений (8.5.5)—(8.5.7). Повторение предыдущих вычислений при условии $k_2 = 2k_1$ приводит к уравнениям двухволнового резонанса

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right) A_1 &= \mu_1 A_1^* A_2,\\ \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right) A_2 &= \mu_2 A_1^2.\end{aligned} \tag{8.5.12}$$

После преобразования

$$\xi = \mu_1 (X - c_2 T_1)/(c_1 - c_2),$$
$$\tau = -\mu_2 (X - c_1 T_1)/(c_1 - c_2) \tag{8.5.13}$$

уравнения (8.5.12) принимают вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi} = A_1^* A_2,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial \tau} = A_1^2. \tag{8.5.14}$$

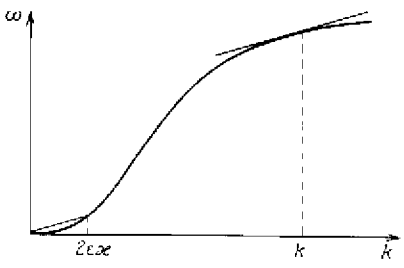


Рис. 8.3.

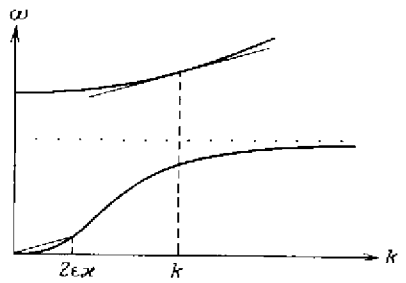


Рис. 8.4

Условиям интегрируемости 2×2-задачи рассеяния из гл. 6 (см. уравнения (6.1.12)) можно удовлетворить, выбрав

$$A = -\frac{i}{2i\lambda} |A_1|^2, \quad B = \frac{1}{2i\lambda} A_1^2, \quad C = -\frac{1}{2i\lambda} A_1^{*2}, \tag{8.5.15}$$

$$q = r^* = A_2. \tag{8.5.16}$$

Описание различных решений, получаемых методом обратной задачи рассеяния, включая порожденные затуханием и взрывные неустойчивости, можно найти у Каупа и др. [1979].

8.6. Резонанс длинных и коротких волн

В 1977 г. Бенни открыл новый вид триадного резонанса между тремя волнами с волновыми числами k_1, k_2 и k_3 и тремя частотами ω_1, ω_2 и ω_3. Возьмем

$$k_1 = k_2 + k_3, \tag{8.6.1}$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \tag{8.6.2}$$

и будем предполагать, что k_1 и k_2 близки, т. е. $k_1 = k + \varepsilon\varkappa$, $k_2 = k - \varepsilon\varkappa$ и $k_3 = 2\varepsilon\varkappa$ (k, $\varkappa \sim O(1)$, $\varepsilon \ll 1$). Соотношение (8.6.1) для триады волновых чисел при таком выборе автоматически вы-

полняется, но соотношение (8.6.2) для частотной триады будет выполняться, лишь если справедливо равенство

$$\omega(k + \varepsilon k) - \omega(k - \varepsilon k) = \omega_3, \tag{8.6.3}$$

которое в порядке $O(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$2\varepsilon k \frac{d\omega}{dk} = \omega_3. \tag{8.6.4}$$

Из (8.6.4) видно, что (8.6.2) удовлетворяется в порядке $O(\varepsilon)$, если групповая скорость короткой волны (с волновым числом k) равна фазовой скорости длиной волны (с волновым числом $2\varepsilon\varkappa$). Бенни называет это *длинно-коротковолновым резонансом*. На первый взгляд кажется, что достичь такого резонанса трудно, но на рис. 8.3 представлена геометрическая картинка, показывающая, как этого можно добиться. Для того чтобы выполнялось условие резонанса, требуется дисперсионное соотношение специального вида. Много более реалистичный и более общий тип систем, для которых $c_p(2\varepsilon k) = c_g(k)$—это системы, имеющие двойные ветви. На рис. 8.4 и 8.5 изображены два типа двойных ветвей. Предполагая, что градиенты различных ветвей одного и того же порядка по абсолютной величине, получаем, что $c_p = c_g$. Дисперсионные соотношения с двойными или вообще кратными ветвями весьма обычны в физике, так что существует множество примеров, позволяющих изучить этот вид резонанса. В самом деле, системы с двумя ветвями дают конфигурацию в (ω, k)-пространстве, которая допускает возможность появления этого специального триадного резонанса, в то время как обычные трехволновые резонансы не могут быть получены в одномерном пространстве. В частности, рис. 8.4 представляет дисперсионное соотношение с двумя ветвями, типичное для целой категории систем, имеющих верхнюю (оптическую) ветвь и нижнюю (акустическую) ветвь. Механизм длинно-коротковолнового резонанса работает очено просто. Мы можем представлять себе две волны $k + \varepsilon\varkappa$, $k - \varepsilon\varkappa$ как побочные частоты главной волны k, которые

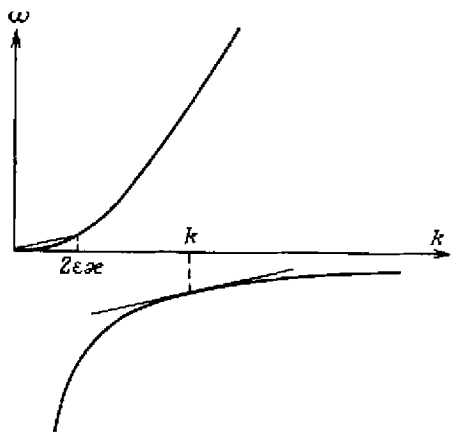


Рис. 8.5.

в результате «биений» дают медленную осцилляцию. Математически это может быть выражено следующей формулой:

$$\varphi = a\exp(i\theta_1) + a\exp(i\theta_2) + \text{с. с.}$$
$$= 4a\cos(kx - \omega t)\cos[\varepsilon(kx - \Omega t)]. \qquad (8.6.5)$$

Быстрая осцилляция в верхней ветви слишком быстра для того, чтобы ее почувствовала нижняя ветвь на масштабах k^{-1} и ω^{-1} (пространственном и временно́м), но медленная осцилляция, порожденная (в результате биений) верхней ветвью, может «подкачивать» или возбуждать нижнюю ветвь. Две половины системы, которые обычно считают независимыми, теперь оказываются связанными. Вопрос о том, достижима ли такая связь («спаривание»), можно решить геометрически, как на рис. 8.4—8,5, если соответствующим образом изобразить семейство дисперсионных кривых.

Вместо того чтобы пытаться получить общие амплитудные уравнения методом, описанным в предыдущем разделе (для трехволнового резонанса путем согласования θ_1-члена с $(\theta_2 + \theta_3)$-членом), проще скомбинировать метод многомасштабных растяжений, с помощью которого находится медленная амплитудная осцилляция, отвечающая верхней ветви, и метод растяжения координат из гл. 5, с помощью которого определяется длинная волна, отвечающая нижней ветви.

Расщепим уравнения движения на две части, отвечающие верхней и нижней ветви. Обращаясь вначале к нижней ветви, запишем эту часть уравнений движения в общем виде

$$L^{(u)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right\} = f(\varphi,\ N), \qquad (8.6.6)$$

где φ и N — зависимые переменные, отвечающие верхней и нижней ветви. Запишем разложения

$$\varphi = \varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \cdots,$$
$$N = \varepsilon^2 n + \cdots \qquad (8.6.7)$$

и введем медленные переменные $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$, $\tau = \varepsilon^2 t$. Разлагая (8.6.6) в ряд Тейлора, получаем

$$L^{(u)}\varphi^{(1)} = 0, \qquad (8.6.8)$$

$$L^{(u)}\varphi^{(2)} = -\left(L_1^{(u)}\frac{\partial}{\partial T} + L_2^{(u)}\frac{\partial}{\partial X}\right)\varphi^{(1)}, \qquad (8.6.9)$$

где нижние индексы 1 и 2, как обычно, обозначают дифференцирование соответственно по первой и второй переменным $L^{(u)}$. Положим

$$\varphi^{(1)} = A(X,\ T,\ \tau)\exp(i\theta) + \text{с. с.} \qquad (8.6.10)$$

Мы должны, как обычно, связать X и T, выбрав систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, с тем чтобы убрать секулярные члены в порядке $O(\varepsilon^2)$. Поэтому введем новую переменную $\xi = \varepsilon(x - c_g t)$. Используя эту переменную в порядке $O(\varepsilon^3)$, находим, что

$$L^{(u)}\varphi^{(3)} = -\frac{1}{2}\left\{\beta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + i\frac{\partial}{\partial\tau}\right\}\varphi^{(1)} + \gamma n\varphi^{(1)}; \qquad (8.6.11)$$

последний член в этом уравнении возникает из квадратичных членов, связывающих φ и N в (8.6.6). Окончательное амплитудное уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial A}{\partial\tau} + \tilde{\beta}\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} = \tilde{\gamma}An, \qquad (8.6.12)$$

где $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ — постоянные. Второе уравнение, отвечающее нижней ветви, получить труднее, и тут требуется некоторая изобретательность. Модели с нижними ветвями изображенного на рис. 8.4 вида (например, плазма) обычно ведут себя как волновые уравнения, связанные с верхней ветвью нелинейным вынуждающим членом:

$$L^{(l)}\left\{\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x}\right\} = g(\varphi,\ N),$$
$$L^{(l)} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_p^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad (8.6.13)$$

где c_p — фазовая скорость волны в нижней ветви. Заменяя переменные x, t на ξ, τ и используя эти растянутые координаты, как в гл. 5, можно привести волновой оператор в (8.6.13) к виду

$$L^{(l)} = \varepsilon^2(c_g^2 - c_p^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\varepsilon^3 c_g\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau} + \varepsilon^4\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}. \qquad (8.6.14)$$

Поскольку величина N порядка ε^2, единственные члены в правой части (8.6.13), которые могут конкурировать с $O(\varepsilon^4)$, — это члены типа $\partial^2|A|^2/\partial\xi^2$. Отсюда немедленно следует, что n пропорционально $|A|^2$. Этот результат показывает, что нижняя ветвь будет безинерционной, поскольку она в точности будет следовать движениям верхней ветви. Члены низшего порядка в левой части (8.6.14) можно удалить, применяя резонансное условие Бенни $c_p = c_g$, и правая часть оказывается связанной с левой лишь членами порядка $O(\varepsilon^5)$. Фактически для этого, при указанной растяжке переменных, нужна слабая связывающая постоянная порядка $O(\varepsilon)$ в членах правой части (8.6.13). Другие замены переменных обсуждаются в примечаниях к этой главе. В конце концов мы получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial\tau} = -\Delta\frac{\partial}{\partial\xi}(|A|)^2. \qquad (8.6.15)$$

Амплитудные уравнения (8.6.15) и (8.5.12) вместе составляют интегрируемую систему. Этот результат обсуждается в примечаниях к главе, где приводятся и соответствующие ссылки на литературу. Поскольку решение n должно быть вещественным, оно очень похоже на КдФ-солитоны; функция же A (ξ, τ) комплексная и является огибающей волной, очень похожей на солитоны огибающей нелинейного уравнения Шрёдингера. Эти уравнения образуют мост между длинноволновыми солитонами, ассоциированными с нижней ветвью, и солитонами огибающей, ассоциированными с верхней ветвью, причем допускается обмен энергией между ними, несмотря на то что действуют они в разных масштабах. Во многих вопросах длинные и короткие волны рассматриваются как независимые, и этот обмен энергией между длинными и короткими волнами имеет важные физические следствия в ряде физических моделей, в частности в моделях молекулярных цепей. Мы хотели бы, однако, подчеркнуть, что вывод второго уравнения зависит от рассматриваемой модели, и данный выше набросок вывода уравнения (8.6.15) в случае других моделей нуждается в соответствующих модификациях.

Хороший пример двойного ветвления возникает в теории плазмы из электронов и ионов. Мы уже изучили ионноакустические эффекты в гл. 5, где мы рассматривали длинные ионные волны на фоне горячих электронов, которые (электроны) моделировались как заряженный газ. С другой стороны, в разд. 8.4 мы изучали эволюцию ленгмюровских волн плотности (электронов) на статичном ионном фоне. Каждая из двух частей, на которые расщеплены наши уравнения, имеет свое дисперсионное соотношение. В безразмерном виде ленгмюровская ветвь, как мы видели, может быть представлена в виде

$$\omega^2 = 1 + k^2 \text{ (верхняя ветвь)}, \tag{8.6.16}$$

а ионноакустическая ветвь — в виде

$$\omega^2 = k^2 (1 + k^2)^{-1} \text{ (нижняя ветвь)}. \tag{8.6.17}$$

Взаимодействие между ленгмюровскими осцилляциями и ионным звуком может быть достигнуто через механизм резонанса Бенни. Захаров [1972] изучил эту проблему и получил уравнение (8.6.12) и «двухпутный» вариант уравнения (8.6.15), который преобразуется в само это уравнение, если ввести примененные выше переменные ξ, τ. Эти уравнения часто называют *уравнениями Захарова*. Они появились в связи с длинно-коротковолновым взаимодействием, и потому далее мы будем называть этот вид резонанса *длинно-коротковолновым резонансом Захарова—Бенни*. Задачи типа упомянутой выше задачи о взаимодействии в плазме

подробно разбираются в работах Гиббонса и др. [1977] и Гиббонса [1978].

Бенни [1977] первоначально сформулировал свою идею о резонансе такого типа в связи с задачей взаимодействия капиллярных мод с гравитационными в теории волн на воде; см. также Гримшоу [1978] и Джёрджевич и Редекопп [1977].

8.6.1. Давыдовская модель альфа-спирали

Некоторые виды белковых молекул состоят из пептидных групп (H—N—C=O), связанных периодическим образом в три закручивающиеся в спираль цепи, образующие спиральную молекулярную цепь. Одним из примеров такой цепи является так называемая *α-спираль*, в которой соседние пептидные группы каждой цепи связаны водородными связями. Перекрестные водородные связи между пептидными группами придают спирали жесткость. Такой тип молекулярной цепи представляет собой классический пример системы с двойным ветвлением. Внутри каждой пептидной группы, или субмолекулы, происходят квантовые переходы, обязанные своим появлением колебательной структуре двойных связей C=O в инфракрасной области спектра. Фотоны распространяются в такой системе от одной группы к другой, в результате чего возникают дисперсионные эффекты. Сверх того, в значительно больших пространственных и временны́х масштабах, чисто классические упругие продольные волны будут распространяться по спиральным цепочкам, ведущим себя подобно пружинам. Типичные длины волн этих механических колебаний много больше, чем длина волны света, так что можно ожидать появления длинно-коротковолнового резонанса. Давыдов и Кислюха [1976] рассмотрели математическую модель, предназначенную для выяснения связи этих явлений с различными видами движений. Общее обсуждение моделей молекулярных цепей можно найти у Давыдова [1971; 1979]. Гамильтониан системы берется в виде

$$H = E + \sum_n \{(E_{\text{int}} - D_n) B_n^\dagger B_n - J (B_{n+1}^\dagger B_n + B_{n+1} B_n^\dagger)\}, \quad (8.6.18)$$

где E — сумма кинетической и потенциальной энергий, E_{int} — постоянная энергия внутримолекулярного возбуждения (между субмолекулами), $B_n^\dagger$ и B_n — межмолекулярные бозонные операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[B_n, B_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad [B_n, B_m] = 0.$$

Индекс n означает n-ю молекулу, которая имеет массу M и находится в положении r_n. Член $B_{n+1}^\dagger B_n$ уничтожает фотон в n-й молекуле и создает другой в $(n+1)$-й. Число J зависит от элек-

трического дипольного момента вдоль оси цепочки, создаваемого колебательным переходом в двойной связи. Взаимодействие между механическим движением и квантовыми эффектами моделируется введением в гамильтониан функции D_n. Упругая волна, проходящая по цепочке, будет изменять энергию внутримолекулярных связей и, следовательно, изменять E_{int}. Так как $B_n^+ B_n$ дает суммарное число фотонов в системе (это оператор числа частиц), то полная энергия n-й молекулы изменяется проходящей упругой волной.

Определим ρ_n как отклонение от положения равновесия n-й молекулы и предположим, что D_n может быть выражено в терминах взаимодействия с ближайшими соседями:

$$D_n = G(r_{n+1} - r_n) + G(r_n - r_{n-1}),$$

что в первом порядке по ρ_n дает

$$D_n \simeq (1 + \gamma\rho_n) D. \tag{8.6.19}$$

Мы ожидаем, что отклонение от положения равновесия будет малым, так что положительная постоянная γ тоже будет малой. Величина D является постоянной, зависящей от вида цепочки. Квантовомеханическая часть задачи может быть охарактеризована волновой функцией $|\psi\rangle$, определенной формулой

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n(t) B_n^+ |0\rangle, \tag{8.6.20}$$

где $a_n(t)$ суть зависящие от времени амплитуды, которые в случае, когда волновая функция $|\psi\rangle$ нормирована, должны удовлетворять соотношению

$$\sum_n a_n^2 = 1.$$

Применяя уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle, \tag{8.6.21}$$

мы получим следующее уравнение для амплитуд:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = [(E_{\text{int}} + E) - (1 + \gamma\rho_n) D] a_n - J(a_{n+1} + a_{n-1}). \tag{8.6.22}$$

Механические колебания будут подчиняться уравнению движения, которое задается классическим гамильтонианом, отвечающим гамильтониану (8.6.18):

$$\mathscr{H} = \sum_n \{[(E_{\text{int}} + E) - (1 + \gamma\rho_n) D] a_n^* a_n - J a_n^* (a_{n+1} + a_{n-1})\},$$
$$E = T + U. \tag{8.6.23}$$

Без члена взаимодействия $\rho_n D$ обычная гамильтонова механика для множества связанных линейных осцилляторов будет давать дискретные волновые уравнения

$$\ddot{\rho}_n = \mu M^{-1}(\rho_{n+1} + \rho_{n-1} - 2\rho_n), \tag{8.6.24}$$

где μ — коэффициент взаимодействия, отвечающий потенциальной энергии U. Дополнительный член взаимодействия в гамильтониане дает модифицированную форму уравнения (8.6.24):

$$\ddot{\rho}_n = \mu M^{-1}(\rho_{n+1} + \rho_{n-1} - 2\rho_n) + \gamma D\{2|a_n|^2 - |a_{n+1}|^2 - |a_{n-1}|^2\}. \tag{8.6.25}$$

Уравнения (8.6.22) и (8.6.25) являются разностными уравнениями, которые могут быть превращены в уравнения в частных производных, если ввести непрерывную пространственную переменную $x = Rn$, где R — шаг пространственной решетки:

$$\rho_n(t) \to \rho(x, t), \quad a_n(t) \to a(x, t).$$

Мы получим

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} - (\lambda - \gamma D\rho)a + J\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0, \tag{8.6.26}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{dt^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\gamma D R M^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(|a|^2), \tag{8.6.27}$$

где $c_p = (\mu R^2/M)^{1/2}$ представляет собой продольную скорость звука в цепочке и $\lambda = E_{\text{int}} + E - D - 2J$. Уравнения (8.6.26) и (8.6.27) — это *уравнения Давыдова*, связывающие амплитуду вероятности $a(x, t)$ и продольное смещение ρ. Они имеют тот же вид, что и уравнения Захарова в физике плазмы. Сами по себе они не интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, но в примечаниях к этой главе мы бегло покажем, как они сводятся либо к НУШ-пределу, либо к уравнениям длинно-коротковолнового резонанса применением растянутых координат $\xi = \varepsilon(x - c_g t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$. Разложение в ряд для a,

$$a = \varepsilon^q a^{(1)} + \varepsilon^{q+1} a^{(2)} + \cdots, \tag{8.6.28}$$

выбирается путем выражения q через постоянную взаимодействия $\gamma D R M^{-1}$, которую мы обозначим через G. Если записать $G = \varepsilon^g \bar{G}$, то, согласно сказанному в приводимых ниже примечаниях к главе, при $c_p \neq c_g$ мы выбираем $q = (2 - g)/2$ и из (8.6.26), (8.6.27) получаем НУШ-предел. Если, однако, значение k таково, что $c_p = c_g$, то нужно взять $q = (3 - g)/2$, и окончательные уравнения будут не НЛШ-уравнениями, а уравнениями длинно-коротковолнового резонанса, приведенными в (8.6.12)—(8.6.15). Хайман и др. [1981] обсуждали НУШ-предел для уравнений Давыдова, а Скотт [1982] обобщил эти уравнения таким образом, чтобы включить в рассмотрение эффекты трехцепочечной спирали

и другие взаимодействия. В реальном белке значение G будет очень сильно зависеть от его аминокислотного состава. Решение вопроса о том, можно ли достичь равенства $c_p = c_g$, зависит от характеристик белка и диапазона используемых в эксперименте частот.

8.7. Примечания

Раздел 8.1

Полное описание метода многомасштабных разложений, используемого в этих разделах и впервые развитого Коулом и Кеворкяном, можно найти в книге Найфэ [1973] по методам теории возмущений, у Коула [1968], Найфэ и Мука [1979] и Джордана и Смита [1977]. Существует много методов теории возмущений для работы с нелинейными уравнениями (выбор того или иного зависит от ситуации), например метод усреднения Крылова—Боголюбова—Митропольского [1961], метод Пуанкаре—Линдштедта, метод Хакена [1978] управляемых мод, метод Эккхауза [1965] и метод Уизема [1974] медленно меняющегося лагранжиана. Метод многомасштабных разложений оказался идеальным для нахождения амплитудных уравнений, отвечающих системам со слабой нелинейностью. Он получил дальнейшее развитие у Стюарта [1960], который приспособил его для работы с неустойчивыми системами (см. следующую главу). Как и следует ожидать от «типичного» уравнения, уравнение НЛШ возникало во многих не связанных между собой работах на протяжении многих лет. С точки зрения прикладной математики, Бенни и Ньюэлл [1966] впервые дали формальный вывод этого уравнения, применяя метод многомасштабных растяжений, хотя сами уравнения появлялись в различных областях и исследовались различными методами. Примерно в то же время Таниути и его соавторы применили с этой целью методы теории возмущений, что оказало большое влияние на последующее получение НЛШ-уравнений в различных областях физики и гидродинамики. Мы приведем некоторые ссылки на литературу, не претендуя на полноту: Таниути и Ядзима [1969; 1973], Асано, Таниути и Ядзима [1969], Таниути и Вэй [1968], Монтгомери и Тидман [1964], Дейвидсон [1972], Фрид и Итикава [1972], Какутани и Сугимото [1974]. См. также библиографии, приведенные у Карпмана [1975], Уизема [1974], Ньюэлла [1974], Дейви [1972], Стюарта и Ди Примы [1978], Чжу и Мея [1970; 1971].

Раздел 8.2

а) Хасимото и Оно [1972] показали, что НЛШ-уравнение описывает амплитуду волновых пакетов в поле силы тяжести на воде

глубины h. В этом случае дисперсионное соотношение для несущей волны не полиномиально по ω (см. гл. 5):

$$\omega^2 = (gkh)\ \mathrm{th}\,(kh).$$

Дейви и Стюартсон [1974] и в чуть иной форме Бенни и Роскес [1969] показали, что в случае двух измерений с медленными переменными

$$\overline{X} = \varepsilon(x - c_g t), \quad Y = \varepsilon y, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \tag{8.7.1}$$

возникают уравнения

$$2i\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \overline{X}^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial Y^2} = \frac{9}{2}\zeta|\zeta|^2 + 3\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{X}}, \tag{8.7.2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{X}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} = -3\frac{\partial}{\partial \overline{X}}|\zeta|^2, \tag{8.7.3}$$

представляющие собой двумерное обобщение НЛШ-уравнения. Фриман и Дейви [1975] рассмотрели процедуру предельного перехода, применяемого для вывода уравнений. Стоит отметить, что Анкер и Фриман [1977], используя пространственно двумерную процедуру Захарова и Шабата [1974] для обратной задачи рассеяния, показали, что уравнения (8.7.2), (8.7.3) интегрируемы. Эти уравнения вместе с уравнениями Кадомцева—Петвиашвили (двумерное КдФ-уравнение, см. гл. 5) являются одними из немногих физически содержательных пространственно двумерных уравнений, о которых известно, что они интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. Если опустить Y-размерность, то уравнения (8.7.2), (8.7.3) сведутся к НЛШ-уравнению.

(b) Неустойчивость Бенджамина—Фейра (Бенджамин и Фейр [1967], Бенджамин [1967]) представляет собой механизм неустойчивости, первоначально привлекавшийся для объяснения неустойчивости волн Стокса на глубокой воде и связанный с развитием побочных мод и их взаимодействием с гармониками. Стюарт и Ди Прима [1978] показали, что механизм резонанса Эккхауза [1965] по существу эквивалентен механизму Бенджамина—Фейра. Они показали, что механизм неустойчивости состоит во взаимном усилении резонансов, возникающих между первой гармоникой волны и ее верхней и нижней побочными модами. Данный ими анализ НЛШ-уравнения, приведенный в этом разделе и показывающий, что может возникнуть экспоненциальный рост по времени, может быть пояснен в терминах взаимодействия гармоники с побочными частотами следующим образом. У волны $a\exp[i \times \times (kx - \omega t)]$ первая гармоника, вызванная нелинейностью, будет иметь вид $a\exp[2i(kx - \omega t)]$. Предположим теперь, что появ-

ляются два возмущения в виде верхней и нижней побочных мод волнового числа k:

$$a_1 \exp[i(k_1 x - \omega_1 t)] \text{ и } a_2 \exp[i(k_2 x - \omega_2 t)].$$

Тогда появятся члены вида

$$a^2 a_1 \exp\{i[(2k - k_1)x - (2\omega - \omega_1)t]\} \qquad (8.7.4)$$

и

$$a^2 a_2 \exp\{i[(2k - k_2)x - (2\omega - \omega_2)t]\}. \qquad (8.7.5)$$

Если $k_1 + k_2 = 2k$ и $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$, то возникнут «резонансы», так как каждый из этих членов будет секулярным в любой слабо нелинейной теории возмущений. Выбирая $k_1 = k(1 + \Delta)$, $k_2 = k(1 - \Delta)$, $\omega_1 = \omega(1 + \delta)$ и $\omega_2 = \omega(1 - \delta)$, мы удовлетворим резонансным условиям. Первоначальные вычисления Бенджамина и Фейра были проведены для волн на глубокой воде, когда дисперсионное соотношение имеет вид $\omega^2 = kg$. Отсюда в первом порядке следует, что δ и Δ должны быть связаны соотношением $\delta = \Delta/2$.

Критерий $\beta\gamma \gtrless 0$ обсуждался в нескольких статьях: Карпмана и Крускала [1968], Ньюэлла [1974], Ланджа и Ньюэлла [1974]. См. также работы, приведенные у Дрейзина и Рейда [1981].

По поводу экспериментальных и численных исследований см. статьи Юэна и Лейка [1975] и Лейка и др. [1977]. Статья Юэна и Лейка [1975] содержит также изящный вывод НЛШ-уравнения в гидродинамике, использующий метод Уизема медленно меняющегося лагранжиана.

(*c*) Функция $B(X_1, T_1)$, которая появляется как постоянная интегрирования в (8.2.15), иногда не определена в порядке $O(\varepsilon^3)$. Для некоторых уравнений секулярные члены, зависящие лишь от медленных переменных, не могут появиться, так что в порядке $O(\varepsilon^3)$ в окончательном амплитудном уравнении сохраняются члены, содержащие AB. В этом случае B выражается через $|A|^2$ в порядке $O(\varepsilon^4)$, и при проведении любых вычислений такого рода следует включать в рассмотрение приближения по крайней мере до порядка $O(\varepsilon^4)$. Будет ли B уничтожаться операторами быстрых переменных или будет выражаться через A в порядках $O(\varepsilon^3)$ или $O(\varepsilon^4)$, это зависит от рассматриваемой задачи, и в каждом конкретном случае это надо выяснять отдельно.

Раздел 8.3

Очень интересно рассмотреть полное уравнение (8.3.19). Эта задача была поставлена Захаровым и Сынахом [1976]. Если мы запишем (8.3.19) в осесимметричном виде

$$2i\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r}\right) + \beta \mathscr{E}|\mathscr{E}|^2 = 0,$$

то можно построить два интеграла движения:

$$I_1 = \int_0^\infty r\,|\mathscr{E}|^2\,dr, \quad I_2 = \int_0^\infty [|\mathscr{E}_r|^2 - \tfrac{1}{2}\beta\,|\mathscr{E}|^4]\,r\,dr. \tag{8.7.6}$$

Это проверяется прямым вычислением. Можно также показать, что

$$I_2 = \beta\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^\infty |\mathscr{E}|^2 r^3\,dr, \tag{8.7.7}$$

и непосредственное интегрирование этого соотношения дает формулу

$$\int_0^\infty |\mathscr{E}|^2 r^3\,dr = \frac{1}{2}\beta^{-1}I_2 z^2 + c_1 z + c_2. \tag{8.7.8}$$

Далее, если $\beta > 0$, то весьма большой класс начальных условий на $\mathscr{E}$ дает $I_2 < 0$. Нужна только огибающая, которая имеет достаточно пологий наклон по сравнению с ее амплитудой, так чтобы подынтегральное выражение в I_2 было отрицательно. Поскольку $\beta > 0$, правая часть равенства (8.7.8) переходит от положительных к отрицательным значениям и, значит, обращается в нуль в некоторой точке $z = z_0$, в то время как левая часть (8.7.8) представляет собой интеграл со строго положительной подынтегральной функцией. Такое противоречие указывает на наличие сингулярности у амплитудной функции $\mathscr{E}$ при некотором конечном значении z, и решение перестает существовать. Здесь имеется аналогия с классической механикой. Интеграл в (8.7.8) может быть уподоблен моменту инерции системы, которая сама собой коллапсирует при некотором конечном значении z. Беркшир и Гиббон [1982] исследовали глубже эту проблему и показали, что аналогия с классической механикой не случайна. Решение перестает существовать, когда происходит «взрыв», что эквивалентно коллапсу. Поэтому непосредственно применимы результаты Сандмана по коллапсу в задаче N тел (см. Зигель и Мозер [1971]), и, применяя его методы, можно исследовать природу сингулярности. Захаров и Сынах [1976], а затем Кошно и Судзуки [1979] подтвердили этот результат численным интегрированием, вычисляя интегралы (8.7.6) с гауссовым начальным профилем при $z = 0$. Амплитуда достигала значений, в 2000 раз больших начального. Разумеется, такой огромный рост делает бессмысленной аппроксимацию, которая использовалась при выводе НЛШ-уравнения в разд. 8.3, но такое поведение тем не менее указывает на этот вид «самофокусировки» энергии как на важный механизм в оптике. По этой тематике существует обширная литература, и мы отсылаем читателя к работам Дзяо и др. [1964], Келли [1965], Аскаряна [1974],

Лугового и Прохорова [1974] и в особенности к статье Захарова и Сынаха и содержащейся в ней библиографии [1976]. Экспериментально показано, что, когда нелинейность кубическая, полевая амплитуда фокусируется в некоторой особой точке; этим подтверждается до некоторой степени утверждение о сингулярном поведении двумерного НЛШ-уравнения. Фокусировка и филаментация энергии играют важную роль в экспериментальной лазерной физике, поскольку позволяют получить значительную информацию о среде, в которой фокусировка имеет место.

Примечательный факт появления самофокусирующихся сингулярностей имеет значение не только в нелинейной оптике, потому что, как мы видели, процедура получения НЛШ-уравнения — весьма общая и приложима очень широкому классу систем. Рассмотрим, например, нашу задачу из разд. 8.2 с двумя пространственными переменными:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{tt} = \alpha\varphi - \beta\varphi^3 \quad (\alpha > 0), \tag{8.7.9}$$

которая может также описывать малые амплитудные возмущения двумерного уравнения СГ. Вводя в рассмотрение медленные переменные $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ и поступая, как обычно, мы находим соотношения, справедливые в порядке $O(\varepsilon)$:

$$\varphi^{(1)} = A\,(X,\ Y,\ T_1,\ T_2)\exp(i\theta) + \text{с. с.} \tag{8.7.10}$$

$$\begin{gathered}\theta = kx + ly - \omega t + \delta,\\ \omega^2 = k^2 + l^2 + \alpha \quad (\alpha > 0).\end{gathered} \tag{8.7.11}$$

В порядке $O(\varepsilon^2)$ надо, как обычно, удалить секулярные члены, и это дает

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)\frac{\partial A}{\partial X} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial l}\right)\frac{\partial A}{\partial Y} = 0, \tag{8.7.12}$$

а в порядке $O(\varepsilon^3)$ окончательное амплитудное уравнение для A принимает вид

$$2i\omega\frac{\partial A}{\partial T_2} + \beta A^2 A^* + \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\right)A = 0. \tag{8.7.13}$$

Мы можем, конечно, исключить из (8.7.13) производную по T_1, что приводит к уравнению

$$\left[1 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^2\right]\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \left[1 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial l}\right)^2\right]\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} - 2\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial l}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial X\,\partial Y} + \beta A^2 A^* + 2i\omega\frac{\partial A}{\partial T_2} = 0. \tag{8.7.14}$$

Оператор второго порядка, действующий на A, можно привести к более простому виду, выполнив следующее преобразование координат:

$$\xi = X, \quad \eta = \omega a^{-1/2}\left\{\left[1 - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2\right]Y + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)\left(\frac{d\omega}{dl}\right)X\right\}. \tag{8.7.15}$$

Окончательно получим

$$2i\omega\frac{\partial A}{\partial T_2}+\beta A^2A^*+\left[1-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\right]=0. \quad (8.7.16)$$

Поскольку

$$\frac{d\omega}{dk}=k\omega, \quad \frac{d\omega}{dl}=l/\omega,$$

то

$$1-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2=(a+l^2)\,\omega^{-2}>0.$$

Следовательно, в (8.7.16) мы имеем ту же ситуацию, что и в (8.7.6), и в некоторый конечный момент времени T_2 (медленное время) произойдет «взрыв». Тот факт, что двумерное НЛШ-уравнение допускает взрыв за конечное время, попросту указывает на то, что $A \gg \varepsilon^{-1}$, и, как следствие, процедура теории возмущений оказывается непригодной. Поэтому в отличие от одномерного случая амплитуда осцилляций будет расти, и здесь следует принять во внимание уже полностью нелинейные решения системы.

Двумерные НЛШ-уравнения возникают и в других областях. Они появляются как амплитудные уравнения в докритической области для двухслойной неустойчивости Кельвина—Гельмгольца (без вязкости), и при некоторых обстоятельствах может возникнуть фокусировка (Гиббон и Магиннес [1980]). Это показывает, что система может быть *линейно* устойчивой и в то же время *нелинейно* неустойчивой. По поводу общего обсуждения нелинейной самофокусировки см. Ньюэлл [1978; 1979].

Весьма интересный эксперимент был описан Молленауэром и др. [1980], которые послали по 700-метровому одномодовому силикатному стекловолокну семипикосекундный импульс с длиной волны 1,55 мкм. Они подобрали волокно и частоту света так, чтобы $\gamma > 0$ и $\partial^2\omega/\partial k^2 > 0$ для уравнения (8.2.16), при этом НЛШ-уравнение является подходящим уравнением для описания распространения оптического импульса вдоль волокна. Очень близко к тому, как было выведено НЛШ-уравнение (8.1.5), Хасегава [1975] и Хасегава и Тапперт [1973] доказали, что показатель преломления, квадратично зависящий от огибающей электрического поля, приведет к НЛШ-уравнению для эволюции этой огибающей. Так будет при условии, что имеет место продольная дисперсия, т. е. $d^2\omega/dk^2 \neq 0$. Эксперимент Молленауэра и др. [1980] прекрасно это подтвердил. Устойчивость солитонов на длине порядка 700 метров показывает, насколько нечувствительны они к возмущениям.

Раздел 8.4

Выводу НЛШ-уравнения в физике плазмы для различных ситуаций посвящена обширная литература. В примечаниях

к разд. 1 мы уже привели большой перечень работ. Дальнейшие ссылки можно найти в статьях Итикавы [1979], Вейланда, Итикавы и Вильхельмсона [1979] и Вейланда и Вильхельмсона [1977], в которых излагаются методы, связанные с рассмотрением НЛШ-уравнений с позиций теории возмущений и охватывающие такие физические эффекты, как затухание Ландау (см. также Карпман и Маслов [1978] и Маклохлин [1977]).

Раздел 8.6

(а) Что касается уравнений (8.6.12) и (8.6.15), то здесь проще отмасштабировать постоянные. Если $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ положительны, то это можно сделать так, чтобы получить уравнения

$$i\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=LS, \tag{8.7.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(|S|^2), \tag{8.7.18}$$

где $\xi = x\tilde{\beta}^{1/2}$, $\tau = t$, $\tilde{\gamma}n = L$ и $S = (\Delta\gamma\beta^{-1/2})^{1/2}A$.

Ма [1978] и Ядзима и Оикава [1976] показали, что уравнения (8.7.17) и (8.7.18) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. Для простоты совершим преобразования

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2}A(-x;\ -t/2),\\ L &= B(-x;\ -t/2), \end{aligned} \tag{8.7.19}$$

которые приводят (8.7.17) и (8.7.18) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}i\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+AB,\\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -4\frac{\partial}{\partial x}(|A|)^2. \end{aligned} \tag{8.7.20}$$

Пара Лакса $\hat{L}$ и $\hat{P}$ для задачи на собственные значения

$$\hat{L}\tilde{\psi}=i\lambda\tilde{\psi}. \tag{8.7.21}$$

с собственными функциями, зависящими от времени согласно уравнению

$$\tilde{\psi}_t=\hat{P}\tilde{\psi}, \tag{8.7.22}$$

задается матрицами

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{3}A-i\frac{B}{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}A^* \\ i & 0 & \partial/\partial x \end{pmatrix} \tag{8.7.23}$$

и

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} i\lambda^2 & 2(\lambda A - iA) & 2i|A|^2 \\ -2A^* & i\lambda^2 & 2(iA^* - \lambda A^*) \\ 0 & -2A & i\lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{8.7.24}$$

Условием интегрируемости для постоянных собственных значений оператора $\hat{L}$ служит условие Лакса $\hat{L}_t = [\hat{P}, \hat{L}]$. Это дает уравнения (8.7.20). Различные солитонные решения приведены в статьях Ядзимы и Оикавы [1976] и Ма [1978]. Односолитонное решение дается формулами

$$\begin{aligned} B &= -2b^2 \operatorname{sech}^2 \theta, \\ A &= ib\sqrt{2A} \exp(\eta) \operatorname{sech} \theta, \end{aligned} \tag{8.7.25}$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= bx + 4abt + \delta, \\ \eta &= 2ax + 2i(a^2 - b^2)\, t. \end{aligned} \tag{8.7.26}$$

Поскольку система (8.7.21) представляет собой задачу на собственные значения третьего порядка, получить решение довольно трудно, как и в случае трехволновых резонансных взаимодействий; подробности читатель может найти в указанных выше работах. Ньюэлл [1978] показал, что некоторый класс уравнений, представляющих собой модификацию уравнений (8.7.17), (8.7.18), также может быть проинтегрирован методом обратной задачи рассеяния.

(c) Уравнения Захарова (Захаров [1972]) нашли приложение в физике плазмы как модельные уравнения, описывающие взаимодействие между ионным звуком (плотности N) и ленгмюровскими волнами (с амплитудой огибающей E), которое не было принято во внимание в разд. 8.4. В вычислениях этого раздела ионы играли просто роль статичного заряженного фона. Уравнения Захарова имеют вид

$$\nabla^2 E + iE_t = EN, \tag{8.7.27}$$

$$N_{tt} - c_p^2 \nabla^2 N = \nabla^2 (|E|^2); \tag{8.7.28}$$

второе уравнение представляет собой волновое уравнение, «сдвинутое» электрическим полем. В статическом пределе для ионов $N \sim |E|^2$ и уравнение (8.7.27) становится НЛШ-уравнением. В примечаниях к разд. 8.3 мы показали, что в случае отрицательной энергии возможен коллапс ($E \to \infty$ за конечное время), что было интерпретировано как возможный механизм объяснения ленгмюровской турбулентности (Захаров [1972]), Николсон и Голдман [1978]).

Давыдовские уравнения цепочки (8.6.26), (8.6.27) имеют тот же самый вид, что и уравнения Захарова. Сами по себе, в случае

одного измерения, они не образуют вполне интегрируемой системы. В пределе длинно-коротковолнового резонанса или в НУШ-пределе они уже дают такую систему. В разд. 8.6 мы привели соображения, позволяющие хотя бы в общих чертах понять, как с помощью выбора одного специального масштаба может быть получена интегрируемая система (8.6.12)—(8.6.15). Эти рассуждения допускают обобщение, и необходимое изменение масштаба зависит от постоянной взаимодействия в правой части (8.6.13). В случае уравнений Давыдова она равна γDRM^{-1}. Возьмем любую постоянную взаимодействия G, записанную в виде $G = \varepsilon^g \bar{G}$, и разложим φ ($\equiv a$ в (8.6.26)) в ряд

$$\varphi = \varepsilon^q \varphi^{(1)} + \varepsilon^{q+1}\varphi^{(2)} + \cdots, \tag{8.7.29}$$

служащий обобщением ряда (8.6.7). Число q определяется через g. Уравнения (8.6.13) (или в давыдовском случае (8.6.27)) принимают тогда вид

$$\left[\varepsilon^2 (c_g^2 - c_p^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\varepsilon^2 c_g \frac{\partial^2}{\partial \tau\, \partial \xi} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right](\varepsilon^2 n) =$$

$$= \varepsilon^{2+g+2q}\bar{G}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[(|A|^2) + \cdots]. \tag{8.7.30}$$

Сразу выделяются два случая: (i) $c_g \neq c_p$, (ii) $c_g = c_p$.

(i) $c_g \neq c_p$. В этом случае положим $q = (2 - g)/2$ и найдем, что $n \sim |A|^2$ дает НЛШ-предел в качестве окончательного уравнения для A.

(ii) $c_g = c_p$. Выбираем $q = (3 - g)/2$ и получаем

$$n_\tau = -\bar{G}(|A|^2)_\xi / 2c_g, \tag{8.7.31}$$

т. е. длинно-коротковолновый предел.

Очевидно, что значение k, для которого $c_g = c_p$, дает специальный резонанс; в плазменной физике оно известно как k^*-предел. Для других значений k, для которых $c_g \neq c_p$, акустическая ветвь «копирует» оптическую. Это тот безынерционный случай, который описан в разд. 8.6. Однако при $c_g = c_p$ акустическая ветвь обладает некоторой свободой. В масштабах, используемых в разд. 8.6, когда $q = 1$, для того чтобы получить $c_g = c_p$, надо иметь $g = 1$. В этом случае акустическая ветвь не привязана столь строго к оптической, чтобы исключить любую акустическую инерцию. Используя более общую формулу $q = (3 - g)/2$, можно обобщить разложение для φ в предельном случае $c_g = c_p$.

9. АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМАХ

9.1. Введение

Примеры предыдущей главы, в которых уравнение НЛШ возникало как описывающее изменение амплитуды, были специально подобраны как случаи, когда рассматриваемые системы остаются устойчивыми при всех значениях параметров из всего k-пространства, и поэтому в дисперсионных соотношениях, отвечающих этим системам, нет мнимых частей. Такие системы оказываются замкнутыми, или консервативными, в том смысле, что в них не происходит рассеяния энергии ни вследствие трения, ни вследствие других эффектов и, кроме того, не происходит подкачки энергии от внешних энергетических источников. Уравнение НЛШ, которое описывает эволюцию огибающей волн в консервативной системе в слабо нелинейном пределе, описывает конкуренцию между нелинейностью и дисперсией. Нелинейные члены порождают гармоники (при условии, что начальная амплитуда достаточна для того, чтобы они были учтены), и эти гармоники и основной тон конкурируют с дисперсионными эффектами, создавая окончательное равновесие.

Однако в распространении волн встречаются проблемы другого рода, которые существенно отличаются от возникающих в описанных ситуациях. Если в систему передается или подкачивается энергия с помощью какого-то механизма, например вращения, фонового потока или теплового градиента, то потенциальная энергия используется для образования волн. В математической модели может оказаться некоторый «параметр управления», роль которого может быть существенна в следующей ситуации. Под воздействием энергии фонового потока рассматриваемая система может потерять устойчивость, когда указанный параметр переходит через некоторое критическое значение. В надкритической области волновой пакет будет забирать энергию из запасов имеющейся потенциальной энергии. Это обстоятельство является дополнительным фактором, управляющим эволюцией волны, кроме тех, которые были даны в первом параграфе выше. Это также означает, что бесконечно малые возмущения будут расти, когда контрольный параметр находится в надкритической области, в то время как в полностью устойчивой системе, рассмотренной в предыдущей главе, такие волны всегда будут оставаться малыми.

Существует много физических примеров поведения такого типа. Один из таких хорошо известных примеров — это случай жидкости, подогреваемой снизу. Для малых температурных градиентов жидкость еще способна отводить тепло, но когда градиент возрастает, теплопроводности уже недостаточно и начинается конвекция. При критическом значении теплового градиента, когда начальное стационарное состояние жидкости становится неустойчивым и когда само это критическое значение как бы отмечает момент возникновения конвекции, мы говорим, что имела место бифуркация, потому что одно состояние системы стало неустойчивым и начало переходить в другое устойчивое состояние. Этот пример будет подробно рассмотрен в примечаниях к этой главе.

Другой известный пример гидродинамической неустойчивости связан с появлением турбулентности в ламинарном потоке жидкости между двумя бесконечными горизонтальными плоскостями, когда число Рейнольдса, увеличиваясь, проходит через критическое значение. Проблема гидродинамической устойчивости чрезвычайно сложна и является активной областью исследований для специалистов вот уже более полувека. Соответствующие ссылки интересующийся читатель может найти в примечаниях к этой главе. Возможно, наиболее хорошо известный пример вне механики жидкости — это пример лазера, где атомы в оптической полости будут излучать индивидуально и не в фазе один с другим, если число заполнения образца ниже критического значения. Выше этого критического значения они будут излучать в фазе и производить когерентный свет. Бифуркация описанного выше типа может попросту пониматься как фазовый переход, понятие, которое обычно применяется в ферромагнетизме, когда ферромагнит обнаруживает различные магнитные свойства по разные стороны от критической температуры.

Для иллюстрации появления этой неустойчивости нам необходимо рассмотреть, как дисперсионное соотношение зависит от k и ω. Мы ограничимся для простоты одним пространственным измерением и рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных, записанные в общем матричном виде:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x};\ \mu\right)\varphi = \{\ldots,\ (M\varphi)\cdot(N\varphi),\ \ldots\}^{\mathrm{T}}. \qquad (9.1.1)$$

Квадратичный нелинейный член в правой части (9.1.1) можно заменить, если это необходимо, членами более высокого порядка. Параметр μ является параметром управления. Подразумевается, что вектор φ, вектор зависимых переменных, варьируется около некоторого устойчивого состояния равновесия системы и что μ входит в задачу как результат разложения упомянутого вектора в окрестности этого состояния. За исключением параметра μ,

вид уравнения (9.1.1) по существу тот же самый, что и в гл. 8. В гл. 8 мы намеренно ограничили себя такой формой L, при которой получаются чисто вещественные корни ω при всех k. Здесь же мы будем обсуждать, как могут появиться два различных типа неустойчивости. Они могут быть классифицированы, если рассмотреть дисперсионное соотношение для решений с малыми амплитудами гармонических волн:

$$\varphi = \mathbf{b} \exp(i\theta) + \text{с. с.}, \tag{9.1.2}$$

$$\theta = kx - \omega t + \delta. \tag{9.1.3}$$

Поэтому имеем

$$l(-i\omega;\ ik;\ \mu)\,\mathbf{b} = 0. \tag{9.1.4}$$

С этого момента мы условимся считать, что строчными буквами обозначаются функции от k и ω, а прописными — функции от $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$. Нетривиальные решения (9.1.4) существуют, если

$$\det l = 0. \tag{9.1.5}$$

Уравнение (9.1.5) есть дисперсионное соотношение. Дисперсионное соотношение теперь показывает, содержит ли рассматриваемая модель затухающие члены или нет. Это позволяет нам расщепить анализ на две категории.

Категория I

Если затухание имеется, то дисперсионное соотношение (9.1.5) будет комплексной функцией от ω и k, поскольку оно содержит как четные, так и нечетные степени i. Поэтому могут появиться комплексные корни. Рассмотрим комплексный корень

$$\omega = \omega_R(k,\ \mu) + i\omega_I(k,\ \mu). \tag{9.1.6}$$

Уравнение (9.1.2) преобразуется к виду

$$\varphi = \mathbf{b} \exp[i(kx - \omega_R t)] \exp(\omega_I t) + \text{с. с.} \tag{9.1.7}$$

Может случиться так, что с изменением μ вещественное число ω_I изменит знак. Если $\omega_I > 0$, то это решение будет расти экспоненциально во времени и окажется неустойчивым. Если $\omega_I < 0$, то оно убывает и решение асимптотически устойчиво. Когда $\omega_I(k,\ \mu) = 0$, решение называется нейтрально или маргинально устойчивым. Решение этого уравнения

$$\mu = R(k) \tag{9.1.8}$$

дает граничную кривую в пространстве $(\omega,\ k)$ между областями асимптотической устойчивости и неустойчивости. Эти кривые могут принимать различные формы, но типичной является параболическая форма, изображенная на рис. 9.1.

Точка минимума при $k = k_c$, $\mu = \mu_c$ называется точкой бифуркации или критической точкой, потому что при $\mu < \mu_c$

функция φ всегда убывает для любого значения k. Однако если $\mu > \mu_c$, то полоса конечной ширины мод становится неустойчивой и явится причиной роста амплитуды волны. Критическое волновое число k является преимущественной модой системы, так как это первая мода, которая становится неустойчивой, когда μ, увеличиваясь, проходит через критическое значение. Говорят, что система испытывает бифуркацию, когда около точки $\mu = \mu_c$ меняется качественная природа гармонических волновых решений.

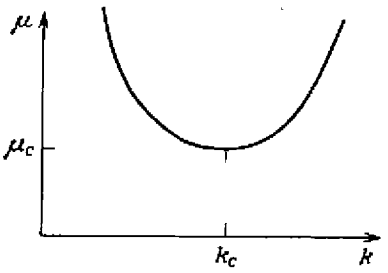


Рис. 9.1.

Только что проведенный очень простой анализ относится к системам, в которых диссипация играет главную роль. Однако неустойчивыми могут стать и такие системы, в которых дисперсия, а не диссипация играет главную роль.

Категория II

Второй тип неустойчивости возникает, когда диссипация отсутствует. Хотя система является чисто дисперсионной с вещественным дисперсионным соотношением, однако корни дисперсионного соотношения могут образовывать комплексно сопряженную пару

$$\omega = \omega_R \pm i\omega_I. \tag{9.1.9}$$

В таком случае уравнение (9.1.2) переписывается в следующем виде:

$$\varphi = b \exp[i(kx - \omega_R t)] \exp(\pm \omega_I t) + \text{с. с.} \tag{9.1.10}$$

Поскольку такие корни входят парами, то при $\omega_I \neq 0$ решение экспоненциально растет, и асимптотическая устойчивость невозможна. Однако можно достичь нейтральной устойчивости, если $\omega_I = 0$. Такой случай легче всего рассмотреть, если предположить, что дисперсионное соотношение квадратично по ω: $a\omega^2 + b\omega + c = 0$, где a, b и c суть функции k и ω. Для тех значений μ, для которых $b^2 > 4ac$, мы, очевидно, имеем $\omega_I = 0$; но если значение μ таково, что $b^2 < 4ac$, то $\omega_I \neq 0$. Условие $\omega_I(k, \mu) = 0$ дает границу в (μ, k)-пространстве между нейтральной устойчивостью в области, расположенной ниже нейтральной кривой $\mu = R(k)$, и неустойчивостью в области, расположенной выше этой кривой. Для некоторой точки (μ, k), лежащей ниже кривой, гармоническая волна, отвечающая такому волновому числу, не растет, не убывает, как в первом случае для диссипативных систем, но распространяется дисперсионно.

Для обеих категорий при изучении поведения системы главный интерес представляет область $\mu \simeq \mu_c$, когда амплитуда волны начинает расти за счет фонового источника потенциальной энергии. Поскольку амплитуда растет, то первоначальное предположение о том, что нелинейными членами можно пренебречь, оказывается неверным. На этой стадии нелинейности неустойчивость и различные дисперсионные эффекты системы начинают конкурировать между собой, результатом чего является ограничение роста амплитуды. Интересным моментом, относящимся к неустойчивым системам, является то обстоятельство, что нелинейность вынуждена производить эффекты из-за неустойчивости линейных решений в области $\mu = \mu_c$. Это находится в контрасте с устойчивыми системами, рассмотренными в предыдущей главе, где нелинейность начинала играть роль только в том случае, когда начальная волна обладала достаточной амплитудой для того, чтобы нелинейными эффектами нельзя было пренебречь.

Другим важным эффектом является стремление системы действовать через преимущественную моду k_c. С физической точки зрения эту моду можно рассматривать как резонансную моду системы. Прежде чем применить анализ для размерностей наших двух категорий, стоит вернуться к эвристическому выводу НЛШ-уравнения, которым мы занимались в разд. 8.1, рассматривая дисперсионное соотношение, слабо зависящее от амплитуды. Поскольку в той главе мы рассматривали только устойчивые случаи, можно ограничиться членами только первого порядка по ω. Мы должны здесь рассмотреть все корни. Кроме того, если мы делаем дисперсионное соотношение зависящим от $|A|^2$, то мы должны добавить в этом случае в дисперсионное соотношение дополнительную функцию, которую мы обозначим через B и которую будем считать функцией потенциальной энергии. Эта функция определяет меру той энергии, которой обмениваются фон и волны. Запишем наше дисперсионное соотношение в виде

$$D(k, \omega, |A|^2, B, \mu) = 0. \tag{9.1.11}$$

Переходя к разложению Тейлора относительно $k = k_c$, $\omega = \omega_{Rc}$, $|A|^2 = B = 0$ в области $\mu \simeq \mu_c$, получаем

$$\begin{aligned}(k - k_c) D_k + (\omega - \omega_{Rc}) D_\omega + |A|^2 D_{|A|^2} + BD_B + (\mu - \mu_c) D_\mu + \\ + {}^1/_2 [(\omega - \omega_{Rc})^2 D_{\omega\omega} + 2(k - k_c)(\omega - \omega_{Rc}) D_{k\omega} + \\ + (k - k_c)^2 D_{kk} \ldots] \ldots = 0.\end{aligned} \tag{9.1.12}$$

Отсюда непосредственно видно, что случаи неустойчивости в категориях I и II существенно отличны в поведении. Поскольку в случае категории II (чисто дисперсионный тип) корни появляются

сопряженными парами, то на нейтральной кривой $\mu = R(k)$ эти сопряженные пары стремятся к двойному корню дисперсионного соотношения. Следовательно, D_ω, а значит и D_k, равны нулю в критической точке. Поэтому амплитудное уравнение для A должно иметь второй порядок по времени и пространственной переменной. В случае категории I двойные корни не появляются, и поэтому амплитудное уравнение будет иметь первый порядок по времени.

Применение (9.1.12) обнаруживает различие между чисто устойчивыми дисперсионными волнами последней главы и рассмотренными здесь случаями, относящимися к лазерному импульсу, распространяющемуся через атомную среду. Уравнение (8.1.3) дает хорошее физическое описание поведения волн, поскольку из эксперимента хорошо известно, что показатель преломления такой среды зависит от $|A|^2$ при условии, что падающая волна находится далеко от частоты атомного резонанса основной среды. В предыдущей главе мы описали этот случай как «внерезонансный». Однако если частота падающей волны близка к частоте атомного резонанса или с ней совпадает и если атомы среды получили начальную подкачку, так что некоторая их доля оказалась в верхнем атомном состоянии, то мы получим ситуацию, очень близкую к той, которая описана в этом разделе. НЛШ-уравнение больше не является эволюционным уравнением для огибающей, потому что имеющаяся потенциальная энергия, накопленная атомами, готова для использования волнами, осциллирующими на преимущественной или «резонансной» частоте. Явление самоиндуцированной прозрачности (СИП) в нелинейной оптике дает физический пример этого резонансного случая, с ним мы будем иметь дело в разд. 9.4.

Метод нахождения эволюционного уравнения для амплитуды A аналогичен предложенному в предыдущей главе. Подход, связанный с многократными растяжениями, имеет преимущество перед другими эвристическими методами в том, что позволяет точно расположить члены по порядку, не оставляя сомнений относительно включения или не включения того или иного члена. Применение разложения Тейлора, как в (8.1.4) или (9.1.12), полезно в качестве иллюстрации, но недостаточно для получения точных ответов. Для обеих категорий I и II мы будем рассматривать несущую волну, действующую около критического или резонансного волнового числа k_c, и считать, что μ близко к μ_c.

Возьмем маленькую полоску неустойчивых мод $(k_c - \varepsilon;\ k_c + \varepsilon)$ около критического волнового числа. Эта полоса изображена на рис. 9.2. Мы можем формально разложить $\mu = R(k)$ в ряд Тейлора около k_c:

$$\mu = R(k_c) \pm {}^1/_2\varepsilon^2 R''(k_c) + \ldots . \qquad (9.1.13)$$

Что же такое ε? Из (9.1.13) мы видим, что ε есть мера того, как далека система от точного критического состояния,

$$\varepsilon \sim (\mu - \mu_c)^{1/2}, \tag{9.1.14}$$

и поэтому ε определяется выбором μ при необходимом ограничении, что ε мало. Отрицательный знак в (9.1.13) формально позволяет нам учесть субкритическое состояние в окрестности критического, и тогда получается, что $\varepsilon \simeq (\mu_c - \mu)^{1/2}$. Так определенное ε можно взять в качестве малого параметра, который определяет медленные пространственные и временные переменные $X_1 = \varepsilon x$; $X_2 = \varepsilon^2 x$; ... $T_1 = \varepsilon t$; $T_2 = \varepsilon^2 t$; ... . Далее мы будем следовать процедуре, описанной в гл. 8. Представим φ в виде асимптотического ряда по ε, разложим L в окрестности $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x$, k и ω вычислим в точках k_c и ω_{Rc} соответственно. В фурье-пространстве это эквивалентно разложению Тейлора около критической точки (k_c, μ_c). Амплитуда огибающей A $(X_1, X_2, ..., T_1, T_2 ...)$ появляется при порядке $O(\varepsilon)$ в формальной задаче многомасштабного растяжения.

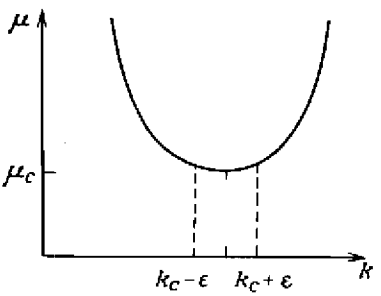


Рис. 9.2.

$$\varphi^{(1)} = bA \exp(i\theta_c) + \text{с. с.}, \tag{9.1.15}$$
$$\theta_c = k_c x - \omega_{Rc} t + \delta.$$

Теперь вместо того, чтобы дать читателю довольно длинное обоснование выкладок, ведущих к различным амплитудным уравнениям, которые возникают в наших двух категориях неустойчивости, просуммируем окончательные результаты, оставляя получение формальных асимптотик до следующего раздела. Читатель, который не интересуется методом размерности, может опустить следующий раздел.

Простейшее уравнение размерности 1, которое появляется для описания неустойчивости категории I, представляет собой кубическое нелинейное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \pm \alpha_1 A - \beta_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \bar{X}^2} + \gamma_1 A |A|^2, \tag{9.1.16}$$
$$\bar{X} = X_1 - c_g T_1.$$

Коэффициенты α_1, β_1 и γ_1 для этой категории задач часто оказываются комплексными. Уравнение (9.1.16) известно в теоретической физике как кубически нелинейное уравнение Ландау—

Гинзбурга из-за его сходства с уравнением из теории сверхпроводимости. В механике жидкости оно появлялось под разными названиями, например как уравнение Ньюэлла и Уайтхеда [1969]. Это уравнение и его обобщения являются «типичными» уравнениями, которые могут появляться в качестве примеров к категории I. Они возникают, в частности, в задачах конвекции и плоскопараллельных течений. Некоторые ссылки и дальнейшие комментарии приводятся в примечаниях.

Для неустойчивости категории II мы получаем, как было предсказано, амплитудные уравнения второго порядка по времени и пространству. Уравнение (9.1.16), будучи уравнением диссипативного типа, не интегрируемо в том смысле, как описано в этой книге. В этом случае возникают два вида «типичных» амплитудных уравнений. Первый — интегрируемый, второй — неинтегрируемый. Первый вид сейчас будет представлен парой уравнений, в которых появляется функция B, впервые введенная в (9.1.11):

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_1 \frac{\partial}{X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial X_1}\right) A = \pm \alpha A - \beta AB, \quad (9.1.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial X_1}\right) B = \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial X_1}\right) |A|^2. \quad (9.1.18)$$

Коэффициенты α и β вещественные, а c_1 и c_2 — два значения групповой скорости, вычисленные в точке (k_c, μ_c). Очевидно, что в то время как c_g из (9.1.16) однозначна, потому что нейтральная кривая определяется единственным корнем дисперсионного соотношения, групповая скорость, соответствующая устойчивости категории II, будет двузначной благодаря слиянию пары комплексно сопряженных корней в двойной корень на нейтральной кривой. Знаки $\pm$ при члене αA в (9.1.17) выбираются в соответствии с выбором над- или подкритического состояния вблизи μ_c. Уравнения (9.1.17) и (9.1.18) являются основной темой этой главы, и два примера, которые мы рассмотрим ниже, ясно продемонстрируют физическую природу этих уравнений. Эти уравнения, которые мы, начиная с этого момента, будем называть AB-уравнениями, интегрируемы методом обратной задачи рассеяния и могут быть трансформированы к другой, более знакомой нам форме, с которой мы уже встречались в гл. 6. Два примера, которые мы намерены рассмотреть, следующие:

(i) самоиндуцированная прозрачность при распространении ультракоротких оптических импульсов;

(ii) идеальная (без вязкости) двухслойная модель бароклинной неустойчивости.

Эти два примера будут разобраны в разд. 9.3 и 9.4. Особенно подробно, шаг за шагом, будет разобран пример СИП для того, чтобы показать практически технику вычислений. Рассмотрение в полном объеме двухслойной модели требует проведения весьма

длинных вычислений и поэтому мы ограничимся лишь схематическим наброском.

Прежде чем перейти к описанию некоторых простых свойств AB-уравнений, запишем амплитудное уравнение 2-го типа, возникающее для описания неустойчивости категории II:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A=\pm\alpha A-\beta A|A|^2. \quad (9.1.19)$$

Функция B не фигурирует в этой системе. Идеальная неустойчивость Кельвина—Гельмгольца (Вейссман [1979]) и задача о продольном изгибе упругих оболочек (Ландж и Ньюэлл [1973]) представляют собой два физических примера, в которых появляется уравнение (9.1.19). Заметим, однако, что заменой координат $\alpha^{1/2}T_1=\xi+\tau$; $\alpha^{1/2}X_1=c_1\xi+c_2\tau$ и растяжением A: $\varphi=(\beta/\alpha)^{1/2}A$ мы превращаем уравнение (9.1.19) в хорошо известное φ^4-уравнение

$$\varphi_{\xi\tau}=\pm\varphi-\varphi|\varphi|^2, \quad (9.1.20)$$

которое, как было отмечено в предыдущей главе, является неинтегрируемой системой.

Возвращаясь к AB-уравнениям, стоит затратить несколько строк, чтобы показать, что они представляют собой систему, уже рассмотренную в гл. 6. Это легче всего сделать, если привести их к следующему виду. Определим

$$R=\sqrt{2\beta}A, \quad (9.1.21)$$

$$S=\pm 1-\beta\alpha^{-1}B \quad (9.1.22)$$

и введем полухарактеристические координаты

$$\xi=-(X_1-c_1T_1)(c_1-c_2)^{-1}\alpha^{-1/2};\quad \tau=(X_1-c_2T_1)(c_1-c_2)^{-1}\alpha^{1/2}. \quad (9.1.23)$$

Тогда AB-уравнения превращаются в уравнения вида

$$R_{\xi T}=RS,\quad R\to 0;\quad S\to\pm 1, \quad (9.1.24)$$

$$S_\xi=-\frac{1}{2}(|R|^2)_\tau,\quad |\xi|\to\infty. \quad (9.1.25)$$

Метод ЗШ-АКНС 2×2-обратной задачи рассеяния, рассмотренный в гл. 6, показывает, что (9.1.24), (9.1.25) являются условиями интегрируемости задачи на собственные значения

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}+i\lambda\psi_1=\frac{1}{2}R\psi_2, \quad (9.1.26)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}-i\lambda\psi_2=-\frac{1}{2}R^*\psi_1$$

с собственными функциями, подчиненными уравнениям

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = (-S\psi_1 + R_\tau \psi_2)/4i\lambda,$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} = (R_\tau^* \psi_1 + S\psi_2)/4i\lambda. \tag{9.1.27}$$

Матричное уравнение Шрёдингера, получающееся из (9.1.26),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2\right)\Psi = V\Psi, \tag{9.1.28}$$

имеет в качестве потенциала матрицу V вида

$$V = \begin{bmatrix} {}^1/_4 |R|^2 & {}^1/_2 R \\ -{}^1/_2 R^* & {}^1/_4 |R|^2 \end{bmatrix}. \tag{9.1.29}$$

Солитонные решения возможны лишь в том случае, если энергетические состояния отрицательны. Эти связанные состояния отвечают чисто мнимым собственным значениям матрицы V как потенциала. Уравнение (9.1.24) лишь тогда кососимметрично, когда $\beta > 0$, поэтому это условие является критерием того, что AB-уравнения допускают солитонные решения. Это эквивалентно критерию $\beta\gamma > 0$ Бенджамина—Фейра предыдущей главы для НЛШ-уравнения.

Если $\beta > 0$ и A комплексно, то R комплексно и уравнения (9.1.24), (9.1.25) не могут быть далее упрощены. Если, однако, A и R вещественны, что соответствует отсутствию фазовых изменений в несущей волне, то можно проинтегрировать эти уравнения. Полагая $R = \varphi_\xi$ и предполагая, что $\varphi_{\xi\tau} = F(\varphi)$, находим

$$\varphi_{\xi\xi\xi} = \varphi_\xi S, \tag{9.1.30}$$
$$S_\xi = -\varphi_\xi \varphi_{\xi\tau}. \tag{9.1.31}$$

Оба эти уравнения показывают, что

$$F'' + F = 0, \tag{9.1.32}$$

поэтому без потери общности можно выбрать $F(\varphi) = \pm\sin\varphi$. Получающееся в результате уравнение

$$\varphi_{\xi\tau} = \pm\sin\varphi \tag{9.1.33}$$

является известным уравнением СГ. Кроме того, мы получаем также

$$S = \pm\cos\varphi, \tag{9.1.34}$$

и в каждом выражении выбор знака $\pm$ отвечает над- и подкритическому состояниям соответственно. Если $\beta < 0$, то (9.1.25) имеет положительный знак и (9.1.32) превращается в уравнение $F'' - F = 0$, что приводит в результате к уравнению sh-Гордон.

Следуя гл. 6, можно найти различные мультисолитонные решения; мы не будем повторять здесь их вывод. Знаки $\pm$ приведут, разумеется, к различным результатам в этих формулах. Для подкритического случая (знак —) односолитонное решение (R вещественно) представляется формулами

$$R = 2a_1 \operatorname{sech} \theta, \quad S = -1 + 2 \operatorname{sech}^2 \theta,$$
$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} (\exp \theta), \quad \theta = a\xi - \frac{1}{a} \tau + \delta. \tag{9.1.35}$$

В системе отсчета (X_1, T_1) имеем

$$\theta = \varkappa (X_1 - vT_1),$$
$$v = (c_1 \beta a^2 \alpha^{-1} + c_2)/(\beta^2 a^2 \alpha^{-1} + 1), \tag{9.1.36}$$
$$\varkappa = (\alpha + \beta a^2)\, \beta^{1/2}\, a\, (c_2 - c_1).$$

Нетрудно доказать, что $c_2 < v < c_1$, так что скорость солитона должна находиться между двумя групповыми скоростями c_1 и c_2. Этот солитон устойчив к малым возмущениям. В гл. 8 мы обсуждали СГ-уравнение как модельное уравнение для механической системы маятников, где φ играет роль угла закручивания. Это солитонное решение (9.1.35) играет роль угла закручивания, от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Угол $\varphi = 0$ отвечает «нижнему» положению маятника, когда $S = -1$ (в начале). Величину S можно считать потенциальной энергией системы. По мере возрастания τ угол φ приближается к π, что отвечает максимальному «верхнему» положению, когда S приближается к $+1$. Затем, когда маятник падает вниз, S уменьшается до -1, а φ стремится к 2π. Маятник, который начинает колебания, а затем приходит к одной и той же нижней позиции, очевидно, устойчив к малым возмущениям около состояния $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$. Тот факт, что подкритическая скорость солитона лежит между двумя групповыми скоростями падающей волны, качественно согласуется с этим заключением в том смысле, что импульс огибающей не опережает и не отстает от скорости передачи энергии падающей волны.

Надкритическое состояние (знак $+$) для вещественного R дает

$$R = 2b \operatorname{sech} \eta,$$
$$S = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \eta, \tag{9.1.37}$$
$$\eta = b\xi + \tau/b + \delta,$$

где η в системе (X_1, T_1) задается формулами

$$\eta = \varkappa (X_1 - vT_1)$$
$$v = c_1 + (c_1 - c_2)\, [\beta b^2 \alpha^{-1} - 1]^2, \tag{9.1.38}$$
$$\varkappa = (\alpha - \beta b^2)/b\beta^{1/2}\, (c_1 - c_2).$$

В этом случае либо $v \geqslant c_1$, либо $v \leqslant c_2$, так что солитонная скорость либо превосходит высшую, либо медленнее низшей групповой скорости падающей волны. Это показывает, что такой солитон не причинный. Например, в разд. 9.3 мы найдем, что $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, где 1 обозначает безразмерную скорость света. Мы можем ожидать, что такой солитон будет неустойчивым, поскольку он «пытается» двигаться либо чересчур быстро, либо чересчур медленно по сравнению с распространением энергии падающей волны. Исследование соотношения (9.1.37) показывает, что система начинается и заканчивается в «верхнем» положении, когда $S = +1$, и только когда $S = -1$, переходит в «нижнее» положение, где $\varphi = \pi$. Это равносильно тому, как если бы маятник начал колебаться с верхнего положения, которое является неустойчивым. Вышенаписанные формулы были приведены для вещественного R, и поэтому односолитонные формулы для СГ-уравнения, где $R = \varphi_\xi$, также окажутся вещественными. Включение фазового члена в качестве переменной, когда R становится комплексной функцией от ξ и τ, в действительности не исключает аналогии с маятником. Уравнения (9.1.24) и (9.1.25) имеют сохраняемую величину

$$|R_\tau|^2 + S^2 = 1 \tag{9.1.39}$$

при условии, что $R \to 0$, $S \to +1$, когда $|\xi| \to \infty$. Этот закон сохранения при вещественном R равносилен равенству

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1. \tag{9.1.40}$$

Следующий раздел помечен звездочкой и может быть опущен при первом чтении. В нем мы делаем попытку охватить ряд деталей, относящихся к возникновению различных амплитудных уравнений. Имеется существенное математическое различие между диссипативными неустойчивыми примерами, которые приводят к кубически нелинейным диффузионным уравнениям (9.1.16), и дифференциальными амплитудными уравнениями второго порядка по времени (9.1.17)—(9.1.18) и (9.1.19), которые возникают из дисперсионно неустойчивых примеров.

9.2.* Секулярная теория возмущений и получение амплитудных уравнений

Цель этого раздела — детально изучить различия между примерами этой главы, дисперсионные соотношения которых имеют ненулевую мнимую часть, и примерами гл. 8, которые намеренно ограничивались вещественными дисперсионными соотношениями. Мы будем следовать идеям и обозначениям гл. 8 и предыдущего раздела и продолжим анализ, связанный с многомасштабными растяжениями. Напомним читателю, что мы применяем медлен-

ные пространственные и временны́е переменные $X_m = \varepsilon^m x$; $T_m = \varepsilon^m t$ ($m = 1, 2, \ldots$). Малый параметр ε был определен в (9.1.14); он показывает, как далека система от критического состояния. В гл. 8 мы использовали разложение Тейлора для оператора L вблизи $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$, которое нам сейчас понадобится. Кроме того, мы выполним еще одно разложение вблизи точки $\mu = \mu_c$. В результате получим

$$O(\varepsilon): \quad L\varphi^{(1)} = 0, \tag{9.2.1}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L\varphi^{(2)} = -\left(L_1 \frac{\partial}{\partial T_1} + L_2 \frac{\partial}{\partial X_1}\right)\varphi^{(1)} + (M\varphi^{(1)})\cdot(N\varphi^{(1)}), \tag{9.2.2}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3): \quad L\varphi^{(3)} = &-\left(L_1 \frac{\partial}{\partial T_1} + L_2 \frac{\partial}{\partial X_1}\right)\varphi^{(2)} - \\ &- \frac{1}{2}\left\{L_{11}\frac{\partial}{\partial T^2} + 2L_{12}\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial T_1} + L_{22}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \right. \\ &\left. + 2L_1 \frac{\partial}{\partial T_2} + 2L_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \pm R''(k_c) L_\mu\right\}\varphi^{(1)} + \\ &+ \text{нелинейные члены.} \end{aligned} \tag{9.23}$$

Беря $\varphi^{(1)}$ как в (9.1.15) с падающей волной, имеющей критическую частоту и критическое волновое число, получаем из (9.2.2) следующее уравнение:

$$L\varphi^{(2)} = -i\left(l_\omega \frac{\partial A}{\partial T_1} - l_k \frac{\partial}{\partial X_1}\right) b \exp(i\theta_c) + \text{с. с.}, \tag{9.2.4}$$

в котором применяются строчные буквы, когда L, M и N являются функциями от k и ω.

Когда дисперсионное соотношение чисто вещественное, как в гл. 8, мы показали, что первые члены в (9.2.4) являются секулярными членами, наличие которых делает теорию возмущений несправедливой за конечное время. Разница между двумя категориями неустойчивости проявляется именно в этих членах. Сейчас нам необходимо определить, при каких условиях члены в правой части (9.2.4) дают секулярные члены в $\varphi^{(2)}$. Простейший путь к этому — рассмотреть скалярный вариант (9.2.4). От секулярных членов можно избавиться с помощью двух условий: либо взять $\overline{X} = X - (d\omega/\partial k)\, T_1$, как в гл. 8, либо положить l_ω и l_k равными нулю. Это последнее условие может возникнуть лишь в том случае, когда скалярное дисперсионное соотношение $l = 0$ имеет двойной корень в критической точке по ω и k. Эквивалентное множество условий в матричной форме для того, чтобы не было секулярных членов, представляется в виде $\partial\,(\det l)/\partial\omega = 0$ и $\partial\,(\det l)/dk = 0$. Соотношение $\det(l) = 0$ является матричным дисперсионным соотношением, эквивалентным $l = 0$ в скаля́рном случае. Этот последний результат нетрудно доказать; для этого потребуются некоторые выкладки. Критерий двойного

корня в дисперсионном соотношении является, очевидно, ключевым моментом в наших исследованиях, поскольку именно он разделяет наши неустойчивости на две категории разд. 1. Целесообразно каждый из этих случаев исследовать отдельно.

Категория I (диссипативная неустойчивость)

В разд. 9.1 мы рассмотрели только единственный комплексный корень

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \tag{9.2.5}$$

который может появиться, когда имеется затухание (например, вязкость). В критической точке и всюду на нейтральной кривой $\omega_I = 0$, и поэтому, вообще говоря, на нейтральной кривой появляются только простые корни. Математически допустимо иметь двойные корни, но с физической точки зрения это будет весьма патологический случай. Поскольку двойные корни отсутствуют, члены l_ω и l_k в (9.2.4) порождают секулярные члены, которые подлежат удалению. Удаление секулярных членов можно произвести подобно тому, как это было сделано в предыдущей главе, т. е. введением новой переменной $\overline{X}$:

$$\overline{X} = X_1 - \left(\frac{d\bar{\omega}}{dk}\right) T_1, \tag{9.2.6}$$

где $d\bar{\omega}/dk$ (групповая скорость) получается из дисперсионного соотношения и однозначна

$$\frac{d}{dk}(\det l) = \left[\frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}\right](\det l) = 0. \tag{9.2.7}$$

Переменная $\bar{\omega}$ определена как $\bar{\omega} = \bar{\omega}(k)$, после чего мы имеем множество $\mu = R(k)$. Вводя новую переменную $\overline{X}$ в (9.2.3) и снова удаляя секулярные члены, мы находим, что получающееся амплитудное уравнение совпадает с (9.1.16):

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \pm\alpha_1 A + \beta_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \overline{X}^2} + \gamma_1 A |A|^2, \tag{9.2.8}$$

где для удобства мы изменили систему отсчета так, чтобы исключить переменную X_2. Для диссипативной системы оператор L и его прозводные L_1, L_2 и т. д. будут содержать четные и нечетные члены по «переменным» $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ и, следовательно, коэффициенты α_1, β_1 и γ_1 будут, вообще говоря, комплексными. Заметим, что система гл. 8, которая имела простые, но чисто вещественные корни дисперсионного соотношения, будет давать НЛШ-уравнение, в котором α_1, β_1 и γ_1 будут чисто мнимыми. Уравнение (9.2.8) неинтегрируемо методом обратной задачи рассеяния, за исключе-

нием случая, когда α_1, β_1 и γ_1 окажутся чисто мнимыми. В этом случае оно оказывается дисперсионным нелинейным волновым уравнением без диффузии (см. (6.1.1), а также примечания к разд. 9.1 и 9.2).

Категория II (дисперсионная неустойчивость)

Эта вторая категория неустойчивости, как объяснялось в разд. 9.1, характеризуется появлением пар комплексно сопряженных корней

$$\omega = \omega_R \pm i\omega_I. \tag{9.2.9}$$

Всюду на нейтральной кривой имеем $\omega_I = 0$, и поэтому дисперсионное соотношение имеет *двойной корень* ω на этой кривой, значит, $\partial(\det l)/d\omega = 0$. Кроме того, имеем соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial k} + \frac{d\omega}{dk}\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{dR}{dk}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\right)\det l = 0, \tag{9.2.10}$$

где ω в этом случае имеет вид $\omega = \omega(k, \mu)$ и, следовательно, $\partial(\det l)/dk = 0$ только в том случае, если $dR(k)/dk = 0$. Это выполняется только при минимуме, когда $k = k_c$. Мы приходим поэтому к выводу, что $\partial A/\partial T_1$ нигде на нейтральной кривой не может быть источником секулярного члена, в то время как член $\partial A/\partial X_1$ является несекулярным только в критической точке. Если эти члены не делают теорию возмущений несправедливой, то не обязательно вводить переменную $\overline{X}$, а X_1 и T_1 могут оставаться независимыми переменными. Уравнение (9.2.4), можно теперь проинтегрировать; тогда

$$\varphi^{(2)} = \left(a_1\frac{\partial A}{\partial T_1} + a_2\frac{\partial A}{\partial X_1}\right)\exp(i\theta_c) + a_3A^3\exp(2i\theta_c) + \text{с. с.} + \\ + \mathbf{D}(X_1, T_1). \tag{9.2.11}$$

Гармонические члены здесь появились из-за нелинейности, а вектор $\mathbf{D}$ — как постоянная интегрирования по отношению к быстрым переменным x и t. Мы предполагаем, как в гл. 8, что L, M и N таковы, что в AA^* нет секулярных членов, отброшенных в (9.2.4).

Мы остановимся лишь на главных моментах последней части вычислений, так как многие шаги очевидны, но аккуратное проведение доказательств заняло бы слишком много места. Заметим сначала, что роль функции $\mathbf{D}$ важна. Поскольку $\mathbf{D}$ является функцией только от медленных переменных, она будет уничтожена операторными членами L_1 и L_2 в (9.2.3), если L не содержит членов, которые являются первыми производными либо по пространству, либо по времени (таким образом, по крайней мере один

элемент в L содержит постоянную). В противном случае **D** сохраняется. Медленные производные от **D** и медленные производные от AA^* от нелинейностей теперь образуют второй тип секулярной формы, которая приводит к членам в $\varphi^{(3)}$, выраженным точно через x и t без экспонент. Этот другой тип секулярных членов порождает амплитудное уравнение, которое является дифференциальным уравнением второго порядка по T_1 и X_1. Окончательный результат представляет собой объединение уравнений, которые мы назвали AB-уравнениями:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A=\pm\alpha A-\beta AB, \quad (9.2.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)B=\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)|A|^2. \quad (9.2.13)$$

Первое уравнение возникает из секулярных членов, содержащих $\exp(i\theta_c)$, а второе — из членов с **D**, описанных выше. Функция B появляется как подходящая линейная комбинация элементов **D**. Скорости c_1 и c_2 — два значения групповой скорости падающей волны в критической точке. Дифференцирование (9.2.9) по k и последующий переход к пределу $\mu \to R(k)$, $k \to k_c$ показывают, что два различных значения групповой скорости получаются из-за двойных корней.

Дальнейшее полное дифференцирование (9.2.7) дает уравнение

$$l_{kk}+2\frac{d\bar{\omega}}{dk}l_{k\bar{\omega}}+\left(\frac{d\bar{\omega}}{dk}\right)^2 l_{\bar{\omega}\bar{\omega}}+\left(\frac{d^2\bar{\omega}}{dk^2}\right)l_{\bar{\omega}}=0. \quad (9.2.14)$$

Поскольку $l_{\bar{\omega}}=0$, получается простое квадратное уравнение для групповой скорости, которое имеет два различных корня. Это и есть c_1 и c_2 в (9.2.12). Временная и пространственная производные в (9.2.3) будут разлагаться на множители в точности такого вида. Затем, если необходимо, линейную комбинацию элементов **D** можно взять такой, чтобы коэффициенты $\partial/\partial X_1$-членов в (9.2.13) оказались равными c_1 и c_2. Член $\pm\alpha A$ вносится членом $\pm R''(k_c)L_\mu$ в (9.2.3), причем положительный (отрицательный) знак относится к над (под)-критическому состоянию соответственно.

Появление или непоявление B является решающим фактором в структуре уравнений. Примеры самоиндуцированной прозрачности (СИП) (обсуждались в разд. 9.3) и двухслойной модели бароклинной неустойчивости (обсуждались в разд. 9.4) суть случаи, когда оператор L содержит первые производные. Уравнения типа AB как раз появляются в этих двух примерах. Однако если L принимает такой вид, что **D** уничтожается операторами с быстрыми переменными, то нелинейность типа AB не появляется. В этом случае секулярные члены второго типа, приводящие

к уравнению (9.2.13), появиться не могут, и мы остаемся только с одним уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A=\pm\alpha_2 A-\beta_2 A|A|^2. \tag{9.2.15}$$

Факторизация оператора, содержащего две различные групповые скорости, производится таким же образом, как в AB-уравнениях. Двухслойная модель Кельвина—Гельмгольца приводит к уравнениям (9.2.15), вычисления проведены Вейссманом [1979]. Однако этот пример мы здесь рассматривать не будем. Главная цель этого раздела состоит в том, чтобы выделить наиболее существенные элементы отличия между неустойчивостями категорий I и категорий II. Категория I (диссипативная) действует на переменной $T_2=\varepsilon^2 t$, в то время как категория II (дисперсионная) действует на переменной $T_1=\varepsilon t$ и приводит также к производным второго порядка по времени. Таким образом, задача Коши становится совершенно иной, а это значит, что при численном интегрировании для этих двух различных типов понадобятся, конечно, различные виды разностных схем.

Наш следующий раздел будет посвящен связи AB-уравнений, а следовательно, СГ-уравнений, с уравнениями Максвелла—Блоха. Подробности того, как будут возникать подчеркнутые в этом разделе основные моменты, проявятся в ходе вычислений.

9.3. Распространение ультракоротких оптических импульсов и самоиндуцированная прозрачность

В гл. 8 было рассмотрено взаимодействие света с атомной средой вне резонанса. В этом случае отсутствуют переходы между атомными энергетическими уровнями. Сильнейшими переходами в оптической области являются электрические дипольные переходы. Следовательно, в любой ситуации, в которой электромагнитное излучение взаимодействует с электрическими диполями, мы должны учесть пространственное распространение эффектов из-за коротких длин волн. Это не так в случае магнитного резонанса, так как излучение магнитного диполя имеет длины волн, по крайней мере равные миллиметру или больше. Задача этого раздела заключается в изучении вопроса о распространении электромагнитного излучения, которое резонирует или близко к резонансу с энергетическими уровнями двухуровневой атомной системы. В разд. 7.8 мы изучали такие системы, используя гамильтониан двухуровневой системы и уравнение движения Гейзенберга, и

получили так называемые уравнения Блоха (7.8.33), описывающие взаимодействие поля E с двухуровневой атомной системой. Обобщение этих уравнений после включения феноменологически диссипативных членов выглядит следующим образом:

$$\dot{p} = \frac{2p}{h} EN + \omega_s' Q - P/T_{\text{tr}}, \tag{9.3.1}$$

$$\dot{Q} = -\omega_s' P - Q/T_{\text{tr}}, \tag{9.3.2}$$

$$\dot{N} = -\frac{2p}{h} EP - \frac{(N - N_{\text{eq}})}{T_L}. \tag{9.3.3}$$

Эти уравнения называются оптическими уравнениями Блоха. Здесь E — электрическое поле, P и Q — функции поляризации, N — число заполнения ($-1 < N < 1$), которое дает меру атомной инверсии. Постоянная p есть электрическая напряженность диполя, ω_s' — резонансная частота двухуровневого атома, ω_s — частота падающей волны взаимодействующего поля. Вообще говоря, эти две частоты в точности равны, но колебание каждого отдельного атома приводит к сдвигу Доплера каждой индивидуальной атомной частоты и поэтому ω_s' будет принимать континуум значений, сгруппированных вокруг ω_s. С возможностями современной технологии нетрудно создать устройство, генерирующее импульсы света продолжительностью в наносекунду (10^{-9} с) или даже в пикосекунду (10^{-12} с). Поскольку эти времена имеют продолжительность импульса огибающей, мы рассматриваем ситуацию, в которой начальный импульс имеет форму падающей волны, резонансной с двухуровневыми атомами. Для импульса большей продолжительности существенно включить в (9.3.1)—(9.3.3) важные члены, описывающие затухание. Величины T_{tr} и T_L называются временами атомной релаксации, названными так из-за того, что атомные верхние состояния могут иметь конечные времена жизни, а N_{eq} есть равновесное значение числа заполнения, когда поле не приложено. Однако для импульса продолжительностью в 1 нс или меньше, в частности, когда наша среда взята в виде разреженного газа, можно иметь T_{tr} и T_L значительно большими, чем времена продолжительности импульса. Как следствие импульсы вступят во взаимодействие со средой раньше, нежели наступят какие-либо релаксационные эффекты, и в этом случае можно пренебречь диссипативными членами в уравнениях Блоха. Мы еще вернемся к этому случаю в разд. 9.5.

В рамках этих ограничений становится ясно, что рассматриваемая система соответствует категории II из разд. 9.1. Тот факт, что атомы способны поглощать, а затем снова испускать приходящий импульс света, определенно указывает на то, что чисто

нейтрально устойчивое распространение волны больше не происходит и что НЛШ-уравнение едва ли может появиться как амплитудное уравнение для импульса огибающей. В самом деле, в разд. 7.8 было показано, что уравнение Блоха для простой медленно меняющейся огибающей сводится к уравнению СГ, а не к НЛШ-уравнению. Наша цель в этом разделе состоит в том, чтобы подтвердить этот результат, показав, что обсуждаемая система неустойчива и описывается AB-уравнениями, сводящимися к уравнению СГ. В действительности уравнения Блоха, объединенные с уравнениями Максвелла для поля E, дают классический пример неустойчивости категории II. Наши вычисления, более длинные, чем в разд. 7.8, дают возможность неосведомленному читателю шаг за шагом проследить за всеми подробностями. Прежде чем начать вычисления, мы присоединим к уже написанным уравнениям уравнение Максвелла, добавляющее к полю E поляризацию Q:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E=\frac{4\pi np}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}Q(x,\ t;\ \Delta)\,g(\Delta)\,d\Delta. \quad (9.3.4)$$

Интеграл в правой части (9.3.4) важен в оптике, поскольку он позволяет учесть доплеровский сдвиг резонансной частоты для всех индивидуальных атомов, совершающих случайные колебания. Этот эффект называется «неоднородным уширением»; функция $g(\Delta)$ является симметричной нормированной функцией распределения, возможно, гауссовой или лоренцевой. Величина $\Delta = \omega_s' - \omega_s$; она определяет степень «внерезонансности» каждого атома. Поскольку мы имеем больше 10^{12} атомов, то суммарный эффект от всех этих атомов может быть представлен интегралом. Неоднородное уширение важно как с математической, так и с физической точки зрения, поскольку оно дает нам то, что называется «теоремой площадей», с которой мы будем иметь дело позднее в этом разделе. Однако пока без потери физического смысла мы возьмем $g(\Delta) = \delta(\Lambda)$ (острая дельтообразная функция вблизи резонанса) для проведения следующих вычислений. По мере вычислений мы сможем учесть то обстоятельство, что $g(\Delta)$ — распределение общего вида. С уравнениями (9.3.1)—(9.3.4) легче обращаться, если перейти к безразмерным переменным. Определим безразмерные электрическое поле, поляризацию, пространственную и временную переменные следующим образом:

$$\frac{2p}{\hbar\omega_s}\cdot E\to E;\quad P\to P;\quad Q\to Q;\quad N\to N;$$

$$\omega_s t\to t;\quad \omega_s c^{-1}x\to x.$$

Тогда уравнения Блоха и уравнение Максвелла примут следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{xx} - E_{tt} &= \bar{\alpha} Q_{tt}, \\ P_t &= EN + Q, \quad \bar{\alpha} = \frac{8\pi\rho^2}{h\omega_a}, \\ Q_t &= -P, \\ P(t) &= -EN, \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

где $\bar{\alpha}$ — безразмерная постоянная, дающая меру взаимодействия между атомами и полем. Мы предлагаем следующий подход к уравнениям (9.3.5). Сначала мы покажем, что здесь имеется неустойчивость дисперсионного типа (категория II). Для этого необходимо рассмотреть равновесное решение уравнений (9.3.5): $E = P = Q = 0$, $N = N_0$. Это означает, что вначале атомы могут «стартовать» с некоторым числом заполнения N_0 ($-1 < N_0 < 1$).

Эксперименты в аттенюаторе начинаются с $N_0 = -1$, но, как мы увидим, старт с более общего числа N_0 облегчает вычисления. Смысл того, что вначале $N_0 = -1$, выявится позднее. Линеаризуя (9.3.5) около $N = N_0$ и исключая Q, найдем, что линейная часть может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ -N_0\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ P \\ \overline{N} \end{pmatrix}, \tag{9.3.6}$$

где $N = N_0 + \overline{N}(x, t)$. Дисперсионное соотношение, задаваемое определителем матрицы в правой части (9.3.6), в фурье-представлении будет иметь вид

$$\omega[(\omega^2 - k^2)(1 - \omega^2) - \bar{\alpha}N_0\omega^2] = 0. \tag{9.3.7}$$

Игнорируя ветвь $\omega = 0$, получаем квадратное уравнение для ω^2,

$$\omega^4 - \omega^2[k^2 + 1 - \bar{\alpha}N_0] + k^2 = 0, \tag{9.3.8}$$

решения которого имеют вид

$$2\omega^2 = (k^2 + 1 - \bar{\alpha}N_0) \pm [(k^2 + 1 - \bar{\alpha}N_0)^2 - 4k^2]^{1/2}. \tag{9.3.9}$$

Теперь легко видеть, что мы имеем дисперсионную неустойчивость типа, рассмотренного в разд. 9.1. Нейтральная устойчивость имеет место, когда

$$(k^2 + 1 - \bar{\alpha}N_0)^2 - 4k^2 \geqslant 0, \tag{9.3.10}$$

а неустойчивость случится, когда дискриминант отрицательный. Неравенство (9.3.10) можно записать в виде

$$(k+1)^2 \leqslant \bar{\alpha} N_0 \leqslant (k-1)^2. \tag{9.3.11}$$

Не обращая внимания на левую часть, которая учитывается только для отрицательных волновых чисел, мы получим чисто параболическую нейтральную кривую

$$N_0 = (\bar{\alpha})^{-1}(k-1)^2, \tag{9.3.12}$$

$$(N_0)_c = 0, \quad k_c = 1 \tag{9.3.13}$$

с критической точкой (0, 1). С физической точки зрения не удивительно, что большинство неустойчивых волновых чисел (и поэтому частот в безразмерных единицах) совпадает с резонансной частотой. Поскольку дискриминант равен нулю в критической точке, то, в силу (9.39), фазовая скорость равна единице. Вычисление групповой скорости более сложно из-за квадратных корней. Используя (9.3.12) и дифференцируя (9.3.9) по k, а затем переходя к пределу $\bar{\alpha} N \to (k-1)^2$, находим, что

$$\left(\frac{d\omega}{\partial k_c}\right) = \frac{2k \pm 2k}{4\omega}\Big|_{k,\ \omega \to 1} = 1 \text{ и } 0. \tag{9.3.14}$$

Мы имеем теперь два значения групповой скорости, предсказанные в разд. 9.1 для падающей волны.

Вернемся теперь к многомасштабным разложениям для (9.3.5), произведенным около $(k_c - \varepsilon;\ k_c + \varepsilon)$. Имеем

$$\bar{\alpha} N_0 = \pm \varepsilon^2 + \cdots, \tag{9.3.15}$$

$$N = N_0 + \varepsilon N^{(1)} + \varepsilon^2 N^{(2)} + \cdots. \tag{9.3.16}$$

Проще исключить Q из уравнений (9.3.5) и оставить только E, P и N.

Мы должны также помнить, что $\bar{\alpha} N$ вычисляется в критической точке и поэтому должно быть записано, как в (9.3.15). Исключая P и Q из (9.3.5), получим при первых трех порядках по ε:

$$O(\varepsilon): \quad \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right\} E^{(1)} = 0, \tag{9.3.17}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \hat{\mathscr{L}} E^{(2)} = -2\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\} E^{(1)} - \bar{\alpha}\partial^2/\partial t^2 (E^{(1)} N^{(1)}), \tag{9.3.18}$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \hat{\mathscr{L}} E^{(3)} = \hat{M} E^{(2)} - \left\{\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial X_2} - \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial T_2} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_2}\right)+$$
$$+\bar{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\pm E^{(1)}+N^{(1)}E^{(2)}+N^{(2)}E^{(1)}\}+$$
$$+4\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_1}-\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right)\Big\}E^{(1)}-2\bar{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}E^{(1)}N^{(1)}, \quad (9.3.19)$$

где $\hat{\mathscr{L}}$ — оператор в (9.3.17), а $\hat{M}$ — оператор, действующий на $E^{(1)}$ в правой части (9.3.18).

Прежде чем обсудить решения вышенаписанных уравнений, рассмотрим уравнение $N_t = -EP$ в комбинации с уравнением Максвелла. Последнее дает

$$O(\varepsilon): \quad -\bar{\alpha}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E^{(1)}, \quad (9.3.20)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad -\bar{\alpha}\left[\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial P^{(1)}}{\partial T_1}\right]=\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E^{(2)}+$$
$$+2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial X_1}-\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T_1}\right)E^{(1)}, \quad (9.3.21)$$

в то время как из первого получается:

$$O(\varepsilon): \quad N_t^{(1)}=0, \quad (9.3.22)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad N_t^{(2)}+\frac{\partial N^{(1)}}{\partial T_1}=-E^{(1)}P^{(1)}, \quad (9.3.23)$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \frac{\partial N^{(1)}}{\partial T_2}+\frac{\partial N^{(2)}}{\partial T_1}+N_t^3=-E^{(1)}P^{(2)}-E^{(2)}P^{(1)}. \quad (9.3.24)$$

Мы рассмотрим сейчас эти уравнения для того, чтобы найти множество эволюционных уравнений для огибающей. Помня, что мы находимся в критической точке $k_c = \omega_{Rc} = 1$, получим решение уравнения (9.3.17) в виде

$$E^{(1)}=\mathscr{E}(X, T_1, T_2)\exp(i\theta)+\text{с. с.}, \quad (9.3.25)$$
$$\theta=(x-t)+\delta,$$

где $\mathscr{E}$ — медленно меняющаяся амплитудная функция. Из (9.3.20) получается непосредственно, что $P_t^{(1)}=0$, и поэтому в общем случае $P^{(1)}=P^{(1)}(x, X_1, T_1, T_2)$. Однако благодаря этому в (9.3.21) появится постоянный секулярный член, следовательно, мы должны взять $P^{(1)}=0$. Снова (9.3.22) дает $N^{(1)}=N^{(1)}(x, X_1, T_1, T_2)$. Это вызовет в свою очередь появление секулярного члена в выражении $\partial^2(E^{(1)}N^{(1)})/\partial t^2$ из (9.3.18), и, значит, мы должны положить $N^{(1)}=0$. Из (9.3.23) мы затем получаем $N^{(2)}=D(x, X_1, T_1)$.

Пренебрегая возможной зависимостью от x, запишем $N^{(2)}$ в виде

$$N^{(2)} = D(X_1, T_1). \tag{9.3.26}$$

Эта функция D играет ту же роль, что и функция **D** в уравнении (9.1.32), хотя здесь нам нужна лишь одна компонента. Возвращаясь теперь к уравнению (9.3.18) и производя вычисления в точках $N_0 = 0$, $k_c = \omega_{Rc} = 1$, мы находим немедленно, что $\mathscr{L}E^{(2)} = 0$. Это то же уравнение, что и в начальной линейной задаче (9.3.17) для $E^{(1)}$. Выражение для $E^{(2)}$ будет тогда содержать экспоненту $\exp(i\theta)$ у решения, первый член которого в правой части (9.3.21) будет обращаться в нуль при $k_c = \omega_c = 1$. Так как $P^{(1)} = 0$, это уравнение можно проинтегрировать; тогда

$$P^{(2)} = \frac{2}{\tilde{a}}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T_1}\right)\exp(i\theta) + \text{с. с.} \tag{9.3.27}$$

Подставляя эту формулу для $P^{(2)}$ в (9.3.24), получим

$$N_l^{(3)} = -\frac{\partial D}{\partial T_1} - \frac{2}{\tilde{a}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)|\mathscr{E}|^2\right]. \tag{9.3.28}$$

Два члена в правой части (9.3.28) являются функциями только от медленных переменных, но при интегрировании приведут к явной зависимости $N^{(3)}$ от t. Чтобы сохранить пригодность теории возмущений при $t \gg \varepsilon^{-1}$, мы должны исключить эту зависимость и, значит, положить

$$\frac{\partial D}{\partial T_1} = -\frac{2}{\tilde{a}}\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)|\mathscr{E}|^2. \tag{9.3.29}$$

Наконец, мы обратимся к задаче $O(\varepsilon^3)$ уравнения (9.3.19). Пользуясь тем, что $N^{(1)} = 0$, $N^{(2)} = D$ и т. д., уберем секулярные члены в $\exp(i\theta)$ из (9.3.19) и получим при $k_c = 1$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)\mathscr{E} = \frac{1}{4}\tilde{a}[\pm\mathscr{E} + \mathscr{E}D]. \tag{9.3.30}$$

Заметим, что уравнения (9.3.30) и (9.3.29) являются AB-уравнениями разд. 9.1 и 9.2, где $\alpha_1 = \tilde{a}/4$; $B = -1/2\tilde{a}D$, $\beta_1 = 1/2$; $c_2 = 0$; $c_1 = 1$. Здесь нет необходимости образовать линейную комбинацию для создания B из операторов $\partial/\partial T$, $\partial/\partial T + \partial/\partial X$, поскольку только одна функция D в действительности появляется при вычислениях, и образование пары операторов с $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ получается точно так, как предсказано в (9.3.14). Заметим также, что производные по X_2 и T_2 обращаются в нуль в критической точке.

В разд. 9.2 мы обсуждали различные свойства решений AB-уравнений по отношению к знакам $\pm$, т. е. по отношению к над- и подкритическим состояниям. Отрицательный (положительный)

знак отвечает «старту» системы ниже (выше) $N_0 = 0$. На первый взгляд кажется, что здесь имеется противоречие с экспериментом, поскольку распространение солитона произойдет, если вначале $N_0 = -1$. Однако наша оценка ε из уравнений (9.3.15), где $\mu = N_0 = -1$, имеет вид

$$\varepsilon \sim (\bar{a})^{1/2}, \tag{9.3.31}$$

СИП-эксперименты обычно совершаются при низких плотностях и оценка для ε, которая зависит от атомной плотности, соответствует $\bar{a} \simeq 0.01$ (Олбек и др. [1973]). Поскольку $N_0 = -1$, имеем $\varepsilon \simeq 0.1$, т. е. ε достаточно мало для того, чтобы играть роль малого параметра разложения. Если плотность слишком высока, то $N_0 = -1$ (вся система находится в основном состоянии) делает ε слишком большим и, следовательно, AB-уравнения более несправедливы. Стало быть, для распространения солитона необходима низкая плотность, когда в начале $N_0 = -1$.

Чтобы обсудить многосолитонные решения уравнений (9.3.29), (9.3.30), выполним следующие преобразования. Положим

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)\mathscr{E} = \pm\left(\frac{1}{4}\bar{a}\right)\mathscr{P}, \quad D = \pm(N-1). \tag{9.3.32}$$

Уравнения (9.3.29), (9.3.30) приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)\mathscr{E} = \pm\alpha^1\mathscr{P}, \quad \alpha^1 = \frac{1}{4}\bar{a},$$

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial T_1} = \mathscr{E}N, \qquad \mathscr{E}\mathscr{P} \to 0 \tag{9.3.33}$$

при $|X_1| \to \infty$,

$$\frac{\partial N}{\partial T_1} = -\frac{1}{4}\left(\mathscr{E}^*\mathscr{P} + \mathscr{E}\mathscr{P}^*\right), \quad N \to \pm 1,$$

и мы заметим, что $N^2 + \mathscr{P}\mathscr{P}^*$ есть сохраняемая величина, равная единице. Уравнения (9.3.29), (9.3.30) более известны как СИП-уравнения или уравнения самоиндуцированной прозрачности, где положительный (отрицательный) знак стоит в случае, когда среда является усилителем (аттенюатором). Из прямой и обратной задач рассеяния гл. 6 формулы для N-солитонного решения (без фазового изменения) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^2 &= 4\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\ln\det|M|, \\
M_{ij} &= \frac{2}{E_i + E_j}\operatorname{ch}\left[{}^1\!/_2(\theta_i + \theta_j)\right] \\
\theta_i &= {}^1\!/_2(E_i T_1 - \Omega_i X_1) + {}^1\!/_2\delta_i, \\
v_i &= \frac{\Omega_i}{E_i}1 \pm \frac{4\alpha'}{E_i^2}.
\end{aligned} \tag{9.3.34}$$

Односолитонная формула имеет вид

$$\mathscr{E} = E_1 \operatorname{sech}^{1}/_{2}[E_1 T_1 - \Omega_i X_1 + \delta_i], \qquad (9.3.35)$$

а 2- или 3-солитонные формулы могут быть рассчитаны из формулы для определителя. В экспериментальной и теоретической литературе по нелинейной оптике солитоны в формулах (9.3.35) называются «2π-импульсами», потому что заметаемая ими во времени площадь равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}\, dT_1 = 2\pi. \qquad (9.3.36)$$

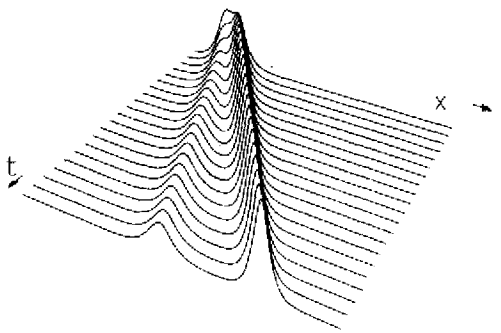


Рис. 9.3.

Нетрудно показать, что n-солитонное решение заметает площадь, равную $2n\pi$. На рис. 9.3 показан начальный импульс с площадью по времени, равной 4π, разбивающийся на два 2π-импульса, или солитона. Можно получать чисто мнимые собственные значения (связанные состояния с отрицательной энергией), но можно также получить и бризерные решения, обсуждавшиеся в гл. 6 и отвечающие парам комплексно сопряженных собственных значений. Эти осциллирующие бризерные решения заметают нулевую площадь. В оптике они называются 0π-импульсами. Такое решение изображено на рис. 9.4.

На языке преобразования обратной задачи рассеяния любые начальные данные, имеющие N дискретных собственных значений (N связанных состояний), дают N 2π-импульсов, плюс, возможно, осциллирующую часть, отвечающую непрерывной части спектра начальных данных.

Заметим, что, в силу (9.3.34), солитонные скорости v_i больше единицы для усилителей (верхний знак), но меньше единицы для аттенюаторов (нижний знак). Следовательно, 2π-импульс в усилителе неустойчив, так как он движется быстрее света и, значит, не причинный. Однако 2π-импульс в аттенюаторе устойчив. Усилитель эквивалентен стартовому положению атомов в их верх-

них состояниях (все маятники вверх), поэтому приходящий 2π-импульс будет разрушаться, поскольку он имеет резервуар потенциальной энергии, из которого ее можно черпать. 2π-формула, которую мы имеем, приведена для точного резонанса без фазового изменения. В общем случае $\mathscr{E}$ комплексно и поэтому содержит фазовый множитель, который медленно меняется в пространстве и времени по сравнению с частотой падающей волны и волновым числом. Включение медленно меняющейся фазы слегка меняет

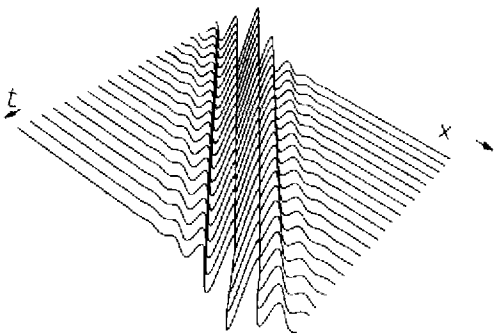


Рис. 9.4.

несущую частоту и волновое число; это явление известно как чирпинг («чириканье»).

Неоднородное уширение и теорема площадей

До этого места мы игнорировали влияние неоднородного уширения на структуру решений СИП-уравнений. Это заключалось в том, что мы взяли в качестве $g(\Delta)$ дельта-функцию Дирака, сосредоточенную около резонансной частоты. Включение интеграла в уравнение Максвелла делает вычисления, связанные с многомасштабными растяжениями, более сложными.

Задача линейной устойчивости включает неоднородное интегральное среднее. Необходимо сделать предположение, что удаление от резонанса для каждого атома мало по сравнению с резонансной частотой. Это позволит найти нейтральную кривую. Мы не будем повторять здесь вычисления. Достаточно сказать, что выбор

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_R \exp(i\varphi), \quad \mathscr{P} = (u + iv)\exp(i\varphi) \tag{9.3.37}$$

дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)\mathscr{E}_R &= \pm\alpha' \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta)\, u\, d\Delta, \\ E_R\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right)\Phi &= \pm\alpha' \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta)\, v\, d\Delta, \end{aligned} \tag{9.3.38}$$

$$\frac{du}{\partial T_1} = \mathscr{E}_R N + \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial T_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial T_1} \cdot u, \quad \frac{\partial N}{\partial T_1} = -\mathscr{E}_R u. \tag{9.3.39}$$

Выбор $\Phi = \Delta T_1$ вместе с предположениями: (а) что два дифференциальных оператора независимы (какими они были в IST-вычислениях гл. 6), и (б) что v антисимметрична по Δ, позволяет привести уравнения (9.3.38), (9.3.39) к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{T_1}\right) \mathscr{E}_R = \pm \alpha' \int_{-\infty}^{\infty} u g(\Delta) d\Delta,$$
$$\frac{du}{\partial T_1} = \mathscr{E}_R N + \Delta v, \quad \frac{\partial v}{\partial T_1} = -\Delta u, \quad \frac{\partial N}{\partial T_1} = -\mathscr{E}_R u. \tag{9.3.40}$$

Заметим, что u, v и N суть функции Δ, однако $\mathscr{E}_R$ не является функцией Δ, поскольку она есть макроскопическая переменная. Чтобы доказать, что уравнения (9.3.40) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, необходимо показать, что (9.3.40) интегрируемо без интеграла неоднородного уширения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1}\right) \mathscr{E}_R = \pm \alpha' u, \quad \frac{\partial u}{\partial T_1} = \mathscr{E}_R N + \Delta v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial T_1} = -\Delta u, \quad \frac{\partial N}{\partial T_1} = -\mathscr{E}_R u \tag{9.3.41}$$

Эти уравнения известны как редуцированные уравнения Максвелла — Блоха (РМБ). Заметим, что, как было показано в гл. 6, эта система интегрируема методом ЗШ—АНКС обратной задачи рассеяния. В этой главе показано, что уравнения РМБ имеют N-солитонные решения той же самой структурной формы, что и СГ/СИП-уравнения (как мКдФ-уравнения), поскольку задача на собственные значения та же самая, только изменение во времени собственных функций другое. Вид N-солитонного решения уравнения РМБ в точности тот же, что и в (9.4.34), разве лишь с изменением в Ω_i:

$$v_i = \frac{\Omega_i}{E_i} = 1 \mp \frac{4\alpha'}{E_i^2 + 4\Delta^2}. \tag{9.3.42}$$

Интеграл неоднородного уширения привел лишь к введению процедуры усреднения в средние скорости солитона:

$$v_i = \frac{\Omega_i}{E_i} = 1 \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\alpha' g(\Delta)\, d\Delta}{E_i^2 + 4\Delta^2}, \tag{9.3.43}$$

а остальные солитонные формулы те же, что в (9.3.34). Этот результат легко приспособить для одно- и двухсолитонных решений. Мы отсылаем читателя к примечаниям этой главы, содержащим ссылки и дальнейшие комментарии к методу обратной задачи рассеяния для решения уравнений (9.3.40).

Как видно, неоднородное уширение мало влияет на солитонные решения СИП-уравнений, если не считать изменения солитонных скоростей. Однако включение неоднородного уширения вносит существенное различие в информацию, которую мы можем извлечь из (9.3.40). Включая усредненный интеграл, можно получить факт, известный как «теорема площадей» для площади на временно́й шкале заданного импульса. Определим суммарную временну́ю площадь импульса как функцию $\theta(x)$, заданную равенством

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_R(X_1, T_1)\, dT_1. \tag{9.3.44}$$

Прежде всего проинтегрируем первое уравнение в (9.3.40) по T_1 от $-\infty$ до τ. Получим

$$\mathscr{E}_R(X_1, \tau) - \mathscr{E}_R(X_1, -\infty) + \frac{\partial}{\partial X_1} \int_{-\infty}^{\tau} \mathscr{E}_R(X_1, T_1)\, dT_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta g(\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} u(X_1, T_1, \Delta)\, dT_1. \tag{9.3.45}$$

Чтобы вычислить u, исключим v из (9.3.40):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2} + \Delta^2 u = \frac{d}{dT_1}(\mathscr{E}_R N), \tag{9.3.46}$$

и затем представим решение (9.3.46) с помощью функции Грина в следующем виде:

$$u(X_1, T_1, \Delta) = \int_{-\infty}^{\tau} dT' \Delta^{-1} \sin[\Delta(T_1 - T')]\, d(\mathscr{E}'_R N')/dT'. \tag{9.3.47}$$

Подставляя u из (9.3.47) в (9.3.45), после замены порядка интегрирования и перехода к пределу получим формулу

$$\mathscr{E}_R(X_1, T_1) + \frac{\partial}{\partial X_1}\int_{-\infty}^{T_1} \mathscr{E}_R(X_1, T_1')\,dT_1' =$$

$$= \pm 2\pi g(0)\,\alpha \int_{-\infty}^{T_1} \mathscr{E}_R(X_1, T_1')\,N(X_1, T_1', \Delta)\,dT_1' \mid_{\Delta=0} \qquad (9.3.48)$$

При выводе (9.3.48) предполагалось, что $\mathscr{E}_R \to 0$ при $T_1 \to \pm\infty$. Поскольку подынтегральное выражение в (9.3.48) вычисляется при $\Delta = 0$, то можно, рассматривая при $\Delta = 0$ систему уравнений Блоха (9.3.40), ввести новую переменную φ, такую что $u = \sin\varphi$, $N = \cos\varphi$ и, значит, $\mathscr{E}_R = \partial\varphi/\partial T_1$. Выполняя интегрирование в (9.3.48) ($\mathscr{E}_R N = \partial u/T_1$) и переходя к пределу при $T_1 \to \infty$, получим, замечая, что $\varphi(X_1, T_1) \to \theta(X_1)$ при $T_1 \to \infty$,

$$\frac{\partial\theta}{\partial X_1} = \pm 2\pi\alpha' g(0)\sin\theta. \qquad (9.3.49)$$

Решая (9.3.49), находим

$$\operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2}\theta(X_1)\right] = \left[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta(0)\right]\exp\left[\pm 2\pi\alpha' g(0)\,X_1\right]. \qquad (9.3.50)$$

Этот красивый результат был впервые получен Макколлом и Ханом [1967, 1969], он дает форму изменения временной площади произвольного импульса в любой точке среды. Очевидно, этот результат целиком зависит от включения неоднородного уширения; каждый атом излучает на внерезонансной частоте, близкой к резонансу, и теорема площадей является математическим выражением кооперации атомов для формирования окончательной площади импульса. Она также выражает тот факт, что неоднородное уширение, не действуя разрушительно на поведение солитонов, является в действительности кооперативным эффектом и дает возможность вычислить развитие площади произвольного импульса, проходящего через среду. Такого рода результаты невозможно получить для других солитонных уравнений.

Мы отмечали уже, что то, что мы назвали солитоном, в другом контексте, в нелинейной оптике, называется 2π-импульсом. 2π-импульс устойчив в аттенюаторе (нижний знак), но не устойчив в усилителе (верхний знак). Этот результат прекрасно согласуется с результатом, содержащимся в теореме площадей, и может быть объяснен с помощью диаграммы. На рис. 9.5 внизу изображен график $\theta(x)$, причем нужно следовать слева направо вдоль кривой для аттенюатора, но справа налево для усилителя. Асимптоты для аттенюатора (слева направо) на рис. 9.5 суть $2n\pi$, и любой импульс с площадью $\pi < \theta < 2\pi$ будет расти до 2π, в то время как любой импульс площади $0 < \theta < \pi$ будет падать до нуля. Этот рост или затухание не являются истинными ростом и зату-

ханием, как в диссипативных системах, которые могут запасать или терять энергию, а скорее оказываются переформированием временно́й площади импульса. Это в свою очередь вызовет переформирование пространственной площади. Мы уже указали, что $2\pi n$-импульсы в аттенюаторе устойчивы, потому что они причинны. Это те устойчивые импульсы, которые являются асимптотическими состояниями, в которые в конечном итоге превратится начальный импульс произвольной временно́й площади в пространстве. Однако для усилителя справедливо противоположное. А, именно 2π-им-

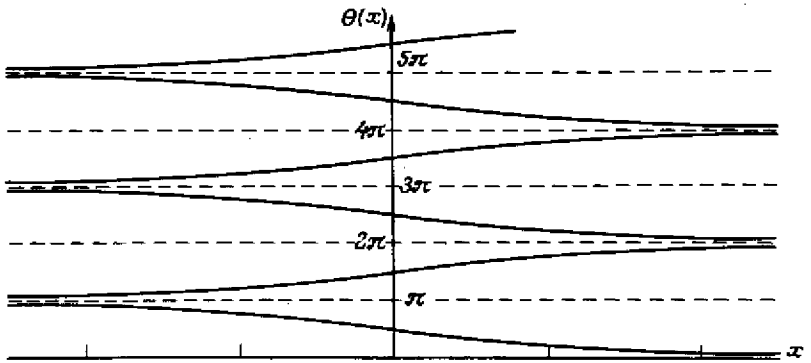


Рис. 9.5. Слева — аттенюатор, справа — усилитель.

пульс в усилителе неустойчив, так как ему необходимо двигаться быстрее скорости света в вакууме, и на рис. 9.5 показано, что импульс $2\pi - \varepsilon$ в конечном итоге превратится в π-импульс. Этот импульс стал бы 2π-импульсом в аттенюаторе. Асимптотические площади поэтому равны $(2n + 1)\,\pi$ для усилителя. Эти решения не являются солитонными решениями для СИП-уравнений, однако они эквивалентны автомодельным решениям (см. примечания) СИП/СГ-уравнений.

Редуцированные уравнения Максвелла — Блоха: альтернативный подход к СИП-уравнениям

До сих пор мы применяли подход многомасштабных растяжений, разлагая уравнения Максвелла — Блоха (9.3.1)—(9.3.4) вблизи критической точки кривой нейтральной устойчивости и получая уравнения для медленно меняющейся огибающей с помощью теории возмущений.

Альтернативный подход к этому методу состоит в том, чтобы вернуться к исходной системе уравнений Максвелла — Блоха (9.3.1)—(9.3.4) и рассмотреть волны, движущиеся только направо. Эта редукция эквивалентна игнорированию обратного рассеяния или, на математическом языке, эквивалентна рассмотрению только

одной характеристики уравнения Максвелла. Уравнение (9.3.4) теперь принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{1}{C}\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{2\pi np}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}Q(x,\ t,\ \Delta)\,d\Delta. \qquad (9.3.51)$$

Это приближение приемлемо в предположении, что постоянная взаимодействия $\bar{\alpha}$ между полем и атомами мала по сравнению с единицей. Эта постоянная $\bar{\alpha}$ пропорциональна атомной плотности и имеет значение ~ 0.01 для газообразных плотностей: ($n \ll 10^{18}$ атом/см^3). Производя следующие замены в редуцированном уравнении Максвелла и уравнениях Блоха: $\omega_a t \to t$, $\omega_a c^{-1}x \to x$; $2p\omega_a^{-1}hE \to E$; $\omega_s'\omega_a^{-1} \to \omega_s'$, находим, что они сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial t}&=-\alpha_a\int_{-\infty}^{\infty}g(\Delta)\,Q_t(x,\ t,\ \Delta)\,d\Delta,\\ Q_t&=-\omega_s'P,\\ P_t&=EN+\omega_s'Q,\\ N_t&=-EP,\end{aligned} \qquad (9.3.52)$$

где ω_a — типичная атомная частота, такая, что новая ω_s' будет порядка единицы и α_a определяется выражением

$$\alpha_a=4\pi np^2/(h\omega_a). \qquad (9.3.53)$$

Уравнения РМБ (9.3.52) имеют ту же математическую структуру, что и СИП-уравнения (9.3.40), хотя их физический смысл различен. В (9.3.40) $\mathscr{E}_R$ есть вещественная часть огибающей электрического поля, в то время как в (9.3.52) E все еще полное электрическое поле. Как мы уже упоминали, уравнения РМБ являются интегрируемой системой: мы дали их солитонные решения в предыдущем подразделе. Одно- и двухсолитонные решения уравнений РМБ имеют вид

$$E(x,\ t)=E_1\operatorname{sech}\left\{\frac{1}{2}E_1[t-\Omega_1 x]\right\}, \qquad (9.3.54)$$

$$\Omega_l=1+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta)\,\alpha_a\omega_s'\,d\omega_s'}{E_l^2+4\omega_s'^2}, \qquad (9.3.55)$$

$$E(x,\ t)=\left(\frac{E_1^2-E_2^2}{E_1^2+E_2^2}\right)\frac{E_1\operatorname{sech}\theta_1+E_2\operatorname{sech}\theta_2}{1-B_{12}\operatorname{th}\theta_1\operatorname{th}\theta_2+B_{12}\operatorname{sech}\theta_1\operatorname{sech}\theta_2}, \qquad (9.3.56)$$

$$B_{12}=\frac{2E_1E_2}{E_1^2+E_2^2}.$$

Хотя они являются математически точными решениями уравнений РМБ, каждый солитон имеет продолжительность порядка фемтосекунды ($(1/2)\,E_1 \simeq \omega_s$), а такой импульс нельзя реализовать в лаборатории. Они должны быть одновременно исключительно короткими и ультраинтенсивными (1000 тераВт/см^2); эту интенсивность нельзя ни получить, ни ощутить, поскольку реальные диэлектрики будут распадаться. Эти решения справедливы для самого электрического поля, так как мы не сделали аппроксимаций по отношению к медленно меняющейся амплитуде огибающей. Однако мы напомним, что «бризерные» решения возможны, если мы возьмем E_1 и E_2 как антикомплексно сопряженные пары: $E_1 = -E_2^* = E_0 + 2i\omega_c$. Если взять высокочастотный предел бризерного решения из (9.3.56), то снова получится решение, которое имеет форму быстрой осцилляции, модулированной медленно меняющейся огибающей. Это следует сравнить с результатами для СИП-уравнения. После некоторых преобразований мы получим бризерные решения уравнений РМБ:

$$E(x,\ t) = 2E_0 \operatorname{sech}\theta_R \left(\frac{\cos\theta_I - \gamma \sin\theta_I \operatorname{th}\theta_R}{1 + \gamma^2 \sin\theta_I \operatorname{sech}^2\theta_R}\right), \tag{9.3.57}$$

$$\theta_R = (1/2)\,E_0\,(t - \Omega_R x),$$
$$\theta_I = \omega_c\,(t - \Omega_I x), \tag{9.3.58}$$
$$\gamma = (1/2)\,E_0/\omega_c,$$

$$\Omega_R = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} g\,(\omega_s' - \omega_s)\,4D\alpha_a\omega_s'\,[E_0^2 + 4\omega_s'^2 + 4\omega_c^2]\,d\omega_s', \tag{9.3.59}$$

$$\Omega_I = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} g\,(\omega_s' - \omega_s)\,4D\alpha_a\omega_s'\,[4\,(\omega_s'^2 - \omega_c^2) - E_0^2], \tag{9.3.60}$$

$$D^{-1} = E_0^4 + 8E_0^2\,(\omega_s'^2 + \omega_c^2) + 16\,(\omega_s'^2 - \omega_c^2)^2. \tag{9.3.61}$$

Если мы теперь выберем $\omega_c = \omega_s$ (резонансная частота) и E_0 так, чтобы $\gamma = E_0/\omega_c \ll 1$, то выражение для поля $E\,(x,\ t)$ теперь становится следующим:

$$E(x,\ t) = 2E_0 \operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}E_0\,(t - \Omega x)\right]\cos[\omega_s\,(t - x)],$$
$$\Omega = 1 + 2\alpha_a\omega_s E_0^{-2}. \tag{9.3.62}$$

Так как $2\alpha_a\omega_s = \alpha'$, то мы воспроизвели в точности односолитонный импульс СИП, модулирующий синусоидальную падающую волну, которая движется со скоростью света.

Поэтому эти вычисления подтверждают результаты многомасштабного разложения исходных уравнений Максвелла — Блоха и оправдывают соответствующие аппроксимации. Подводя итоги,

мы можем сказать, что бризерные решения уравнений РМБ эквивалентны солитонам СИП, модулирующим быструю падающую волну, в предположении, что в обоих случаях атомная плотность мала.

В заключение заметим, что следующий порядок в γ из (9.3.57) дает только дополнительный фазовый член $\varphi(x, t) = \gamma \operatorname{th} \theta_R$ в падающую волну. Частота «чирпинга» будет поэтому равна $O(\gamma^2)$, т. е. порядка 10^{-6} в области порядка пикосекунды и, следовательно, неощутима. Хотя подход РМБ более громоздкий, чем применение уравнений СИП, он имеет преимущество, заключающееся в следующем. При условии, что атомная плотность мала настолько, что редукция уравнения Максвелла имеет смысл, эти уравнения справедливы для всех частот и интенсивностей и их можно применять для других частотных условий, когда аппроксимация, применяемая при выводе уравнений СИП, оказывается непригодной.

9.4. Двухслойная бароклинная неустойчивость

Мы сейчас оставим в стороне нелинейную оптику и обратимся к проблеме вихрей в механике жидкости. Мы рассмотрим очень простую модель, демонстрирующую то, что получило название бароклинных волн. Эти волны появляются как в атмосфере, так и в океанах Земли с длиной волны порядка 1000 и 10 км соответственно. Кроме того, они обнаружены в атмосфере некоторых основных планет.

Бароклинная неустойчивость давно была признана одним из основных механизмов, поставляющих кинетическую энергию крупномасштабным системам, влияющим на погоду (зоны пониженного давления и ассоциированные с ними фронтальные структуры) средних широт. Вообще говоря, неустойчивость может появиться, когда возникает равновесное состояние, в котором поверхности постоянной плотности не параллельны поверхностям постоянного гравитационного потенциала. В этом случае частицы газа, движущиеся по траекториям, которые лежат между указанными поверхностями потенциалов и плотностей, могут высвободить часть потенциальной энергии системы и приобрести кинетическую энергию.

Как следует ожидать, проблема математического моделирования такого поведения, опирающаяся на уравнения Навье — Стокса, исключительно трудна, частично из-за геометрии проблемы.

Один из возможных путей, который выбирают исследователи для изучения проблемы такого рода (этого явления), связан с построением простой модели жидкости или газа, которая, будучи идеализированной, тем не менее обнаруживает все черты баро-

клинной неустойчивости. Упомянутое выше состояние равновесия между поверхностями постоянного гравитационного потенциала и постоянного давления может быть достигнуто в атмосфере, океане и лабораторных условиях (экспериментах), когда рассматривается горизонтальный градиент температуры вместе с быстрым вращением всей системы.

Одним из аналогов такой модели, который допускает более простое математическое описание, является так называемая «двухслойная модель» (Филипс [1954]), в которой два слоя несмешивающихся идеальных жидкостей (или газов) различных плотностей, причем легкая расположена над тяжелой, помещены в бесконечный канал и поддерживаются в относительно горизонтальном движении. Вся система вращается вокруг ее вертикальной оси. Разумеется, нельзя претендовать на то, что эта модель — точная модель атмосферы, но если вязкость мала и ею можно пренебречь, то такая модель обнаружит бароклинную неустойчивость, представляющую собой дисперсионный тип неустойчивости (категория II в разд. 9.1). Для наших приложений мы будем предполагать, что верхний и нижний слои жидкостей движутся со скоростями U_1 и U_2 соответственно в направлении x в бесконечном прямолинейном канале с неподверженными давлению боковыми стенками, отвечающими $y = 0, 1$. (По поводу граничных условий на боковых стенках см. примечания к этой главе.) Как в разд. 5.4, где мы описали приближение β-плоскости, в этой ситуации введены эффекты орбитальной сферичности. Для этого применяется приближение β-плоскости, в котором кориолисов параметр взят равным $2\Omega_0 + \beta y$. Эта модель наглядно изображена на рис. 9.6. Совсем не обязательно начинать анализ неустойчивости, отправляясь от уравнений Навье — Стокса, так как модель, изображенную на рис. 9.6, можно значительно упростить, если воспользоваться геострофическим приближением, описанным в разд. 5.4. Эта аппроксимация, которая устанавливает баланс между кориолисовой силой и градиентом давления, сводит уравнения Навье — Стокса для двухслойной модели к связанной паре уравнений для системы вихрей. К сожалению, мы не имеем возможности привести вывод этих уравнений для вихрей из первых принципов из-за громоздкости выкладок. В таких моделях появляются пограничные слои, называемые слоями Экмана, эффекты от которых должны быть включены в рассмотрение. К сожалению, ограниченность

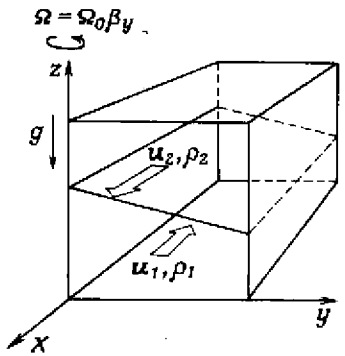


Рис. 9.6.

места не позволяет нам подробно рассказать о том, как это делается. С выводом двухслойных вихревых уравнений можно познакомиться по статье Педлосски [1970]. В геострофическом приближении уравнения потенциальной завихренности, описывающие такую модель, имеют вид

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_1+(\psi_2-\psi_1)F+\beta y]=0,\\ \left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_2+(\psi_1-\psi_2)F+\beta y]=0,\end{aligned} \tag{9.4.1}$$

где ψ_1 и ψ_2 суть функции тока верхнего и нижнего слоев, а F — внутреннее вращательное вихревое число Фруда, определенное как $F=4\Omega^2L^2p/(\Delta p/\bar{p})\,gD/2$, где Ω — скорость вращения, L — ширина канала, D — его глубина, $\Delta p/\bar{p}$ — относительная разность плотностей между двумя жидкостями и g — ускорение земного притяжения (или гравитации). Будем считать, что F и β фиксированы. Функции тока ψ_i представляются в виде суммы постоянного зонального потока и возмущения:

$$\psi_i=-U_iy+\varphi_i(x,\ y,\ t). \tag{9.4.2}$$

Сдвиг между двумя слоями $\Delta U=U_1-U_2$ мы будем рассматривать как переменный параметр, который, как будет видно, играет роль параметра μ, обсуждавшегося в предыдущих разделах. Уравнения (9.4.1) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)F)+\\ +(\beta+F\,\Delta U)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2)F)+\\ +(\beta-F\,\Delta U)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0.\end{aligned} \tag{9.4.3}$$

После их линеаризации получаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)F)+(\beta+F\,\Delta U)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2)F)+(\beta-F\,\Delta U)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0.\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

Следует обратить внимание на форму якобиана нелинейного члена в (9.4.4); эта форма обычна для любой двумерной адвективной задачи. Пару уравнений (9.4.4) можно записать в виде (9.1.1), где оператор $\mathbf{L}$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2-F)+(\beta+F\,\Delta U)\frac{\partial}{\partial x} & F\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ F\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2-F)+(\beta+F\,\Delta U)\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{9.4.5}$$

Якобиан нелинейных членов легко представить в виде квадратичной формы, записанной в правой части (9.1.1). Например, якобиан от φ_1 и φ_2 можно представить в виде

$$J_{x,y}(\varphi_2,\ \varphi_1)=(M\varphi)\cdot(N\varphi), \tag{9.4.6}$$

где

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x};\quad N=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{9.4.7}$$

Полагая $\det(l)=0$, как в (9.1.5), получаем квадратичное дисперсионное соотношение, корни которого имеют вид

$$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{\beta(F+a^2)}{a^2(2F+a^2)}\pm\frac{[4F^2\beta^2-(\Delta u)^2a^4(4F^2-a^4)]^{1/2}}{2a^2(2F+a^2)}, \tag{9.4.8}$$

где $a^2=k^2+m^2\pi^2$. Кроме того, мы находим, что

$$\begin{aligned} b_1&=1,\\ b_2&=F^{-1}(a^2+F)+(F\,\Delta U+\beta)[F(\omega/k-u_1)]^{-1}. \end{aligned} \tag{9.4.9}$$

Будем рассматривать такие значения k и F, для которых $a^2<2F$. При этом условии, когда ΔU возрастает, выражение под знаком квадратного корня будет менять знак с плюса на минус.

Поскольку сдвиг ΔU играет роль бифуркационного параметра μ, нейтральная кривая задается уравнением

$$\mu=\Delta U(k)=2\beta F/a^2(4F^2-a^4)^{1/2}. \tag{9.4.10}$$

Когда $\mu<\Delta U(k)$, система нейтрально устойчива, и, следовательно, неустойчивость будет чисто дисперсионной, но когда $\mu>\Delta U(k)$, возникает бароклинная неустойчивость. Кривая нейтральной устойчивости, заданная в (9.4.10), имеет вид, изображенный на рис. 9.1. Она имеет минимум в точке

$$a_c^2=k_c^2+m^2\pi^2=\sqrt{2F} \tag{9.4.11}$$

и

$$\mu_c=(\Delta U)_c=\beta/F. \tag{9.4.12}$$

Объединяя это с результатами разд. 9.1, мы находим в критической точке $((\Delta U)_c,\ k_c)$, что, в то время как фазовая скорость

однозначна и равна U_2, групповая скорость имеет два значения, которые мы обозначаем через c_1 и c_2:

$$c_1 = u_2 + \beta k_c^2 (1 + b_c)^2 F^{-2}, \quad c_2 = u_2, \tag{9.4.13}$$

где $b_c = \sqrt{2} - 1$. Имеются также линейно независимые решения с $b_c = \sqrt{2} + 1$, отвечающие нефизическому полному волновому числу $a^2 = -2F$. Как объяснялось в разд. 9.1, для сдвигов, несколько бо́льших $(\Delta U)_c$, волноподобные решения будут усиливаться до тех пор, пока нелинейные члены в уравнениях (9.4.4) не станут существенными. Лабораторные эксперименты показывают, что для широкого диапазона значений рассматриваемых параметров существует режим высоко организованных «регулярных бароклинных» волн. Обзор Хайда и Мейзона [1975] содержит много подробностей о таких волнах.

Педлоски [1972] первым произвел многомасштабное растяжение в окрестности критической точки. Единственная разница между его вычислениями и нашим общим подходом заключается в его выборе разложения вблизи β/F. Педлоски принял

$$\Delta U = \beta/F \pm \varepsilon^2 \tag{9.4.14}$$

вместо того, чтобы рассматривать формальное тейлоровское разложение, как в разд. 9.2. Это, однако, лишь изменяет численное значение α, квадрат скорости роста. Представляя возмущения функций тока в виде

$$\varphi_l = \varepsilon \varphi_l^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_l^{(2)} + \cdots, \tag{9.4.15}$$

при порядке $O(\varepsilon)$ получим

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \end{pmatrix} = A(X_1, T_1) \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix} \sin(m\pi y) \exp[i(kx - \omega t)] + \text{с. с.} \tag{9.4.16}$$

Теория возмущений, применяемая к уравнениям (9.4.4), развивается таким же образом, как описано в разд. 9.2. Поскольку $\mathbf{L}$ дисперсионный оператор (мы рассматриваем здесь только невязкий случай), то можно применить результаты разд. 9.1, из которых следует, что в бифуркационной точке не возникает секулярных членов. Кроме того, линейный оператор $\mathbf{L}$ имеет первые производные в каждом элементе и, следовательно, при анализе появляется вектор $\mathbf{D}(X_1, T_1)$. Ситуация, в которой он появляется, усложняется присутствием переменной y. Функция $B(X_1, T_1)$ включает интегрирование по y, так как для удаления секулярных членов должна быть применена сопряженная форма оператора $\mathbf{L}$ (см. Найфэ [1973]). Выражение для B тогда имеет вид

$$B(X_1, T_1) = \frac{-4\beta}{m\pi F^2} \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 D_2}{\partial y^2} + F(D_1 - D_2) \right] \sin(2m\pi y)\, dy. \tag{9.4.17}$$

Физически $B(X_1, T_1)$ есть мера поправки к среднему потоку, возникающей из-за саморектификации нелинейной волны. Окончательные амплитудные уравнения относятся к категории (9.1.17), (9.1.18) и приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)=\pm\alpha A-NAB,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right)B=\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)|A|^2. \tag{9.4.18}$$

Вид якобиана нелинейных членов показывает, что вторые гармонические члены не вносят вклада в (9.3.18) в порядке $O(\varepsilon^2)$. Квадрат «скорости роста» α и постоянная N определены выражениями

$$\alpha=\frac{1}{2}k_c^2b_l^2\beta F^{-1}, \tag{9.4.19}$$

$$N=\left(\frac{1}{2}k_cb_cm\pi\right)^2. \tag{9.4.20}$$

Применение такого анализа к реальным физическим системам, таким, как атмосфера или лабораторные эксперименты с кольцеобразными слоями, требует осторожности по двум принципиальным причинам. Во-первых, отклонение сдвига от критических значений ($\sim\varepsilon^2$) не всегда мало. Следовательно, временные переменные t, T_1 и T_2 не всегда хорошо разделяются, и многомасштабный анализ может оказаться несостоятельным. Во-вторых, физические размеры системы ограничивают растяжку в пространстве. Например, в атмосфере и во многих лабораторных экспериментах система вмещает пять или шесть длин волн, так что длина падающей волны не может быть очень короткой по сравнению с характерным продольным масштабом изменения огибающей. Тем не менее этот анализ оказывается полезным в механике жидкостей, поскольку он приводит к результатам, которые имеют сходные черты с лабораторными экспериментальными наблюдениями.

Обратим теперь внимание на двухслойную модель для случая, когда β-эффект исключается. Уравнения (9.4.8) теперь принимают вид

$$\omega/k=\frac{1}{2}(u_1+u_2)\pm\Delta U\,(a^4-4F^2)^{1/2}\,(2F+a^2)^{-1}. \tag{9.4.21}$$

Очевидно, что значение ΔU теперь не играет роли в неустойчивости, но если $a^2<2F$, то в выражении (9.4.21) появляется мнимая часть. Так как F содержит значения плотности жидкости, то мы используем эту величину как параметр μ и нейтральная кривая теперь будет иметь вид

$$\mu=F=(1/2)\,a^2=(1/2)\,(k^2+m^2\pi^2). \tag{9.4.22}$$

Минимальное значение k есть $k_c = 0$ с $F_c = (1/2)\, m^2\pi^2$. Как мы показали в разд. 9.1, необходимо рассмотреть неустойчивые моды вверху от нейтральной кривой вдали от $k_c = 0$, которые исключают появление переменной X_1, но допускают применение переменной X_2. Поскольку переменная X_1 отсутствует, уравнение эквивалентное (9.1.34), можно проинтегрировать и получить, что $B = |A|^2$, и окончательное амплитудное уравнение принимает вид

$$i\chi \frac{\partial A}{\partial X_2} = \pm\alpha_3 A - \beta_3 A |A|^2 + \gamma_3 \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2}. \qquad (9.4.23)$$

Поскольку член $\pm\alpha_3 A$ может быть «поглощен» левой частью уравнения (9.4.23), мы приходим к НЛШ-уравнению, где T_1 и X_2 меняются местами как пространственная и временна́я переменные по сравнению с обычной формулировкой обратной задачи рассеяния гл. 6. Технически мы не решаем задачу Коши для этого уравнения; вместо этого преобразование обратной задачи рассеяния определяет данные для A при, скажем, $X_2 = 0$, которые образуют краевую задачу.

9.5. Эффект слабой диссипации

Основная цель этой главы, а на самом деле всей книги, состоит в изучении интегрируемых уравнений с частными производными. В этом заключительном разделе мы несколько отойдем от этой темы, рассматривая эффект диссипации в примерах дисперсионной неустойчивости этой главы. Во всех солитонных уравнениях затухание разрушит характер их точной интегрируемости, и попытка рассмотреть преобразование обратной задачи рассеяния окажется бессодержательной, поскольку данные рассеяния будут стремиться к нулю на бесконечности. Разумеется, каждая физическая система подвержена некоторым потерям энергии, однако малым.

Оказывается, что включение слабых потерь энергии в модельные вычисления в этой книге, хотя и уместно физически, все же не приведет ни к каким математически интересным результатам. Например, включение слабой вязкости в примеры с жидкостями или плазмой, которые в отсутствие потерь приводили к КдФ-уравнению, способствует появлению лишь члена u_{xx}, превращая КдФ-уравнение в уравнение КдФ—Бюргерса.

AB-уравнения являются примером, который дает некоторые интересные результаты, когда в расчет принимается затухание. Эти уравнения были первоначально получены в слабо нелинейном приближении в окрестности критических точек систем, корни дисперсионных соотношений которых образуют комплексно сопряженные пары. Включение любых затуханий, чтобы оно не разрушало структуры AB-уравнений, должно, во-первых, ка-

саться членов порядка $O(\varepsilon)$, т. е. быть слабым, а во-вторых, не допускать фундаментальных сдвигов нейтральной кривой, на которой основан вывод AB-уравнений. К настоящему времени неизвестно, как работать с полными уравнениями в частных производных, поскольку диссипативные члены разрушают свойства их интегрируемости. По этой причине мы будем рассматривать AB-уравнения только с изменением по времени:

$$\frac{d^2A}{dT_1^2} = \pm\alpha A - \beta AB,$$
$$\frac{dB}{dT_1} = \frac{d}{dT_1}(|A|^2). \tag{9.5.1}$$

Уравнения (9.5.1) имеют структуру кубически нелинейного осциллятора. Включение слабого затухания, например вязкости, приводит к наделению осциллятора диссипативными членами, т. е. к следующему видоизменению уравнений:

$$\frac{d^2A}{dT_1^2} + \Delta_1\frac{dA}{dT_1} = \pm\alpha A - \beta AB, \tag{9.5.2}$$

$$\frac{dB}{dT_1} + \Delta_2 B = \left(\frac{d}{dT_1} + \Delta_3\right)|A|^2. \tag{9.5.3}$$

Эффект пространственных производных на пространственно независимые решения уравнений (9.5.2) и (9.5.3) является открытым вопросом, но приводит в действие механизм неустойчивости Бенджамина—Фейра, в котором зависящее от времени (только) решение может оказаться неустойчивым к побочным модам.

Вывод уравнений (9.5.2) и (9.5.3) интуитивно очевиден и может быть совершен введением дополнительных диссипативных членов в выкладки разд. 9.2. Единственное ограничение на эти выкладки в том, что исходная нейтральная кривая не должна быть сдвинута более чем на величину $O(\varepsilon)$, ибо в противном случае сдвинется критическая точка, в окрестности которой рассматриваются все тейлоровские разложения. Если к исходной модели добавить чистые слабо диссипативные эффекты, то величины Δ_i и α останутся вещественными, если же включить дополнительные слабо дисперсионные эффекты, то очевидно, что Δ_1 и α станут комплексными. Дисперсионные эффекты никогда не отражаются ни на затухании, ни на скорости роста, и поэтому этот последний вид эффекта вносит вклад только в мнимую часть Δ_1 и α. Название «дополнительные слабые дисперсионные эффекты» означает, что даже когда мы рассматриваем незатухающую дисперсионную систему как фундаментальную математическую модель, то все равно эффект других слабо дисперсионных членов в уравнении движения можно рассматривать феноменологически так, как если бы они были слабо диссипативными. Эта процедура остается в

силе в предположении, что характер рассматриваемой неустойчивости не нарушен. Два физических примера таких дисперсионных эффектов суть члены β-плоскости, применяемые во вращающихся потоках для учета эффектов кривизны, и так называемые расстроечные члены в лазерах, где резонирующая полость не вполне подстроена под резонансную частоту атомного образца. Эти эффекты будут рассмотрены более подробно в следующих примерах.

Уравнения (9.5.2) и (9.5.3) сами по себе не кажутся особенно интересными. Однако мы преобразуем их в систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью следующих замен:

$$\tau = \Omega T_1, \quad \Omega = \mathrm{Re}\,\Delta_1 - (1/2)\,\Delta_3, \tag{9.5.4}$$

$$X = (2\beta)^{1/2}\Omega^{-1}A, \tag{9.5.5}$$

$$Z = 2\beta\Omega^{-1}\Delta_3^{-1}B. \tag{9.5.6}$$

Уравнения (9.5.2) и (9.5.3) теперь приводятся к виду

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \tag{9.5.7}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - \alpha Y, \tag{9.5.8}$$

$$\dot{Z} = -\beta Z + \frac{1}{2}(X^*Y + XY^*), \tag{9.5.9}$$

где $r = r_1 + ir_2$, $a = 1 - ie$ и пять параметров определяются формулами

$$\sigma = \frac{1}{2}\Delta_3\Omega^{-1}, \quad b = \Delta_2\Omega^{-1},$$

$$\begin{gathered} r_2 = [\Delta_3\,\mathrm{Im}\,(\Delta_1) + 2\,\mathrm{Im}\,(\alpha)]/(\Delta_3\Omega); \\ r_1 = 1 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha)/\Delta_3\Omega, \\ e = -(\mathrm{Im}\,\Delta_1)\,\Omega^{-1}. \end{gathered} \tag{9.5.10}$$

Дополнительная переменная Y определяется уравнением (9.5.7), а переменная X не должна смешиваться с медленной переменной X_1. Уравнения (9.5.7)—(9.5.9) известны как уравнения Лоренца (Лоренц [1963]) в комплексной форме. В случае включения лишь слабо диссипативных, а не слабо дисперсионных эффектов эти уравнения сводятся к вещественной форме уравнений Лоренца. В таком случае $\mathrm{Im}\,\Delta_1 = \mathrm{Im}\,\alpha = 0$ и, стало быть, $a = 1$ и r вещественно. Комплексная природа переменных X и Y может быть изменена на вещественную с помощью фазовых преобразований и уравнения сводятся к виду, рассмотренному Лоренцем:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= (r_a - Z)\,X - Y, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY. \end{aligned} \tag{9.5.11}$$

Уравнения Лоренца знамениты демонстрацией последовательности бифуркаций, которые при некоторых значениях r приводят к траекториям в фазовом пространстве, принадлежащим объекту, который называется странным аттрактором. Обсуждение этой темы ни в малейшей степени не входит в наши намерения, но заинтересованному читателю мы рекомендуем обратиться сначала к оригинальной статье Лоренца, а затем к статьям, содержащимся в тексте или в литературе в работах Марсдена и Маккракена [1976] и Хакена [1978]. О решениях этих обыкновенных дифференциальных уравнений можно сказать следующее. Хотя периодические и квазипериодические решения описывают упорядоченное состояние в том смысле, что энергетический спектр Фурье содержит одну или более независимых частот, энергетический спектр странного аттрактора широкий. Его можно представлять себе как хаотическое или турбулентное состояние, поскольку хаотичный аттрактор высокочувствителен к мельчайшим изменениям в начальных условиях.

В своей оригинальной статье Лоренц [1963] изучал двумерную проблему конвекции газа. В его задаче σ былочислом Прандтля, а r_a — числом Рэлея. Появление в этом разделе уравнений Лоренца совершенно не связано с задачей конвекции Лоренца (о которой рассказывается в примечаниях), эти два момента не следует смешивать.

Мы сейчас исследуем поведение исходного вещественного варианта уравнений Лоренца (9.5.11) так глубоко, насколько это можно сделать аналитически. Система имеет неподвижные точки в начале координат $X = Y = Z = 0$, когда $0 < r_a < 1$, и также при

$$X = Y = \pm [b\,(r_a - 1)]^{1/2}, \qquad r_a > 1, \tag{9.5.12}$$
$$Z = (r_a - 1),$$

Линеаризация вблизи начала координат дает

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r_a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{9.5.13}$$

Решения вида $\mathbf{a} \exp(\lambda t)$ находятся по собственным значениям матрицы в (9.5.13). Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda + b)\,[\lambda^2 + \lambda\,(\sigma + 1) + \sigma\,(1 - r_a)] = 0. \tag{9.5.14}$$

Корни этого уравнения суть $\lambda = -b$ и

$$\lambda = \frac{1}{2}\{-\sigma - 1 \pm ((\sigma + 1)^2 + 4\sigma\,(1 - r_a))^{-1/2}]; \tag{9.5.15}$$

когда $0 < r_a < 1$, все они отрицательны. Начало координат устойчиво, и если траектории в фазовом пространстве спирально навиваются на эту точку, то ее называют притягивающей неподвижной (особой) точкой. Если $r_a > 1$, то один из корней становится положительным, и начало координат теперь неустойчиво и о нем говорят как об отталкивающей неподвижной точке. Однако если $r_a > 1$, то появляются другие неподвижные точки, заданные в (9.5.12). Линеаризация вблизи этих точек приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + b + 1) + \lambda b(\sigma + r_a) + 2\sigma b(r_a - 1) = 0. \quad (9.5.16)$$

Рассматривая возможность появления пары комплексно сопряженных корней, $\lambda = \lambda_0 \pm i\Omega$, мы видим, что, когда r_a изменяется, точка $r_a = r_{ac}$, в которой λ_0 меняет свое значение с положительного на отрицательное, становится точкой неустойчивости для этих неподвижных точек. В такой точке мы можем выделить множитель $\lambda^2 + \Omega^2$ из (9.5.16) и записать характеристическое уравнение в виде

$$(\lambda^2 + \Omega^2)(\lambda + \delta) = 0, \quad (9.5.17)$$

откуда

$$\delta = \sigma + b + 1; \quad \Omega^2 = b(\sigma + r_a), \quad (9.5.18)$$
$$\delta\Omega^2 = 2\sigma b(r_a - 1).$$

Эти три уравнения дают значение r_a вида

$$r_{ac} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (9.5.19)$$

Чтобы это значение r_a было положительным, необходимо, чтобы $\sigma > b + 1$. Итак, когда $0 < r_a < 1$, начало координат является единственной устойчивой неподвижной точкой. Когда $1 < r_a < r_{ac}$, начало координат неустойчиво, но две другие неподвижные точки устойчивы; траектории в фазовом пространстве будут отталкиваться началом координат, но притягиваться другими двумя неподвижными точками. Когда $r_a > r_{ac}$ (при условии, что $\sigma > b + 1$), эти две неподвижные точки становятся неустойчивыми. Следующий шаг, предпринятый Лоренцем, заключался в том, что он выполнил численное интегрирование этой системы $r_a > r_{ac}$, чтобы увидеть, как ведут себя траектории в фазовой плоскости. Он выбрал $b = 8/3$, $\sigma = 10$, откуда получилось, что $r_{ac} = 470/19 = 24.73$ и $r_a = 28$. Численный график траекторий в фазовом пространстве показал, что они апериодичны и движутся к притягивающей поверхности, известной как аттрактор Лоренца. Не прибегая к некоторым сложным топологическим рассмотрениям, невозможно адекватно описать аттрактор Лоренца, можно лишь сказать, что он представляет собой некоторую риманову поверхность с бесконечным числом листов. Траектории орбит вокруг

каждой из двух неподвижных точек задаются формулами (9.5.12). Когда орбиты движутся от одной фиксированной точки к другой, они переходят на другой лист аттрактора. Таким путем они избегают пересечения.

Кроме того, Лоренц показал, что переключение орбиты с одной неподвижной точки на другую полностью непредсказуемо, поскольку в движении не появляется никаких периодичностей. Топологическое описание аттрактора Лоренца и ассоциированных понятий и свойств можно найти в книге Марсдена и Маккракена [1976].

Комплексные уравнения Лоренца

Прежде чем продемонстрировать, как уравнения Лоренца возникают из AB-уравнений, мы коротко остановимся на комплексном варианте уравнений Лоренца и укажем на различия комплексного и вещественного вариантов. Ясно, что такие различия обнаружатся, хотя бы потому, что фазовое пространство комплексной системы пятимерно, а у вещественной трехмерно. Другое различие состоит в числе неподвижных точек каждой из систем.

Начало координат $X = Y = Z = 0$ по-прежнему является неподвижной точкой. Кроме того, полагая, что $X = Y$, имеем $Z = r - a$. Третье уравнение дает

$$|X|^2 = b(r - a). \tag{9.5.20}$$

Поскольку Z вещественно, то получается, что такие точки могут существовать, если только $e + r_2 = 0$. Именно это последнее равенство является условием того, что мнимые части Δ_1 и α могут быть убраны фазовым вращением из (9.5.2), после чего комплексный случай сводится к вещественному. По этой причине мы проигнорируем это патологическое условие и будем предполагать, что e и r_2 не удовлетворяют соотношению $e + r_2 = 0$. Поэтому в этом случае существует только одна неподвижная точка. Проверяя устойчивость начала координат, мы получим в качестве характеристического уравнения либо $\lambda = -b$, либо

$$(\sigma + \lambda)(a + \lambda) - \sigma r = 0. \tag{9.5.21}$$

Корни (9.5.21) имеют вид

$$\lambda = \frac{1}{2}[-\sigma - a \pm (p + iq)], \quad p > 0, \tag{9.5.22}$$

где

$$p + iq = [(\sigma + a)^2 + 4\sigma(r - a)]^{1/2}. \tag{9.5.23}$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}[\pm p - \sigma - 1]. \tag{9.5.24}$$

Одно собственное значение имеет отрицательную вещественную часть, а другое дает предел критической устойчивости, когда $p = \sigma + 1$. Беря вещественную и мнимую части в (9.5.23), находим

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (\sigma + 1)^2 + 4\sigma (r_1 - 1) - e^2, \\ pq &= 2\sigma (e + r_2) - e (\sigma + 1). \end{aligned} \tag{9.5.25}$$

Принимая $r_1 = r_{1c}$ при $p = \sigma + 1$, находим, что r_{1c} удовлетворяет уравнениям

$$r_{1c} = 1 + \frac{(e + r_2)(e - \sigma r_2)}{(\sigma + 1)^2}, \tag{9.5.26}$$

$$\frac{1}{2}(e + q) = \frac{\sigma (e + r_2)}{\sigma + 1}. \tag{9.5.27}$$

Уравнение (9.5.27) определяет частоту критически устойчивой собственной моды, так как $\omega = \operatorname{Im}(\lambda) = (e + q)/2$. Мы заметим, что если $e + r_2 \neq 0$, то начало координат становится осцилляторно неустойчивым при $r_1 = r_{1c}$. Для большинства обыкновенных дифференциальных уравнений нельзя найти точное периодическое решение в замкнутой форме. Бифуркационная теорема Хопфа (Марсден и Маккракен [1976]) дает необходимое условие, чтобы бифуркация была периодическим решением, но не дает указаний об аналитическом виде этого решения. В этом случае нам повезло, и мы можем указать точное периодическое решение

$$\begin{aligned} X &= A \exp(i\omega t), \\ Y &= (1 + i\omega\sigma^{-1}) \exp(i\omega t), \\ Z &= r_1 - r_{1c}, \\ |A|^2 &= b (r_1 - r_{1c}), \end{aligned} \tag{9.5.28}$$

где r_{1c} и ω определены в (9.5.26) и (9.5.27).

Разница между вещественным и комплексным случаями теперь очевидна. Возвращаясь к вещественному случаю, мы берем либо $e = r_2 = 0$, либо $e + r_2 = 0$. В каждом случае $\omega = 0$ и $r = 1$, и предельный цикл сводится к окружности из неподвижных точек. Это не что иное, как вращение двух неподвижных точек вещественных уравнений Лоренца с переходом к континууму, и уравнения (9.5.28) сводятся к уравнениям (9.5.12). Следовательно, в комплексном случае, когда начало координат становится неустойчивым при r_{1c}, предельный цикл занимает место двух неподвижных точек вещественного случая. Эти две точки становятся неустойчивыми, когда $r > r_{ac}$, и появляется аттрактор Лоренца. Предельный цикл комплексных уравнений является в свою очередь устойчивым только для конечного диапазона значений r_1: $r_{1c} < r_1 < r'_{1c}$. Мы не будем продолжать вычисления

далее, потому что детали слишком длинны, но в принципе нетрудно изучить устойчивость предельного цикла, преобразуя систему отсчета частоты ω, а затем проводя анализ устойчивости. Этим методом r можно найти аналитически. Для нахождения поведения при $r_1 > r_{1c}'$ необходимо численное интегрирование. Эта задача изучалась Фаулером и др. [1981], которые нашли, что при r_2, σ, $e \simeq 1$ возникает двухпериодическое поведение, представляющее собой движение на двумерном торе. На рис. 9.7 показаны графики $\mathrm{Re}\,(X)$ и Z во времени.

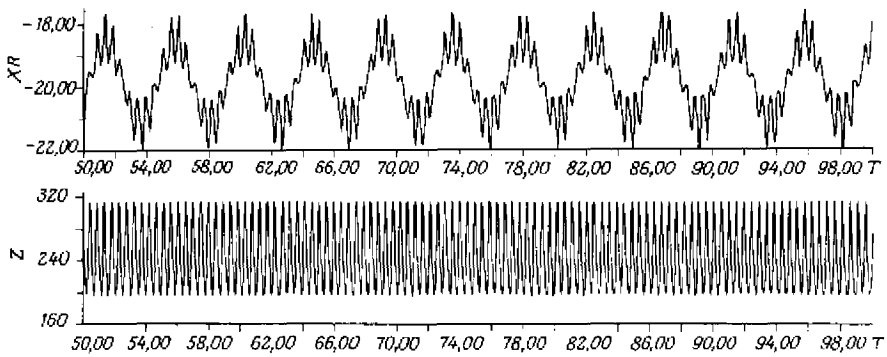


Рис. 9.7.

Энергетический спектральный анализ этих данных показывает, что появляются две частоты с иррациональным отношением. Апериодическое движение аттрактора лоренцевского типа имеет место только в пределе, когда $r_2 \to 0$. Отсюда следует, что комплексный вариант уравнений обнаруживает бóльшую степень порядка в том смысле, что, когда r_2 или e не близки к нулю, то либо одно-, либо двухпериодическое движение является превалирующим в параметрическом пространстве. Величины r_2 и e суть мнимые части r и a, и они появляются непосредственно из-за включения слабо дисперсионных эффектов в исходную проблему. Ранее мы процитировали бета-эффект как пример эффекта этого вида. В качестве примера мы используем двухслойную модель бароклинной неустойчивости, обсужденной в разд. 4, и включим слабую вязкость и слабый бета-эффект для того, чтобы показать, как при таких предположениях получается комплексное уравнение Лоренца.

Квазигеострофические уравнения потенциальной завихренности, приведенные в (9.4.1), модифицируются включением вязкости и приводятся к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_i + F(\psi_j - \psi_i) + \beta y] = -\nu\nabla^2\psi_i, \quad i \neq j = 1, 2, \tag{9.5.29}$$

где ν — коэффициент вязкости. Разлагая около $\psi_i = -U_i y$, как в разд. 9.4, мы находим новую нейтральную кривую с введенной вязкостью. Полагая $\omega_I = 0$, получаем нейтральную кривую в виде

$$\mu = \Delta u = \frac{1}{(2F - a^2)}\left[\frac{\beta^2 F^2}{a^2(a^2+F)^2} + \frac{a^2\nu^2}{k^2}\right]. \qquad (9.5.30)$$

В пределе, когда $\nu \to 0$, это не та же самая кривая, которая найдена в разд. 9.4 как идеальная (невязкая) нейтральная кривая

$$\mu = \Delta u = \frac{2\beta F}{a^3(4F^2 - a^4)^{1/2}}. \qquad (9.5.31)$$

Эти две кривые не совпадают в невязком пределе, и мы заключаем отсюда, что даже слабая вязкость дестабилизирует нейтральную кривую (см. Ромеа [1977]). Однако в пределе $\beta \to 0$ две кривые сливаются, хотя природа неустойчивости изменяется. В этом пределе нейтральная кривая представляется формулой

$$F = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(k^2 + m^2\pi^2). \qquad (9.5.32)$$

Еще возможно принять $\nu = \varepsilon\bar{\nu}$ и $\beta = \varepsilon\bar{\beta}$, что лишь добавит к (9.5.32) члены порядка $O(\varepsilon^2)$. Как упоминалось в разд. 9.4, соотношение (9.5.32) имеет минимум при $k_c = 0$, и поэтому волновое число k необходимо взять вдали от минимума и ограничиться полосой ширины ε^2, так что $F \to F \pm \varepsilon^2$ около всей нейтральной кривой вместо полосы ширины ε^2 выше и ниже минимума. Необходимые здесь вычисления следуют намеченным в разд. 9.4. При $O(\varepsilon^2)$ можно проинтегрировать уравнение и получить

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= D_1(T_1, y),\\ \varphi_2^{(2)} &= D_2(T_1, y) + \\ &+ \frac{4i}{k\Delta u}\left[\frac{\partial A}{\partial T_1} + \left(\bar{\nu} - \frac{ik\bar{\beta}}{a^2}\right)A\right]\sin(m\pi y)\exp(i\theta) + \text{с. с.}\end{aligned} \qquad (9.5.33)$$

Заметим, что коэффициент при A комплексный, мнимая часть появилась из-за дисперсионного бета-эффекта. При $O(\varepsilon^3)$ удаление секулярных членов, порожденных только t-членами в $\varphi^{(3)}$, дает

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2} - a^2 D_1\right) + \bar{\nu}\frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2} = \\ = \frac{2a^2 m\pi}{\Delta u}\sin(2m\pi y)\left[\frac{\partial}{\partial T_1} + 2\bar{\nu}\right]|A|^2 \qquad (9.5.34)$$

и аналогичное уравнение для D_2, из которого немедленно следует, что $D_2 = -D_1$. Удаление секулярных членов, порожденных членами вида $t\exp(i\theta)$ в $\varphi^{(3)}$, приводит к соотношению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^{(2)}} + \frac{3}{2}\left(\bar{\nu} - \frac{i\beta k}{a^2}\right)\frac{dA}{dT_1} = a^{-2}\left[\pm\frac{1}{4}k^2(\Delta u)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{9}k^2\bar{\beta}^2a^{-2} + ik\bar{\beta}\bar{\nu}\right]A + \left(\frac{k^2\Delta u}{2a^2}\right)A\int_0^1 \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2}\sin(2m\pi y)\,dy. \quad (9.5.35)$$

Далее определим

$$\bar{B}(T_1) = \int_0^1 \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2}\sin(2m\pi y)\,dy.$$

Умножая обе части уравнения (9.5.34) на $\sin(2m\pi y)$, интегрируя по y от 0 до 1 и учитывая граничные условия $D = 0$ при $y = 0$ и 1, получим

$$\left(1 + \frac{a^2}{4m^2\pi^2}\right)\frac{d\bar{B}}{dT_1} + \bar{\nu}\bar{B} = \frac{m\pi a^2}{\Delta u}\left[\frac{d}{dT_1} + 2\bar{\nu}\right]|A|^2. \quad (9.5.36)$$

Уравнение (9.5.35) приводится к виду

$$\frac{d^2A}{dT_1^2} + \frac{3}{2}(\bar{\nu} - ik\bar{\beta}a^{-2})\frac{dA}{dT_1} = a^{-2}\left[\pm\frac{1}{4}k^2(\Delta u) + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{9}k^2\bar{\beta}^2a^{-2} + ik\bar{\beta}\bar{\nu}\right]A - \frac{1}{2}k^2(\Delta u)^2a^{-2}A\bar{B}. \quad (9.5.37)$$

Перенормируя переменную B в виде

$$\bar{B} = \left(\frac{4m^2\pi^2a^2(\Delta u)^{-1}}{a^2 + 4m^2\pi^2}\right)B \quad (9.5.38)$$

так, чтобы коэффициент при $d(|A|^2)/dT$ сделать равным единице, как в уравнении (9.5.3), находим, что эквивалентные значения Δ_1, Δ_2 и Δ_3 в уравнениях (9.5.2) и (9.5.3) равны

$$\Delta_1 = \frac{3}{2}(\bar{\nu} - ik\bar{\beta}a^{-2}),$$

$$\Delta_2 = \frac{4m^2\pi^2\bar{\nu}^2}{a^2 + 4m^2\pi^2}, \quad (9.5.39)$$

$$\Delta_3 = 2\bar{\nu}$$

и значения коэффициентов в комплексных уравнениях Лоренца определяются формулами

$$\sigma = 2, \quad b = \frac{8m^2\pi^2}{a^2 + 4m^2\pi^2},$$

$$r_2 = (k\bar{\beta})(a^2\bar{\nu})^{-1}; \quad e = 3r_2, \quad (9.5.40)$$

$$r_1 = 1 + \frac{2}{\bar{\nu}^2}\left[\pm\frac{1}{4}k^2(\Delta u)^2a^{-2} + \frac{5}{9}\bar{\beta}^2a^{-4}\right].$$

Заметим, наконец, что $e + r_2 = 4r_2$, так что периодические решения вида (9.5.28) существуют.

Наконец, пример с лазером разд. 9.3 аналогичным образом приводит к AB-уравнениям. Включение членов с однородным уширением, первоначально указанных в (9.3.1)—(9.3.3), и утечка проводимости действительно при некоторых предположениях дают модель Лоренца. Этот вопрос был подробно исследован Хакеном и соавторами (см. ссылки у Хакена [1978]).

9.6. Примечания

(а) Специальный пример диссипативной неустойчивости обнаруживается при рассмотрении конвекции в жидкости, подогреваемой снизу. Эта проблема первоначально изучалась Рэлеем [1916]. Рассмотрим поток жидкости, расположенной между двумя горизонтальными плоскостями, расстояние между которыми равно L. Жидкость равномерно нагревается снизу, так что разность температур между верхней и нижней плоскостями постоянна и равна ΔT. Пусть α — коэффициент теплового расширения, ν — коэффициент вязкости, κ — коэффициент тепловой проводимости, g — ускорение земного притяжения (гравитационное ускорение). Пусть, далее, ψ — функция тока и θ — изменение температуры в пространстве и во времени. Проще рассмотреть движения, которые двумерны и происходят в вертикальной плоскости (x, z). В этом случае уравнения, описывающие течение, имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi = \nu\nabla^4\psi + \alpha g\frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad (9.6.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\theta = \frac{\Delta T}{L}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta. \qquad (9.6.2)$$

В этой специальной задаче важны граничные условия на верхней и нижней плоскостях, и мы выберем «свободные» граничные условия, т. е. ψ и $\nabla^2\psi$ равны нулю при $z = 0$ и $z = L$. Чтобы удовлетворить этим условиям, возьмем осцилляционные решения с малой амплитудой линеаризованного варианта уравнений (9.6.1), (9.6.2),

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \theta\end{pmatrix} = [\mathrm{b}\exp i\theta + \mathrm{c.c.}]\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right), \quad \theta = kx - \omega t, \qquad (9.6.3)$$

следуя виду (9.1.2), (9.1.3). Линейную часть уравнений (9.6.1), (9.6.2) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 - \nu\nabla^4 & -\alpha g\partial/\partial x\\ -\frac{\Delta T}{L}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \theta\end{pmatrix} = \text{Квадратичные нелинейные члены.} \qquad (9.6.4)$$

Определитель этой матрицы в (k, ω)-пространстве дает дисперсионное соотношение, которое, если положить для простоты $k = \pi a/L$, записывается в виде

$$(1+a^2)\left(i\omega - \frac{\nu\pi}{L^2}\right)[-i\omega + \varkappa(1+a^2)\pi^2/L^2] + \frac{\Delta T\,\alpha g a^2}{L} = 0. \tag{9.6.5}$$

Это квадратное уравнение относительно ω непосредственно решается:

$$2\omega = i\left\{-(\nu+\varkappa)(1+a^2)\pi^2/L^2 \pm \left[(\nu-\varkappa)^2(1+a^2)\frac{\pi^4}{L^4} + \frac{4\Delta T\,\alpha g a^2}{(1+a^2)L}\right]^{1/2}\right\}, \tag{9.6.6}$$

и поскольку члены в квадратных скобках являются положительными, то ω оказывается чисто мнимым: $\omega = i\omega_I$ и $\omega_R = 0$ в обозначениях разд. 9.1. В этом случае отсутствует гармоническое волновое движение, растущее или затухающее, но есть переключение от стационарного роста к стационарному убыванию. Очевидно, что в этой задаче имеется много параметров, но в качестве регулируемого параметра мы выбираем ΔT. Для нахождения кривой нейтральной устойчивости, как в разд. 9.1, положим, $\omega_I = 0$, что эквивалентно в этом случае выбору $\omega = 0$ в (9.6.6). После возведения в квадрат легко получаем условие

$$\frac{\Delta T\,\alpha g L^3}{\nu\varkappa} = \frac{\pi^2(1+a^2)^3}{a^3}. \tag{9.6.7}$$

Выражение в левой части (9.6.7) есть безразмерная величина, называемая числом Рэлея:

$$R_a = \frac{\Delta T\,\alpha g L^3}{\nu\varkappa} = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}. \tag{9.6.8}$$

Число R_a сейчас играет роль параметра μ, бифуркационного параметра разд. 9.1, и выражение в (9.6.8) представляет нейтральную кривую (следует помнить, что $k = \pi a/L$). Критическую точку можно быстро определить из (9.6.8) как минимум кривой. Легко видеть, что он достигается, когда $a^2 = 1/2$ и $R_{ac} = 27\pi^4/4$, так что точка (k_c, μ_c) в этой задаче имеет вид $(\pi/\sqrt{2}L,\ 27\pi^4/4)$.

(б) С нелинейным диффузионным уравнением (9.1.16) связана большая литература. Его роль как слабо нелинейного уравнения в диссипативных системах почти универсальна. Ландау [1959] предположил эвристически, что при критическом числе Рейнольдса для течения вязкой жидкости амплитудное уравнение без пространственной зависимости должно представляться в виде

$$\partial A/\partial T_2 = \alpha A - \beta A\,|\,A\,|^2. \tag{9.6.9}$$

Стюарт [1960] показал, что (9.6.9) действительно является соответствующим амплитудным уравнением вблизи критического числа Рейнольдса для частного примера плоского течения Пуазейля. Получить нейтральную кривую в этом случае оказывается более сложным делом, чем просто положить $\omega_I = 0$, так как здесь нельзя пренебрегать другими пространственными размерностями и граничными условиями. В этом случае необходимо численно решить обыкновенное дифференциальное уравнение Орра—Зоммерфельда четвертого порядка. Уравнение Стюарта—Ландау (9.6.9) описывает эволюцию дискретных волн, но включение пространственной переменной в эту категорию неустойчивостей приводит вблизи критической точки, вообще говоря, к уравнению (9.1.16), которое мы здесь повторно запишем (см. Дэйви [1972] и Ньюэлл [1974]):

$$\partial A/\partial T_2 = \alpha_1 A - \beta_1 A\,|A|^2 + \gamma_1 \partial^2 A/\partial \bar{X}^2, \tag{9.6.10}$$

$$\bar{X} = X_1 - (d\omega/dk)\,T_1. \tag{9.6.11}$$

Уравнение (9.6.10) приписывается то одним авторам, то другим в зависимости от области, где оно возникает. В теоретической физике, биологии и химии чаще всего его называют обобщенным уравнением Ландау—Гинзбурга (см. обзор Курамото [1978] и работу Лина и Кана [1980] о популяционных модулях). Это уравнение возникло в теории сверхпроводимости и имеет структуру квантового уравнения Шрёдингера с функцией $|A|^2$ в качестве потенциала. Однако в механике жидкости, по-видимому, Ньюэлл и Уайтхед [1969] были первыми, получившими это уравнение в виде (9.6.10) для частного случая конвекции Бинара в области критических чисел Рэлея (β_1 и γ_1 вещественны). В этом случае для вещественных конвекционных задач необходимо принимать во внимание и другие пространственные переменные, однако сама структурная форма уравнения (9.6.10) остается фундаментальной. Стюартсон и Стюарт [1971], следуя Хоккингу и др. [1972], показали, что (1.14) появляется как обобщение уравнения Ландау—Стюарта (1.13) в том случае, когда в задачу о плоском течении Пуазейля включается пространственная переменная (β_1 вещественно, γ_1 комплексно). Болл [1977] показал, что, когда $\gamma_1 > 0$, решение уравнения (9.6.10) разрушается за конечное время (β_1, γ_1 вещественны), $\beta_1 < 0$. Ланге и Ньюэлл [1974] показали, что существует критерий $\beta_{1R}\gamma_{1R} + \beta_{1I}\gamma_{1I} \gtrless 0$, который позволяет решить, достигла ли система монохроматического состояния. Для НЛШ-уравнения гл. 8 монохроматическое состояние эквивалентно условию $\beta\gamma < 0$. Книга Дрейзина и Рейда [1981] по гидродинамической устойчивости содержит больше всего ссылок на задачи, в которых появляется уравнение (9.6.10).

Как можно ожидать, существуют и другие области, в которых встречается уравнение (9.6.10). Например, Полик и Роуленд

[1975] показали, что оно возникает при нелинейном распространении волн в пьезоэлектрическом полупроводнике (β_1 комплексное, γ_1 чисто мнимое) вблизи критического значения поля постоянного тока. Ньюэлл [1974] занимался уравнением (9.6.10) для случая скалярного L, но мы обобщили его результат на матрицу L как следствие из нашего основного анализа в разд. 9.2. В заключение отметим два важных момента, относящихся к уравнению (9.6.10). Во-первых, оно первого порядка по времени по переменной T_2. Переменная T_1 вошла в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью. Это связано с необходимостью удаления секулярных членов в порядке $O(\varepsilon^2)$. Во-вторых, групповая скорость C_g однозначна на нейтральной кривой.

(в) Хотя известно много моделей, обладающих парой комплексно сопряженных корней, второму типу неустойчивости (категория II) как общему классу неустойчивостей этого вида уделялось меньшее внимание в литературе, чем первому. Часто эти два вида неустойчивостей смешивают несмотря на то, что их поведение резко различается. Мы приведем перечень семи различных примеров дисперсионной неустойчивости:

(i) идеальная двухслойная модель бароклинной неустойчивости на бета-плоскости (Филипс [1954], Педлоски [1970, 1972]);

(ii) модель Иди (непрерывно расслоенная) для бароклинной неустойчивости на бета-плоскости (Иди [1949], Дрейзин [1970, 1972]);

(iii) самоиндуцированная прозрачность (СИП) — ультракороткий оптический импульс, распространяющийся без потерь через двухуровневую атомную среду (Макколл и Хан [1967, 1969], Лэм [1971]);

(iv) идеальная двухслойная неустойчивость Кельвина—Гельмгольца (Вейссман [1979] и ссылки в работе);

(v) продольный изгиб упругих оболочек и балок (Ланге и Ньюэлл [1971]);

(vi) неустойчивость симметричной двухструйной плазмы (Полик [1977] и ссылки в работе);

(vii) идеальная двухслойная модель для бароклинной неустойчивости на F-плоскости (не на бета-плоскости) (Педлоски [1970]).

Приведенный выше перечень не исчерпывающий, но содержит наиболее известные примеры. Примеры (i), (iii) и (vii) обсуждались в разд. 9.3 и 9.4 этой главы. Модель Иди бароклинной неустойчивости подобна двухслойной модели, но состоит из единственного течения, которое непрерывно расслаивается. Дисперсионное соотношение не полиномиально по ω, но тем не менее существует пара комплексно сопряженных корней. Развернутое обсуждение амплитудных уравнений и соответствующих им моделей имеется у Гиббона и Магинесса [1981].

(г) Для тех дисперсионных неустойчивостей, которые имеют минимум в начале координат, т. е. $k_c = 0$, могут возникнуть технические трудности. Это приводит к падающим волнам, у которых длина волны бесконечна. В этом случае должны быть рассмотрены боковые моды, отличные от нуля. Как мы показали в разд. 9.2, пространственные члены в порядке $O(\varepsilon^2)$ секулярны всюду, за исключением минимума. Это значит, что переменная X_1 должна быть исключена, но более длинная переменная $X_2 = \varepsilon^2 x$ может быть использована вместо нее. Уравнение для амплитуды теперь приводится к виду (α_3, β_3, γ_3 вещественны)

$$i\frac{\partial A}{\partial X_2} = \pm\alpha_3 A + \gamma_3\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - \beta_3 A\,|A|^2, \qquad (9.6.12)$$

представляющему собой НЛШ-уравнение, в котором пространственная и временна́я переменные меняются местами. Этот тип неустойчивости появляется при описании поведения симметричной двухструйной плазмы (пример vi) и двухслойной бароклинной неустойчивости, когда бета-плоскость не включена (пример vii).

Раздел 9.3

Первоначальные численные и аналитические вычисления и экспериментальные наблюдения СИП были сделаны Макколом и Ханом [1967, 1969]. В качестве атомного образца они применили рубиновый стержень, охлажденный в жидком гелии. Был использован Q-переключаемый рубиновый лазер, настроенный на выход плоскополяризованной $E(2E) \leftrightarrow 4A_2\left(\pm\frac{3}{2}\right)$ линии отдачи с типичным импульсом ширины 10÷20 нм. Дальнейшие элегантные эксперименты были произведены Гиббсом и Слашером [1970, 1972], которые применили 5÷10 нс когерентный оптический импульс, полученный от лазера на ^{202}HgII, пропускаемый через образец ^{85}Rb.

(а) Превосходный обзор теоретических аспектов распространения ультракоротких оптических импульсов, включая теорему площадей, был опубликован Лэмом [1971]. В этой ясно написанной статье могут быть найдены многие интересные экспериментальные и теоретические сведения. Этот обзор сыграл существенную роль в раннем развитии теории солитонов, так как он связал воедино многие работы по СГ-уравнениям, в особенности относящиеся к преобразованиям Бэклунда. Именно Лэм первый обратил внимание на старые и почти забытые результаты, содержащиеся у Эйзенхарта [1960] и Форсайта [1959], о СГ-уравнениях и их связи с поверхностью постоянной отрицательной кривизны в дифференциальной геометрии. Другие статьи и обзоры по СИП,

в частности связанные с солитонным аспектом, могут быть найдены у Буллафа и др. [1973] и Буллафа [1973, 1975, 1976, 1979].

Идеи, относящиеся к уравнениям РМБ, были впервые представлены Эйлбеком и др. [1973] и Кодри и др. [1973] как альтернатива к СИП-уравнениям. То, что они интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, было показано Гиббоном и др. [1973]. Среди авторов, которые занимались аспектами обратной задачи рассеяния по отношению к СИП-уравнениям с однородным уширением и без него, были Лэм [1970, 1971, 1973] и Абловиц, Кауп и Ньюэлл [1974]. Чисто солитонные аспекты, использующие метод Хироты, развивались Кодри и др. [1973, 1974, 1975].

(б) Как в вычислениях, связанных с многомасштабными растяжениями, так и в приближениях, которые сводят уравнение Максвелла к форме уравнения РМБ, было показано, что $\bar{\alpha}$ должно быть малым. Например, $\bar{\alpha} \simeq 0{,}01$ в оптических частотах, когда $n \sim 10^{18}$ атом/см^3. В экспериментах Гиббса и Слашера [1972] в рубидиевых парах n принимает значение порядка 10^{12} атомов/см^3, так что $\bar{\alpha} \sim 10^{-8}$.

Раздел 9.4

(а) Вывод уравнений (9.4.18) для двухслойной модели был дан Педлоски [1970], где рассмотрены существенные детали приближений, в условиях которых эти уравнения справедливы. В этой статье автор вывел AB-уравнения только с переменной T_1 (без переменных X_1 и X_2) и таким образом получил уравнение в виде

$$\frac{d^2A}{dT_1^2} = \pm\alpha A - \beta A\,|A|^2. \qquad (9.6.13)$$

В своей статье [1972] Педлоски затем включил переменную X_1, чтобы получить AB-уравнения. Двухслойная модель и сама по себе, очевидно, удобная конструкция, однако ее применение было связано с тем, что она является по существу простейшей математической моделью, которая демонстрирует бароклинную неустойчивость. Другая, несколько более сложная модель, — это так называемая модель Иди [1949], которая допускает непрерывную стратификацию в единственном течении с множеством сдвигов (Дрейзин [1970]). Уравнения AB возникают также в модели Иди с линейным сдвигом и стратификацией (Мороз [1981]).

(б) Интегрируемость AB-уравнений по отношению к двухслойной модели была доказана Гиббоном и др. [1979], а для модели Иди с линейным сдвигом и стратификацией — Морозом и Бриндли [1981]. Лабораторные исследования бароклинной неустойчивости, использующие вращающиеся кольцеобразные слои жидкости или газа, обнаруживают богатое множество движений, включая периодическое, кратно периодические и апериодические течения. Многие из этих результатов содержались в пио-

нерских работах Хайда [1958, 1969], использующих теплоуправляемые вращающиеся кольцевые слои жидкости. Харт [1972] рассмотрел двухслойную систему в лаборатории. Сведения о таких результатах можно найти у Хайда и Мейсона [1975] и Хайда и др. [1977].

(в) Технически выбор функции $\sin(m\pi y)$ в качестве вариации по y функций тока является некорректным, поскольку обе производные от ψ_i по y должны равняться нулю при $y = 0$ и $y = 1$. Это обстоятельство указывает на необходимость использования рядов Фурье для анализа вариаций по y, что существенно усложняет вычисления (Смит [1974]). Педлоски указал, что для этого частного случая, в котором жидкость лишена вязкости, аппроксимация функцией $\sin(m\pi y)$ вполне хороша.

(г) Бета-эффект (см. также гл. 5) можно включить в эксперименты с кольцевыми слоями, взяв наклонные торцевые стенки вверху и внизу кольцевого слоя. Таким образом экспериментально учитывается кривизна Земли. Мейсон [1977] детально изучил движение волн в такой системе и показал, что имеется существенное различие в экспериментах, когда стенки включены или исключены. Теоретически мы это видели в простой двухслойной модели, когда включение или исключение члена бета-плоскости βy приводило к существенному различию в теории как в невязком случае, так и в слабо затухающем случае. См. разд. 9.5, в котором возможность вывода уравнений Лоренца зависела от бета-эффекта. По поводу общих сведений из геофизической динамики жидкости или газа см. примечания к гл. 5.

Раздел 9.5

(а) Уравнения Лоренца были выведены в 1963 г. для задач, рассмотренных в примечаниях к разд. 9.1 этой главы, т. е. для двумерной конвекции жидкости между двумя горизонтальными плоскостями со свободными граничными условиями на верхней и нижней границах. Функция тока ψ и изменение температуры θ между плоскостями можно разложить в ряды Фурье при критичности и подставить в уравнения Навье — Стокса (9.6.1) и (9.6.2):

$$\psi = \sqrt{2}\varkappa a^{-2}(1+a^2)\left[X(\tau)\sin\left(\frac{\pi a x}{L}\right)\sin\frac{\pi z}{L}\right]\dots,$$

$$\theta = \sqrt{2}\pi^{-1}R_a R_{ac}^{-1}\Delta T\left[Y(\tau)\cos\left(\frac{\pi a x}{L}\right)\sin\frac{\pi z}{L} - \right. \qquad (9.6.14)$$

$$\left. - \frac{1}{2}Z(\tau)\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right]\dots,$$

где перед амплитудами Фурье X, Y и Z стоят масштабные коэффициенты, а $\tau = \pi^2 L^{-2}(1+a^2)\varkappa t$ является безразмерной временно́й переменной. Подставляя эти выражения в уравнения Навье —

Стокса и обрезая число мод (остается одна у ψ и две у θ), получаем уравнения Лоренца (9.5.11), где

$$r_a = R_a/R_{ac}, \quad \sigma = \nu\varkappa^{-1}, \quad b = 4\,(1 + a^2)^{-1}.$$

Разложение по модам и процедура обрезания, описанная здесь, типичны в задачах такого рода. По теории, чем больше число мод включается в рассмотрение, тем более точна модель, хотя это предположение основывается на равномерной сходимости разложений, что не всегда имеет место. Говард и Кришнамурти [1980] рассмотрели 6-мерную модель конвекции, содержащую модель Лоренца на трехмерном (трехмодовом) инвариантном подпространстве.

(б) Применение корректных боковых граничных условий для двухслойной модели и модели Иди делает функции Z лоренцевой модели бесконечными. В таком случае уравнения модифицируются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= \left(r - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n\right) X - aY, \\ \dot{Z}_n &= -b_n Z_n + \tfrac{1}{2}\gamma_n\,(X^*Y + XY^*). \end{aligned} \tag{9.6.15}$$

В вещественном случае $a = 1$ Педлоски и Френзен [1981] рассмотрели поведение (9.6.15) по сравнению со случаем единственного Z.

(в) Объяснение того, как могут быть найдены AB-уравнения с диссипативными или дисперсионными эффектами, дано Гиббоном и Магинессом [1981].

10. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОЛИТОНОВ

10.1. Введение

Прилежный читатель, добравшийся до этой главы, мог бы прийти к тому выводу, что все нелинейные волновые уравнения с уединенными волновыми решениями обладают также и мультисолитонными решениями и что преобразование обратной задачи рассеяния является универсальным мощным инструментом в исследовании таких проблем. Однако следует вспомнить предупреждение в конце гл. 1 о том, что техника, развитая в этой книге, приложима только к множеству интересных специальных случаев. Существует много других столь же интересных уравнений, для которых описанные здесь методы неприменимы. Несмотря на огромный прогресс, достигнутый в теории преобразования обратной задачи рассеяния за последнее десятилетие, продвижение в анализе уравнений, для которых эти методы не проходят, было относительно скромным. И действительно, именно в этой области возникает масса нерешенных задач, связанных с солитоноподобным поведением.

Когда подробно разработанные аналитические инструменты оказываются недостаточными, в нашем распоряжении остается другой подход — изучать эволюцию решений численно. Исторически компьютер был тем инструментом, который ускорил первоначальные исследования в этой области: Забуски [1981] в своем обзоре как первоначальных, так и более поздних исследований убедительно показал значительность вклада, который внесли численные результаты и методы в изучение нелинейных задач во многих областях.

В этой главе мы опишем численные методы, применяемые для изучения нелинейных волновых уравнений с уединенными волновыми решениями. Эти методы можно испытать на уравнениях, для которых известны аналитические результаты и точные решения, и затем применить их к уравнениям, для которых аналитические результаты отсутствуют. Большая часть этой главы будет посвящена обзору результатов, относящихся к различным численным исследованиям этих уравнений. Часто мы не можем обнаружить точного солитонного поведения, которым обладают уравнения, изучаемые всюду в этой книге, и вместо этого будет наблюдаться более размытое «квазисолитонное» поведение. К тому

же уравнения с точными мультисолитонными решениями в одномерном пространстве могут обнаруживать некоторую форму солитоноподобного поведения при обобщении на два или более измерений.

Недостаток места вынуждает нас ограничиться кратким обзором литературы с многочисленными пробелами и пропусками. Мы начнем с короткого введения в некоторые часто используемые численные методы для того, чтобы очертить рамки дальнейших обсуждений.

10.2. Основные численные методы

Численный анализ как инструмент изучения дифференциальных уравнений в частных производных предлагает приводящее в замешательство многообразие численных приемов и методов. Для выбранного уравнения вопрос о «наилучшем» численном методе представляется исключительно сложным. Даже частичный ответ на этот вопрос зависит от многих факторов: например, конечной точности, требуемой для заданной области независимых переменных, и таких ограничений, как затраты времени и памяти, а также длина машинного слова. В равной степени важны время и усилия, затрачиваемые на программирование. Большинство физиков-вычислителей и прикладных математиков обычно удовлетворены одним достаточно эффективным методом, и редко проводятся подробные сравнения его с другими методами. По этой причине мы не особенно настаиваем на преимуществах описанных ниже методов, кроме случаев, когда были проведены статистически значимые тесты. Требуется основательная работа и не только по теоретическому анализу точности и эффективности, но и по практической проверке с использованием близких к оптимальным программных реализаций. Дополнительным соображением, которое становится все более важным, является применимость выбранного алгоритма к новому поколению компьютеров с параллельными процессорами, получающими ныне широкое распространение.

В этом коротком разделе мы успеем лишь бегло охарактеризовать некоторые основные численные схемы. Полное описание можно найти в книгах Рихтмайера и Мортона [1967], Митчелла и Гриффитса [1980], Эймза [1977], Готтлиба и Орзага [1977] и Мейза и Марковица [1978].

Большинство уравнений, представленных в нашей книге, можно записать либо в форме

$$u_t = L(u), \tag{10.2.1}$$

либо в форме

$$u_{tt} = L(u), \tag{10.2.2}$$

где $L(u)$ — некоторый общего вида нелинейный дифференциальный оператор относительно пространственной переменной x. Сначала мы рассмотрим одномерный случай, откладывая многомерный случай до последнего раздела. В том же духе мы будем обычно рассматривать u как скалярное поле, хотя многие описанные здесь методы обобщаются на случай векторного поля. Уравнение (10.2.2) можно записать, разумеется, как двухкомпонентную форму уравнения (10.2.1), но полезно рассматривать методы, предназначенные для работы непосредственно с (10.2.2).

Чтобы анализировать уравнения численно, нужно заменить граничные условия на бесконечности условиями на некоторой конечной границе. Для минимизации влияния бесконечно удаленной границы мы можем взять границу на большом расстоянии от области, где u меняется. На этой границе мы полагаем, что либо u, либо ее производные равны нулю. Другой более усложненной модификацией этого метода является использование так называемого граничного условия потока наружу: мы предполагаем, что любая часть решения, достигающая границы, удовлетворяет некоторому линейному или нелинейному однонаправленному волновому уравнению, которое в каком-то смысле аппроксимирует исходное волновое уравнение. Это позволяет избавиться от трудностей, вызываемых отражением на конечных границах. Разумеется, другие граничные условия могут лучше подходить к моделированию некоторых физических ситуаций, даже если такие условия противоречат теоретическим подходам, описанным в предыдущих главах.

Полезный частный случай уравнений (10.2.1), (10.2.2) получается, если взять $L(u) = au_{xx}$. С таким выбором и с $a = 1$ уравнение (10.2.1) превращается в линейное уравнение теплопроводности, описанное в гл. 1. Если в (10.2.1) $a = i$, то мы получаем линейное уравнение Шрёдингера, а с $a = 1$ в (10.2.2) мы получаем линейное волновое уравнение.

Для сведения исходной задачи к задаче, содержащей лишь конечное число параметров, применяются две основные технические схемы: подход аппроксимирующих функций и конечно-разностный подход.

10.2.1. Метод аппроксимирующих функций

Этот метод аппроксимирует точное решение $u(x, t)$ приближенным решением $\tilde{u}$, определенным на конечномерном подпространстве (обычно только по переменной x):

$$u(x, t) \approx \tilde{u}(x, t) = \sum_{i=0}^{n} c_i(t)\,\varphi_i(x). \qquad (10.2.3)$$

Функции $\varphi_i(x)$ образуют соответствующим образом выбранный базис. Обычно в качестве этих функций выбираются тригонометрические функции, что приводит к конечному преобразованию Фурье, т. е. к спектральному методу. Другой популярный выбор связан с кусочно полиномиальными функциями с локальным базисом; это так называемый метод конечных элементов. В простейшем варианте последнего метода функция $\tilde{u}$ — кусочно линейная функция, а базисные функции $\varphi_i(x)$ суть так называемые

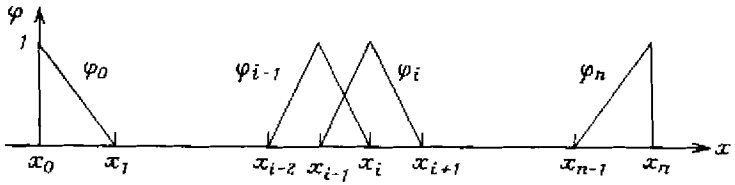


Рис. 10.1. Базисные функции для кусочно-линейного приближенного решения $\tilde{u}$.

«шапочки», представленные на рис. 10.1 и описываемые уравнениями

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) & \text{при } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) & \text{при } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ 0 & \text{во всех других точках.} \end{cases} \tag{10.2.4}$$

Здесь x_i суть «узлы» или точки, в которых производная $\tilde{u}$ становится разрывной; обычно эти точки располагаются на равных расстояниях друг от друга. Подобные диаграммы можно нарисовать для базисных функций, являющихся кусочно полиномиальными. Существенным моментом в выборе базисных функций является то, что они ненулевые лишь в небольшой области оси x. Это ведет к эффективной численной обработке получающейся системы совместных уравнений.

Как только специальный выбор подпространства сделан, то подставляя (10.2.3) в (10.2.1) и предполагая, что функции $\varphi_i(x)$ выбраны удовлетворяющими граничным условиям, получим

$$\sum_0^n \dot{c}_i(t)\,\varphi_i(x) - L\left\{\sum_0^n c_i(t)\,\varphi_i(x)\right\} = r(x, t), \tag{10.2.5}$$

где точка обозначает дифференцирование по t. Если бы $\tilde{u}$ было точным решением, то остаток $r(x, t)$ был бы равен нулю. Для того чтобы получить уравнения для коэффициентов $c_i(t)$, мы потребуем, чтобы остаток был в некотором смысле малым. Обычно

для этих целей используется подход Галёркина, заключающийся в требовании, чтобы выполнялись равенства

$$\int r(x, t)\,\psi_j(x)\,dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{10.2.6}$$

где функции $\psi_j(x)$ известны как пробные функции. Часто, но не всегда, в качестве этих пробных функций выбираются базисные функции $\varphi_j(x)$. Условия (10.2.6) приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $c_i(t)$. Здесь интеграл берется по конечной области, вне которой функция u предполагается равной нулю.

Рассмотрим в качестве примера линейное уравнение теплопроводности для случая, когда базисные и пробные функции имеют вид (10.2.4), а узлы выбираются на расстоянии h друг от друга. В этом случае интегралы в (10.2.6) легко вычисляются, и полученные обыкновенные дифференциальные уравнения представляются в тридиагональном виде

$$\dot{c}_{i-1} + 4\dot{c}_i + \dot{c}_{i+1} = \frac{6a}{h^2}(c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.2.7}$$

Существенный отход от строгого определения метода Галёркина касается обращения с нелинейными членами в интеграле (10.2.6). Члены вида

$$\int F\left\{\sum_0^n c_i(t)\,\varphi_i(x)\right\}\psi_j(x)\,dx, \tag{10.2.8}$$

где $F(\tilde{u})$ — нелинейная функция, вычисляются с помощью численных квадратур. Вместо этого можно воспользоваться методом так называемой «аппроксимации произведением» (Кристи и др. [1981]) и заменить (10.2.8) на

$$\sum_{i=0}^{n} F(c_i)\int \varphi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx.$$

Метод аппроксимации произведением, применяемый с локальными базисными функциями, подобными шапочками, по очевидным причинам дает значительно более простой алгоритм и даже, в некоторых случаях, неожиданную выгоду — высокую точность. Полезный обзор метода конечных элементов для солитонных уравнений опубликован Митчеллом и Шумби [1981].

Другой подход к (10.2.6) состоит в том, чтобы положить остаток равным нулю на множестве точек $x_0, \ldots, x_n$,

$$r(x_j, t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{10.2.9}$$

Это метод коллокации: хотя в настоящее время он мало используется для уравнений с частными производными, он приобретает популярность для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации формально эквивалентен методу Галёркина, если в качестве пробных функций выбираются δ-функции Дирака.

10.2.2. Метод конечных разностей

Метод аппроксимирующих функций относительно нов, и для многих приложений по-прежнему более популярным остается метод конечных разностей. В этом подходе мы ищем аппроксимацию u_m^n исходной функции $u(x, t)$ в точках x_m, t_n на прямоугольной сетке в плоскости x, t, где $x = hm$, а $t = kn$. Разлагая значения функций в узлах сетки в ряд Тейлора, мы получим аппроксимацию дифференциальных уравнений соответствующими алгебраическими соотношениями между значениями входящих в уравнения переменных в узлах сетки. Предполагая, что выбрана некоторая подходящая аппроксимация L_m^n для $L(u)$ в узле (m, n), можно построить различные виды схем в зависимости от вида аппроксимации производной по времени. Две простых возможности выбора вместе с соответствующими расчетными схемами (Эймз [1977]) для уравнения (10.2.1) приведены ниже.

$$u_m^{n+1} - u_m^n = kL_m^n, \qquad (10.2.10)$$

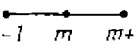


$$u_m^n - u_m^{n-1} = kL_m^n. \qquad (10.2.11)$$



В частном случае, когда $Lu = au_{xx}$, обычная конечно-разностная аппроксимация этого выражения имеет вид

$$L_m = (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)/h^2. \qquad (10.2.12)$$

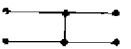


Уравнения (10.2.10) и (10.2.11) известны как простая явная схема и простая неявная схема соответственно. Здесь слово «явный» означает, что значение переменной на каждом $n + 1$ шаге по времени задается непосредственно, в то время как слово «неявный» означает, что для нахождения значения переменной в каждом узле сетки приходится на каждом шаге решать систему алгебраических уравнений. Хотя, казалось бы, последний случай требует больших затрат времени счета, тем не менее получающиеся уравнения имеют простую ленточную структуру, которая позволяет строить очень эффективные методы. Некоторые дополнительные затраты времени, связанные с неявными схемами, обычно уравновешиваются тем, что такие методы часто оказы-

ваются более устойчивыми (см. ниже), и поэтому неявная схема допускает более крупный шаг по времени.

Объединяя (10.2.10) на уровне n и (10.2.11) на уровне $(n+1)$, мы получаем более точную схему Крэнка — Николсона, т. е. еще одну неявную схему:

$$u_m^{n+1} - u_m^n = \frac{1}{2} k \left(L_m^{n+1} + L_m^n\right). \qquad (10.2.13)$$



С другой стороны, мы можем объединить (10.2.10) и (10.2.11) на уровне n и получить трехуровневую схему, так называемую схему с чередованием:

$$u_m^{n+1} - u_m^{n-1} = 2kL_m^n. \qquad (10.2.14)$$



Можно предложить еще одну перестановку, которая дает так называемую схему «классиков» (Гурле [1971]). Эта полезная схема получается применением (10.2.10) для нечетных значений $(n+m)$ на n-м уровне по времени и (10.2.11) для четных значений $(n+m)$ на $(n+1)$-м уровне по времени. Эта хитроумная комбинация делает (10.2.11) явной схемой, поскольку два из трех неизвестных вычисляются на шаге схемы (10.2.10).

Представленные выше вычислительные схемы приведены для случая, когда L — оператор второго порядка и для него применяются простейшие разностные схемы. Для более сложных случаев, например для уравнения КдФ, необходимы некоторые модификации. Кроме того, не все схемы независимы. Например, схема с чередованием (10.2.14) при некоторых обстоятельствах эквивалентна двум последовательным применениям схемы «классиков».

Отметим также гибридный метод, связанный с конечно-разностными схемами, так называемый «метод линий». По этой схеме дискретизируется лишь пространственная переменная, а получающая (большая) система обыкновенных дифференциальных уравнений решается с использованием пакета библиотечных программ. На первый взгляд этот метод представляется привлекательным и простым подходом к численному решению уравнений в частных производных. Однако неудачный выбор программы, решающей обыкновенные дифференциальные уравнения, или сверхоптимистический порог допустимой погрешности могут привести к чрезмерным расходам машинного времени. Этот метод не дает экономии усилий и ресурсов при численном решении задачи, и он должен применяться с известной осторожностью.

Погрешность дискретизации для конечно-разностной схемы определяется как разность между дифференциальным уравнением

в частных производных и его конечно-разностной аппроксимацией. Если эту погрешность разложить в ряд Тейлора по h и k, то можно будет определить порядок схемы как низший порядок входящих в это разложение членов с наименьшими степенями по h и k. Например, для схемы Крэнка — Николсона этот порядок равен двум как по h, так и по k, поскольку погрешность метода в этом случае равна $O(h^2) + O(k^2)$.

Другой гибридный метод, дающий много большую точность, чем метод линий, — это так называемый псевдоспектральный метод. По этой схеме решение также вычисляется на пространственной сетке с использованием простой конечно-разностной схемы по временно́й переменной, но аппроксимации пространственных производных находятся с помощью перехода к пространству фурье-образов. Прямое и обратное преобразование Фурье могут быть эффективно вычислены, если использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Форнберг [1981] показал, что этот метод в некотором смысле эквивалентен конечно-разностной схеме с *бесконечным* порядком точности по пространственному шагу h.

10.2.3. Сходимость, согласованность и устойчивость

Если метод аппроксимирующих функций с локальными базисными функциями выбран и обыкновенные дифференциальные уравнения, порожденные (10.2.6) или (10.2.9), решены с помощью некоторой подходящей дискретизации по времени, то конечный результат представляет собой множество разностных уравнений для коэффициентов $c_m^n = c_m(t_n)$, очень похожих на конечно-разностные уравнения. Какой бы подход ни был выбран, в идеале хотелось бы показать, что метод является сходящимся, т. е. что суммарная погрешность для некоторого фиксированного и конечного значения t стремится к нулю, когда длина шага (расстояние между соседними узлами) стремится к нулю или число функций базиса стремится к бесконечности. К сожалению, доказательство сходимости, даже если оно возможно, обычно является исключительно трудным, и удовлетворительная теория в общем случае развита лишь для линейных дифференциальных уравнений (Мейз и Марковиц [1978]). Большинство разработок, связанных с нелинейными методами, основано на анализе линеаризаций в окрестности некоторых постоянных решений. В дальнейшем мы будем придерживаться такого подхода и обсуждать только необходимые условия для сходимости вместо более хитроумной и технически сложной проблемы достаточности.

Для обеспечения сходимости метод, вообще говоря, должен быть согласованным и устойчивым. Согласованный метод — это

такой, для которого погрешность метода стремится к нулю, когда стремится к нулю длина шага. Иногда этот предел должен быть взят специфическим образом; например, для метода «классиков» предел должен быть таким, что $k/h \to 0$ при $k, h \to 0$. Устойчивость означает, что некоторая норма приближенного решения должна оставаться ограниченной при $n \to \infty$, где $nk = t$ при фиксированном t. Даже устойчивость обычно трудно доказывается для нелинейных дифференциальных уравнений, остается зачастую довольствоваться изучением устойчивости для линеаризованного варианта этих уравнений. Мы дадим здесь простое описание одного подхода к анализу устойчивости, основанного на методе Фурье, и перечислим литературу, по которой читатель может познакомиться с дополнительными подробностями и деталями этого метода и с другими методами анализа устойчивости.

В методе Фурье дискретная аппроксимация u_m^n разлагается на фурье-моды или гармоники и анализируется поведение каждой моды. Типичная мода будет вести себя как $\mu^n \exp(i\beta m)$, где i — квадратный корень из (—1), а β есть дискретная фурье-переменная, меняющаяся в интервале $[0, \pi]$. Подстановка такого члена в разностное уравнение дает уравнение для определения μ как функции β и длины шага в задаче. Необходимое условие для устойчивости состоит в том, что $|\mu| \leqslant 1$ для всех β. Например, подстановка этого члена в простую явную схему (10.2.10) для линейного уравнения теплопроводности дает

$$\mu = 1 - 4\,(k/h^2)\sin^2(\beta/2). \qquad (10.2.15)$$

Мы видим, что для этой схемы требование устойчивости состоит в том, чтобы $k \leqslant h^2/2$. В этом случае мы будем говорить, что схема условно устойчива, т. е. она устойчива лишь тогда, когда шаг по времени k ограничен некоторой функцией от шага по пространству. Мы оставляем читателю в качестве упражнения доказательство того, что для случая уравнения теплопроводности простая неявная схема, схема Крэнка — Николсона и схема «классиков» — все являются безусловно устойчивыми, в то время как схема с чередованием неустойчива для всех конечных k. Однако схема с чередованием оказывается устойчивой для линейного уравнения Шрёдингера при $k \leqslant h^2/4$ и для линейного волнового уравнения при $k \leqslant h$. Для трехуровневых схем, таких как схема с чередованием, метод Фурье ведет к квадратному уравнению для «коэффициента усиления» μ. Хотя в этих простых примерах получающиеся корни легко можно проанализировать, в более сложной ситуации часто оказываются полезными результаты Миллера [1973].

Для систем уравнений коэффициент усиления заменяется матрицей усиления: тогда необходимо показать, что собственные

значения этой матрицы ограничены по абсолютной величине единицей.

Когда требование устойчивости налагает ограничение на величину шага по времени, это приводит к важным практическим последствиям, поскольку для меньших k приходится затрачивать большее машинное время для достижения заданного значения t. Величины k и h ограничиваются также соображениями точности. Эти соображения особенно важны для пространств более высокой размерности.

10.3. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона

Уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = F(u) \tag{10.3.1}$$

для различного выбора функций F играют важную роль в изучении солитонов. Чаще всего рассматривают случаи

$$F(u) = \sin u, \tag{10.3.2}$$

$$F(u) = -u + u^3, \tag{10.3.3}$$

$$F(u) = \pm(\sin u + (1/2)\sin(u/2)). \tag{10.3.4}$$

В гл. 1 и 7 мы подробно изучили уравнение СГ (10.3.2): оно вполне интегрируемо и имеет точные аналитические решения, описываемые взаимодействием N солитонов (кинков). Уравнение φ^4 (10.3.3) также упоминалось в предыдущих главах: оно было названо так по форме лагранжиана, из которого получено (хотя здесь в качестве независимой переменной мы пользуемся u вместо φ!). Эта модель важна в физике твердого тела (Бишоп и др. [1980]) и в физике частиц с высокой энергией (Маханьков [1978]). Двойное уравнение СГ, или ДСГ, вида (10.3.4) со знаком плюс, находит применение в нелинейной оптике (Дакворт и др. [1976], Буллаф и Кодри [1978]); со знаком минус оно применяется в нелинейной оптике и при изучении B-фазы жидкого гелия (Буллаф и Кодри [1978], Китченсайд и др. [1979]). Все эти уравнения имеют кинк-решения с различными асимптотическими значениями при $x \to \pm\infty$ и являются лоренц-инвариантными. Несмотря на сходство этих уравнений, развитые ранее теоретические методы исследования применимы лишь к уравнению СГ (10.3.2). Для других уравнений необходимо численное изучение.

10.3.1. Уравнение СГ

Исторически Перринг и Скирме [1962] были первыми, кто исследовал уравнение СГ численно. Они рассматривали две

простые схемы. Первая — это простая схема с чередованием, эквивалентная

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + r^2\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right) + 2\left(1 - r^2\right)u_m^n - k\sin u_m^n, \tag{10.3.5}$$

где $r = k/h$. Численные тесты и линейный анализ устойчивости показали, что эта схема неустойчива для $k = h$, но было найдено, что уменьшение k до $0.95\,h$ достаточно для устранения этой неустойчивости. Вторая схема связана с представлением этого уравнения в виде пары двух уравнений первого порядка, принимающих вид

$$\begin{aligned} u_x + u_t &= v, \\ v_x - v_t &= \sin u, \end{aligned} \tag{10.3.6}$$

и введением новых переменных η, $\xi = t \pm x$, таких что (10.3.6) приводится к виду

$$u_\eta = \frac{1}{2}v, \quad v_\xi = -\frac{1}{2}\sin u \tag{10.3.7}$$

(так называемой характеристической форме). Поскольку характеристиками в этом случае являются прямые линии, уравнения (10.3.7) можно решить стандартной техникой предиктор — корректор для обыкновенных дифференциальных уравнений (Эймз [1977]). Эта техника, примененная Перрингом и Скирмом, была, вероятно, основана на известном правиле аппроксимации трапециями, которое дает метод второго порядка точности. Хотя он несколько более точен, чем (10.3.5), он требует большей работы, поскольку на каждом шаге по времени необходимы корректирующие итерации.

С использованием обеих схем было исследовано взаимодействие кинков и по данным численных расчетов были введены аналитические формулы. Были исследованы также связанные состояния типа пары кинк — антикинк (бризеры), причем численное исследование показало, что взаимодействие кинка с бризером также устойчиво. Аналитические решения, полученные Перрингом и Скирме на основании их численного расчета, были выведены ранее и независимо Зеегером и др. [1953].

В течение ряда лет интерес к численному исследованию уравнений СГ падал в связи с развитием аналитических результатов, описанных в этой книге. Однако интерес к другим нелинейным уравнениям Клейна — Гордона привел в середине 70-х гг. к возобновлению численных исследований. Одна из наиболее интересных и полезных численных схем, введенная Абловицем, Крускалом и Лейдиком [1979], была простой модификацией (10.3.5).

Они показали, что схему с чередованием можно сделать устойчивой для $k = h$, если вместо u_m^n в последнем члене (10.3.5) взять пространственное среднее $^1/_2(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)$. Это дает для $k = h$

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - h^2 F\{^1/_2(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)\}. \quad (10.3.8)$$

Эта модификация уменьшает число умножений на единицу, но более важно, что член с u_m^n теперь отсутствует и вычисления теперь можно производить по диагональной сетке, привлекая только четные (или нечетные) значения $(n + m)$. Это уменьшает затраты машинного времени в два раза. (Следует обратить внимание на важное с практической точки зрения обстоятельство. Если вычислить результаты на обеих независимых диагональных сетках, то решения на двух различных решетках могут отличаться слегка по фазе, что создает картину осциллирующего решения, похожую на ту, что дает неустойчивая схема. Это еще одна причина, по которой следует оставить только одну из двух сеток.) На практике нужно запоминать только два временных слоя, и окончательная программа оказывается исключительно простой и эффективной. Численные тесты, выполненные Эйлбеком [1978], подтвердили, что по крайней мере для шага среднего размера ($h \approx 0.1$) схема (10.3.8) более эффективна, чем оба метода предиктор-корректор второго и четвертого порядка, основанные на характеристиках. Мы использовали схему (10.3.8) для проведения расчетов, с помощью которых получены все рисунки в этом разделе.

Другая интересная численная схема для нелинейных уравнений Клейна — Гордона была предложена Штрауссом и Вакесом [1978]. Они рассмотрели для одномерного по пространству случая неявную конечно-разностную схему:

$$u_m^{n+1} = -u_m^n + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - \frac{h^2[G(u_m^{n+1}) - G(u_m^{n-1})]}{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}, \quad (10.3.9)$$

где

$$G'(u) = F(u).$$

Эта схема имеет то преимущество, что она сохраняет «энергию», задаваемую выражением

$$E = \frac{h}{2}\sum_m (u_m^{n+1} - u_m^n)^2/h^2 + \frac{h}{2}\sum_m (u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}) \times$$
$$\times (u_{m+1}^n - u_m^n)/h^2 + \frac{h}{4}\sum_m \{(u_m^{n+1})^2 + (u_m^n)^2\} +$$
$$+ \frac{h}{2}\sum_m [G(u_m^{n+1}) + G(u_m^n)]. \quad (10.3.10)$$

На практике схема (10.3.9) дает результаты, очень похожие на те, что получены с помощью более простой схемы (10.3.8), но детального сравнения этих двух схем проведено не было.

Хотя аналитические результаты для уравнений СГ предлагают полное описание решений для неограниченных областей, в реальной жизни уравнения используют для того, чтобы моделировать физические системы с конечными границами и фиксированными граничными условиями. В добавление к этому физические модели часто имеют дополнительные члены, описывающие диссипацию и источники энергии. С этими усложнениями точная теория оказывается невозможной, хотя в отдельных случаях теория возмущений может давать полезные результаты. Для более общих задач численные расчеты оказываются поэтому особенно нужными. Недавно была проведена большая работа, использующая эту технику для моделирования контактов Джозефсона. Некоторые результаты по задачам с конечной границей были сообщены в статьях группы из Салерно, см. Констабиле и др. [1978]. В настоящее время вызывает большой интерес возмущенное уравнение СГ

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u + \alpha u_t - \beta u_{xxt} - \gamma, \qquad (10.3.11)$$

которое моделирует контакты Джозефсона. В этом уравнении член с коэффициентом α представляет диссипацию, а с β отражает влияние поверхностного импеданса; наконец, γ представляет ток смещения, сообщенный системе. Дальнейшие подробности можно найти в статьях Кристиансена и др. [1981], Ломдала и др. [1981] и в диссертации Ломдала [1982], а также в литературе, цитируемой в указанных работах. В этих исследованиях применена неявная конечно-разностная схема второго порядка: детали также можно найти в диссертации Ломдала. Влияние диссипации и тока смещения довольно хорошо предсказывается: кинки соответственно замедляются или ускоряются, и когда присутствуют оба члена α и γ, достигается асимптотическая скорость, при которой оба эти эффекта взаимно компенсируются. Численные результаты в этом случае находятся в хорошем согласии с простыми возмущенными схемами, основанными на гамильтоновом подходе. Численные исследования полного варианта уравнения (10.3.11) демонстрируют другой интересный эффект: моды «гроздевидных флуксонов», в которых два или более кинков связываются вместе и в виде устойчивой конфигурации движутся взад и вперед через контакт Джозефсона. Типичное двухкинковое решение изображено на рис. 10.2.

Заметим, что на этом рисунке изображена пространственная производная $u(x, t)$.

Результаты вычислений, представленные в цитированных выше статьях, также хорошо согласуются с экспериментальными изме-

рениями характеристик (графиков ток — напряжение) и выходной мощности колебаний для реального контакта Джозефсона.

Любителям компьютерных фильмов будет интересно узнать, что многие результаты для возмущенных и невозмущенных уравнений СГ теперь иллюстрируются 16-мм кинофильмом (Эйлбек и Ломдал [1982]). Этот фильм показывает также некоторые реше-

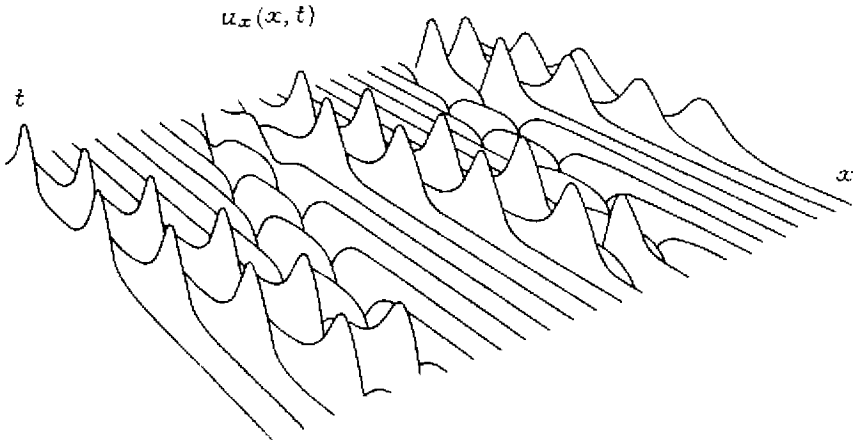


Рис. 10.2. Мода гроздевидных флюксонов в контакте Джозефсона.

ния уравнения СГ в (2 + 1)-мерном пространстве, которые будут обсуждаться в разд. 10.6.

10.3.2. Уравнение фи-четыре

Уравнение φ^4 изучалось многими группами исследователей. Это уравнение имеет решение вида

$$u(x, t) = \pm \operatorname{th}(\xi/\sqrt{2}), \quad \xi = (x - vt)(1 - v^2)^{-1/2}, \quad (10.3.12)$$

где знаки «плюс» или «минус» отвечают кинку или антикинку соответственно. Заметим, что для кинка (антикинка) решение меняется от $u = -1$ ($u = 1$) до $u = 1$ ($u = -1$). В отличие от уравнения СГ уравнение φ^4 имеет лишь два «вакуумных состояния» с нулевой энергией: $u = \pm 1$. Единственные топологически возможные начальные условия, содержащие два кинка, — это комбинация кинка и антикинка.

Кудрявцев [1975] первым опубликовал результаты по численному исследованию столкновения кинка с антикинком для фиксированной скорости относительно центра масс, равной 0.1. Он показал, что при такой энергии два кинка образуют долгоживущее осциллирующее связанное состояние, которое медленно затухает,

излучая энергию до бесконечности. Он сообщил также, что для высоких скоростей столкновения кинки отталкиваются друг от друга, и часть их энергии теряется на излучение. Мы показывали уже для уравнения φ^4 столкновение кинка с антикинком при высокой энергии на рис. 1.14 и при низкой энергии на рис. 1.15. Эти результаты ясно указывают на отсутствие точных солитонных свойств у этого уравнения.

Обри [1976] первым показал, что образование связанного состояния пары кинк—антикинк было не просто пороговым

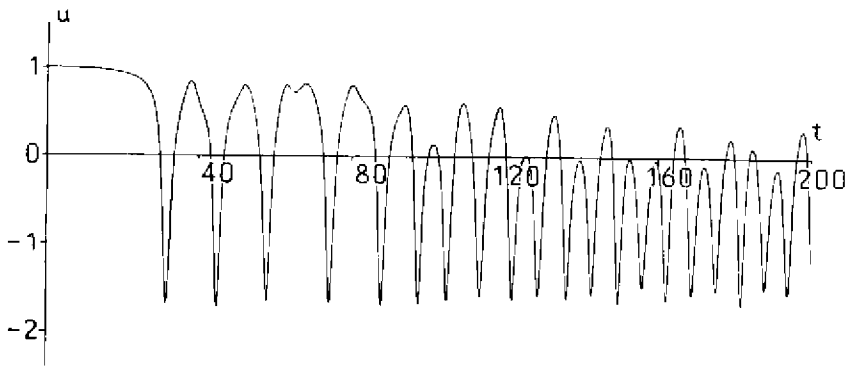


Рис. 10.3. Решение $u(0, t)$ для столкновения кинка с антикинком, $v = 0.1$, модель φ^4.

эффектом, а демонстрировало более сложную зависимость от скорости v относительно центра масс. Последующие исследования приоткрыли удивительно сложную картину взаимодействия кинка с антикинком. Детальное подробное исследование было недавно проведено Кэмпбеллом и сотр. в Лос-Аламосе и к моменту выхода книги еще не было опубликовано. Эта группа провела серию вычислений, используя метод четвертого порядка, на всем диапазоне $0 < v < 1$ с шагом 0.001. Результаты показали, что для $v > 0.258$ кинк и антикинк отскакивают друг от друга, подобно тому, как изображено на рис. 1.14, оставляя позади энергию в виде множества колебательных мод и низкоамплитудного излучения. Для низких скоростей, $v < 0.194$, всегда образуется связанное состояние в виде бризерного решения, как показано на рис. 1.15. На рис. 10.3 показано значение $u(x, t)$ в центре масс как функция от t при таком столкновении. Обратите внимание, что осциллирующее состояние чрезвычайно устойчиво в ходе большого числа осцилляций, несмотря на то что на протяжении всего времени взаимодействия энергия излучается к границам.

Для значений v между 0.193 и 0.258 наблюдается последовательность зон, в которых поочередно два кинка либо отражаются, либо захватываются. На рис. 10.4 и 10.5 показаны результаты двух вычислений, произведенных для значений v, взятых по разные стороны границы между такими зонами.

Заметим, что для $v = 0.223$ после начального столкновения появляется квазиустойчивое осциллирующее состояние. Для случая $v = 0.224$ система, прежде чем разделиться, проходит через две осцилляции. Кэмпбелл и др. сообщили о 8 зонах отражения, разделенных зонами захвата, причем некоторые из зон имели толщину порядка 0.001. Более детальные вычисления открывают еще более тонкую зонную структуру. Кэмпбелл (не опубликовано) выдвинул убедительное теоретическое объяснение для этих окон притягивания и отталкивания, основанное на резонансном механизме, связанном с линейными колебательными модами, возбужденными столкновением кинка и антикинка. Похожие результаты для модифицированного уравнения СГ были сообщены Пейраром и Ремуссене (не опубликовано).

В ходе дальнейших численных исследований лос-аламосской группы, основанных на квазилинеаризации Ньютона—Канторовица, были получены данные, свидетельствующие о существовании точного бризерного решения, подобного бризеру уравнения СГ. Аналитическая форма этого решения пока не найдена, но численные проверки дали веские доказательства его устойчивости.

10.3.3. Двойное уравнение СГ

Мы обратимся теперь к двойному уравнению СГ (ДСГ), рассматривая сначала знак $+$. Оно имеет устойчивое кинковое решение (Абловиц и др. [1979]):

$$\begin{aligned} u &= -4\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{cosec}\theta\right), \\ \theta &= \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(x - vt)\,(1 - v^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{10.3.13}$$

которое может быть представлено в более интересной форме «двойного кинка»:

$$u = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\theta + \Delta\right)\right] + 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\theta - \Delta\right)\right], \tag{10.3.14}$$

где

$$\Delta = \ln\left(\sqrt{5} + 2\right) = 2.1180339\ldots. \tag{10.3.15}$$

Заметим, что хотя решение (10.3.14) выглядит как двойной кинк, оно все же представляет собой одну движущуюся волну с фиксированным значением Δ, заданным формулой (10.3.15). График пространственной производной функции u ясно показывает наличие двойного пика (см. рис. 10.6).

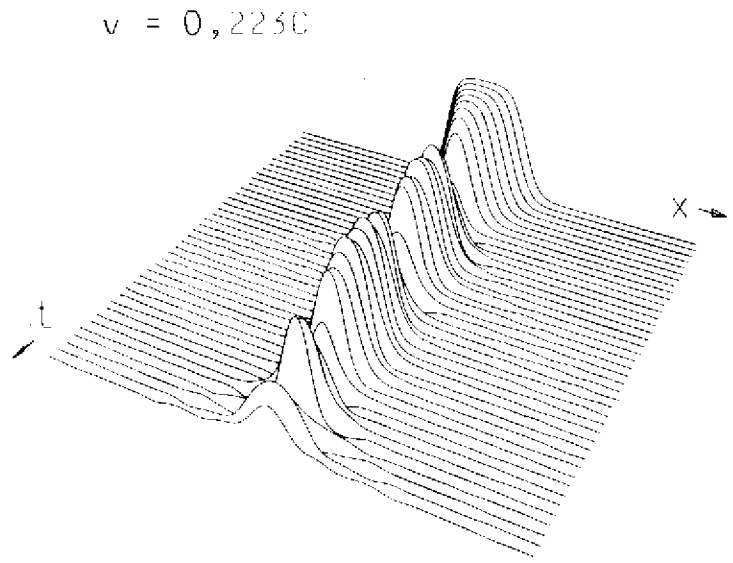


Рис. 10.4. Столкновение кинка с антикинком, модель φ^4, $v = 0.223$.

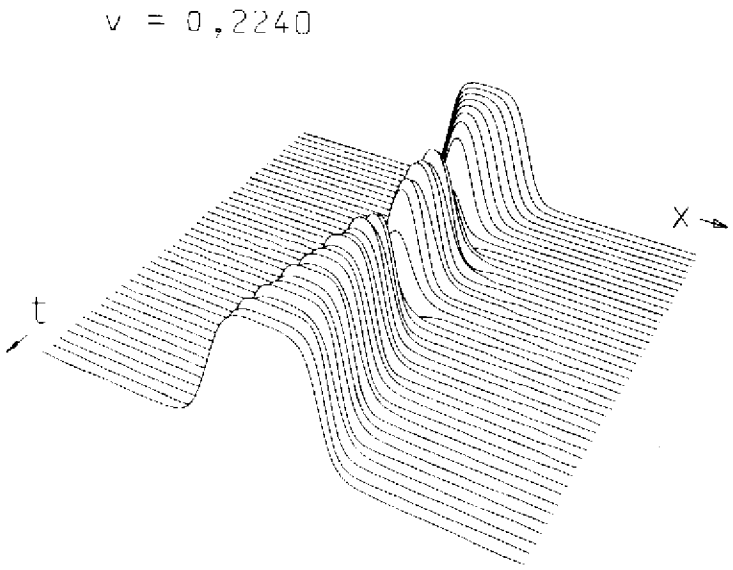


Рис. 10.5. Столкновение кинка с антикинком, модель φ^4, $v = 0.224$.

Кинк (10.3.14) меняет значение u на 4π от любой величины, кратной 4π, до следующей такой величины.

С другим выбором Δ, отличным от приведенного в (10.3.15), решение (10.3.14) больше не является точной движущейся волной. Буллаф и Кодри [1978] изучали численно это уравнение, используя схему высокого порядка предиктор—корректор интегрирования вдоль характеристик. Выбранная ими форма уравнения несколько отличалась от приведенной нами выше, поскольку они изучали уравнение ДСГ в другой координатной системе, связанной с приложениями в нелинейной оптике. Рассматривая малые



Рис. 10.6. График производной по x от решения (10.3.14).

возмущения Δ, они нашли, что расстояние между пиками осциллирует относительно расстояния, разделяющего их в точной движущейся волне, и они назвали такие объекты «вобблерами». Аналитические решения, описывающие такое поведение, еще не найдены. Когда были рассмотрены большие возмущения величины Δ, была обнаружена любопытная форма поведения «чехарда», при которой каждый пик поочередно растет, обгоняет другой, а затем затухает, и такая картина повторяется бесконечно. Было прослежено также за процессом столкновения двух кинков и найдено, что в пределах разумной точности счета кинки ведут себя как настоящие солитоны и восстанавливают свою форму после столкновения. Однако когда сталкиваются кинковое и антикинковое решения, появляются очевидные потери энергии в виде излучения, что позволяет предполагать отсутствие настоящих двухкинковых решений. Это было подтверждено исследованиями Абловица и др.

Абловиц и др. [1979] изучали «плюсовое» уравнение ДСГ более общего вида:

$$F(u) = \sin u + \lambda \sin 2u. \tag{10.3.16}$$

Это уравнение при $\lambda = 2$ можно привести к виду (10.3.4). Эти авторы обнаружили, что при столкновениях кинка с антикинком при высоких скоростях потери энергии с излучением очень малы, но эти потери возрастают при низких скоростях столкновения. Для некоторых значений λ при низких скоростях столкновения

образуются связанные состояния, подобные связанным состояниям, обнаруженным ранее для уравнения φ^4.

Китченсайд и др. [1979] изучали также вариант уравнения ДСГ со знаком минус. В этом варианте имеются две различные формы кинковых решений, одна со скачком $4\pi - 2\delta$, другая — со скачком 2δ соответственно. Аналитически эти решения представляются в виде

$$\begin{aligned} u &= 2\pi + 4\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3/5}\,\operatorname{th}\,\theta/2\right), \\ u &= 4\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5/3}\,\operatorname{th}\,\theta/2\right). \end{aligned} \tag{10.3.17}$$

Здесь постоянная δ равна $2\cos^{-1}(-1/4)$ и $\theta = \varkappa(x - vt)$, $\varkappa = \sqrt{15/16}\,(1 - v^2)^{-1/2}$. При соответствующих граничных условиях только некоторые кинковые и антикинковые начальные конфигурации топологически возможны. Однако число возможных комбинаций все же велико, и мы отсылаем читателя к оригинальной статье, где приведены подробные результаты. Во всех случаях найдено, что кинк-кинковые и кинк-антикинковые столкновения приводят к некоторым потерям энергии на излучение, так что кажется маловероятным, что существуют какие-нибудь точные мультикинковые решения. Как обнаружено в предыдущих случаях, при низких скоростях столкновения могут образоваться бризерные решения (связанные состояния).

10.4. «Длинноволновые» уравнения

Ранее мы уже изучали уравнение КдФ как пример длинноволнового уравнения. В механике жидкости такие уравнения возникают, когда длины волн велики по сравнению с глубиной рассматриваемой жидкости или по сравнению с другими характерными масштабами, встречающимися в задаче. Однако такими физическими предположениями часто пренебрегают в последующем анализе.

10.4.1. Уравнение КдФ и родственные уравнения

В лабораторных координатах уравнение КдФ принимает безразмерный вид:

$$u_t + u_x + u_{xx} + u_{xxx} = 0. \tag{10.4.1}$$

Линейный член u_x можно брать преобразованием к системе координат, движущейся с единичной скоростью, и мы получаем более знакомый вариант уравнения

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{10.4.2}$$

Впервые уравнение КдФ было численно исследовано Забуски и Крускалом (Забуски [1967], Забуски и Крускал [1965]). Они применили следующую конечно-разностную схему с чередованием:

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - \frac{k}{3h}\left(u_{m+1}^n + u_m^n + u_{m-1}^n\right)\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right) -$$

$$- \frac{k}{h^3}\left(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n\right). \qquad (10.4.3)$$

Пространственное усреднение величины u в конечно-разностном приближении для члена uu_x взято с целью сохранения энергии (112) $\sum (u_m^n)^2$ с точностью до членов порядка $O(k^2)$. Условие линейной устойчивости для этой схемы состоит в том (Грейг и Моррис [1976]), что

$$k/h^3 \leqslant (4 + h^2 |u_0|)^{-1} \qquad (10.4.4)$$

и означает, что для сохранения устойчивости необходимо взять очень маленький шаг по времени (здесь u_0 максимальное значение u в интересующей нас области). Свойства нелинейной устойчивости этой схемы интенсивно изучал Ньюэлл [1977]. Обзор конечно-разностных схем для уравнений КдФ появился в статье Влигенгхарта [1971]. Грейг и Моррис [1976] предложили схему «классиков» для этого уравнения. Эта схема имеет менее ограничительное условие устойчивости:

$$k/h^3 \leqslant (2 - h^2 u_0)^{-1}. \qquad (10.4.5)$$

Можно показать, что схема «классиков» дает лишь незначительную погрешность в ее модах Фурье. Однако очевидно, что даже условие (10.4.5) требует малого шага по времени: двухсолитонное столкновение требует 4800 временных шагов для получения точности в конечной амплитуде порядка 1 %.

Применение спектральных и псевдоспектральных методов к уравнению КдФ изучалось Шамелем [1978] и Абе и Ино [1980]. Многие авторы занимались применением метода Галеркина к этому уравнению, например Санс-Серна и Кристи [1981]. Эти авторы использовали кусочно-линейные базисные функции вместе с кубическими пробными функциями для получения метода четвертого порядка по пространству. Они обнаружили, что эта схема с $h = 0.033$ и $k = 0.01$ дает лучшую точность, чем схема Забуски—Крускала с $h = 0.01$ и $k = 0.0005$. Этот впечатляющий результат позволяет предположить, что эта схема является одной из наилучших применяемых в настоящее время для уравнения КдФ. Дальнейшие схемы были описаны в обзоре Шумби [1982].

Другой подход к численному изучению уравнений КдФ был предложен Осборном и Провензале [1981]. В этом исследовании было непосредственно применено преобразование обратной задачи

рассеяния для решения задачи с начальными условиями, когда начальные данные аппроксимируются кусочно постоянными функциями. Это обобщение обычного спектрального метода обещает быть полезным техническим инструментом, с тем исключением, что оно неприменимо для уравнений, для которых не известна обратная задача рассеяния.

Форнберг и Уизем [1978] опубликовали подробности численного исследования уравнения КдФ и родственных уравнений, в особенности имеющих вид

$$u_t + uu_x - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, u_\xi(\xi, t)\, d\xi = 0, \qquad (10.4.6)$$

где ядро $K(x)$ можно выбирать для получения различных дисперсионных эффектов. Эти авторы применили комбинацию псевдоспектрального метода по переменной x и разностную схему с чередованием по t. Этот подход идеально подходит к уравнениям с линейным интегральным членом вроде (10.4.6). Их схема налагала условие устойчивости

$$k/h^3 \leqslant 3/(2\pi^2) \approx 0.152. \qquad (10.4.7)$$

Точность этого метода, по заявлению авторов, высока, однако, к сожалению, непосредственные сравнения с другими схемами отсутствуют. Форнберг и Уизем рассмотрели также уравнение КдФ высшего порядка

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \qquad (10.4.8)$$

и численные расчеты показали, что для $p \geqslant 3$ столкновения солитонов неупруги. Однако результаты для (10.4.6) при $K(x) = -\frac{\pi}{2}\exp(-|x|\pi/2)$ в определенной степени указывают на существование точных двухсолитонных решений. К сожалению, вычисления были проведены с таким шагом, что удалось достичь лишь посредственной точности, и потребуются дальнейшие проверки, прежде чем можно будет с уверенностью утверждать о наличии точного солитонного поведения.

10.4.2. Регуляризованное длинноволновое уравнение

В качестве альтернативы к уравнению КдФ Перегрин [1966] и Бенджамин и др. [1972] предложили так называемое регуляризованное длинноволновое уравнение (РДВ):

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \qquad (10.4.9)$$

Численные схемы для этого уравнения изучали Эйлбек и Магуайр [1975, 1977]. Они построили трехуровневую конечно-

разностную схему, которая устойчива для всех практических значений k, и фактически работает лучше всего при $k = h$. Это означает, что по сравнению с уравнением КдФ в уравнении (10.4.9) при его численном изучении можно выбрать значительно больший шаг по времени. Схему можно сделать консервативной с помощью пространственного усреднения в нелинейном члене, как в схеме (10.4.3).

Численное исследование Эйлбека и Магуайра [1977] показало, что после столкновения двух уединенных волн вновь появляются импульсы, амплитуда которых отличается от их исходной амплитуды не более чем на 0.3 %. На основе этого наблюдения, а также компьютерного фильма, показывающего столкновение двух или трех уединенных волн, был сделан вывод, что уравнение (10.4.9) имеет точные многосолитонные решения. Последовательность кадров, показывающих «трехсолитонное» решение, изображена на рис. 2 из работы Эйлбека [1978].

К сожалению, графические и численные результаты этого исследования недостаточно точны, чтобы выявить неупругое излучение, появляющееся при столкновении двух уединенных волн в этой модели. Абдулаев и др. [1976] показали, что при столкновении очень больших уединенных волн (~ 10) уравнения РДВ появляется очень малый осциллирующий хвост ($\sim 10^{-3}$), который не может быть удовлетворительно объяснен только лишь численными погрешностями. Эти авторы показали, что для уравнений РДВ высшего порядка, отвечающих (10.4.8), неупругость еще более резко выражена. Более яркая демонстрация этого эффекта была достигнута Сантарелли [1978], который использовал тот факт, что (10.4.9) имеет уединенные волновые решения, которые могут двигаться в обоих направлениях. Когда двум движущимся в противоположных направлениях волнам позволяют столкнуться, эффект неупругости оказывается еще большим и появляются дополнительные уединенные волны. Это столкновение «солитона» и «антисолитона» изучалось более подробно Льюисом и Тьоном [1979], которые нашли свидетельства в пользу «резонансных» эффектов и богатую структуру производимых мультисолитонов.

Точность расчетов, демонстрирующих эти неупругие эффекты, проверялась далее с помощью вычислений, использующих более высокие порядки и множество экзотических схем. Халифа [1979] развил метод коллокации четвертого порядка, пользуясь сплайнами четвертого или пятого порядков, для изучения взаимодействия двух уединенных волновых решений уравнения РДВ и нашел малый осциллирующий хвост, предсказанный схемами низшего порядка.

Бона и др. [1980] изобрели численную схему, основанную на перестройке уравнения к интегральной форме. Как можно показать, эта схема оказалась четвертого порядка по пространству

и времени, и авторы строго продемонстрировали существование малых осциллирующих хвостов в области столкновения двух уединенных волн. Большие подробности о схеме и детальное сравнение с экспериментальными результатами для волновых пакетов приведены у Бона и др. [1981].

Хотя сейчас ясно, что двухсолитонные решения для уравнения РДВ не существуют, но, по-видимому, отсутствуют объяснения, касающиеся размеров осцилляционных хвостов. В случаях нелинейного уравнения Клейна—Гордона, обсужденных выше, нарушение точного солитонного поведения всегда заметно резче выражено, по крайней мере для некоторых зон скоростей столкновения. Почему эффект столь мал для случая уравнения РДВ, остается загадкой.

Следует отметить два важных вывода, к которым привело изучение уравнений КдФ и РДВ. Во-первых, при проверке точного солитонного поведения требуется очень тщательный анализ и правильно выбранная численная схема. Во-вторых, для построения эффективной численной схемы, моделирующей физическую ситуацию, необходимо вернуться к исходной математической модели и ввести в нее такие усовершенствования, которые обеспечили бы хорошее поведение численной схемы. Именно по этой причине Перегрин впервые предложил рассмотреть уравнение РДВ.

10.5. Другие уравнения с одной пространственной переменной

Нелинейная оптика всегда представляла собой плодотворную область взаимодействия между экспериментальными результатами, численными исследованиями и аналитической работой. Открытие явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) Макколом и Ханом [1967] повлекло за собой численное и аналитическое изучение уединенных волновых решений соответствующих уравнений для огибающей интенсивного когерентного светового импульса в диэлектрике с низкой плотностью. Другие численные результаты в этой области были сообщены в обзорах Лэма [1971] и Буллафа и др. [1979]. Хотя уравнение для огибающей и приближенные полевые уравнения имеют точные многосолитонные решения, численные изучения точных полевых уравнений Кодри и Эйлбека [1977], основанные на методе предиктор-корректор четвертого порядка, показали, что точное солитонное поведение нарушается при высоких плотностях.

Рациональные конечно-разностные схемы для нелинейного уравнения Шрёдингера, подобные схемы Штраусса—Васкеса для нелинейного уравнения Клейна—Гордона (10.3.9), были предложены Дельфуром и др. [1981]. Гриффитс и др. [1982] пред-

ложили для этого уравнения схему метода конечных элементов, который прекрасно конкурирует с более классическими разностными схемами.

Физика плазмы также дала много нелинейных волновых уравнений с солитоноподобными свойствами. О некоторых интересных исследованиях по уравнениям типа КдФ сообщили Танперт [1974] и Шамель [1979]. Значительная часть работы по солитонным явлениям в плазме была проведена в СССР, и обзоры Маханькова [1978, 1980] являются ценными источниками ссылок. Часть обзора [1978] посвящена численному исследованию различных модификаций уравнения Буссинеска. Обсуждается также нелинейное уравнение Шрёдингера с самосогласованным потенциалом, в особенности в связи с солитоноподобными явлениями в физике плазмы. Во всех случаях модификации основных уравнений вводят некоторую степень неупругости в солитонные взаимодействия. Детали численной схемы, примененной для случая модифицированного уравнения Буссинеска, даны в работе Боголюбского [1977].

Обзоры Маханькова [1978, 1980] содержат также информацию о реалистичных моделях теории поля. Для случая одной пространственной переменной в добавление к уравнению СГ и нелинейному уравнению Клейна—Гордона, описанным в разд. 10.3, там сообщается также о работе с различными системами релятивистских полевых уравнений. Однако наиболее интересные результаты, отраженные в этих обзорах, относятся к пространственно трехмерным расчетам, которые будут обсуждаться в разд. 10.6.

Прежде чем мы перейдем к более высоким пространственным размерностям, стоит упомянуть о работах по нелинейным разностным уравнениям с точными многосолитонными решениями. По существу этот подход состоит в поиске разностной аппроксимации исходного волнового уравнения, которая имела бы точные решения, обладающие многими свойствами аналитических решений исходных уравнений в частных производных. Эти уравнения интересны и сами по себе, поскольку могут также служить полезными численными схемами нового типа. Может также оказаться, что эти уравнения приведут к лучшему пониманию численных методов для нелинейных уравнений и откроют путь к нахождению схем для уравнений, не обладающих многосолитонными свойствами, хотя пока имеется мало свидетельств о прогрессе в этом направлении.

Абловиц и Лейдик [1977] разработали много схем, решаемых методом обратной задачи рассеяния. Хотя эти схемы содержат сложные нелокальные члены, недавняя неопубликованная работа позволяет предположить, что модифицированные варианты этих методов смогут конкурировать с более традиционными

методами. Подробности содержатся в работе Абловица и Сигура [1981]. Хирота посвятил серию статей (см. Хирота [1977]) некоторым простым нелинейным разностным уравнениям, которые имеют точные многосолитонные решения. В качестве примера приведем следующий разностный вариант уравнения СГ:

$$\sin\left[(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n-1}-u_{m+1}^{n-1}-u_{m-1}^{n+1})/4\right]= \\ =h^2\sin\left[(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n-1}+u_{m+1}^{n-1}+u_{m-1}^{n+1})/4\right]. \quad (10.5.1)$$

10.6. Численные исследования для большого числа пространственных измерений

Изучение солитоноподобных решений нелинейных волновых уравнений для двух или более пространственных измерений является в настоящее время исключительно активным полем деятельности. Любой обзор, пытающийся отразить эту деятельность, наверняка окажется неполным и устареет к тому времени, когда читатель откроет эту страницу. За последние несколько лет накопилась масса численных расчетов, относящихся к решениям различных уравнений, а недавние успехи в теории обещают серьезное продвижение в этой области. Однако, как и в случае одной пространственной переменной, похоже, что успехи теории зачастую применимы к другим уравнениям, чем те, для которых имеются интересные численные решения.

С практической стороны трудности, связанные с численным решением двумерной или трехмерной задач, нельзя недооценивать. С помощью достаточно эффективных численных методов можно справиться с зависящими от времени пространственно двумерными задачами, применяя современные высокоскоростные компьютеры, но стоимость вычислений оказывается значительной. В пространственно трехмерных задачах трудности становятся гораздо более выраженными, и для их преодоления требуются самые мощные компьютерные устройства. В некоторых случаях удается свести задачу к одно- или двумерной в предположении цилиндрической или сферической симметрии. Однако растущая доступность высокоскоростных параллельных процессоров (векторных или матричных) несомненно сделает ранее невозможные вычисления осуществимыми.

Почти такой же сложной является проблема представления в наглядном виде результатов численного счета, когда он будет завершен, и здесь требуется весьма сложный в смысле математического обеспечения и аппаратуры графопостроитель. Производимые компьютерами кинофильмы являются идеальным решением этой проблемы, но такие устройства пока доступны далеко не всем пользователям. Производимые компьютерами видеофильмы

неизбежно станут более дешевой альтернативой к кинофильмам, когда будут достаточно распространены соответствующие устройства.

В двумерных и многомерных задачах ожидаемые типы решений могут оказаться более разнообразными по сравнению с одномерным случаем. Естественным обобщением уединенных волновых решений одномерного случая является плоская уединенная волна, имеющая тот же профиль, что и в случае одного измерения, вдоль направления ее движения и обладающая трансляционной инвариантностью вдоль направления, перпендикулярного вектору скорости. Решения такого сорта не вполне физичны, поскольку имеют бесконечную протяженность и бесконечную энергию, но могут существовать между параллельными конечными границами, если они движутся параллельно границе и на границе имеется условие непротекания (нулевой поток через границу).

Когда существуют две (или больше) уединенные плоские волны в бесконечной области, то в области перекрытия образуется сложное взаимодействие. Эта ситуация нелегко поддается численному моделированию, так как для этого необходимо ввести конечные границы, и очевидно, что по крайней мере одна из плоских волн не будет перпендикулярна к границе. Довольно неожиданным является то обстоятельство, что в некоторых специальных случаях можно найти точное аналитическое n-солитонное решение, описывающее взаимодействие плоских уединенных волн, пересекающихся под произвольным углом. При работе с локализованными решениями терминология становится несколько расплывчатой. Точное локализованное солитонное решение есть нечто весьма редкое, и объекты, оказавшиеся наиболее изученными, являются эквивалентами одной уединенной волны, т. е. устойчивыми или «почти устойчивыми» решениями с конечной энергией, которые имеют некоторую поступательную скорость, но дополнительно обычно обладают некоторой внутренней, зависящей от времени структурой. Несмотря на то что эти объекты не вполне устойчивы, даже без рассмотрения взаимодействия с другими решениями, этот тип решений по-прежнему обычно называют солитоном. Такое употребление термина особенно превалирует в физике высоких энергий. Мы предпочитаем сохранять слово «солитон» для тех импульсов, которые обладают точными свойствами устойчивости при столкновениях, и мы будем называть эти более общие типы решений «квазисолитонами» или говорить о «солитоноподобном» поведении.

Много интересных локализованных решений было получено при изучении нелинейных уравнений Клейна—Гордона в двумерных или трехмерных ситуациях. Прежде чем обрисовать некоторые результаты для этих уравнений, мы обсудим ту работу,

которая была выполнена по уравнениям КдФ и НЛШ в двух или трех пространственных измерениях.

10.6.1. Уравнения КдФ и НЛШ в двух и трех пространственных измерениях

Максон и Вьечелли [1974] вывели цилиндрически и сферически симметричные варианты уравнений КдФ для акустических волн малой амплитуды в бесстолкновительной плазме из горячих электронов и холодных ионов. Уравнения имеют вид

$$u_\eta + (k\eta)^{-1}u + uu_\xi + (1/2)\,u_{\xi\xi\xi} = 0, \qquad (10.6.1)$$

где η — времениподобная координата, ξ — радиальная координата и $k = 1, 2$ для сферической и цилиндрической симметрий соответственно. Авторы рассмотрели эволюцию одной уединенной волны, используя конечно-разностную схему с чередованием, основанную на той, что применили Забуски и Крускал для уравнения КдФ. Было найдено, что импульс становится более крутым и узким с течением времени, и этот результат был подтвержден аналитической работой Камберпатча [1978]. После этого Калоджеро и Дегасперис [1978] распространили метод спектрального преобразования обратной задачи на уравнение (10.6.1) для случая $k = 2$. Эта работа подтверждает, что сингулярность в решении развивается за конечное время.

Двумерный вариант уравнения КдФ привлек большое внимание в последние несколько лет. Это так называемое уравнение Кадомцева и Петвиашвили (Кадомцев и Петвиашвили [1970]):

$$(u_t + 6uu_x \pm u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0. \qquad (10.6.2)$$

Его n-солитонное решение нашел Сацума [1976]. Работы Майлза [1977] и Фримана и др. (см. полезную обзорную статью Фримана [1980]) пролили свет на структуру этих решений.

Одно из любопытных применений компьютера заключается в том, чтобы изобразить известные аналитические решения: когда решение сложное, рисунок часто стоит многих страниц аналитических выкладок. На рис. 10.7 изображено трехсолитонное решение уравнения (10.6.2), где в скобке взят знак «+». Видны три плосковолновых солитона, в области взаимодействия которых появляется несколько коротких волн. Имеется фазовый сдвиг в каждом плоском солитоне, порожденный взаимодействием. Этот рисунок соответствует рис. 6а обзора Фримана, в котором читатель может найти дальнейшие подробности.

Еще более интересны решения, которые локализованы в пространстве и обладают конечной энергией. Такой тип решений поддается численному изучению, так как граничные условия для него более просты. Такие локализованные решения для (10.6.2)

(где в скобках был выбран знак минус) впервые получили Манаков и др. [1977]; они подробно описаны в обзоре Фримана. Это были первые точные солитоноподобные решения с устойчивостью по отношению к столкновениям, открытые в пространстве двух измерений. В настоящее время такие решения активно изучаются, но подробное их обсуждение выходит за рамки настоящей книги и может быстро устареть.

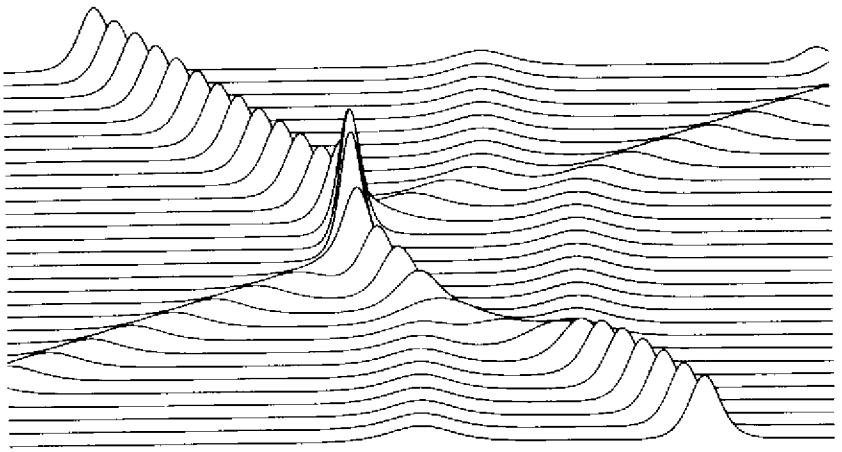


Рис. 10.7. Трехсолитонное решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Уравнение Кадомцева и Петвиашвили численно изучалось также Маханьковым, Литвиненко и Швачкой [1981], которые применили двумерный вариант конечно-разностной схемы «классиков». Однако это исследование касалось лишь неустойчивых линейных солитонов этого уравнения со знаком минус.

Некоторые результаты по уравнению НЛШ в n-мерном пространстве

$$-iu_t + \nabla^2 u + \lambda u \mid u \mid^{p-1} = 0 \qquad (10.6.3)$$

содержатся в обзоре Штрауса [1978]. Он утверждает, что для $\lambda > 0$, $p > 1 + 4/n$ существует начальное условие $u(x, 0)$, такое что решение не сможет существовать для всех t. Если $\lambda < 0$, то решение для $p = 3$ существует для всех времен, единственно и гладко.

Невозможность существования решений в этих случаях не является всего лишь техническим фактом, но имеет важные применения в физике плазмы и нелинейной оптике, где коллапс цилиндрически симметричных лучей ведет к эффектам «схлопывания» или самофокусировки. Такие коллапсы наблюдали при

численных расчетах уравнений НЛШ Конно и Судзуки [1979], Ломдал и др. [1980] и Захаров и Сынах [1976] (см. гл. 7 и 8).

10.6.2. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона в двух и трех пространственных измерениях

Уравнение (10.3.1), описанное в разд. 10.3, легко обобщить на пространства более высокой размерности,

$$\nabla^2 u - u_{tt} = F(u), \tag{10.6.4}$$

где ∇^2 — лапласиан в n-мерном пространстве. В этой форме уравнения по-прежнему обладают лоренцовой инвариантностью и сохраняют энергию

$$E = \int \left((1/2)\, u_t^2 + (1/2)\,|\nabla u|^2 + G(u)\right) dx, \tag{10.6.5}$$

где $G' = F$. Регулярность решений уравнения (10.6.4) обсуждал Штраусс [1978]. При $F(u) = -u + u^3$ (уравнение φ^4) уравнение не имеет решений «взрыва» за конечное время. Решения уравнений СГ (10.3.2) ведут себя хорошо в том смысле, что наследуют гладкость начальных условий. Для других нелинейных уравнений Клейна—Гордона поведение решений чувствительно к природе нелинейного члена $F(u)$. Например, некоторые решения уравнения для $F(u) = u - u^3$ могут взрываться за конечное время.

В большинстве численных исследований уравнения (10.6.4) рассматривался случай $n = 3$ и предполагалась сферическая или цилиндрическая симметрия. В условиях сферической симметрии (10.6.4) принимает вид

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - u_{tt} = F(u). \tag{10.6.6}$$

Для численных расчетов часто удобно ввести подстановку $v = ru$ и получить уравнение

$$v_{rr} - v_{tt} = rF(v/r). \tag{10.6.7}$$

Для такой формы уравнения мы можем использовать те же самые численные схемы, что и в разд. 10.3, с модифицированной правой частью (10.6.7).

Известно, что не существует устойчивых стационарных решений лоренцево-инвариантных скалярных полевых уравнений (Деррик [1964]). Однако этот результат не исключает зависящих от времени осциллирующих решений.

Первое нелинейное уравнение Клейна—Гордона, которое изучалось в предположении сферической симметрии, было уравнение φ^4. Боголюбский и Маханьков [1976] выбрали в качестве начального условия «стационарное» кинковое решение

$$u(r, 0) = \operatorname{th}\left[(r - R)/\sqrt{2}\right], \quad R \gg 1. \tag{10.6.8}$$

Это сферический кинк, который становится точным стационарным решением только в пределе при $R \to \infty$.

С этими начальными условиями сферический кинк вначале коллапсирует в направлении начала координат. Вблизи начала координат возникают бурные осцилляции, во время которых кинк отражается, и далее кинк возвращается к состоянию, близкому к начальным условиям, хотя некоторая энергия в виде осцилляций с малой амплитудой излучается по направлению к бесконечности. Затем весь цикл повторяется. Поскольку энергия теряется на каждом цикле, процесс не может продолжаться бесконечно, и в конечном счете после большого числа осцилляций кинк коллапсирует полностью, разразившись финальной вспышкой излучения. Число осцилляций довольно сложным образом зависит от значения R. Существование таких квазиустойчивых пульсаций привело к названию «пульсон» для импульсов, демонстрирующих такое поведение.

Боголюбский и Маханьков [1977] изучали также решения в виде пульсонов для уравнения СГ и обнаружили сходное поведение. В этом случае имеется дополнительная возможность для образования пульсонов, которые принимают вначале форму двойного или множественного кинка. Эти пульсоны были исследованы Боголюбским [1977]; он показал, что начальный двойной кинк относительно устойчив, но в конечном итоге переходит в одинарный пульсон, который имеет сходное время жизни. Уравнения СГ с вращательной симметрией изучались независимо Кристиансеном и Ольсеном [1978], а дальнейшее изучение взаимодействий кинк—кинк и пульсон—пульсон в пространстве двух измерений было предпринято Кристиансеном и Ломдалом [1981]. Численная техника, использованная в этом последнем исследовании, была простым распространением конечно-разностной схемы (10.3.8). В пространстве размерности два она сводится к виду

$$u_{lm}^{n+1} = -u_{lm}^{n-1} + \frac{1}{2}\left(u_{l,\,m+1}^{n} + u_{l,\,m-1}^{n} + u_{l-1,\,m}^{n} + u_{l+1,\,m}^{n}\right) - \\ - (h^2/2)\,F\left[\frac{1}{4}\left(u_{l,\,m-1}^{n} + u_{l,\,m-1}^{n} + u_{l-1,\,m}^{n} + u_{l+1,\,m}^{n}\right)\right]. \tag{10.6.9}$$

Здесь дополнительная пространственная переменная y_l заменяется на lh, и шаг по времени k для этой схемы равен $h/\sqrt{2}$, при этом сохраняется условие линейной устойчивости. Снова необходима только диагональная решетка, которая уменьшает в два раза как память, так и требуемое время счета. Эту схему с небольшими усовершенствованиями легко приспособить к параллельным компьютерам. Но и на сериальном компьютере она показала свою надежность и эффективность. На рис. 10.8 показаны

некоторые начальные стадии в эволюции пульсонов уравнения СГ, взятые из фильма Филбека и Ломдала [1982]. На этом рисунке $\sin(u/2)$ изображена как функция от x и y для последовательных значений t.

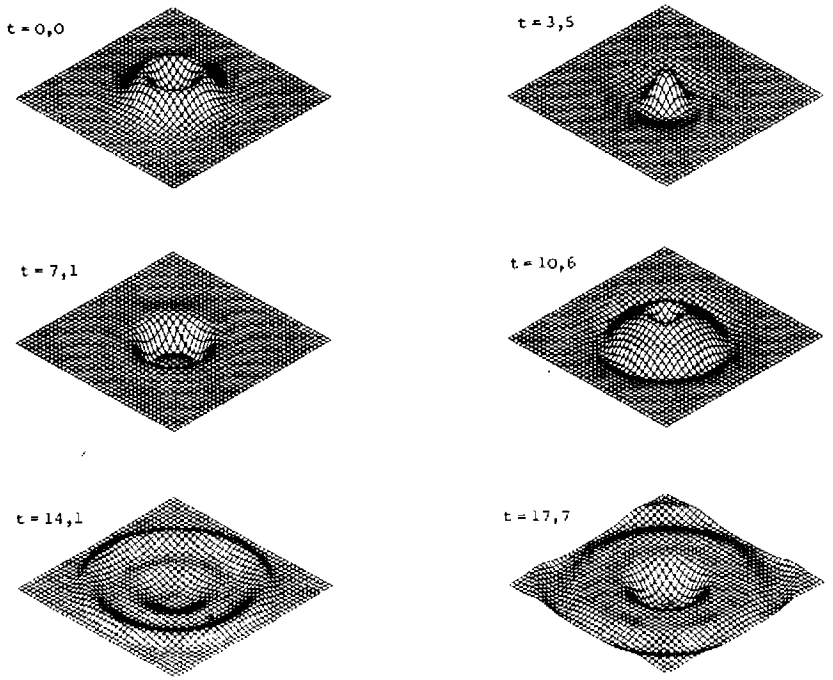


Рис. 10.8. Пульсонное решение уравнения СГ.

В добавление к уравнениям φ^4 и СГ группа из ОИЯИ в Дубне изучала некоторые другие уравнения, в частности два уравнения:

$$F(u) = u - u^3, \tag{10.6.10}$$

$$F(u) = u - u|u^2|/(1 + |u|^3). \tag{10.6.11}$$

Эта работа была описана в обзорах Маханькова [1978, 1980].

Наиболее интересное исследование группы ОИЯИ относилось к распространению численного моделирования на задачи, связанные с лобовым столкновением двух пульсонов для различных уравнений в двух и трех пространственных измерениях (предполагая цилиндрическую симметрию в последнем случае). Некоторые подробности этих исследований приведены в обзоре Маханькова [1980], и мы отсылаем читателя к текущей литературе, если он желает познакомиться с развитием этой интересной об-

ласти. Маханьков и др. классифицировали следующие качественно различные возможности взаимодействий:
— упругие и слабонеупругие взаимодействия;
— разрушение после столкновения;
— затухание через резонансное состояние;
— появление долгоживущих связанных состояний.

Наконец, последняя интригующая возможность — это образование *устойчивых* связанных состояний в результате столкновения двух *неустойчивых* пульсонов (Маханьков, Куммер и Швачка [1980]).

10.7. Примечания

Раздел 10.2

В уравнении (10.2.5) необходима некоторая осторожность в связи с действием L на базисные функции $\varphi_i(x)$. Если в качестве функций $\varphi_i(x)$ выбираются «шапочки», то производные второго порядка по пространственной переменной в (10.2.5) следует понимать как обобщенные функции. В методе Галёркина $r(x, t)$ появляется под знаком интеграла; таким образом, получающиеся уравнения для c_i корректно определены. Для того чтобы использовать этот подход для метода коллокации, необходимо, чтобы базисные функции обладали достаточным числом производных, так что для оператора L второго порядка нам необходимо работать с кусочно гладкими кубическими или квадратичными многочленами.

Раздел 10.3

Одно из наиболее заметных упущений этой главы заключается в том, что в ней отсутствуют упоминания о роли численных исследований уравнения СГ и других уравнений в задачах физики твердого тела. Хорошее введение в эту область содержится в обзоре Бишопа и др. [1981] и в издании оксфордской конференции по солитонам и конденсированным состояниям вещества (Бишоп и Шнейдер [1978]). Серьезный вклад в эту область внесли Шнейдер и Штолл и сотрудники исследовательских лабораторий IBM в Цюрихе. Можно рекомендовать заинтересованному читателю, например, обзоры по статическим и динамическим свойствам дискретизированных цепочек СГ и φ^4 (Шнейдер и Штолл [1980, 1981]), в которых представлены детали классической статистической механики таких систем.

Недавние численные исследования по уравнениям СГ с гармоническими вынуждающими членами открыли в некоторых случаях появление хаоса. В работе Эйлбека, Ломдала и Ньюэлла [1981] для достижения этого эффекта была введена пространственно неоднородная вынуждающая сила, в то время как в недавней работе

Труллинджера (не опубликована) демонстрировалось появление хаоса при однородной вынуждающей силе, но с неоднородными начальными условиями.

Раздел 10.4

Пен-Ю и Санс-Серна [1981] доказали сходимость ряда методов для уравнения КдФ, включая некоторые методы конечных разностей и конечных элементов, описанные в этом разделе.

Раздел 10.5

Обсуждение солитонов Давыдова на альфа-спиральных белковых молекулах содержалось в разд. 9.6. Численные исследования в таких дискретных системах оказались необходимым инструментом в изучении транспорта энергии вдоль таких молекул. Ссылки на новые работы в этой области можно найти у Скотта [1982].

Литература

Ко времени написания (октябрь 1982) этой книги появилось несколько других книг и сборников статей, посвященных солитонам и связанным с ними вопросам (Лэм [1980], Буллаф и Кодри (ред.) [1980], Эйленбергер [1980], Абловиц и Сигур [1981], Экхаус и Ван Хартен [1981], Тода [1981], Калоджеро и Дегасперис [1982]). В каждой из них в разной степени представлены физическая интуиция, математическая строгость, приложения и т. д., так что выбор зависит от интересов читателя. Некоторые другие книги по нелинейным волнам, содержащие вводный материал и обсуждения солитонной теории, — это монографии Бхатнагара [1979], Карпмана [1973], Уизема [1974]. Введение в теорию преобразований Бэклунда можно найти у Андерсона и Ибрагимова [1979]. В дополнение к этому имеется растущий список изданий конференций, посвященных частично или полностью солитонной теории: Бишоп и Шнейдер [1978], Боути и др. [1980], Калоджеро [1978], Лейбович и Сибас [1974], Лонгрен и Скотт [1978], Миура [1976], Мозер [1975], Ньюэлл [1974], Ранада [1979].

Наблюдательный читатель может заметить, что некоторые из этих ссылок в тексте не встречались, однако мы включили их в список, потому что они могут оказаться полезными, хотя они не оказались под рукой к тому времени, когда книга была завершена. Естественно, наш выбор был нерегулярным и неполным, и мы приносим извинения тем авторам, работы которых мы неумышленно пропустили.

Абдулаев, Боголюбский, Маханьков

Abdulaev, Kh. O., Bogolubsky, I. L., Makhancov, V. G. (1976) «One more example of inelastic soliton interaction», Phys. Lett., 56A, 427—428.

Абе, Ино

Abe, K., and Inoue, O. (1980) «Fourier expansion solution of the KdV equation». J. Comp. Phys., 32, 202—210.

Абловиц, Кауп, Ньюэлл

Ablovitz M. J., Kaup D. J., and Newell A. C. (1974) «Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomena». J. Math. Phys. 15, 1852—1858.

Абловиц, Кауп, Ньюэлл, Сигур

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., and Segur H. (1973) «Method for solving the sine—Gordon equation». Phys. Rev. Lett., 30, 1262—1264.

(1973) «Nonlinear evolution equations of physical significance.» Phys. Rev. Lett., 31, 125—127

(1974) «The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems», Studies in Appl. Math., 53, 249—315.

Абловиц, Крускал, Лейдик

Ablowitz M. J., Kruskal M. D. and Ladic J. F. (1979) «Solitary wave collisions», SIAM J. Appl. Math., 36, 428—437.

Абловиц, Крускал, Сигур

Ablowitz M. J., Kruskal M. and Segur H. (1979) «A note on Miura's transformations», J. Math. Phys., 20, 999—1003.

Абловиц, Лейдик

Ablowitz M. J. and Ladic J. F. (1977) On the solution of a class of nonlinear partial difference equations», Studies in Appl. Math., 57, 1—12.

Абловиц, Рамини, Сигур

Ablowitz M. J., Ramini A. and Segur H. (1978) «Nonlinear evolution equations

and ordinary differential equations of Painleve type», Lett. Nuovo Cim., 23, 333—8.

(1980) «A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P—type», I. J. Math. Phys., 21, 715—721.

Абловиц, Сигур

Ablowitz M. J. and Segur H. (1977) «Asymtotic solutions of the KdV equation», Studies in Appl. Math., 57, 13—44.

(1980) «Solitons and Inverse Spectral Transform», Philadelphia: SIAM. [Имеется перевод: М. Абловиц и Х. Сигур (1987). Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.]

Агранович З. С., Марченко В. А. (1960). Обратная задача теории рассеяния. — Изд. Харьковского университета, Харьков.

Айнс

Ince E. L. (1956) «Ordinary differential equations», New York: Dover.

Андерсон, Ибрагимов

Anderson L. and Ibragimov N. H. (1979) «Lie—Bäclund transformations in applications», Amsterdam, North—Holland.

Анкер, Фриман

Anker D. and Freeman N. C. (1978) «On the soliton solutions of the Davey—Stewartson equations for long waves», Proc. Royal Soc. Lond., A360, 529—40.

(1978) «Interpretation of three—soliton interactions in terms of resonant triads», J. Fluid. Mech., 87, 17—31.

Арафуне, Фройнд, Гёбель

Arafune J., Freund A. G. and Göebel C. J. (1975) «Topology of Higgs fields», J. Math. Phys., 16, 433—7.

Асано, Таниути, Ядзима

Asano N., Taniuti T. and Yajima N. (1969) «Perturbation method for nonlinear wave modulation II», J. Math. Phys., 10, 2020—24.

Аскарян Г. А. (1974). Явление самофокусировки. — УФН, 16, 680—686.

Баргманн

Bargmann V. (1949) «On the connection between phase shifts and scattering potential», Rev. Mod. Phys., 21, 488—493.

Бардин, Купер, Шриффер

Bardeen J., Cooper L. N., and Schrieffer J. R. (1957) «Theory of superconductivity», Phys. Rev., 108, 1175—1204.

Барон, Эспозито, Мэги, Скотт

Barone A., Esposito F., Magee C. J., and Scott A. C. (1971) «Theory and applications of the sine-Gordon equation», Riv. Nuovo. Cimento, 1, 227—267.

Белинский В. А., Захаров В. Е. (1978). Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи и вычисление точных солитонных решений. — ЖЭТФ, 75, № 6, с. 1953—1971.

Бендер, Орзаг

Bender C. and Orszag S. (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers», N—Y,: McGraw Hill.

Бенджамин

Benjamin T. B. (1967) «Instability of periodic wave-trains in nonlinear dispersive systems», Proc. Royal Soc. Lond., A299, 59—75.

(1972) «The stability of solitary waves», Proc. Royal Soc. Lond., A328, 153—183.

Бенджамин, Бона, Маони

Benjamin T. B., Bona J. G., and Mahoney J. J. (1972) «Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems», Phil. Trans. Roy. Soc. 272A, 47—78.

Бенджамин, Фейр

Benjamin T. B. and Feir J. E. (1967) «The disintegration of wave trains in deep water», Part I, J. Fluid Mech., 27, 417—30.

Бенни

Benney D. J. (1976) «Significant interactions between long and short waves», Studies in Appl. Math., 55, 93—106.

(1977) «A general theory for interactions between long and short waves», Studies in Appl. Math., 56, 81—94.
Бенни, Ньюэлл
Benney D. J. and Newell A. C. (1967) «The propagation of nonlinear wave envelopes», J. of Math. and Phys., 46, 363—93.
Бенни, Роскес
Benney D. J. and Roskes G. J. (1969) «Wave Instabilities», Studies in Appl. Math., 48, 377—85.
Берд, Фредман
Byrd P. F. and Friedman M. D. (1971) «Handbook of elliptic integrals», Berlin: Springer. 2nd. ed., revised.
Березин Ю. А., Карпман В. И. (1964). Теория нестационарных волн конечной амплитуды в плазме с низкой плотностью. — ЖЭТФ, 46, № 5, 1880—1886.
Березин Ю. А., Карпман В. И. (1966). Нелинейная эволюция возмущений в плазме и других диспергирующих средах. — ЖЭТФ, 51, № 5, 1557.
Беркшир, Гиббон
Berkshire F. H. and Gibbon J. D. (1982) «Blow—up in the NLS equation — a parallel with the N-body problem», Imperial College Math. Dept. preprint, submitted to Studies in Appl. Math.
Бернстайн
Bernstein J. (1974) «Spontaneous Symmetry breaking, gauge theories, The Higgs mechanism and all that», Rev. Mod. Phys., 46, 7—48.
Берчналл, Чонди
Burchnall J. L. and Chaundy T. W. (1922) «Commutative ordinary differential operators», Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21, 420—440.
Бишоп
Bishop A. R. (1979) «Solitons in condensed matter physics», Physica Scripta, 20, 409—423.
Бишоп, Крумхансл, Труллинджер
Bishop A. R., Krumhansl J. A. and Trullinger S. F. (1980) «Solitons in condensed matter: a paradigm», Physica D, 1, 1—44.
Бишоп, Шнейдер
Bishop A. R. and Schneider T. (1978) «Solitons and Condensed Matter Physics», Berlin: Springer. Springer Series in Solid State Sciences 8.
Бли, ван дер
Blij. F. van der (1978) «Some detail of the history of Korteweg—de Vries equation», Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 26, 56—64.
Блох
Bloch F. (1946) «Nuclear induction», Phys. Rev., 70, 460—474.
Боголюбский
Bogolubsky I. L. (1977) «Some examples of inelastic soliton interaction», Comp. Phys. Comm., 13, 149—155.
Боголюбский И. Л., Маханьков В. Г. (1977). Динамика сферически симметричных пульсонов большой амплитуды. — Письма в ЖЭТФ 25, вып. 2, с. 120—122.
Боголюбский, Маханьков, Швачка
Bogolubsky I. L., Makhankov V. G. and Shvachka A. B. (1977) «Dynamics of the collisions of two space-dimentional pulsons in field theory», Phys. Lett., 63A, 225—227.
Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, (1974).
Богомольный Е. Б. (1976). Устойчивость классических решений. — Ядерная физика 24, вып. 4, с. 861—870.
Боити, Пемпинелли, Солиани
Boiti M., Pempinelli F. and Soliani G. (Eds) (1980) «Nonlinear evolution equations and dinamical systems», Berlin: Springer. Lecture notes in physics, Vol. 120.
Болл

Ball J. M. (1977) «Remarks on blow-up and non-existence theorems for nonlinear evolution equations», Quart. J. of Math. (Oxford), 28, 473—486.
Бона, Притчард, Скотт
Bona J. L., Pritchard W. C. and Scott L. R. (1980) «Solitary—Wave interaction», Phys. Fluids, 23, 438—441.
(1981) «An evaluation of a model equation for water waves», Phil. Trans. Roy. Soc., 302, 457—510.
Бона, Смит
Bona J. L. and Smith R. (1975) «The initial value problem for the KdV equation», Phil. Trans. Roy. Soc., A278, 255—604.
Борг
Borg G. (1949) «Uniqueness theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0$», In Johan Grundt (Ed), Proceeding of the Eleventh Congress of Scandinavian Mathematicians, held at Trondheim, August 22—25,: Tanums Forlag.
Буллаф
Bullough R. K. (1978) «Solitons», Phys. Bull., 29, 78—82.
Буллаф, Джек, Китченсайд, Содерс
Bullough R. K., Jack P. M., Kitchenside P. W. and Sauders R. (1979) «Solitons in laser physics», Physica Scripta, 20, 364—381.
Буллаф, Кодри
Bullough R. K. and Caudrey P. J. (1978) «The multiple sine-Gordon equations in nonlinear optics and in liquid He», In Calogero F. (Ed), Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, London: Pitman.
(Eds) (1980) «Solitons», Berlin: Springer. Topic in Current Physics, Vol. 17. [Имеется перевод: Солитоны. — М.: Мир, 1983.]
Буллаф, Кодри, Эйлбек, Гиббон
Bullough R. K., Caudrey P. J., Eilbeck J. C. and Gibbon J. D. (1974) «A general theory of self-induced transparency», Opto-electronics, 6, 121—140.
Буссинеск
Boussinesq J. (1872) «Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'une canal rectangulaire horisontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surfase au fond», J. Math. Pures. Appl., ser. 2, 17, 55—108.
Бхатнагар
Bhatnagar P. L. (1979) «Nonlinear waves in one-dimentional dispersive systems», Oxford: Clarendon Press.
Бэклунд
Bäclund A. V., (1875) «Einiges über Curven und Flachentransformationen», Lund Universitets Arsskrift», 10, 1—12.
Бялиницки-Бируля, Мисельски
Bialynicki-Birula I. and Mycielski J. (1979) «Gaussons: solitons of the logarithmic Schrödinger equation», Physica Scripta, 20, 539—544.
Вадати
Wadati M. (1972) «The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation», J. Phys. Soc. Japan, 32, 1681.
Вадати, Тода
Wadati M. and Toda M. (1972) «The exact n-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation», J. Phys. Soc. Japan, 32, 1403—1411.
Вайссман
Weissman M. (1979) «Nonlinear wave packets in the Kelvin—Helmholz instability», Phil. Trans. Roy. Soc., 290, 639—681.
Васими, Таниути
Washimi M. and Taniuti T. (1966) «Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude», Phys. Rev. Lett., 17, 996—8.
Вейланд, Вильхельмссон
Weiland J. and Wilhelmsson H. (1977) «Coherent nonlinear interaction of waves in

plasmas», Oxford: Pergamon, International Series in Natural Philosophy, Vol. 88.
Вейланд, Итикава, Вильхельмссон
Weiland J., Ichikawa Y. H. and Wilhelmsson H. (1978) «A perturbation expansion for the NLS equation with application to the influence of nonlinear Landau damping», Physica Scripta, 17, 517—22.
Вейнгарден
Wijngaarden L. A. (1968) «On the equation of motion for mixture of liquid and gas bubbles», J. Fluid Mech., 33, 465—74.
Влигентхарт
Vliegenthart A. C. (1971) «On finite-difference methods for the KdV equation», J. Engrg, Math., 51, 137—155.
Гарабедян
Garabedian R. R. (1964) «Partial differential equations», New York: J. Wiley.
Гарднер
Gardner C. S. (1971) «Korteweg de Vries equation and generalizations IV. The Korteweg de Vries equation as a Hamiltonian system», J. Math. Phys., 12, 1548.
Гарднер, Грин, Крускал, Миура
Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M. (1974) «Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods of exact solutions». Comm. Pure Appl. Math., 27, 97—133.
(1967) «Method for solvingithe Korteweg-de Vries equation», Phys. Rev. Lett., 19, 1095—1097.
Гарднер, Морикава
Gardner C. S. and Morikawa G. M. (1969) «Similarity in the asymptotic behavious of collision free hydromagnetic wave and water waves». Report NYO—9082, Courant Inst. of Math. Sciences.
Гельфанд И. М., Дикий Л. А. (1975) «Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега-де Фриса». — УМН, т. 30, № 5, 67—100.
(1976) «Структура алгебры Ли в формальном вариационном исчислении». Функц. анализ и его прил., т. 10, 16—22.
(1976) «Дробные степени операторов и гамильтоновы системы». — Функц. анализ и его прил., т. 10, 13.
(1977) «Резольвента и гамильтоновы системы». — Функц. анализ и его прил., т. 11, 11.
(1978) «Исчисление струй и нелинейные гамильтоновы системы». — Функц. анализ и его прил., т. 12, 8—21.
Гельфанд И. М., Левитан Б. М. (1951) «Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции». — Изв. АН СССР (сер. мат.), т. 15, № 4, 309—360.
Гетманов В. С. (1977) «Новая лоренцево инвариантная система с точными многосолитонными решениями». — Письма в ЖЭТФ, т. 25, 119—122.
Гиббон, Джеймс, Мороз
Gibbon J. D., James I. N. and Moroz I. M. (1979) «An example of soliton behaviour in a rotating baroclinic fluid», Proc. Roy. Soc. Lond., 367A, 219—237.
(1979) «The sine Gordon equation as a model for a rapidly rotating baroclinic fluid», Physica Scripta, 20, 402—408.
Гиббон, Корди, Буллаф, Эйлбек
Gibbon J. D., Caudrey P. J., Bullough, R. K. and Eilbeck J. C. (1973) «An N-soliton solution of a nonlinear optics equation derived by a general inverse method», Lett. Nuovo Cim., 8, 775—779.
Гиббон, Магиннес
Gibbon J. D. and McGuinness M. J. (1980) «Nonlinear focusing and the Kelvin—Helmholtz instability», Phys. Letts., 77A, 118—21.
(1980) «A derivation of the Lorenz equations for some dispersively unstable flows», Phys. Letts., 77A, 295—299.
(1981) «Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physi-

cal systems», Proc. Roy. Soc. Lond., A377, 165—219.
(1982) «The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers», Physica D, 5, 108—122.
Гиббон, Эйлбек
Gibbon J. D. and Eilbeck J. C. (1972) «A possible N-soliton solution for a nonlinear optics equation», J. Phys. A: Gen. Phys., 5, L22—L24.
Гиббс, Слашер
Gibbs H. M. and Slusher R. E. (1972) «Sharp line self-induced transparency», Phys. Rev. 6, 2326—2334.
Гийемин, Поллак
Guillemin V. and Pollack A. (1974) «Differential topology», New York: Prentice Hall.
Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. (1950) «К теории сверхпроводимости». — В собрании работ Л. Д. Ландау, т. II, 126—152.
Годдард, Ньютс, Олив
Goddard P., Nuyts J. and Olive D. (1977) «Gauge theories and magnetic charges», Nucl. Phys., B125, 1—28.
Голдберг, Шей
Goldberg A. and Schey H. M. (1967) «Computer—generated motion pictures of one-dimensional quantum-mechanical transmission and reflection phenomena», Am. J. Phys., 35, 177—186.
Голдстайн
Goldstein H. (1980) Classical Mechanics (2nd. Ed.), New York: Addison Wesley.
Горьков Л. П. (1959) «Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга — Ландау в теории сверхпроводимости». — ЖЭТФ, т. 9, 1364—67.
(1960) «Теория сверхпроводящих сплавов в сильных магнитных полях вблизи критической температуры». — ЖЭТФ, т. 10, 998—1004.
Горьков Л. П., Элиашберг Г. М. (1969) «Сверхпроводящие сплавы в сильно переменном поле». — ЖЭТФ, т. 29, 698—703.
Готтлиб, Орзаг
Gottlieb D. and Orszag S. A. (1977) «Numerical Analysis of Spectral Methods», Philadelphia: SIAM conference series in Applied Mathematics.
Готтфрид
Gottfried K. (1966) Quantum Mechanics. New York: Benjamin.
Грейг, Моррис
Greig I. S. and Morris J. Ll. (1976) «A hopscotch method for the KdV equation», J. Comp. Phys., 20, 64—80.
Гримшоу
Grimshaw R. H. J. (1977) «The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion», Studies in Appl. Math., 56, 241—266.
Гринспан
Greenspan H. (1968) «Theory of rotating fluids», Cambridge University Press.
Гриффитс, Митчелл, Моррис
Griffiths D. F., Mitchell A. R. and Morris J. Ll. (1982) «A numerical survey of the nonlinear Schrödinger equation», University of Dundee preprint, 1982, submitted to Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.
Гришин, Катушев, Махалдиани, Швачка
Grishin V. E., Katyshev Yu. V., Makhaldiani N. V. and Shvachka A. B. (1980) «Interaction dynamics and nontopological solution stability in a essentially nonlinear model of a complex scalar field», Phys. Lett., 78A, 423—428.
Гурли
Gourlay A. R. (1971) «Some recent methods for the numerical solution of time-dependent partial differential equations», Proc. Roy. Soc. Lond., A, 323, 219—235.
Давыдов А. С. (1971) «Теория молекулярных экситонов».
Давыдов
Davydov A. S. (1979) «Solitons in molecular systems», Physica Scripta., 20, 387—394.

Давыдов А. С., Кислюха Н. И. (1976). «Солитоны в одномерных молекулярных цепях». — ЖЭТФ,
Дакворт, Буллаф, Кодри, Гиббон
Duckworth S., Bullough R. K., Caudrey P. J. and Gibbon J. D. (1976) «Unusual soliton behaviour in the self-induced transparency of 0 (2) vibration-rotation transitions», Phys. Lett., 57A, 19—22.
Дашен, Хасслахер, Невё
Dashen R., Hasslacher B. and Neveu A. (1974) «Non-perturbative methods and extended hadron models in field theory: I Semiclassical functional methods», Phys. Rev., D, 10, 4114—29.
(1975) «Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques», Phys. Rev. D, 11, 3424—50.
Де Вега, Шапошник
De Vega H. J. and Schaposnik F. D. (1976) «Classical vortex solutions of the abelian Higgs model», Phys. Rev. D, 14, 1100—6.
Дейви
Davey A. (1972) «The propagation of a weak nonlinear wave», J. Fluid Mech., 53, 769—81.
Дейви, Стюартсон
Davey A. and Stewartson K. (1974) «On three dimensional packets of surface waves», Prov. RoyalSoc Lond., A338, 101—110.
Дейвидсон
Davidson R. (1972) «Methods in nonlinear plasma theory», New York: Academic Press.
Дейфт
Deift P. (1978) «Applications of a commutation formula», Duke Math. J., 45, 267—310.
Дейфт, Трубовиц
Deift P. and Trubowitz E. (1979) «Inverse scattering on the line», Comm. Pure Appl. Math., 32, 121—251.
Дельфур, Фортин, Пейр
Delfour M., Fortin M. and Payre G. (1981) «Finite difference solutions of nonlinear Schrödinger equation», J. Comp. Phys., 44, 277—288.
Деррик
Derrick G. (1964) «Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles», J. Math. Phys., 5, 1252—4.
Джаффе, Тобз
Jaffe A. and Taubes C. (1980) «Vortices and Monopoles», Boston: Birkhauser.
Джейкобз, Ребби
Jacobs L. and Rebbi C. (1979) «Interaction energy of superconducting vortices», Phys. Rev., B19, 4486—94.
Джейкобсон
Jacobson D. A. (1965) «Ginzburg—Landau equations and the Josephson effect» Phys. Rev., 138, 1066—70.
Джёрджевич, Редекопп
Djordjevič V. D. and Redekopp L. G. (1977) «On two dimensional packets of capillary—gravity waves», J. Fluid Mech., 79, 703—14.
Джеффри, Джеффри
Jeffrey H. and Jeffrey B. S. (1946) «Methods of Mathematical Physics», Cambridge: C. U. P.
Джеффри, Какутани
Jeffrey A. and Kakutani T. (1972) «Weak nonlinear dispersive waves», SIAM Review, 14, 582—643.
Джимбо, Мива
Jimbo M. and Miwa T. (1981) «Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II», Physica Scripta D, 2 407—448.

(1981) «Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients, III», Physica Scripta D, 4, 26—46.
Джимбо, Мива, Уено
Jimbo M., Miwa T. and Ueno K. (1981) «Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I — General theory and tau-functions», Physica D, 2, 306—351.
Джонсон
Johnson R. S. (1973) «On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom», Proc. Cam. Phil. Soc., 73, 183—230.
Джордан, Смит
Jordan D. and Smith P. (1977) «Nonlinear Ordinary Differential Equations», Oxford: Applied Mathematics and Computing Series.
Диллон
Dillon J. F. (1963) «Domains and domain walls», In Rado, G. and Suhe S. H. (Ed.), Magnetism III, pp. 415—461, London: Academic Press.
Додд
Dodd R. K. (1978) «Generalised Bäcklund transformations for some nonlinear partial differential—difference equations», J. Phys. A, 11, 81—92.
(1982) «On the AKNS—ZS inverse method hand the initial value problem for solvable equations», Preprint, Trinity College, Dublin.
Додд, Буллаф
Dodd R. K. and Bullough R. K. (1977) «Polynominal conserved densities for the sine—Gordon equation», Proc. R. Soc. Lond. A352, 481—503.
(1977) «Bäcklund transformations for the AKNS inverse method», Phys. Lett., 62A, 70—74.
(1979) «The genetalized Marchenko equation and the canonical structure of the AKNS—ZS inverse method», Phys. Scripta, 20, 514—530.
Доринг
Doring W. (1948) «Uber die Trägheit der Wände zunschen wiesschon Bezirkon», Zeits. Naturf., 39, 373—9.
Дрейзин
Drazin P. G. (1970) «Nonlinear baroclinic instability of a continuous zonal flow», Quar. J. Roy. Met. Soc., 96, 667—676.
Дрейзин, Рейд
Drazin P. G. and Reid W. H. (1981) «Hydrodynamic Stability», Cambridge: Cambridge University Press.
Дубровин Б. А., Новиков С. П. (1974) «Периодический и условнопериодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза», ЖЭТФ, т. 67, вып. 6, с. 2131—2144.
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Матвеев В. Б. «Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. — УМН, 31, № 1, 55—136.
Егути, Джиляки, Хансон
Eguchi T., Gilkey P. B. and Hanson A. J. (1980) «Gravitation, gauge theory and differential geometry», Phys. Rep., 66, 213—393.
Енц
Enz U. (1964) «Die Dynamic der blochschon Wand», Phys. Acta., 37, 245—251.
Забуски
Zabusky N. J. (1967) «A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction», In Ames W. (ed.), Nonlinear Partial Differential Equations, New York: Academic Press.
(1968) «Solitons and bound states of the time independent Schrödinger equation», Phys. Rev., 168, 124—28.
(1969) «Nonlinear lattice dynamics and energy sharing», J. Phys. Soc. Japan, 26, 196—202.
(1973) «Solitons and energy transport in nonlinear lattices», Computatio sl Physics Comm., 5, 1—10.

(1981) «Computational synergetics and mathematical innovation», J. Comp. Phys., 43, 195—249.
Забуски, Галвин
Zabusky N. J. and Galvin C. J. (1971) «Shallow water waves, the KdV equation and solitons», J. Fluid Mech., 47, 811—24.
Забуски, Дим, Крускал
Zabusky N. J., Deem G. S. and Kruskal M. D. (1968) «Formation, propagation and interaction of solitons», 16mm Cine Film.
Забуски, Крускал
Zabusky N. J. and Kruskal M. D. (1965) «Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states», Phys. Rev. Lett., 15, 240—243.
Захаров В. Е. (1972) Коллапс лэнгмюровских волн. — ЖЭТФ, 62, вып. 5, с. 1745—1759.
(1976) Точное решение задачи о параметрическом взаимодействии трехмерных волновых пакетов. — ДАН СССР, т. 228, с. 1314—1315.
(1977) Кинетические уравнения для солитонов. — ЖЭТФ, 33, 538—541.
Захаров В. Е., Белинский В. А. (1979) Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией. — ЖЭТФ, т. 77, с. 3.
Захаров В. Е., Манаков С. В. (1973) О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах. — Письма в ЖЭТФ, 18, с. 413—416.
(1974) О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шрёдингера. — ТМФ, 19, с. 322—332.
(1975) Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. — ЖЭТФ, 69, с. 1654—1673.
(1976) Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи. — ЖЭТФ, 71, с. 203—215.
(1976). Обобщение метода обратной задачи рассеяния. — ТМФ, т. 27, № 3, с. 283—287.
Захаров В. Е., Михайлов А. В. (1978) Релятивистски-инвариантные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния. — ЖЭТФ, т. 74, с. 1953—1973.
Захаров В. Е., Сынах В. С. (1975) О характере особенности при самофокусировке. — ЖЭТФ, т. 68, вып. 3, с. 940—947.
Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А. (1979) Эквивалентность нелинейного уравнения Шрёдингера уравнению Гейзенберга для ферромагнетиков. — ТМФ, 38, с. 17.
Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д. (1974) Полное описание решений уравнения СГ. — ДАН СССР, т. 19, с. 1334—1336.
Захаров В. Е., Фадеев Л. Д. (1971) Уравнение Кортевега-де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, с. 18.
Захаров В. Е., Шабат А. Б. (1971) Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. — ЖЭТФ, т. 61, с. 118—134.
(1974) Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. — Функц. анализ и его прилож., т. 6, вып. 3, 43—53.
(1979) Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II. — Функц. анализ и его прилож., 13, вып. 3, с. 13—22.
Зеегер, Донт, Кохендорфер
Seeger A., Donth H. and Kochendorfer (1953) «Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung», Zeischrift fur Physik, 134, 173—193.
Зеегер, Шиллер
Seeger A. and Schiller P. (1966) «Kinks and dislocation lines and their effects on internal friction in crystals», In Mason P. A. W. (Ed.), Physical Acoustics, Vol. 3, pp. 361—495, New York: Academic Press.

Зигель, Мозер
Siegel C. L. and Moser J. (1971) «Lecture in celestial mechanics», Berlin: Springer.
Иди
Eady, E. T. (1949) «Long waves and cyclone waves», Tellus, 1, 33—52.
Икези, Тейлор, Бейкер
Ikezi M., Taylor R. and Baker R. D. (1970) «Formation and interaction of ion acoustic solitary waves», Phys. Rev. Lett., 25, 11—14.
Инфельд, Халл
Infeld I. and Hull T. E. (1951) «The factorisation method», Rev. Mod. Phys., 23, 21—68.
Итикава
Ichikawa Y. H. (1979) «Topics on solitons in plasmas», Physica Scripta, 20, 296—305.
Итикава, Мицухаси, Конно
Ichikawa Y. H., Mitsuhashi T. and Konno K. (1976) «Contribution of higher order terms in the reductive perturbation theory I: A case of weakly dispersive wave», J. Phys. Soc. Japan, 41, 1382—86.
Йосс, Джозеф
Iooss G. and Joseph D. D. (1981) Bifurcation Theory, Berlin: Springer.
Йост, Кон
Jost R. and Kohn W. (1952) «Equivalent potentials», Phys. Rev., 88, 382—385.
Кавата, Ино
Kawata T. and Inoue H. (1978) «Inverse scattering method for the nonlinear evolution equations under nonvanishing conditions», J. Phys. Soc. Japan, 44, 1722—9.
Кавата, Сакаи, Кобаяси
Kawata T., Sakai J. and Kobayashi N. (1980) «Inverse method for the mixed nonlinear Schrödinger equation and soliton solutions», J. Phys. Soc. Japan, 48, 1371—9.
Кавахара
Kawahara T. (1969) «Oblique nonlinear hydromagnetic waves in a collision free plasma with isothermal electron pressure», J. Phys. Soc. Japan, 27, 1331—40.
Кадомцев Б. Б., Петвиашвили (1970) «Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией». — ДАН СССР, 192, 753—756.
Како, Роуленда
Kako M. and Rowlands G. (1976) «Two dimensional stability of ion acoustic solitons», Plasma Physics, 18, 165—70.
Какутани, Оно, Таниути, Вей
Kakutani T., Ono H., Taniuti T. and Wei C. C. (1968) «Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma», J. Phys. Soc. Japan, 24, 1159—66.
Какутани, Сугимото
Kakutani T. and Sugimoto N. (1974) «Krylov—Bogolubov—Mitropolsky method for nonlinear wave modulation», Phys. of Fluids, 17, 1617—25.
Калоджеро
Calogero F. (1975) «A method to generate soluble nonlinear evolution equations», Lett. Nuovo Cim., 14, 443—7.
(1978) «Nonlinear evolution equations solvable by spectral transform», London: Pitman.
Калоджеро, Дегасперис
Calogero F. and Degasperis A. (1976), «Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. — I», Nuovo Cim. 32B, 201—242.
(1977), «Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform», Nuovo Cim., 39B, 1—54.
(1978) «Exact solution via the spectral transform of a nonlinear evolution equation with lineary x-dependent coefficients», Lett. Nuovo Cim., 22, 138—141.
(1978) «Solution by the spectral transform method of a nonlinear evolution equation including as a special case the cylindrical KdV equation», Lett. Nuovo

Cim., 23, 150—154.
(1981) «Reduction techniques for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform». J. Math. Phys., 22, 23—31.
(1982) Spectral transform and solitons. Amsterdam: North—Holland. [Имеется перевод: Калоджеро Ф. Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. — М.: Мир, 1985.]

Камберпатч
Cumberpatch E. (1978) «Spike solutions for radially symmetric solitary waves», Phys. Fluids, 21, 374—6.

Карпман В. И. (1967) «Структура 2-мерных течений круглых тел в диспергирующих средах». — ЖЭТФ, 25, 1102—11.
(1973) «Нелинейные волны в диспергирующих средах». — М.: Наука.

Карри
Currie J. F. (1977) «Aspects of exact dynamics for general solutions of the SG equation with applications to domain walls», Phys. Rev., A, 16, 1692—9.

Като
Kato T. (1966) «Perturbation theory for linear operators», Berlin: Springer. [Имеется перевод: Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.]

Каup
Kaup D. (1975) «Exact quantisation of the nonlinear Schrödinger equation», J. Math. Phys., 16, 2036—41.
(1976) «The three wave interaction — A nondispersive phenomenon», Studies in Appl. Math., 55, 9—44.
(1978) «Simple harmonic generation: an exact method of solution», Studies in Appl. Math., 59, 25—35.
Kaup D. J. (1980) «On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$», Studies in Appl. Math., 62, 189—216.

Каup, Райман, Берз
Kaup D. J., Reiman A. H., Bers A. (1979) «Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions I», Rev. Mod. Phys., 51, 275—309.

Кац, ван Мёрбеке
Kac M. and van Moerbeke P. (1975) «On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices», Adv. in Math., 16, 160—9.

Кевер, Морикава
Kever H. and Morikawa G. K. (1969) «KdV equation for nonlinear hydromagnetic waves in a warm collision free plasma», Physics of Fluids, 12, 2090—3.

Келлер
Keller J. B. (1967) «Inverse problems», Am. Math. Monthly, 83, 107—118.

Келлер, Кей, Шмойз
Keller J. B., Kay I. and Shmoys J. (1956) «Determination of the potential from the scattering data», Phys. Rev., 102, 557—559.

Келли
Kelley P. L. (1965) Self-focussing of laser beams», Phys. Rev. Lett., 15, 1005—1008.

Китченсайд, Кодри, Буллаф
Kitchenside P. W., Caudrey P. J., Bullough R. K. (1979) «Soliton-like spin waves in He B», Physica Scripta, 20, 673—680.

Кодама, Абловиц, Сацума
Kodama Y., Ablowitz M. J. and Satsuma J. (1982) «Direct and scattering problems of the nonlinear intermediate long wave equation», J. Math. Phys., 23, 564—576.

Кодама, Таниути
Kodama K. and Taniuti T. (1978) «Higher order approximation in the reductive perturbation method I and II», J. Phys. Soc. Japan, 45, 298—314.

Коддингтон, Левинсон
Coddington E. A. and Levinson N. (1955) «Theory of ordinary differential equations», New York: McGraw—Hill. [Имеется перевод: Коддингтон Э. А., Левин-

сон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.]

Кодри

Caudrey P. J. (1980) «The inverse problem for the third order equation $u_{xxx} + q(x) u_x + r(x) u = i\xi^3 u$», Phys. Lett., 79A, 264—7.
(1982) «The inverse problem for a general NxN spectral equation». To be published in Physica D.

Кодри, Гиббон, Эйлбек, Буллаф

Caudrey P. J., Gibbon J. D., Eilbeck J. C., and Bullough R. K. (1973) «Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations». Phys. Rev. Lett., 30, 237—239.

Кодри, Эйлбек

Caudrey P. J., and Eilbeck J. C. (1977) «Numerical evidence for breakdown of soliton behavior in solutions of the Maxwell—Bloch equations», Phys. Lett., 62A, 65—66.

Кодри, Эйлбек, Гиббон

Caudrey P. J., Eilbeck J. C. and Gibbon J. D. (1974) «An N-Soliton solution of the Reduced Maxwell—Bloch equations». J. I. M. A., 14, 375—386.
(1975) «The sine-Gordon equation as a model classical field theory». Nuovo Cim., 25B, 497—512.

Кодри, Эйлбек, Гиббон, Буллаф

Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., and Bullough R. K. (1973) «Exact multisoliton solution of the inhomogeneously broadened self-induced transparency equations». J. Phys. A., 6, L53—L56.
(1973) «Multiple soliton and bisoliton bound state solutions of the sine-Gordon equation and related equations in nonlinear optics». J. Phys. A., 6, L112—L115.

Конно, Мицухаси, Итикава

Konno K., Mitsuhashi T. and Ichikawa Y. B. (1977) «Dynamical processes of the dressed ion acoustic solitons», J. Phys. Soc. Japan, 43, 669—74.

Конно, Судзуки

Konno K. and Suzuki H. (1979) «Self-focussing of laser beam in nonlinear media», Physica Scripta, 20, 382—386.

Констабиле, Парментье, Саво

Constabile G., Parmentier R. D. and Savo B. (1978) «Fluxon-breatherplasma oscillation decay in long Josephson junctions», J. de Physique, 39, C6—567, C6—568. Colloque C6, supp. au 8.

Констабиле, Парментье, Саво, Маклохлин, Скотт

Constabile G., Parmentier R., Savo B., McLaughlin D. W. and Scott A. C. (1978) «Exact solutions of the sine-Gordon equation describing oscillations in a long (but finite) Josephson junction», Appl. Phys. Lett., 32, 587—9.

Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. (1975) «Квантование солитонов». — ТМФ, 25, вып. 2, 147—163.

Кортевег, де Фриз

Korteweg D. J. and Vries G. (1895) «On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves», Phil. Mag., 39, 422—443.

Коул

Cole J. D. (1951) «On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics», Quart. Appl. Math., 9, 225—236.
(1968) «Perturbation Methods in Applied Mathematics», Waltham: Blaisdell.

Коулман

Coleman S. (1977) «Classical lumps and their quantum descendents». In Zichichi, A. (Ed.), New phenomena in subnuclear physics, New York: Plenum Press.
(1979) «The uses of instantons», In Zichichi, A. (Ed.), 1977 Erice Lectures, New York: Plenum Press.

Коэн

Cohen A. (1979) «Existence and regularity of solutions of the KdV equation», Arch. Rat. Mech. Anal., 79, 143—175.

Крамер, Нойгебауер
Kramer D. and Neugebauer G. (1979) «The superposition of two Kerr solutions», Phys. Letts., 75A, 259—261.
Крейн М. Г. (1953) «О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка». — ДАН СССР, 88, № 3, 405—408.
(1955) «Об определении потенциала частицы по ее s-функции». — ДАН СССР, 105, № 3, 433—436.
Кристи, Гриффитс, Митчелл, Санс-Серна
Christie I., Griffiths D. F., Mitchell A. F. and Sanz-Serna J. M. (1981) «Product approximation for nonlinear problems in the finite element method», IMA J. Num. Anal., 1, 253—266.
Кристиансен, Ломдал
Christiansen P. L. and Lomdahl P. S. (1981) «Numerical study of 2 + 1 dimensional sine-Gordon solutions», Physica D, 2, 482—494.
Кристиансен, Ломдал, Скотт, Соренсен, Эйлбек
Christiansen P. L., Lomdahl P. S., Scott A. C., Soerensen O. H. and Eilbeck J. C. (1981) «Internal dynamics of long Josephson junction oscillators, Appl. Phys. Lett., 39, 108—110.
Кристиансен, Ольсен
Christiansen P. L., and Olsen O. H. (1979) «Ring-shaped quasi-soliton solutions to the two- and three-dimensional sine-Gordon equation», Physica Scripta, 20, 531—538.
(1980) «Fluxons on a Josephson Line with loss and bias», Wave Motion, 2, с. 185.
Кричевер И. М. (1977) «Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений». — УМН, т. 32, № 6, 183—208.
Крум
Croom F. H. (1978) «Basic concepts in algebraic topology», Berlin: Springer.
Крускал, Миура, Гарднер
Kruskal M. D., Miura R. M. and Gardner C. S. (1970) «Korteweg—de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws», J. Math. Phys., 11, 952—960.
Кудрявцев А. Е. (1975) «Солитонно подобные решения для хиггсовского скалярного поля». — Письма в ЖЭТФ, 22, 82—83.
Куо Пен-ю, Санс-Серна
Pen-Yu, Kuo, and Sanz-Serna J. M. (1981) «Convergence of methods for the numerical solution of the KdV equation», IMA J. Num Anal., 1, 215—221.
Курамото
Kuramoto Y. (1978) «Diffusion induced chaos in reaction systems», Suppl. Prog. Theor. Phys., 64, 364—367.
Куртней Льюис, Тьон
Courtnay Lewis J. and Tjon J. A. (1979) «Resonant production of solitons in the RLM equation», Phys. Lett., 73A, 275—279.
Кэй, Моузез
Kay I. and Moses H. E. (1955) «The determination of the scattering potential from the spectral measure function I: Continuous spectrum», Nuovo Cimento, 2, 917—961.
(1956) «The determination of the scattering potential from the spectral measure function II: Point eigenvalues and proper eigenfunctions», Nuovo Cimento, 3, 66—84.
(1956) «The determination of the scattering potential from the spectral measure function III: Calculation of the scattering potential from the scattering operator the one-dimensional Schrödinger equation», Nuovo Cimento, 3, 276—304.
Лайтхилл
Lighthill M. J. (1978). Waves in fluids, Cambridge: CUP. [Имеется перевод: Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.]
Лакс
Lax P. D. (1968) «Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves»,

Commun. Pure and Appl. Math., 21, 467—490. [Имеется перевод: Лакс П. Д. (1969). Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. — Математика, 13 : 5, М.: Мир, с. 128—150.]
(1975). «Periodic solutions of the KdV equation», Comm. Pure Appl. Math., 28, 141—188.
(1976) «Almost periodic solutions of the KdV equation», SIAM Rev. 18, 351.
(1978) «A Hamiltonian approach to the KdV and other equations» In Crandall M. C. (ed.), Nonlinear Evolution Equations, London: Academic Press.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. «Квантовая механика». — III, М.: Физматгиз, (1963)
«Гидродинамика» — VI, М.: Наука, (1986).
«Электродинамика сплошных сред». — М.: Наука ГИФМЛ (1959)
(1969) «К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел». - В собрании трудов Л. Д. Ландау, М.: Наука, 128—144.

Ландж, Ньюэлл

Lange C. and Newell A. C. (1971) «The post buckling problem for thin elastic shells», SIAM J. of Appl. Math., 21, 605—629.
(1974) «A stability criterion for envelope equations», SIAM J. of Appl. Math., 27, 441—456.

Люшер, Полмейер

Lüscher M. and Pohlmeyer K. (1978) «Scattering of massless lumps and nonlocal charges in the two dimensional classical sigma-model», Nuc. Phys., B137, p. 46.

Левинсон

Levinson N. (1949) «On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase», Danske. Vid. Selsk. Mat—Fys. Medd., 25 (9), pp. 29.

Лейббрандт, Морф, Уонг

Leibbrandt C., Morf R, and Wang S. (1980) «Solutions of the sine-Gordon equation in higher dimensions», J. Math. Phys., 21, 1613—1624.

Лейбович

Leibovitch S. (1970) «Weakly nonlinear waves in rotating fluids», J. Fluid Mech., 42, 803—22.

Лейбович, Сибас

Leibovich S. and Seebass A. R. (Eds.) (1974) Nonlinear waves, Ithaca: Cornell Univ. Press.

Лейк, Юэн, Рюнгальдье, Фергюсон

Lake B. M., Yuen H. C., Rungaldier H. and Ferguson W. (1977) «Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train», J. Fluid Mech., 83, 49—74.

Ли

Lee T. D. (1976) «Examples of four dimensional soliton solutions and abnormal nuclear states», Phys. Rep., 23, 254—8.

Лин, Кан

Lin J. and Kahn P. (1982) «Phase and amplitude instability in delay-diffusion population models», J. Math. Biol., 13, 383—393.

Ломдал

Lomdahl P. S. (1982) «Solution dynamics in nonintegrable sine-Gordon systems», PhD thesis, LAMF, Technical University of Denmark, Lyngdy.

Ломдал, Ольсен, Кристиансен

Lomdahl P. S., Olsen O. H. and Christiansen P. L. (1980) «Return and collapse of solutions to the nonlinear Schrödinger equation in cylindrical symmetry», Phys. Lett., 78A, 125—128.

Ломдал, Сорсен, Кристиансен, Скотт, Эйлбек

Lomdahl P. S., Soersen O. H., Christiansen P. L., Scott A. C. and Eilbeck J. C. (1981) «Bunched multi-solitons in Josephson tunnel junctions», Phys. Rev. B, 24, 7460—7462.

Лонге-Хиггинс, Коуклет

Longuet-Higgins M. S. and Cokelet E. D. (1976) «The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation», Proc. Roy. Soc. Lond., A350, 1—26.
Лонгрин, Скотт
Lonngren K. and Scott A. (1978) Solitons in Action, New York: Academic Press.
Лоренц
Lorenz E. N. (1963) «Deterministic nonperiodic flow», J. Atmos. Sci., 20, 130—141.
Луговой, Прохоров
Lugovoi V. N. and Prokhorov A. M. (1974) «Theory of high power laser radiation in a nonlinear medium», Sov. Phys. Uspekhi, 16, 658—678.
Лунд
Lund F. (1977) «Notes on the geometry of the nonlinear sigma-model in two dimensions», Phys. Rev., D15, 1540—3.
Лунд, Перре
Lund F. and Regge T. (1976) «Unified approach to strings and vortices with soliton solutions», Phys. Rev., D14, 1524—35.
Льянс
Ljance V. E. (1966) «A differential operator with spectral singularities», Amer. Math. Soc. Trans., (2) 60, 185—225.
(1967) «An along of the inverse problem of scattering theory for a non-self-adjoint operator», Math USSR—Sbornik, 1, 485—503.
Лэм
Lamb H. (1932) Hydrodynamics, Cambridge: CUP.
Лэм
Lamb G. L. (1970) «Higher conservation laws in ultrashort optical pulse propagation, Phys. Lett., 32A, 251—252.
Lamb G. L. (1971) «Analytic descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium», Rev. Mod. Phys., 43, 99—124.
Lamb G. L. (1973) «Phase variation in coherent optical pulse propagation», Phys. Rev. Lett., 31, 196—199.
(1973) »On the connection between lossless propagation and pulse profile», Physica, 66, 298—314.
Лэм
Lamb G. R., Jr. (1976) «Bäcklund transformations at the turn of the century», In Miura R. M. (Ed.), Lecture Notes in Mathematics, 515: Bäcklund Transformations, Berlin: Springer.
(1980) «Elements of soliton theory», New York: J. Wiley. [Имеется перевод: Введение в теорию солитонов. Дж. Л. Лэм. — М.: Мир, 1983.]
Лэм
Lamb W. E., Jr. (1964) «Theory of optical maser oscillators», In Miles P. A. (Ed.), Proceedings of the Int. School of Phys. 'Enrico Fermi', Course XXXI, pp. 78—110, New York: Academic Press.
Ленг
Lang S. (1973) «Elliptic functions», New York; Addison Wesley.
Лютер
Luther A. (1976) «Eigenvalue spectrum of interacting massive fermions in one dimension», Phys. Rev. B, 14, 2153—9.
Ма
Ma Y.—C. (1978) «The complete solution of the long wave — short wave resonance equations», Studies in Appl. Math., 59, 201—21.
Мадоре
Madore J. (1981) «Geometrical methods in classical field theory», Phys. Rep., 75, 125—204.
Мадсен, Мей
Madsen O. S. and Mei C. C. (1969) «The transformation of a solitary wave over an uneven bottom», J. Fluid Mech., 39, 781—91.
Майлз

Miles J. M. (1977) «Resonantly interacting solitary waves», J. Fluid Mech., 79, 171—179.
(1981) «The Korteweg—de Vries equation: a historical essay», J. Fluid. Mech., 106, 131—147.
Маккол, Хан
McCall S. L. and Hahn E. L. (1967) «Self-induced transparency by pulsed coherent light», Phys. Rev. Lett., 18, 908—911.
(1969) «Self-induced transparency», Phys. Rev., 183, 457—485.
Максон, Виечелли
Maxon S. and Viecelli J. (1974) «Cylindrical solitons», Phys. Fluid., 17, 1614—1616.
Манаков С. В. (1973) «К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн». — ЖЭТФ, 65, вып. 8, 506.
(1974) «О полной интегрируемости и стохатизации в дискретных динамических системах». — ЖЭТФ, 67, вып. 2, 543—555.
(1976) «Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела». — ФА и его прил., т. 10, № 4, 93—94.
(1981) «Распространение импульсов в длинноволновых лазерных усилителях». — Письма в ЖЭТФ.
Манаков, Захаров
Manakov S. V. and Zakharov V. E. (1981) «Three-dimensional model of relativistic-invariant field theory, integrable by the inverse scattering transform», Lett. Math. Phys., 5, 247—253.
Манаков, Захаров, Бордаг, Итс, Матвеев
Manakov S. V., Zakharov V. E., Bordag L. A., Its A. R. and Matveev V. B. (1977) «Two dimensional solitons of the Kadomtsev—Petviashvili equation and their interaction», Phys. Lett. A, 63, 203—6.
Мантон
Manton N. S. (1978) «Complex structure of monopoles», Nucl. Phys., B135, 319—332.
Марсден, Мак-Кракен
Marsden J. and MacCracken M. (1976) «The Hopf Bifurcation and its Applications», Berlin: Springer series in Pure and Applied Sciences No. 19. [Имеется перевод: Марсден, Мак-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
Марченко В. А. (1950) «Некоторые вопросы теории дифференциальных операторов второго порядка». — ДАН СССР, т. 72, 457.
(1952) «Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I». — Труды Моск. Матем. о-ва, т. 1, 327—420.
(1952) «Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, II». — Труды Моск. Матем. о-ва, т. 2, 3—83.
(1955) «О восстановлении потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. — Доклады Акад. Наук, т. 104, 695—698.
(1960) «Eigenfunction expansions for non-self-adjoint singular differential operators of the second order», Amer. Math. Soc. Trans., 25, 77—130.
Маханьков
Makhankov V. G. (1978) «Dynamics of classical solutions (in non-integrable systems)», Phys. Rep., 35, 1—128.
(1979) «Computer and solitons», Physica Scripta, 20, 558—562.
(1980) «Computer experiments in soliton theory», Comp. Phys. Comm., 21, 1—49.
Маханьков, Куммер, Швачка
Makhankov V. C., Kummer C. and Shvachka A. B. (1979) «Many dimensional U (l) solitons, their interactions, resonanses and bound states», Physica Scripta, 20, 454—461.
(1981) «Novel Pulsons (or stability from instability)», Physica D, 3, 344—349.
Маханьков, Литвиненко, Швачка
Makhankov V. G., Litvinenko E. I. and Shvachka A. B. (1981) «Numerical investigation of the Kadomtsev—Petviashvili soliton stability», Comp. Phys. Comm., 2, 223—232.

Мейз, Марковиц
Meis T. and Marcowitz U. (1978) «Numerical solution of partial differential equations», Berlin: Springer.
Мейзон
Maison D. (1979) «On the complete integrability of the stationary axially symmetric Einstein equations», J. Math. Phys., 20, 871—7.
Мермин
Mermin N. D. (1979) «The topological theory of defects in ordered media», Rev. Mod. Phys., 51, 591—648.
Мерцбахер
Mertzbacher E. (1961) Quantum mechanics, New York: North Wiley.
Мессиа
Messiah A. (1961, 1962) Quantum Mechanics, New York: North Holland.
Миллер
Miller J. J. H. (1971) «On the location of zeros of certain classes of polynominals with applications for numerical analysis», J. Inst. Maths Applics, 8, 397—406.
Милнор
Milnor J. (1965) «Topology from the differential viewpoint», Charlottesville: Univ. Virginia Press.
Миттра
Mittra R. K. (1973) «Inverse scattering and remote probing», In Computer techniques of electromagnetics, (Ch. 7), Oxford: Pergamon.
Миура
Miura R. M. (1968) «Korteweg-de Vries equation and generalizations». I. A remarkable explicit nonlinear transformation», J. Math. Phys., 9, 1202—1204.
(1974) «The KdV equation: A model equation for nonlinear dispersive waves», In Leibovitch S. and Seebass A. (Ed.), Nonlinear Waves, Ithaca N. Y.: Cornell University Press.
(Ed.) (1976) «Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications», Berlin: Springer, Lecture, Notes in Mathematics, Vol. 515.
(1976) «The Korteweg—de Vries equation: a survey of results», SIAM Review, 18, 412—259.
Миура, Гарднер, Крускал
Miura R. M., Gardner C. S. and Kruskal M. D. (1968) «Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of the motion», J. Math. Phys., 9, 1204—1209.
Митчелл, Уайт
Mitchell A. R. and Wait R. (1977) «The Finite Element Method in Partial Differential Equations», London: J. Wiley. [Имеется перевод: Митчелл Э., Уайт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1980.]
Митчелл, Шумби
Mitchel A. R. and Schoombie S. W. (1981) «Finite element studies of Solitons», Proceedings of the Conference on Finite Element Methods in Coupled Problems, Swansea, September 1981.
Мичел
Michel L. (1980) «Symmetry defects and broken symmetry», Rev. Mod. Phys., 52, 617—651.
Мозер
Moser J. (ed.) (1975) «Dynamical Systems. Theory and Applications», Berlin: Springer—Verlag, Lecture notes in physics no. 38.
(1975) «Three Integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations», Adv. in Math., 16, 197—220.
Молленауэр, Столен, Гордон

Mollenauer L., Stolen R. and Gordon J. (1980) «Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibres», Phys. Rev. Letts., 45, 1095—8.
Монтгомери, Тидман
Montgomery D. and Tidman D. (1964) «Secular and nonsecular behaviour for the cold plasma equations», Phys. of Fluids, 7, 242—9.
Мороз, Бриндли
Moroz I. M. and Brindley J. (1981) «Evolution of baroclinic wave packets in a flow with continuous shear and stratification», Proc. Roy. Soc. Lond., 377A, 379—404.
Моррис, Додд
Morris H. C. and Dodd R. K. (1980) «A 2-connection and operator bundles for the Ernst equation for axially symmetric gravitational fields», Phys. Lett., 75A, 20—22.
Мортон
Morton K. W. (1964) «Finite compression waves in a collision free plasma», Physics of Fluids, 7, 1801—15.
Мохапатра, Лай
Mohapatra R. N. and Lai C. H. (1981) «Selected papers on gauge theory of fundamental interactions», Singapore: World Sci. Pub. Co.
Мюррей
Murray A. C. (1976) «Solutions of the KdV equation evolving from irregular data», Duke Math. J., 45, 149—181.
Наймарк
Naimark M. A. (1968) «Linear differential operators in Hilbert spaces II», London: Harrap.
Найрболи
Nairboli G. A. (1970) «Nonlinear longitudinal dispersive in elastic rods», J. Math. Phys. Sci., 4, 64—73.
Найфэ
Nayfeh A. (1973) «Perturbation Methods», New York: Wiley Interscience. [Имеется перевод: Найфэ А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.]
Найфэ, Мук
Nayfeh A. and Mook D. (1979) «Nonlinear Oscillations», New York: Wiley Interscience (Pure and Applied Mathematics).
Нараянамурти, Варма
Narayanamurti V. and Varma C. M. (1970) «Nonlinear propagation of heat pulses in solids», Phys. Rev. Lett., 25, 1105—8.
Николсон, Голдман
Nicholson D. R. and Goldman M. V. (1976) «Damped Nonlinear Schrödinger Equation», Phys. Fluids, 19, 1621—5.
(1978) «Virial theory of direct Langmuir collapse», Phys. Rev. Letts, 41, 406—410.
Новиков С. П. (1974). Периодическая задача Кортевега—де Фриза. — Функц. анализ и его прилож., т. 8, № 3, 54—66.
Нойгебауер, Крамер
Neugebauer G. and Kramer D. (1980) «The superposition of two Kerr solutions», Phys. Lett, 75A, 259—261.
Ньюэлл
Newell A. C. (ed.) (1974) «Nonlinear Wave Motion», Providence, R. I.: American Math. Soc.
(1977) «Finite amplitude instabilities of partial difference equations», SIAM J. Appl. Math., 33, 133—160.
(1978) «Soliton perturbations and Nonlinear Focusing», In A. Bishop and T. Schneider (Ed.), Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Solid State Sciences Series, Vol. 8, Berlin: Springer.
(1978) «Long waves — short waves, a solvable model», SIAM J. Appl. Math., 35, 650—64.
(1979) «Bifurcation and nonlinear focusing», In Haken H. (Ed.), Pattern Forma-

tion by Dynamical Systems and Pattern Recognition, Berlin: Springer.
(1979) «The general structure of integrable evolution equations», Proc. Roy Soc., A365, 263—311.
Ньюэлл, Ландж, Окоин
Newell A. C., Lange P. J. and Aucoin P. J. (1970) «Random convection», J. Fluid Mech., 40, 513—542.
Ньюэлл, Уайтхед
Newell A. C. and Whitehead J. A. (1969) «Finite bandwidth, finite amplitude convection», J. Fluid Mech., 38, 279—303.
Обри
Aubry S., (1976), «A unified approach to the interpretation of displasive and order-disorder systems II», J. Chem. Phys., 64, 3392—3402.
Олвер
Olver P. J. (1979) «Euler operators and conservation laws of the BBM equation» Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85, 143—160.
Оливе, Куито, Крюзер
Olive D., Cuito S. and Crewther R. J. (1979) «Instantons in field theory», Riv. Nuovo Cim, 8, 1—117.
Осборн, Берч
Osborne A. R. and Burch T. L. (1980) «Internal solitons in the Andaman Sea», Science, 208, 451—460.
Осборн, Провензале
Osborne A. R. and Provenzale A. (1962) «Numerical methods for evaluation of the spectral transform of localized wave described by the KdV equation to be published in the proceedings of the Recontre Interdisiplinaire Problems Inversee L'Universite des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France, December 1981.
Островский, Сутин
Ostrovsky L. A. and Sutin A. M. (1977) «Nonlinear elastic waves in rods», Appl. Math. and Mech., 41, 531—537.
Пайнз
Pines D. (1962) «The many body problem», New York; Benjamin.
Паркс
Parkes R. D. (1969) Superconductivity, Vols. I & II. New York: Marcel Dekker Inc.
Парментер
Parmentier R. (1978) «Fluxons on Long Josephson Junctions», In Scott A. C. (Ed.), Solitons in Action, pp. 173—199, New York: Academic Press.
Патани, Шейндвейн, Шафи
Patani A., Scheindwein M. and Shafi Q. (1976) «Topological charges in field theory», J. Phys. A., 9, 1513—20.
Педлоски
Pedlosky J. (1970) «Finite amplitude baroclinic waves», J. Atmos. Sci., 27, 15—30.
(1971) «Finite amplitude baroclinic waves with small dissipation», J. Atmos. Sci., 28, 587—597.
(1971) «Geophysical fluid dynamics», In W. Reid (Ed.), Mathematical Problems in the Geophysical Sciences, Providence: AMS.
(1972) «Finite amplitude baroclinic wave packets», J. Atmos. Sci., 29, 680—686.
(1980) «Geophysical fluid dynamics», New York: Springer.
Перегрин
Peregrine D. H. (1966) «Calculation of the development of an undular bore», J. Fluid Mech., 25, 321—330.
Перринг, Скирм
Perring J. K. and Skyrme T. H. R. (1962) «A model unified field equation», Nucl. Phys., 31, 550—555.
Полик, Роуленд
Pawlik M. and Rowland G. (1975) «The propagation of solitary waves in piezoelec-

tric semiconductors», J. Phys. C., 8, 1189—1204.
Ранада
Ranada A. F. (1979) «Nonlinear problems in theoretical physics», Berlin: Springer, Lecture notes in physics no. 98.
Ребби
Rebbi C. (1980) «Interaction of superconducting votices», In Harnad J. P. and Shnider S. (Ed.), Geometrical and topological methods in gauge theories, pp. 96—113, Berlin: Springer.
Редекопп
Redekopp L. (1977) «On the theory of solitary Rossby waves», J. Fluid Mech., 82, 725—45.
Рейд, Уолкер
Reid B. K. and Walker J. H. (1979) «SCRIBE Introductory User's Manual» (Second Edition), Pittsburg: Computing Science Department, Carnegie—Mellon University.
Рейман
Reiman A. H. (1979) «Space—time evolution of nonlinear three wave interactions, II», Rev. Mod. Phys., 51, 311—14.
Рикайзен
Rickayzen G. (1965) Theory of superconductivity. New York: Wiley.
Рихтмайер, Мортон
Richtmyer R. D. and Morton K. W. (1967) «Difference Methods for Initial—Value Problems (2nd Ed.), London: J. Wiley.
Розенберг
Rosenberg H. M. (1975) The solid state, Oxford: O. U. P.
Ромеа
Romea R. (1977) «The effects of friction and bets on finite amplitude baroclinic waves», J. Atmos. Sic., 34, 1689—95.
Рубенстайн
Rubenstein J. (1970) «Sine-Gordon equation», J. Math. Phys., 11, 258—266.
Рюэль
Ruelle D. (1980) «Strange attractors», Mathematical Intelligencer, 2, 126—137. Autumn Issue.
Рюэль, Такенс
Ruelle D. and Takens F. (1971) «On the nature of turbulence», Comm. Math. Phys., 20, 167—192.
Санс-Серна, Кристи
Sanz-Serna J. M. and Christie I. (1981) «Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves», J. Comp. Phys., 39, 94—102.
Сантарелли
Santarelli A. R. (1978) «Numerical analysis of the regularized longwave equation: anelastic collision of solitary waves», Nuovo Cim., 46B, 179—188.
Сацума
Satsuma J. (1976) «N-soliton solution of the two-dimensional KdV equation», J. Phys. Soc. Japan, 40, 286—290.
Сацума, Абловиц, Кодама
Satsuma J., Ablowitz M. J. and Kodama Y. (1979) «On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth», Phys. Lett. A, 73, 283—286.
Скирм
Skyrme T. H. R. (1958) «A non-linear theory of strong interactions», Proc. Roy. Soc. Lond., A247, 260—278.
Скотт
Scott A. C. (1969) «A nonlinear Klein-Gordon equation», Amer. J. Phys., 37, 52—61.
(1970) «Active and nonlinear wave propagation in electronics, New York: Wiley-Interscience.
(1981) «The laser-raman spectrum of a Davydov soliton», Physics Letters, 86A, 60—62.

(1982) «Dynamics of Davydov solitons», Physical Review B (1982).
(1982) «The vibrational structure of Davydov solitons», Physica Scripta (1982).
Скотт Расселл
Scott Russell J. (1840) «Experimental researches into the laws of certain hydrodynamic phenomena that accompany the motion of floating bodies, and have not previously been reduced into conforming with the known laws of the Resistance of Fluids», Edinb. Roy. Soc. Trans., 14, 47—109, + 2 plates.
(1844) «Report on waves», In Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science, London: John Murray.
(1885) «The Wave of Translation», : London.
Скотт, Чу, Маклохлин
Scott A. C., Chu F. Y. F. and McLaughlin D. W. (1973) «The Soliton: a new concept in applied science», Proc. IEEE, 61, 1443—1483.
Смит
Smith R. K. (1977) «On a theory of amplitude vacillation in baroclinic waves», J. Fluid Mech., 79, 289—306.
Смит, Соломон, Вагнер
Smith K., Solomon D. and Wagner S. (1977) «Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs», Bull. Am. Math. Soc., 83, 1227—70.
Солимар
Solymar L. (1972) «Superconducting tunnelling and applications», London: Chapman and Hall.
Спеньер
Spanier E. (1966) «Algebraic topology», New York: McGraw Hill. (Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971).
Стоукер
Stoker J. J. (1957) «Water Waves»: The mathematical theory with applications» New York: Wiley Interscience.
Стоукс
Stokes G. G. (1847) «On the theory of oscillatory waves», Cmb. Trans. 8, 441—473.
Стюарт
Stuart J. T. (1960) «On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. I.», J. Fluid Mech., 9, 353—370.
(1971) «Nonlinear stability theory», Ann. Rev. Fluid. Mech., 3, 347—70.
Стюарт, Ди Прима
Stuart J. T. and DiPrima R. C. (1978) «The Eckhaus and Benjamin—Feir resonance mechanisms», Proc. Royal Soc. Lond., A362, 27—41.
Стюартсон, Стюарт
Stewartson K. and Stuart J. T. (1971) «Nonlinear instability of plane Poiseuille flow», J. Fluid Mech., 1971, 529—545.
Сью, Гарднер
Su C. S. and Gardner C. S. (1969) «The KdV equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burger's equation», J. Math. Phys., 10, 536—539.
Танака
Tanaka S. (1974) «KdV equation: construction of solutions in of scattering data», Osaka J. Math., 11, 49—59.
Таниути, Васима
Taniuti T. and Washimi M. (1968) «Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma», Phys. Rev. Lett., 21, 209—12.
Таниути, Вей
Taniuti T. and Wei C.—C. (1968) «Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation propagation», J. Phys. Soc. Japan, 24, 941—6.
Таниути, Ядзима
Taniuti T. and Yajima N. (1969) «Perturbation method a nonlinear wave modulation I», J. Math. Phys., 10, 1369—1372.

(1973) «Perturbation method for a nonlinear wave modulation III», J. Math. Phys., 14, 1389—97.

Тапперт
Tappert F. (1972) «Improved KdV equation for ion acoustic waves», Physics of Fluids, 15, 2446—7.
(1974) «Numerical solutions of the KdV equation and its generalisations by the split-step Fourier method», Lect. Appl. Math. Am. Math. Soc., 15, 215.

Тапперт, Джудис
Tappert F. and Judice C. N. (1972) «Recurrence of nonlinear ion acoustic waves», Phys. Rev. Lett., 29, 1308—11.

Тапперт, Варма
Tappert F. and Varma C. M. (1970) «Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids», Phys. Rev. Lett., 25, 1108—11.

Тапперт, Забуски
Tappert F. and Zabusky N. J. (1971) «Gradient induced fission of solitons», Phys. Rev. Lett., 27, 1774—76.

Таха, Абловиц
Taha T. R. and Ablowitz M. J. (1982) «On analytic and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations, I—III», Clarkson College preprints I. F. N. S 14—16.

Тахтаджян
Takhtadzhyan L. A. (1977) «Integration of the continuos Heisenberg spin chain through the inverse scattering method», Phys. Lett. A, 64, 235—237.

Тинкем
Tinkham M. (1975) «Introduction to superconductivity», New York: McGraw Hill.

Титчмарш
Titchmarsh E. C. (1948) «Theory of Fourier Integrals», Oxford: O. U. P.

Тода
Toda H. (1962) «Composition methods in homotopy groups of spheres», Princeton: Princeton Univ. Press.
(1970) «Waves in nonlinear lattices», Prog. Theor. Phys. Suppl. 45, 174—200.
(1976) «Development of the theory of a nonlinear lattice», Prog. Theor. Phys. Suppl., 59, 1—35.
(1981) «Theory of nonlinear lattices», Berlin: Springer.

Тран
Tran M. Q. (1979) «Ion acoustic solitons in a plasma. A review of their experimental properties and related theories», Physica Scripta, 20, 317—327.

Трубовиц
Trubowitz E. (1977) «The inverse problem for periodic potentials», Comm. Pure and Appl. Math., 30, 321—337.

Трулленджер
Trullinger S. (1979) «Dynamic polarizability of the double quadratic kink», J. Math. Phys., 21, 592—8.

Тьён, Райт
Tjon J. and Wright J. (1977) «Solitons on the continuous Heisenberg spin chain», Phys. Rev., B15, 3470—6.

Уайт
White R. M. (1971) «Quantum theory of magnetism», New York: McGraw Hill.

Уайтхед
Whitehead J. H. C. (1947) «An expression of Hopf's invariant as an integral», Proc Nat. Acad. Sci. (USA), 33, 117—123.

Уатсон
Watson J. N. (1960) «Nonlinear mechanics of disturbances in parallel flows», J. Fluid Mech., 9, 371—389.

Уизем

Whitham G. B. (1974) «Linear and Nonlinear Waves», New York: John Wiley. [Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]
Уильямс
Williams J. G. (1970) «Topological analysis of a nonlinear field theory», J. Math. Phys., 11, 2611—6.
Уильямс, Звенгровски
Williams J. G. and Zvengrowski P. (1977) «Spin in kink type theories», Int. J. Theor. Phys., 16, 755—761.
Уинтер
Winther (1980) «A conservation finite element method for the KdV equation», Math. Comp. 34, 23—43.
Уиттекер, Ватсон
Whittaker M. T. and Watson J. N. (1962) «A course in modern analysis», Cambridge: C. U. P. [Имеется перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. — М.: ГТТИ, 1933.]
Уолквист, Истабрук
Wahlquist H. D. and Estabrook F. B. (1973) «Bäcklund transformation for solutions of the KdV equation», Phys. Rev. Lett., 31, 1386—1390.
Фаддеев
Feddeev L. D. (1963) «The inverse problem in the quantum theory of scattering», J. Math. Phys., 4, 72—104.
(1964) «Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation», Amer. Math. Soc. (2), 65, 139—166.
Фаддеев, Корепин
Faddeev L. D. and Korepin V. E. (1978) «Quantum theory of solitons», Phys. Rep., 42, 1—87.
Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. (1974), УМН, 29, 249.
Фаулер, Гиббон, Магиннес
Fowler A. C., Gibbon J. D. and McGuinness M. J. (1982) «The complex Lorenz equations», Physica D: Nonlinear Phenomena, 4, 139—163.
Фейнман, Лейтон, Сандз
Feynman R. P., Leighton R. B. and Sands M. (1969) In Feynmann R. P. (Ed.), The Feynman Lectures on Physics, Vol. III, pp. (21—1) — (21—18). New York: Addison Wesley.
Ферми, Паста, Улам
Fermi E., Pasta J. R. and Ulam S. M. (1955) «Studies of nonlinear problems», Technical Report LA—1940, Los Alamos Sci., also in 'Collected Works of F. Fermi, vol. II, Chicago: Univ. Chicago Press, 1965, 978—988.
Филлипс
Phillips N. A. (1951) «A simple 3-dim. model for the study of large scale extratropical flow patterns», J. Met., 8, 381—394.
Финкелстайн
Finkelstein D. (1966) «Kinks», J. Math. Phys., 7, 1218—25.
Финкелстайн, Вейль
Finkelstein D. and Weil D. (1978) «Magnetohydrodynamic kinks in astrophysics», Int. J. Teo. Phys., 17, 201—217.
Финкелстайн, Мизнер
Finkelstein D. and Misner C. (1959) «Some new conservation laws», Ann. Phys., 6, 230—243.
Финкелстайн, Рубинстайн
Finkelstein D. and Rubenstein J. (1968) «Connection between spin, statistics, and kinks», J. Math. Phys., 9, 1762—79.
Флашка
Flaschka H. (1974) «On the Toda lattice I», Phys. Rev., B9, 1924—1925.
(1974) «On the Toda lattice II: Inverse scattering solution», Prog. Theor. Phys., 51, 703—716.

Флашка, Ньюэлл
Flaschka H. and Newell A. C. (1975) «Integrable systems of nonlinear evolution equations», In Moser J. (Ed.) Dynamical systems, theory and applications, pp. 355—440. Berlin: Springer.
and Newell A. C. (1981) «Multiphase similarity solutions», Physica D, 3, 203—221.

Фойаш
Foias C. (1960) «An application of vector distributions to spectral theory», Bull. Sci. Math., 87, 147—158.

Фокаш
Fokas A. S. (1980) «A symmetry approach to exactly solovable evolution equations», J. Math. Phys., 21, 1318—25.

Форгач, Хорват, Палла
Forgacs P., Horvath Z. and Palla L. (1980) «Generating the Bogomolny—Prasad—Sommerfeld one-monopole solution by a Bäcklund transformation», Phys. Rev. Lett., 15, 505—8.

Форнберг
Fornberg B. (1978) «Preudospectral calculations on 2—D turbulence and nonlinear waves», SIAM—AMS Proceedings, 11, 1—17.
(1981) «Numerical computation of nonlinear waves», In Enns R. H., Jones B. L., Miura R. M. and Rangnekar S. S. (Ed.), Nonlinear Phenomena in Physics and Biology, pp. 157—184. New York: Plenum Pub.

Форнберг, Уизем
Fornberg B. and Whitham G. B. (1978) «A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena», Phil. Trans. R. Soc. Lond., 289, 373—404.

Форсайт
Forsyth A. R. (1959) «Theory of differential equations», New York: Dover.

Франк, ван дер Мёрве
Frank F. C. and van der Merwe J. H. (1949) «One dimensional dislocations I», Proc. R. Soc. Lond., A198, 205—216.
(1950) «One dimensional dislocations II», Proc. R. Soc. Lond., A201, 261—268.

Френкель Я. И., Конторова Т. М. «О теории пластической деформации и двойникования». — Физический журнал I (1939), 137—149.

Фрёберг
Fröberg C. (1948) «Calculation of the interaction between two particles from the asymptotic phase», Phys. Rev., 72, 519—520.

Фрид, Итикава
Fried B., Ichikawa Y. H. (1973) «On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves», J. Phys. Soc. Japan, 34, 1073—82.

Фриман
Freeman N. C. (1979) «A two dimensional distributed soliton solution of the KdV equation», Proc. Roy. Soc. Lond. A., 366, 185—204.
(1980) «Soliton interactions in two dimensions», Adv. Appl. Mech., 20, 1—37.

Фриман, Дейви
Freeman N. C. and Davey A. (1975) «On the evolution of packets of long surface waves», Proc. Royal Soc. Lond., A344, 427—33.

Фриман, Джонсон
Freeman N. C. and Johnson R. S. (1970) «Shallow water waves on shear flows», J. Fluid Mech., 42, 401—9.

Фултон
Fulton T. (1977) «Equivalent circuits and analogs of the Josephson effect», In Schwarz B. B. and Foner S. (Ed.), Superconductor applications: SQUIDS and machines, pp. 125—187; Plenum Press.

Фульц
Fultz D. (1951) In Compendium of Meteorology, Boston: Amer. Met. Soc

Хайд

Hide R. (1958) «An experimental study of thermal convection in a rotating fluid», Phil Trans. R. Soc. Lond. A, 250, 441—478.
(1969) «Some laboratory experiments of free thermal convection in a rotating fluid», In Corby, G. A. (Ed.), Global Circulation of the Atmosphere: Roy. Met. Soc. Lond.
Хайд, Мейсон
Hide R. and Mason P. J. (1975) «Sloping convection in a rotating fluid», Adv. Phys., 24, 47—100.
Хайд, Мейсон, Пламб
Hide R., Mason P. J. and Plumb A. (1977) «Thermal convection in a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient», J. Atmos. Sci., 34, 930—950.
Хайман, Маклохлин, Скотт
Hyman J. M., McLaughlin D. W. and Scott A. C. (1981) «On Davydov's alphahelix solitons», Physica D, 3, 23—44.
Хакен
Haken H. (1978) Synergetics: An Introduction. Berlin: Springer—Verlag.
Халифа
Khalifa A. K. A. (1979) «Theory and application of the collocation method with splines for ordinary and partial differential equations», PhD thesis, Heriot—Watt University.
Харрисон
Harrison B. K. (1978) «Bäcklund transformation for the Ernst equation of general relativity», Phys. Rev. Lett., 41, 1197—1200.
Хасегава
Hasegawa A. (1975) «Plasma Instabilities and Nonlinear Effects», Berlin: Springer.
Хасегава, Кодама
Hasegawa A. and Kodama Y. (1981) «Signal transmissions by optical solutions in monomode fibre», Proc. IEEE, 69, 1145—1150.
Хасегава, Тапперт
Hasegawa A. and Tappert F. (1973) «Transmission of stationary nonlinear optical pulse in dispersive dielectric fibres. II», Appl. Phys. Letts., 23, 171—2.
Хасимото, Оно
Hasimoto H. and Ono H. (1972) «Nonlinear modulation of gravity waves», J. Phys. Soc. Japan, 33, 805—11.
Хенон
Henon M. (1974) «Integrals of the Toda lattice», Phys. Rev., B, 9, 1921—3.
Хершковиц, Ромессер, Монтгомери
Hershkowitz N., Romesser T. and Montgomery D. (1972) «Multiple soliton production and the KdV equation», Phys. Rev. Lett., 29, 1586—9.
Хиллераас
Hylleraas E. A. (1948) «Calculation of a perturbing central field of force from the elastic scattering phase shift», Phys. Rev., 74, 48—51.
Хилтон
Hilton P. (1966) «An introduction to homotopy theory», Cambridge: C. U. P.
Хирота
Hirota R. (1971) «Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons», Phys. Rev. Lett., 27, 1192—1194.
Hirota R. (1972) «Exact solution of the sine—Gordon equation for multiple collisions of solitons», J. Phys. Soc. Japan, 33, 1459—1463.
(1973) «Exact N-soliton solution of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices», J. Math. Phys., 14, 810—815.
(1974) «A new form of Bäcklund transformation and its relation to the inverse scattering problem», Prog. Theor. Phys., 52, 1498—1512.
(1976) «Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations», in Miura R. M. (Ed.), Bäcklund Transformations, Berlin: Springer.
(1977) «Nonlinear partial difference equations III: discrete sine-Gordon equation», J. Phys. Soc. Japan, 43, 2079—2086.

(1980) «Direct methods in soliton thoery», in Bullough R. K. and Caudrey P. J. (Ed.), Solitons, Berlin: Springer.
(1981) «Bilinear forms of soliton equations», Tech. Rep. No. A—9, Dept. of Appl. Math., Hiroshima University.
Хокинг, Стюартсон, Стюарт
Hocking L., Stewartson K. and Stuart J. T. (1972) «A nonlinear instability burst in plane parallel flow», J. Fluid Mech., 51, 705—735.
Хокинг, Янг
Hocking J. G. and Young G. S. (1961) Topology, New York: Addison—Wesley.
Холмберг
Holmberg B. (1952) «A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase», Nuovo Cim., 9, 597—604.
Хопф
Hopf E. (1950) «The partial differential equation $u + uu_x = u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 3, 201—230.
Хоуард, Кришнамурти
Howard L. N. and Krishnamurti R. (1980) «A model illustrating a possible mechanism for large scale flow in convection», Bull. Amer. Phys. Soc., 25, 1080.
Чао, Гармир, Таунз
Chiao R. Y., Garmire E., and Townes C. H. (1964) «Self trapping of optical beams», Phys. Rev. Lect., 13, 479—82.
Чарни
Charney J. C. (1947) «The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current», J. Met., 4, 135—162.
Чиллингуорт
Chillingworth D. W. (1976) «Differential Topology with a View to Applications», London: Pitman.
Чу, Мей
Chu V. H. and Mei C. C. (1970) «On slowly varying Stokes waves», J. Fluid Mech., 41, 873—87.
(1971) «The nonlinear evolution of Stokes waves in deep water», J. Fluid Mech., 47, 337—57.
Шадан, Сабатье
Chadan K. and Sabatier P. C. (1977) «Inverse problems in quantum scattering theory», New York: Springer.
Шамель
Schamel H. (1979) «Role of trapped particles and waves in plasma solitons — Theory and applications», Physica Scripta, 20, 306—316.
Шамель, Эльзассер
Schamel H. and Elsasser K. (1976) «The application of the spectral method to nonlinear wave propagation», J. Comp. Phys., 22, 501—516.
Шифман, Кумар
Shiefman J. and Kumar P. (1979) «Interaction between soliton pairs in a double sine-Gordon equation», Physica Scripta, 20, 435—439.
Шифф
Schiff L. I. (1949) «Quantum mechanics», New York: McGraw—Hill.
Шлезингер
Schlesinger L. (1912) Reine Angewandte Math., 141, 96—145.
Шнейдер, Штолл
Schneider T. and Stoll E. (1980) «Classical statistical mechanics of the sine-Gordon and Phi-four chains. II. Static properties», Phys. Rev. B, 22, 5317—5338.
(1981) «Classical statistical mechanics of the sine-Gordon and Phi-four chains. II. Dynamic properties», Phys. Rev. B, 23, 4631—4660.
Штраус
Strauss W. A. (1978) «Nonlinear Invariant Wave Equations», In Velo G. and Wightman A. (Ed.), Invariant Wave Equations, Berlin: Springer—Verlag.
Штраус, Васкес

Strauss W. A. and Vazquez L. (1978) «Numerical solution of a nonlinear Klein—Gordon equation», J. Comp. Phys., 28, 271—278.
Шумби
Schoombie S. W. (1982) «Spline Petrov—Galerkin methods for the numerical solution of the KdV equation», IMA J. Num. Anal., 2, 95—109.
Эйлбек
Eilbeck J. C. (1978) «Numerical studies of solitons», In Bishop A. R. and Schneider T. Ed.), Springer Series in Solid—State Sciences (8): Solitons and Condensed Matter Physics, Berlin: Springer—Verlag.
(1981) «Kink Collisions in the $\varnothing$ Model». 16 mm cine film, white on blue, silent.
Эйлбек, Буллаф
Eilbeck J. C. and Bullough R. K. (1972) «The method of characteristics in the theory of resonant or nonresonant nonlinear optics», J. Phys. A., 5, 820—829.
Эйлбек, Гиббон, Кодри, Буллаф
Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Caudrey P. J. and Bullough R. K. (1973) «Solitons in nonlinear optics I. A more accurate description of the 2 pulse in self-induced transparency», J. Phys. A., 6, 1337—1347.
Эйлбек, Ломдал
Eilbeck J. C. and Lomdahl P. S. (1981) «Sine-Gordon Solitons», 16 mm cine film, white on blue, with sound track, approx 12 mins. (1981).
Эйлбек, Ломдал, Ньюэлл
Eilbeck J. C., Lomdahl P. S. and Newell A. C. (1981) «Chaos in the inhomogeneously driven sine-Gordon equation», Phys. Lett., 87A, 1—4.
Эйлбек, Маруайр
Eilbeck J. C. and McGuire G. R. (1975) «Numerical study of the regularized long wave equation I: Numerical Methods», J. Comp. Phys., 19 43—57.
(1977) «Numerical study of the regularized long wave equation II: Interaction of solitary waves». J. Comp. Phys., 23, 63—73.
Эйленберггер
Eilenberger G. (1980) «Solitons», Berlin: Springer.
Эйзенхарт
Eisenhart L. T. (1960) «A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces», New York: Dover.
Эймз
Ames W. F. (1977), «Numerical Methods for Partial Differential Equations», London, Netson.
Экхаус
Eckhaus W. (1965) «Studies in nonlinear stability theory», Berlin: Springer.
Экхаус, Ван Хартен
Eckhaus W. and Van Harten A. (1981) «The inverse scattering transformation and theory of solitons», Amsterdam: North—Holland.
Эммерсон
Emmerson G. S. (1977) «John Scott Russell», London; John Murray.
Эрнст
Ernst F. J. (1968) «New formation of the axially symmetric gravitational field problem», Phys. Rev., 167, 1175—8.
Эссманн, Тройбле
Essmann U. and Träuble H. (1967) «The direct observation of individual fluxons on type II semiconductors», Phys. Lett., 24A, 526—7.
Юэн, Лейк
Yuen H. C. and Lake B. M. (1975) «Nonlinear deep water waves: theory and experiment», Physics of Fluids, 18, 906—960.
Ядзима, Оикава
Yajima N. and Oikawa M. (1976) «Formation and Interaction of Sonic—Langmuir Solitons — Inverse Scattering method», Progress of Theor. Phys., 56, 1719—39.
Янг, Миллс
Yang C. N. and Mills R. L. (1954) «Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance», Phys. Rev., 96, 191—5.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абеля преобразование 70
— — обратное 71
амплитудные уравнения 578
антивихревые решения 457
асимптотические условия 64
аттенюатор 590
аттрактор хаотический 612

бароклинная неустойчивость 603
бароклинные волны 603
баротропная жидкость 276
безотражательные потенциалы 87
Бенджамина—Оно уравнение 407
Бенджамина—Фейера критерий 580
Бенни условие 557
Бернулли уравнение 268
бесстолкновительная ударная волна 247
бета-эффект (дисперсионный) 617
бифуркации точка 573
бифуркация 572
Блоха уравнение 486
— — оптическое 588
Богомольного уравнения 502
бозоны 513
Больцмана константа 261
Брауэра степень гладкого отображения 442
бризер 440
бризерные решения 602
бумерона уравнения 404
Буссинеск 15
Буссинеска уравнение 18
Бюргерса уравнение 43, 56, 287
Бэклунда преобразования 28, 49, 92, 234, 373, 411
— автопреобразование 112
— — СГ уравнения 29
— — Кдф уравнения 108
— — обобщенные 237
— принцип суперпозиции 238

вакуумные состояния 27
волновая функция 74
— — связанного состояния 83
волновое число 33
волновые функции обобщенные 77
Вольтерры интегральные уравнения 352
вихревые решения 457
вронскиан 76, 97, 303

Галилея преобразование 41, 109
Гамильтона оператор 75
гамильтониан взаимодействия 487
гармонические колебания 33
Гельфанда—Левитана уравнение 249
Гельфанда—Левитана—Марченко уравнения 480
геострофическая функция тока 278
геострофическое приближение 276
главные функции 316
гомотопические классы 429
гомотопия 427
гравитационные силы 276
Грина функция 141, 306
групповая скорость 33, 591
Гурса задача 160

Давыдова уравнение 261
данные рассеяния 150

двухслойная модель 603
дебаевская длина 262
дельта-потенциал 81
Деррикса теорема 450
де Фриз 14
Джозефсона контакт 639
Дирака уравнение 95
— дельта-функция 141
Дирихле оператор 190
дислокация в кристаллах 460
дисперсионная неустойчивость 585, 623
дисперсионное соотношение 33, 260, 434
дисперсия 33
диссипативная неустойчивость 584
диссипативность решения 438
дифференциальное сечение рассеяния 67
длинноволновое приближение 271
длинноволновые уравнения 645
Додда—Буллафа уравнение 525
Допплера эффект 14, 589

емкость 284

задача ФПУ 16
законы сохранения 108
Захарова уравнения 558
ЗШ—АКНС-метод обратной задачи 341

Иди модель 622
изгиб упругих оболочек 622
изометрическое отображение 140
изотропная группа 463

Йоста решения 117, 126, 136

Кадомцева—Петвиашвили уравнение 288, 406, 653
калибровочная группа 499
калибровочные поля
— абелевы 451
— неабелевы 498
— — преобразования 451, 481, 499
квадратичный резонанс 551
квантовое туннелирование 491
Каца и ван Мербеке уравнение 293
КдФ уравнение 15
Клейна—Гордона уравнение 26, 28
— — — линейное 33, 448, 451
— — — нелинейное 444, 636
кинк 26, 439
Кирхгофа законы 284
классический предел 74
кноидальные волны 38
ковариантная производная 452
когерентный оптический импульс 623
конвекция 572
консервативные системы 571
Кортевег 15
Коула—Хопфа преобразование 23, 43, 48
коэффициент отражения 80
— прохождения 80
краевая дислокация 460
Крейна функционалы 151
Кранка—Николсона схема 633
Купера пары 465
k-инстантонное решение 510

Лакса пара 114
Лакса условие 569
Ландау—Лифшица уравнение 472
Лапласа преобразование 70
Лапласа уравнение 269
ленгмюровские волны в плазме 547
линия дефектов 462
Липпмана—Швингера уравнение 183
Лиувилля уравнение 485
Лоренца аттрактор 613
— преобразование 611
— уравнение 611

Максвелла—Блоха уравнения 46, 487
— — — редуцированные 341, 600
Мантона поля 503
Марченко—Аграновича метод 156
Марченко уравнение 196, 213, 229, 377, 408
— — нестационарное 343

матрица массы 513
— монодромии 413
— плотности 485
— рассеяния 133, 153
Мейсснера эффект 465
медленные переменные 535
мероморфная функция 332, 350
метод конечных разностей 632
метод многомасштабных (двухвременных) разложений 533
метод обратного спектрального преобразования 216
— обратной задачи 216, 399, 408
— перевала 36
— разложения 95, 101
— характеристик 41
Мёллера операторы 153, 182, 420
Миуры преобразование 184, 421
монополи 450

Навье—Стокса уравнение 266, 625
надкритическая область 571
нейтральная кривая 34
нейтрально-устойчивая система 34
нелинейные разностные уравнения 651
неоднородное уширение 589
нормировочные многочлены 326, 351

обобщенная волновая функция 77
обобщенные собственные значения 182
обобщенный порождающий базис 182
обратная задача рассеяния 58, 68
обратное преобразование рассеяния 218
— спектральное преобразование 218
одевание оператора 409
одноинстантонное решение БПТШ 509
однородное уширение 619
однородные вращающиеся жидкости 258
операторы преобразования 156
Орра—Зоммерфельда уравнение 621

параметр возмущения 259
— порядка 462
— уравнения 571
Парсеваля равенство 296
Паули матрица 478
Пенлеве уравнение II типа 257, 413
планетарная завихренность 276
Повзнера—Левитана представление 249
полевые уравнения 453
поляризация 588
потенциал в виде прямоугольной ямы 89
потенциальная завихренность 276
потенциальная функция 66, 267
Прандтля число 612
Прасада—Зоммерфельда монополь 529
прицельное расстояние частицы 67
Пуассона уравнение 262

Радона преобразование 59
распределение 141
регуляризированное длинноволновое уравнение 647
регулярное значение отображения 443
резольвента 140, 278
резонансная частота 596
Рейнольдса число 621
Риккати уравнение 49, 110
Римана-Гильберта задача 409
Россби число 275
Рэлея число 620

сверхпроводящее туннелирование 491
связанное состояние 82
СГ-уравнение (sin-Гордон) 26, 298
секулярный член 535, 617
Скотт Рассел 11
солитоноподобное поведение 627
спектральная функция распределения 149
спектральное семейство оператора 145
спектральные особенности 191
сплетающие операторы 152, 156
Стокс 15
структурные постоянные 498

Тейлора—Прудмана теорема 278
теорема о равномерном распределении 16

Тоды цепочка 52, 55, 293
топологический заряд 441
точные последовательности 515

ударная волна 42
уединенная волна 11
уравнение типа бумерона 404
— импульса 267
— квазигеострофическое потенциальной завихренности 279
уравнения потенциального вихря 605
— самоиндуцированной прозрачности 594
уравнения φ^4 44, 636, 640
утечка проводимости 619

фазовое пространство 612
фазовая скорость 33, 591
ферромагнетизм 469
флюксон 497
формула следов 176
Фредгольма альтернатива 204
— уравнение второго ряда 204
Фреше производная 176
Фруда число 605
фундаментальная группа 429
— система решений 131
функция тока 619
Фурье моды 78
— преобразования 58, 60, 78

Хиггса абелева модель 456
— неабелева модель 501
Хироты метод 24, 53
холодные ионы 258
Хопфа бифуркационная теорема 615
Хуфта матрицы 509

частота падающей волны 591

Шварца условие 173
Шредингера оператор 188
— уравнение 66, 111, 191
— — нестационарное 75
— — стационарное 76
Штурма—Лиувилля уравнение 65

эволюция 62
эволюционные операторы 62
Эйлера—Лагранжа оператор 177
Экмана слои 604
электрическое поле 588
электростатический потенциал 262
Эрнста уравнение 407, 503
эффекты орбитальной сферичности 64

ядро резольвенты 306
Янга—Миллса уравнения 500
— — — автодуальные 506

Оглавление

От редактора перевода 5

Предисловие 7

1. Уединенные волны и солитоны 11

1.1. Открытие уединенной волны 11
1.2. Кортевег и де Фриз 14
1.3. Задача Ферми—Пасты—Улама (ФПУ) 16
1.4. Солитоны и работа Забуски и Крускала 20
1.5. Уравнение sin-Гордон 26
1.6. Нелинейное уравнение Шрёдингера 31
1.7. Некоторые основные принципы распространения линейных волн 32
1.8. Некоторые элементарные идеи в теории распространения нелинейных волн 38
1.9. Уравнения, не имеющие решений солитонного типа 44
1.10. Связь с квантовой механикой 47
1.11. Примечания 51
1.12. Задачи 55

2. Преобразования рассеяния 58

2.1. Обратная задача и анализ Фурье 58
2.2. Классическое рассеяние 66
2.3. Рассеяние в квантовой механике 73
2.3.1. Дельта-потенциал 81
2.3.2. Потенциал в виде прямоугольной ямы 83
2.4. Безотражательные потенциалы 87
2.5. Обобщения 95
2.5.1. Потенциал в форме прямоугольной ямы 98
2.5.2. Потенциал $q = -r = -2 \operatorname{sech} 2x$ 101
2.6. Примечания 103
2.7. Задачи 105

3. Уравнение Шрёдингера и уравнение Кортевега—де Фриза 108

3.1. Уравнение Кортевега—де Фриза и преобразования Бэклунда 108
3.2. Иерархия уравнений КдФ и изоспектральное уравнение Шрёдингера 113
3.3. Задача рассеяния для уравнения Шрёдингера 116
3.4. Спектральная теория для оператора Шрёдингера 139

3.5. Нелинейные уравнения, связанные с изоспектральным уравнением Шрёдингера . . . 160
3.6. Примечания . . . 180
3.7. Задачи . . . 183

4. Обратный метод для изоспектрального уравнения Шрёдингера и общее решение разрешимых нелинейных уравнений . . . 193

4.1. Обратная задача рассеяния и уравнение Марченко для изоспектрального уравнения Шрёдингера . . . 193
4.2. Задача Коши для разрешимых уравнений . . . 215
4.3. N-солитонные решения разрешимых уравнений . . . 229
4.4. Примечания . . . 248
4.5. Задачи . . . 253

5. Выделение уравнения Кортевега—де Фриза в некоторых физических примерах . . . 258

5.1. Введение . . . 258
5.2. Ионно-акустические волны . . . 261
5.3. Длинные волны на мелкой воде . . . 266
5.4. Задача из геофизической динамики жидкостей . . . 274
5.4.1. Геострофическое приближение и теорема Тейлора—Прудмана . . . 276
5.4.2. Уравнения движения для неглубокого слоя жидкости . . . 278
5.4.3. Волны Россби . . . 279
5.4.4. Уединенные волны Россби . . . 280
5.5. Модифицированное и обобщенное уравнения КдФ . . . 283
5.6. Примечания . . . 287
5.7. Задачи . . . 292

6. Метод обратной задачи рассеяния Захарова—Шабата/АКНС . . . 296

6.1. Прямая задача Захарова—Шабата и класс интегрируемых уравнений . . . 296
6.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения ЗШ—АКНС . . . 341
6.3. Решения интегрируемых уравнений и их преобразования Бэклунда . . . 373
6.4. Интегрируемые нелинейные уравнения и метод обратной задачи рассеяния . . . 399
6.4.1. Методы обратной задачи рассеяния . . . 401
6.4.2. Другие методы обратной задачи . . . 412
6.5. Примечания . . . 414
6.6. Задачи . . . 418

7. Кинки и уравнение СГ . . . 425

7.1. Топологические рассмотрения и механическая модель . . . 425
7.1.1. Механический маятник . . . 430
7.2. Свойства частиц . . . 435
7.3. Топологический заряд . . . 441
7.4. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона . . . 444
7.5. Вихри, монополи и инстантоны . . . 450

7.5.1. Абелевы калибровочные поля 451
7.5.2. Вихри 456
7.6. Дислокации в кристаллах и параметры порядка 460
7.7. Ферромагнетизм и солитоны 469
7.7.1. Изотропный ферромагнетик Гейзенберга 474
7.7.2. Модель непрерывной цепочки Гейзенберга 478
7.8. Квантовая механика и уравнение СГ в квантовой оптике . . 482
7.8.1. Нестационарная теория Ландау—Гинзбурга 490
7.9. Неабелевы калибровочные поля, монополи и инстантоны . . 497
7.9.1. Неабелевы калибровочные поля 498
7.9.2. SU (2)-инвариантные уравнения Клейна—Гордона . . . 500
7.9.3. Преобразования Бэклунда и решения-монополи 502
7.9.4. Автодуальные уравнения Янга—Миллса и инстантоны 506
7.10. Примечания 510
7.11. Задачи 522

8. Нелинейное уравнение Шрёдингера и резонансные взаимодействия волн 530

8.1. Введение 530
8.2. Класс уравнений, приводящих к нелинейному уравнению Шрёдингера 537
8.3. Оптическая самофокусировка 544
8.4. Ленгмюровские волны в плазме 547
8.5. Квадратичный резонанс 551
8.6. Резонанс длинных и коротких волн 554
8.6.1. Давыдовская модель альфа-спирали 559
8.7. Примечания 562

9. Амплитудные уравнения в неустойчивых системах 571

9.1. Введение 571
9.2. Секулярная теория возмущений и получение амплитудных уравнений 582
9.3. Распространение ультракоротких оптических импульсов и самоиндуцированная прозрачность 587
9.4. Двухслойная бароклиническая неустойчивость 603
9.5. Эффект слабой диссипации 609
9.6. Примечания 619

10. Численные исследования солитонов 627

10.1. Введение 627
10.2. Основные численные методы 628
10.2.1. Метод аппроксимирующих функций 629
10.2.2. Метод конечных разностей 632
10.2.3. Сходимость, согласованность и устойчивость 634
10.3. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона 636
10.3.1. Уравнение СГ 636
10.3.2. Уравнение фи-четыре 640
10.3.3. Двойное уравнение СГ 642
10.4. «Длинноволновые» уравнения 645
10.4.1. Уравнение КдФ и родственные уравнения 645
10.4.2. Регуляризованное длинноволновое уравнение 647

10.5. Другие уравнения с одной пространственной переменной . . . 649
10.6. Численные исследования для большого числа пространственных измерений 651
10.6.1. Уравнения КдФ и НЛШ в двух и трех пространственных измерениях 653
10.6.2. Нелинейные уравнения Клейна—Гордона в двух и трех пространственных измерениях 655
10.7. Примечания 658

Литература 660

Предметный указатель 687