В.И.Кляцкин

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

На основе функционального подхода излагается теория стохастических уравнении (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, краевые задачи и интегральные уравнения) и ее применения в задачах распространения волн в случайно-неоднородных средах. Развитый подход позволяет получить точное решение стохастических задач для ряда моделей флуктуирующих параметров (телеграфный, обобщенный телеграфный процессы, марковские процессы с конечным числом состояний, гауссовский марковский процесс и функции от этих процессов), что в свою очередь позволяет полностью решить задачи о стохастическом параметрическом резонансе и волнах в одномерных слоисто-неоднородных средах. Рассматривается также применение функционального подхода к задаче о распространении волн в трехмерных случайно-неоднородных средах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. Статистические характеристики случайных величин и процессов 9

§ 1. Случайные величины и их характеристики 9

§ 2. Вариационные (функциональные) производные 16

§ 3. Случайные процессы, поля и их характеристики 19

§ 4. Марковские процессы 30

Глава 2. Расщепление корреляций в динамических системах 44

§ 1. Примеры динамических систем 44

§ 2. Среднее значение произведения двух функционалов 48

§ 3. Гауссовский и пуассоновский случайные процессы 52

§ 4. Процессы телеграфного типа 57

§ 5. Марковские процессы 63

§ 6. Дельта-коррелированные случайные процессы 68

Глава 3. Приближение дельта-коррелированного случайного процесса 76

§ 1. Уравнение Эйнштейна — Фоккера (УЭФ) для системы дифференциальных уравнений 76

§ 2. Плотность вероятностей перехода 80

§ 3. Об условиях применимости уравнения Эйнштейна — Фоккера 82

§ 4. О методах решения УОФ 82

§ 5. Обобщение на случаи негауссовских флуктуации параметров 93

§ 6. Метод последовательных приближений 105

Глава 4. **Случайные процессы с конечным радиусом корреляции** 113

§ 1. О некоторых классах стохастических уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание 113

§ 2. Марковские процессы общего вида 119

§ 3. Процессы телеграфного типа 121
§ 4. Методы квантовой теории поля в динамике стохастических систем (стохастические интегральные уравнения) 138
Глава 5. Уравнения в частных производных и краевые задачи 158
§ 1. Стохастическое уравнение Лиувилля для уравнений в частных производных 158
§ 2. Статистическое усреднение 163
§ 3. Теория инвариантного погружения и стохастические краевые задачи 106
Глава 6. **Стохастический параметрический резонанс** **176**
§ 1. Приближение дельта-коррелированного случайного процесса 176
§ 2. Процессы с конечным радиусом корреляции 187
Глава 7. Распространение волн в одномерной случайно-неоднородной среде **193**
§ 1. Постановка задачи 193
§ 2. Статистические характеристики коэффициентов отражения и прохождения волны 199
§ 3. Флуктуации интенсивности волны внутри слоя среды (стохастический волновой параметрический резонанс) 203
§ 4. О влиянии краевых условий на флуктуации интенсивности волны 211
§ 5. О влиянии моделей среды на статистические характеристики задачи 215
5.1. Дельта-коррелированные процессы (217). 5.2. Телеграфный процесс (218). 5.3. Обобщенный телеграфный процесс (224).
§ 6. Двухпроводная линия и уравнения переноса 227
§ 7. О влиянии затухания волны на флуктуации интенсивности 231
Глава 8. Распространение вэлн в случайно-неоднородных средах (метод стохастического уравнения) **247**
§ 1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия 247
§ 2. Приближение диффузионного случайного процесса 258
§ 3. Метод последовательных приближений и условия применимости диффузионного приближения 276
§ 4. Амплитудно-фазовые флуктуации волны 279
Глава 9. Распространение волн в случайно-неоднородных средах (функциональный метод) **284**
§ 1. Континуальная запись решения задачи 284
§ 2. Статистическое описание волнового поля 288
§ 3. Флуктуации интенсивности плоской волны 293
3.1. Случайный фазовый экран (295). 3.2. Случайно-неоднородная среда (301).
Глава 10. Распространение волн в случайно-неоднородных средах (приближение геометрической оптики) **309**
§ 1. Диффузия лучей в случайно-неоднородных средах 309

§ 2. Амплитудно-фазовые флуктуации 318
§ 3. Геометрическое приближение в статистической теории волн 323
Заключение 329
Литература 332

Мефистофель (об алгебре) — Хотел бы вас предостеречь я в отношеньи сей науки — то вовсе не простая штука себя с разгона не вовлечь в пустые преобразованья: не разобравшись в основаньях, тут даже индексы не просто различать... А в общем, символ — вот что важно! Владея символами, можете отважно пускаться в изысканья в мире формул новых.

Курт Лассвитц, «Прост!»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистические задачи в настоящее время занимают значительное место в различных областях физики. Если даже не говорить о задачах, традиционно относящихся к статистической физике, то имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Хотя причины, вызывающие флуктуации, совершенно различны в различных задачах (это могут быть тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.), методы их теоретического рассмотрения часто очень схожи. При этом в ряде случаев статистическую природу самих флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо из модельной постановки задачи), а физические процессы можно описывать дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями.

В настоящее время весьма мощным аппаратом, позволяющим решать довольно сложные статистические задачи, является возникшая на основе теории броуновского движения [1—5] теория марковских случайных процессов и процессов диффузионного типа. Чисто математическим аспектам этой теории посвящена большая литература (см., например, [6—13]), и в данной книге подобные вопросы обсуждаться не будут.

Мы будем рассматривать статистическую теорию динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Основная задача заключается в получении замкнутых уравнений для статистических характеристик таких систем и их исследовании.

Наиболее подробно рассматриваются примеры, в которых флуктуирующие параметры являются гауссовскими случайными процессами (полями), более кратко обсуждаются обобщения на случай произвольных процессов.

Цель настоящей книги — показать, как различные физические задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены на основе общего подхода, по своей сути являющегося

*) Русский перевод в книге: *В. Лиуман*, Веселое и занимательное о числах и фигурах.— М.: Физматгиз, 1963, стр. 64.

обобщением теории броуновского движения. При этом выясняются интересные аналогии между весьма различными физическими задачами. Примеры, рассмотренные ниже, в основном заимствованы из статистической акустики и статистической радиофизики, что связано с интересами автора. Однако аналогичные задачи и методы их решения возникают и в статистической гидродинамике, физике плазмы, физике твердого тела, магнитной гидродинамике и т. д.

Метод, которым мы будем ниже пользоваться, представляет собой теорию, основанную на разложении решений по малому параметру, по существу являющемуся отношением времени корреляции случайного воздействия ко времени наблюдения или другим характерным временным масштабам задачи (в ряде случаев это будут не временные, а пространственные масштабы). В теории броуновского движения этому приближению соответствует пренебрежение временем между случайными соударениями по сравнению со всеми другими временными масштабами.

Применительно к задачам о динамических системах, движение которых подчиняется обыкновенным дифференциальным стохастическим уравнениям с гауссовскими флуктуациями параметров, используемый метод приводит к приближению марковского случайного процесса; соответствующее уравнение для плотности вероятностей перехода имеет вид уравнения Эйнштейна — Фоккера. В более сложных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, этот метод приводит к обобщенному уравнению типа Эйнштейна — Фоккера в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи, в связи с чем он может быть назван приближением диффузионного случайного процесса. Для динамических систем с негауссовскими флуктуациями параметров предлагаемый метод также приводит к приближению марковского процесса. Плотность вероятностей решения соответствующих динамических стохастических уравнений удовлетворяет при этом замкнутому операторному уравнению. Так, для случая систем с флуктуациями параметров, имеющими пуассоновский характер, получаются интегро-дифференциальные уравнения типа уравнения Колмогорова — Феллера.

В последнее время во многих работах, в которых используется уравнение Эйнштейна — Фоккера (в дальнейшем мы будем использовать сокращение УЭФ), оно выписывается на основе интуитивных соображений, а динамические уравнения привлекаются лишь для подсчета коэффициентов, входящих в УЭФ. Такой подход, вообще говоря, непоследователен. Действительно, статистическая задача полностью определена динамическими уравнениями и предположениями о статистике случайных воздействий. При этом УЭФ должно являться логическим следствием динамических уравнений и тех или иных предположений о характере случайных воздействий. Ясно, что далеко не во всех случаях решение задачи будет сводиться к УЭФ.

Ниже мы будем использовать функциональный метод получения УЭФ, предложенный Новиковым [14] в теории турбулентности и развитый в работах автора и Татарского [15] для общего случая динамических систем. Этот метод позволяет получить УЭФ, исходя непосредственно из динамического уравнения задачи, а также исследовать поправки, связанные с конечностью времени корреляций случайных воздействий. При этом могут быть выяснены те ограничения, при которых справедливо УЭФ. Для негауссовских флуктуаций параметров метод получения соответствующих уравнений для статистических характеристик динамических систем предложен в работах автора и Татарского [16, 17].

Развитый метод позволяет также (для определенного класса задач и случайных процессов) получить замкнутые уравнения для плотности вероятностей решения задач с учетом конечности времени корреляции случайных воздействий [18—23]. Это прежде всего системы с флуктуациями параметров в виде процессов телеграфного типа и гауссовских марковских процессов. С помощью теории инвариантного погружения удается также исследовать и стохастические краевые задачи [24]. Другие методы и подходы к решению стохастических уравнений описаны в ряде обзорных работ, появившихся за последнее время (см., например, [25—27]).

Настоящую книгу можно рассматривать как расширенное и переработанное переиздание книги автора [28], где круг вопросов ограничивался только δ-коррелированными процессами и полями. В настоящее издание добавлены как вопросы общетеоретического характера (системы с марковскими флуктуациями параметров, интегральные уравнения, краевые задачи и т. п.), так и новые существенные результаты, полученные за последнее время, для конкретных физических задач, связанных с теорией волн в случайно-неоднородных средах. Наряду с этим в книге опущены разделы из [28], связанные с задачами статистической гидродинамики, так как такого существенного продвижения, как в теории волн, в этой области не произошло. Это позволяет рассматривать настоящую книгу как новую, не связанную с монографией [28].

Несколько слов о структуре книги. По своему содержанию книгу можно разбить на три части.

В первой части (гл. 1, 2), следуя монографиям [29—31] и работе [32], мы даем определения и некоторые правила вычислений с вариационными производными и характеристическим функционалом. В этой части книги также кратко рассматриваются некоторые вопросы, связанные с нахождением статистических характеристик случайных величин и процессов, мало освещенные или совсем не освещенные в учебной литературе.

Вторая часть (гл. 3—5) посвящена общей теории статистического описания динамических систем (теория стохастических уравнений), а третья часть (гл. 6—10) посвящена приложениям общей теории к вопросу о нахождении и анализе статистических характеристик волн, распространяющихся в случайно-неоднород-

ных средах. При этом мы ограничиваемся кругом задач, которые в настоящее время в принципе можно считать полностью решенными. Это задача о стохастическом параметрическом резонансе для различных моделей флуктуаций параметров, допускающая точное решение, которую можно рассматривать как вводную задачу к статистической теории волн в случайно-неоднородных средах. Это задача о распространении волн в одномерной среде, для которой получена картина поведения статистических характеристик интенсивности волны как внутри слоя флуктуирующей среды, так и вне его, и пространственная задача о распространении волн в случайно-неоднородных средах, рассмотренная в малоугловом приближении (приближение параболического уравнения).

Нумерация формул своя в каждом параграфе. При этом в ссылках используется двойная или тройная нумерация. Двойная нумерация используется для ссылок на формулы данной главы, а тройная — на формулы из других глав.

Необходимо отметить, что количество как чисто математических, так и физических работ, посвященных излагаемому материалу, исчисляется тысячами. Так, например, в обзорной работе [33], посвященной состоянию теории распространения волн в случайно-неоднородной среде на 1970 год, насчитывается более 540 библиографических ссылок. Поэтому дать какую-либо полную библиографию рассматриваемых вопросов физически невозможно. Ввиду этого я ограничился ссылками лишь на те работы, результаты которых непосредственно используются или обсуждаются в данной монографии.

Воспользовавшись случаем, выражаю искреннюю благодарность В. И. Татарскому за многочисленные стимулирующие обсуждения проблем, затронутых в книге, и постоянное внимание. Практически, на протяжении последних десяти лет, весь материал книги докладывался на семинарах по статистической радиофизике, возглавляемых С. М. Рытовым. Я признателен как С. М. Рытову, так и всем участникам этих семинаров за внимание и полезные стимулирующие дискуссии. Я признателен также сотрудникам журнала «Радиофизика», на страницах которого была опубликована подавляющая часть работ, вошедших в монографию.

Г. И. Бабкин просмотрел большую часть рукописи, и его критические замечания во многом способствовали улучшению изложения ее материала.

Глава 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

§ 1. Случайные величины и их характеристики

Статистические характеристики случайной величины z полностью описываются функцией $p(z)$, называемой плотностью вероятностей, такой, что

$$p(z) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz\, p(z) = 1. \tag{1.1}$$

Среднее значение произвольной функции от случайной величины определяется с помощью равенства *)

$$\langle f(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, p(z) f(z). \tag{1.2}$$

Важной величиной, полностью характеризующей статистические характеристики случайной величины z, является характеристическая функция величины z, определяемая равенством

$$\Phi(v) = \langle \exp\{ivz\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, p(z) \exp\{ivz\}. \tag{1.3}$$

Зная характеристическую функцию, можно получить как плотность вероятностей (преобразованием Фурье), так и моменты

$$M_n = \langle z^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, p(z)\, z^n = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dv}\right)^n \Phi(v)\,|_{v=0}, \tag{1.4}$$

кумулянты (или семиинварианты)

$$K_n = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dv}\right)^n \Theta(v)\,|_{v=0}, \tag{1.5}$$

где $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$, и другие статистические характеристики. Через моменты и кумулянты величины z функции $\Phi(v)$ и $\Theta(v)$

*) Если случайная величина z может принимать лишь дискретные значения z_k с вероятностями p_k, то интегралы в (1.1) и (1.2) заменяются на суммы по соответствующим индексам.

выражаются с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_n v^n, \quad \Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n v^n. \tag{1.6}$$

Между моментами и кумулянтами случайной величины z имеется нелинейная связь. Для нахождения ее заметим, что

$$\frac{d}{dv}\Phi(v) = \Phi(v)\frac{d\Theta(v)}{dv}.$$

Поэтому

$$\frac{d^n}{dv^n}\Phi(v) = \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left(\Phi\frac{d\Theta}{dv}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{d^{k+1}\Theta}{dv^{k+1}}\frac{d^{n-1-k}\Phi}{dv^{n-1-k}}. \tag{1.7}$$

Полагая в формуле (1.7) $v = 0$, получаем рекуррентную связь между моментами и кумулянтами величины z в виде

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} K_k M_{n-k} \qquad (M_0 = 1,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{1.8}$$

с помощью которой легко последовательно получать формулы, выражающие моменты через кумулянты и наоборот. Так, из (1.8) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1, \\ M_2 &= K_1 M_1 + K_2, \\ M_3 &= K_1 M_2 + 2K_2 M_1 + K_3 \text{ и т. д.,} \end{aligned} \tag{1.9}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered} M_1 = K_1,\ M_2 = K_2 + K_1^2,\ M_3 = K_3 + 3K_2K_1 + K_1^3, \ldots; \\ K_1 = M_1,\ K_2 = M_2 - M_1^2,\ K_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3, \ldots \end{gathered} \tag{1.10}$$

Для многомерных случайных величин $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ полное статистическое описание содержится в характеристической функции

$$\Phi(v) = \langle \exp\{ivz\}\rangle \qquad (v = \{v_1, \ldots, v_n\}). \tag{1.11}$$

Соответствующая совместная плотность вероятностей для величин $z_1, \ldots, z_n$ является преобразованием Фурье от $\Phi(v)$, т. е.

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int dv\,\Phi(v)\exp\{-ivx\} \qquad (x = \{x_1, \ldots, x_n\}). \tag{1.12}$$

Подставляя функцию $\Phi(v)$ из (1.11) в (1.12) и выполняя интегрирование по v, получаем равенство

$$P(x) = \langle\delta(x - z)\rangle \equiv \langle\delta(x_1 - z_1)\ldots\delta(x_n - z_n)\rangle, \tag{1.13}$$

которое можно принять за определение плотности вероятностей случайной величины z *).

Моменты и кумулянты случайной величины z при этом определяются равенствами

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \ldots \partial v_{i_n}} \Phi(v)\,|_{v=0},$$
$$K_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \ldots \partial v_{i_n}} \Theta(v)\,|_{v=0}, \tag{1.14}$$

где $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$, а сами функции $\Phi(v)$ и $\Theta(v)$ выражаются через M и K с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_{i_1,\ldots,i_n} v_{i_1} \ldots v_{i_n},$$
$$\Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{i_1,\ldots,i_n} v_{i_1} \ldots v_{i_n}. \tag{1.15}$$

В качестве примеров рассмотрим случайные величины z двух типов.

1) Величина z — гауссовская случайная величина с плотностью вероятностей $p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}$. Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp\left\{-\frac{v^2\sigma^2}{2}\right\}, \qquad \Theta(v) = -\frac{\sigma^2 v^2}{2},$$
$$M_1 = K_1 = 0, \quad M_2 = K_2 = \sigma^2, \quad K_{n>2} = 0. \tag{1.16}$$

Рекуррентное равенство (1.8) в этом случае принимает вид

$$M_n = (n-1)\,\sigma^2 M_{n-2} \qquad (n = 2, \ldots)\ (\sigma^2 = \langle z^2 \rangle), \tag{1.17}$$

откуда следует, что

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (2n-1)!!\,\sigma^{2n}. \tag{1.17'}$$

Рассмотрим теперь среднюю величину $\langle z f(z) \rangle$, где $f(x)$ — произвольная детерминированная функция **). Средние характеристики

---

*) Отметим, что если случайная величина z может принимать лишь дискретные значения z_i $(i = 1, 2, \ldots)$ с вероятностями p_i, то в этом случае аналогом формулы (1.13) является формула

$$p_k = \langle \delta_{z,\, z_k} \rangle,$$

где $\delta_{i,\,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$ — символ Кронекера.

**) На функцию $f(x)$ накладывается только ограничение вида $f(x) \exp\{-x^2/2\sigma^2\} \to 0$ достаточно быстро при $x \to \pm\infty$.

такого типа далее в книге будут фигурировать довольно часто. Согласно определению (1.2)

$$\langle zf(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, zf(z)\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\langle zf(z)\rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{df(z)}{dz}\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\} \equiv \sigma^2\left\langle\frac{df(z)}{dz}\right\rangle. \quad (1.18)$$

Рассмотрим теперь среднее значение $\langle\exp\{\omega z\}\, f(z)\rangle$, где $f(x)$ по-прежнему произвольная функция, а величина ω может быть и комплексным числом. Для среднего значения имеем

$$\langle e^{\omega z} f(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z)\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}+\omega z\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z+\omega\sigma^2)\exp\left\{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right\}\langle f(z+\omega\sigma^2)\rangle. \quad (1.19)$$

В частности, дифференцируя (1.19) по ω и полагая $\omega = 0$, мы приходим к формуле (1.18), а полагая в (1.18) $f(z) = z^{n-1}$, мы приходим к рекуррентному равенству (1.17).

Из формул (1.19) вытекают формулы, полезные для практических применений:

$$\langle e^{\omega z}\rangle = \exp\left\{\frac{\omega^2\langle z^2\rangle}{2}\right\}, \quad \langle ze^{\omega z}\rangle = \omega\langle z^2\rangle\langle e^{\omega z}\rangle \text{ и т. д.} \quad (1.20)$$

Если же величина $\mathbf{z}$ является случайным гауссовским вектором с компонентами z_i ($\langle z_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$), то характеристическая функция описывается равенством

$$\Phi(\mathbf{v}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}B_{ij}v_iv_j\right\}, \quad \Theta[\mathbf{v}] = -\frac{1}{2}B_{ij}v_iv_j, \quad (1.21)$$

где $B_{ij} = \langle z_iz_j\rangle$, а по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В этом случае вместо (1.18) — (1.20) легко получить равенства

$$\begin{gathered}\langle z_i f(\mathbf{z})\rangle = B_{ij}\left\langle\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_j}\right\rangle,\\ \langle e^{\mathbf{vz}} f(\mathbf{z})\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}B_{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta\right\}\langle f(z_\gamma + B_{\gamma\delta}v_\delta)\rangle \text{ и т. д.}\end{gathered} \quad (1.22)$$

Отметим, что для вычисления средних значений типа формулы (1.19) может быть полезен следующий прием. Вместо случайной

величины z и функции от нее $f(z)$ введем двумерную случайную величину $(z, f(z))$, статистические характеристики которой описываются характеристической функцией

$$\Phi(v, u) = \langle \exp\{ivz + iuf(z)\}\rangle = \exp\{\Theta(v, u)\}.$$

В этом случае величины типа (1.18), (1.19) будут просто описываться производными функции $\Phi(v, u)$ при $v = u = 0$. Для гауссовской величины z со средним значением, равным нулю, согласно (1.19) имеет место равенство

$$\Phi(v, u) = \exp\left\{-\frac{v^2\langle z^2\rangle}{2}\right\}\langle \exp\{iuf(z + iv\langle z^2\rangle)\}\rangle, \qquad (1.23)$$

и в этом случае

$$\Theta(v, u) = -\frac{v^2\langle z^2\rangle}{2} + \ln\langle \exp\{iuf(z + iv\langle z^2\rangle)\}\rangle. \qquad (1.24)$$

Дифференцируя (1.23) по u и v и полагая их равными нулю, мы приходим, естественно, к формулам, полученным выше, а разложение в ряд Тейлора функции $\Theta(v, u)$ определяет совместные кумулянты величин z и $f(z)$. Так, в частности, из (1.24) следует формула [34]

$$K_{n,1} = \frac{1}{i^{n+1}}\frac{\partial^{n+1}}{\partial v^n \partial u}\Theta(v, u)\big|_{v=u=0} =$$

$$= \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n}{\partial v^n}\langle f(z + iv\langle z^2\rangle)\rangle\big|_{v=0} \equiv \langle z^2\rangle^n\langle f^{(n)}(z)\rangle, \qquad (1.25)$$

описывающая кумулянтную связь между гауссовской случайной величиной z и функцией от нее.

Остановимся теперь на одной предельной теореме, связанной с гауссовской случайной величиной. Пусть случайная величина ξ принимает два значения $\pm a_0$ с вероятностями $^1/_2$, т. е. ее плотность распределения вероятностей имеет вид $p(\xi) = \frac{1}{2}[\delta(\xi - a_0) + \delta(\xi + a_0)]$. Характеристическая функция этой величины, очевидно, равна

$$\Phi(\lambda) = \langle \exp\{i\lambda\xi\}\rangle = \cos\lambda a_0. \qquad (1.26)$$

Пусть теперь $z_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, где ξ_i — статистически независимые величины, определенные выше. Тогда характеристическая функция величины z_N

$$\Phi_N(\lambda) = [\cos\lambda a_0]^N. \qquad (1.26')$$

Положим $a_0 = \sigma/\sqrt{N}$ и перейдем к пределу при $N \to \infty$. В результате получаем характеристическую функцию

$$\Phi_\infty(\lambda) = \exp\{-\lambda^2\sigma^2/2\}, \qquad (1.26'')$$

соответствующую гауссовской случайной величине z с нулевым

средним значением и дисперсией, равной σ^2. Таким образом, случайная величина z_N при $N \to \infty$ распределена по гауссовскому закону.

2) Величина $z \equiv n$ — целочисленная случайная величина, распределенная по закону Пуассона $p_n = \frac{\bar{n}}{n!} \exp\{-\bar{n}\}$, где $\bar{n}$ — среднее значение величины n. Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp\{\bar{n}(e^{iv} - 1)\}, \quad \Theta(v) = \bar{n}(e^{iv} - 1),$$
$$K_n \equiv \bar{n}. \tag{1.27}$$

Для такой случайной величины рекуррентное равенство (1.8) принимает вид

$$M_l = \bar{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(l-1)!}{k!\,(l-1-k)!} M_k \equiv \bar{n} \langle (n+1)^{l-1} \rangle. \tag{1.28}$$

Рассмотрим теперь среднее значение $\langle nf(n) \rangle$, где $f(x)$ — произвольная функция, определенная в целочисленных точках. Для нее получаем

$$\langle nf(n) \rangle = e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} f(n) =$$
$$= \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} f(n+1) \equiv \bar{n} \langle f(n+1) \rangle. \tag{1.29}$$

Полагая в (1.29) $f(n) = n^{l-1}$, мы приходим к формуле (1.28).

В общем случае произвольного распределения вероятностей величины z для вычисления среднего значения $\langle zf(z) \rangle$, где $f(x)$ — произвольная детерминированная функция, воспользуемся приемом, который будет широко использоваться в дальнейшем. Вместо функции $f(z)$ введем функцию $f(z+\eta)$, где η — произвольная детерминированная величина. Разложим $f(z+\eta)$ в ряд Тейлора по z, т. е. представим ее в виде

$$f(z+\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta) z^n \equiv \exp\left\{z \frac{d}{d\eta}\right\} f(\eta),$$

где введен оператор сдвига по η. Далее можно написать цепочку равенств

$$\langle zf(z+\eta) \rangle = \left\langle z \exp\left\{z \frac{d}{d\eta}\right\} \right\rangle f(\eta) =$$
$$= \frac{\left\langle z \exp\left\{z \frac{d}{d\eta}\right\} \right\rangle}{\left\langle \exp\left\{z \frac{d}{d\eta}\right\} \right\rangle} \left\langle \exp\left\{z \frac{d}{d\eta}\right\} \right\rangle f(\eta) = \Omega\left(\frac{d}{i\,d\eta}\right) \langle f(z+\eta) \rangle, \tag{1.30}$$

где функция

$$\Omega(v) = \frac{\langle z e^{izv} \rangle}{\langle e^{ivz} \rangle} = \frac{d}{i\,dv} \ln \Phi(v) = \frac{d}{i\,dv} \Theta(v), \tag{1.31}$$

а $\Phi(v)$ — характеристическая функция случайной величины z. Используя теперь для функции $\Theta(v)$ разложение в ряд Тейлора (1.6), для функции $\Omega(v)$ получаем разложение в виде ряда

$$\Omega(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n. \tag{1.32}$$

Учитывая, что переменная η в правой части (1.30) входит только в комбинации $z+\eta$, можно дифференцирование по η заменить на дифференцирование по z (при этом оператор $\Omega\left(\frac{d}{i\,d\eta}\right)$ следует занести под знак усреднения) и положить $\eta = 0$. В результате получаем равенство

$$\langle z f(z) \rangle = \left\langle \Omega\left(\frac{d}{i\,dz}\right) f(z) \right\rangle, \tag{1.33}$$

которое, используя для $\Omega(v)$ разложение (1.32), можно переписать в виде ряда по кумулянтам K_n:

$$\langle z f(z) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\langle \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right\rangle. \tag{1.34}$$

Формула (1.34) является обобщением выражений (1.18), (1.29) на случай произвольного распределения вероятностей случайной величины z. Полагая в (1.34) $f(z) \equiv z^{k-1}$, мы, естественно, приходим к равенству (1.8).

Для многомерной случайной величины $\mathbf{z}$ вместо формулы (1.34) имеет место ее очевидное обобщение

$$\langle z_i f(\mathbf{z}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{i, i_1, \ldots, i_n} \left\langle \frac{\partial^n}{\partial z_{i_1} \ldots \partial z_{i_n}} f(\mathbf{z}) \right\rangle. \tag{1.35}$$

Как мы увидим в следующей главе, все полученные выше формулы легко обобщаются на случайные процессы $z(t)$ и поля $z(x, t)$. Однако прежде чем мы перейдем к случайным процессам, заметим, что для них, в отличие от случайных величин, переменными являются функции. Поэтому, естественно, вместо операций дифференцирования, которые возникали выше, у нас возникнут операции функционального дифференцирования (варьирования), на понятии которого следует подробнее остановиться.

§ 2. Вариационные (функциональные) производные

Прежде всего напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

а) $$F[\varphi(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, a(t)\, \varphi(t),$$

где $a(t)$ — заданная (фиксированная) функция, а пределы t_1, t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными. Это линейный функционал.

б) $$F[\varphi(t)] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\, d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\, \varphi(\tau_1)\, \varphi(\tau_2),$$

где $B(\tau_1, \tau_2)$ — фиксированная заданная функция. Это квадратичный функционал.

в) $$F[\varphi(t)] = f(\Phi[\varphi(t)]),$$

где $f(x)$ — заданная функция, а величина $\Phi[\varphi(t)]$ сама является функционалом.

Оценим разность одного и того же функционала, взятого для двух функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau)+\delta\varphi(\tau)$, где $\delta\varphi(\tau)\neq 0$ при $t-\frac{1}{2}\Delta t<\tau<t+\frac{1}{2}\Delta t$ (рис. 1). Вариацией функционала называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

$$\delta F[\varphi] = \{F[\varphi+\delta\varphi] - F[\varphi]\}.$$

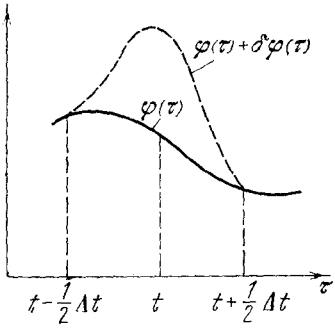

Рис. 1. К определению вариационной производной. Штриховой линией изображена функция $\varphi(\tau)$, возмущенная на отрезке Δt на величину $\delta\varphi(\tau)$.

Вариационной (или функциональной) производной называется предел *)

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\delta F[\varphi]}{\int\limits_{\Delta t} d\tau\, \delta\varphi(\tau)}. \qquad (2.1)$$

Вариационная производная от функционала $F[\varphi]$ является снова функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим еще от точки t как от параметра. Следовательно, эта вариационная производная будет

*) Отметим, что правильнее было бы писать вместо $\delta F[\varphi]/\delta\varphi(t)$ выражение $\delta F/\delta\varphi(t)dt$ (хотя бы из соображений размерности), см., например, [29, 30]. Однако мы будем придерживаться обозначения $\delta F/\delta\varphi(t)$ с целью сокращения записи.

иметь производные двоякого типа: ее можно дифференцировать обычным образом по параметру t, а можно также составить ее вариационную производную по $\varphi(\tau)$ в точке $\tau = \tilde{t}$, являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(\tilde{t})}\left[\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)}\right] = \frac{\delta^2 F[\varphi]}{\delta\varphi(\tilde{t})\,\delta\varphi(t)}.$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим от пары точек $\tilde{t}$, t, и т. д.

Найдем вариационные производные от функционалов а), б), в). В случае а)

$$\delta F[\varphi] = F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, a(\tau)\,\delta\varphi(\tau) = \int_{t-\frac{1}{2}\Delta t}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} d\tau\, a(\tau)\,\delta\varphi(\tau).$$

Если $a(t)$ непрерывна на отрезке Δt, то по теореме о среднем $\delta F[\varphi] = a(t')\int_{\Delta t} d\tau\,\delta\varphi(\tau)$, где точка t' принадлежит отрезку $[t - \frac{1}{2}\Delta t,\ t + \frac{1}{2}\Delta t]$, так что

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t\to 0} a(t') = a(t). \tag{2.2}$$

Аналогично в случае б) получаем

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau\,[B(\tau, t) + B(t, \tau)]\,\varphi(\tau) \qquad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию $B(\tau_1, \tau_2)$ всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов. В случае в)

$$F[\varphi + \delta\varphi] = f(\Phi[\varphi + \delta\varphi]) = f(\Phi[\varphi] + \delta\Phi) =$$

$$= f(\Phi[\varphi]) + \frac{\partial f(\Phi[\varphi])}{\partial\Phi}\delta\Phi + \ldots = F[\varphi] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi])}{\partial\Phi}\delta\Phi + \ldots$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} f(\Phi[\varphi]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi])}{\partial\Phi}\frac{\delta\Phi[\varphi]}{\delta\varphi(t)}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим функционал $\Phi[\varphi] = F_1[\varphi]\,F_2[\varphi]$. В этом случае получаем

$$\delta\Phi = \{\Phi[\varphi + \delta\varphi] - \Phi[\varphi]\} =$$

$$= \{F_1[\varphi + \delta\varphi]\,F_2[\varphi + \delta\varphi] - F_1[\varphi]\,F_2[\varphi]\} =$$

$$= F_1[\varphi]\,\delta F_2[\varphi] + F_2[\varphi]\,\delta F_1[\varphi]$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_1[\varphi] F_2[\varphi] = F_1[\varphi] \frac{\delta F_2[\varphi]}{\delta\varphi(t)} + F_2[\varphi] \frac{\delta F_1[\varphi]}{\delta\varphi(t)}. \qquad (2.4)$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала $\varphi(\tau_0)$ по функции $\varphi(t)$ соотношением

$$\frac{\delta\varphi(\tau_0)}{\delta\varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \qquad (2.5)$$

Формулу (2.5) можно обосновать, например, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \qquad (2.6)$$

Для этого функционала, согласно (2.2), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \qquad (2.7)$$

Переходя формально к пределу при $\sigma \to 0$ в выражениях (2.6) и (2.7), мы и получаем формулу (2.5). С помощью формулы (2.5) очень удобно производить дифференцирование. Рассмотрим, например, квадратичный функционал вида б):

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\, d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\, \varphi(\tau_1)\, \varphi(\tau_2) \overset{(2.4)}{=}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\, d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \left[\frac{\delta\varphi(\tau_1)}{\delta\varphi(t)} \varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_1) \frac{\delta\varphi(\tau_2)}{\delta\varphi(t)}\right] \overset{(2.5)}{=}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, [B(t, \tau) + B(\tau, t)]\, \varphi(\tau) \qquad (t_1 < t < t_2).$$

В качестве другого примера рассмотрим функционал $F[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)$. В этом случае

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} \overset{(2.3)}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\partial L}{\partial\varphi} + \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\frac{d}{d\tau}\right] \frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)} \overset{(2.5)}{=}$$

$$= \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{}} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right),$$

если точка t принадлежит интервалу (t_1, t_2).

Подобно тому, как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функцио-

нальный ряд Тейлора *) по функции $\eta(\tau)$ в окрестности $\eta \sim 0$:

$$F[\varphi(\tau)+\eta(\tau)] = F[\varphi(\tau)] + \int dt\, \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)}\,\eta(t) + \\ + \frac{1}{2!}\iint dt_1\, dt_2\, \frac{\delta^2 F[\varphi]}{\delta\varphi(t_1)\,\delta\varphi(t_2)}\,\eta(t_1)\,\eta(t_2) + \ldots \qquad (2.8)$$

Вывод этой формулы см., например, в [30, приложение 1]. Отметим, что операторное выражение типа

$$1 + \int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \\ + \frac{1}{2!}\iint dt_1\, dt_2 \eta(t_1)\,\eta(t_2)\, \frac{\delta^2}{\delta\varphi(t_1)\,\delta\varphi(t_2)} + \ldots = \\ = 1 + \int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!}\left[\int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\right]^2 + \ldots \qquad (2.9)$$

можно сокращенно записать в виде оператора $\exp\left\{\int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\right\}$, действие которого надо понимать именно в смысле разложения (2.9). С помощью этого оператора формулу (2.8) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau)+\eta(\tau)] = \exp\left\{\int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\right\} F[\varphi(\tau)], \qquad (2.10)$$

что позволяет нам интерпретировать оператор $\exp\left\{\int dt\, \eta(t)\, \frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\right\}$ как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал $F[t;\ \varphi(\tau)]$, зависящий от параметра t. Этот функционал можно дифференцировать по t, а также найти его вариационную производную по $\varphi(t')$. Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\delta F[t;\ \varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta\varphi(t')}\, \frac{\partial}{\partial t} F[t;\ \varphi(\tau)]. \qquad (2.11)$$

Если область изменения τ не зависит от t, то равенство (2.11) очевидно. Далее в книге мы будем иметь дело с такими функционалами F, у которых $0 \leqslant \tau \leqslant t$. В этом случае равенство (2.11) проверяется путем разложения $F[t;\ \varphi(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора.

§ 3. Случайные процессы, поля и их характеристики

Если мы имеем случайную функцию $z(t)$ (случайный процесс), то для ее полного статистического описания достаточно знать характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \langle \exp\{i \int d\tau\, v(\tau)\, z(\tau)\}\rangle, \qquad (3.1)$$

*) Здесь и далее, когда у интеграла не указаны пределы, предполагается, что они бесконечны.

где функция $v(\tau)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция, заменяющая совокупность чисел $v_1, \ldots, v_n$ в (1.11).

Зная функционал $\Phi[v(\tau)]$, можно найти такие характеристики случайной функции, как $\langle z(t)\rangle$, $\langle z(t_1)\ldots z(t_n)\rangle$ и т. д.

Подействуем на (3.1) оператором $\delta/\delta v(t)$ и внесем его под знак среднего (эти операции можно переставлять), тогда получаем равенство

$$\frac{\delta\Phi[v(\tau)]}{\delta v(t)} = \left\langle \frac{\delta}{\delta v(t)} \exp\left\{i\int d\tau\, v(\tau)\, z(\tau)\right\}\right\rangle = \\ = i\left\langle z(t)\exp\left\{i\int d\tau\, v(\tau)\, z(\tau)\right\}\right\rangle.$$

Аналогичным образом получаем формулу

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta v(t_1)}\right)\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta v(t_n)}\right)\Phi[v(\tau)] = \\ = \left\langle z(t_1)\ldots z(t_n)\exp\left\{i\int d\tau\, v(\tau)\, z(\tau)\right\}\right\rangle. \qquad (3.2)$$

Если в формуле (3.2) положить $v(t) = 0$, то получим равенство

$$\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n}{\delta v(t_1)\ldots\delta v(t_n)}\Phi[v(\tau)]\big|_{v=0} = \langle z(t_1)\ldots z(t_n)\rangle \equiv M_n(t_1, \ldots, t_n), \qquad (3.3)$$

т. е. по характеристическому функционалу можно найти n-точечные моменты случайной функции.

Раскладывая $\Phi[v]$ в функциональный ряд Тейлора, получаем, согласно (2.8) и (3.3), выражение для характеристического функционала через моментные функции процесса $z(t)$:

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\ldots\int dt_1\ldots dt_n M_n(t_1, \ldots, t_n)\, v(t_1)\ldots v(t_n). \qquad (3.4)$$

Представим теперь $\Phi[v(\tau)]$ в виде

$$\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}. \qquad (3.5)$$

Тогда функционал $\Theta[v(\tau)]$ также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\ldots\int dt_1\ldots dt_n K_n(t_1, \ldots, t_n)\, v(t_1)\ldots v(t_n), \qquad (3.6)$$

где функция

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n}{\delta v(t_1)\ldots\delta v(t_n)}\Theta[v(\tau)]\big|_{v=0}$$

называется кумулянтной функцией процесса $z(t)$ n-го порядка,

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля $f(\boldsymbol{x}, t)$, где для определенности через $\boldsymbol{x}$, t обозначены пространственные и временная координаты, хотя роль временной координаты в ряде случаев может играть и одна выделенная пространственная координата:

$$\Phi[v(\boldsymbol{x}, t)] = \left\langle \exp\left\{i \int d\boldsymbol{x} \int dt\, v(\boldsymbol{x}, t) f(\boldsymbol{x}, t)\right\}\right\rangle = \\ = \exp\{\Theta[v(\boldsymbol{x}, t)]\}, \quad (3.7)$$

а также моментные и кумулянтные функции n-го порядка:

$$M_n(\boldsymbol{x}_1, t_1; \ldots; \boldsymbol{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\boldsymbol{x}_1, t_1) \ldots \delta v(\boldsymbol{x}_n, t_n)} \Phi[v(\boldsymbol{x}, t)]|_{v=0},$$

$$K_n(\boldsymbol{x}_1, t_1; \ldots; \boldsymbol{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\boldsymbol{x}_1, t_1) \ldots \delta v(\boldsymbol{x}_n, t_n)} \Theta[v(\boldsymbol{x}, t)]|_{v=0}. \quad (3.7')$$

Если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ — векторное поле, то в формуле (3.7) следует считать $\boldsymbol{v}$ векторной функцией.

Перейдем теперь к конкретным примерам случайных процессов. Рассмотрим прежде всего случай непрерывного процесса — гауссовского случайного процесса $z(t)$ со средним значением, равным нулю ($\langle z(t)\rangle = 0$). В этом случае функция $z(t)$ для любых фиксированных значений $t_1, \ldots, t_n$ имеет совместное гауссовское распределение. Рассмотрим случайную величину $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, v(\tau)\, z(\tau)$ ($v(\pm\infty) = 0$). Она имеет гауссовское распределение

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A} \exp\left\{-\frac{(A - \langle A\rangle)^2}{2\sigma_A^2}\right\}$$

с параметрами

$$\langle A\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, v(\tau) \langle z(\tau)\rangle = 0,$$

$$\sigma_A^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_1\, d\tau_2 v(\tau_1)\, v(\tau_2)\, B(\tau_1, \tau_2),$$

где $B(\tau_1, \tau_2) = \langle z(\tau_1)\, z(\tau_2)\rangle$ — корреляционная функция процесса $z(t)$. Среднее значение величины $\langle \exp\{iA\}\rangle$, согласно (1.20), равно

$$\langle \exp\{iA\}\rangle_A = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_A^2\right\},$$

и, следовательно, для характеристического функционала гауссовского случайного процесса получаем выражение

$$\Phi[v(\tau)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d\tau_1\, d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\, v(\tau_1)\, v(\tau_2)\right\}. \quad (3.8)$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является функция

$$K_2(t_1, \quad t_2) = B(t_1, \quad t_2)$$

и

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2). \tag{3.9}$$

Рассмотрим n-ю вариационную производную от $\Phi[v(\tau)]$. Для нее получаем цепочку равенств

$$\frac{\delta^n}{\delta v(t_1)\ldots\delta v(t_n)}\Phi[v(\tau)] = \frac{\delta^{n-1}}{\delta v(t_2)\ldots\delta v(t_n)}\frac{\delta\Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)}\Phi[v(\tau)] =$$

$$= \frac{\delta^2\Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)}\frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3)\ldots\delta v(t_n)}\Phi[v(\tau)] +$$

$$+ \frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3)\ldots\delta v(t_n)}\frac{\delta\Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)}\frac{\delta\Phi[v(\tau)]}{\delta v(t_2)}.$$

Полагая теперь $v = 0$, получаем для моментных функций гауссовского процесса $z(t)$ рекуррентное равенство, обобщающее формулу (1.17):

$$M_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=2}^{n} B(t_1, t_k) M_{n-2}(t_2, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n). \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что для гауссовского процесса $z(t)$ со средним значением, равным нулю, все моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка определяются суммой, в которой процессы $z(t_i)\, z(t_k)$ усредняются попарно всевозможными способами.

Отметим, что если в формуле (3.9) функция $v(\tau)$ отлична от нуля только в интервале времени $(0, t)$, то

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i\int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau)\right\}\right\rangle =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2)\right\}, \tag{3.9'}$$

и в этом случае функционал $\Phi_t[v(\tau)]$, как функция параметра t, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi_t}{\partial t} = -v(t)\int_0^t d\tau\, B(t, \tau) v(\tau)\Phi_t, \quad \Phi_0 = 1. \tag{3.11}$$

Перейдем теперь к примерам разрывных процессов. Разрывные процессы — это такие случайные функции, у которых изменение поведения происходит в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, заданные статистическим образом. Прежде всего для

описания разрывных процессов требуется знание статистики этих моментов времени или знание статистики числа $n(0, t)$ попадания точек t_i на интервал времени $(0, t)$. При этом имеет место равенство

$$n(0, t) = n(0, t') + n(t', t) \quad (0 \leqslant t' \leqslant t). \quad (3.12)$$

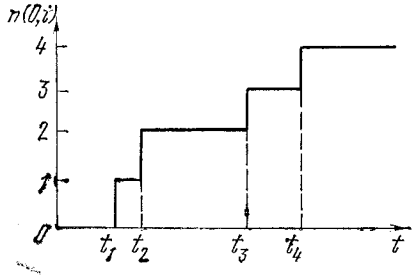

Рис. 2. Одна из возможных реализаций процесса $n(0, t)$.

Сама величина $n(0, t)$ является случайным процессом, возможная реализация которого изображена на рис. 2. Совокупность точек разрыва $t_1, t_2, \ldots$ процесса $z(t)$ называется потоком точек. Ниже мы будем рассматривать пуассоновский стационарный поток точек (см., например, [35]), у которого вероятность выпадания n точек на интервале (t_1, t_2) определяется формулой Пуассона

$$P_{n(t_1, t_2)=n} = \frac{[\overline{n(t_1, t_2)}]^n}{n!} \exp\{-\overline{n(t_1, t_2)}\} \quad (3.13)$$

со средним значением числа точек на (t_1, t_2): $\overline{n(t_1, t_2)} = \nu |t_1 - t_2|$, где ν — среднее число точек, приходящихся на единицу времени. При этом количества точек, выпадающих на неперекрывающихся интервалах, статистически независимы, а моменты времени выпадания точек на интервале (t_1, t_2) при условии, что их выпало n штук, также статистически независимы и равномерно распределены на (t_1, t_2). Длина интервала между соседними скачками имеет экспоненциальное распределение. Пуассоновский поток точек — марковский процесс (см. следующий параграф).

Отметим, что величина (3.13) $P_t(n) = \langle \delta(n(0, t) - n) \rangle$, плотность вероятностей выпадания n точек на интервале времени $(0, t)$, как функция параметра t, удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\frac{\partial P_t(0)}{\partial t} = -\nu P_t(0), \qquad P_0(0) = 1; \quad (3.13')$$

$$\frac{\partial P_t(n)}{\partial t} = \nu [P_t(n-1) - P_t(n)], \quad P_0(n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Уравнение (3.13′) является частным случаем уравнений для дискретных марковских процессов и частным случаем уравнений типа Колмогорова — Феллера (см. § 4 данной главы).

Рассмотрим теперь случайные процессы, точки разрыва которых являются пуассоновскими потоками точек. В физических модельных задачах в настоящее время в основном используются процессы трех типов: пуассоновский случайный процесс, телеграф-

ный процесс и обобщенный телеграфный процесс. Этим процессам мы и уделим основное внимание.

Пуассоновским (импульсным) случайным процессом $z(t)$ называется процесс, описываемый формулой

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g(t - t_i), \tag{3.14}$$

где случайные величины ξ_i статистически независимы с плотностью вероятностей $p(\xi)$, а случайные точки t_k равномерно распределены на интервале $(0, T)$, так что число их n распределено по закону Пуассона с параметром $\bar{n} = \nu T$. Функция $g(\tau)$, описывающая форму импульса,— детерминированная функция ($g(\tau) = 0$ при $\tau < 0$).

Вычислим характеристический функционал этого процесса

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle_z. \tag{3.15}$$

Усреднение в формуле (3.15) будем проводить в два этапа. Сначала усредним по случайной величине ξ и по положениям случайных точек t_k:

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle\left\langle \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, v(\tau) \sum_{k=1}^{n} \xi_k g(\tau - t_k)\right\}\right\rangle_{\xi,\, t_k}\right\rangle_n =$$

$$= \left\langle\left[\frac{1}{T}\int_0^T d\tilde{t}\, W\left(\int_{\tilde{t}}^t d\tau\, v(\tau)\, g(\tau - \tilde{t})\right)\right]^n\right\rangle_n, \tag{3.16}$$

где $W(v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \exp(i\xi v)$ — характеристическая функция случайной величины ξ. Пусть $t < T$. Тогда формулу (3.16) можно переписать в виде

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle\left[\frac{1}{T}\int_0^t d\tilde{t}\, W\left(\int_{\tilde{t}}^t d\tau\, v(\tau)\, g(\tau - \tilde{t})\right) + \frac{T-t}{T}\right]^n\right\rangle_n. \tag{3.17}$$

Усредним теперь выражение (3.17) по пуассоновскому распределению $P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-n}$ случайной величины n:

$$\Phi_t[v(\tau)] = \exp\left\{\nu \int_0^t d\tilde{t}\left[W\left(\int_{\tilde{t}}^t d\tau\, v(\tau)\, g(\tau - \tilde{t})\right) - 1\right]\right\},$$

$$\Theta_t[v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tilde{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\left\{\exp\left[i\xi \int_{\tilde{t}}^t d\tau\, v(\tau)\, g(\tau - \tilde{t})\right] - 1\right\}. \tag{3.18}$$

Кумулянтные функции при этом имеют вид

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \int\limits_0^{\min\{t_1, \ldots, t_n\}} d\tilde{t}\, g(t_1 - \tilde{t}) \ldots g(t_n - \tilde{t}). \quad (3.19)$$

Рассмотрим частные случаи пуассоновского процесса.

1) Пусть

$$g(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \theta(t - t_i) \equiv \sum_{i=1}^{n(0,\, t)} \xi_i.$$

В этом случае $K_n(t_1, \ldots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \min\{t_1, \ldots, t_n\}$.

Если при этом $\xi \equiv 1$, то процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ и для него

$$\begin{gathered} K_n(t_1, \ldots, t_n) = \nu \min\{t_1, \ldots, t_n\}, \\ \Theta_t[v(\tau)] = \nu \int\limits_0^t d\tilde{t} \left\{ \exp\left[i \int\limits_{\tilde{t}}^t d\tau\, v(\tau) \right] - 1 \right\}. \end{gathered} \quad (3.20)$$

2) Пусть $g(t) = \theta(t) - \theta(t - \delta)$, т. е. мы имеем прямоугольный импульс длительностью δ. Этот процесс стационарен, и

$$\begin{gathered} K_1(t) = \nu \langle \xi \rangle \delta, \\ K_2(t_1, t_2) = \nu \langle \xi^2 \rangle \delta \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) \theta\left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) \quad (\tau = t_1 - t_2). \end{gathered} \quad (3.21)$$

3) Пусть $g(t) = e^{-\alpha t}\theta(t)$ $(\alpha > 0)$. Для такой формы импульсов

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{\nu \langle \xi^n \rangle}{\alpha n} \left[\exp\left\{ -\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (t_k - t_n) \right\} - \exp\left\{ -\alpha \sum_{k=1}^{n} t_k \right\} \right]$$
$$(t_1 > t_2 > \ldots > t_n).$$

Если $\alpha t_k \gg 1$, то процесс $z(t)$ стационарен и

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{\nu \langle \xi^n \rangle}{\alpha n} \exp\left\{ -\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (t_k - t_n) \right\}. \quad (3.22)$$

В частности,

$$\begin{gathered} K_1(t_1) = \frac{\nu \langle \xi \rangle}{\alpha}, \\ K_2(t_1, t_2) = \frac{\nu \langle \xi^2 \rangle}{2\alpha} \exp\{-\alpha |t_1 - t_2|\}. \end{gathered} \quad (3.22')$$

4) Пусть теперь $g(t) = \delta(t)$. В этом случае процесс $\tilde{z}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \delta(t - t_k)$ называется обычно процессом дробового шума.

Этот процесс является частным случаем дельта-коррелированных процессов (см. об этом следующую главу). Для такого процесса

$$\widetilde{\Theta}_l [v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \{\exp\{i\xi v(\tau)\} - 1\} \tag{3.23}$$

и кумулянтные функции

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \delta(t_1 - t_2)\delta(t_2 - t_3) \ldots \delta(t_{n-1} - t_n). \tag{3.24}$$

Отметим, что пуассоновский процесс с произвольной импульсной функцией $g(t)$ связан с процессом $\tilde{z}(t)$ формулой

$$z(t) = \int_0^t d\tau\, g(t - \tau)\, \tilde{z}(\tau). \tag{3.25}$$

Рассмотрим теперь статистические характеристики телеграфного случайного процесса, следуя работе [20]. Телеграфный процесс $z(t)$ определяется формулой

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)} \qquad (z(0) = a, \quad z^2(t) \equiv a^2), \tag{3.26}$$

где $n(t_1, t_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (t_1, t_2). При этом, как и для пуассоновского процесса, рассмотренного выше, будем считать, что поток точек является пуассоновским стационарным потоком. Запись телеграфного процесса в виде (3.26) использовалась в книге Каца [36]. На рис. 3 представлена одна из возможных реализаций процесса $z(t)$. Будем считать вначале, что a — детерминированная величина.

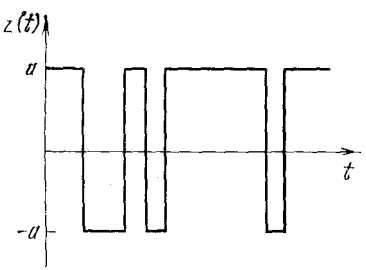

Рис. 3. Одна из возможных реализаций телеграфного случайного процесса.

Для телеграфного процесса $z(t)$ невозможно в явном виде выписать выражение для характеристического функционала, однако легко получить интегро-дифференциальное уравнение, которому он удовлетворяет.

Рассмотрим моментные функции процесса $z(t)$. Учитывая при этом равенство (3.12), получаем

$$\langle z(t) \rangle = a \sum_{n(0,t)=0}^{\infty} (-1)^{n(0,t)} P_{n(0,t)} = a \exp\{-2\overline{n(0,t)}\} = a \exp\{-2\nu t\},$$

$$\langle z(t_1) z(t_2) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t_2,t_1)} \rangle = a^2 \exp\{-2\overline{n(t_2,t_1)}\} = a^2 \exp\{-2\nu(t_1 - t_2)\} \quad (t_1 \geqslant t_2),$$

$$M_n(t_1, \ldots, t_n) = \langle z(t_1) \ldots z(t_n) \rangle =$$
$$= a^n \langle (-1)^{n(0,\, t_1)+n(0,\, t_2)+n(0,\, t_3)+\ldots+n(0,\, t_n)} \rangle =$$
$$= a^n \langle (-1)^{n(t_2,\, t_1)} \rangle \langle (-1)^{n(0,\, t_3)+\ldots+n(0,\, t_n)} \rangle =$$
$$= \langle z(t_1) z(t_2) \rangle M_{n-2}(t_3, \ldots, t_n) \qquad (t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n). \tag{3.27}$$

Отметим, что рекуррентное равенство (3.27) очень похоже на соотношение (3.10) для гауссовского процесса с экспоненциальной корреляционной функцией. Отличие состоит в том, что правая часть (3.27) соответствует только одному из слагаемых в (3.10), отвечающему определенному упорядочению по времени.

Рассмотрим теперь характеристический функционал для этого процесса

$$\Phi_t^a [v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle, \tag{3.28}$$

где индексом a отмечен тот факт, что a — детерминированная величина. Используя разложение характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора (3.4) и рекуррентное равенство (3.27), получаем разложение

$$\Phi_t^a [v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t \ldots \int dt_1 \ldots dt_n M_n(t_1, \ldots, t_n) v(t_1) \ldots v(t_n) =$$
$$= 1 + ia \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} v(t_1) + a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\nu(t_1 - t_2)} \times$$
$$\times v(t_1) v(t_2) \sum_{n=2}^{\infty} i^n \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n M_{n-2}(t_3, \ldots, t_1) v(t_3) \ldots v(t_n). \tag{3.28'}$$

Сумма, стоящая в правой части (3.28′), выражается через сам характеристический функционал Φ_t^a, в результате чего получаем интегральное уравнение

$$\Phi_t^a [v(\tau)] = 1 + ia \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} v(t_1) -$$
$$- a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\nu(t_1 - t_2)} v(t_1) v(t_2) \Phi_{t_2}^a [v(\tau)]. \tag{3.29}$$

Дифференцируя (3.29) по t, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_t^a}{\partial t} = iae^{-2\nu t} v(t) - a^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t - t_1)} v(t_1) \Phi_{t_1}^a. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.30) в общем случае решить не удается, и оно эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\Phi_t^a}{dt^2} + \left[2\nu - \frac{d}{dt}\ln v(t)\right]\frac{d\Phi_t^a}{dt} + a^2v^2(t)\Phi_t^a = 0, \qquad (3.30')$$

$$\Phi_0^a = 1, \quad \left.\frac{d\Phi_t^a}{dt}\right|_{t=0} = iav(0).$$

Пусть теперь величина a будет случайной величиной с плотностью вероятностей $p(a)$. Для получения характеристического функционала процесса $z(t)$ в этом случае требуется усреднить уравнение (3.30) по случайной величине a. Это в общем случае также не удается осуществить. И только для случайной величины a с распределением

$$p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)],$$

для которой $\langle a\rangle = 0$, $a^2 = a_0^2$ (собственно, именно этот случай и называется обычно телеграфным процессом), можно усреднить уравнение (3.30). В результате получаем уравнение

$$\frac{d\Phi_t[v(\tau)]}{dt} = -a_0^2 v(t)\int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)}v(t_1)\Phi_{t_1}[v(\tau)], \qquad (3.31)$$

или уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\Phi_t}{dt^2} + \left[2\nu - \frac{d}{dt}\ln v(t)\right]\frac{d\Phi_t}{dt} + a_0^2v^2(t)\Phi_t = 0, \qquad (3.31')$$

$$\Phi_0 = 1, \quad \left.\frac{d\Phi_t}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Отметим, что в частном случае $v(t) \equiv v$ уравнение (3.31′) решается, и его решение имеет вид

$$\Phi_t[v] = \left\langle \exp\left\{iv\int_0^t d\tau\, z(\tau)\right\}\right\rangle =$$

$$= e^{-\nu t}\left\{\operatorname{ch}\sqrt{\nu^2 - a_0^2v^2}\,t + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - a_0^2v^2}}\operatorname{sh}\sqrt{\nu^2 - a_0^2v^2}\,t\right\}. \qquad (3.32)$$

Таким образом, выражение (3.32) является одноточечной характеристической функцией случайного процесса $\xi(t) = \int_0^t d\tau\, z(\tau)$.

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой

$$z(t) = a_{n(0,\,t)}. \qquad (3.33)$$

Здесь $n(0, t)$ — случайная последовательность целых чисел, описанная выше, а величины a_i считаются статистически независимыми с распределением $p(a)$. На рис. 4 представлена одна из возможных реализаций этого процесса. Для процесса $z(t)$ имеем

$$\langle z(t)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle a_k \delta_{k,\, n(0,\, t)}\rangle = \langle a\rangle, \tag{3.34}$$

$$\langle z(t_1)\, z(t_2)\rangle = \sum_{k,\, l=0}^{\infty}\sum \langle a_k a_l\rangle \langle \delta_{k,\, n(0,\, t_1)} \delta_{l,\, n(0,\, t_2)}\rangle =$$

$$= \langle a^2\rangle \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,\, n(0,\, t_1)}\rangle \langle \delta_{0,\, n(t_2,\, t_1)}\rangle +$$

$$+ \langle a\rangle^2 \left\{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,\, n(0,\, t_2)}\rangle \langle \delta_{0,\, n(t_2,\, t_1)}\rangle\right\} =$$

$$= \langle a^2\rangle e^{-\nu(t_1 - t_2)} + \langle a\rangle^2 (1 - e^{-\nu(t_1 - t_2)}) \qquad (t_1 \geqslant t_2)$$

и т. д. При этом функция $\langle \delta_{0,\, n(t_2,\, t_1)}\rangle = P_{n(t_2,\, t_1)=0} = \exp\{-\nu\,|t_1 - t_2|\}$ — вероятность отсутствия скачков на интервале (t_1, t_2).

Для такого процесса не удается получить соотношение, аналогичное формуле (3.27). При выводе уравнения для характеристического функционала существенно, что этот процесс — марковский (см. следующий параграф). Это уравнение было получено в работе [37] и имеет вид

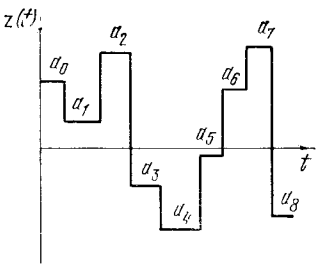

Рис. 4. Одна из возможных реализаций обобщенного телеграфного процесса.

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle = \left\langle \exp\left\{ia \int_0^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle e^{-\nu t} +$$

$$+ \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t - t_1)\} \left\langle \exp\left\{ia \int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)]. \tag{3.35}$$

Первое слагаемое в правой части (3.35) соответствует отсутствию скачков на интервале $(0, t)$, а второе — количеству скачков на $(0, t)$ от одного до бесконечности. Здесь момент времени t_1 является моментом появления последнего скачка.

Отметим, что при $p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$ уравнение (3.35) совпадает с уравнением, соответствующим телеграфному процессу, с заменой ν на $\nu/2$. Это естественно, так как для этого процесса, в отличие от телеграфного, в момент времени наступления скачка величина $z(t)$ с вероятностью 1/2 может изменить знак, что приводит к удвоению среднего времени между скачками. Если $v(t) \equiv v$, то уравнение (3.35) легко решается с помощью преобра-

зования Лапласа, т. е. можно определить характеристическую функцию процесса $\xi(t) = \int_0^t d\tau\, z(\tau)$, как и в случае телеграфного процесса.

Отметим также, что процесс телеграфного типа

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n(0,\ t)} a_k, \tag{3.36}$$

который может иметь, вообще говоря, реализации, совпадающие с реализациями обобщенного телеграфного процесса (рис. 5), тождествен с пуассоновским процессом (формула (3.20)).

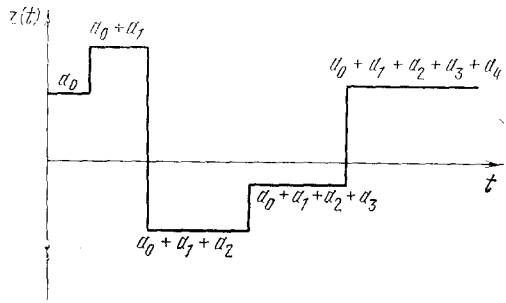

Рис. 5. Одна из возможных реализаций пуассоновского процесса $z(t) = \sum_{k=0}^{n(0,t)} a_k$, где $n(0,\ t)$ — пуассоновский поток точек.

Выше мы отмечали, что пуассоновский поток точек и процессы, построенные на таких точках,— марковские процессы. Остановимся теперь на этом важном классе случайных процессов более подробно.

§ 4. Марковские процессы

В предыдущем параграфе мы рассматривали характеристический функционал процесса $z(t)$, который описывает все статистические характеристики $z(t)$. Если теперь в формуле (3.1) положить $v(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k \delta(t - t_k)$, то (3.1) переходит в совместную характеристическую функцию случайных величин $z_k = z(t_k)$:

$$\Phi_n(v_1, \ldots, v_n) = \left\langle \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} v_k z(t_k) \right\} \right\rangle,$$

преобразование Фурье которой определяет совместную плотность вероятностей для значений процесса $z(t)$ в дискретные моменты

времени:

$$\mathcal{P}_n(z_1, t_1;\ z_2,\ t_2;\ \ldots;\ z_n,\ t_n) = \langle \delta(z(t_1) - z_1) \ldots \delta(z(t_n) - z_n) \rangle. \tag{4.1}$$

Пусть выбранные моменты времени упорядочены следующим образом:

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n.$$

По определению условной вероятности (см., например, [35])

$$\mathcal{P}_n(z_1,\ t_1;\ \ldots;\ z_n, t_n) = \\ = \mathcal{P}_{n-1}(z_2,\ t_2;\ \ldots;\ z_n, t_n)\, p_n(z_1,\ t_1 \mid z_2,\ t_2;\ \ldots;\ z_n,\ t_n), \tag{4.2}$$

где p_n — условная плотность вероятностей для значения процесса $z(t)$ в момент времени t_1 при условии, что в моменты времени t_k $(k = 2,\ \ldots, n)$ функция $z(t)$ принимала значения, равные $z(t_k) = z_k$. Если процесс $z(t)$ таков, что для всех $t_1 > t_2$ условная плотность вероятностей однозначно определяется значением z_2, принятым в момент времени t_2, и совсем не зависит от предшествующей истории, т. е.

$$p_n(z_1, t_1 \mid z_2, t_2;\ \ldots;\ z_n, t_n) = p(z_1, t_1 \mid z_2, t_2), \tag{4.3}$$

то этот процесс называется марковским процессом или процессом без последействия. Функция

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) \mid z(t_0) = z_0 \rangle \qquad (t > t_0) \tag{4.4}$$

при этом называется плотностью вероятностей перехода. Полагая в (4.4) $t = t_0$, получаем равенство

$$p(z, t_0 \mid z_0, t_0) = \delta(z - z_0). \tag{4.5}$$

Подставим выражение (4.3) в формулу (4.2). Получается рекуррентное равенство для n-точечной по времени плотности вероятностей процесса $z(t)$. Итерируя это равенство, находим связь $\mathcal{P}_n$ с одноточечным распределением вероятностей:

$$\mathcal{P}_n(z_1, t_1;\ \ldots;\ z_n, t_n) = \\ = p(z_1, t_1 \mid z_2, t_2) \ldots p(z_{n-1},\ t_{n-1} \mid z_n, t_n)\, P_{t_n}(z_n) \\ (t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n). \tag{4.6}$$

Таким образом, все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются всего двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P_t(z)$. При этом величина $p(z, t \mid z_0, t_0)$, как функция своих аргументов, удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению, называемому уравнением Смолуховского (или уравнением Колмогорова — Чепмена). Для его вывода заметим, что если процесс $z(t)$ принимает значение в фиксированные моменты времени $t_0 < t_1 < t$ соответственно $z(t_0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$, $z(t) = z$, то имеет место условие согласованности

$$\int dz_1 \mathcal{P}_3(z, t; z_1, t_1; z_0, t_0) = \mathcal{P}_2(z, t; z_0, t_0). \tag{4.7}$$

Подставляя теперь в (4.7) выражения для $\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_2$ из (4.6), получаем равенство

$$p(z, t \mid z_0, t_0) P_{t_0}(z_0) = \int dz_1 p(z, t \mid z_1, t_1) p(z_1, t_1 \mid z_0, t_0) P_{t_0}(z_0). \qquad (4.8)$$

Сокращая правую и левую части (4.8) на $P_{t_0}(z_0)$, находим искомое уравнение:

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \int dz_1 p(z, t \mid z_1, t_1) p(z_1, t_1 \mid z_0, t_0). \qquad (4.9)$$

Если же проинтегрировать равенство (4.8) по z_0, то получается линейное интегральное уравнение для одноточечной плотности вероятностей:

$$P_t(z) = \int dz_1 p(z, t \mid z_1, t_1) P_{t_1}(z_1). \qquad (4.10)$$

Интегральные уравнения (4.9) и (4.10) позволяют получать дифференциальные (или интегро-дифференциальные) уравнения для простейших марковских процессов. Мы не будем заниматься их выводом (вывод их содержится в многочисленной учебной литературе по теории случайных процессов и ее применениям к различным физическим задачам — см., например, [35, 38, 39]), а приведем лишь классификацию простейших марковских процессов и основные уравнения, следуя книге [39]. Учитывая, что переменная z может меняться дискретным или непрерывным образом, а также что и сама случайная функция может меняться как непрерывным, так и дискретным образом, получаем четыре возможных случая: 1) дискретные процессы с дискретным временем, 2) непрерывные процессы с дискретным временем, 3) дискретные процессы с непрерывным временем, 4) непрерывные процессы с непрерывным временем. Кроме того, выделяется еще один тип случайных марковских процессов, так называемых 5) дискретно-непрерывных процессов, у которых при непрерывном изменении t в некоторые моменты времени имеются скачки (дискретные или непрерывные), а в промежутке между скачками процесс ведет себя как непрерывный случайный процесс.

Кроме этих пяти видов процессов имеются еще более сложные — смешанные виды случайных процессов.

Учитывая, что в дальнейшем нас будут интересовать только стохастические уравнения, т. е. дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются случайными функциями времени, остановимся на марковских процессах с непрерывным временем более подробно.

Рассмотрим дискретный марковский процесс $z(t)$, который может принимать только дискретные значения $z_1, \ldots, z_n$, причем переход с одного значения на другое происходит в случайные моменты времени. Введем плотность вероятностей перехода

$$p_{ij}(t, t_0) = \langle \delta(z(t) - z_i) \mid z(t_0) = z_j \rangle \qquad (t_0 < t), \qquad (4.11)$$

$$\sum_i p_{ij}(t, t_0) = 1,$$

которая есть условная вероятность принять процессу $z(t)$ в момент времени t значение z_i, если в момент времени t_0 он имел значение z_j. При этом очевидно, что

$$p_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}. \tag{4.12}$$

Для малых временных интервалов $\Delta t \to 0$

$$p_{ij}(t + \Delta t, t) = \delta_{ij} + a_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \tag{4.13}$$

где $a_{ij}(t)\Delta t$ — вероятность перехода из состояния z_j в момент времени t в состояние z_i за время Δt. При этом

$$a_{ij}(t) > 0 \quad (i \neq j), \quad a_{jj}(t) = -\sum_{i(i\neq j)} a_{ij}(t), \tag{4.14}$$

так как должно сохраняться условие нормировки (4.11).

Исходя из уравнения Смолуховского (4.9), легко показать, используя (4.13), что вероятность $p_{ij}(t, t_0)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(t, t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, p_{kj}(t, t_0) \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{4.15}$$

Уравнениям (4.15) удовлетворяют не только вероятности перехода, но и одноточечные вероятности $P_i(t)$, так как

$$P_i(t) = \sum_j p_{ij}(t, t_0)\, p_j^0, \tag{4.16}$$

где p_j^0 — начальные вероятности состояний ($p_j^0 = P_j(t_0)$). Следовательно, имеют место уравнения

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = \sum_k a_{ik}(t)\, P_k(t), \quad P_i(t_0) = p_i^0. \tag{4.17}$$

В качестве иллюстрации приведенной выше теории рассмотрим два примера.

1. Пусть случайный процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ — число скачков на интервале $(0, t)$, которые происходят в случайные моменты времени. Возможная реализация этого процесса приведена на рис. 2. Процесс $z(t)$ может принимать лишь целочисленные значения 0, 1, 2, . . ., и при этом, очевидно, $p_{ij}(t, t_0) = 0$ при $i < j$, $t \geqslant t_0$. Предполагая, далее, что вероятность одного изменения состояния в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\nu\,\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность отсутствия скачков равна $1 - \nu\,\Delta t + o(\Delta t)$, и пренебрегая возможностью двух и более скачков на этом интервале *), можно записать систему уравнений (4.17) для данного

---

*) Эти предположения определяют пуассоновский поток точек — моментов времени возникновения скачков (см., например, [35]).

процесса, которая принимает вид

$$\frac{dP_0}{dt} = -\nu P_0, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\nu P_i(t) + \nu P_{i-1}(t),$$
$$P_0(0) = 1, \quad P_{i\neq 0}(0) = 0 \tag{4.18}$$

и совпадает с системой уравнений (3.13). При этом индекс i соответствует значению $n(0, t) = n$.

2. В качестве второго примера рассмотрим простейший марковский процесс с конечным числом состояний — телеграфный процесс, принимающий значения $z(t) = \pm a$. Этот процесс мы рассматривали с других позиций в предыдущем параграфе. Пусть вероятности перехода за малое время Δt $(a \to -a)$ и $(-a \to a)$ равны $\nu\,\Delta t + o(\Delta t)$, вероятности сохранить свои состояния за время Δt, соответственно, равны $1 - \nu\,\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятности начальных состояний равны p_a^0 и $p_{-a}^0 = 1 - p_a^0$. В этом случае вероятности перехода удовлетворяют системе (4.17) с параметрами $a_{11} = a_{22} = -\nu$, $a_{12} = a_{21} = \nu$, решение которой имеет вид

$$p_{11}(\tau) = p_{22}(\tau) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\nu\tau}],$$
$$p_{12}(\tau) = p_{21}(\tau) = \frac{1}{2}[1 - e^{-2\nu\tau}], \quad \tau = t - t_0. \tag{4.19}$$

Аналогичным образом получаем и выражения для одноточечных вероятностей:

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2} + \left[p_a^0 - \frac{1}{2}\right] e^{-2\nu\tau},$$
$$P_2(\tau) = \frac{1}{2} - \left[p_a^0 - \frac{1}{2}\right] e^{-2\nu\tau}. \tag{4.20}$$

Если в начальный момент времени процесс $z(t)$ имеет фиксированное значение $z(t_0) = a$, то $p_a^0 = 1$ и (4.20) принимает вид

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\nu\tau}], \quad P_2(\tau) = \frac{1}{2}[1 - e^{-2\nu\tau}]. \tag{4.20'}$$

Эти распределения вероятностей выходят на стационарный режим при $t \to \infty$, а именно: $P_{1,2}(\infty) = 1/2$. Если же в начальный момент времени $p_a^0 = p_{-a}^0 = 1/2$, то процесс $z(t)$ остается стационарным и в другие моменты времени.

Отметим, что для данного процесса формулы (4.19) можно объединить в одну формулу, а именно, согласно определению плотности вероятностей перехода (4.4):

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) \mid z(t_0) = z_0 \rangle = \delta(z - z_0)P_1(\tau) + \delta(z + z_0)P_2(\tau), \tag{4.21}$$

где $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ даются формулами (4.20′), а $\tau = t - t_0$. Исходя из равенства (4.21), легко получить путем дифференцирования по t дифференциальное уравнение для $p(z, t \mid z_0, t_0)$, которое имеет

вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t \mid z_0, t_0) = -\nu \{p(z, t \mid z_0, t_0) - p(-z, t \mid z_0, t_0)\}. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) следует решать с начальным условием

$$p(z, t_0 \mid z_0, t_0) = \delta(z - z_0).$$

Таким образом, плотность вероятностей перехода телеграфного процесса $p(z, t \mid z_0, t_0)$ удовлетворяет линейному операторному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t \mid z_0, t_0) = \hat{L}_z p(z, t \mid z_0, t_0), \quad (4.23)$$

где

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu \{f(z) - f(-z)\}. \quad (4.24)$$

Отметим, что это общее свойство всех марковских процессов. Однако записать уравнение для плотности вероятностей перехода в такой компактной форме, как уравнение (4.23), не всегда удается. Так, в общем случае произвольного марковского процесса с конечным числом состояний роль оператора $\hat{L}_z$ играет матрица $\| a_{ij} \|$ в (4.15) и сама функция $p(z, t \mid z_0, t_0)$ является матрицей-функцией. В этом случае для любой реализации процесса $z(t)$ выполняется тождество

$$[z(t) - z_1][z(t) - z_2] \ldots [z(t) - z_n] = 0. \quad (4.25)$$

Раскрывая скобки в (4.25), мы видим, что имеется алгебраическая связь между различными степенями процесса $z(t)$, а именно:

$$z^n(t) \equiv (z_1 + \ldots + z_n) z^{n-1}(t) + \ldots + (-1)^{n+1} z_1 z_2 \ldots z_n. \quad (4.26)$$

Для телеграфного случайного процесса, т. е. процесса с двумя возможными состояниями $z(t) = \pm a$, тождество (4.26) сильно упрощается:

$$z^2(t) \equiv a^2, \quad (4.26')$$

что, как мы увидим далее, оказывается очень полезным для анализа стохастических уравнений с флуктуациями параметров в виде телеграфного процесса.

Рассмотрим теперь случай непрерывных марковских процессов. В этом случае следствием уравнения Смолуховского (4.9) является следующее операторное уравнение для плотности вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ (см. [39]):

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t \mid z_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [B_n(z, t)\, p(z, t \mid z_0, t_0)], \quad (4.27)$$

где функции $B_n(z, t)$ определяются с помощью равенств

$$B_n(z, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \langle \{z(t + \Delta t) - z(t)\}^n \mid z(t) \rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int dz\, [z(t + \Delta t) - z(t)]^n\, p(z, t + \Delta t \mid z, t). \quad (4.28)$$

Следствием уравнения (4.27) является аналогичное уравнение для одноточечной плотности вероятностей:

$$P_t(z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [B_n(z, t) P_t(z)].$$

Частным важным случаем непрерывных процессов является случай, когда все коэффициенты уравнения (4.27), начиная с третьего, равны нулю. Марковские процессы, обладающие этим свойством, называются диффузионными процессами. В этом случае уравнения (4.27), (4.29) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial z} B_1(z, t) p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_2(z, t) p. \tag{4.30}$$

Уравнение (4.30) называется уравнением Эйнштейна — Фоккера (или уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова), а само уравнение (4.27) называется обобщенным уравнением Эйнштейна — Фоккера. Функции $B_1(z, t)$, $B_2(z, t)$ называются коэффициентами сноса и диффузии.

В частном случае постоянства коэффициента $B_2(z, t)$ и при $B_1(z, t) = -B_1 z$ процесс $z(t)$ является гауссовским марковским процессом с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t + \tau) \rangle = \sigma^2(t) \exp\{-B_1 |\tau|\}. \tag{4.31}$$

Отметим, что можно доказать и обратное утверждение, а именно: гауссовский процесс с экспоненциальной корреляционной функцией является марковским процессом.

Рассмотрим теперь одномерный дискретно-непрерывный марковский процесс. Здесь может быть два случая — чисто разрывного (скачкообразного) процесса и процесса, имеющего помимо скачкообразного также непрерывное изменение. В случае скачкообразных процессов случайный процесс $z(t)$ характеризуется двумя функциями $q(z, t)$ и $u(z, z', t)$ такими, что за малый промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ процесс с вероятностью $1 - q(z, t)\Delta t$ сохранит свое прежнее значение и с вероятностью $u(z, z', t)\Delta t\, \Delta z'$ переходит из z в z'', где $z' < z'' < z' + \Delta z'$. При этом, конечно, имеет место условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' u(z, z', t) = q(z, t). \tag{4.32}$$

Для такого процесса следствием уравнения Смолуховского (4.9) является интегро-дифференциальное уравнение, называемое уравнением Колмогорова — Феллера:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t \mid z_0, t_0) =$$

$$= -q(z, t) p(z, t \mid z_0, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dz' u(z, z', t) p(z', t \mid z_0, t_0). \tag{4.33}$$

Аналогичный вид имеет и уравнение для одноточечной плотности вероятностей. Если же помимо скачкообразного процесса имеется еще непрерывное изменение, то к правой части (4.33) добавляется правая часть (4.30). Отметим, что случайный процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ — число скачков на интервале времени $(0, t)$,— рассмотренный как в предыдущем параграфе, так и в настоящем (см. уравнения (3.13) и (4.18)), является частным случаем скачкообразного процесса, и, соответственно, дифференциально-разностные уравнения (3.13), (4.18) являются частными случаями интегро-дифференциального уравнения (4.33).

В качестве другого примера скачкообразного процесса рассмотрим обобщенный телеграфный процесс, описанный в предыдущем параграфе. Этот процесс определяется формулой (3.33). Вычислим плотность вероятностей перехода:

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) \mid z(t_0) = z_0 \rangle =$$
$$= \delta(z - z_0) P_{n(0,\, t)=0} + \langle \delta(z - a) \rangle_a \{P_{n(0,\, t)=1} + P_{n(0,\, t)=2} + \ldots\}. \quad (4.34)$$

Учитывая теперь условие нормировки $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{n(0,\, t)=n} = 1$, получаем окончательное выражение:

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \delta(z - z_0) P_0(t, t_0) + p_a(z) \{1 - P_0(t, t_0)\}, \quad (4.35)$$

где $P_0(t, t_0) = \exp\{-\nu(t - t_0)\}$ — вероятность отсутствия скачков на интервале времени (t_0, t), а $p_a(z)$ — вероятность принять случайной величине a значение z.

Одноточечное распределение вероятностей процесса $z(t)$ является, очевидно, стационарным распределением:

$$P_t(z) = p_a(z). \quad (4.36)$$

Величина (4.35), как функция переменной t, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p(z, t \mid z_0, t_0)}{\partial t} = -\nu [p(z, t \mid z_0, t_0) - p_a(z)], \quad (4.37)$$

которое можно записать в операторном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \hat{L}_z p, \quad (4.38)$$

где оператор $\hat{L}_z$ является в данном случае интегральным оператором:

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu [f(z) - p_a(z) \int dz' f(z')]. \quad (4.39)$$

Очевидно, что уравнение (4.38) является частным случаем уравнения Колмогорова — Феллера (4.33) с параметрами $q(z, t) = \nu$, $u(z, z', t) = \nu p_a(z)$.

Выше мы рассматривали одномерные случайные процессы, однако очевидно, что все остается без изменения и в случае много-

мерных процессов, т. е. если $\boldsymbol{z}(t)$ является случайной векторной функцией. В частности, плотность вероятностей перехода

$$p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0) = \langle \delta(\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0 \rangle$$

будет удовлетворять линейному операторному уравнению

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0)}{\partial t} = \hat{L}_{\boldsymbol{z}} p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0). \tag{4.40}$$

Отметим также, что плотность вероятностей $p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0)$, как функция своих аргументов, удовлетворяет не только уравнению (4.40) (которое называется прямым уравнением), но и уравнению по переменной t_0 (которое называется обратным уравнением):

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0)}{\partial t_0} = \hat{L}^{+}_{\boldsymbol{z}_0} p(\boldsymbol{z}, t \mid \boldsymbol{z}_0, t_0), \tag{4.41}$$

где $\hat{L}^{+}_{\boldsymbol{z}_0}$ — оператор, сопряженный к $\hat{L}_{\boldsymbol{z}}$. Уравнение (4.41) удобно для анализа задач, связанных с исследованием зависимостей от начальных пространственно-временных точек (см., например, [39]).

Выше мы говорили о том, что все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются только двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P_t(z)$. Однако, как мы увидим далее, для статистического анализа стохастических уравнений нам надо все-таки знать характеристический функционал случайного процесса.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении характеристического функционала марковского процесса. В общем случае произвольного марковского процесса $z(t)$ получить замкнутое уравнение для его характеристического функционала $\Phi_t[v(\tau)] = \langle \varphi_t[v(\tau)] \rangle$, где $\varphi_t[v(\tau)] = \exp\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau)\}$, не удается. Можно, однако, получить замкнутое уравнение для функционала

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = \langle \delta(z(t) - z)\, \varphi_t[v(\tau)] \rangle, \tag{4.42}$$

описывающего статистические корреляции процесса $z(t)$ с его предысторией. Характеристический функционал $\Phi_t[v(\tau)]$ связан с функционалом $\Psi_t[z, v(\tau)]$ формулой

$$\Phi_t[v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \Psi_t[z, v(\tau)]. \tag{4.43}$$

Чтобы вывести уравнение для $\Psi_t[z, v(\tau)]$, заметим, что имеет место равенство

$$\varphi_t[v(\tau)] = 1 + i \int_0^t dt_1 z(t_1) v(t_1) \varphi_{t_1}[v(\tau)]. \tag{4.44}$$

Подставляя (4.44) в (4.42), получаем

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = P_t(z) + i\int_0^t dt_1 v(t_1) \langle \delta(z(t) - z) z(t_1) \varphi_{t_1}[v(\tau)]\rangle, \quad (4.45)$$

где $P_t(z) = \langle \delta(z(t) - z)\rangle$ — одновременная плотность вероятностей случайной величины $z(t)$. Перепишем (4.45) в виде

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = P_t(z) + i\int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \langle \delta(z(t) - z) \times$$
$$\times \delta(z(t_1) - z_1) \varphi_{t_1}[v(\tau)]\rangle. \quad (4.46)$$

В уравнении (4.46) можно выполнить усреднение, учитывая марковость процесса $z(t)$, и мы получаем замкнутое интегральное уравнение для функционала $\Psi_t[z, v(\tau)]$ [40]:

$$\Psi_t[z, v(\tau)] =$$
$$= P_t(z) + i\int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t \mid z_1, t_1) \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)], \quad (4.47)$$

где $p(z, t \mid z_1, t_1)$ — плотность вероятностей перехода.

Отметим, что интегральное уравнение, аналогичное уравнению (4.47), можно получить и для функционала

$$\Psi_{t', t}[z, v(\tau)] = \langle \delta(z(t') - z) \varphi_t[v(\tau)]\rangle \ (t' \geqslant t). \quad (4.42')$$

Оно имеет вид

$$\Psi_{t', t}[z, v(\tau)] =$$
$$= P_{t'}(z) + i\int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 p(z, t' \mid z_1, t_1) \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)]. \quad (4.47')$$

Интегрируя (4.47) по z, получаем очевидную связь характеристического функционала $\Phi_t[v(\tau)]$ с функционалом Φ_t:

$$\Phi_t[v(\tau)] = 1 + i\int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)], \quad (4.48)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{1}{iv(t)} \frac{d\Phi_t}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi_t[z_1, v(\tau)]. \quad (4.49)$$

Умножая (4.47) на z и интегрируя по z, получаем связь функционала $\Psi_t[v(\tau)] = \langle z(t) \varphi_t[v(\tau)]\rangle = \frac{1}{iv(t)} \frac{d\Phi_t}{dt}$ с функционалом

$\Psi_t[z, v(\tau)]$:

$$\frac{1}{iv(t)}\frac{d\Phi_t}{dt} = \Psi_t[v(\tau)] = \langle z(t)\rangle + \\ + i\int_0^t dt_1 v(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \langle z(t) \mid z_1, t_1\rangle z_1 \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)]. \qquad (4.50)$$

В общем случае уравнение (4.47) представляет собой сложное интегральное уравнение, конкретный вид которого определяется функциями $P_t(z)$ и $p(z, t \mid z_1, t_1)$, т. е. характеристиками марковского процесса.

Отметим, что если функции $P_t(z)$, p удовлетворяют линейным уравнениям (4.40):

$$\frac{\partial P_t(z)}{\partial t} = \hat{L}_z P_t(z), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \hat{L}_z p,$$

где $\hat{L}_z$ — некий интегро-дифференциальный оператор по z, то функционал $\Psi_t[z, v(\tau)]$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial t} = izv(t)\Psi_t + \hat{L}_z\Psi_t, \quad \Psi_0[z, v(\tau)] = P_0(z). \qquad (4.51)$$

В этом случае и функционал $\Psi_{t',t}[z, v(\tau)]$ (4.42′) будет удовлетворять уравнению по t' с начальным условием при $t' = t$:

$$\frac{\partial \Psi_{t',t}[z, v(\tau)]}{\partial t'} = \hat{L}_z \Psi_{t',t}[z, v(\tau)] \qquad (t' > t), \\ \Psi_{t,t}[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)]. \qquad (4.51')$$

Таким образом, уравнение (4.51) вместе с равенствами (4.49) и (4.50) и является исходным уравнением для определения характеристического функционала марковского процесса. Проиллюстрируем это на конкретных примерах процессов, рассмотренных выше.

В случае телеграфного процесса из равенства (4.21) следуют равенства

$$\langle z(t) \mid z_1, t_1\rangle = z_1 \exp\{-2\nu(t - t_1)\}, \qquad (4.52) \\ \langle z(t)\rangle = a \exp\{-2\nu t\}.$$

Подставляя (4.52) в (4.50) и используя тождество (4.26′) $z^2(t) \equiv a^2$, получаем уравнение, совпадающее с уравнением (3.30).

В общем случае марковского процесса с двумя состояниями z_1 и z_2 и соответствующими вероятностями перехода ν и μ уравнение (4.51) принимает вид системы

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = iv(t)z_1\Psi_1 - \nu\Psi_1 + \mu\Psi_2, \\ \frac{d\Psi_2}{dt} = iv(t)z_2\Psi_2 + \nu\Psi_1 - \mu\Psi_2. \qquad (4.53)$$

Учитывая теперь равенства (4.43) и (4.50), которые в терминах

функций Ψ_1, Ψ_2 записываются в форме

$$\Phi_t = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \frac{d\Phi_t}{dt} = iv(t)[z_1\Psi_1 + z_2\Psi_2], \tag{4.54}$$

получаем дифференциальное уравнение для характеристического функционала:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi_t + \left[\mu + \nu - \frac{d}{dt}\ln v(t) - iv(t)(z_1 + z_2)\right]\frac{d\Phi_t}{dt} - \\ - [iv(t)(\nu z_2 + \mu z_1) + z_1 z_2 v^2(t)]\Phi_t = 0. \tag{4.55}$$

Если теперь положить $z_1 = -z_2 = a$ и $\mu = \nu$, то уравнение (4.55) перейдет в уравнение (3.30), соответствующее телеграфному процессу. В общем случае произвольной функции $v(t)$ уравнение (4.55) решить не удается. Можно найти решение этого уравнения лишь для $v(t) = \text{const}$, так же как и в случае уравнения (3.30′). Функционал же $\Psi_{t',t}$ (4.42′) может быть выражен через функционал Ψ_t. В самом деле, функционал $\Psi_{t',t}$ удовлетворяет уравнению (4.51′), которое для телеграфного процесса эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\nu\frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi_{t',t}[z, v(\tau)] = 0 \tag{4.56}$$

с начальными условиями

$$\Psi_{t,t}[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)], \\ \left.\frac{\partial\Psi_{t',t}}{\partial t'}\right|_{t'=t} = -\nu\{\Psi_t[z, v(\tau)] - \Psi_t[-z, v(\tau)]\}. \tag{4.57}$$

Решение последней задачи имеет вид

$$\Psi_{t',t}[z, v(\tau)] = \frac{1}{2}\Psi_t[z, v(\tau)][1 + \exp\{-2\nu(t' - t)\}] + \\ + \frac{1}{2}\Psi_t[-z, v(\tau)][1 - \exp\{-2\nu(t' - t)\}] \quad (t' \geqslant t). \tag{4.58}$$

Первое слагаемое соответствует четному числу скачков на (t, t'), а второе — нечетному. Разумеется, формулу (4.58) можно было бы получить и непосредственно, усредняя выражение (4.42′) с помощью равенств (4.20′), (4.21).

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс. Для этого процесса, в силу (4.39), уравнение для функционала $\Psi_t[z, v(\tau)]$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t[z, v(\tau)] = \{izv(t) - \nu\}\Psi_t[z, v(\tau)] + \\ + \nu p_a(z)\Phi_t[v(\tau)], \quad \Psi_0[z, v(\tau)] = p_a(z). \tag{4.59}$$

При выводе (4.59) использовалось равенство (4.43). Решая уравнение (4.59) относительно $\Psi_t[z, v(\tau)]$, получаем связь его с

характеристическим функционалом:

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = p_a(z) \exp\left\{-\nu t + iz \int_0^t d\tau\, v(\tau)\right\} +$$

$$+ \nu p_a(z) \int_0^t dt_1 \Phi_{t_1}[v(\tau)] \exp\left\{-\nu(t - t_1) + iz \int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}. \quad (4.60)$$

Интегрируя (4.60) по всем z, получаем замкнутое интегральное уравнение для $\Phi_t[v(\tau)]$, совпадающее с уравнением (3.35). Умножая (4.60) на $F(z)$, где $F(z)$ — произвольная функция, и интегрируя по z, получаем равенство

$$\left\langle F(z(t)) \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle = \left\langle F(a) \exp\left\{ia \int_0^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle e^{-\nu t} +$$

$$+ \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t - t_1)\} \left\langle F(a) \exp\left\{ia \int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)]. \quad (4.61)$$

В частности, при $F(z(t)) = z(t)$ из (4.61) следует интегро-дифференциальное уравнение для $\Phi_t[v(\tau)]$:

$$\frac{1}{iv(t)} \frac{d\Phi_t}{dt} = \left\langle a \exp\left\{ia \int_0^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle e^{-\nu t} +$$

$$+ \nu \int_0^t dt_1 e^{-\nu(t-t_1)} \left\langle a \exp\left\{ia \int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)], \quad (4.62)$$

эквивалентное интегральному уравнению (3.35). Так же, как и в случае телеграфного процесса, для обобщенного телеграфного процесса можно легко найти связь функционала $\Psi_{t',t}$ с функционалом Ψ_t, которая имеет вид

$$\Psi_{t',t}[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)] \exp\{-\nu(t' - t)\} +$$

$$+ p_a(z)\, \Phi_t[v(\tau)]\, \{1 - \exp[-\nu(t' - t)]\}\ (t' \geqslant t). \quad (4.63)$$

Остановимся теперь на одной важной предельной теореме, связанной с телеграфными случайными процессами [22]. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t), \quad (4.64)$$

где все $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией, равной (согласно (3.27))

$$\langle z(t)\, z(t + \tau)\rangle = \frac{\sigma^2}{N} \exp\{-\alpha|\tau|\}. \quad (4.65)$$

В этом случае характеристический функционал процесса $z_i(t)$

будет удовлетворять уравнению (3.31):

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^T[v(\tau)] =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{N} v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\} \Phi_{t_1}^T[v(\tau)], \qquad (4.66)$$

откуда следует, что

$$\Phi_t^T[v(\tau)] \to 1 \text{ при } N \to \infty. \qquad (4.67)$$

Рассмотрим теперь характеристический функционал случайного процесса $\xi_N(t)$:

$$\Phi_t[N, v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, \xi_N(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \{\Phi_t^T[v(\tau)]\}^N. \quad (4.68)$$

Дифференцируя (4.68) по t, получаем, в силу (4.66), уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi_t[N, v(\tau)] =$$

$$= -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\} \frac{\Phi_{t_1}^T[v(\tau)]}{\Phi_t^T[v(\tau)]}, \qquad (4.69)$$

откуда следует, что при $N \to \infty$ (в силу (4.67))

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_t[\infty, v(\tau)] = -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\}, \qquad (4.70)$$

т. е. процесс $\xi(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \xi_N(t)$ является гауссовским процессом с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t)\, \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \exp\{-\alpha\, |\tau|\}, \qquad (4.71)$$

т. е. гауссовским марковским процессом. Таким образом, процесс $\xi_N(t)$ (4.64) является аппроксимирующим процессом с конечным числом состояний для гауссовского марковского процесса. Такая аппроксимация может быть полезной не только для изучения самого гауссовского процесса, но и функций от него. Так, например, для процесса $\tilde{z}(t) = \xi^2(t) - \langle \xi^2(t) \rangle$, где $\xi(t)$ — гауссовский марковский процесс с корреляционной функцией (4.71), аппроксимация конечным отрезком ряда (4.64) принимает вид

$$\tilde{z}_N(t) = \sum_{i \neq j = 1}^{N} z_i(t) z_j(t), \quad \tilde{z}(t) = \lim_{N\to\infty} \tilde{z}_N(t). \qquad (4.72)$$

Как мы увидим далее, с такой формой записи гораздо более удобно работать при анализе стохастических уравнений, чем с самими процессами $\xi(t)$ и $\tilde{z}(t)$.

На этом мы закончим описание марковских процессов и перейдем непосредственно к анализу стохастических уравнений.

Глава 2

РАСЩЕПЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

§ 1. Примеры динамических систем

Чтобы ясно представлять себе те основные особенности и трудности, с которыми мы сталкиваемся при рассмотрении статистического описания динамических систем с флуктуирующими параметрами, рассмотрим несколько простых примеров стохастических уравнений.

Прежде всего рассмотрим уравнение, которое называется уравнением Ланжевена:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + f(t), \quad x(0) = 0, \tag{1.1}$$

и описывает флуктуации скорости частицы под действием случайных сил $f(t)$. Для заданной реализации сил $f(t)$ решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t d\tau\, f(\tau) \exp\{-\lambda(t-\tau)\}, \tag{1.2}$$

и, следовательно, зная статистические характеристики случайного процесса $f(t)$, можно найти все статистические характеристики процесса $x(t)$. Так, для характеристической функции $\varphi_t(\varkappa) = \langle \exp\{i\varkappa x(t)\}\rangle$, описывающей все одновременные характеристики скорости $x(t)$, получаем выражение

$$\varphi_t(\varkappa) = \left\langle \exp\left\{i\varkappa \int_0^t d\tau\, f(\tau) \exp\{-\lambda(t-\tau)\}\right\}\right\rangle, \tag{1.3}$$

где усреднение производится по всем реализациям процесса $f(t)$. Если ввести характеристический функционал случайных сил

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, v(\tau) f(\tau)\right\}\right\rangle,$$

то выражение (1.3) можно переписать в виде

$$\varphi_t(\varkappa) = \Phi_t[\varkappa \exp\{-\lambda(t-\tau)\}]. \tag{1.4}$$

Таким образом, из рассмотрения этого простого примера можно сделать два вывода (которые на самом деле относятся к существенно более широкому классу задач):

1) Стохастическое решение уравнения (1.1) в момент времени t определяется поведением случайных сил $f(\tau)$ на интервале времени $(0, t)$ и не зависит от значений функции $f(\tau)$ при $\tau > t$. Этот факт мы будем называть условием причинности.

2) Статистические характеристики решения задачи (1.1) в момент времени t определяются статистическими характеристиками сил $f(\tau)$ на всем интервале времен $(0, t)$, т. е. для нахождения одноточечных характеристик решения задачи (1.1) необходимо знать характеристический функционал случайных сил $f(t)$.

В качестве второго примера рассмотрим стохастическое уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = iz(t)\,v(t)\,\varphi, \quad \varphi(0) = 1, \tag{1.5}$$

где $v(t)$ — произвольная детерминированная функция, а $z(t)$ — случайная функция времени. Решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\varphi(t) = \exp\left\{i\int_0^t d\tau\, z(\tau)\,v(\tau)\right\}. \tag{1.6}$$

Усредним выражение (1.6):

$$\Phi_t[v(\tau)] = \langle\varphi(t)\rangle = \left\langle\exp\left\{i\int_0^t d\tau\, z(\tau)\,v(\tau)\right\}\right\rangle. \tag{1.7}$$

Таким образом, среднее значение решения стохастического уравнения (1.5) определяет сам характеристический функционал процесса $z(t)$. При этом, если мы усредним непосредственно уравнение (1.5), то получим уже незамкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)] = iv(t)\,\langle z(t)\,\varphi(t)\rangle, \tag{1.8}$$

содержащее новую неизвестную функцию $\langle z(t)\,\varphi(t)\rangle$. В ряде случаев эта функция выражается через функцию Φ_τ, и уравнение (1.8) определяет уравнение для функционала Φ_t. Так, например, для гауссовского процесса $z(t)$, согласно (1.3.11),

$$\langle z(t)\,\varphi(t)\rangle = i\int_0^t d\tau\, B(t,\tau)\,v(\tau)\,\Phi_t[v(\tau)], \tag{1.9}$$

где $B(t, \tau)$ — корреляционная функция процесса $z(t)$. Для телеграфного процесса, согласно (1.3.31),

$$\langle z(t)\,\varphi(t)\rangle = -ia_0^2\int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\}\,v(t_1)\,\Phi_{t_1}[v(\tau)], \tag{1.9'}$$

а для обобщенного телеграфного процесса, согласно (1.4.62), имеем

$$\langle z(t)\varphi(t)\rangle = \left\langle a \exp\left\{ia\int_0^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle_a e^{-\nu t} +$$

$$+\nu\int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\}\left\langle a\exp\left\{ia\int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}\right\rangle_a \Phi_{t_1}[v(\tau)], \qquad (1.9'')$$

где индекс a означает, что усреднение производится по случайной величине a. При этом существенно, что функция $\varphi(t)$ описывается конкретным выражением, определяемым формулой (1.6), которое представляет собой явную запись решения стохастического уравнения.

Рассмотрим теперь простейший нетривиальный пример динамической системы с флуктуирующими параметрами — задачу о параметрическом возбуждении колебательной системы за счет флуктуаций частоты. Эта система описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + z(t)]\,x = 0; \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0, \qquad (1.10)$$

где $z(t)$ — случайная функция времени. Этот пример нетривиален в том смысле, что невозможно уже написать решение задачи (1.10) в явном виде. В то же время ясно, что эта динамическая система должна параметрически возбуждаться, так как случайный процесс $z(t)$ содержит гармонические составляющие всех частот, в том числе и частот $2\omega_0/n$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$), которые, как известно, и соответствуют параметрическому резонансу.

Перепишем уравнение (1.10) в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2[1 + z(t)]\,x, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Будем интересоваться поведением статистических характеристик решения системы (1.11). Усредним (1.11) по ансамблю реализаций $z(t)$. Тогда для средних характеристик получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \langle\dot{x}\rangle &= \langle y\rangle, & \langle x(0)\rangle &= x_0, \\ \langle\dot{y}\rangle &= -\omega_0^2\langle x\rangle - \omega_0^2\langle z(t)\,x\rangle, & \langle y(0)\rangle &= y_0. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Система уравнений (1.12) уже не замкнута относительно переменных $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle z(t)\,x(t)\rangle$. Эта функция является корреляцией случайного процесса $z(t)$ с решением системы (1.11) $x(t)$, которое, в свою очередь, является функционалом от случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей для решения системы (1.11) $x(t)$, $y(t)$. Поведение функций $x(t)$ и $y(t)$

схематически изображено на рис. 6 для трех реализаций случайного процесса $z(t)$. Для фиксированного момента времени t совокупность всех возможных величин $x(t)$, $y(t)$ будет случайной совокупностью чисел, для которой можно ввести плотность вероятностей, параметрически зависящую от времени (см. гл. 1):

$$P_t(x, y) = \langle \delta(x(t) - x) \times \times \delta(y(t) - y) \rangle, \quad (1.13)$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение системы (1.11) для одной реализации $z(t)$, а усреднение производится, как и ранее, по ансамблю реализаций $z(t)$. Дифференцируя (1.13) по t и используя динамические уравнения (1.11), получаем уравнение

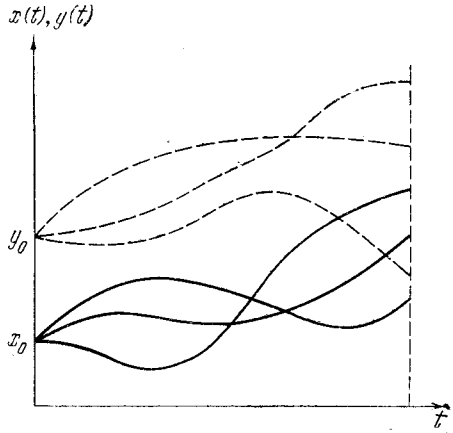

Рис. 6. Схематическое изображение поведения решения системы (1.11) для трех реализаций случайного процесса $z(t)$.

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\langle y(t)\,\delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y)\rangle + \\ + \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial y}\langle x(t)\,\delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y)\rangle + \\ + \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial y}\langle x(t)\,z(t)\,\delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y)\rangle. \quad (1.14)$$

Используя теперь свойства δ-функции, можно вынести из-под знака усреднения в правой части (1.14) y в первом члене и x во втором и третьем членах и переписать (1.14) в виде

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} = -y\frac{\partial}{\partial x}P_t + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y}P_t + \\ + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y}\langle z(t)\,\delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y)\rangle. \quad (1.15)$$

Начальным условием для уравнения (1.15) будет условие

$$P_0(x, y) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0), \quad (1.16)$$

если x_0, y_0 — детерминированные величины, или условие

$$P_t(x, y)|_{t=0} = P_0(x_0, y_0), \quad (1.16')$$

если x_0, y_0 — случайные величины, статистически не зависящие от процесса $z(t)$. Здесь $P_0(x_0, y_0)$ — совместная плотность вероятностей этих величин.

Уравнение (1.15) не замкнуто относительно функции $P_t(x, y)$, так как содержит функцию $\langle z(t)\,\delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y)\rangle$.

Эта функция обусловлена корреляцией случайной функции $z(t)$ с функцией

$$\varphi_t(x,y) = \delta(x(t) - x)\,\delta(y(t) - y), \tag{1.17}$$

которая неявно (через решение системы (1.11)) зависит от самого случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, и, следовательно, является функционалом от этого процесса. Отметим, что сама случайная функция $\varphi_t(x, y)$ (1.17), как функция своих аргументов, удовлетворяет линейному стохастическому уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} = -y\frac{\partial\varphi_t}{\partial x} + \omega_0^2 x\frac{\partial\varphi_t}{\partial y} + \omega_0^2 x z(t)\frac{\partial\varphi_t}{\partial y} \tag{1.18}$$

с начальным условием

$$\varphi_0(x, y) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0), \tag{1.19}$$

которое называется стохастическим уравнением Лиувилля. Плотность вероятностей для решения задачи (1.11), введенная выше согласно равенству (1.13), будет связана с функцией $\varphi_t(x, y)$ равенством

$$P_t(x, y) = \langle\varphi_t(x, y)\rangle. \tag{1.20}$$

Таким образом, как видно на примере уравнений (1.12) и (1.15), для того чтобы получить замкнутые уравнения для интересующих нас средних величин (если это возможно), необходимо научиться расщеплять корреляции функционалов двух типов. Первый тип функционалов содержит явную зависимость от случайного процесса $z(t)$ (в рассматриваемом случае это просто линейная функция), а второй тип функционалов может зависеть от процесса $z(\tau)$ как явным, так и неявным образом (например, через решение соответствующей динамической задачи). Под расщеплением корреляций мы понимаем представление среднего значения произведения двух функционалов через произведение самих усредненных функционалов.

На этом мы закончим пока рассмотрение задачи о параметрическом возбуждении колебаний за счет флуктуаций частоты (более подробно эта задача будет рассмотрена в седьмой главе) и перейдем к вопросу о расщеплении корреляций указанного выше типа.

§ 2. Среднее значение произведения двух функционалов

Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). Как было показано выше, нам необходимо научиться вычислять корреляцию $\langle F[z(\tau)]\,R[z, (\tau)]\rangle$, где $F[z(\tau)]$ — функционал, явно зависящий от процесса $z(t)$, а $R[z(\tau)]$ — функционал, который может зависеть от процесса как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал $R[z(\tau)+\eta(\tau)]$, где $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину $\langle F[z(\tau)]\, R[z(\tau)+\eta(\tau)]\rangle$. Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате $\eta(\tau)\equiv 0$.

Функционал $R[z(\tau)+\eta(\tau)]$, как указывалось в первой главе, можно разложить в функциональный ряд Тейлора по $z(\tau)$ и представить его в виде

$$R[z(\tau)+\eta(\tau)]=\exp\left\{\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}R[\eta(\tau)], \tag{2.1}$$

введя оператор функционального сдвига. Тогда для величины $\langle F[z]\, R[z+\eta]\rangle$ получаем выражение

$$\langle F[z]\, R[z+\eta]\rangle=\left\langle F[z]\exp\left\{\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle R[\eta]. \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Omega[v(\tau)]=\frac{\langle F[z(\tau)]\exp\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\}\rangle}{\langle\exp\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\}\rangle}. \tag{2.3}$$

Тогда выражение (2.2) после ряда тождественных преобразований можно переписать в виде

$$\langle F[z]\, R[z+\eta]\rangle=$$
$$=\frac{\left\langle F[z]\exp\left\{\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle}{\left\langle\exp\left\{\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle}\left\langle\exp\left\{\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle R[\eta(\tau)]=$$
$$=\Omega\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta(\tau)}\right]\langle R[z(\tau)+\eta(\tau)]\rangle. \tag{2.4}$$

Учитывая, что вариационное дифференцирование по $\eta(\tau)$ можно заменить дифференцированием по $z(\tau)$ и положить затем $\eta(\tau)\equiv 0$, получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение [41]:

$$\langle F[z(\tau)]\, R[z(\tau)]\rangle=\left\langle\Omega\left[\frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)}\right]R[z(\tau)]\right\rangle. \tag{2.5}$$

Таким образом, для вычисления корреляции $\langle FR\rangle$ требуется знание функционала $\Omega[v]$, который определяется видом функционала $F[z]$ и статистическим характером самого случайного процесса $z(\tau)$.

Рассмотрим теперь структуру функционала $\Omega[v(\tau)]$. Для него имеем

$$\Omega[v(\tau)]=\frac{1}{\Phi[v(\tau)]}\left\langle\exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)+\int d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle\times$$
$$\times F[\eta(\tau)]_{\eta=0}=\frac{\Phi\left[v(\tau)+\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right]}{\Phi[v(\tau)]}F[\eta(\tau)]_{\eta=0}, \tag{2.6}$$

где

$$\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\} = \left\langle \exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle \qquad (2.7)$$

— характеристический функционал процесса $z(t)$. Формулу (2.6) можно записать в виде

$$\Omega[v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[v(\tau)]\,\Phi\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right]} \times$$
$$\times\, \Phi\left[v(\tau) + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right]\langle F[z(\tau)+\eta(\tau)]\rangle\,|_{\eta=0}, \qquad (2.8)$$

и, следовательно, выражение для функционала $\Omega[v(\tau)]$ таково:

$$\Omega[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{\Theta\left[v(\tau) + \frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)}\right] - \Theta[v(\tau)] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Theta\left[\frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)}\right]\right\} F[z(\tau)]\right\rangle. \qquad (2.9)$$

Аналогичным образом корреляцию (2.4) можно записать в виде, симметричном относительно функционалов F и R, а именно:

$$\langle F[z(\tau)+\eta_1(\tau)]\, R[z(\tau)+\eta_2(\tau)]\rangle =$$
$$= \exp\left\{\Theta\left[\frac{1}{i}\left(\frac{\delta}{\delta\eta_1} + \frac{\delta}{\delta\eta_2}\right)\right] - \Theta\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_1}\right] - \Theta\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_2}\right]\right\} \times$$
$$\times \langle F[z(\tau)+\eta_1(\tau)]\rangle\langle R[z(\tau)+\eta_2(\tau)]\rangle, \qquad (2.10)$$

где $\eta_1(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ — произвольные детерминированные функции. Формула (2.10) позволяет представить среднее значение произведения функционалов через произведение средних значений самих функционалов. Основная сложность задачи в такой форме записи заключена в вычислении действия конкретного оператора, стоящего в правой части (2.10), на произведение усредненных функционалов.

В статистических задачах в ряде случаев интенсивность флуктуаций параметров можно считать малой. Если это так, то функционал $F[z(\tau)]$ можно разложить в ряд по $z(\tau)$ и ограничиться линейным членом разложения. Практически во всех задачах, рассматриваемых ниже, мы имеем как раз такой случай. Для линейного функционала $F[z(\tau)] \equiv z(t')$ функционал $\Omega[v]$ будет уже зависеть от точки t', и для него можно написать выражение

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t')\exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle}{\left\langle \exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle} =$$
$$= \frac{1}{\Phi[v(\tau)]}\,\frac{\delta}{i\,\delta v(t')}\,\Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\,\delta v(t')}\,\Theta[v(\tau)], \qquad (2.11)$$

где $\Phi[v(\tau)]$, как и ранее,— характеристический функционал случайного процесса.

Если воспользоваться разложением функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \ldots \int dt_1 \ldots dt_n K_n(t_1, \ldots, t_n) v(t_1) \ldots v(t_n), \tag{2.12}$$

где функции $K_n(t_1, \ldots, t_n)$ определяют кумулянты (семиинварианты) случайного процесса $z(t)$ (см. гл. 1), то

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \ldots \int dt_1 \ldots dt_n K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n) v(t_1) \ldots v(t_n) \tag{2.13}$$

и, следовательно, формула (2.5) принимает вид

$$\langle z(t') R[z(\tau)] \rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int dt_1 \ldots dt_n K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \ldots \delta z(t_n)} \right\rangle. \tag{2.14}$$

Отметим, что если $R[z(\tau)]$ имеет степенной вид: $R[z(\tau)] = z(t_1) \ldots z(t_n)$, то формула (2.14) описывает рекуррентную связь между n-точечным моментом процесса $z(t)$ и его кумулянтами.

В случае, когда $z(t) \equiv z$ — случайная величина, оператор $\int dt\, \delta/\delta z(t)$ переходит в d/dz и, следовательно, формула (2.14) переходит в формулу (1.1.34). Таким образом, формула (2.14) представляет собой обобщение формулы (1.1.34) на случайные процессы.

В физических задачах, описываемых системой дифференциальных уравнений первого порядка по t (как обыкновенных, так и в частных производных) с начальными условиями при $t = 0$, статистические свойства решения в момент времени t определяются статистическими характеристиками процесса $z(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle, \\ \Theta_t[v(\tau)] = \ln \Phi_t[v(\tau)]. \tag{2.15}$$

Функционал $\Phi_t[v(\tau)]$ может быть получен из $\Phi[v(\tau)]$ заменой $v(\tau) \to v(\tau)\,\theta(\tau)\,\theta(t-\tau)$, и, наоборот, функционал $\Phi[v(\tau)]$ может быть получен из $\Phi_t[v(\tau)]$ предельным переходом по t. В этом случае все полученные выше формулы остаются в силе для вычисления статистических средних $\langle z(t') R_t[z(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leqslant t$,

т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle = \left\langle \Omega_{t'}\left[\frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)}\right] R_t[z(\tau)]\right\rangle \qquad (0 < t' < t), \tag{2.16}$$

где

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta v(t')}\Theta_t[v(\tau)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_0^t\ldots\int dt_1\ldots dt_n K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n)\, v(t_1)\ldots v(t_n). \tag{2.17}$$

В случае, когда точка t' совпадает с t, формула (2.16) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \left\langle \Omega_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)}\right] R_t[z(\tau)]\right\rangle. \tag{2.18}$$

Однако формула (2.17), как мы увидим ниже, не всегда будет давать правильный предельный переход при $t' \to t$ (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть не перестановочны). В этом случае

$$\Omega_t[v(\tau)] = \frac{1}{\Phi_t[v(\tau)]}\frac{d}{iv(t)\,dt}\Phi_t[v(\tau)] \equiv \frac{1}{iv(t)}\frac{d}{dt}\Theta_t[v(\tau)]. \tag{2.19}$$

Разложение функционала $\Omega_t[v]$ в ряд Тейлора будет определяться выражением

$$\Omega_t[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_0^t\ldots\int dt_1\ldots dt_n L_{n+1}(t, t_1, \ldots, t_n)\, v(t_1)\ldots v(t_n), \tag{2.20}$$

где $L_{n+1}(t, t_1, \ldots, t_n)$, вообще говоря, не соответствует предельному переходу в $K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n)$ в формуле (2.17) при $t' \to t$, т. е. статистические средние (2.14) и (2.18) могут претерпевать разрыв при $t' = t$.

Рассмотрим теперь на конкретных примерах применение полученных выше формул. Как уже отмечалось, в физических приложениях наиболее часто рассматриваются модельные задачи, когда случайный процесс $z(t)$ можно считать либо гауссовским, либо пуассоновским случайным процессом, либо процессом телеграфного типа. Поэтому при рассмотрении конкретных примеров ограничимся именно такими процессами.

§ 3. Гауссовский и пуассоновский случайные процессы

Для гауссовского случайного процесса все формулы, полученные в предыдущем параграфе, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала $\Theta[v(\tau)]$ имеет вид (среднее значение процесса $z(t)$ считаем равным нулю)

(1.3.9) и, следовательно, функционал $\Omega[v(\tau)]$ (2.9) принимает вид

$$\Omega[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \iint d\tau_1\, d\tau\, B(\tau, \tau_1)\, v(\tau_1) \frac{\delta}{\delta z(\tau)} \right\} F[z(\tau)] \right\rangle. \qquad (3.1)$$

Оператор, стоящий под знаком усреднения в правой части равенства (3.1), представляет оператор функционального сдвига, и, следовательно,

$$\Omega[v(\tau)] = \left\langle F\left[z(\tau) + i \int d\tau_1\, B(\tau, \tau_1)\, v(\tau_1) \right] \right\rangle, \qquad (3.2)$$

а формула (2.10) запишется в виде

$$\langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]\, R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \exp\left\{ \iint d\tau_1 d\tau_2\, B(\tau_1, \tau_2) \frac{\delta^2}{\delta\eta_1(\tau_1)\, \delta\eta_2(\tau_2)} \right\} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \times \\ \times \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle. \qquad (3.3)$$

В формуле (3.3) можно выполнить операцию вариационного дифференцирования по $\eta_1(\tau)$ (что сводится к функциональному сдвигу) и положить $\eta_1 \equiv 0$. В результате получаем равенство

$$\langle F[z(\tau)]\, R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle F\left[z(\tau) + \int d\tau_1\, B(\tau, \tau_1) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau_1)} \right] \right\rangle \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle, \qquad (3.4)$$

соответствующее равенству (2.4), с функционалом $\Omega[v(\tau)]$ вида (3.2).

Пусть, например, $F[z(\tau)] = z(t)$. Тогда формула (3.4) принимает вид

$$\langle z(t)\, R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int d\tau_1\, B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \qquad (3.5)$$

Заменяя теперь дифференцирование по $\eta(\tau_1)$ на дифференцирование по $z(\tau_1)$ и полагая $\eta = 0$, получаем равенство

$$\langle z(t)\, R[z(\tau)] \rangle = \int d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau_1)} \right\rangle, \qquad (3.6)$$

которое в физической литературе принято называть формулой Фурутцу — Новикова по имени авторов, впервые ее получивших [42, 14] (см. также [43]).

Далее мы будем использовать многомерное обобщение формулы (3.6), которое, как легко видеть, можно записать в виде

$$\langle z_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{r})\, R[z] \rangle = \int d\boldsymbol{r}' \langle z_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{r})\, z_{j_1,\ldots,j_n}(\boldsymbol{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z_{j_1,\ldots,j_n}(\boldsymbol{r}')} \right\rangle, \qquad (3.6')$$

где через $\boldsymbol{r}$ обозначены все непрерывные аргументы случайного поля $z(\boldsymbol{r})$, а через $i_1, \ldots, i_n$ — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (3.6′) предполагается суммирование.

Если в формуле (3.4) положить $F[z] = \exp\{i\int d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\}$, то получаем равенство

$$\left\langle \exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau) v(\tau)\right\} R[z(\tau)+\eta(\tau)]\right\rangle = \\ = \left\langle \exp\left\{i\int d\tau_1 v(\tau_1)\left[z(\tau_1)+\int d\tau\, B(\tau,\tau_1)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right]\right\}\right\rangle \times \\ \times \langle R[z(\tau)+\eta(\tau)]\rangle. \qquad (3.7)$$

Учитывая теперь определение характеристического функционала процесса $z(t)$ и то, что оператор в правой части (3.7) представляет собой оператор функционального сдвига, можно переписать правую часть (3.7) в виде

$$\Phi[v(\tau)]\left\langle R\left[z(\tau)+\eta(\tau)+i\int d\tau_1 B(\tau,\tau_1) v(\tau_1)\right]\right\rangle. \qquad (3.8)$$

Полагая теперь $\eta(\tau)\equiv 0$, получаем окончательное равенство:

$$\left\langle \exp\left\{i\int d\tau\, z(\tau) v(\tau)\right\} R[z(\tau)]\right\rangle = \\ = \Phi[v(\tau)]\left\langle R\left[z(\tau)+i\int d\tau_1 B(\tau,\tau_1) v(\tau_1)\right]\right\rangle, \qquad (3.9)$$

т. е. в правой части (3.9) под знаком усреднения к случайному процессу $z(\tau)$ добавляется детерминированная мнимая составляющая. Формулы (3.6) и (3.9) представляют обобщение формул (1.1.18) и (1.1.19) на случайные гауссовские процессы. При этом формулу (3.9) можно получить и другим способом, аналогичным выводу формулы (1.1.19), рассматривая соответствующий континуальный интеграл (см., например, [44]).

Если случайный процесс $z(t)$ определен только на отрезке времени $[0, t]$, то функционал $\Theta_t[v(\tau)]$ будет определяться выражением

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\frac{1}{2}\iint\limits_0^t d\tau_1\, d\tau_2 \langle z(\tau_1) z(\tau_2)\rangle v(\tau_1) v(\tau_2), \qquad (3.10)$$

а функционалы Ω будут линейными функционалами:

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \frac{\delta}{i\,\delta v(t')}\Theta_t[v(\tau)] = i\int\limits_0^t d\tau \langle z(t') z(\tau)\rangle v(\tau), \qquad (3.11)$$

$$\Omega_t[v(\tau)] = \frac{d}{iv(t)\,dt}\Theta_t[v(\tau)] = i\int\limits_0^t d\tau \langle z(t) z(\tau)\rangle v(\tau), \qquad (3.12)$$

и, следовательно, формулы (2.16), (2.18) будут иметь вид

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle = \int\limits_0^t d\tau \langle z(t') z(\tau)\rangle \left\langle \frac{\delta R_t[z(\tau)]}{\delta z(\tau)}\right\rangle \qquad (t' \leqslant t), \qquad (3.13)$$

совпадающий с равенством (3.6) при выполнении условия

$$\frac{\delta R_t\,[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0,\ \tau > t. \tag{3.14}$$

Отметим, что в этом случае формула (3.9) принимает вид

$$\left\langle \exp\left\{i\int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\} R_t\,[z(\tau)]\right\rangle =$$

$$= \Phi_t\,[v(\tau)]\left\langle R_t\left[z(\tau) + i\int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1)\, v(\tau_1)\right]\right\rangle. \tag{3.15}$$

Рассмотрим теперь среднее значение

$$\Phi_t\,[v(\tau), u] = \exp\{\Theta_t\,[v(\tau), u]\} =$$

$$= \left\langle \exp\left\{i\int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau) + iuF_t\,[z(\tau)]\right\}\right\rangle. \tag{3.16}$$

Функционалы Φ_t и Θ_t описывают совместные статистические характеристики процесса $z(\tau)$ и функционала от него $F_t\,[z(\tau)]$. При $u = 0$ $\Phi_t\,[v(\tau), u] \to \Phi_t\,[v(\tau)]$ является характеристическим функционалом процесса $z(t)$, а при $v = 0$ $\Phi_t\,[v(\tau), u] \to \Phi_t\,[u]$ — характеристической функцией случайной величины $\xi = F_t\,[z(\tau)]$. Для гауссовского процесса, согласно (3.15),

$$\Theta_t\,[v(\tau), u] = \Theta_t\,[v(\tau)] +$$

$$+ \ln\left\langle \exp\left\{iuF_t\left[z + i\int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1)\, v(\tau_1)\right]\right\}\right\rangle. \tag{3.17}$$

В этом случае

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\Theta_t\,[v(\tau), u]}{\partial u}\bigg|_{u=0} = \left\langle F_t\left[z(\tau) + i\int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1)\, v(\tau_1)\right]\right\rangle, \tag{3.18}$$

и, следовательно, варьируя (3.18) по $v(\tau)$ в точках $t_1, \ldots, t_n$ и полагая $v = 0$, получаем выражение для совместной кумулянтной функции процесса $z(t)$ и функционала от него в виде

$$K_{n,1}(t_1, t_2, \ldots, t_n; t) =$$

$$= \int_0^t \cdots \int d\tau_1 \ldots d\tau_n B(t_1, \tau_1) \ldots B(t_n, \tau_n)\left\langle \frac{\delta F_t\,[z(\tau)]}{\delta z(\tau_1) \ldots \delta z(\tau_n)}\right\rangle, \tag{3.19}$$

обобщающем равенство (1.1.25) на случай гауссовских процессов. В частности, полагая в (3.19) $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t$, получаем формулу для одновременной кумулянтной функции

$$K_{n,1}(t, t, \ldots, t; t) =$$

$$= \int_0^t \cdots \int d\tau_1 \ldots d\tau_n B(t, \tau_1) \ldots B(t, \tau_n)\left\langle \frac{\delta F_t\,[z(\tau)]}{\delta z(\tau_1) \ldots \delta z(\tau_n)}\right\rangle. \tag{3.20}$$

Формула (3.20) впервые была получена в работе [45].

В заключение отметим, что для гауссовского марковского процесса может быть получена простая формула, описывающая корреляцию функционалов $\langle F_{t_1}[z(\tau_1)]\, R^{t_2}[z(\tau_2)]\rangle$, где $\tau_1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \tau_2$ (см. следующий параграф, формулу (4.5′)).

Рассмотрим теперь пуассоновский процесс, определенный в первой главе выражением (1.3.14), для которого логарифм характеристического функционала определяется формулой (1.3.18).

Формулы (2.17), (2.19) для пуассоновского процесса принимают вид

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = -i\nu \int_0^{t'} d\tau\, g(t'-\tau)\, W\left(\int_\tau^t d\tau' v(\tau')\, g(\tau'-\tau)\right), \qquad (3.21)$$

$$\Omega_t[v(\tau)] = -i\nu \int_0^{t} d\tau\, g(t-\tau)\, W\left(\int_\tau^t d\tau' v(\tau')\, g(\tau'-\tau)\right), \qquad (3.22)$$

где

$$W(v) = \frac{dW(v)}{dv} = i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \exp\{i\xi v\}.$$

Равенства (3.21), (3.22) можно, сменив порядок интегрирования, переписать следующим образом:

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] =$$
$$= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau\, g(t'-\tau) \exp\left\{i\xi \int_\tau^t d\tau' v(\tau')\, g(\tau'-\tau)\right\} \qquad (t' \leqslant t), \qquad (3.23)$$

а выражение для корреляций случайного процесса и функционала от него таково:

$$\langle z(t')\, R_t[z(\tau)]\rangle =$$
$$= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau' g(t'-\tau') \langle R_t[z(\tau) + \xi g(\tau-\tau')]\rangle \qquad (t' \leqslant t). \qquad (3.24)$$

Эта формула была получена в работе [16].

В первой главе мы говорили о том, что случайный процесс $n(0, t)$, описывающий число скачков на интервале времени $(0,t)$, является частным случаем пуассоновского процесса при $\xi = 1$ ($p(\xi) = \delta(\xi - 1)$ и $g(t) = \theta(t)$). Для этого процесса формула (3.24) принимает особенно простой вид:

$$\langle n(0, t')\, R_t[n(0, \tau)]\rangle =$$
$$= \nu \int_0^{t'} d\tau \langle R_t[n(0, \tau) + \theta(t'-\tau)]\rangle \qquad (t' \leqslant t). \qquad (3.25)$$

Равенство (3.24) является обобщением на пуассоновские процессы формулы (1.1.29) для пуассоновских случайных величин.

§ 4. Процессы телеграфного типа

Обратимся теперь к процессам телеграфного типа, уравнения для характеристических функционалов которых были получены в первой главе.

Прежде всего рассмотрим телеграфный процесс, определяемый формулой (1.3.26):

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)} \quad (z(0) = a,\ z^2(t) \equiv a^2), \tag{4.1}$$

где a — детерминированная величина. Для этого процесса моментные функции n-го порядка удовлетворяют рекуррентному равенству (1.3.27):

$$M_n(t_1, \ldots, t_n) = \langle z(t_1) \ldots z(t_n)\rangle = \\ = \langle z(t_1)\, z(t_2)\rangle M_{n-2}(t_3, \ldots, t_n) \quad (t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n \geqslant 0) \tag{4.2}$$

$$(\langle z(t)\rangle = a \exp\{-2\nu t\}, \qquad \langle z(t_1)\, z(t_2)\rangle = a^2 \exp\{-2\nu|t_1 - t_2|\}).$$

Из рекуррентного равенства (4.2) немедленно следует выражение

$$\langle z(t_1)\, z(t_2)\, R[z(\tau)]\rangle = \langle z(t_1)\, z(t_2)\rangle \langle R[z(\tau)]\rangle, \tag{4.3}$$

справедливое для произвольного функционала $R[z(\tau)]$ при условии $\tau \leqslant t_2 \leqslant t_1$. Для доказательства (4.3) следует разложить функционал $R[z(\tau)]$ в ряд Тейлора по $z(\tau)$ и использовать формулы (4.2). Равенство (4.3) было впервые получено в работе [18], где было также показано, как использовать его для анализа стохастических линейных систем.

Пусть теперь величина a будет случайной с плотностью распределения вероятностей $p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$. В этом случае $M_{2k+1} = 0$ и, кроме равенства (4.3), имеет место следующее равенство, также полученное в [18]:

$$\langle F[z(\tau_1)]\, z(t_1)\, z(t_2)\, R[z(\tau_2)]\rangle = \\ = \langle F[z(\tau_1)]\rangle \langle z(t_1)\, z(t_2)\rangle \langle R[z(\tau_2)]\rangle + \\ + \langle F[z(\tau_1)]\, z(t_1)\rangle \langle z(t_2)\, R[z(\tau_2)]\rangle, \tag{4.4}$$

справедливое для любых $\tau_1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \tau_2$ и произвольных функционалов $F[z(\tau_1)]$ и $R[z(\tau_2)]$. В самом деле, разложение функционала $R[z(\tau_2)]$ в ряд Тейлора по z можно записать в виде ряда $R[z(\tau_2)] = \sum\limits_{2k} + \sum\limits_{2k+1}$, где первая сумма содержит четное число сомножителей z, а вторая — нечетное. Учитывая, далее, формулы (4.2) и равенства

$$\langle R[z(\tau_2)]\rangle = \langle \sum_{2k}\rangle, \quad \langle z(t_2)\, R[z(\tau_2)]\rangle = \langle z(t_2) \sum_{2k+1}\rangle,$$

получаем формулу (4.4). Формулу (4.4) можно переписать в другом виде. Обозначим функционал $F[z(\tau_1)]\, z(t_1)$ через $\tilde{F}_{t_1}[z(\tau_1)]$, где $\tau_1 \leqslant t_1$, а функционал $z(t_2)\, R[z(\tau_2)]$ — через $\tilde{R}^{t_2}[z(\tau_2)]$, где

$\tau_2 \geqslant t_2$ и $t_2 \geqslant t_1$. Тогда формула (4.4) запишется в виде

$$\langle \tilde{F}_{t_1}[z(\tau_1)]\,\tilde{R}^{t_2}[z(\tau_2)]\rangle = \langle \tilde{F}_{t_1}[z(\tau_1)]\rangle\langle \tilde{R}^{t_2}[z(\tau_2)]\rangle + \\ + \frac{1}{\langle z^2\rangle}\exp\{-2\nu(t_2-t_1)\}\langle z(t_1)\,\tilde{F}_{t_1}[z(\tau_1)]\rangle\langle z(t_2)\,\tilde{R}^{t_2}[z(\tau_2)]\rangle. \tag{4.4'}$$

Так как функционалы F и R в (4.4) произвольны, то и функционалы $\tilde{F}$ и $\tilde{R}$ в (4.4′) также произвольны.

В четвертом параграфе первой главы было показано, что случайный процесс $\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t)$, где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с корреляционной функцией $\frac{\sigma^2}{N}\exp\{-\alpha|\tau|\}$, при $N \to \infty$ переходит в гауссовский марковский процесс. В этом случае можно получить формулу, аналогичную формуле (4.4′). В самом деле, для функционалов от процесса $\xi_N(t)$, последовательно проводя усреднение по $z_1(t)$, $z_2(t)$ и т. д. и каждый раз используя (4.4′), получаем равенство

$$\langle F_{t_1}[\xi_N(\tau_1)]\,R^{t_2}[\xi_N(\tau_2)]\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{N^k}{\sigma^{2k}}\exp\{-\alpha k(t_2-t_1)\}\,F_k(t_1)\,R_k(t_2), \tag{4.5}$$

где

$$F_k(t_1) = \langle z_1(t_1)\ldots z_k(t_1)\,F_{t_1}[\xi_N(\tau_1)]\rangle,$$
$$R_k(t_2) = \langle z_1(t_2)\ldots z_k(t_2)\,R^{t_2}[\xi_N(\tau_2)]\rangle.$$

Переходя к пределу $N \to \infty$ в (4.5), получаем равенство

$$\langle F_{t_1}[\xi(\tau_1)]\,R^{t_2}[\xi(\tau_2)]\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}}\exp\{-\alpha k(t_2-t_1)\}\,\tilde{F}_k(t_1)\,\tilde{R}_k(t_2), \tag{4.5'}$$

где $\xi(\tau)$ — гауссовский марковский процесс, $\tau_1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \tau_2$, а

$$\tilde{F}_k(t_1) = \lim_{N\to\infty} N^k F_k(t_1), \qquad \tilde{R}_k(t_2) = \lim_{N\to\infty} N^k R_k(t_2).$$

Формулы (4.4′), (4.5′), как мы увидим далее, удобны для анализа интегральных стохастических уравнений.

Формулы (4.3) и (4.4) содержат билинейную комбинацию процесса $z(t)$, что не всегда удобно для их практического применения.

Для вычисления же корреляции $\langle z(t)\,R_t[z(\tau)]\rangle$, где $\tau \leqslant t$, как указывалось выше, надо знать характеристический функционал процесса $z(t)$, который не известен. Однако для него имеются уравнения (1.3.30), (1.3.31), описывающие связь функционала $\Psi_t[v(\tau)] = \frac{1}{i\,v(t)}\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)]$ непосредственно с самим характеристическим функционалом $\Phi_t[v(\tau)]$. Этой связи достаточно, чтобы выразить величину $\langle z(t)R_t[z(\tau)]\rangle$ через $\langle R\rangle$. В самом деле, для

любого функционала $R_t[z(\tau)]$, где $\tau \leqslant t$, имеет место цепочка равенств

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)+\eta(\tau)]\rangle =$$

$$= \langle z(t) \exp\left\{\int_0^t d\tau\, z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\rangle R_t[\eta(\tau)] = \Psi_t\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right] R_t[\eta(\tau)] =$$

$$= aR_t[\eta(\tau)]\, e^{-2\nu t} + a^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \times$$

$$\times \left\langle \exp\left\{\int_0^{t_1} d\tau\, z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle R_t[\eta(\tau)] = aR_t[\eta(\tau)]\, e^{-2\nu t} +$$

$$+ a^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R_t[\eta(\tau)+z(\tau)\theta(t_1-\tau)]\rangle, \quad (4.6)$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная детерминированная функция. Полагая $\eta \equiv 0$, получаем окончательное выражение [20]:

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = aR_t[0]\, e^{-2\nu t} +$$

$$+ a^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}_t[t_1, z(\tau)]\right\rangle, \quad (4.7)$$

где функционал $\tilde{R}_t[t_1, z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}_t[t_1, z(\tau)] = R_t[z(\tau)\,\theta(t_1-\tau+0)]. \quad (4.8)$$

Если теперь величина a случайна с распределением вероятностей $p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a+a_0) + \delta(a-a_0)]$, то, усредняя формулу (4.7) по a, получаем равенство

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle =$$

$$= a_0^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}_t[t_1, z(\tau)]\right\rangle. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) по внешнему виду очень напоминает равенство для расщепления корреляции процесса $z(t)$ с функционалом от него $R_t[z(\tau)]$ в случае гауссовского процесса с экспоненциальной корреляционной функцией (см. формулу (3.13)). Отличие состоит в том, что в правой части (4.9) стоит не сам функционал $R_t[z(\tau)]$, а функционал $\tilde{R}_t$, «обрезанный» по процессу $z(\tau)$.

Мы рассмотрели корреляцию $\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle$ при $t' = t$. Если же $t' \geqslant t$, то эту корреляцию можно записать в виде

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle = \frac{1}{a^2} \langle z(t') z(t) z(t) R_t[z(\tau)]\rangle,$$

и, следовательно, согласно формуле (4.3), имеет место равенство

$$\langle z(t')\, R_t[z(\tau)]\rangle = \\ = \exp\{-2\nu(t'-t)\}\langle z(t)\, R_t[z(\tau)]\rangle \quad (t' \geqslant t). \tag{4.10}$$

Аналогичным образом получаем также выражения

$$\langle R_t^{t_0}[z(\tau)]\, z(t')\rangle = \langle R_t^{t_0}[z(\tau)]\, z(t_0)\rangle \exp\{-2\nu(t_0-t')\}, \tag{4.10'}$$

где $t' \leqslant t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, а

$$\langle R_t^{t_0}[z(\tau)]\, z(t_0)\rangle = \\ = a_0^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \exp\{-2\nu(t_1-t_0)\}\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R_t^{t_0}[z(\tau)\,\theta(\tau-t_1+0)]\right\rangle. \tag{4.9'}$$

Для вычисления корреляции $\langle z(\xi)\, R_t^{t_0}[z(\tau)]\rangle$, где $t_0 \leqslant \xi \leqslant t$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, рассмотрим функционал

$$\Phi_{t,t_0}[v(t)] = \left\langle \exp\left\{i\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle \theta(t-t_0),$$

который, очевидно, удовлетворяет интегральному уравнению, аналогичному уравнению для характеристического функционала $\Phi_{t,0}$ процесса $z(t)$ (1.3.31):

$$\Phi_{t,t_0} = \theta(t-t_0) - \\ - a_0^2 \int_{t_0}^{t} d\tau_1 v(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2) \exp\{-2\nu(\tau_1-\tau_2)\}\, \Phi_{\tau_2,t_0}, \tag{4.11}$$

которое можно переписать в виде

$$\Phi_{t,t_0} = \theta(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, K(t,\tau)\, \Phi_{\tau,t_0}, \tag{4.11'}$$

$$K(t,\tau) = -a_0^2 v(\tau) \int_{\tau}^{t} d\tau_1 v(\tau_1) \exp\{-2\nu(\tau_1-\tau)\}.$$

Проварьируем теперь уравнение (4.11′) по $v(\xi)$. В результате для функционала

$$\Psi_t^{t_0}[\xi, v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\,\delta v(\xi)} \Phi_{t,t_0} = \left\langle z(\xi) \exp\left\{i\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle$$

получаем интегральное уравнение, решение которого можно выразить через решение уравнения (4.11′). В результате получаем выражение

$$\Psi_t^{t_0}[\xi] = \int_{t_0}^{t} d\tau\, \Phi_{t,\tau} \int_{t_0}^{\tau} d\tau_1 \Phi_{\tau_1,t_0} \frac{\delta}{i\,\delta v(\xi)} \frac{\partial K(\tau,\tau_1)}{\partial \tau}, \tag{4.12}$$

которое с учетом определения функционала $K(t, \tau)$ можно переписать в виде

$$\Psi_t^{t_0}[\xi, v(\tau)] =$$

$$= ia_0^2 \Phi_{t,\xi}[v(\tau)] \int_{t_0}^{\xi} dt_1 v(t_1) \exp\{-2\nu(\xi - t_1)\} \Phi_{t_1, t_0}[v(\tau)] +$$

$$+ ia_0^2 \Phi_{\xi, t_0}[v(\tau)] \int_{\xi}^{t} dt_1 v(t_1) \exp\{-2\nu(t_1 - \xi)\} \Phi_{t, t_1}[v(\tau)]. \qquad (4.12')$$

Рассмотрим теперь корреляцию

$$\langle z(\xi) R_t^{t_0}[\eta(\tau) + z(\tau)] \rangle =$$

$$= \left\langle z(\xi) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle R_t^{t_0}[\eta(\tau)] =$$

$$= \Psi_t^{t_0}\left[\xi, \frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right] R_t^{t_0}[\eta(\tau)]. \qquad (4.13)$$

Следовательно, (4.13) можно переписать в виде равенства

$$\langle z(\xi) R_t^{t_0}[\eta(\tau) + z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_{t_0}^{\xi} dt_1 \exp\{-2\nu(\xi - t_1)\} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R_t^{t_0}[\eta(\tau) +$$

$$+ z_1(\tau)\theta(\tau - \xi) + z_2(\tau)\theta(t_1 - \tau)] \rangle +$$

$$+ a_0^2 \int_{\xi}^{t} dt_1 \exp\{-2\nu(t_1 - \xi)\} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R_t^{t_0}[\eta(\tau) + z_1(\tau)\theta(\xi - \tau) +$$

$$+ z_2(\tau)\theta(\tau - t_1)] \rangle, \qquad (4.13')$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с одинаковой корреляционной функцией вида

$$\langle z(t) z(t') \rangle = a_0^2 \exp\{-2\nu |t - t'|\}.$$

Полагая теперь в (4.13′) $\eta(\tau) \equiv 0$, мы получаем окончательное выражение для интересующей нас корреляции [20]:

$$\langle z(\xi) R_t^{t_0}[z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_{t_0}^{\xi} dt_1 \exp\{-2\nu(\xi - t_1)\} \times$$

$$\times \left\langle \frac{\delta}{\delta z_2(t_1)} R_t^{t_0}[z_1(\tau)\theta(\tau - \xi) + z_2(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)] \right\rangle +$$

$$+ a_0^2 \int_{\xi}^{t} dt_1 \exp\{-2\nu(t_1 - \xi)\} \left\langle \frac{\delta}{\delta z_2(t_1)} R_t^{t_0}[z_1(\tau)\theta(\xi - \tau) +\right.$$

$$\left. + z_2(\tau)\theta(\tau - t_1 + 0)] \right\rangle. \qquad (4.13'')$$

При $\xi = t$ или $\xi = t_0$ формула (4.13″) переходит соответственно в формулы (4.9), (4.9′). Отметим, что в (4.13″) пределы интегрирования t_0, t могут принимать любые значения от $-\infty$ до ∞.

Отметим также, что если в формуле (4.12′) положить $v(\tau) = v = \text{const}$, то с учетом равенства (1.3.32) получим выражение

$$\left\langle z(\xi) \exp\left\{iv \int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\right\}\right\rangle =$$

$$= iva_0^2 \{\Phi(t-\xi) F(\xi - t_0) + F(t-\xi)\Phi(\xi - t_0)\},$$

где

$$\Phi(t) = e^{-\nu t}\left\{\operatorname{ch}\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda t\right\},$$

$$F(t) = \int_0^t d\tau\, e^{-2\nu(t-\tau)}\Phi(\tau) = e^{-\nu t}\frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda t$$

$(\lambda = \sqrt{\nu^2 - a_0^2 v^2})$, и, следовательно,

$$\left\langle z(\xi) \exp\left\{iv \int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\right\}\right\rangle =$$

$$= \frac{iva_0^2}{\lambda} e^{-\nu(t-t_0)}\left\{\operatorname{sh}\lambda(t-t_0) + \frac{2\nu}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(t-\xi)\operatorname{sh}\lambda(\xi - t_0)\right\}. \qquad (4.14)$$

Выше был рассмотрен случай корреляции случайного процесса $z(t)$ с функционалом от него. Если же мы имеем произвольную функцию от телеграфного процесса $F(z(t))$, то, очевидно, выполняется равенство

$$F(z(t)) = \frac{F(a) + F(-a)}{2} + \frac{F(a) - F(-a)}{2a} z(t), \qquad (4.1')$$

и все, что справедливо для телеграфного процесса $z(t)$, будет справедливо, с небольшими очевидными изменениями, и для $F(z(t))$.

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой (1.3.33). Для этого процесса связь функционала $\Psi_t[v(\tau)]$ с характеристическим функционалом процесса $z(t)$ описывается формулой (1.4.62), которая, как и в случае телеграфного процесса, позволяет выразить корреляцию $\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle$, где $R_t[z]$ — произвольный функционал, через среднее значение самого функционала. В самом деле, действуя так же, как и в случае телеграфного процесса, получаем равенство

$$\langle z(t) R_t[z(\tau) + \eta(\tau)]\rangle = \Psi_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta(\tau)}\right] R_t[\eta(\tau)] =$$

$$= \langle \tilde{a} R_t[\eta(\tau) + \tilde{a}]\rangle_{\tilde{a}} e^{-\nu t} + \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t - t_1)\}\langle \tilde{a} R_t[\eta(\tau) +$$

$$+ \tilde{a}\theta(\tau - t_1) + z(\tau)\theta(t_1 - \tau)]\rangle_{\tilde{a},\, z}, \qquad (4.15)$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная функция, а случайная величина $\tilde{a}$ в первой части статистически независима от процесса $z(t)$. Полагая теперь в (4.15) $\eta(\tau) \equiv 0$, получаем окончательное выражение [20]:

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \langle \tilde{a} R_t[\tilde{a}]\rangle e^{-\nu t} + \\ + \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\} \langle \tilde{a} \tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]\rangle, \quad (4.15')$$

где функционал $\tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]$ связан с функционалом $R_t[z(\tau)]$ формулой

$$\tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)] = R_t[\tilde{a}\theta(\tau - t_1) + z(\tau)\theta(t_1 - \tau)], \quad (4.16)$$

а функционал $R_t[\tilde{a}] = \tilde{R}_t[0, \tilde{a}, 0]$.

Отметим, что в случае обобщенного телеграфного процесса для корреляции $\langle f(z(t)) R_t[z(\tau)]\rangle$, где $f(x)$ — произвольная функция, в силу равенства (1.4.61) также имеет место формула, аналогичная (4.15):

$$\langle f(z(t)) R_t[z(\tau)]\rangle = \langle f(\tilde{a}) R_t[\tilde{a}]\rangle e^{-\nu t} + \\ + \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\} \langle f(\tilde{a}) \tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]\rangle, \quad (4.17)$$

где $\tilde{R}_t$ в правой части описывается выражением (4.16).

§ 5. Марковские процессы

Процессы телеграфного типа, рассмотренные в предыдущем параграфе, как отмечалось в первой главе, являются простейшими марковскими процессами. Рассмотрим теперь те следствия, которые можно получить для корреляций функционалов из одного лишь условия марковости процесса $z(t)$.

Для марковского процесса $z(t)$ общего вида нет уравнения для его характеристического функционала. Имеется только интегральное уравнение для функционала

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = \left\langle \delta(z(t) - z) \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle,$$

описывающего статистическую связь процесса $z(t)$ в момент времени t с его предысторией. Это уравнение было получено в § 4 первой главы и имеет вид

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = P_t(z) + \\ + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t \mid z_1, t_1) \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)], \quad (5.1)$$

где $P_t(z)$ — одновременная плотность вероятностей для $z(t)$, а $p(z, t \mid z_1, t_1)$ — плотность вероятностей перехода. В этом случае, действуя методом, подробно описанным в предыдущем параграфе, можно получить интегральное равенство с вариационными производными для корреляции $\langle \delta(z(t) - z) R_t[t;\ z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$ $(\tau \leqslant t)$ вида

$$\langle \delta(z(t) - z) R_t[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Psi_t \left[z, \frac{\delta}{i\,\delta\eta(\tau)} \right] R_t[t;\ \eta(\tau)]. \quad (5.2)$$

Отметим, что оператор $\Psi_t \left[z, \frac{\delta}{i\,\delta\eta(\tau)} \right]$ является оператором функционального сдвига, хотя это нам здесь и не существенно.

Для марковского процесса $z(t)$ функции $P_t(z)$, $p(z, t \mid z_1, t_1)$ удовлетворяют линейным операторным уравнениям

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \hat{L}_z P_t, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \hat{L}_z p, \quad (5.3)$$

где $\hat{L}_z$ — интегро-дифференциальный оператор по z.

Продифференцируем равенство (5.2) по t. При этом учтем, что, в силу определения функционала $R_t[t;\ \eta(\tau)]$, $\frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} R_t[t;\ \eta(\tau)] \sim \theta(t - t_1)$ и не надо дифференцировать по верхнему пределу (который можно положить равным ∞). Кроме того, имеет место равенство (см. формулу (1.2.11))

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} R_t[t; \eta(\tau)] = \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \frac{\partial}{\partial t} R_t[t; \eta(\tau)], \quad (5.4)$$

т. е. операция дифференцирования перестановочна с операцией вариационного дифференцирования. В результате (с учетом (5.3) и (5.4)) приходим к формуле дифференцирования рассматриваемой корреляции по времени ($\eta(\tau)$ можно положить равной нулю) [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta(z(t) - z) R_t[t; z(\tau)] \rangle =$$
$$= \left\langle \delta(z(t) - z) \frac{\partial R_t[t; z(\tau)]}{\partial t} \right\rangle + \hat{L}_z \langle \delta(z(t) - z) R_t[t; z(\tau)] \rangle. \quad (5.5)$$

Аналогичным образом, используя уравнение (1.4.47′) для функционала $\Psi_{t', t}[z, v(\tau)] = \langle \delta(z(t') - z) \exp\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau) v(\tau)\} \rangle$, где $t' \geqslant t$, можно получить уравнение, справедливое при $t' > t$:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \langle \delta(z(t') - z) R_t[t; z(\tau)] \rangle = \hat{L}_z \langle \delta(z(t') - z) R_t[t; z(\tau)] \rangle, \quad (5.6)$$

начальным условием для которого является условие

$$\langle \delta(z(t') - z) R_t[t; z(\tau)] \rangle \mid_{t'=t} = \langle \delta(z(t) - z) R_t[t;\ z(\tau)] \rangle. \quad (5.7)$$

Умножим теперь равенство (5.5) на $f(z)$, где $f(z)$ — произвольная функция, и проинтегрируем по z. В результате получаем

формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\langle f(z(t))\,R_t[t;z(\tau)]\rangle=\left\langle f(z(t))\,\frac{\partial R_t[t;z(\tau)]}{\partial t}\right\rangle+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\,f(z)\,\hat{L}_z\langle\delta(z(t)-z)\,R_t[t;z(\tau)]\rangle,\qquad(5.8)$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle f(z(t))\,R_t[t;z(\tau)]\rangle-\left\langle f(z(t))\,\frac{\partial R_t[t;z(\tau)]}{\partial t}\right\rangle=$$

$$=\langle R_t[t;z(\tau)]\,[\hat{L}_z^{+}\,f(z(t))]\rangle,\qquad(5.9)$$

где введен оператор $\hat{L}_z^{+}$, сопряженный к оператору $\hat{L}_z$.

Формулы (5.5)—(5.9) определяют правила дифференцирования по времени корреляций функций от марковского процесса $z(t)$ с функционалами от него.

Рассмотрим примеры марковских процессов.

1) $z(t)$ — гауссовский марковский процесс. Оператор $\hat{L}_z$ описывается формулой (1.4.30):

$$\hat{L}_z=B_1(t)\,\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{B_2(t)}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad(5.10)$$

и правая часть формулы (5.9) принимает вид

$$-B_1(t)\langle z(t)\,f_z'(z(t))\,R_t[t;z(\tau)]\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}B_2(t)\langle f_{zz}''(z(t))\,R_t[t;z(\tau)]\rangle.\qquad(5.11)$$

В частном случае $f(z)=z$ имеем

$$-B_1(t)\langle z(t)R_t[t;\,z(\tau)]\rangle.\qquad(5.12)$$

2) Пусть $z(t)$ — пуассоновский процесс с импульсной функцией $e^{-\alpha t}\,\theta(t)$. Как мы увидим в третьей главе, см. (3.5.48), оператор $\hat{L}_z$ является интегро-дифференциальным оператором:

$$\hat{L}_z f(z)=\alpha\,\frac{\partial}{\partial z}zf(z)+\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,p(\xi)\left[\exp\left(-\xi\,\frac{d}{dz}\right)-1\right]f(z),\qquad(5.13)$$

и, следовательно, правая часть (5.9) выглядит так:

$$-\alpha\langle z(t)\,f_z'(z(t))\,R_t[t;z(\tau)]\rangle+$$

$$+\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,p(\xi)\langle[f(z(t)+\xi)-f(z(t))]\,R_t[t;z(\tau)]\rangle.\qquad(5.14)$$

В частном случае $f(z(t))\equiv z(t)$ получаем

$$-\alpha\langle z(t)R_t[t;\,z(\tau)]\rangle+\nu\langle\xi\rangle\langle R_t[t;\,z(\tau)]\rangle.\qquad(5.14')$$

3) Для телеграфного процесса $z(t)$ оператор $\hat{L}_z$, согласно формуле (1.4.24), равен

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu [f(z) - f(-z)] \tag{5.15}$$

и можно рассматривать случай только линейных по z функций (см. формулу (4.1′) этой главы). При этом правая часть (5.9) принимает вид

$$-2\nu \langle z(t) R_t [t, z(\tau)] \rangle. \tag{5.16}$$

Отметим, что в данном случае, согласно (5.6) и (5.7), имеет место равенство ($t' \geqslant t$)

$$\langle z(t') R_t [t; z(\tau)] \rangle = \exp\{-2\nu(t - t')\} \langle z(t) R_t [t; z(\tau)] \rangle,$$

совпадающее, естественно, с формулой (4.10).

4) Для обобщенного телеграфного процесса $z(t)$ оператор $\hat{L}_z$, согласно формуле (1.4.39), определяется формулой

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu f(z) + \nu p_a(z) \int dz' f(z') \tag{5.17}$$

и, следовательно, правая часть (5.9) такова:

$$-\nu \langle f(z(t)) R_t [t; z(\tau)] \rangle + \nu \langle f(a) \rangle \langle R_t [t; z(\tau)] \rangle. \tag{5.18}$$

В частном случае $f(z) = z$ из (5.18) получаем

$$-\nu \langle z(t) R_t [t; z(\tau)] \rangle + \nu \langle a \rangle \langle R_t [t; z(\tau)] \rangle. \tag{5.18′}$$

В случае же $t' \geqslant t$, согласно (5.6) и (5.7), имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\langle \delta(z(t') - z) R_t [t; z(\tau)] \rangle = \\ &\quad = \langle \delta(z(t) - z) R_t [t; z(\tau)] \rangle \exp\{-\nu(t' - t)\} + \\ &\quad + p_a(z) \langle R_t [t; z(\tau)] \rangle (1 - \exp\{-\nu(t' - t)\}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Первое слагаемое в правой части (5.19) описывает случай отсутствия скачков процесса $z(t)$ на интервале (t, t'), а второе слагаемое соответствует наличию скачков. Умножая (5.19) на $f(z)$ и интегрируя по всем z, получаем

$$\begin{aligned} &\langle f(z(t')) R_t [t; z(\tau)] \rangle = \\ &\quad = \langle f(z(t)) R_t [t; z(\tau)] \rangle \exp\{-\nu(t' - t)\} + \\ &+ \langle f(a) \rangle \langle R_t [t; z(\tau)] \rangle (1 - \exp\{-\nu(t' - t)\}) \quad (t' \geqslant t). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Формулы дифференцирования корреляций для гауссовского и телеграфного процессов были получены впервые другим путем в работах [46].

Отметим, что все формулы: (5.12), (5.14′) при $\langle \xi \rangle = 0$, (5.16), (5.18′) при $\langle a \rangle = 0$ имеют один и тот же вид, хотя они и описывают совершенно разные процессы. Этот факт говорит скорее всего о том, что особой пользы от их практического применения ожидать не приходится. Однако, как мы увидим далее, в случае телеграф-

ного и обобщенного телеграфного процессов формулы (5.16), (5.18) будут полезны для анализа стохастических линейных уравнений.

Остановимся теперь на некоторых обобщениях формул, полученных выше. Прежде всего отметим, что если мы имеем векторный марковский процесс $\boldsymbol{z}(t) = \{z_1(t), \ldots, z_N(t)\}$, описываемый оператором $\hat{L}_z$, то функционал

$$\Psi_t[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\tau)] = \left\langle \delta(\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}) \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, \boldsymbol{z}(\tau)\, \boldsymbol{v}(\tau)\right\}\right\rangle, \tag{5.21}$$

где $\boldsymbol{v}(t) = \{v_1(t), \ldots, v_N(t)\}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi_t[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\tau)]}{\partial t} = \{\hat{L}_z + i\boldsymbol{z}\boldsymbol{v}(t)\}\, \Psi_t[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\tau)] \tag{5.22}$$

с начальным условием

$$\Psi_0[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\tau)] = P_0(\boldsymbol{z}). \tag{5.23}$$

Теперь не представляет труда выписать формулу для корреляции $\langle F(\boldsymbol{z}(t)) R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\rangle$, а также формулу для дифференцирования этой корреляции по времени, которая такова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\boldsymbol{z}(t))\, R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\rangle =$$
$$= \left\langle F(\boldsymbol{z}(t)) \frac{\partial R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]}{\partial t}\right\rangle + \langle R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\, [\hat{L}_z^+ F(\boldsymbol{z}(t))]\rangle, \tag{5.24}$$

где $\hat{L}_z^+$ — сопряженный к $\hat{L}_z$ оператор. В важном частном случае, когда все компоненты вектора $\boldsymbol{z}(t)$ являются статистически независимыми марковскими процессами, описываемыми одним и тем же оператором $\hat{L}_z$, формула (5.24) существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\boldsymbol{z}(t))\, R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\rangle = \left\langle F(\boldsymbol{z}(t)) \frac{\partial R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]}{\partial t}\right\rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \langle R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\, [\hat{L}_{z_k}^+ F(\boldsymbol{z}(t))]\rangle. \tag{5.25}$$

Так, например, для всех перечисленных выше процессов с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t+\tau)\rangle = \langle z^2\rangle \exp\{-\alpha\, |\tau|\} \tag{5.26}$$

имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k\right)\langle z_1(t) \ldots z_k(t)\, R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]\rangle =$$
$$= \left\langle z_1(t) \ldots z_k(t) \frac{\partial R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)]}{\partial t}\right\rangle. \tag{5.27}$$

Формула (5.27) определяет правило вынесения операции дифферен-

цирования по времени из-под знака среднего. Так, из (5.27) получаем соотношение

$$\left\langle z_1(t)\ldots z_k(t)\frac{\partial^n R_t[t;z(\tau)]}{\partial t^n}\right\rangle = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha k\right)^n \langle z_1(t)\ldots z_k(t)\,R_t[t;z(\tau)]\rangle, \qquad (5.28)$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$.

§ 6. Дельта-коррелированные случайные процессы

Особое место в физических задачах занимает случай, когда $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный процесс. Важность этого случая обусловлена прежде всего тем, что во многих физических задачах такая аппроксимация флуктуаций параметров имеет ясную физическую природу и при этом, как мы увидим далее, для плотности вероятностей решений соответствующих динамических систем может быть получено замкнутое уравнение.

Для гауссовского δ-коррелированного во времени процесса корреляционная функция имеет вид

$$\langle z(t_1)\,z(t_2)\rangle = B(t_1)\delta(t_1-t_2) \quad (\langle z\rangle = 0). \qquad (6.1)$$

В этом случае функционалы $\Theta[v(\tau)]$, $\Omega_{t'}$, Ω_t, введенные во втором параграфе данной главы, равны

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\, B(\tau)\,v^2(\tau), \qquad (6.2)$$

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = iB(t')\,v(t'), \quad \Omega_t[v(\tau)] = \frac{i}{2}B(t)\,v(t), \qquad (6.3)$$

а формулы (2.16), (2.18) существенно упрощаются и принимают вид

$$\langle z(t')\,R_t[z(\tau)]\rangle = B(t')\left\langle\frac{\delta R_t[z(\tau)]}{\delta z(t')}\right\rangle \qquad (0<t'<t), \qquad (6.4)$$

$$\langle z(t)\,R_t[z(\tau)]\rangle = \frac{1}{2}B(t)\left\langle\frac{\delta R_t[z(\tau)]}{\delta z(t)}\right\rangle. \qquad (6.5)$$

Выражения (6.4), (6.5) описывают скачок статистических средних при $t' = t$ для рассматриваемого гауссовского дельта-коррелированного процесса. Существование этого скачка обусловлено сугубо дельта-коррелированностью,— если процесс не дельта-коррелирован, то никакого скачка нет (см. формулу (3.13)).

Дельта-коррелированный пуассоновский случайный процесс соответствует предельному переходу

$$g(\tau) \to \delta(\tau). \qquad (6.6)$$

В этом случае логарифм характеристического функционала имеет простой вид (см. (1.3.23)). Следовательно, формулы (2.17), (2.19) можно переписать (для данного случая) в виде

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \exp\{i\xi v(t')\} \qquad (t' < t), \tag{6.7}$$

$$\Omega_t[v(\tau)] = \frac{\nu}{iv(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)[\exp\{i\xi v(t)\} - 1] =$$

$$= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \exp\{i\eta v(t)\}, \tag{6.8}$$

а выражения для корреляций (2.16), (2.18) оказываются равными

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle =$$

$$= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \langle R_t[z(\tau) + \xi\delta(\tau - t')]\rangle \qquad (t' < t), \tag{6.9}$$

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \langle R_t[z(\tau) + \eta\delta(t - \tau)]\rangle. \tag{6.10}$$

Формулы (6.9), (6.10) описывают скачок статистических средних при $t' = t$, обусловленный, как и для гауссовского случая, дельта-коррелированностью процесса $z(t)$.

В общем случае дельта-коррелированного процесса $z(t)$ разложение логарифма характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора имеет вид

$$\Theta_t[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau\, K_n(\tau) v^n(\tau), \tag{6.11}$$

а все кумулянтные функции при этом определяются выражением

$$K_n(t_1, \ldots, t_n) = K_n(t_1)\delta(t_1 - t_2) \ldots \delta(t_{n-1} - t_n). \tag{6.12}$$

Характерной чертой этих процессов, как видно из (6.11), является справедливость равенства

$$\dot{\Theta}_t[v(\tau)] = \dot{\Theta}_t[v(t)] \qquad \left(\dot{\Theta}_t[v(\tau)] = \frac{d\Theta_t[v(\tau)]}{dt}\right), \tag{6.13}$$

играющего принципиальную роль для дальнейшего. Равенство (6.13) показывает, что величина $\dot{\Theta}_t[v(\tau)]$ для дельта-коррелированного процесса является не функционалом $v(\tau)$, а просто

функцией. В этом случае функционалы $\Omega_{t'}$, Ω_t принимают вид

$$\Omega_{t'}[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') v^n(t') \qquad (t' < t), \tag{6.14}$$

$$\Omega_t[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) v^n(t) \tag{6.15}$$

и формулы (2.16), (2.18) таковы:

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1}(t') \left\langle \frac{\delta^n R_t[z(\tau)]}{\delta z(t')} \right\rangle \qquad (t' < t), \tag{6.16}$$

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} K_{n+1}(t) \left\langle \frac{\delta^n R_t[z(\tau)]}{\delta z^n(t)} \right\rangle. \tag{6.17}$$

Формулы (6.16), (6.17) описывают скачок статистических средних в общем случае дельта-коррелированных процессов при $t' = t$.

Отметим, что при $t' > t$ для дельта-коррелированных процессов имеет место очевидное равенство

$$\langle z(t') R_t[z(\tau)]\rangle = \langle z(t')\rangle \langle R_t[z(\tau)]\rangle. \tag{6.18}$$

Дельта-коррелированных процессов в природе не бывает. Все реальные процессы имеют конечный радиус корреляции, и дельта-коррелированные процессы — результат асимптотического разложения по параметру, связанному с его радиусом корреляции.

Поясним переход к дельта-коррелированному процессу на примере гауссовского стационарного процесса с радиусом корреляции τ_0. Логарифм характеристического функционала процесса при этом, согласно гл. 1, описывается выражением

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_0}\right) v(\tau_2). \tag{6.19}$$

Положим $\tau_1 - \tau_2 = \tilde{\tau}_2 \tau_0$, тогда выражение (6.19) примет вид

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1/\tau_0} d\tilde{\tau}_2 B(\tilde{\tau}_2) v(\tau_1 - \tilde{\tau}_2 \tau_0). \tag{6.20}$$

Пусть теперь $\tau_0 \to 0$. В этом случае главный член асимптотического разложения по τ_0 будет определяться формулой

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^{\infty} d\tau B(\tau) \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1), \tag{6.21}$$

которую можно записать в виде

$$\Theta_t [v(\tau)] = -\int_0^t d\tau\, B^{\text{эфф}} v^2(\tau), \tag{6.22}$$

где

$$B^{\text{эфф}} = \int_0^\infty d\tau\, B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right). \tag{6.23}$$

Конечно, асимптотическое разложение (6.21) справедливо не для любых функций $v(\tau)$, а только для таких, которые мало меняются за времена порядка τ_0. Так, если $v(\tau) = \varkappa\,\delta(\tau - t_0)$, то асимптотическое разложение (6.21) не справедливо, и в этом случае формула (6.19) заменяется выражением

$$\Theta_t [v(\tau)] = -\frac{\varkappa^2}{2} B(0) \qquad (t_0 < t), \tag{6.24}$$

соответствующим характеристической функции процесса $z(t)$ для фиксированного момента времени $t = t_0$.

Рассмотрим теперь величину $\langle z(t) R_t [z(\tau)]\rangle$, которая в данном случае, согласно (3.13), описывается формулой

$$\langle z(t) R_t [z(\tau)]\rangle = \int_0^t dt_1 B\left(\frac{t - t_1}{\tau_0}\right)\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R_t [z(\tau)]\right\rangle. \tag{6.25}$$

Выполняя замену переменных $t - t_1 \to t_1\tau_0$, получаем выражение

$$\langle z(t) R_t [z(\tau)]\rangle = \tau_0 \int_0^{t/\tau_0} dt_1 B(t_1)\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t - t_1\tau_0)} R_t [z(\tau)]\right\rangle, \tag{6.26}$$

которое при $\tau_0 \to 0$ переходит в равенство, соответствующее гауссовскому дельта-коррелированному процессу:

$$\langle z(t) R_t [z(\tau)]\rangle = B^{\text{эфф}}\left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R_t [z(\tau)]\right\rangle, \tag{6.27}$$

если, конечно, вариационная производная в (6.26) мало меняется за время порядка τ_0.

Таким образом, аппроксимация процесса $z(t)$ дельта-коррелированным процессом обусловлена малостью изменения функционалов от этого процесса за времена порядка его времени корреляции.

Рассмотрим теперь процессы телеграфного типа. Для телеграфного процесса (с $p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$) характеристический функционал описывается уравнением (1.3.31). Время корреляции для этого процесса $\tau_0 = 1/2\nu$, и при $\nu \to \infty$ ($\tau_0 \to 0$) это уравнение для достаточно гладких функций $v(t)$ переходит

в уравнение

$$\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)] = -\frac{a_0^2}{2\nu}v^2(t)\Phi_t[v(\tau)], \tag{6.28}$$

соответствующее гауссовскому дельта-коррелированному процессу. Если при этом считать еще, что $a_0^2 \to \infty$, причем $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_0^2/2\nu = \sigma_0^2$, то формула (6.28) не будет содержать параметра ν и запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)] = -\sigma_0^2 v^2(t)\Phi_t[v(\tau)]. \tag{6.29}$$

Конечно, это не означает, что при $\nu \to \infty$ телеграфный процесс перестает быть телеграфным. Так, при $\nu \to \infty$ одноточечное распределение вероятностей $z(t)$ будет по-прежнему соответствовать телеграфному процессу, т. е. процессу с двумя возможными состояниями. Что касается корреляционной функции и моментных функций более высокого порядка, то они при $\nu \to \infty$ обладают всеми свойствами δ-функций, так как

$$\lim_{\nu\to\infty} 2\nu \exp\{-2\nu|\tau|\} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при} \quad \tau = 0. \end{cases} \tag{6.30}$$

Такие функции следует считать обобщенными функциями, и их дельтаобразный характер будет проявляться в связанных с ними интегралах. При этом уравнение (6.28) показывает, что предельный переход при $\nu \to \infty$ для таких величин эквивалентен замене процесса $z(t)$ на гауссовский дельта-коррелированный процесс. Эта ситуация совершенно аналогична аппроксимации гауссовского случайного процесса с конечным радиусом корреляции τ_0 дельта-коррелированным процессом при $\tau_0 \to 0$.

Аналогичным образом получаем, что и обобщенный телеграфный процесс, характеристический функционал которого описывается интегро-дифференциальным уравнением (1.4.62), при $\nu \to \infty$ для достаточно гладких функций $v(t)$ определяется уравнением (считаем для простоты $\langle a\rangle = 0$)

$$\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)] = -\frac{\langle a^2\rangle}{\nu}v^2(t)\Phi_t[v(\tau)], \tag{6.31}$$

также соответствующим гауссовскому дельта-коррелированному процессу.

В качестве более сложного примера рассмотрим характеристический функционал для квадрата гауссовского стационарного процесса, т. е. для процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссовский процесс с параметрами $\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = B(t_1 - t_2)$. Вычислим его характеристический функционал

$$\Phi_t[v(\tau)] = \langle\varphi_t\rangle, \quad \varphi_t = \exp\left\{i\int_0^t d\tau\, v(\tau)\,\xi^2(\tau)\right\}. \tag{6.32}$$

Характеристический функционал процесса $z(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.8):

$$\frac{d}{dt}\Phi_t[v(\tau)] = iv(t)\langle\xi^2(t)\varphi_t\rangle. \tag{6.33}$$

Рассмотрим величину $\Psi(t_1, t_2) = \langle\xi(t_1)\xi(t_2)\varphi_t\rangle$. Согласно формуле (3.13)

$$\Psi(t_1, t_2) = \int_0^t dt' B(t_1 - t')\left\langle\frac{\delta}{\delta\xi(t')}\xi(t_2)\varphi_t\right\rangle. \tag{6.34}$$

Вычисляя теперь вариационную производную в правой части (6.34) (при этом используем явное выражение для функции φ_t (6.32)), получаем интегральное уравнение для функции $\Psi(t_1, t_2)$:

$$\Psi(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)\Phi_t + 2i\int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)\Psi(\tau, t_2). \tag{6.35}$$

Функцию $\Psi(t_1, t_2)$ можно представить в виде

$$\Psi(t_1, t_2) = S(t_1, t_2)\Phi_t, \tag{6.36}$$

где функция $S(t_1, t_2)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$S(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2) + 2i\int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)S(\tau, t_2). \tag{6.37}$$

Следовательно, функционал $\Phi_t[v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi_t[v(t)] = \exp\left\{i\int_0^t d\tau v(\tau)S(\tau, \tau)\right\}. \tag{6.38}$$

Таким образом, разложение величины $S(t, t)$ в функциональный ряд Тейлора по $v(\tau)$ определяет кумулянты процесса $z(t) = \xi^2(t)$. А так как уравнение (6.37) — линейное интегральное уравнение, то его решение можно представить в виде итерационного ряда

$$S(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t, t),$$

$$S^{(n)}(t, t) = (2i)^n\int_0^t\ldots\int d\tau_1\ldots d\tau_n v(\tau_1)\ldots v(\tau_n)\times$$
$$\times B(t - \tau_1)B(\tau_1 - \tau_2)\ldots B(\tau_n - t). \tag{6.39}$$

Следовательно, n-й кумулянт процесса $z(t)$ определяется величиной $S^{(n-1)}(t, t)$. Отметим, что, по-видимому, впервые кумулянтные функции для квадрата гауссовского процесса исследовались в работах [47].

Если функция $v(t)$ медленно меняется за время корреляции τ_0 процесса $\xi(t)$ (т. е. мы не рассматриваем одновременные характеристические функции процесса $z(t)$), то можно перейти к пределу $\tau_0 \to 0$. В результате получаем выражения:

$$S^{(0)}(t, t) = B(0),$$

$$S^{(n)}(t, t) = (2i)^n v^n(t) \int_0^\infty \ldots \int d\tau_1 \ldots d\tau_n B(\tau_1) B(\tau_1 - \tau_2) \ldots B(\tau_n), \tag{6.40}$$

и, следовательно, процесс $z(t)$ можно считать в этом пределе дельта-коррелированным по t случайным процессом. Разложение величины $S(t, t)$ в ряд (6.39) в этом случае идет по параметру $\alpha = \tau_0 B(0) v(t)$. Если $\alpha \ll 1$, то можно ограничиться первыми членами ряда (6.40), что соответствует обычной теории возмущений. Если же $\alpha \sim 1$, то необходимо учитывать весь ряд для функции $S(t, t)$.

Примером процесса, который не является дельта-коррелированным, может служить, например, процесс $z(t) = z\xi(t)$, где $\xi(t)$ — гауссовский дельта-коррелированный процесс, для которого $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$, а величина z случайна с распределением вероятностей $p(z)$. В этом случае характеристический функционал определяется равенством

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ iz \int_0^t d\tau\, v(\tau) \xi(\tau) \right\} \right\rangle_{z, \xi} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, p(z) \exp\left\{ -\frac{z^2 \sigma^2}{2} \int_0^t d\tau\, v^2(\tau) \right\} \tag{6.41}$$

и процесс $z(t)$ не является дельта-коррелированным, так как для него не выполняется равенство (6.13), несмотря на то что второй кумулянт его имеет вид

$$K_2(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle = \langle z^2 \rangle \sigma^2 \delta(t_1 - t_2). \tag{6.42}$$

Это связано с тем, что процесс $z(t)$ является произведением двух процессов: z — с бесконечным радиусом корреляции и $\xi(t)$ — с нулевым радиусом корреляции.

В заключение этого параграфа остановимся на понятии дельта-коррелированных во времени случайных полей.

Пусть имеется векторное случайное поле $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{x}$ — пространственные координаты, а t — временная координата. В этом случае разложение логарифма характеристического функционала в ряд Тейлора определяет кумулянтные функции случайного поля f (см. гл. 1). В частном случае, когда

$$K_n^{i_1, \ldots, i_n}(\boldsymbol{x}_1, t_1; \ldots; \boldsymbol{x}_n, t_n) =$$

$$= K_n^{i_1, \ldots, i_n}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \ldots \delta(t_{n-1} - t_n), \tag{6.43}$$

будем называть поле $f(x, t)$ дельта-коррелированным случайным полем по t. Тогда функционал $\Theta_t[\psi(x', \tau)]$ принимает вид

$$\Theta_t[\psi(x', \tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n \times$$
$$\times K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, \ldots, x_n; \tau)\, \psi_{i_1}(x_1, \tau) \ldots \psi_{i_n}(x_n, \tau), \qquad (6.44)$$

важной особенностью которого является равенство, аналогичное (6.13):

$$\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)] = \dot{\Theta}_t[\psi(x', t)]. \qquad (6.45)$$

На этом мы закончим рассмотрение вопроса о расщеплении корреляций в динамических системах и перейдем к непосредственному изучению статистических характеристик решений соответствующих динамических уравнений.

Глава 3

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

§ 1. Уравнение Эйнштейна — Фоккера (УЭФ) для системы дифференциальных уравнений

Пусть некоторая величина $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ удовлетворяет системе динамических уравнений

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi, t) + f_i(\xi, t), \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{1.1}$$

где $v_i(\xi, t)$ — детерминированные функции, а $f_i(x, t)$ — случайные функции $n+1$ переменной, обладающие следующими свойствами:

а) $f_i(x, t)$ — гауссовское случайное поле в $(n+1)$-мерном пространстве (x, t);

б) $\langle f_i(x, t)\rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная, а x — пространственная координаты.

Статистические характеристики поля $f_i(x, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(x, t;\ x', t') = \langle f_i(x, t) f_j(x', t')\rangle,$$

где угловыми скобками обозначено, как и ранее, усреднение по ансамблю реализаций поля f.

Так как система уравнений (1.1) является системой первого порядка по t, начальные условия к которой ставятся при $t = 0$, то функции $\xi_i(t)$ будут функционально зависеть лишь от предшествующих по t значений $f_j(x, t')$ из интервала $0 \leqslant t' \leqslant t$. Отсюда следует, что $\xi_i(t)$ не меняется при варьировании функции $f_j(x, t')$ вне этого интервала, т. е. на участках $t' < 0$, $t' > t$. Следовательно, вариационная производная $\delta\xi_i/\delta f_j$ удовлетворяет условию (при фиксированных ξ_0)

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, t')} = 0, \quad \text{если} \quad t' < 0, \quad t' > t, \tag{1.2}$$

которое мы будем называть условием причинности.

Для дальнейшего нам понадобится значение $\delta\xi_i(t)/\delta f_j(x, t')$ при $t' = t$. Эта величина может быть найдена следующим образом. Интегрируя (1.1) по t, получаем

$$\xi_i(t) = \xi_{i0} + \int_0^t d\tau \int dx' \left[v_i(x, \tau) + f_i(x', \tau)\right] \delta(x' - \xi(\tau)).$$

Подействуем на эту формулу оператором $\delta / \delta f_j(\boldsymbol{x}, t')$ $(t' < t)$ и учтем, что, согласно определению вариационной производной,

$$\delta f_i(\boldsymbol{x}', t) / \delta f_j(\boldsymbol{x}, t') = \delta_{ij} / \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\delta(t - t')$$

(см. гл. 1). Так как ξ_0 не зависит от $\boldsymbol{f}$, дифференцируя произведение под знаком интеграла, находим

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(\boldsymbol{x}, t')} = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x} - \xi(t')) -$$

$$- \int_{t'}^{t} d\tau \int d\boldsymbol{x}' [v_i(\boldsymbol{x}', \tau) + f_i(\boldsymbol{x}', \tau)] \frac{\partial}{\partial x_k'} \delta(\boldsymbol{x}' - \xi(\tau)) \frac{\delta \xi_k(\tau)}{\delta f_j(\boldsymbol{x}, t')}.$$

Нижний предел интегрирования во втором слагаемом заменен на t', так как, согласно (1.2), стоящая под знаком интеграла вариационная производная равна нулю, если $\tau < t'$. Полагая теперь $t' = t$, мы обращаем в нуль второе слагаемое, не содержащее, как можно показать, особенностей при $t' = t$, в результате чего получаем формулу

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(\boldsymbol{x}, t)} = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x} - \xi(t)). \tag{1.3}$$

Как указывалось выше, функции $\xi_i(t)$ функционально зависят лишь от предшествующих значений $f_j(\boldsymbol{x}, t')$. Однако может существовать статистическая связь между $\xi_i(t)$ и последующими значениями $f_j(\boldsymbol{x}, t'')$, так как значения $f_j(\boldsymbol{x}, t'')$ при $t'' > t$ коррелированы со значениями $f_j(\boldsymbol{x}, t')$ при $t' < t$. Ясно, что корреляция функции $\xi_i(t)$ с последующими значениями $f_j(\boldsymbol{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \lesssim \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $f_i(\boldsymbol{x}, t)$ по переменной t. Если же характерный радиус корреляции функции $\xi_i(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$ (что выполняется для достаточно большого класса реальных физических процессов), то в такой задаче существует малый параметр τ_0/T, который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно положить $\tau_0 = 0$. В таком случае значения $\xi_i(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $f_j(\boldsymbol{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный

$$B_{ij}^{\text{эфф}}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t), \tag{1.4}$$

причем величина F_{ij} определяется из условия равенства интегралов от B_{ij} и $B_{ij}^{\text{эфф}}$ по t':

$$F_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t'), \tag{1.5}$$

что соответствует переходу к гауссовскому дельта-коррелированному по t случайному полю (см. § 6 гл. 2).

Введем плотность вероятностей для решения $\xi(t)$ системы уравнений (1.1):

$$P_t(x) = \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle, \tag{1.6}$$

где $\xi(t)$ — решение системы, соответствующее определенной реализации $f(x, t)$, а усреднение производится по множеству всех реализаций f.

Дифференцируя (1.6) по t, получаем с учетом (1.1) уравнение

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \langle [v_k(\xi(t), t) + f_k(\xi(t), t)] \delta(x - \xi(t)) \rangle \tag{1.7}$$

(по повторяющимся индексам, как обычно, предполагается суммирование). Используя свойства δ-функции, можно заменить $\xi(t)$ на x в выражениях, стоящих в квадратных скобках. Вынося неслучайный множитель $v_k(x, t)$ за знак среднего и снова используя (1.6), получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \{v_k(x, t) P_t(x)\} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle f_k(x, t) \delta(x - \xi(t)) \rangle. \tag{1.8}$$

Выражение, стоящее под знаком усреднения, представляет собой корреляцию случайной величины $f(x, t)$ с функцией $\delta(x - \xi(t))$, зависящей от решения системы (1.1) и, следовательно, являющейся функционалом от поля f. Для вычисления этой корреляции воспользуемся формулой (2.3.6′). Тогда уравнение (1.8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \{v_k(x, t) P_t(x)\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \int dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle f_k(x, t) f_l(x', \tau) \rangle \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(x', \tau)} \delta(x - \xi(t)) \right\rangle$$

или, окончательно, в виде

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \{v_k(x, t) P_t(x)\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \int dx' \int_0^t d\tau \langle f_k(x, t) f_l(x', \tau) \rangle \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_m} \left\langle \delta(x - \xi(t)) \frac{\delta \xi_m(t)}{\delta f_l(x', \tau)} \right\rangle. \tag{1.9}$$

В интеграле по τ в (1.9) пределы расставлены в соответствии с (1.2).

Как видно из (1.9), плотность вероятностей для решения $\xi(t)$ в фиксированный момент времени t определяется зависимостью поведения решения $\xi(t)$ от поля $f(x', \tau)$ для всех $0 < \tau \leqslant t$, и для нее, вообще говоря, не может быть получено замкнутого уравнения.

Если для корреляционной функции поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ воспользоваться приближением (1.4), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta\xi_m(t)/\delta f_l(\boldsymbol{x}', t)$ при совпадающих временных аргументах $\tau = t$, которые, согласно (1.3), выражаются через функции $\xi_i(t)$. В этом случае

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\{v_k(\boldsymbol{x}, t) P_t(\boldsymbol{x})\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}\int d\boldsymbol{x}' F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t)\frac{\partial}{\partial x_m}\delta_{ml}\langle\delta(\boldsymbol{x} - \xi(t))\,\delta(\boldsymbol{x}' - \xi(t))\rangle,$$

и мы приходим к УЭФ (см. § 4 гл. 1):

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\{[v_k(\boldsymbol{x}, t) + A_k(\boldsymbol{x}, t)]\,P_t(\boldsymbol{x})\} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}[F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t)\,P_t(\boldsymbol{x})] = 0, \qquad (1.10)$$

где $A_k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_l}F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t)\,|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}}$.

Уравнение (1.10) следует решать с начальным условием

$$\boxed{P_0(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \xi_0)} \qquad (1.11)$$

или же с начальным условием более общего вида: $P_0(\boldsymbol{x}) = W_0(\boldsymbol{x})$.

Рассмотрим величины, входящие в (1.10). Члены уравнения (1.10) с A_k и F_{kl} обусловлены флуктуациями поля $f_j(\boldsymbol{x}, t)$. Если поле $\boldsymbol{f}$ стационарно во времени, то величины A_k и F_{kl} не зависят от t. Если к тому же поле $\boldsymbol{f}$ однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина $F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t) = \mathrm{const}$, что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а $A_k(\boldsymbol{x}, t) = 0$ (заметим, однако, что зависимость F_{kl} и A_k от $\boldsymbol{x}$ может быть связана и с использованием криволинейных координат).

Пусть теперь $\boldsymbol{f}$ не обладает пространственной однородностью. Если интенсивность флуктуаций $\boldsymbol{f}$ достаточно мала, то и флуктуации величин $\xi(t)$, обусловленные вариациями $\boldsymbol{f}$, часто оказываются также достаточно малыми. В этом случае можно разложить $f_i(\boldsymbol{x}, t)$ в правой части (1.1) в ряд по пространственным переменным в окрестности точки ξ_0, т. е. представить $f_i(\boldsymbol{x}, t)$ в виде

$$f_i(\boldsymbol{x}, t) = a_i(t) + b_{ij}(t)(x_j - \xi_{j0}), \qquad (1.12)$$

где величины $a_i(t)$ и $b_{ij}(t)$ являются гауссовскими случайными величинами, стационарными во времени. Первый член в (1.12) приводит к постоянному по пространственным переменным тензору коэффициентов диффузии, а второй — к квадратичному. Соответствующие этим тензорам члены в уравнении (1.10) являются «однородными» в том смысле, что если написать с помощью (1.10) уравнение для какого-либо момента функции $\xi(t)$, то диффузионные члены не порождают моментов ξ более высокого поряд-

ка. Если к тому же детерминированные функции $v_i(x, t)$ являются линейными функциями пространственного аргумента, то для моментов $\xi(t)$ любого порядка получаются замкнутые уравнения, которые в ряде случаев более удобны для анализа, чем само уравнение (1.10).

§ 2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (1.1) и выведем уравнение для m-временной плотности вероятностей

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \\ = \langle \delta(\xi(t_1) - x_1) \ldots \delta(\xi(t_m) - x_m) \rangle, \quad (2.1)$$

относящейся к m различным моментам времени.

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m$. Дифференцируя (2.1) по t_m и используя затем динамическое уравнение (2.1), формулу (2.3.6′), условие причинности (1.2) и соотношение (1.3), можно получить уравнение, аналогичное УЭФ (1.10):

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m)}{\partial t_m} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{mi}} \{[v_i(x_m, t_m) + A_i(x_m, t_m)] \mathcal{P}_m\} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_{mi} \partial x_{mj}} [F_{ij}(x_m, x_m, t_m) \mathcal{P}_m] \quad (2.2)$$

(суммирование по индексу m здесь не производится). Начальное условие к (2.2) можно найти из формулы (2.1). Полагая в (2.1) $t_m = t_{m-1}$ и замечая, что

$$\delta(\xi(t_{m-1}) - x_{m-1}) \delta(\xi(t_{m-1}) - x_m) \equiv \\ \equiv \delta(x_{m-1} - x_m) \delta(\xi(t_{m-1}) - x_{m-1}),$$

получаем

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}; x_m, t_{m-1}) = \\ = \delta(x_m - x_{m-1}) \mathcal{P}_{m-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}). \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.2) можно искать в виде

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \\ = p(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1}) \mathcal{P}_{m-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}). \quad (2.4)$$

Так как все дифференциальные операции в (2.2) относятся к x_m, t_m, подставляя (2.4) в (2.2) и (2.3), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода p (обозначаем x_m,

t_m через x, t и x_{m-1}, t_{m-1} через x_0, t_0):

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t \mid x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x_i} \{[v_i(x, t) + A_i(x, t)] p\} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [F_{ij}(x, x, t) p(x, t \mid x_0, t_0)] \tag{2.5}$$

с начальным условием

$$p(x, t_0 \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \tag{2.6}$$

Путем $(m-1)$-кратного применения формулы (2.4) получаем соотношение

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = p(x_m, t_m \mid x_{m-1}, t_{m-1}) \times \\ \times p(x_{m-1}, t_{m-1} \mid x_{m-2}, t_{m-2}) \ldots p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) P_{t_1}(x_1), \tag{2.7}$$

где $P_{t_1}(x_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (1.10) с начальным условием (1.11) и относящаяся к одному моменту времени. Равенство (2.7) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является марковским (см. § 4 гл. 1).

Таким образом, можно высказать следующее утверждение:

Если нелинейная динамическая система описывается уравнением (1.1), в котором случайная «сила» $f(x, t)$ удовлетворяет условиям а), б) и является дельта-коррелированной во времени (т. е. ее корреляционный тензор имеет вид, задаваемый правой частью (1.4)), то случайный процесс $\xi(t)$ является марковским, описывается УЭФ (1.10) и соотношениями (2.5) — (2.7). (2.8)

При этом существенную роль играет условие причинности (1.2), вытекающее из уравнения (1.1) и начальных условий к нему. Эти факты хорошо известны (см., например, монографию [48]). Вывод УЭФ описанным выше методом содержится в работах [15].

В ряде физических задач приходится иметь дело не с конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а с системой уравнений в частных производных ($n = \infty$). В этом случае понятие плотности вероятностей не всегда имеет смысл и приходится рассматривать характеристический функционал для соответствующих полей. Уравнение для характеристического функционала при этом является функциональным уравнением с вариационными производными, представляет собой бесконечномерный аналог УЭФ и может быть названо приближением диффузионного случайного процесса. Исключением являются уравнения в частных производных, содержащие производные по пространственным координатам только первого порядка. Такие уравнения, как хорошо известно, эквивалентны конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и, следовательно, ста-

тистические свойства их решений могут быть описаны плотностью вероятностей $P_{t,r}(x)$, параметрически зависящей от пространственно-временной точки (r, t). Примеры таких уравнений рассматриваются в гл. 5.

§ 3. Об условиях применимости уравнения Эйнштейна — Фоккера

Для оценки границ применимости УЭФ необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $f_j(x, t)$ по временной координате. В этом случае вместо уравнений для плотности вероятностей (1.10) получается уравнение

$$\hat{E}P_t(x) = -\frac{\partial S'_k(x, t)}{\partial x_k}, \tag{3.1}$$

где $\hat{E}$ — стоящий в левой части (1.10) оператор, в котором величина $F_{kl}(x, x', t)$ заменена на

$$\tilde{F}_{kl}(x, x', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(x, t; x', t'), \tag{3.2}$$

а $S'_k(x, t)$ — член, учитывающий поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью τ_0. Отметим, что при $\tau_0 \to 0$ правая часть (3.1) стремится к нулю, и мы возвращаемся к уравнению (1.10). Отличие $\tilde{F}_{kl}$ от F_{kl} заметно лишь в области $t \lesssim \tau_0$. Учет S'_k накладывает, вообще говоря, ограничения на интенсивность флуктуаций поля f. Вывод выражений для S'_k, соответствующих системе уравнений (1.1), приведен в работе [15] (см. также [49]). В общем случае эти выражения довольно громоздки, и для различных физических задач получаются свои условия применимости УЭФ. Ниже мы рассмотрим метод последовательных приближений, позволяющий находить условия применимости УЭФ более простым путем.

Таким образом, условие малости параметра τ_0/T является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для возможности описывать статистические характеристики решения системы уравнений (1.1) на основе приближения диффузионного случайного процесса (УЭФ). Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования.

§ 4. О методах решения УЭФ

Уравнения Эйнштейна — Фоккера для одноточечной плотности вероятностей (1.10) и для плотности вероятностей перехода (2.5) относятся к параболическому типу уравнений в частных производных, и для их решения можно использовать методы теории уравнений математической физики. Основными методами при этом

являются: метод разделения переменных, преобразование Лапласа по временной координате, преобразование Фурье по пространственным координатам и другие интегральные преобразования.

Однако имеется мало УЭФ, допускающих точное решение. Это прежде всего УЭФ, соответствующее таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Рассмотрим, например, систему линейных уравнений

$$\frac{dx_i}{\partial t} = A_{ij}x_j + f_i(t), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \tag{4.1}$$

с постоянной матрицей A. Функции $f_i(t)$ будем считать гауссовскими функциями, дельта-коррелированными во времени *), т. е.

$$\langle f_i(t) f_j(t')\rangle = 2B_{ij}\delta(t-t') \qquad (\langle \boldsymbol{f}(t)\rangle = 0). \tag{4.2}$$

Решение системы уравнений (4.1) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp\{(t-t_0)A\}\,\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} d\tau \exp\{(t-\tau)A\}\,\boldsymbol{f}(\tau), \tag{4.3}$$

и, следовательно, величина $\boldsymbol{x}(t)$ является гауссовской векторной функцией с параметрами (A^T — матрица, транспонированная к A)

$$\langle \boldsymbol{x}(t)\rangle = \exp\{(t-t_0)\,A\}\boldsymbol{x}_0,$$

$$\sigma_{ij}(t,t') = \langle [x_i(t) - \langle x_i(t)\rangle][x_j(t') - \langle x_j(t')\rangle]\rangle =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} d\tau\,\{\exp\{(t-\tau)A\}\,B\exp\{(t'-\tau)A^T\}\}_{ij}. \tag{4.4}$$

В этом случае, как легко видеть, гауссовское распределение вероятностей с параметрами (4.4) удовлетворяет УЭФ для плотности вероятностей перехода $p(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{x}_0, t_0)$, соответствующему стохастической системе (4.1):

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{x}_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\{A\boldsymbol{x}p\} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} B \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} p, \tag{4.5}$$

$$p(\boldsymbol{x}, t_0\,|\,\boldsymbol{x}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Отметим, что само уравнение (4.5) также легко решается путем преобразования Фурье по пространственной координате.

В качестве другого примера рассмотрим стохастическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = z(t)\,x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.6}$$

где $z(t)$ — гауссовский дельта-коррелированный процесс ($\langle z(t)\rangle = 0$, $\langle z(t)\,z(t')\rangle = 2\sigma^2\delta(t-t')$). Соответствующее УЭФ для

*) Отметим, что δ-коррелированность внешних сил для нахождения статистических характеристик решения (4.1) не существенна (см. об этом более подробно в следующей главе).

плотности вероятностей перехода имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t \mid x_0, t_0) = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t \mid x_0, t_0). \tag{4.7}$$

Стохастическое уравнение (4.6) можно решить аналитически:

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\right\}, \tag{4.8}$$

и, следовательно, статистические характеристики $x(t)$ определяются для фиксированных значений t_0, t статистическими характеристиками случайной величины

$$\xi = \int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau). \tag{4.9}$$

Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение вероятностей с параметрами

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \sigma_\xi^2 = \int_{t_0}^{t}\int d\tau_1\, d\tau_2 \langle z(\tau_1) z(\tau_2) \rangle = 2\sigma^2 (t - t_0),$$

т. е.

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2 (t - t_0)}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\sigma^2 (t - t_0)}\right\}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим плотность вероятностей перехода

$$p(x, t \mid x_0, t_0) = \langle \delta(x(t) - x) \mid x(t_0) = x_0 \rangle_z = \langle \delta(x - x_0 \exp \xi) \rangle_\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \delta(x - x_0 \exp \xi)\, p(\xi). \tag{4.11}$$

Интегрируя в (4.11) по ξ, получаем выражение (считаем $x_0 > 0$ и, следовательно, $x > 0$)

$$p(x, t \mid x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2 (t - t_0)}\, x} \exp\left\{-\frac{(\ln x/x_0)^2}{4\sigma^2 (t - t_0)}\right\}. \tag{4.12}$$

Легко видеть, что выражение (4.12) удовлетворяет УЭФ (4.7), а сама величина $x(t)$ называется при этом логарифмически нормальной величиной, так как величина $\ln x(t)$ распределена по гауссовскому закону.

Весьма мощным методом решения УЭФ является метод использования интегральных преобразований. Так, если тензор коэффициентов диффузии $F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t)$ (в 1.10) не зависит от $\boldsymbol{x}$, то можно использовать интегральное преобразование Фурье. В других случаях используются интегральные преобразования, связанные с собственными функциями диффузионного оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left(F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t)\,\bullet\right)$$

В качестве примера рассмотрим УЭФ вида

$$\frac{\partial p(x, t \mid x_0, t_0)}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} p(x, t \mid x_0, t_0) \qquad (4.13)$$

$$(x \geqslant 1), \quad p(x, t_0 \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0).$$

С таким уравнением мы столкнемся в седьмой главе. Учитывая, что диффузионный оператор

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x}$$

является оператором Лежандра, естественно воспользоваться интегральным преобразованием, связанным с функциями Лежандра. Это преобразование называется преобразованием Мелера — Фока (см., например, [50]) и определяется посредством интеграла

$$F(\mu) = \int_1^\infty dx f(x) P_{-1/2+i\mu}(x) \qquad (\mu \geqslant 0), \qquad (4.14)$$

где $P_\nu(x)$ — функция Лежандра первого рода. Фактически вычисление преобразования Мелера — Фока для различных функций $f(x)$ осуществляется с помощью интегральных представлений функций Лежандра, например:

$$P_{-1/2+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\cos\mu\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\tau)}} d\tau \qquad (\alpha \geqslant 0),$$

$$P_{-1/2+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2}{\pi}\operatorname{ch}\pi\mu \int_0^\infty \frac{\cos\mu\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\tau + \operatorname{ch}\alpha)}} d\tau \qquad (\alpha \geqslant 0),$$

и последующего изменения порядка интегрирования. Разложение произвольной функции в интеграл типа Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty d\mu\, \mu \operatorname{th}\mu\pi P_{-1/2+i\mu}(x) \int_1^\infty d\xi\, f(\xi) P_{-1/2+i\mu}(\xi) \qquad (4.15)$$

определяет формулу обращения для преобразования (4.14), а именно для любой (достаточно хорошей) функции $f(x)$, заданной в интервале $1 \leqslant x < \infty$, имеет место разложение

$$f(x) = \int_0^\infty d\mu\, \mu \operatorname{th}\mu\pi F(\mu) P_{-1/2+i\mu}(x), \qquad (4.16)$$

где

$$F(\mu) = \int_1^\infty dx\, f(x) P_{-1/2+i\mu}(x). \qquad (4.17)$$

Решим теперь с помощью преобразования (4.16), (4.17) уравнение (4.13).

Введем обозначение

$$p_t(\mu) = \int_1^\infty dx\, p(x, t \mid x_0, t_0)\, P_{-1/2+i\mu}(x).$$

Умножим уравнение (4.13) на $P_{-1/2+i\mu}(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 1 до ∞. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(\mu) = \sigma^2 \int_1^\infty dx\, P_{-1/2+i\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t \mid x_0, t_0) \qquad (4.13')$$

с начальным условием

$$p_{t_0}(\mu) = P_{-1/2+i\mu}(x_0). \qquad (4.18)$$

Интегрируя дважды по частям в правой части (4.13′) и используя дифференциальное уравнение Лежандра для $P_{-1/2+i\mu}(x)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-1/2+i\mu}(x) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) P_{-1/2+i\mu}(x),$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $p_t(\mu)$

$$\frac{dp_t(\mu)}{dt} = -\sigma^2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) p_t(\mu),$$

решение которого с начальным условием (4.18) имеет вид

$$p_t(\mu) = P_{-1/2+i\mu}(x_0) \exp\left\{-\sigma^2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(t - t_0)\right\}.$$

Используя теперь формулу (4.16), получаем запись решения уравнения (4.13) в виде интеграла Мелера — Фока:

$$p(x, t \mid x_0, t_0) =$$
$$= \int_0^\infty d\mu\, \mu\, \mathrm{th}\, \mu\pi \exp\left\{-\sigma^2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(t - t_0)\right\} P_{-1/2+i\mu}(x)\, P_{-1/2+i\mu}(x_0). \qquad (4.19)$$

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина $x_0 = 1$, то мы получаем выражение

$$P_t(x) = \int_0^\infty d\mu\, \mu\, \mathrm{th}\, \mu\pi \exp\left\{-\sigma^2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) t\right\} P_{-1/2+i\mu}(x), \qquad (4.20)$$

соответствующее решению УЭФ для одноточечной плотности вероятностей с начальным условием

$$P_0(x) = \delta(x - 1).$$

Выше мы говорили об общих методах решения УЭФ как для плотности вероятностей перехода, так и для одноточечной плотности вероятностей. Задача о нахождении одноточечной плотности

вероятностей, однако, может иметь и специфические черты, связанные с возможностью существования стационарного решения, которое в ряде случаев удается найти непосредственно. Это стационарное решение, если оно существует, не зависит от начальных данных и представляет предельное при $t \to \infty$ решение УЭФ. Существуют два класса задач, для которых стационарное решение УЭФ находится легко. Это, во-первых, случай одномерных нелинейных систем уравнений и, во-вторых, случай гамильтоновых систем уравнений. Рассмотрим эти случаи более подробно.

Одномерные нелинейные системы с флуктуирующими параметрами описываются стохастическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + z(t)\, g(x), \quad x(0) = x_0. \tag{4.21}$$

Соответствующее УЭФ имеет вид

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{f(x) P_t(x)\} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) P_t(x). \tag{4.22}$$

Стационарное распределение вероятностей $P_\infty(x)$, если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$f(x) P_\infty(x) = \sigma^2 g(x) \frac{d}{dx} g(x) P_\infty(x) \tag{4.23}$$

(мы считаем, что $P_\infty(x)$ сосредоточено во всей области пространства, т. е. $-\infty < x < \infty$), решение которого таково:

$$P_\infty(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)}\right\}, \tag{4.24}$$

где постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P_\infty(x) = 1.$$

В частном случае $f(x) = -\lambda x$, $g(x) = 1$, описывающем флуктуации скорости броуновского движения частицы (см. (2.1.1)), выражение (4.24) принимает вид гауссовского распределения вероятностей:

$$P_\infty(x) = C \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2} x^2\right\}. \tag{4.25}$$

Другой тип уравнений, позволяющий получать стационарное распределение вероятностей, описывается гамильтоновой системой

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i} - \lambda \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{f}_i(t), \tag{4.26}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, а функция Гамильтона $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_i^2/2 + U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$, λ — постоянный коэффициент (трение), а слу-

чайные силы $f_i(t)$ — гауссовские дельта-коррелированные случайные силы с тензором корреляций

$$\langle f_i^\alpha(t) f_k^\beta(t')\rangle = 2\sigma^2\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta}\delta(t-t') \tag{4.27}$$

(здесь α и β — векторные индексы).

Система уравнений (4.26) описывает броуновское движение системы N взаимодействующих частиц. УЭФ для совместной плотности вероятностей решения системы (4.26) имеет вид

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N}\{H, P_t\}_{(k)} - \lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_k}(\boldsymbol{p}_k P_t) = \sigma^2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 P_t}{\partial \boldsymbol{p}_k^2}, \tag{4.28}$$

где $\{\varphi,\psi\}_{(k)} = \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{p}_k}\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{r}_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}_k}\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{p}_k}$ — скобка Пуассона для k-й частицы.

Легко проверить, что стационарное решение уравнения (4.28) имеет вид канонического распределения Гиббса:

$$P_\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \text{const}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\right\}. \tag{4.29}$$

Проинтегрировав (4.29) по всем $\boldsymbol{r}$, можно получить максвелловское распределение по скоростям, описывающее флуктуации скорости броуновских частиц. Случай $U = 0$ соответствует описанию броуновского движения свободной частицы (4.25).

Если проинтегрировать распределение вероятностей (4.29) по импульсам (скоростям), то получаем больцмановское распределение по координатам частицы:

$$P_\infty(\boldsymbol{r}) = \text{const}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}U(\boldsymbol{r})\right\}. \tag{4.30}$$

Характерной чертой гиббсовского распределения (4.29) является гауссовость по импульсным переменным и статистическая независимость координат и импульсов частиц.

В одномерном случае уравнения (4.26) упрощаются и принимают вид системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \lambda y + f(t), \tag{4.31}$$

стационарное распределение вероятностей для которой имеет вид

$$P_\infty(x,y) = \text{const}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}H\right\}, \quad H = \frac{y^2}{2} + U(x). \tag{4.32}$$

Отметим, что система уравнений (4.31) может возникать и в за-

дачах, не имеющих никакого отношения к броуновскому движению частиц. Рассмотрим, например, следуя [51], систему уравнений

$$\dot{v}_0 = -v_1^2 - v_0 + R + f(t), \qquad \dot{v}_1 = v_0 v_1 - v_1. \tag{4.33}$$

Она описывает движение триплета (гироскопа) с линейным трением, возбуждаемого силой, действующей на неустойчивую моду, имеющей как регулярную составляющую R, так и случайную $f(t)$. Если $R < 1$, то в отсутствие случайной составляющей силы имеется устойчивое стационарное решение

$$v_1 = 0, \; v_0 = R, \tag{4.34}$$

и флуктуации v_0 под действием случайной силы будут описываться стохастическим уравнением

$$\dot{\tilde{v}}_0 = -\tilde{v}_0 + f(t) \qquad (\tilde{v}_0 = v_0 - R). \tag{4.35}$$

Таким образом, при $R < 1$ стационарное распределение вероятностей для компоненты $\tilde{v}_0$, согласно (4.25), будет гауссовским. Иначе дело обстоит при $R > 1$. В этом случае при $f(t) = 0$ имеется два устойчивых состояния равновесия:

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \pm\sqrt{R-1}. \tag{4.36}$$

Представим компоненту v_0 в виде $v_0 = 1 + \tilde{v}_0$. Тогда система уравнений (4.33) принимает вид

$$\dot{\tilde{v}}_0 = -v_1^2 + (R-1) - \tilde{v}_0 + f(t),$$
$$\dot{v}_1 = \tilde{v}_0 v_1, \tag{4.37}$$

и эволюция компоненты v_1 определяется ее начальным значением. Если $v_1(0) > 0$, то и $v_1(t) > 0$. Представляя v_1 как $v_1 = \exp\{\varphi(t)\}$, систему уравнений (4.37) можно записать в гамильтоновом виде (4.31):

$$\dot{\varphi} = \tilde{v}_0, \quad \dot{\tilde{v}}_0 = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} - \tilde{v}_0 + f(t), \tag{4.38}$$

где $U(\varphi) = \frac{1}{2}e^{2\varphi} - (R-1)\varphi$. Переменная φ играет роль координаты частицы, а переменная $\tilde{v}_0$ — ее скорости.

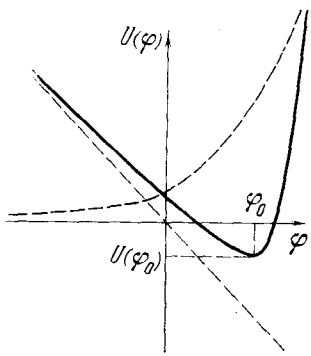

Рис. 7. График зависимости потенциальной функции $U(\varphi)$. Штриховыми линиями обозначены кривая $\frac{1}{2}\exp\{2\varphi\}$ и прямая $-(R-1)\varphi$.

На рис. 7 сплошной линией изображено поведение функции $U(\varphi)$. Функция $U(\varphi)$ имеет минимум в точке $\varphi_0 = \ln\sqrt{R-1}$ $U(\varphi_0) = \frac{1}{2}(R-1)\,[1 - \ln(R-1)]$, соответствующей устойчивому положению равновесия $v_1 = \sqrt{R-1}$. Таким образом, стационарное распределение вероятностей для φ, $\tilde{v}_0$ аналогично

распределению Гиббса:

$$P_\infty(\tilde{v}_0, \varphi) = \text{const} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} H\right\} \quad \left(H = \frac{\tilde{v}_0^2}{2} + U(\varphi)\right). \tag{4.39}$$

Из формулы (4.39) следует, что при $R > 1$ стационарное распределение вероятностей для компоненты v_0 системы уравнений (4.33) будет гауссовским:

$$P_\infty(v_0) = \text{const} \exp\left\{-\frac{(v_0 - 1)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{4.40}$$

а распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ не является гауссовским, и они не коррелируют между собой. Возвращаясь к переменной $v_1(t)$, получаем для нее стационарное распределение вероятностей в виде

$$P_\infty(v_1) = \text{const}\, v_1^{\frac{R-1}{\sigma^2} - 1} \exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{4.41}$$

При критическом режиме ($R = 1$), как видно из (4.41), не существует стационарного распределения вероятностей для компоненты $v_1(t)$.

Отметим, что если УЭФ (1.10) имеет стационарное распределение вероятностей $P_\infty(x)$, то для него можно сформулировать вариационный принцип [52]. Запишем УЭФ (1.10), следуя [52], в виде

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} A_k(x) P_t(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} D_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} P_t(x). \tag{4.42}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} A_k^0(x) &= D_{kl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l} P_\infty(x), \\ \psi_t(x) &= -\ln[P_t(x)/P_\infty(x)]; \end{aligned} \tag{4.43}$$

тогда легко показать, что на классе решений УЭФ (4.42) функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\psi_t(x), P_t(x)\} = \\ = \int dx\, \psi_t(x) \left\{\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(A_k - A_k^0) P_t(x)\right\} - \\ - \frac{1}{2} \int dx\, D_{kl}(x) \frac{\partial \psi_t(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_l} P_t(x) \end{aligned} \tag{4.44}$$

принимает максимальное значение.

В заключение данного параграфа остановимся на двух приближенных методах решения УЭФ. Один из них называется методом кумулянтных разложений [34]. Если в УЭФ (1.10) произвести преобразование Фурье по переменной x, т. е. перейти от плотности вероятностей решения стохастических уравнений (1.1) к характе-

ристической функции

$$\Phi_t(\lambda) = \langle \exp\{i\,\lambda\xi(t)\}\rangle = \exp\{\Theta_t(\lambda)\}, \tag{4.45}$$

и разложить функцию $\Theta_t(\lambda)$ в ряд Тейлора по λ, то для коэффициентов разложения (т. е. одноточечных кумулянтов случайного процесса $\xi(t)$) получится бесконечная система нелинейных уравнений. Метод кумулянтных разложений соответствует пренебрежению в этой системе уравнений всеми кумулянтами высокого порядка, начиная с некоторого (третьего — гауссовское приближение, четвертого — эксцессное приближение и т. д.). Для оставшихся кумулянтов получается замкнутая нелинейная система обыкновенных уравнений, позволяющая проследить их эволюцию со временем. Отметим, что в монографии [34] развит общий метод, позволяющий выписывать такие уравнения, исходя непосредственно из стохастических уравнений (1.1) и не прибегая к УЭФ (1.10) или к уравнению для характеристической функции. Недостатком такого метода является то обстоятельство, что пренебрежение бесконечным рядом кумулянтов, как хорошо известно, «портит» распределение вероятностей. Так, в частности, у такого распределения вероятностей появляются области пространственных переменных, в которых оно имеет отрицательное значение. Однако, как показывают примеры, для большого класса задач метод кумулянтных разложений правильно описывает динамику отдельных кумулянтов. Такой класс задач ограничивается, по-видимому, задачами, в которых статистические характеристики решения являются аналитическими функциями по интенсивности случайных воздействий. Задачи, связанные с неаналитической зависимостью по указанному параметру (например, задачи о выходе траектории системы из какой-либо области, задачи о достижении заданной границы), по-видимому, нельзя описать на основе метода кумулянтных разложений. Ясности в данном вопросе в настоящее время не имеется.

Остановимся теперь на другом приближенном методе, играющем большую роль в стохастических колебательных системах, а именно на методе усреднения по быстро меняющимся величинам. Пусть, например, стохастическая система описывается динамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(x, \tilde{\varphi}) + z(t)\,B(x, \tilde{\varphi}), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= C(x, \tilde{\varphi}) + z(t)\,D(x, \tilde{\varphi}), \end{aligned} \tag{4.46}$$

где $\tilde{\varphi} = \omega_0 t + \varphi(t)$, а A, B, C и D — периодические функции по переменной $\tilde{\varphi}$. Роль переменной x может, например, играть модуль вектора, а $\varphi(t)$ — его фаза. Для системы уравнений (4.46) соответствующее УЭФ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(x, \varphi)}{\partial t} = &- \frac{\partial}{\partial x} A(x, \tilde{\varphi})\,P_t - \frac{\partial}{\partial \varphi} C(x, \tilde{\varphi})\,P_t + \\ &+ \sigma^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} D(x, \tilde{\varphi})\right]^2 P_t(x, \varphi). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Уравнение (4.47) обычно является сложным для непосредственного анализа совместной плотности вероятностей.

Перепишем его в виде

$$\frac{\partial P_t(x,\varphi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} AP_t - \frac{\partial}{\partial \varphi} CP_t - \\ - \sigma^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(B'_x B + B'_\varphi D) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(D'_x B + D'_\varphi D)\right] P_t(x,\varphi) + \\ + \sigma^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} B^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \varphi} BD + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} D^2\right] P_t(x,\varphi). \qquad (4.48)$$

Пусть теперь функции A и C достаточно малы, а также мала интенсивность флуктуаций $z(t)$. В этом случае статистические характеристики системы уравнений (4.46) мало меняются за времена $\sim 1/\omega_0$. И для изучения таких малых изменений можно усреднить (4.48) по периоду колебаний всех функций. Считая, что сама функция $P_t(x, \varphi)$ при этом не меняется, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial \bar{P}_t(x,\varphi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{A}\bar{P}_t - \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{C}\bar{P}_t - \\ - \sigma^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\overline{(B'_x B + B'_\varphi D)} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\overline{D'_x B}\right\} \bar{P}_t(x,\varphi) + \\ + \sigma^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{B^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \varphi}\overline{BD} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\overline{D^2}\right\} \bar{P}_t(x,\varphi), \qquad (4.49)$$

где чертой обозначены величины, усредненные по периоду колебаний. Интегрируя (4.49) по φ, получаем для $P_t(x)$ УЭФ

$$\frac{\partial \bar{P}_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{A}\bar{P}_t(x) + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x}\overline{(B'_x B - B'_\varphi D)}\, \bar{P}_t(x) + \\ + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x}\overline{B^2}\frac{\partial}{\partial x}\bar{P}_t(x). \qquad (4.50)$$

Отметим, что в этом приближении величина $x(t)$ является марковским одномерным случайным процессом. Если же в (4.49) $\overline{BD} = \overline{D'_x B} = 0$, а $\bar{C} = \text{const}$, $\overline{D^2} = \text{const}$, то процессы $x(t)$ и $\varphi(t)$ статистически независимы и процесс $\varphi(t)$ является марковским гауссовским процессом, дисперсия которого линейно растет с ростом t. Это означает, что при больших t (при $\bar{C} = 0$) распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ становится равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$.

Отметим также, что УЭФ (4.49) соответствует приближению дельта-коррелированности процесса $z(t)$, т. е. параметр $\sigma^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, B(\tau)$, и в этом случае одним из условий его применимости является условие $\omega_0\tau_0 \ll 1$, где τ_0 — радиус корреляции процесса $z(t)$. Однако для задач, связанных с методом усреднения по быстро меняющимся величинам, это ограничение можно снять, используя условие дельта-коррелированности не для самого

процесса $z(t)$, а для процесса $\xi(t) = z(t)e^{i\omega_0 t}$. В этом случае

$$\langle \xi(t)\, \xi(t+\tau)\rangle = B(\tau) \exp\{i\omega_0\tau + 2i\omega_0 t\} = \\ = 2\sigma^2 \exp\{2i\omega_0 t\}\, \delta(\tau),$$

где $\sigma^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, B(\tau) \cos\omega_0\tau$. При этом УЭФ (4.49) сохраняется. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен на примере задачи о двухпроводной линии (см. § 6 гл. 7).

§ 5. Обобщение на случай негауссовских флуктуаций параметров

Рассмотрим теперь те следствия, которые проистекают из-за отказа от предположения гауссовости случайного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ в (4.1). Наряду с этим рассмотрим и более общее уравнение вида

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi, t) + \int d\boldsymbol{y} D_{ij}(\xi, \boldsymbol{y}, t) f_j(\boldsymbol{y}, t), \quad \xi(0) = \xi_0 \tag{5.1}$$

(по повторяющимся индексам, как и ранее, предполагается суммирование), где $v_i(\boldsymbol{x}, t)$, $D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ — детерминированные векторная и тензорная функции, а $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ — случайное векторное поле.

Частными случаями системы уравнений (5.1) являются:

1) $D_{ij}(\xi, \boldsymbol{y}, t) \equiv D_{ij}(\boldsymbol{y}, t)$. Тогда, вводя новые случайные функции времени по формуле

$$z_i(t) = \int d\boldsymbol{y}\, D_{ij}(\boldsymbol{y}, t) f_j(\boldsymbol{y}, t), \tag{5.2}$$

можно переписать (5.1) в виде системы уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = v_i(\xi, t) + z_i(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{5.3}$$

описывающей движение нелинейной системы $\xi(t)$ под действием случайных во времени сил.

2) $D_{ij}(\xi, \boldsymbol{y}, t) = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{y} - \xi(t))$. При этом (5.1) переходит в систему уравнений (1.1), описывающую движение нелинейной системы $\xi(t)$ под действием случайных сил $f_i(\xi(t), t)$, зависящих от точки фазового пространства самой системы.

3) Если в уравнении (1.1) ввести фурье-образ по пространственным переменным, то мы приходим к уравнению вида

$$\frac{d\xi_i}{dt} = v_i(\xi, t) + \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \tilde{f}_i(\boldsymbol{\varkappa}, t) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\xi(t)\}, \tag{5.4}$$

соответствующему уравнению (5.1) при выполнении условия

$$D_{ij}(\xi, \boldsymbol{y}, t) = \delta_{ij} \exp\{i\xi\boldsymbol{y}\}. \tag{5.5}$$

И наконец,

4) $D_{ij}(\xi, y, t) = D_{ij}(\xi, t)$. В этом случае, вводя обозначение $f_j(t) = \int dy\, f_j(y, t)$, получаем уравнение

$$\frac{d\xi_i}{dt} = v_i(\xi, t) + D_{ij}(\xi, t) f_j(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{5.6}$$

описывающее параметрическое воздействие случайных параметров $f(t)$ на динамику нелинейной системы $\xi(t)$.

Существенными особенностями системы уравнений (5.1) (так же как и (1.1)) являются два фактора. Это, во-первых, то обстоятельство, что случайное поле $f(y, t)$ входит в (5.1) линейным образом, и, во-вторых, то, что для (5.1) выполняется условие причинности

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, \tau)} = 0 \qquad (\tau < 0,\ \tau > t). \tag{5.7}$$

Что же касается значения вариационной производной $\delta\xi_i(t)/\delta f_j(x, \tau)$ при $\tau = t$, то, как и при выводе равенства (1.3), получаем

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_k(x, t)} = D_{ik}(\xi(t), x, t). \tag{5.8}$$

Так как решение уравнения (5.1) в момент времени t зависит от случайного поля $f(x, \tau)$ лишь для времен $0 \leqslant \tau \leqslant t$, все статистические характеристики решения в момент времени t будут определяться статистическими характеристиками поля $f(x, \tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, которое полностью описывается характеристическим функционалом

$$\Phi_t[\psi(x', \tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\tau \int dx' \psi(x', \tau) f(x', \tau) \right\} \right\rangle. \tag{5.9}$$

Для статистического описания системы (5.1) запишем вспомогательное уравнение:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = v_i(\xi, t) + \int dy\, D_{ij}(\xi, y, t)\,[f_j(y, t) + \eta_j(y, t)]. \tag{5.1'}$$

Уравнение (5.1′) отличается от (5.1) введением новой произвольной детерминированной функции $\eta(y, t)$. Решение уравнения (5.1′) переходит в решение уравнения (5.1) при $\eta \to 0$. Решение уравнения (5.1′) является функционалом от $f + \eta$. Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, \tau)} = \frac{\delta\xi_i(t)}{\delta\eta_j(x, \tau)}. \tag{5.10}$$

Введем одновременную плотность вероятностей для решения уравнения (5.1′):

$$P_t(x) = \langle \delta(\xi(t) - x) \rangle, \tag{5.11}$$

где $\xi(t)$ — решение уравнения (5.1′), соответствующее определенной реализации $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, а усреднение производится по множеству всех реализаций $\boldsymbol{f}$. Отметим, что функция $P_t(\boldsymbol{x})$ является функционалом от поля $\eta(\boldsymbol{x}, \tau)$. Дифференцируя (5.11) по t, получаем с учетом (5.1′) и определения δ-функции уравнение

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(\boldsymbol{x}, t) P_t(\boldsymbol{x})\} - \\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int d\boldsymbol{y}\, D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\, \eta_j(\boldsymbol{y}, t) P_t(\boldsymbol{x})\right\} - \\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int d\boldsymbol{y}\, D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \langle f_j(\boldsymbol{y}, t)\, \delta(\xi(t) - \boldsymbol{x})\rangle\right\}. \qquad (5.12)$$

Для расщепления корреляции в правой части (5.12) воспользуемся методикой, изложенной во второй главе. Вводя оператор функционального сдвига по полю η, последний член в правой части (5.12) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\int d\boldsymbol{y}\, D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \times \\ \times \frac{\left\langle f_j(\boldsymbol{y}, t) \exp\left\{\int\limits_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right\}\right\rangle}{\left\langle \exp\left\{\int\limits_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right\}\right\rangle} P_t(\boldsymbol{x}). \qquad (5.13)$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta\eta(\boldsymbol{y}, t)$ на функцию $P_t(\boldsymbol{x})$. Учитывая формулу (5.8), получаем

$$\frac{\delta}{\delta\eta_j(\boldsymbol{y}, t)}\delta(\xi(t) - \boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\, \delta(\xi(t) - \boldsymbol{x})\}. \qquad (5.14)$$

Следовательно, выражение (5.13) можно переписать в операторном виде:

$$\frac{\left\langle \int d\boldsymbol{y}\, f_j(\boldsymbol{y}, t) \frac{\delta}{\delta\eta_j(\boldsymbol{y}, t)} \exp\left\{\int\limits_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right\}\right\rangle}{\left\langle \exp\left\{\int\limits_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right\}\right\rangle} P_t(\boldsymbol{x}) = \\ = \frac{d}{dt}\ln\left\langle \exp\left\{\int\limits_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right\}\right\rangle P_t(\boldsymbol{x}) \equiv \\ \equiv \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right] P_t(\boldsymbol{x}), \qquad (5.15)$$

где введен функционал $\Theta_t[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}', \tau)] = \ln \Phi_t[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}', \tau)]$. В

результате уравнение (5.12) принимает вид

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(\boldsymbol{x}, t) P_t(\boldsymbol{x})\} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int d\boldsymbol{y}\, D_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\, \eta_j(\boldsymbol{y}, t) P_t(\boldsymbol{x})\right\} + \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta(\boldsymbol{x}', \tau)}\right] P_t(\boldsymbol{x}). \tag{5.16}$$

Уравнение (5.16) является замкнутым уравнением с вариационными производными. Чтобы перейти к плотности вероятностей решения уравнения (5.1), следует положить в (5.16) $\eta(\boldsymbol{x}, \tau) = 0$. Учитывая при этом равенства (5.10) и (5.11), получаем уравнение

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(\boldsymbol{x}, t) P_t(\boldsymbol{x})\} + \\ + \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau)}\right] \delta(\xi(t) - \boldsymbol{x})\right\rangle. \tag{5.17}$$

Уравнение (5.17) является точным следствием исходного динамического уравнения (5.1). Статистические характеристики случайного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ входят в него только через функционал Θ_t.

В общем случае уравнение (5.17) не замкнуто относительно функции $P_t(\boldsymbol{x})$, так как величина, стоящая под знаком усреднения в правой части (5.17), определяется зависимостью поведения решения $\xi(t)$ от случайного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau')$ для всех моментов времени $0 \leqslant \tau \leqslant t$. И только в случае дельта-коррелированности поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \tau)$ (см. вторую главу), когда выполняется равенство

$$\dot{\Theta}_t[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}', \tau)] = \dot{\Theta}_t[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}', t)], \tag{5.18}$$

уравнение (5.17) принимает форму замкнутого уравнения. В этом случае, согласно (5.18),

$$\left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \tau)}\right] \delta(\boldsymbol{x} - \xi(t))\right\rangle = \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', t)}\right] \delta(\boldsymbol{x} - \xi(t))\right\rangle.$$

Учитывая теперь равенства (5.10), (5.14), можно переписать уравнение (5.17) в виде

$$\frac{\partial P_t(\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(\boldsymbol{x}, t) P_t(\boldsymbol{x})\} + \\ + \dot{\Theta}_t\left[i\frac{\partial}{\partial x_k} D_{ki}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t)\right] P_t(\boldsymbol{x}), \tag{5.19}$$

$P_0(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \xi_0)$. Уравнение (5.19) является замкнутым операторным уравнением относительно функции $P_t(\boldsymbol{x})$, конкретный вид которого определяется видом функционала Θ_t, т. е. характером случайного поля $\boldsymbol{f}$.

С помощью уравнений (5.17), (5.19) можно написать и динамическое уравнение для средних характеристик решения уравнения (5.1). Чтобы получить уравнение для величины $\langle F(\xi(t))\rangle$, где

$F(x)$ — произвольная функция, следует умножить уравнение (5.17) на $F(x)$ и проинтегрировать по x. В результате получаем уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\langle F(\xi(t))\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} v(\xi, t)\right\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', \tau)}\right] F(\xi(t))\right\rangle, \qquad (5.20)$$

которое для дельта-коррелированных флуктуаций поля f принимает вид

$$\frac{d}{dt}\langle F(\xi(t))\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} v(\xi(t))\right\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', t)}\right] F(\xi(t))\right\rangle. \qquad (5.20')$$

В общем случае уравнение (5.20′) не замкнуто относительно функции $\langle F(\xi)\rangle$.

Отметим, что операторный член в правой части (5.20), (5.20′) формально не зависит от вида случайного члена в уравнении (5.1) и представляет собой среднее значение действия конкретного оператора на функцию, среднее значение которой ищется. Конкретное вычисление действия этого оператора, конечно же, связано со структурой случайного члена в уравнении (5.1). Это обстоятельство очень полезно для практического нахождения различных средних характеристик. Процедура написания соответствующего уравнения для среднего значения какой-либо величины состоит из четырех шагов:

1) с помощью стохастических уравнений определяются вариационные производные решения уравнений по флуктуирующим параметрам, взятым в тот же момент времени;

2) пишется динамическое уравнение для самой величины в случае отсутствия флуктуаций;

3) полученное на втором шаге уравнение усредняется, и в правую часть добавляется операторный член, представляющий собой среднее значение действия оператора $\dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', t)}\right]$ на величину, среднее значение которой ищется;

4) с помощью результатов первого шага устанавливается результат действия оператора.

Отметим, что само уравнение (5.17) является уравнением вида (5.20) для функции

$$\varphi_t(x) = \delta(x - \xi(t)), \qquad (5.21)$$

которая, согласно (5.1), удовлетворяет линейному стохастическому уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{v(x, t)\varphi_t(x)\} - \frac{\partial}{\partial x_k}\int dy\, D_{ki}(x, y, t) f_i(y, t)\varphi_t(x) \qquad (5.22)$$

с начальным условием

$$\varphi_0(x) = \delta(x - \xi_0). \tag{5.23}$$

Уравнение (5.22) является стохастическим уравнением Лиувилля. Чтобы получить уравнение для среднего значения $\langle \varphi_t(x) \rangle = P_t(x)$, следует, согласно описанной выше методике, определить значение вариационной производной $\delta\varphi_t(x)/\delta f_i(x', t)$ (для дельта-коррелированных полей f), которая имеет вид линейного оператора

$$\frac{\delta\varphi_t(x)}{\delta f_i(x', t)} = -\frac{\partial}{\partial x_k} D_{ki}(x, x', t)\,\varphi_t(x), \tag{5.24}$$

в результате мы приходим к уравнению (5.19).

Рассмотрим теперь m-временную плотность вероятностей для решения уравнения (5.1):

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \langle \delta(\xi(t_1) - x_1) \ldots \delta(\xi(t_m) - x_m) \rangle. \tag{5.25}$$

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m$. Дифференцируя (5.25) по t_m, а затем используя динамическое уравнение (5.1) и расщепляя корреляции описанным выше способом, получаем для дельта-коррелированного во времени поля f уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial t_m}(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) + \frac{\partial}{\partial x_m}\{v(x_m, t_m)\,\mathcal{P}_m\} = \\ = \dot{\Theta}_t\left[i\frac{\partial}{\partial x_m^{(k)}} D_{ki}(x_m; x', t)\right]\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m). \tag{5.26}$$

(Здесь суммирование по индексу m не производится.) Начальное условие для (5.26), как следует из (5.25), имеет вид

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}; x_m, t_{m-1}) = \\ = \delta(x_{m-1} - x_m)\,\mathcal{P}_{m-1}(x_1, t; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}). \tag{5.27}$$

Решение уравнения (5.26) с начальным условием (5.27) можно искать в виде

$$\mathcal{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \\ = p(x_m, t_m \mid x_{m-1}, t_{m-1})\,\mathcal{P}_{m-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}). \tag{5.28}$$

Учитывая теперь, что все дифференциальные операции в (5.26) относятся к x_m, t_m, и подставляя (5.28) в (5.26) и в (5.27), получаем уравнение для плотности вероятностей перехода (обозначаем x_m, t_m через x, t и x_{m-1}, t_{m-1} через x_0, t_0)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t \mid x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x}\{v(x, t)\,p\} = \\ = \dot{\Theta}_t\left[i\frac{\partial}{\partial x_k} D_{ki}(x, x', t)\right] p(x, t \mid x_0, t_0) \tag{5.29}$$

с начальным условием

$$p(x, t_0 \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \tag{5.30}$$

Путем повторного применения формулы (5.28) находим равенство

$$\mathscr{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \\ = p(x_m, t_m \mid x_{m-1}, t_{m-1}) \ldots p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) P_{t_1}(x_1), \tag{5.31}$$

где $P_{t_1}(x_1)$ — определяемая уравнением (5.19) плотность вероятностей, относящаяся к одному моменту времени. Выражение (5.31) для многовременной плотности вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода p означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является марковским процессом (см. гл. 1). Таким образом, мы можем усилить утверждение (2.8) [20]:

Если нелинейная динамическая система описывается уравнением (5.1), в котором случайная «сила» $f(x, t)$ является дельта-коррелированным во времени случайным полем (т. е. ее характеристический функционал удовлетворяет равенству (5.18)), то случайный процесс $\xi(t)$ является марковским процессом, описывается уравнениями (5.19), (5.29) и равенством (5.31). (5.32)

При этом существенную роль играет условие причинности (5.7), вытекающее из самого уравнения (5.1) и начальных условий к нему.

Если случайное поле $f(x, t)$ является гауссовским дельта-коррелированным по t случайным полем, т. е. его характеристический функционал имеет вид

$$\Theta_t[\psi(x', \tau)] = \\ = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int dx'\, dx'' B_{ij}(x', x'', \tau)\, \psi_i(x', \tau)\, \psi_j(x'', \tau), \tag{5.33}$$

то уравнение (5.29), так же как и (5.19), принимает вид УЭФ:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t \mid x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x}\{v(x, t)\, p\} = -\frac{1}{2}\int dx'\, dx'' B_{ij}(x', x'', t) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{D_{ki}(x, x', t)\frac{\partial}{\partial x_l}[D_{lj}(x, x'', t)\, p]\right\}. \tag{5.34}$$

Уравнение (5.34) переходит в УЭФ (2.5), если положить

$$D_{ij}(x, y, t) = \delta_{ij}\delta(y - x)$$
$$(B_{ij}(x, x', t) = 2F_{ij}(x, x', t)).$$

Аналогично случаю нахождения одновременных характеристик функции $F(\xi(t))$, легко можно найти уравнение для средних величин, взятых в разные моменты времени. Так, например, чтобы найти уравнение для величины $F(\xi(t), \xi(t'))$, где $t > t'$, надо уравнение для двухвременной плотности вероятностей $\mathscr{P}_2(x_1, t_1;$

$x_2, t_2)$ умножить на $F(x_1, x_2)$ и проинтегрировать по x_1, x_2. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\xi(t), \xi(t')\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial F(\xi(t), \xi(t'))}{\partial \xi(t)} v(\xi(t)) \right\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', t)} \right] F(\xi(t), \xi(t')) \right\rangle \quad (5.35)$$

с начальным условием при $t = t'$

$$\langle F(\xi(t), \xi(t'))\rangle \mid_{t=t'} = \langle F(\xi(t'), \xi(t'))\rangle, \quad (5.36)$$

где функция $\langle F(\xi(t'), \xi(t'))\rangle$, связанная с одновременной плотностью вероятностей, удовлетворяет уравнению типа уравнения (5.20′).

В качестве иллюстрации изложенной теории приведем несколько примеров.

Рассмотрим одномерное стохастическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + z(t)\, g(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.37)$$

где f и g — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайная функция времени. Вводя функцию $\varphi_t(x) = \delta(x(t) - x)$, получаем для нее стохастическое уравнение Лиувилля вида

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, \varphi_t(x) - z(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)\, \varphi_t(x). \quad (5.38)$$

Усредним уравнение (5.38) по ансамблю реализаций функции $z(t)$. В результате получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, P_t(x) + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta z(\tau)} \right] \varphi_t(x) \right\rangle, \quad (5.39)$$

где $P_t(x) = \langle \varphi_t(x)\rangle$ — одновременная плотность вероятностей решения уравнения (5.37). Для дельта-коррелированного случайного процесса $\dot{\Theta}_t[v(\tau)] = \dot{\Theta}_t[v(t)]$ и, учитывая равенство

$$\frac{\delta \varphi_t(x)}{\delta z(t)} = -\frac{\partial}{\partial x} g(x, t)\, \varphi_t(x),$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, P_t(x) + \dot{\Theta}_t \left[i \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right] P_t(x). \quad (5.40)$$

Для гауссовского дельта-коррелированного процесса (см. гл. 2)

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau\, B(\tau)\, v^2(\tau) \quad (5.41)$$

и уравнение (5.40) принимает вид УЭФ:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, P_t(x) + \frac{1}{2} B(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)\, P_t(x). \quad (5.42)$$

Для пуассоновского дельта-коррелированного во времени процесса $z(t)$

$$\Theta_t[v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\, e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\} \tag{5.43}$$

и уравнение (5.40) станет таким:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) P_t(x) =$$

$$= \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \exp\left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} g(x,t) \right) - 1 \right\} P_t(x). \tag{5.44}$$

Пусть, например, $g(x, t) = 1$, т. е. уравнение (5.37) выглядит следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + z(t), \quad x(0) = x_0. \tag{5.37'}$$

В этом случае оператор в правой части (5.44) является оператором сдвига и уравнение (5.44) принимает вид уравнения Колмогорова — Феллера:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) P_t(x) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\, P_t(x-\xi) - \nu P_t(x). \tag{5.45}$$

Ранее мы говорили о том, что пуассоновский процесс $\tilde{z}(t)$ с произвольной импульсной функцией $g(t)$ связан с пуассоновским дельта-коррелированным процессом $z(t)$ посредством формулы

$$\tilde{z}(t) = \int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\, z(\tau). \tag{5.46}$$

Пусть $g(t) = e^{-\alpha t}$. В этом случае процесс $\tilde{z}(t)$ удовлетворяет дифференциальному стохастическому уравнению

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -\alpha \tilde{z} + z(t) \tag{5.47}$$

и, следовательно, как плотность вероятностей перехода, так и одноточечная плотность вероятностей для него удовлетворяют, согласно (5.45), уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \hat{L}_x p, \quad \frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \hat{L}_x P_t(x),$$

где

$$\hat{L}_x = \alpha \frac{\partial}{\partial x} x + \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \exp\left\{ -\xi \frac{\partial}{\partial x} \right\} - 1 \right\}. \tag{5.48}$$

Пусть теперь $g(x, t)$ в уравнении (5.38) имеет вид $g(x, t) = x$,

т. е. уравнение (5.37) записывается в форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + z(t)\, x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{5.37''}$$

Тогда уравнение (5.44) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, P_t(x) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \left\{ \exp\left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} x\right) - 1 \right\} P_t(x). \tag{5.49}$$

Вычислим действие оператора в правой части (5.49) в этом случае. Разложим этот оператор в ряд по ξ и рассмотрим действие каждого члена разложения

$$\left\{ \exp\left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} x\right) - 1 \right\} P_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)^n P_t(x). \tag{5.50}$$

Представляя x в виде $\exp \varphi$, формулу (5.50) можно преобразовать следующим образом (то обстоятельство, что x — знакопеременная величина, несущественно):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} e^{-\varphi} \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} e^{\varphi} P_t(e^{\varphi}) = e^{-\varphi} \left\{ \exp\left(-\xi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) - 1 \right\} e^{\varphi} P_t(e^{\varphi}) =$$

$$= e^{-\varphi} \{ e^{\varphi - \xi} P_t(e^{\varphi - \xi}) - e^{\varphi} P_t(e^{\varphi}) \} = e^{-\xi} P_t(e^{\varphi - \xi}) - P_t(e^{\varphi}). \tag{5.51}$$

Возвращаясь теперь к переменной x, легко представить (5.49) окончательно в виде интегро-дифференциального уравнения типа Колмогорова — Феллера:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, P_t(x) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\, e^{-\xi} P_t(x e^{-\xi}) - \nu P_t(x). \tag{5.52}$$

Решение многих чисто детерминированных задач в ряде случаев можно интерпретировать как результат усреднения функционалов определенного типа по случайной траектории. Такая вероятностная интерпретация может быть полезна для различных приложений.

Выведем для простейших уравнений условия возможности такой интерпретации.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(t, \boldsymbol{r})}{\partial t} = -q(t, \boldsymbol{r})\, u(t, \boldsymbol{r}) + Q(t, \nabla)\, u(t, \boldsymbol{r}), \tag{5.53}$$

$$u(0, \boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}).$$

Наряду с уравнением (5.53) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, \boldsymbol{r})}{\partial t} = -q(t, \boldsymbol{r})\, \varphi(t, \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{z}(t)\, \nabla \varphi(t, \boldsymbol{r}), \tag{5.54}$$

$$\varphi(0, \boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}),$$

решение которого имеет вид

$$\varphi[t, \boldsymbol{r}; z(\tau)] =$$

$$= u_0\left(\boldsymbol{r} + \int_0^t d\tau\, \boldsymbol{z}(\tau)\right) \exp\left\{-\int_0^t d\tau\, q\left(\tau, \boldsymbol{r} + \int_\tau^t d\tilde{\tau}\, \boldsymbol{z}(\tilde{\tau})\right)\right\}. \quad (5.55)$$

Будем считать функцию $\boldsymbol{z}(t)$ случайной функцией, дельта-коррелированной по t, статистические характеристики которой описываются функционалом $\Theta_t[\boldsymbol{v}(\tau)]$. Усредним уравнение (5.54). Тогда для $\langle\varphi\rangle$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi\rangle = -q\langle\varphi\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{z}(t)}\right]\varphi(t, \boldsymbol{r})\right\rangle. \quad (5.56)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta\varphi(t, \boldsymbol{r})}{\delta \boldsymbol{z}(t)} = \nabla\varphi(t, \boldsymbol{r}), \quad (5.57)$$

которое является следствием динамического уравнения (5.54), можно переписать уравнение (5.56) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi\rangle = -q\langle\varphi\rangle + \dot{\Theta}_t\left[\frac{1}{i}\nabla\right]\langle\varphi\rangle. \quad (5.58)$$

Сравнивая (5.58) с (5.53), видим, что

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \langle\varphi[t, \boldsymbol{r};\ \boldsymbol{z}(\tau)]\rangle_z \quad (5.59)$$

только при условии

$$Q(t, \nabla) \equiv \dot{\Theta}_t\left[\frac{1}{i}\nabla\right]. \quad (5.60)$$

В этом случае выражение (5.59) можно трактовать как запись решения уравнения (5.53) в виде континуального интеграла. Выражение (5.59) легко представить в операторном виде, вводя оператор функционального сдвига:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \langle\varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{z}(\tau) + \boldsymbol{v}(\tau)]\rangle_z\,|_{v=0} =$$

$$= \left\langle \exp\left(\int_0^t d\tau\, \boldsymbol{z}(\tau)\, \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{v}(\tau)}\right)\right\rangle_z \varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{v}(\tau)]\,|_{v=0} =$$

$$= \Phi_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{v}(\tau)}\right]\varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{v}(\tau)]\,|_{v=0}, \quad (5.61)$$

где $\Phi_t[\boldsymbol{v}(\tau)]$ — характеристический функционал процесса $z(t)$. Для гауссовского процесса

$$\dot{\Theta}_t[\boldsymbol{v}(\tau)] = -\frac{1}{2}B(t)\,\boldsymbol{v}^2(t)$$

$$\left(Q(t, \nabla) = \frac{1}{2}B(t)\,\Delta,\ B(t) > 0\right),$$

и, следовательно, получаем хорошо известный результат, что

решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -qu + \frac{1}{2} B(t) \Delta u, \quad u(0, \boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}) \tag{5.62}$$

можно трактовать как результат усреднения функционала φ по гауссовскому случайному процессу $\boldsymbol{z}(t)$. Для пуассоновского случайного процесса $\boldsymbol{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \delta(t - t_i)$

$$\dot{\Theta}_t[\boldsymbol{v}(\tau)] = \nu \left\{ \int d\xi\, p(\xi) \{\exp(i\xi \boldsymbol{v}(t)) - 1\} \right\},$$

$$Q(t, \nabla) = \nu \left\{ \int d\xi\, p(\xi) \{\exp(\xi \nabla) - 1\} \right\},$$

и, следовательно, решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -qu + \nu \int d\xi\, p(\xi)\, u(t, \boldsymbol{r} + \xi) - \nu u(t, \boldsymbol{r}), \tag{5.63}$$

$$u(0, \boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r})$$

удается представить как результат усреднения функционала φ, т. е.

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \langle \varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{z}(\tau)] \rangle_z$$

только в том случае, если функцию $p(\xi)$ в (5.63) можно интерпретировать как плотность вероятностей случайной величины ξ.

В случае $p(\xi) = \delta(\xi - \boldsymbol{r}_0)$ уравнение (5.63) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -qu + \nu [u(t, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0) - u(t, \boldsymbol{r})]. \tag{5.64}$$

Уравнения (5.63), (5.64) представляют собой при этом уравнения типа переноса.

Рассмотрим теперь в качестве примера случай линейных операторных стохастических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \hat{A}_{ij}(t)\, x_j + z(t)\, \hat{B}_{ij}(t)\, x_j, \tag{5.65}$$

$$x(0) = x_0 \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$ — детерминированные операторы. Эти операторы могут быть, например, операторами дифференцирования по вспомогательным переменным или обычными матрицами. Функцию $z(t)$ будем считать случайной дельта-коррелированной функцией. Усредним систему (5.65). Согласно общим формулам

$$\left\langle \frac{dx_i}{dt} \right\rangle = \hat{A}_{ij} \langle x_j \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\, \delta z(t)} \right] x_i(t) \right\rangle. \tag{5.66}$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta x_i(t)}{\delta z(t)} = \hat{B}_{ij} x_j, \tag{5.67}$$

которое следует непосредственно из характера системы (5.65), уравнение (5.66) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \hat{A}_{ij}(t)\langle x_j\rangle + \dot{\Theta}_t\left[\frac{1}{i}\hat{B}(t)\right]_{ij}\langle x_j\rangle. \tag{5.68}$$

Таким образом, для линейной системы (5.65) уравнения для средних значений также являются линейными.

Логарифм характеристического функционала $\Theta_t[v(\tau)]$ для дельта-коррелированных процессов раскладывается в функциональный ряд Тейлора (см. гл. 2):

$$\Theta_t[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_0^t d\tau\, K_n(\tau)\, v^n(\tau), \tag{5.69}$$

где $K_n(t)$ определяют кумулянтные функции процесса $z(t)$. Подставляя выражение (5.69) в (5.68), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \hat{A}_{ij}\langle x_j\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n}{n!}[\hat{B}^n(t)]_{ij}\langle x_j\rangle. \tag{5.70}$$

Если теперь существует такая степень оператора $\hat{B}^l$, что

$$\hat{B}^l \equiv 0, \tag{5.71}$$

то уравнение (5.70) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \hat{A}_{ij}\langle x_j\rangle + \sum_{n=1}^{l-1}\frac{K_n}{n!}[\hat{B}^n(t)]_{ij}\langle x_j\rangle. \tag{5.72}$$

В таком случае в уравнение для среднего значения входит только часть кумулянтов процесса $z(t)$. Это означает, что если интересоваться только уравнением для среднего значения, то совсем не обязательно знать распределение вероятностей для функций $z(t)$; достаточно знать только определенные кумулянты процесса $z(t)$ и то обстоятельство, что процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный случайный процесс.

Остановимся теперь на общем методе последовательных приближений, нулевое приближение которого соответствует дельта-коррелированным процессам и полям, а следующие приближения дают возможность получить условие применимости этого приближения для флуктуаций параметров систем.

§ 6. Метод последовательных приближений

Выше мы рассматривали систему уравнений (5.1) (или (1.1)) в предположении дельта-коррелированности случайного поля $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ по времени. В реальных же условиях случайные поля $\boldsymbol{f}$ обладают конечным временем корреляции τ_0, и рассмотренное приближение может быть хорошей аппроксимацией лишь в слу-

чае, если время τ_0 много меньше, чем характерные времена изменения самой динамической системы. Однако это условие является необходимым, но недостаточным.

Для произвольных процессов и полей можно построить метод последовательных приближений, в котором рассмотренное выше приближение дельта-коррелированного случайного процесса является первым шагом. Следующие приближения учитывают конечность времени корреляции τ_0 и приводят к системе замкнутых операторных уравнений. Построение такой системы может быть осуществлено следующим образом [20].

Введем фурье-образ функционала $\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)]$:

$$\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)] = \\ = \int \ldots \int D\eta^{(1)}(x', \tau)\, \tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(1)}(x', \tau)] \exp\left\{i \int_0^t d\tau \int dx' \psi(x', \tau) \eta^{(1)}(x', \tau)\right\}. \tag{6.1}$$

Тогда уравнение (5.17) для плотности вероятностей решения динамической системы (5.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(x, t) P_t(x)\} + \\ + \int \ldots \int D\eta^{(1)}(x', \tau)\, \tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(1)}(x', \tau)] F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)], \tag{6.2}$$

где функционал $F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)]$ определяется формулой

$$F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)] = \\ = \left\langle \exp\left\{\int_0^t d\tau \int dx' \eta^{(1)}(x', \tau) \frac{\delta}{\delta f(x', \tau)}\right\} \delta(\xi(t) - x)\right\rangle. \tag{6.3}$$

Оператор, стоящий в правой части (6.3), представляет собой оператор функционального сдвига по полю f. Следовательно, функционал F_1 является плотностью вероятностей для решения стохастической системы (5.1′) и, согласно (5.16), удовлетворяет уравнению с вариационными производными

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(x, t) F_1\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int dy\, D_{ij}(x, y, t)\, \eta_j^{(1)}(y, t) F_1\right\} + \\ + \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\, \delta\eta^{(1)}(x', \tau)}\right] F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)]. \tag{6.4}$$

Система уравнений (6.2), (6.4) является замкнутой операторной системой с вариационными производными. Используя снова формулу (6.1), легко переписать уравнение (6.4) в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(x, t) F_1\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\int dy\, D_{ij}(x, y, t)\, \eta_j^{(1)}(y, t) F_1\right\} + \\ + \int \ldots \int D\eta^{(2)}(x', \tau)\, \tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(2)}(x', \tau)] F_2[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau) + \eta^{(2)}(x', \tau)], \tag{6.5}$$

где функционал F_2 является, в свою очередь, плотностью вероятностей для решения стохастической динамической задачи

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi, t) + \int dy\, D_{ij}(\xi, y, t)\,[f_j(y, t) + \eta_j^{(1)}(y, t) + \eta_j^{(2)}(y, t)]. \tag{6.6}$$

Далее можно написать уравнение для функционала F_2, в которое войдет в качестве новой неизвестной функции функционал F_3, и т. д. Таким образом, мы получаем бесконечную систему уравнений для функции $P_t(x)$ и функционалов $F_1, F_2, \ldots$

Если теперь использовать предположение о дельта-коррелированности поля f в уравнении (6.2), то возникает описанное выше приближение дельта-коррелированного случайного процесса, а остальные уравнения системы оказываются ненужными. Если же в уравнениях для $P_t(x), F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ сохранить точный вид функционала $\dot{\Theta}_t$, а в уравнении для функционала F_n использовать предположение о дельта-коррелированности поля f, то получается замкнутая система уравнений для функции $P_t(x)$ и функционалов $F_1, \ldots, F_n$. Эта система содержит, однако, континуальные интегралы. Следует отметить, что иногда, например, для гауссовского и пуассоновских случайных полей функционал $\widetilde{\Theta}_t[\eta(x', \tau)]$ выражается через дельта-функционал. При этом континуальные интегралы легко вычисляются, и мы приходим к системе уравнений для обычных функций. Вообще говоря, в этих случаях нет необходимости вводить функциональное преобразование Фурье.

Рассмотрим в качестве примера динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = v(x) + f(t), \quad x(0) = x_0, \tag{6.7}$$

где $v(x)$ — детерминированная функция, а $f(t)$ — случайная функция времени. Введем функцию

$$\varphi_t(x) = \delta(x(t) - x), \tag{6.8}$$

для которой получаем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v(x)\,\varphi_t(x) = -f(t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x), \tag{6.9}$$

$$\varphi_0(x) = \delta(x - x_0).$$

Усредняя уравнение (6.9), для одновременной плотности вероятностей $P_t(x) = \langle \varphi_t(x) \rangle$ получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v(x)\,P_t(x) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(\tau)}\right] \delta(x(t) - x) \right\rangle. \tag{6.10}$$

Пусть, например, $f(t)$ — пуассоновский случайный процесс, для которого функционал $\Theta_t[v(\tau)]$ имеет вид (см. гл. 1)

$$\Theta_t[v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \exp\left\{ i\xi \int_\tau^t d\tau' v(\tau')\, g(\tau' - \tau) \right\} - 1 \right\}. \tag{6.11}$$

Следовательно, уравнение (6.10) в этом случае можно переписать в виде

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v(x) P_t(x) =$$

$$= -\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi p(\xi) \int_0^t d\tau\, g(t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} F(t, \tau, x, \xi), \qquad (6.12)$$

где функция F определяется равенством

$$F(t, \tau, x, \xi) = \left\langle \exp\left\{\xi \int_\tau^t d\tau' g(\tau' - \tau) \frac{\delta}{\delta f(\tau')}\right\} \varphi_t(x) \right\rangle. \qquad (6.13)$$

Поэтому при $t > \tau$ функция $F \equiv \langle \delta(\tilde{x}(t) - x) \rangle$ является плотностью вероятностей для решения динамической задачи

$$\dot{\tilde{x}} = v(\tilde{x}) + f(t) + \xi g(t-\tau), \qquad \tilde{x}(\tau) = x(\tau) \qquad (6.14)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{[v(x) + \xi g(t-\tau)] F\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(\tau')}\right] \delta(\tilde{x}(t) - x) \right\rangle \qquad (6.15)$$

с начальным условием

$$F(\tau, \tau, x, \xi) = P_\tau(x). \qquad (6.16)$$

Уравнение (6.15) является уравнением второго шага описанного выше метода последовательных приближений. Далее можно либо использовать предположение о дельта-коррелированности процесса $f(t)$ (что эквивалентно аппроксимации импульсной функции δ-функцией), либо тем же способом перейти к следующему шагу.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение [53]

$$\frac{du(x)}{dx} = i\frac{k}{2} \varepsilon(x) u(x), \quad u(0) = u_0, \qquad (6.17)$$

где $\varepsilon(x)$ — гауссовская случайная функция с параметрами

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = 0, \qquad \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle = B_\varepsilon(x - x'). \qquad (6.18)$$

Точное решение уравнения (6.17) имеет вид

$$u(x) = u_0 \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon(\xi)\right\}. \qquad (6.19)$$

Следовательно, усредняя (6.19), получаем точное выражение для

среднего решения стохастического уравнения (6.17):

$$\langle u(x)\rangle = u_0 \exp\left\{-\frac{k^2}{8}\iint\limits_0^x d\xi_1\, d\xi_2 B_\varepsilon(\xi_1-\xi_2)\right\} =$$

$$= u_0 \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x d\xi\,(x-\xi)\,B_\varepsilon(\xi)\right\}. \qquad (6.20)$$

Усредним теперь уравнение (6.17) непосредственно:

$$\frac{d}{dx}\langle u(x)\rangle = \frac{ik}{2}\langle \varepsilon(x)\,u(x)\rangle. \qquad (6.21)$$

Для расщепления корреляции $\langle \varepsilon(x) u(x)\rangle$ воспользуемся формулой (2.3.6). В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\langle u(x)\rangle = i\,\frac{k}{2}\int\limits_0^x d\xi\, B_\varepsilon(x-\xi)\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle, \qquad (6.22)$$

уже не замкнутое относительно функции $\langle u(x)\rangle$, так как оно содержит новую неизвестную функцию $\langle \delta u/\delta\varepsilon\rangle$. Если радиус корреляции процесса $\varepsilon(x)$ $l_0 \to 0$, то уравнение (6.22) будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}\langle u_1(x)\rangle = \frac{ik}{2}\int\limits_0^\infty d\xi\, B_\varepsilon(\xi)\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(x)}\right\rangle, \qquad (6.23)$$

откуда, с учетом равенства

$$\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(x)} = i\,\frac{k}{2}\,u(x), \qquad (6.24)$$

получается уравнение

$$\frac{d}{dx}\langle u_1(x)\rangle = -\frac{k^2}{4}\int\limits_0^\infty d\xi\, B_\varepsilon(\xi)\,\langle u_1(x)\rangle, \quad \langle u_1(0)\rangle = u_0, \qquad (6.25)$$

решение которого, в свою очередь, выглядит следующим образом:

$$\langle u_1(x)\rangle = u_0 \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\,x\int\limits_0^\infty d\xi\, B_\varepsilon(\xi)\right\}. \qquad (6.26)$$

Функция $\langle u_1(x)\rangle$ представляет собой решение задачи в приближении дельта-коррелированности процесса $\varepsilon(x)$ (первый шаг).

Для отыскания решения на втором шаге следует оставить уравнение (6.22) без изменений и найти уравнение для величины $\langle \delta u(x)/\delta\varepsilon(\xi)\rangle$. Варьируя (6.17) по $\varepsilon(\xi)$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)} = i\,\frac{k}{2}\,\varepsilon(x)\,\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}, \quad x > \xi. \qquad (6.27)$$

Начальным условием для него является условие (6.24):

$$\left.\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right|_{x=\xi} = i\frac{k}{2}u(\xi). \qquad (6.24')$$

Усредним уравнение (6.27). Для расщепления корреляции в правой части (6.27) снова воспользуемся формулой (2.3.6). В результате получаем

$$\frac{d}{dx}\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle = i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi_1 B_\varepsilon(x-\xi_1)\left\langle\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\xi_1)}\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle,$$

$$\left.\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle\right|_{x=\xi} = i\frac{k}{2}\langle u(\xi)\rangle. \qquad (6.28)$$

Используя теперь условие дельта-коррелированности процесса $\varepsilon(x)$ в уравнении (6.28), получаем на втором шаге

$$\frac{d}{dx}\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^\infty d\xi_1 B_\varepsilon(\xi_1)\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle,$$

$$\left.\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle\right|_{x=\xi} = i\frac{k}{2}\langle u_2(\xi)\rangle. \qquad (6.29)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\left\langle\frac{\delta u(x)}{\delta\varepsilon(\xi)}\right\rangle = \frac{ik}{2}\langle u_2(\xi)\rangle\exp\left\{-\frac{k^2}{4}(x-\xi)\int_0^\infty d\xi_1 B_\varepsilon(\xi_1)\right\}. \qquad (6.30)$$

Подставляя выражение (6.30) в (6.22), получаем, что во втором приближении задача сводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx}\langle u_2(x)\rangle =$$

$$= -\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\,\langle u_2(\xi)\rangle B_\varepsilon(x-\xi)\exp\left\{-\frac{k^2}{4}(x-\xi)\int_0^\infty d\eta\, B_\varepsilon(\eta)\right\}, \qquad (6.31)$$

которое легко решается с помощью преобразования Лапласа. Если, например, $B_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2\exp\{-\alpha\,|\,x-x'\,|\}$, то точное решение задачи, первое и второе приближения имеют соответственно вид

$$\langle u(x)\rangle = u_0\exp\{-\mu[\tau-1+e^{-\tau}]\}, \qquad (а)$$

$$\langle u_1(x)\rangle = u_0\exp\{-\mu\tau\}, \qquad (б)$$

$$\langle u_2(x)\rangle = \frac{u_0}{1-\mu}[\exp(-\mu\tau)-\mu\exp(-\tau)], \qquad (в)$$

где $\tau = \alpha x$, $\mu = \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\alpha^2} = \frac{k^2}{4}l_0^2\sigma_\varepsilon^2$, $l_0 = \frac{1}{\alpha}$ — радиус корреляции. Срав-

нивая (а), (б) и (в) при $\tau \gg 1$, легко установить, что приближенные решения (б) и (в) могут быть хорошей аппроксимацией точного решения лишь при $\mu \ll 1$. Кроме того, функция (в), в отличие от (б), имеет в нуле тот же вид, что и точное решение. На рис. 8 приведены функции (а), (б) и (в) при $\mu = 0{,}2$. Отличие второго приближения от точного решения не превосходит в данном случае

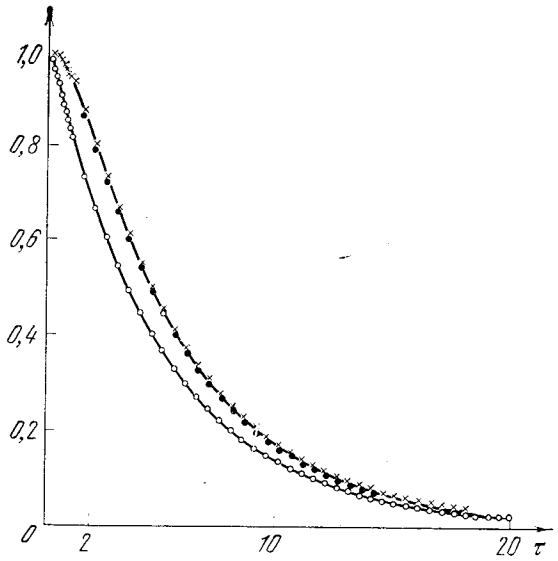

Рис. 8. Сравнение точного решения задачи (6.17) с первым (диффузионным) и вторым приближениями (○ — $\langle u_1 \rangle / u_0$, ● — $\langle u \rangle / u_0$, × — $\langle u_2 \rangle / u_0 \rangle$).

2,5%. Отметим также, что условия применимости первого приближения, а именно $\mu \ll 1, \tau \gg 1$, можно получить, вообще говоря, из сравнения не только $\langle u_1 \rangle$ с $\langle u \rangle$, но и $\langle u_2 \rangle$ с $\langle u_1 \rangle$. Это обстоятельство позволяет оценить условия применимости диффузионного (первого) приближения в тех случаях, когда точное решение неизвестно.

Хотя рассмотренный пример и не может служить доказательством сходимости развитого метода последовательных приближений, он позволяет, однако, надеяться, что имеет место достаточно быстрая сходимость. Отметим, что в ряде случаев развитый метод удается довести до конца, т. е. получить бесконечную систему зацепляющихся уравнений [19, 45], которую, в свою очередь, иногда можно решить и получить для решения задачи выражение в виде бесконечной цепной дроби (см. следующую главу).

Выше мы рассматривали стохастические уравнения и переход к приближению дельта-коррелированных флуктуаций для параметров системы. В этом приближении решение задачи является

марковским процессом с соответствующим уравнением (вообще говоря, операторным) для плотности вероятностей перехода.

Однако для ряда стохастических уравнений и для некоторых конкретных типов случайных процессов удается построить замкнутое описание таких задач и без перехода к дельта-коррелированному приближению. Это позволяет проследить, во-первых, влияние радиуса корреляции на динамику системы и, во-вторых, влияние самой модели флуктуирующих параметров на статистические характеристики решения задачи. Подобные вопросы будут рассмотрены в следующей главе.

В заключение данной главы отметим следующее обстоятельство. В предыдущем рассмотрении мы ограничивались случаем, когда начальные условия для динамических систем являются либо детерминированными величинами, либо случайными величинами, статистически не связанными с флуктуирующими параметрами. Если же начальные условия являются функционалами от флуктуирующих параметров, то анализ задачи может существенно усложниться.

Глава 4

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. О некоторых классах стохастических уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание

Рассмотрим задачу Коши для стохастической системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = z(t)\, g(t)\, F_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N), \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $g(t)$ и $F_i(x)$ — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайный процесс, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi_t[v(\xi)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\xi\, z(\xi)\, v(\xi) \right\} \right\rangle = \exp\{\Theta_t[v(\xi)]\}. \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) обладают особенностью, позволяющей решить задачу о нахождении статистических характеристик их решения [21]. Дело в том, что если ввести новое «случайное» время

$$\tau = \int_0^t d\xi\, z(\xi)\, g(\xi), \tag{1.3}$$

то уравнения (1.1) примут форму «детерминированных» уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x), \quad x(\tau = 0) = x_0. \tag{1.1'}$$

Следовательно, решение системы (1.1) имеет вид

$$x_i(t) = x_i(\tau) = x_i\left(\int_0^t d\xi\, z(\xi)\, g(\xi) \right). \tag{1.4}$$

Варьируя (1.4) по $z(\xi)$ и используя (1.1), получаем равенство

$$\frac{\delta x_i(t)}{\delta z(\xi)} = \frac{g(\xi)}{z(t)\, g(t)} \frac{dx_i}{dt} = g(\xi)\, F_i(x(t)). \tag{1.5}$$

Таким образом, вариационные производные решения $x(t)$ выражаются через решение в тот же момент времени. Это позволяет

сразу написать замкнутые уравнения для статистических характеристик задачи (1.1).

Получим уравнение для одноточечной плотности вероятностей

$$P_t(x) = \langle \varphi_t(x) \rangle, \quad \varphi_t(x) = \delta(x(t) - x), \tag{1.6}$$

где усреднение производится по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. Для этого напишем стохастическое уравнение для функции $\varphi_t(x)$:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -z(t)\, g(t) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)\, \varphi_t(x), \tag{1.7}$$

$$\varphi_0(x) = \delta(x - x_0)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Усредним уравнение (1.7), тогда

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\, \delta z(\xi)} \right] \varphi_t(x) \right\rangle. \tag{1.8}$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta z(\xi)$ на функцию $\varphi_t(x)$. Используя формулу (1.5), получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta z(\xi)} \delta(x(t) - x) = -g(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)\, \varphi_t(x). \tag{1.9}$$

Следовательно, уравнение (1.8) можно переписать в виде замкнутого операторного уравнения:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \dot{\Theta}_t \left[i g(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) \right] P_t(x), \tag{1.10}$$

$$P_0(x) = \delta(x - x_0),$$

конкретный вид которого определяется характером процесса $z(t)$.

Для двухвременной плотности вероятностей аналогичным образом получаем уравнение (для $t > t_1$)

$$P(x, t;\ x_1, t_1) = \langle \delta(x(t) - x)\, \delta(x(t_1) - x_1) \rangle,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \dot{\Theta}_t \left[i g(\xi) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) + \theta(t_1 - \xi) \frac{\partial}{\partial x_{i1}} F_i(x_1) \right\} \right] P(x, t;\ x_1, t_1), \tag{1.11}$$

с начальным условием

$$P(x, t_1;\ x_1, t_1) = \delta(x - x_1)\, P_{t_1}(x_1), \tag{1.12}$$

где функция $P_{t_1}(x_1)$ удовлетворяет уравнению (1.10). Из уравнения (1.11) видно, что многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации через плотность вероятностей перехода и, следовательно, процесс $x(t)$ не является марковским.

Если процесс $z(t)$ гауссовский с характеристиками

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)\, z(t') \rangle = B(t, t'), \tag{1.13}$$

то уравнение (1.10) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = g(t)\int_0^t d\xi\, g(\xi)\, B(t, \xi)\left[\frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)\right]^2 P_t(x), \qquad (1.14)$$

и его можно рассматривать как обобщенное УЭФ. Заметим, что если мы теперь введем новое время

$$\tau = \int_0^t dt_1\, g(t_1) \int_0^{t_1} dt_2\, g(t_2)\, B(t_1, t_2), \qquad (1.15)$$

то уравнение (1.14) примет вид

$$\frac{\partial P_\tau(x)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x)\, P_\tau(x), \qquad (1.14')$$

$$P_0(x) = \delta(x - x_0).$$

Отметим, что к этому же уравнению приводит статистическая задача о нахождении одноточечных характеристик решения системы уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \tilde{z}(\tau) F_i(x), \quad x(\tau = 0) = x_0, \qquad (1.16)$$

где $\tilde{z}(\tau)$ — гауссовский дельта-коррелированный процесс, т. е.

$$\langle \tilde{z}(\tau) \rangle = 0, \ \langle \tilde{z}(\tau)\, \tilde{z}(\tau') \rangle = 2\delta(\tau - \tau'). \qquad (1.17)$$

Уравнение (1.14′), вообще говоря, может иметь стационарное решение. Это стационарное распределение вероятностей не будет зависеть от интенсивности флуктуаций $z(t)$. Конкретный вид его определяется из асимптотического вида решения (1.14′) при $\tau \to \infty$, а время τ (1.15), связанное с интенсивностью флуктуаций z, будет определять время выхода на стационарное распределение.

К задачам типа (1.1) приводит класс задач, описываемый системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = z(t) F_i(x) - \lambda x_i, \quad x(0) = x_0 \quad (i = 1, \ldots, N), \qquad (1.18)$$

где $F_i(x)$ — однородные полиномы степени k. Вводя новые функции $x_i(t) = \tilde{x}_i(t) \exp\{-\lambda t\}$, мы придем к задаче (1.1) с $g(t) = \exp\{-\lambda(k-1)t\}$. В важном частном случае ($k = 2$) и при функциях $F_i(x)$ таких, что $x_i F_i(x) = 0$, система уравнений (1.18) описывает системы гидродинамического типа с линейным трением [54]. При этом взаимодействие между компонентами носит случайный характер.

Для систем гидродинамического типа при $\lambda = 0$ и для любой реализации процесса $z(t)$ имеет место закон сохранения энергии: $x_i^2 = 2E = \text{const}$. В этом случае имеется стационарное распределение вероятностей $P_\infty(x)$, которое является равномерным распре-

делением на сфере $x_i^2 = 2E$, если нет дополнительных интегралов движения. При наличии дополнительных интегралов движения (как это имеет место, например, при конечномерной аппроксимации двумерного движения жидкости) стационарное распределение вероятностей будет сосредоточено на области фазового пространства, допускаемой интегралами движения.

Рассмотрим теперь класс линейных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ik}(t)\,x_k + f_i(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.19}$$

где $A(t)$ — детерминированная матрица, а $f(t)$ — случайная вектор-функция с заданным характеристическим функционалом $\Phi_t[v(\tau)]$.

Для плотности вероятностей решения уравнения (1.19), $P_t(x) = \langle\delta(x(t) - x)\rangle$, имеем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik}(t)\,x_k P_t(x) + \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta f(\tau)}\right]\delta(x(t) - x)\right\rangle. \tag{1.20}$$

В рассматриваемой задаче вариационная производная $\delta x(t)/\delta f(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta x_i(t)}{\delta f(\tau)} = A_{ik}(t)\frac{\delta x_k(t)}{\delta f(\tau)} \qquad (\tau < t) \tag{1.21}$$

с начальным условием, вытекающим из (1.19):

$$\left.\frac{\delta x_i(t)}{\delta f_j(\tau)}\right|_{t=\tau} = \delta_{ij}. \tag{1.22}$$

Уравнение (1.21) с начальным условием (1.22) уже не содержит случайностей и определяет функцию Грина $G_{ij}(t, \tau)$ для однородной системы (1.19), т. е.

$$\frac{\delta x_i(t)}{\delta f_j(\tau)} = G_{ij}(t, \tau). \tag{1.23}$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\tau)}\delta(x(t) - x) = -\frac{\partial}{\partial x_k} G_{kj}(t, \tau)\,\delta(x(t) - x) \tag{1.24}$$

и (1.20) превращается в замкнутое уравнение

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik}(t)\,x_k P_t(x) + \dot{\Theta}_t\left[iG_{kj}(t, \tau)\frac{\partial}{\partial x_k}\right]P_t(x), \tag{1.25}$$

конкретная форма которого определяется видом функционала $\dot{\Theta}_t[v(\tau)]$.

Из уравнения (1.25) следует, что уравнение для любого момента величины $x(t)$ будет замкнутым линейным уравнением, содержащим только конечное число кумулянтных функций, порядок которых не превосходит порядка рассматриваемого момента.

Аналогичным образом для двухвременной плотности вероятностей $\mathcal{P}(x, t; x_1, t_1) = \langle \delta(x(t) - x)\, \delta(x(t_1) - x_1) \rangle$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik}(t)\, x_k \mathcal{P} + \\ + \dot{\Theta}_t \left[i \{G_{ki}(t, \tau) + G_{ki}(t_1, \tau)\} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \mathcal{P} \qquad (t > t_1) \qquad (1.26)$$

с начальным условием

$$\mathcal{P}(x, t_1; x_1, t_1) = \delta(x - x_1)\, P_{t_1}(x_1), \qquad (1.27)$$

где $P_{t_1}(x_1)$ — одноточечная плотность вероятностей, описываемая уравнением (1.25). Из вида уравнения (1.26) следует, что процесс $x(t)$, соответствующий уравнению (1.19), не является марковским процессом.

Для гауссовского процесса с корреляционной функцией ($\langle f(t) \rangle = 0$)

$$\langle f_i(t)\, f_j(t') \rangle = B_{ij}(t, t')$$

функционал $\Theta_t[v(\tau)]$ равен

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B_{ij}(\tau_1, \tau_2)\, v_i(\tau_1)\, v_j(\tau_2)$$

и (1.25) принимает вид обобщенного уравнения Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik}(t)\, x_k P_t(x) + \\ + \int_0^t d\tau\, B_{ij}(t, \tau)\, G_{ki}(t, t)\, G_{lj}(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} P_t(x). \qquad (1.28)$$

В настоящее время другие классы уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание для произвольных случайных процессов, не известны.

В предыдущей главе мы рассмотрели асимптотический случай, соответствующий предельному переходу $\tau_0 \to 0$, где τ_0 — время корреляции случайного процесса $z(t)$ (приближение δ-коррелированного случайного процесса). Рассмотрим теперь другой предельный случай: $\tau_0 \to \infty$, который можно назвать статическим приближением. В этом приближении характеристический функционал процесса $z(t)$

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau) \right\} \right\rangle$$

принимает вид

$$\Phi_t[v(\tau)] = \Phi_t[\varkappa(t)] = \langle \exp\{iz\varkappa(t)\} \rangle, \qquad (1.29)$$

где $\varkappa(t) = \int\limits_0^t d\tau\, v(\tau)$, а z является случайной величиной, кумулянты которой определяются выражением

$$K_n = \lim_{\tau\to\infty} K_n(t_1, \ldots, t_n). \tag{1.30}$$

Так, например, для гауссовского случайного процесса $z(t)$ ($\langle z(t)\rangle = 0$, $\langle z(t)\, z(t')\rangle = B(t-t')$) z — гауссовская случайная величина с параметрами $\langle z\rangle = 0$, $\langle z^2\rangle = B(0)$, а для телеграфного процесса ($\langle z(t)\rangle = 0$, $\langle z(t)\, z(t')\rangle = a_0^2 \exp\{-2\nu\,|t-t'|\}$) z — случайная величина с распределением вероятностей

$$p(z) = \frac{1}{2}[\delta(z-a_0) + \delta(z+a_0)].$$

Поскольку в этом приближении операция вариационного дифференцирования в (3.5.16) будет входить в виде комбинации

$$\int\limits_0^t d\tau \frac{\delta}{\delta z(\tau)} \equiv \frac{d}{dz}, \tag{1.31}$$

очевидно, что в статическом приближении статистические характеристики решения стохастического уравнения будут описываться стохастическим уравнением, в котором случайный процесс $z(t)$ заменен на случайную величину z. Так, например, для одномерного уравнения (3.4.21) в статическом приближении имеем стохастическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + zg(x), \quad x(0) = x_0. \tag{1.32}$$

В этом приближении плотность вероятностей решения задачи удовлетворяет, очевидно, равенству

$$P_t(x) = \langle\delta(x(t)-x)\rangle_z = \int dz\, \delta(x(t, z) - x)\, p(z), \tag{1.33}$$

где $x(t, z)$ — решение уравнения (1.32), соответствующее одной реализации случайной величины z. Выражение (1.33) можно проинтегрировать и получить в результате формулу

$$P_t(x) = \frac{1}{|x_z'(t, z)|}\, p(z)\Big|_{z=z(t, x)}, \tag{1.34}$$

где $z = z(t, x)$ — решение уравнения $x(t, z) - x = 0$ относительно переменной z. Если при этом существует стационарное распределение вероятностей, то оно определяется равенством

$$P_\infty(x) = \frac{1}{|x_z'(z)|}\, p(z)\Big|_{z=z(x)}, \tag{1.35}$$

где $z=z(x)$—решение уравнения $x(z)-x=0$, а сама величина $x(z)$

определяется из равенства

$$-f(x)/g(x) = z. \tag{1.36}$$

Следовательно, стационарное распределение вероятностей (1.35) в этом случае дается формулой

$$P_\infty(x) = \frac{|f'_x(x)\,g(x) - f(x)\,g'_x(x)|}{g^2(x)}\,p\left(-\frac{f(x)}{g(x)}\right). \tag{1.37}$$

Так, если z — гауссовская случайная величина со средним значением, равным нулю, и с дисперсией σ^2, то распределение вероятностей (1.37) принимает вид (ср. с (3.4.24))

$$P_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{|f'_x(x)\,g(x) - f(x)\,g'_x(x)|}{g^2(x)}\exp\left\{-\frac{f^2(x)}{2\sigma^2 g^2(x)}\right\}. \tag{1.37'}$$

Если же z — случайная величина с распределением $p(z) = \frac{1}{2}[\delta(z - a_0) + \delta(z + a_0)]$, то распределение (1.37) принимает вид

$$P_\infty(x) = \frac{|f'_x(x)\,g(x) - f(x)\,g'_x(x)|}{g^2(x)}\,a_0\delta\left(\frac{f^2(x)}{g^2(x)} - a_0^2\right). \tag{1.37''}$$

Отметим, что статическое приближение является первым членом разложения по малому параметру T/τ_0, где T — характерное время изменения системы в отсутствие флуктуаций. Если же величина $T = 0$ (т. е. для уравнения (1.32) при $f(x) = 0$, например), то статическое приближение справедливо лишь для времен $t \ll \tau_0$. Это наглядно видно из точного уравнения (1.14), которое в данном случае для гауссовских процессов $z(t)$ выглядит так:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \int_0^t d\tau\, B(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial x}\,g(x)\right]^2 P_t(x). \tag{1.38}$$

При $t \ll \tau_0$ имеет место статическое приближение, а в случае $t \gg \tau_0$ статическое приближение не применимо, и плотность вероятностей $P_t(x)$ для этих времен описывается приближением дельта-коррелированного процесса.

§ 2. Марковские процессы общего вида

Рассмотрим теперь стохастические уравнения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x, z(t)), \quad x(0) = x_0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где $f_i(t, x, z)$ — детерминированные функции своих аргументов, а $z(t) = \{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$ — векторный марковский процесс, плотность вероятностей перехода которого описывается

уравнением (см. гл. 1)

$$\frac{\partial p(z, t \mid z_0, t_0)}{\partial t} = \hat{L}_z p(z, t \mid z_0, t_0). \tag{2.2}$$

Наша задача заключается в построении статистических характеристик решения уравнения (2.1), если мы знаем статистические характеристики процесса $z(t)$, например его кинетический оператор $\hat{L}_z$. В общем случае произвольного марковского процесса $z(t)$ сказать что-либо о самом процессе $x(t)$ не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что совокупность двух процессов $\{x(t), z(t)\}$ является марковской. В самом деле, в § 5 гл. 2 было показано, что для произвольного марковского процесса $z(t)$ имеет место формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta(z(t)-z)R_t[t; z(\tau)]\rangle = \left\langle\delta(z(t)-z)\frac{\partial R_t[t; z(\tau)]}{\partial t}\right\rangle + \\ + \hat{L}_z\langle\delta(z(t)-z)R_t[t; z(\tau)]\rangle, \tag{2.3}$$

справедливая для произвольного функционала $R_t[t; z(\tau)]$ $(\tau \leqslant t)$. Возьмем в качестве функционала $R_t[t; z(\tau)]$ функцию

$$R_t[t; z(\tau)] = \delta(x(t) - x), \tag{2.4}$$

где $x(t)$ — решение уравнения (2.1). Тогда функция $R_t[t; z(\tau)]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} f_i(t, x, z(t)) R_t, \tag{2.5}$$

которое является стохастическим уравнением Лиувилля для данной задачи. Отметим, что в этом случае корреляция, стоящая слева в (2.3), оказывается одноточечной совместной плотностью вероятностей для процессов $x(t)$ и $z(t)$. Следовательно, с учетом (2.5) формула дифференцирования (2.3) принимает вид замкнутого уравнения для одноточечной плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(x, z) = \hat{L}_z P_t(x, z) - \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(t, x, z) P_t(x, z). \tag{2.6}$$

Очевидно, что и плотность вероятностей перехода для процесса $(x(t), z(t))$ также удовлетворяет уравнению (2.6), т. е. процесс $(x(t), z(t))$ является марковским процессом. При этом процесс $z(t)$ может быть сам связан с дельта-коррелированным процессом $\tilde{z}(t)$ с помощью стохастических дифференциальных уравнений типа уравнений (3.1.1). Пусть, например, процесс $z(t)$ имеет вид, представленный на рис. 9. Для такого процесса справедливо динамическое уравнение

$$\dot{z}(t) = \hat{z}(t),$$

где $\hat{z}(t)$ — дельта-коррелированный пуассоновский процесс. Поэтому можно написать уравнение для плотности вероятностей ре-

шения расширенной динамической задачи (динамическая задача (2.1) плюс новая переменная $z(t)$). Аналогичный процесс представлен на рис. 10. В этом случае $z(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению с релаксацией

$$\dot{z} = -\alpha z + \tilde{z}(t),$$

где $\tilde{z}(t)$ — по-прежнему дельта-коррелированный пуассоновский процесс.

Если бы нам удалось решить уравнение (2.6), то, интегрируя его решение по z, мы бы получили плотность вероятностей решения

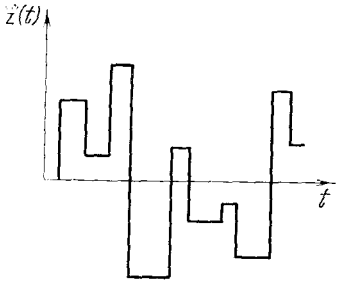

Рис. 9. Пример случайного процесса, описываемого уравнением $\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t)$ ($\tilde{z}(t)$ — пуассоновский δ-коррелированный процесс).

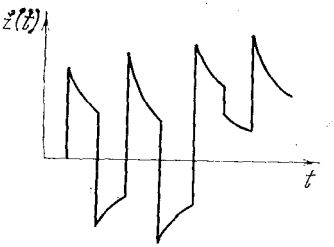

Рис. 10. Пример случайного процесса с релаксацией, описываемого уравнением $\dot{z} = -\alpha z + \tilde{z}(t)$ ($\tilde{z}(t)$) — пуассоновский δ-коррелированный процесс).

уравнения (2.1), т. е. $P_t(x)$. В этом случае процесс $x(t)$ уже не будет марковским. Существует несколько типов процессов $z(t)$, для которых удается перейти от уравнения для $P_t(x, z)$ непосредственно к уравнению для $P_t(x)$, не решая (2.6). Это прежде всего процессы телеграфного типа (телеграфный и обобщенный телеграфный процессы, марковские процессы с конечным числом состояний и гауссовский марковский процесс). Остановимся на этих случаях более подробно.

§ 3. Процессы телеграфного типа

В § 4 гл. 2 для расщепления корреляций в случае телеграфного процесса получено соотношение

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}_t[z(\tau)] \right\rangle, \tag{3.1}$$

где функционал $\tilde{R}_t[z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}_t[z(\tau)] = R_t[z(\tau)\,\theta(t_1 - \tau + 0)]. \tag{3.2}$$

Формулу (3.1) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих процесс $z(t)$ линейным образом. Пусть функционал $R_t[z(\tau)]$ — решение некоей системы дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Тогда функционал $\widetilde{R}_t[z(\tau)]$ будет описываться той же системой уравнений, где вместо процесса $z(t)$ будет стоять величина $z(t)\,\theta(t_1 - t)$. Следовательно, для времен $t > t_1$ функционал $\widetilde{R}_t[z(\tau)] = R_t[0]$ и описывается этой же системой уравнений при $z = 0$ с начальным условием $\widetilde{R}_{t=t_1}[z(\tau)] = R_{t_1}[z(\tau)]$. Поэтому функционал $\widetilde{R}_t[z(\tau)]$ имеет структуру

$$\widetilde{R}_t[z(\tau)] = \widetilde{R}_t(t, t_1;\ R_{t_1}[z(\tau)])\ (\widetilde{R}_{t_1}[z(\tau)] \equiv R_{t_1}[z(\tau)]).$$

Тогда выражение (3.1) принимает вид

$$\langle z(t)\,R_t[z(\tau)]\rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t - t_1)\} \left\langle \frac{\partial \widetilde{R}_t}{\partial R_{t_1}} \frac{\delta R_{t_1}[z(\tau)]}{\delta z(t_1)} \right\rangle. \qquad (3.3)$$

Поскольку для описанной выше задачи вариационная производная $\delta R_{t_1}/\delta z(t_1)$ выражается через сам функционал R_{t_1}, получаем, что среднее значение величины в правой части (3.3) связано с одновременными средними функционала R_{t_1}.

Формула (3.3) существенно упрощается для линейных систем. В этом случае функционал $\widetilde{R}_t$ линейно зависит от $R_{t_1}[z(\tau)]$ и величина $\partial\widetilde{R}_t/\partial R_{t_1}$ является функцией Грина для системы уравнений в случае отсутствия флуктуаций, т. е. при $z = 0$. В результате получается замкнутое уравнение для $\langle R_t\rangle$. Это уравнение было получено ранее в работе [18].

Для стохастических уравнений, содержащих случайный телеграфный процесс $z(t)$ линейным образом, удобно пользоваться также другим приемом, основанным на формулах дифференцирования корреляций функционалов марковских процессов (формула (2.5.16)) [46]:

$$\frac{d}{dt}\langle z(t)\,R_t[z(\tau)]\rangle = \\ = -2\nu\langle z(t)\,R_t[z(\tau)]\rangle + \left\langle z(t)\,\frac{\partial R_t[z(\tau)]}{\partial t}\right\rangle. \qquad (3.4)$$

Покажем, как использовать ее для анализа стохастических уравнений.

Рассмотрим систему операторных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \widehat{A}_{ij}(t)\,x_j + z(t)\,\widehat{B}_{ij}(t)\,x_j, \quad x(0) = x_0 \qquad (3.5)$$

($i = 1, \ldots, n$), где $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — некие детерминированные операторы, которые могут быть операторами дифференцирования по вспомогательным переменным. Если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — просто матрицы, то (3.5) описывает случай линейных динамических систем.

Усредним уравнение (3.5) по ансамблю случайных функций $z(t)$. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \widehat{A}_{ij}\langle x_j\rangle + \widehat{B}_{ij}\psi_j, \quad \langle \boldsymbol{x}(0)\rangle = \boldsymbol{x}_0, \tag{3.6}$$

где введены новые функции $\psi_i = \langle z(t)\, x_i(t)\rangle$. Для функций ψ_i можно использовать формулу (3.4); в результате получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\psi_i(t) = -2\nu\psi_i + \left\langle z(t)\frac{dx_i}{dt}\right\rangle. \tag{3.7}$$

Подставляя теперь dx_i/dt из (3.5) в (3.7), получаем уравнение для функций ψ_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right)\psi_i(t) = \widehat{A}_{ij}\psi_j + \widehat{B}_{ij}\langle z^2(t)\, x_j\rangle. \tag{3.8}$$

Учитывая теперь, что для телеграфного процесса $z^2(t) \equiv a^2$, получаем окончательную систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \widehat{A}_{ij}\langle x_j\rangle + B_{ij}\psi_j, \quad \langle \boldsymbol{x}(0)\rangle \equiv \boldsymbol{x}_0,\\ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right)\psi_i = \widehat{A}_{ij}\psi_j + a^2 B_{ij}\langle x_j\rangle, \quad \psi_i(0) = \langle z(0)\rangle\, x_i(0).\end{gathered} \tag{3.9}$$

Система уравнений (3.9) — замкнутая система двух линейных уравнений для векторов $\langle \boldsymbol{x}\rangle$ и $\boldsymbol{\psi}$. Если операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ — матрицы, не зависящие от времени, то система (3.9) может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа. Пусть для определенности $\langle z(0)\rangle = 0$. Тогда $\psi(0) = 0$ и преобразованная по Лапласу система (3.9) является алгебраической системой уравнений

$$\begin{gathered}(pE - A)\langle \boldsymbol{x}(p)\rangle - B\boldsymbol{\psi}(p) = \boldsymbol{x}_0,\\ [(p + 2\nu)E - A]\boldsymbol{\psi}(p) - a^2 B\langle \boldsymbol{x}(p)\rangle = 0,\end{gathered} \tag{3.10}$$

где E — единичная матрица.

Отсюда получаем решение $\langle \boldsymbol{x}(p)\rangle$:

$$\langle \boldsymbol{x}(p)\rangle = \left[(pE - A) - a^2 B\frac{1}{(p + 2\nu)E - A}B\right]^{-1}\boldsymbol{x}_0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь нелинейное одномерное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + z(t)\, g(x, t), \quad x(0) = x_0. \tag{3.12}$$

Вводя функцию $\varphi_t(x) = \delta(x(t) - x)$, получаем для нее стохастическое уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}f(x, t)\,\varphi_t(x) - z(t)\frac{\partial}{\partial x}g(x, t)\,\varphi_t(x). \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) является линейным уравнением типа (3.5), в котором $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ — линейные дифференциальные операторы. Усредняя

(3.13) по ансамблю случайных функций $z(t)$ и действуя, как при выводе системы (3.9), получаем замкнутую систему уравнений для плотности вероятностей решения уравнения (3.12) $P_t(x) = \langle \varphi_t(x) \rangle$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P_t - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \Psi_t, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\right) \Psi_t = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \Psi_t - a^2 \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) P_t, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $\Psi_t(x) = \langle z(t) \varphi_t(x) \rangle$. Начальными условиями для системы (3.14) являются условия

$$P_0(x) = \delta(x - x_0), \quad \Psi_0(x) = \langle z(0) \rangle P_0(x). \tag{3.15}$$

Стационарное распределение вероятностей, если оно существует, удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered} f(x) P_\infty(x) = -g(x) \Psi_\infty(x), \\ \left[2\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right] \Psi_\infty(x) = -a^2 \frac{\partial}{\partial x} g(x) P_\infty(x). \end{gathered} \tag{3.16}$$

(Здесь введены обозначения $f(x, \infty) = f(x)$, $g(x, \infty) = g(x)$.) Исключая функцию $\Psi_\infty(x)$ из (3.16), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\left[2\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right] \frac{f(x)}{g(x)} P_\infty(x) = a^2 \frac{d}{dx} g(x) P_\infty(x), \tag{3.17}$$

решение которого удается выписать в виде квадратуры [20]:

$$P_\infty(x) = \frac{C\,|g(x)|}{a^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp\left\{2\nu \int dx \frac{f(x)}{a^2 g^2(x) - f^2(x)}\right\} \tag{3.18}$$

$$(|f(x)| < a\,|g(x)|),$$

где положительная постоянная C определяется из условия нормировки.

Отметим, что при $\nu \to \infty$ из (3.18) следует распределение

$$P_\infty(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp\left\{\frac{2\nu}{a^2} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)}\right\},$$

отвечающее гауссовскому дельта-коррелированному процессу в соответствии с результатами § 6 гл. 2 и формулой (3.4.24).

Чтобы увидеть, как может влиять конечность радиуса корреляции процесса $z(t)$ на динамику системы, рассмотрим простой пример, соответствующий $g(x) = 1$, $f(x) = -x$, $a^2 = 1$*). В этом случае получаем из (3.18) распределение вероятностей

$$P_\infty(x) = \frac{1}{B(\nu, 1/2)} (1 - x^2)^{\nu - 1} (|x| < 1), \tag{3.19}$$

*) Так как для этой задачи динамическое уравнение записано в безразмерном времени, величина ν будет безразмерной.

где $B(\nu, 1/2)$ — бета-функция. Это распределение вероятностей имеет существенно разный вид в случаях $\nu > 1$ и $\nu < 1$, что схематически изображено на рис. 11. Из вида распределения следует, что в случае $\nu > 1$ система проводит основное время вблизи состояния $x = 0$, а в случае $\nu < 1$ система находится в окрестностях точек $x = -1; 1$, в соответствии с физическим смыслом исходной

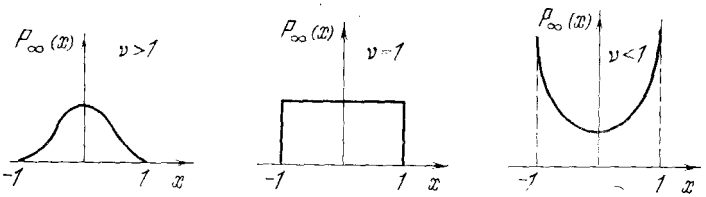

Рис. 11. Стационарное распределение вероятностей для решения уравнения $\dot{x} = -x + z(t)$ в зависимости от параметра ν.

динамической задачи. В случае же $\nu = 1$ получаем равномерное распределение вероятностей на отрезке $[-1, 1]$.

Отметим, что при $\nu \to \infty$ распределение вероятностей (3.19) переходит в гауссовское распределение

$$P_\infty(x) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \exp\{-\nu x^2\},$$

соответствующее гауссовскому дельта-коррелированному процессу $z(t)$. В случае же $\nu \to 0$ распределение вероятностей (3.19) переходит в распределение

$$P_\infty(x) = \delta(x^2 - 1),$$

в соответствии с результатами первого параграфа этой главы.

В качестве другого примера нелинейной системы рассмотрим задачу о влиянии конечности времени корреляции случайных сил на движение частицы в поле $U(x)$. Движение частицы будем описывать стохастической системой уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \lambda y + \mu z(t)$$

$$(x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z^2 = 1), \tag{3.20}$$

где функцию $z(t)$ будем считать по-прежнему телеграфным процессом. Производя выкладки, аналогичные выводу уравнения (3.17), получаем операторное уравнение для совместной стационарной плотности вероятностей координаты частицы x и ее скорости y:

$$\hat{L} P_\infty(x, y) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2\nu + \hat{L}} \frac{\partial}{\partial y} P_\infty(x, y), \tag{3.21}$$

где оператор $\hat{L} = y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \lambda\frac{\partial}{\partial y}y$ (оператор Лиувилля). При $\nu \to \infty$ уравнение (3.21) переходит в стационарное УЭФ:

$$\hat{L}P_\infty(x, y) = \frac{\mu^2}{2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}P_\infty(x, y), \tag{3.21'}$$

решение которого соответствует распределению Гиббса:

$$P_\infty(x, y) = \text{const}\exp\left\{-\beta\left(\frac{y^2}{2} + U(x)\right)\right\} \qquad \left(\beta = \frac{2\nu\lambda}{\mu^2}\right). \tag{3.22}$$

В общем же случае уравнение (3.21) описывает искажение распределения (3.22) за счет конечности времени корреляции $\tau_0 = {}^1/_2\,\nu$ процесса $z(t)$.

Уравнение (3.21) можно переписать в виде уравнения в частных производных:

$$\left\{(2\nu + \hat{L})^2\hat{L} - \mu^2(2\nu + \hat{L})\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda(2\nu + \hat{L})\hat{L} + \right.$$
$$\left. + \mu^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\hat{L}\right\}P_\infty = 0. \tag{3.23}$$

При выводе (3.23) используется формула дифференцирования обратного оператора $\hat{L}^{-1}(\alpha)$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{L}^{-1}(\alpha) = -\hat{L}^{-1}(\alpha)\frac{\partial\hat{L}(\alpha)}{\partial\alpha}\hat{L}^{-1}(\alpha). \tag{3.24}$$

В самом деле, по определению обратного оператора

$$\hat{L}^{-1}(\alpha)\,\hat{L}(\alpha) = E \qquad (\hat{L}(\alpha)\,\hat{L}^{-1}(\alpha) = E),$$

где E — единичный оператор. Дифференцируя это равенство по α, получаем

$$\frac{\partial\hat{L}^{-1}(\alpha)}{\partial\alpha}\hat{L}(\alpha) = -\hat{L}^{-1}(\alpha)\frac{\partial\hat{L}(\alpha)}{\partial\alpha}. \tag{3.25}$$

Умножая теперь (3.25) справа на оператор $L^{-1}(\alpha)$, получаем формулу (3.24). Уравнение (3.23) имеет достаточно сложный вид, и, по-видимому, решить его для произвольного поля $U(x)$ затруднительно. Легко видеть, однако, что решение уравнения (3.23) уже не будет являться функцией одной только энергии частицы, как это имеет место в (3.22), а также то, что координата и скорость частицы будут уже статистически зависимыми величинами.

Прежде чем перейти к различного рода обобщениям рассмотренного процесса, остановимся еще на одном интересном приложении теории телеграфных случайных процессов. В третьей главе было показано, что решения некоторого класса уравнений в частных производных могут быть интерпретированы как результат усреднения определенного функционала по случайному, дельта-коррелированному во времени процессу. Аналогичная ситуация имеет место и для телеграфного случайного процесса. Следуя книге

Каца [36], рассмотрим задачу Коши для детерминированного волнового уравнения с линейным трением

$$\frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \tag{3.26}$$

с начальными условиями

$$F(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial F(0, x)}{\partial t} = \psi(x). \tag{3.26'}$$

Уравнение (3.26) можно переписать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \psi(x) e^{-2\nu t} + v^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t - t_1)\} \frac{\partial^2 F(t_1, x)}{\partial x^2}. \tag{3.27}$$

Если теперь ввести вспомогательное стохастическое уравнение

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \psi(x) e^{-2\nu t} + vz(t) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad f(0, x) = \varphi(x), \tag{3.28}$$

где $z(t)$ — телеграфный случайный процесс ($z^2 = 1$), то из предыдущего изложения очевидно, что $F(t, x) = \langle f(t, x)\rangle$. Решение уравнения (3.28) имеет вид

$$f(t, x) = \varphi\left(x + v\int_0^t d\tau\, z(\tau)\right) + \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} \psi\left(x + v\int_{t_1}^t d\tau\, z(\tau)\right),$$

и, следовательно, решение уравнения (3.26) с условиями (3.26′) можно представить в виде статистического среднего по процессу z:

$$F(t, x) = \left\langle \varphi\left(x + v\int_0^t d\tau\, z(\tau)\right)\right\rangle + \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} \left\langle \psi\left(x + v\int_{t_1}^t d\tau\, z(\tau)\right)\right\rangle. \tag{3.29}$$

Вернемся теперь к общему случаю процесса $z(t)$ вида (1.3.26), где a — случайная величина с заданным распределением вероятностей $p(a)$. Как указывалось выше, в этом случае, вообще говоря, невозможно получить замкнутое уравнение для характеристического функционала и, следовательно, невозможно провести замкнутое описание динамических систем. Остается единственная возможность решения задачи, заключающаяся в том, чтобы рассматривать величину a как детерминированную. Если при этом удается написать явное решение такой задачи, то окончательный результат получается последующим усреднением по случайной величине a.

Пусть теперь $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс. В этом случае имеет место формула для расщепления корреляций (2.4.15′):

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)]\rangle = \langle \tilde{a} R_t[\tilde{a}]\rangle e^{-\nu t} + \\ + \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\} \langle \tilde{a} \tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]\rangle, \qquad (3.30)$$

где

$$\tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)] = R_t[\tilde{a}\theta(\tau - t_1) + z(\tau)\theta(t_1 - \tau)], \qquad (3.31)$$

а случайная величина $\tilde{a}$ статистически независима от процесса $z(t)$.

Формулу (3.30) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих линейным образом процесс $z(t)$, аналогично формуле (3.1). В самом деле, если R_t — решение системы уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$, то функционал $\tilde{R}_t[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]$ будет представлять собой решение той же задачи, в которой величина $z(t)$ заменена на величину $\tilde{a}$ для интервала времен $t > t_1$. Начальное условие для этой задачи таково: $\tilde{R}_{t_1}[t_1, \tilde{a}, z(\tau)] = R_{t_1}[z(\tau)]$. Следовательно, средняя величина в правой части (3.30) будет выражаться через величины, содержащие только одновременные средние функционала $R_{t_1}[z(\tau)]$. Для линейных же систем правая часть (3.30) будет просто выражаться через $\langle R_{t_1}[z(\tau)]\rangle$. Так, например, для линейной системы (3.5), где $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс, а A и B — постоянные матрицы, имеем, согласно (3.30),

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{x}\rangle = A\langle \boldsymbol{x}\rangle + B\langle z(t)\boldsymbol{x}(t)\rangle = A\langle \boldsymbol{x}\rangle + B\langle \tilde{a}\tilde{\boldsymbol{x}}[\tilde{a}]\rangle e^{-\nu t} + \\ + \nu B \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\} \langle \tilde{a}\tilde{\boldsymbol{x}}[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]\rangle. \qquad (3.32)$$

Функционал $\tilde{\boldsymbol{x}}$, согласно (3.31), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{a}B\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad (t > t_1) \qquad (3.33)$$

с начальным условием

$$\tilde{\boldsymbol{x}}|_{t=t_1} = \boldsymbol{x}(t_1).$$

Следовательно, функционал $\tilde{\boldsymbol{x}}[t_1, \tilde{a}, z(\tau)]$ имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \exp\{(A + \tilde{a}B)(t - t_1)\}\boldsymbol{x}(t_1)$$

и уравнение (3.32) становится интегро-дифференциальным:

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{x}\rangle = A\langle \boldsymbol{x}\rangle + e^{-\nu t} B\langle \tilde{a}\exp\{(A + \tilde{a}B)t\}\rangle \boldsymbol{x}_0 + \\ + \nu \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t-t_1)\} B\langle \tilde{a}\exp\{(A + \tilde{a}B)(t - t_1)\}\rangle \langle \boldsymbol{x}(t_1)\rangle, \qquad (3.34)$$

с начальным условием $\langle x(0)\rangle = x_0$. Уравнение (3.34) может быть легко решено с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем

$$\langle x_p\rangle = \{E - \nu C\}^{-1} C x_0, \tag{3.34'}$$

где $C = \langle\{(p+\nu)E - A - \tilde{a}B\}^{-1}\rangle_a$, а E — единичная матрица.

В случае же задачи (3.13) величина $\tilde{\varphi}_t(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{[f(x,t) + \tilde{a}g(x,t)]\tilde{\varphi}_t(x)\} \tag{3.35}$$

с начальным условием $\tilde{\varphi}_{t_1}(x) = \varphi_{t_1}(x)$, решение которого имеет вид) с учетом операции упорядочения по времени T-экспоненты)

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \exp_T\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\int_{t_1}^{t} d\tau\,[f(x,\tau) + \tilde{a}g(x,\tau)]\right\}\varphi_{t_1}(x).$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей решения задачи (3.12) примет замкнутую операторную форму (тильду у $\tilde{a}$ далее опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P_t(x)] -$$

$$- e^{-\nu t}\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\left\langle a\exp_T\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t d\tau\,[f(x,\tau) + ag(x,\tau)]\right\}\right\rangle P_0(x) -$$

$$- \nu\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\int_0^t dt_1 e^{-\nu(t-t_1)}\times$$

$$\times\left\langle a\exp_T\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\int_{t_1}^{t} d\tau\,[f(x,\tau) + ag(x,\tau)]\right\}\right\rangle P_{t_1}(x). \tag{3.36}$$

Стационарное же распределение вероятностей, если оно существует, удовлетворяет операторному уравнению ($f(x,\infty) = f(x)$, $g(x,\infty) = g(x)$)

$$f(x)P_\infty(x) =$$

$$= -\nu g(x)\int_0^\infty d\tau\, e^{-\nu\tau}\left\langle a\exp\left\{-\tau\frac{d}{dx}[f(x) + ag(x)]\right\}\right\rangle P_\infty(x),$$

которое можно записать также в виде

$$f(x)P_\infty(x) = -\nu g(x)\left\langle\frac{a}{\nu + \frac{d}{dx}[f(x) + ag(x)]}\right\rangle P_\infty(x). \tag{3.37}$$

Чтобы перейти от уравнения (3.37) к дифференциальному уравнению, требуется знать конкретное распределение вероятностей случайной величины a.

Пусть, например, интенсивность флуктуаций величины a достаточно мала и $\langle a \rangle = 0$. Тогда, разлагая оператор в правой части (3.37) в ряд по a и ограничиваясь членами порядка $\langle a^2 \rangle$, получаем операторное уравнение

$$f(x) P_\infty(x) = \nu \langle a^2 \rangle g(x) \frac{1}{\nu + \frac{d}{dx} f(x)} \frac{d}{dx} g(x) \frac{1}{\nu + \frac{d}{dx} f(x)} P_\infty(x). \quad (3.38)$$

Если теперь представить функцию $P_\infty(x)$ в виде $P_\infty(x) = [\nu + \frac{d}{dx} f(x)] \psi(x)$, то для $\psi(x)$ получаем дифференциальное уравнение второго порядка по x:

$$\left[\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right] \frac{f(x)}{g(x)} \left[\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right] \psi(x) = \nu \langle a^2 \rangle \frac{d}{dx} g(x) \psi(x). \quad (3.38')$$

При $\nu \to \infty$ можно разложить среднюю величину в правой части (3.37) в ряд по $1/\nu$ и получить стационарное УЭФ

$$f(x) P_\infty(x) = \frac{\langle a^2 \rangle}{\nu} g(x) \frac{d}{dx} g(x) P_\infty(x),$$

соответствующее гауссовскому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

При рассмотрении стохастических уравнений с флуктуациями параметров в виде обобщенного телеграфного процесса можно использовать и другой прием, основанный на формуле дифференцирования (2.5.18), которая имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu\right) \langle F(z(t)) R_t[z(\tau)] \rangle = \left\langle F(z(t)) \frac{\partial R_t[z(\tau)]}{\partial t} \right\rangle, \quad (3.39)$$

при условии, что $\langle F(z(t)) \rangle = \langle F(a) \rangle_a = 0$. Выберем в качестве $F(z(t))$ функцию

$$F(t) = F(z(t)) = \frac{1}{1 + \lambda z(t)} - C_0(\lambda), \quad (3.40)$$

где

$$C_k(\lambda) = \langle a^k / (1 + \lambda a) \rangle_a, \quad (3.41)$$

а λ — произвольный параметр. Функция $F(t)$ обладает свойством

$$z(t) F(t) = -\frac{1}{\lambda} F(t) + C_1(\lambda) - z(t) C_0(\lambda). \quad (3.42)$$

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений (3.5) с постоянными матрицами A и B, где $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс. Усредняя (3.5), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = A \langle x \rangle + B \langle z(t) x \rangle. \quad (3.6')$$

Согласно формуле дифференцирования (3.39)

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)\langle F(t)\,x(t)\rangle=\left\langle F(t)\frac{dx(t)}{dt}\right\rangle=$$
$$=A\langle F(t)\,x(t)\rangle+B\langle z(t)\,F(t)\,x(t)\rangle. \quad (3.39')$$

Используя теперь равенство (3.42), можно переписать (3.39′) в виде тождества:

$$\left[\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)E-A+\frac{1}{\lambda}B\right]\langle F(t)\,x\rangle=$$
$$=BC_1(\lambda)\langle x\rangle-BC_0(\lambda)\langle z(t)\,x\rangle. \quad (3.43)$$

Выполняя преобразование Лапласа в (3.6′) и (3.43), получаем незамкнутую систему уравнений

$$(pE-A)\langle x\rangle_p-B\langle z(t)\,x\rangle_p=x_0,$$
$$\left[(p+\nu)E-A+\frac{1}{\lambda}B\right]\langle F(t)\,x\rangle_p=BC_1(\lambda)\langle x\rangle_p-BC_0(\lambda)\langle z(t)\,x\rangle_p, \quad (3.43')$$

справедливую для любого λ. Полагая $\frac{1}{\lambda}=[A-(p+\nu)E]\,B^{-1}$, обращаем в нуль левую часть второго уравнения, что дает алгебраическую связь между величинами $\langle x\rangle_p$ и $\langle z(t)\,x\rangle_p$, которая совместно с первым уравнением (3.43′) и позволяет получить решение, совпадающее, естественно, с формулой (3.34′).

Вернемся опять к стохастическим уравнениям (3.5) и будем считать, что процесс $z(t)$ имеет структуру

$$z(t)=z_1(t)+\ldots+z_N(t), \quad (3.44)$$

где $z_i(t)$ — независимые телеграфные процессы с корреляционной функцией

$$\langle z_i(t)\,z_j(t')\rangle=\delta_{ij}\langle z^2\rangle\exp\{-\alpha\,|\,t-t'\,|\}. \quad (3.45)$$

Как было показано в конце первой главы, при $N\to\infty$ (если положить $\langle z^2\rangle=\sigma^2/N$) процесс (3.44) переходит в гауссовский марковский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t)\,z(t')\rangle=\sigma^2\exp\{-\alpha\,|\,t-t'\,|\}. \quad (3.46)$$

Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=\hat{A}x+[z_1(t)+\ldots+z_N(t)]\,\hat{B}x,\qquad x(0)=x_0. \quad (3.47)$$

Введем вектор-функцию

$$\psi_k(t)=\langle z_1(t)\ldots z_k(t)\,x(t)\rangle. \quad (3.48)$$

Используя формулу (2.5.27) для дифференцирования корреляций (3.48) и само уравнение (3.47), получаем рекуррентное уравнение для ψ_k вида [22]

$$\left(\frac{d}{dt}+\alpha k\right)\psi_k=\hat{A}\psi_k+\langle z_1(t)\ldots z_k(t)\,[z_1(t)+\ldots+z_N(t)]\,\hat{B}x\rangle=$$
$$=\hat{A}\psi_k+k\langle z^2\rangle\hat{B}\psi_{k-1}+(N-k)\hat{B}\psi_{k+1}\qquad(k=0,1,\ldots,N). \quad (3.49)$$

Таким образом, среднее значение решения системы (3.47) удовлетворяет замкнутой системе $N+1$ векторных уравнений. Если матрицы A и B не зависят от времени, то система уравнений (3.49) может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа. Очевидно, что ее решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби. Если теперь принять значение $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу $N \to \infty$, то, как говорилось выше, случайный процесс $z(t) = \sum_1^N z_k(t)$ перейдет в гауссовский марковский процесс, а решение системы уравнений (3.49) запишется в виде бесконечной цепной дроби, в согласии с результатами более ранних работ [19, 45].

Из рассмотренного примера ясно, что обрезание бесконечной цепной дроби в этом случае можно рассматривать как аппроксимацию гауссовского случайного процесса конечным отрезком ряда $\sum_1^N z_k(t)$. Такая аппроксимация может оказаться полезной и при флуктуациях параметров вида $f(z(t))$, где $z(t)$ — гауссовский марковский процесс. Так, например, в случае $f(z(t)) = z^2(t) - \langle z^2(t)\rangle$ конечномерная аппроксимация имеет вид $f(z(t)) = \sum_{i\neq k}^N z_i(t)\, z_k(t)$. В этом случае среднее значение решения системы уравнений

$$\dot{x} = \hat{A}x + \sum_{i\neq k}^N z_i(t)\, z_k(t)\, \hat{B}x, \qquad x(0) = x_0 \tag{3.50}$$

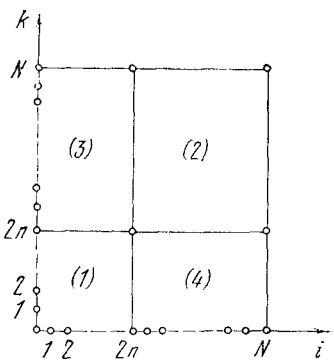

Рис. 12. Схема разбиения индексов в сумме (3.51).

будет входить в замкнутую систему $[N/2]+1$ векторных уравнений для функций $\psi_n(t) = \langle z_1(t) \ldots z_{2n}(t)\, x(t)\rangle$ [22]. Функции $\psi_n(t)$ будут, очевидно, удовлетворять уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha n\right)\psi_n(t) - \hat{A}\psi_n(t) = \\ = \hat{B}\left\langle z_1(t)\ldots z_{2n}(t)\sum_{i\neq k}^N z_i(t)\, z_k(t)\, x(t)\right\rangle. \tag{3.51}$$

Далее будем действовать аналогично выводу системы уравнений (3.49). Разобьем сумму по i и k в правой части (3.51) на четыре области (рис. 12). В области (*1*) две функции $z_i\, z_k$ будут «погашены» соответствующими функциями из произведения $z_1(t)\ldots z_{2n}(t)$. Учитывая, что таких членов будет $2n(2n-1)$, получаем для области (*1*) правую часть (3.51) в виде

$$2n(2n-1)\langle z^2\rangle^2\, \hat{B}\psi_{n-1}(t). \tag{3.51a}$$

Аналогичным образом в области (2), где не происходит «гашения» функций $z_i(t)$, $z_k(t)$, получаем соответствующий член в правой части (3.51):

$$(N-2n)(N-2n-1)\,\widehat{B}\psi_{n+1}(t). \tag{3.51б}$$

В областях же (3) и (4) будет «гаситься» одна из функций $z_i(t)$, $z_k(t)$. Учитывая, что число таких членов $4n(N-2n)$, получаем соответствующее выражение в правой части (3.51):

$$4n(N-2n)\langle z^2\rangle\,\widehat{B}\psi_n(t). \tag{3.51в}$$

В результате уравнение (3.51) принимает вид замкнутой системы рекуррентных уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\alpha n\right)E-\widehat{A}-4n(N-2n)\langle z^2\rangle\,\widehat{B}\right]\psi_n(t)=$$
$$=2n(2n-1)\langle z^2\rangle^2\,\widehat{B}\psi_{n-1}(t)+(N-2n)(N-2n-1)\,\widehat{B}\psi_{n+1}(t), \tag{3.51'}$$

где $n=0,1,\ldots,\left[\frac{N}{2}\right]$.

Решение системы (3.51′) при постоянных матрицах A и B также, очевидно, записывается конечным отрезком цепной дроби. Простейшие аппроксимации $N=2$ и $N=3$ приводят к замкнутой системе двух векторных уравнений. Отметим, что при одном и том же «порядке точности» — заданном значении N — порядок системы (3.51′) примерно вдвое ниже порядка системы (3.49). Поэтому, если мы зададим порядок системы, то (3.51′) будет ближе к своему предельному решению, чем (3.49). Аналогичная ситуация имеет место и в случае $f(z)=z^k$. Для нечетных значений k получаем замкнутую систему $N+1$ векторных уравнений, а при четных k — систему $[N/2]+1$ уравнений. Однако при $k\geqslant 3$ эти системы уравнений не сводят решение задачи к цепной дроби, так как они являются рекуррентными равенствами более высокого порядка, чем (3.49), (3.51′).

Процесс $\xi_N(t)=z_1(t)+\ldots+z_N(t)$, где $z_i(t)$ — независимые телеграфные процессы, является частным случаем марковского процесса $z(t)$ с конечным числом состояний.

Пусть в общем случае возможные значения процесса $z(t)$ есть $z_1,\ldots,z_n$. Тогда, как показано в первой главе, все реализации процесса $z(t)$ удовлетворяют тождеству

$$z^n(t)=(z_1+\ldots+z_n)\,z^{n-1}(t)+\ldots+(-1)^{n-1}z_1\ldots z_n. \tag{3.52}$$

Следовательно, и теперь среднее значение решения системы

$$\dot{x}=\widehat{A}x+z(t)\,\widehat{B}x \tag{3.53}$$

будет удовлетворять замкнутой системе уравнений. В самом деле, усредняя уравнение (3.53) и применяя последовательно формулу (2.5.25) для корреляций $\langle z^k(t)\,x\rangle$ $(k=1,\ldots,n-1)$, прихо

дим на последнем шаге к функции $\langle z^n(t)\, x(t)\rangle$, которая, согласно (3.52), выражается через функции предыдущих шагов, т. е. получаем замкнутую систему векторных уравнений n-го порядка.

В качестве иллюстрации рассмотрим процесс с двумя состояниями z_1, z_2 и вероятностями перехода между ними ν и μ. Тогда равенство (3.52) примет вид

$$z^2(t) = (z_1 + z_2)\, z(t) - z_1 z_2. \tag{3.52'}$$

Усредним уравнение (3.53):

$$\left(E\frac{d}{dt} - \hat{A}\right)\langle x\rangle = \hat{B}\langle z(t)\, x\rangle. \tag{3.53'}$$

Для корреляции $\langle z(t)\, x\rangle$, согласно формуле (2.5.9), имеем

$$\frac{d}{dt}\langle z(t)\, x\rangle = \langle z(t)\, \dot{x}(t)\rangle + \langle x(t)\,(\hat{L}_z^+ z(t))\rangle,$$

где оператор $\hat{L}_z^+$ описывается матрицей

$$\hat{L}_z^+ = \begin{Vmatrix} -\nu & \nu \\ \mu & -\mu \end{Vmatrix}.$$

Учитывая, что действие оператора $\hat{L}_z^+$ на $z(t)$ можно представить в виде

$$\hat{L}_z^+ z = \begin{Vmatrix} -\nu & \nu \\ \mu & -\mu \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\nu(z_1 - z_2) \\ \mu(z_1 - z_2) \end{vmatrix} = (\nu z_2 + \mu z_1) - (\mu + \nu)\, z(t),$$

уравнению для корреляции $\langle z(t)\, x\rangle$ удается придать вид

$$\left\{E\left(\frac{d}{dt} + \mu + \nu\right) - \hat{A} - (z_1 + z_2)\,\hat{B}\right\}\langle z(t)\, x\rangle =$$
$$= \{(\nu z_2 + \mu z_1)\, E - z_1 z_2\, \hat{B}\}\,\langle x\rangle. \tag{3.53''}$$

Уравнения (3.53′), (3.53″) являются замкнутой системой двух векторных уравнений.

Отметим, что в частном случае скалярного уравнения с параметрами $A = 0$, $\hat{B}(t) = iv(t)$ уравнение (3.53′) описывает характеристический функционал процесса $z(t)$. Исключая из системы (3.53′), (3.53″) функцию $\langle z(t)\, x\rangle$, мы получаем дифференциальное уравнение для характеристического функционала процесса $z(t)$, совпадающее, естественно, с уравнением (1.4.55).

Выше мы рассматривали векторные системы уравнений (3.47), (3.50), определяемые матрицами A и B. Если же интересоваться средним значением только одной компоненты, то для нее можно получить операторное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) x + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t)\, \frac{d^i}{dt^i} z(t)\, \frac{d^j}{dt^j} x = f(t), \tag{3.54}$$

где оператор $L\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, \frac{d^i}{dt^i}$, n — порядок матриц A и B в

(3.47), (3.50). Начальные условия для величины x включены с помощью соответствующих производных δ-функции в функцию $f(t)$. Отметим, что при этом функция $f(t)$ может зависеть и от значений производных случайного процесса $z(t)$ при $t=0$, т. е. $f(t)$ — тоже случайная функция, статистически связанная с $z(t)$.

Уравнение вида (3.54) для марковских процессов $z(t)$ рассматривалось в работе [55], где было получено в случае постоянных во времени $a_i(t)$ и $b_{ij}(t)$ выражение для преобразования Лапласа среднего значения $\langle x\rangle_p$ в виде цепной дроби (конечной или бесконечной) для различных марковских процессов. Получим этот результат для гауссовского марковского процесса, используя развитые выше методы.

Пусть сперва $z(t)=z_1(t)+\ldots+z_N(t)$, где $z_i(t)$ — независимые телеграфные процессы. Тогда имеет место тождество (2.5.28):

$$\left\langle z_1(t)\ldots z_l(t)\frac{d^k}{dt^k}R_l[z(\tau)]\right\rangle=$$
$$=\left(\frac{d}{dt}+\alpha l\right)^k\langle z_1(t)\ldots z_l(t)R_l[z(\tau)]\rangle, \qquad (3.55)$$

где $R_l[z(\tau)]$ — произвольный функционал процесса $z(\tau)$ $(\tau\leqslant t)$. Рассмотрим функции

$$\psi_l(t)=\langle z_1(t)\ldots z_l(t)\,x(t)\rangle,\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ N. \qquad (3.56)$$

Согласно (3.54) и (3.55) для этих функций получаем замкнутую систему рекуррентных операторных уравнений

$$L\left(\frac{d}{dt}+\alpha l\right)\psi_l(t)=\left\langle z_1(t)\ldots z_l(t)\,L\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\right\rangle=$$
$$=F_l(t)-\sum_{i+j=0}^{n-1}b_{ij}(t)\left\langle z_1(t)\ldots z_l(t)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d^i}{dt^i}[z_1(t)+\ldots+z_N(t)]\frac{d^j}{dt^j}x\right\rangle=$$
$$=F_l(t)-l\langle z^2\rangle M\left[\frac{d}{dt}+\alpha_l,\ \frac{d}{dt}+\alpha(l-1)\right]\psi_{l-1}-$$
$$-(N-l)M\left[\frac{d}{dt}+\alpha l,\ \frac{d}{dt}+\alpha(l+1)\right]\psi_{l+1},\quad l=0,1,\ldots,N, \qquad (3.57)$$

где приняты обозначения работы [55]: $M[p,q]=\Sigma b_{ij}p^iq^j$, а $F_l(t)=\langle z_1(t)\ldots z_l(t)f(t)\rangle$. Если оператор L и b_{ij} не зависят от t, то система уравнений (3.57) с помощью преобразования Лапласа сводится к алгебраической системе

$$L(p+\alpha l)\psi_l(p)=$$
$$=F_l(p)-l\langle z^2\rangle M[p+\alpha l,\ p+\alpha(l-1)]\psi_{l-1}(p)-$$
$$-(N-l)M[p+\alpha l,p+\alpha(l+1)]\psi_{l+1}(p). \qquad (3.58)$$

В частном случае, когда $f(t)$ в (3.54) не зависит от $z_k(t)$ ($F_l(p) = f(p)\,\delta_{l,0}$), уравнение (3.58) легко решается и решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби [22]:

$$\psi_0(p) = f(p)\,K_0(p),\quad K_l(p) = [A_l(p) - B_l(p)\,K_{l+1}(p)]^{-1}, \tag{3.59}$$

где

$$A_l(p) = L(p + \alpha l),$$

$$B_l(p) = \langle z^2\rangle (l+1)(N-l)\,M[p+\alpha l,\ p+\alpha(l+1)] \times \\ \times M[p+\alpha(l+1),\ p+\alpha l)]. \tag{3.60}$$

Если $N = 1$, т. е. рассматривается случай одного телеграфного процесса, то решение (3.59) принимает вид, соответствующий двум этажам цепной дроби [55]:

$$\langle x\rangle_p = f(p)\,\frac{L(p+\alpha)}{L(p)\,L(p+\alpha) - \langle z^2\rangle\,M[p,\ p+\alpha]\,M[p+\alpha,\ p]}. \tag{3.59'}$$

Если теперь положить $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$ и устремить N к ∞, то получим решение $\langle x\rangle_p$ для гауссовского марковского процесса $z(t)$ в виде бесконечной цепной дроби (3.59) с параметрами

$$A_l(p) = L(p + \alpha l),$$

$$B_l(p) = \sigma^2(l+1)\,M[p+\alpha l,\ p+\alpha(l+1)]\,M[p+\alpha(l+1),\ p+\alpha l]. \tag{3.60'}$$

Это соотношение было также получено в работе [55]. Совершенно аналогичным путем находим выражение для $\langle x\rangle_p$ в виде конечного отрезка цепной дроби (3.59) и в случае

$$z(t) = \xi_N^2 - \langle \xi_N^2\rangle \quad (\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t))$$

с параметрами [22]

$$A_l(p) = L(p + 2\alpha l) + 4l\,(N-2l)\,\langle z^2\rangle\,M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha l],$$

$$B_l(p) = 2(N-2l)(N-2l-1)(l+1)(2l+1)\langle z^2\rangle^2 \times \\ \times M[p+2\alpha(l+1),\ p+2\alpha l]\,M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha(l+1)] \\ (l = 0, 1, \ldots, [N/2]). \tag{3.61}$$

Полагая $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \to \infty$, получаем решение задачи в случае $z(t) = \xi^2(t) - \langle \xi^2(t)\rangle$, где $\xi(t)$ — гауссовский марковский процесс, в виде бесконечной цепной дроби (3.59) с параметрами

$$A_l(p) = L(p + 2\alpha l) + 4\sigma^2 l M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha l], \tag{3.62}$$

$$B_l(p) = 2\sigma^4(l+1)(2l+1)\,M[p+2\alpha(l+1),\ p+2\alpha l] \times \\ \times M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha(l+1)]. \tag{3.63}$$

Пусть теперь $z(t)$ в (3.54) — обобщенный телеграфный процесс. Будем считать для простоты, что начальные условия для (3.54) не зависят от $z(t)$ и величины a_i и b_{ij} являются постоянными. Усредним уравнение (3.54) с учетом формулы (3.55), которая

справедлива и для обобщенного телеграфного процесса с $\langle a\rangle = 0$ (см. § 5 гл. 2):

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\langle x(t)\rangle + M\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}+\nu\right]\langle z(t)\,x\rangle = f(t). \qquad (3.64)$$

Рассмотрим функцию $\langle F(t)\,x(t)\rangle$, где $F(t)$ описывается формулой (3.40). Согласно формуле дифференцирования (3.39) эта функция удовлетворяет уравнению

$$L\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)\langle F(t)\,x(t)\rangle = \left\langle F(t)\,L\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\right\rangle =$$

$$= -\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}\left\langle F(t)\frac{d^i}{dt^i}z(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle =$$

$$= -\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)^i\left\langle z(t)\,F(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle. \qquad (3.65)$$

Используя теперь равенство (3.42), правую часть (3.65) можно переписать следующим образом:

$$-\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)^i\left\{-\frac{1}{\lambda}\left\langle F(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + C_1(\lambda)\frac{d^j}{dt^j}\langle x(t)\rangle - C_0(\lambda)\left\langle z(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}+\nu\right]\langle F(t)\,x(t)\rangle - C_1(\lambda)\times$$

$$\times M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}\right]\langle x\rangle + C_0(\lambda)\,M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}+\nu\right]\langle z(t)\,x(t)\rangle. \qquad (3.66)$$

Следовательно, уравнение (3.65) принимает вид

$$\left\{L\left(\frac{d}{dt}+\nu\right) - \frac{1}{\lambda}M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}+\nu\right]\right\}\langle F(t)\,x(t)\rangle =$$

$$= -C_1(\lambda)\,M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}\right]\langle x\rangle + C_0(\lambda)\,M\left[\frac{d}{dt}+\nu, \frac{d}{dt}+\nu\right]\langle zx\rangle \qquad (3.67)$$

с начальным условием $\langle F(t)\,x(t)\rangle\,|_{t=0} = 0$.

Выполним теперь преобразование Лапласа в (3.64) и (3.67). В результате получаем алгебраическую систему

$$L(p)\langle x\rangle_p + M[p, p+\nu]\langle zx\rangle_p = f(p),$$

$$\left\{L(p+\nu) - \frac{1}{\lambda}M[p+\nu, p+\nu]\right\}\langle F(t)\,x(t)\rangle_p =$$

$$= -C_1(\lambda)\,M[p+\nu, p]\langle x\rangle_p + C_0(\lambda)\,M[p+\nu, p+\nu]\langle zx\rangle_p. \qquad (3.68)$$

Формулы (3.68) справедливы для любой величины λ. Положим теперь

$$\lambda = \lambda_p = M[p+\nu,\ p+\nu]/L(p+\nu). \qquad (3.69)$$

В результате второе уравнение (3.68) дает алгебраическую связь между $\langle z(t)\, x(t)\rangle_p$ и $\langle x\rangle_p$:

$$\langle z(t)\, x(t)\rangle_p = \frac{\tilde{C}_1(p)}{\tilde{C}_0(p)} \frac{M[p+\nu, p]}{M[p+\nu, p+\nu]} \langle x\rangle_p, \tag{3.70}$$

где

$$\tilde{C}_k(p) = \langle a^k/(L(p+\nu) + aM[p+\nu, \ p+\nu])\rangle_a.$$

Подставляя (3.70) в первое уравнение (3.68), получаем алгебраическое уравнение для $\langle x\rangle_p$, решение которого имеет вид

$$\langle x\rangle_p = f(p)\left[L(p) + \frac{M[p+\nu, p]\, M[p, p+\nu]}{M[p+\nu, p+\nu]} \frac{\tilde{C}_1(p)}{\tilde{C}_0(p)}\right]^{-1}. \tag{3.71}$$

Отметим, что выражение (3.71) другим путем впервые было получено в работе [55].

§ 4. Методы квантовой теории поля в динамике стохастических систем (стохастические интегральные уравнения)

Для задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, удается получить замкнутое статистическое описание благодаря тому факту, что эти задачи соответствуют системе дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Для них выполняется условие причинности, сформулированное в третьей главе, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t определяется только флуктуациями параметров системы в моменты времени $t' \leqslant t$ и не зависит от них при $t' > t$.

Условие причинности, однако, может выполняться и для задач, описываемых интегральными уравнениями, которые, вообще говоря, не всегда сводятся к системе дифференциальных уравнений. Для таких задач останутся справедливыми все рассуждения, подробно описанные в книге как для дельта-коррелированных флуктуаций параметров, так и для флуктуаций параметров в виде процессов телеграфного типа.

Однако прежде чем рассматривать такой класс стохастических уравнений, остановимся на общих методах статистического описания динамических систем, заимствованных из квантовой теории поля. Суть их заключается в построении ряда теории возмущений для статистических характеристик интересующей нас величины и в исследовании его методами, развитыми в квантовой теории поля. При этом каждый член ряда удобно представлять графически (в виде так называемых диаграмм Фейнмана), так что каждому элементу графика сопоставляется определенная функция или оператор, т. е. каждый график соответствует определенному аналитическому выражению. Мы не будем рассматривать диаграммную технику как таковую (подробное ее описание для статистических задач см., например, в монографиях [29], [30] и в обзорных ра-

ботах [56], [57]), а получим основные результаты непосредственно, используя функциональные методы, развитые выше [58].

Исходным стохастическим уравнением является линейное интегральное (или интегро-дифференциальное) уравнение для функции Грина:

$$S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \\ + \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) f(\boldsymbol{r}_2) S(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}'), \tag{4.1}$$

где через $\boldsymbol{r}$ обозначены все аргументы функций S и f, включая и индексные, по которым интегрирование заменяется суммированием. Функция $f(\boldsymbol{r})$ является случайным полем, а функция $S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ является функцией Грина задачи в отсутствие флуктуаций параметров, т. е. при $f(\boldsymbol{r}) = 0$. Величина $\Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ в ряде задач может быть и оператором. Тогда запись уравнения в форме (4.1), подразумевает, что оператор действует на все, что стоит справа от него. Переход от нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнению типа (4.1) осуществляется с помощью эквивалентного линейного стохастического уравнения в частных производных (уравнения Лиувилля), характеристиками которого является решение соответствующей системы. Функция S в этом случае будет функцией Грина для стохастического уравнения Лиувилля, а величина Λ связана с дифференциальным оператором. Для задач, описываемых линейной системой уравнений, величина $\Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ оказывается функцией.

Для простоты будем далее считать Λ функцией, а не оператором. Операторный характер Λ несущественно усложняет дальнейшее рассмотрение. В самом деле, в случае, когда величина Λ является оператором, можно ввести δ-функцию по переменным, на которые действует этот оператор, с соответствующим интегрированием и перейти к рассматриваемому случаю.

Решение уравнения (4.1) является функционалом поля $f(\boldsymbol{r})$, т. е. $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f(\tilde{\boldsymbol{r}})]$. Уравнение (4.1) можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию S_0. Усредняя полученный ряд по ансамблю реализаций поля $f(\boldsymbol{r})$, находим итерационный ряд для функции $\langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rangle$, в который будут входить все моменты поля $f(\boldsymbol{r})$. Далее удается, перегруппировав члены этого ряда, выразить правую часть разложения через саму функцию $\langle S\rangle$. При этом возникают новые неизвестные функции, определяемые соответствующими итерационными рядами, которые, по аналогии с квантовой теорией поля, называются массовой и вершинной функциями.

Рассмотрим вместо (4.1) вспомогательное уравнение

$$S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f + \eta] = S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \\ + \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)[f(\boldsymbol{r}_2) + \eta(\boldsymbol{r}_2)] S[\boldsymbol{r}_3; \boldsymbol{r}'; f + \eta], \tag{4.1'}$$

где $\eta(\boldsymbol{r})$ — произвольная детерминированная функция. Интересующую нас функцию $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ найдем, положив в (4.1′) $\eta(\boldsymbol{r}) = 0$, т. е.

$$S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \equiv S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f] = S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f + \eta]|_{\eta=0}.$$

Усредним уравнение (4.1′). Расщепляя корреляцию $\langle fS \rangle$ по формуле (2.2.5), получаем уравнение

$$G[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \eta] = S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \eta(\boldsymbol{r}_2) G[\boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}'; \eta] + \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \times \left\langle \Omega_{r_2}\left[\frac{\delta}{i\delta f(\widetilde{\boldsymbol{r}})}\right] S[\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}'; f + \eta] \right\rangle. \tag{4.2}$$

Здесь функционал $\Omega_r[v(\widetilde{\boldsymbol{r}})] = \frac{\delta}{i\,\delta v(\boldsymbol{r})} \Theta[v(\widetilde{\boldsymbol{r}})]$, а $\Theta[v(\widetilde{\boldsymbol{r}})]$ — логарифм характеристического функционала поля $f(\boldsymbol{r})$. Через функционал $G[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \eta]$ обозначена величина $\langle S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f + \eta] \rangle$. Учитывая, далее, что функционал $S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f + \eta]$ является функционалом от аргумента $f + \eta$, можно заменить операцию вариационного дифференцирования по f на дифференцирование по η и переписать (4.2) в виде замкнутого уравнения в вариационных производных, аналогичного уравнению Швингера в квантовой теории поля:

$$G[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \eta] = S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \times \left[\eta(\boldsymbol{r}_2) + \Omega_{r_2}\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\widetilde{\boldsymbol{r}})}\right]\right] G[\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}'; \eta]. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) для функционала G можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения величину $S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Полагая в полученном разложении $\eta = 0$, получаем итерационный ряд для функции $\langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rangle$.

Для упрощения дальнейшего изложения запишем уравнение (4.3) в символическом виде (имея в виду, что не составляет труда на каждом этапе восстановить полную запись соответствующих выражений):

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \left(\eta + \Omega\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta}\right]\right) G. \tag{4.3′}$$

Введем теперь обратный к G функционал G^{-1} такой, что

$$G^{-1}G = 1, \quad GG^{-1} = 1. \tag{4.4}$$

Здесь под единицей понимается соответствующая δ-функция. Введем в рассмотрение также функционал

$$\Gamma = -\frac{\delta G^{-1}}{\delta\eta}, \tag{4.5}$$

который назовем вершинным функционалом.

Варьируя (4.4) по полю η, получаем равенство

$$\frac{\delta G}{\delta \eta} = G\Gamma G, \tag{4.6}$$

подстановка которого в (4.3′) приводит к уравнению

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 Q G. \tag{4.7}$$

Величину

$$Q = \Lambda \left\{ \Omega \left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta} \right] G \right\} G^{-1} \tag{4.8}$$

назовем массовым функционалом.

Умножая теперь (4.7) справа на G^{-1} и слева на S_0^{-1} (и интегрируя по соответствующим аргументам), получаем уравнение для функционала G^{-1}:

$$S_0^{-1} - G^{-1} = \Lambda\eta + Q. \tag{4.9}$$

Варьируя (4.9) по полю η, получаем уравнение для функционала Γ:

$$\Gamma = \Lambda + \frac{\delta}{\delta\eta} Q. \tag{4.10}$$

Система функциональных уравнений (4.7), (4.10) замкнута относительно функционалов G и Γ. Их решения, однако, связаны соотношением (4.6). Уравнение (4.10) для Γ можно решать итерациями, выбрав в качестве нулевого приближения величину Λ. Если выразить при этом вариационные производные G по η с помощью формулы (4.6), то мы придем к интегральным уравнениям для Γ и G с бесконечным числом членов, каждое из которых не содержит других функционалов, кроме G и Γ. Полагая $\eta = 0$, можно получить замкнутую систему интегральных уравнений. В частности, уравнение (4.7) выглядит следующим образом:

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q \langle S \rangle, \quad \langle S \rangle = S_0 + \langle S \rangle Q S_0, \tag{4.7′}$$

и называется уравнением Дайсона.

Остановимся теперь более подробно на случае, когда поле $f(\boldsymbol{r})$ является гауссовским случайным полем с корреляционной функцией $B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle f(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}') \rangle$. Тогда

$$\Omega_r [v(\tilde{\boldsymbol{r}})] = i \int d\tilde{\boldsymbol{r}}\, B(\boldsymbol{r}, \tilde{\boldsymbol{r}})\, v(\tilde{\boldsymbol{r}})$$

и для массового функционала получаем выражение

$$Q = \Lambda B G \Gamma, \tag{4.11}$$

а уравнения (4.7), (4.10) принимают вид

$$\begin{aligned} G &= S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 \Lambda B G \Gamma G, \\ \Gamma &= \Lambda + \Lambda B G \Gamma G \Gamma + \Lambda B G \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Полагая теперь $\eta = 0$, получаем замкнутую систему уравнений:

$$\langle S\rangle = S_0 + S_0 Q \langle S\rangle \text{ (уравнение Дайсона)},$$
$$Q = \Lambda B \langle S\rangle \tilde{\Gamma},$$
$$\tilde{\Gamma} = \Lambda + \Lambda B \langle S\rangle \tilde{\Gamma} \langle S\rangle \tilde{\Gamma} + \ldots \; (\tilde{\Gamma} = \Gamma|_{\eta=0}). \tag{4.13}$$

Система уравнений (4.13) очень сложна и в настоящее время еще мало изучена. Простейший путь ее упрощения заключается в обрывании бесконечного ряда в уравнении для $\tilde{\Gamma}$. Если это сделать на самом первом шаге, то придем к замкнутому нелинейному уравнению (приближение Крейчнана [59])

$$\langle S\rangle = S_0 + S_0 Q_{\text{кр}} \langle S\rangle, \; Q_{\text{кр}} = \Lambda B \langle S\rangle \Lambda. \tag{4.14}$$

Если теперь в выражении для массовой функции $Q_{\text{кр}}$ заменить $\langle S\rangle$ на S_0, то получим линейное уравнение (приближение Бурре [60])

$$\langle S\rangle = S_0 + S_0 \Lambda B S_0 \Lambda \langle S\rangle. \tag{4.15}$$

Отметим, что четких условий применимости приближений (4.14), (4.15) в общем случае в настоящее время не имеется.

Функционал Γ и, следовательно, функция $\tilde{\Gamma}$ тесно связаны с величиной $\langle SS\rangle$. В самом деле, легко видеть, что уравнение (4.1) эквивалентно функциональному уравнению

$$\frac{\delta S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f]}{\delta f(\boldsymbol{r}_0)} = \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1; f] \Lambda(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2) S[\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}'; f] \tag{4.16}$$

с начальным условием

$$S[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f]_{f=0} = S_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}').$$

Действительно, записывая уравнение (4.1) в символическом виде

$$S = S_0 + S_0 \Lambda f S,$$

можно представить его решение с помощью итерационного ряда

$$S = \{1 + S_0 \Lambda f + (S_0 \Lambda f)^2 + \ldots\} S_0.$$

Проварьируем теперь уравнение для S по функции $f(r_0)$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\delta S}{\delta f} = S_0 \Lambda \, \delta S + S_0 \Lambda f \frac{\delta S}{\delta f}$$

(через δ обозначена δ-функция по соответствующим аргументам), решение которого можно записать аналогичным образом в виде итерационного ряда

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \{1 + S_0 \Lambda f + (S_0 \Lambda f)^2 + \ldots\} S_0 \Lambda \, \delta S,$$

или, с учетом выражения для S, получить (4.16). Следовательно,

выражение (4.6) при $\eta = 0$ можно переписать в виде

$$\langle S\Lambda S\rangle = \langle S\rangle\, \widetilde{\Gamma}\, \langle S\rangle. \tag{4.16'}$$

Таким образом, различные приближения для функции $\widetilde{\Gamma}$ эквивалентны определенным гипотезам расщепления корреляции $\langle SS\rangle$. Так, приближение Крейчнана (4.14) соответствует равенству

$$\langle S\Lambda S\rangle = \langle S\rangle\, \Lambda\, \langle S\rangle,$$

а приближение Бурре (4.15) эквивалентно требованию

$$\langle S\Lambda S\rangle = S_0 \Lambda\, \langle S\rangle.$$

В общем же случае, расщепляя корреляцию $\langle SS\rangle$ с помощью формулы (2.3.4), получаем операторное выражение

$$\langle S\Lambda S\rangle = G\left[iB\frac{\delta}{\delta\eta}\right]\Lambda G[\eta]\,|_{\eta=0},$$

эквивалентное, по своей сути, введению вершинной функции.

Отметим теперь, что в случае гауссовского поля $f(\boldsymbol{r})$ знание функционала $G[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \eta]$ эквивалентно знанию функционала $\Phi[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', v] = \langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \exp\{i\int d\widetilde{\boldsymbol{r}}\, f(\widetilde{\boldsymbol{r}})\, v(\widetilde{\boldsymbol{r}})\}\rangle$, описывающего все статистические корреляции функции $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ с полем $f(\boldsymbol{r})$. В самом деле, согласно формуле (2.3.9) можно записать функционал Φ в виде

$$\Phi[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', v] = \left\langle \exp\left\{i\int d\widetilde{\boldsymbol{r}}\, f(\widetilde{\boldsymbol{r}})\, v(\widetilde{\boldsymbol{r}})\right\}\right\rangle \times$$
$$\times \left\langle S\left[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; f(\widetilde{\boldsymbol{r}}) + i\int d\boldsymbol{r}_1 B(\widetilde{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}_1)\, v(\boldsymbol{r}_1)\right]\right\rangle,$$

откуда получаем равенство

$$\Phi[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; v] = \left\langle \exp\left\{i\int d\widetilde{\boldsymbol{r}}\, f(\widetilde{\boldsymbol{r}})\, v(\widetilde{\boldsymbol{r}})\right\}\right\rangle \times$$
$$\times G\left[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; i\int d\boldsymbol{r}_1 B(\widetilde{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}_1)\, v(\boldsymbol{r}_1)\right].$$

Остановимся теперь для полноты картины на так называемом методе перенормировки. Дело в том, что даже при известной массовой функции уравнение Дайсона (4.13) представляет собой сложное интегральное уравнение, решить которое в аналитическом виде удается далеко не всегда. В то же время уравнение Дайсона с упрощенной массовой функцией может быть в ряде случаев легко решено. Метод перенормировки заключается в том, что записывают уравнение Дайсона в виде интегрального уравнения, в которое вместо функции S_0 входит решение упрощенной задачи.

Обозначим решение уравнения Дайсона (4.13) с упрощенной массовой функцией $\widetilde{Q}$ через $\widetilde{S}$. Тогда функция $\widetilde{S}$ будет удовлетворять уравнению

$$\widetilde{S} = S_0 + S_0\widetilde{Q}\widetilde{S}. \tag{4.13'}$$

В силу того, что уравнение (4.13′) является линейным по $\tilde{S}$, его, очевидно, можно переписать также в виде

$$\tilde{S} = S_0 + \tilde{S}\tilde{Q}S_0 = (1 + \tilde{S}\tilde{Q})S_0, \tag{4.17}$$

где через 1 обозначен единичный оператор.

Для исключения функции S_0 из уравнения Дайсона (4.13) подействуем на него оператором $(1 + \tilde{S}\tilde{Q})$. Тогда с учетом равенства (4.17) получаем уравнение

$$\langle S\rangle = \tilde{S} + \tilde{S}\{Q - \tilde{Q}\}\langle S\rangle. \tag{4.13″}$$

Уравнение (4.13″) можно теперь решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию $\tilde{S}$.

При $\tilde{Q} = 0$ функция $\tilde{S} = S_0$ и мы возвращаемся к уравнению Дайсона (4.13). Приведенный выше вывод уравнения (4.13″) справедлив, очевидно, не только для гауссовского поля f, но и для поля f любой другой природы, так как уравнение Дайсона имеет один и тот же вид для любого поля f.

Остановимся теперь на уравнении Дайсона общего вида (4.7). Заметим, что функционал $\Omega[v]$ может быть представлен с помощью ряда Тейлора по v:

$$\Omega[v] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} v^n,$$

где K_n — кумулянтные функции случайного поля $f(\boldsymbol{r})$. Следовательно, массовый функционал (4.8) легко записать в виде

$$Q = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\{\frac{\delta^n}{\delta\eta^n} G\right\} G^{-1}, \tag{4.8′}$$

где вариационные производные по η от функционала G вычисляются по формуле (4.6). Структура уравнения Дайсона в этом случае очень сложна. Обычные пути упрощения этого уравнения совершенно аналогичны случаю гауссовских флуктуаций параметров.

Если считать, что $\Gamma = \Lambda$, то выражение (4.6) принимает вид $\frac{\delta G}{\delta\eta} = G\Lambda G$ и, следовательно,

$$\frac{\delta^n G}{\delta\eta^n} = n!\,(G\Lambda)^n G = \int_0^{\infty} d\lambda\, e^{-\lambda} (G\lambda\Lambda)^n G.$$

При этом мы приходим к обобщенному уравнению Крейчнана:

$$\langle S\rangle = S_0 + S_0 Q_{\text{кр}} \langle S\rangle,$$

$$Q_{\text{кр}} = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1} \{\langle S\rangle \Lambda\}^n = \Lambda \int_0^{\infty} d\lambda\, e^{-\lambda} \Omega[\langle S\rangle \lambda\Lambda]. \tag{4.14′}$$

Если же в (4.14′) заменить $\langle S\rangle$ в $Q_{\text{кр}}$ на S_0, то получаем обобщенное уравнение Бурре:

$$\langle S\rangle = S_0 + S_0 Q_{\text{б}} \langle S\rangle,$$
$$Q_{\text{б}} = \Lambda \int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda}\Omega\, [S_0 \lambda \Lambda], \tag{4.15′}$$

которое совпадает с так называемым «одногрупповым приближением уравнения Дайсона», построенным в работе [61].

Рассмотрим теперь простейшее одномерное интегральное уравнение, следуя работе [23]:

$$S(t, t') = g(t - t')\,\theta(t - t') + \Lambda \int_0^t d\tau\, g(t - \tau)\, z(\tau)\, S(\tau, t'), \tag{4.18}$$

где $z(t)$ — случайная функция времени, $g(t - t')$ — детерминированная функция, Λ — постоянный параметр, а $\theta(t)$ — ступенчатая функция. Итерируя это уравнение, замечаем, что его решение $S(t, t')$ зависит от случайной функции $z(\tau)$ лишь при $t' \leqslant \tau \leqslant t$, т. е. выполняется условие причинности

$$\frac{\delta S(t, t')}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < t', \quad \tau > t, \tag{4.19}$$

причем $S(t, t') \sim \theta(t - t')$. Усредним уравнение (4.18) по ансамблю реализаций функции $z(t)$. Для стационарного процесса $z(t)$ $\langle S(t, t')\rangle = \langle S(t - t')\rangle$ и, следовательно,

$$\langle S(t - t')\rangle = g(t - t')\,\theta(t - t') + \int_0^t d\tau\, g(t - \tau) \int_0^\tau d\tau' Q(\tau - \tau')\langle S(\tau' - t')\rangle, \tag{4.20}$$

где $Q(t) \sim \theta(t)$ — массовая функция, определяемая с помощью равенства

$$\Lambda \langle z(t)\, S(t, t')\rangle = \int_0^t d\tau\, Q(t - \tau)\langle S(\tau - t')\rangle. \tag{4.21}$$

Выполним в (4.20) преобразование Лапласа по переменной $t - t'$. В результате получаем

$$\langle S\rangle_p = g(p) + g(p)\, Q(p)\, \langle S\rangle_p, \tag{4.20′}$$

где

$$\Lambda \langle z(t)\, S(t, t')\rangle_p = Q(p)\, \langle S\rangle_p. \tag{4.21′}$$

(Если интегральное уравнение (4.18) сводится к дифференциальному

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) S(t, t') = \Lambda z(t)\, S(t, t') + \delta(t - t'),$$

то $g(p) = L^{-1}(p)$.)

Для определения структуры функции $Q(p)$ следует, согласно вышесказанному, рассмотреть вспомогательное уравнение

$$\tilde{S}(t,t') = g(t-t')\theta(t-t') + \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\eta(\tau)\tilde{S}(\tau,t') + \\ + \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)z(\tau)\tilde{S}(\tau,t'), \qquad (4.18')$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная детерминированная функция. Если усреднить уравнение (4.18′) и обозначить его решение через $G[t, t'; \eta(\tau)]$, то вершинная функция $\Gamma(t, t_1, t') = \Gamma(t - t_1, t_1 - t')$ определится равенством

$$\Gamma(t, t_1, t') = -\frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} G^{-1}[t, t'; \eta]\,|_{\eta=0}.$$

Вариационная же производная $\delta G/\delta\eta$ при $\eta = 0$ связана с вершинной функцией Γ и средней функцией Грина соотношением (4.6):

$$\left.\frac{\delta G[t, t', \eta]}{\delta\eta(t_1)}\right|_{\eta=0} \equiv \frac{\delta G}{\delta\eta}(t - t_1, t_1 - t') = \\ = \iint d\tau_1\, d\tau_2 \langle S(t-\tau_1)\rangle\, \Gamma(\tau_1 - t_1, t_1 - \tau_2)\langle S(\tau_2 - t')\rangle, \qquad (4.22)$$

где область интегрирования определяется условием положительности всех аргументов. Выполняя в (4.22) преобразование Лапласа по переменным $t - t_1$ и $t_1 - t'$, получаем равенство

$$\frac{\delta G}{\delta\eta}(p, q) = \langle S\rangle_p\, \Gamma(p, q)\langle S\rangle_q, \qquad (4.23)$$

позволяющее найти преобразование Лапласа от вершинной функции. Массовая функция при этом связана с характеристическим функционалом процесса $z(t)$. Величину $\delta G/\delta\eta$, стоящую в левой части равенства (4.23), можно получить, варьируя уравнение (4.18′) по $\eta(t_1)$, полагая затем $\eta = 0$ и усредняя полученное уравнение. Если удается выполнить усреднение в уравнении (4.18′), то величина $\delta G/\delta\eta$ определяется при варьировании его по η.

Перейдем теперь к реализации описанной схемы для различных процессов $z(t)$.

Пусть $z(t)$ — телеграфный процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t)\, z(t')\rangle = \langle z^2\rangle \exp\{-\alpha\,|\,t - t'\,|\}. \qquad (4.24)$$

Усредним уравнение (4.18′), в результате получаем

$$G(t, t') = g(t-t')\theta(t-t') + \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\eta(\tau)G(\tau, t') + \\ + \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\langle z(\tau)\tilde{S}(\tau, t')\rangle. \qquad (4.25)$$

Уравнение (4.25) не замкнуто, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle z(\tau)\tilde{S}(\tau, t')\rangle$. Чтобы получить уравнение для этой функции, умножим (4.18′) на $z(t)$ и усредним:

$$\langle z(t)\tilde{S}(t,t')\rangle = \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\eta(\tau)\langle z(t)\tilde{S}(\tau,t)\rangle + \\ + \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\langle z(t)z(\tau)\tilde{S}(\tau,t)\rangle. \qquad (4.26)$$

Учитывая теперь формулу (2.4.10)

$$\langle z(t)\, R_{t'}[z(\tau)]\rangle = \exp\{-\alpha(t-t')\}\langle z(t')\, R_{t'}[z(\tau)]\rangle,$$

справедливую для произвольного функционала $R_{t'}[z(\tau)]$ такого, что $t \geqslant t'$, получаем уравнение ($z^2(t) \equiv \langle z^2\rangle$)

$$\langle z(t)\tilde{S}(t,t')\rangle = \Lambda\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\eta(\tau)\exp\{-\alpha(t-\tau)\}\langle z(\tau)\tilde{S}(\tau,t')\rangle + \\ + \Lambda\langle z^2\rangle\int_0^t d\tau\, g(t-\tau)\exp\{-\alpha(t-\tau)\}\, G(\tau,t'). \qquad (4.27)$$

Система уравнений (4.25), (4.27) уже замкнута. Полагая в ней $\eta = 0$ и выполняя преобразование Лапласа по переменной $(t-t')$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \langle S\rangle_p &= g(p) + \Lambda g(p)\langle zS\rangle_p, \\ \langle zS\rangle_p &= \Lambda\langle z^2\rangle g(p+\alpha)\langle S\rangle_p, \end{aligned} \qquad (4.28)$$

решение которой таково:

$$\begin{aligned} \langle S\rangle_p &= \frac{g(p)}{1-\Lambda^2\langle z^2\rangle g(p)g(p+\alpha)}, \\ \langle zS\rangle_p &= \frac{\Lambda\langle z^2\rangle g(p)g(p+\alpha)}{1-\Lambda^2\langle z^2\rangle g(p)g(p+\alpha)}. \end{aligned} \qquad (4.29)$$

При этом, согласно (4.21′), массовая функция $Q(p)$ равна

$$Q(p) = \Lambda^2\langle z^2\rangle g(p+\alpha). \qquad (4.30)$$

Для нахождения вершинной функции проварьируем (4.25), (4.27) по $\eta(t_1)$, положим $\eta = 0$ и выполним преобразование Лапласа по переменным $(t-t_1)$ и (t_1-t'). В результате получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta\eta}(p,q) &= \Lambda g(p)\langle S\rangle_q + \Lambda g(p)\left\langle z\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\eta}\right\rangle_{p,q}, \\ \left\langle z\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\eta}\right\rangle_{p,q} &= \Lambda g(p+\alpha)\langle zS\rangle_q + \Lambda\langle z^2\rangle g(p+\alpha)\frac{\delta G}{\delta\eta}(p,q), \end{aligned} \qquad (4.31)$$

решение которой с учетом (4.28) имеет вид

$$\frac{\delta G}{\delta\eta}(p,q) = \Lambda\langle S\rangle_p\{1+\Lambda^2\langle z^2\rangle g(p+\alpha)g(q+\alpha)\}\langle S\rangle_q. \qquad (4.32)$$

Сравнивая (4.32) с формулой (4.23), получаем для вершинной функции выражение

$$\Gamma(p, q) = \Lambda \{1 + \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p + \alpha) g(q + \alpha)\}. \qquad (4.33)$$

Пусть теперь $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс с корреляционной функцией (4.24). Усредняя (4.18′), получаем уравнение (4.25). Далее, согласно третьему параграфу данной главы, следует написать уравнение для функции $\langle F_\lambda(t) \tilde{S}(t, t') \rangle$, где

$$F_\lambda(t) = \frac{1}{1 + \lambda z(t)} - C_0(\lambda), \quad C_k(\lambda) = \left\langle \frac{a^k}{1 + \lambda a} \right\rangle_a \quad (\langle F_\lambda(t) \rangle = 0),$$

а λ — произвольный параметр. Умножая (4.18′) на $F_\lambda(t)$ и усредняя, находим

$$\langle F_\lambda(t) \tilde{S}(t, t') \rangle =$$

$$= \Lambda \int_0^t d\tau\, g(t - \tau) \exp\{-\alpha(t - \tau)\} \eta(\tau) \langle F_\lambda(\tau) \tilde{S}(\tau, t') \rangle -$$

$$- \Lambda \int_0^t d\tau\, g(t - \tau) \exp\{-\alpha(t - \tau)\} \left\{ \frac{1}{\lambda} \langle F_\lambda(\tau) \tilde{S}(\tau, t') - \right.$$

$$\left. - C_1(\lambda) G(\tau, t') + C_0(\lambda) \langle z(\tau) \tilde{S}(\tau, t') \rangle \right\}. \qquad (4.34)$$

При выводе уравнения (4.34) мы воспользовались равенством (2.5.20)

$$\langle F_\lambda(t) R_{t'}[z(\tau)] \rangle = \exp\{-\alpha(t - t')\} \langle F_\lambda(t') R_{t'}[z(\tau)] \rangle \quad (t \geqslant t')$$

и тождеством

$$z(t) F_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda} F_\lambda(t) + C_1(\lambda) - C_0(\lambda) z(t).$$

Для нахождения массовой функции положим в (4.25) и (4.34) $\eta = 0$ и выполним преобразование Лапласа. В результате получим систему уравнений

$$\langle S \rangle_p = g(p) + \Lambda g(p) \langle zS \rangle_p,$$

$$\langle F_\lambda(t) S(t, t') \rangle_p \{1 + \Lambda g(p + \alpha)/\lambda\} =$$

$$= \Lambda g(p + \alpha) \{C_1(\lambda) \langle S \rangle_p - C_0(\lambda) \langle z(t) S(t, t') \rangle_p\},$$

справедливую при произвольном значении параметра λ. Полагая

$$\lambda = \lambda_p = -\Lambda g(p + \alpha), \qquad (4.35)$$

получаем алгебраическую связь между $\langle zS \rangle_p$ и $\langle S \rangle_p$:

$$\langle z(t) S(t, t') \rangle_p = \langle S \rangle_p C_1(\lambda_p)/C_0(\lambda_p), \qquad (4.36)$$

и следовательно,

$$\langle S \rangle_p = \frac{g(p)}{1 - \Lambda g(p) C_1(\lambda_p)/C_0(\lambda_p)}. \qquad (4.37)$$

С учетом (4.36) функция $\langle F_\lambda(t)\, S(t, t')\rangle_p$ для произвольного значения λ имеет вид

$$\langle F_\lambda(t)\, S(t, t')\rangle_p = -\frac{\lambda_p \langle S\rangle_p\, [C_1(\lambda)\, C_0(\lambda_p) - C_0(\lambda)\, C_1(\lambda_p)]}{(1-\lambda_p/\lambda)\, C_0(\lambda_p)}. \quad (4.38)$$

Массовая функция, как следует из (4.36), в этом случае равна

$$Q(p) = \Lambda C_1(\lambda_p)/C_0(\lambda_p). \quad (4.39)$$

Для нахождения вершинной функции проварьируем уравнения (4.25), (4.34) по $\eta(t_1)$, положим $\eta = 0$ и выполним преобразование Лапласа. В результате имеем систему уравнений

$$\frac{\delta G}{\delta\eta}(p, q) = \Lambda g(p)\langle S\rangle_q + \Lambda g(p)\left\langle z\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\eta}\right\rangle_{p,q},$$

$$\left\langle F_\lambda \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\eta}\right\rangle_{p,q}\left[1 + \frac{\Lambda}{\lambda} g(p+\alpha)\right] = \Lambda g(p+\alpha)\langle F_\lambda S\rangle_q +$$
$$+ \Lambda g(p+\alpha)\left\{C_1(\lambda)\frac{\delta G}{\delta\eta}(p, q) - C_0(\lambda)\left\langle z\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\eta}\right\rangle_{p,q}\right\}. \quad (4.40)$$

Полагая в (4.40) $\lambda = \lambda_p$, получаем алгебраическую систему уравнений для $\delta G/\delta\eta$ и $\langle z\delta\tilde{S}/\delta\eta\rangle$, решение которой с учетом (4.37), (4.38) таково:

$$\frac{\delta G}{\delta\eta}(p, q) =$$
$$= \Lambda\langle S\rangle_p\left\{1 + \Lambda\frac{g(p+\alpha)\, g(q+\alpha)}{g(p+\alpha) - g(q+\alpha)}\left[\frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)} - \frac{C_1(\lambda_q)}{C_0(\lambda_q)}\right]\right\}\langle S\rangle_q; \quad (4.41)$$

следовательно, вершинная функция равна

$$\Gamma(p, q) = \Lambda\left\{1 + \Lambda\frac{g(p+\alpha)\, g(q+\alpha)}{g(p+\alpha) - g(q+\alpha)}\left[\frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)} - \frac{C_1(\lambda_q)}{C_0(\lambda_q)}\right]\right\}. \quad (4.42)$$

Если распределение вероятностей для величины a имеет вид $p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$, то $C_1(\lambda)/C_0(\lambda) = -\lambda a_0^2$ и мы возвращаемся к случаю телеграфного процесса с параметром $\langle z^2\rangle = a_0^2$. Если же a — непрерывная случайная величина ($\langle a\rangle = 0$) и дисперсия ее достаточно мала, то $C_0(\lambda) \approx 1$, $C_1(\lambda) \approx -\lambda\langle a^2\rangle$ и для вершинной функции получается равенство

$$\Gamma(p, q) = \Lambda\{1 + \Lambda^2\langle a^2\rangle\, g(p+\alpha)\, g(q+\alpha)\}. \quad (4.43)$$

Однако выражение (4.43) справедливо только при выполнении очевидных неравенств

$$|\lambda^2|\langle a^2\rangle \ll 1 \qquad (\lambda = \lambda_p, \lambda_q). \quad (4.44)$$

Пусть теперь $z(t)$ — гауссовский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t)\, z(t')\rangle = \sigma^2 \exp\{-\alpha|t-t'|\}. \tag{4.24'}$$

Как показано в § 4 гл. 1, его можно получить предельным переходом $N \to \infty$ из процесса

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t), \tag{4.45}$$

где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы, у которых $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$. Итак, рассмотрим уравнение (4.18′), в котором $z(t) = \xi_N(t)$, и введем функции

$$G_l(t, t') = \langle z_1(t) \ldots z_l(t)\, \hat{S}(t, t')\rangle \quad (G_0(t, t') = G(t, t')). \tag{4.46}$$

Умножая (4.18′) на $z_1(t) \ldots z_l(t)$, усредняя и используя формулу (2.4.10), можно найти рекуррентное уравнение ($l = 0, 1, \ldots, N$)

$$\begin{aligned} G_l(t, t') = {} & g(t-t')\,\theta(t-t')\,\delta_{l,0} + \\ & + \Lambda \int_0^t d\tau\, g(t-\tau) \exp\{-\alpha l(t-\tau)\}\, \eta(\tau)\, G_l(\tau, t') + \\ & + \Lambda \int_0^t d\tau\, g(t-\tau) \exp\{-\alpha l(t-\tau)\} \times \\ & \times \{l\langle z^2\rangle G_{l-1}(\tau, t') + (N-l)\, G_{l+1}(\tau, t')\}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Полагая $\eta = 0$ и выполняя преобразование Лапласа по $(t - t')$, получаем алгебраическое рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} G_l(p) = g_0(p)\,\delta_{l,0} + \Lambda g_l(p)\, \{l\langle z^2\rangle G_{l-1}(p) + \\ + (N-l)\, G_{l+1}(p)\}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

где $g_l(p) = g(p + \alpha l)$.

Решение уравнения (4.48) имеет вид конечного отрезка цепной дроби

$$\begin{gathered} G_l(p) = \Lambda g_l(p)\, l\langle z^2\rangle K_l(p)\, G_{l-1}(p), \qquad l = 1, \ldots, N, \\ G_0(p) = g_0(p)\, K_0(p), \end{gathered} \tag{4.49}$$

где

$$\begin{gathered} K_l(p) = \frac{1}{1 - \gamma_l K_{l+1}(p)}, \\ \gamma_l = \Lambda^2 \langle z^2\rangle (l+1)(N-l)\, g_l(p)\, g_{l+1}(p). \end{gathered} \tag{4.50}$$

Следовательно,

$$G_l(p) = \Lambda^l \langle z^2\rangle^l l!\, \{g_l(p)\, K_l(p)\}!\, g_0(p)\, K_0(p), \tag{4.51}$$

где через $\{f_l\}!$ обозначено произведение $f_1 \ldots f_l$. Учитывая, что $\langle \xi_N(t)\, S(t, t')\rangle_p = NG_1(p)$, находим выражение для массовой функции

$$Q_N(p) = \Lambda^2 N \langle z^2\rangle g_1(p)\, K_1(p). \tag{4.52}$$

Полагая $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \to \infty$, получаем массовую функцию для гауссовского марковского процесса

$$Q(p) = \Lambda^2\sigma^2 g_1(p)\, K_1(p), \tag{4.52'}$$

где $K_1(p)$ — бесконечная цепная дробь (4.50) с параметром

$$\tilde{\gamma}_l = \Lambda^2\sigma^2 (l+1)\, g_l(p)\, g_{l+1}(p). \tag{4.50'}$$

Перейдем теперь к вычислению вершинной функции. Варьируя (4.47) по $\eta(t_1)$, полагая $\eta = 0$ и выполняя преобразование Лапласа по $(t - t_1)$ и $(t_1 - t')$, получаем рекуррентное соотношение

$$\frac{\delta G_l}{\delta\eta}(p, q) = \\ = \Lambda g_l(p) G_l(q) + \Lambda g_l(p)\left\{l\langle z^2\rangle \frac{\delta G_{l-1}}{\delta\eta}(p, q) + (N-l)\frac{\delta G_{l+1}}{\delta\eta}(p, q)\right\}. \tag{4.53}$$

Решение уравнения (4.53) можно представить в виде

$$\frac{\delta G_l}{\delta\eta}(p, q) = \sum_{i=0}^{N} \frac{\delta G_l^{(i)}}{\delta\eta}(p, q), \tag{4.54}$$

где величина $\delta G_l^{(i)}/\delta\eta$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta G_l^{(i)}}{\delta\eta}(p, q) = \\ = \Lambda g_l(p) G_l(q)\,\delta_{l,i} + \Lambda g_l(p)\left\{l\langle z^2\rangle \frac{\delta G_{l-1}^{(i)}}{\delta\eta}(p, q) + (N-l)\frac{\delta G_{l+1}^{(i)}}{\delta\eta}(p, q)\right\}.$$

Решение последнего уравнения представляет собой конечную цепную дробь

$$\frac{\delta G_0^{(i)}}{\delta\eta}(p, q) = \\ = \Lambda^{i+1}\{g_i(p)\}!\,\{L_{i-1}(p)\}!\,\frac{N!}{(N-i)!}\,\frac{g_0(p)\, G_i(q)}{1 - \gamma_{i-1}(p)\, L_{i-1}(p) - \gamma_i(p)\, K_{i+1}(p)}, \tag{4.55}$$

где

$$L_l(p) = [1 - \gamma_{l-1}(p)\, L_{l-1}(p)]^{-1} \qquad (L_0(p) = 1), \tag{4.56}$$

а $K_l(p)$ описывается формулой (4.50). Используя (4.56) и (4.50), легко показать, что функции $K_l(p)$ и $L_l(p)$ связаны между собой равенством

$$L_{i-1}\frac{1 - \gamma_{i-2}L_{i-2} - \gamma_{i-1}K_i}{1 - \gamma_{i-1}L_{i-1} - \gamma_i K_{i+1}} = K_i. \tag{4.57}$$

Это позволяет исключить функции $L_i(p)$ и переписать (4.55) следующим образом:

$$\frac{\delta G_0^{(i)}}{\delta\eta}(p, q) = \Lambda^{i+1}\frac{N!}{(N-i)!}\{g_i(p)\, K_i(p)\}!\, g_0(p)\, K_0(p)\, G_i(q),$$

или, с учетом равенства (4.51), в симметричном относительно p и q виде:

$$\frac{\delta G_0^{(i)}}{\delta\eta}(p, q) = \\ = \Lambda^{2i+1}\langle z^2\rangle^i \frac{N!i!}{(N-i)!} G_0(p) G_0(q) \{g_i(p) g_i(q) K_i(p) K_i(q)\}!. \quad (4.58)$$

Следовательно, для величины $\delta G_0(p, q)/\delta\eta$ можно, согласно (4.23), написать выражение

$$\frac{\delta G_0}{\delta\eta}(p, q) = G_0(p)\Gamma_N(p, q) G_0(q),$$

где вершинная функция $\Gamma_N(p, q)$ определяется формулой

$$\Gamma_N(p, q) = \\ = \Lambda\left[1 + \sum_{i=1}^{N} \Lambda^{2i}\langle z^2\rangle^i \frac{N!i!}{(N-i)!}\{g_i(p) g_i(q) K_i(p) K_i(q)\}!\right]. \quad (4.59)$$

Полагая в (4.59) $N = 1$, мы возвращаемся к случаю одного телеграфного процесса, и формула (4.59) переходит в (4.33). Полагая теперь $\langle z^2\rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \to \infty$, получаем вершинную функцию для гауссовского марковского процесса в виде бесконечного ряда

$$\Gamma(p, q) = \Lambda\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} i!\,\Lambda^{2i}\sigma^{2i}\{g_i(p) g_i(q) K_i(p) K_i(q)\}!\right], \quad (4.59')$$

содержащего бесконечные цепные дроби (4.50) с параметром (4.50′). Два первых члена ряда (4.59′) таковы:

$$\Gamma(p, q) = \Lambda\{1 + \Lambda^2\sigma^2 g_1(p) g_1(q) K_1(p) K_1(q) + \ldots\}.$$

Если теперь $z(t)$ — квадрат гауссовского марковского процесса, то, используя конечномерную аппроксимацию (4.45), получаем

$$z_N(t) = N\langle z^2\rangle + \sum_{i\neq j}^{N} z_i(t) z_j(t). \quad (4.60)$$

В этом случае, как показано в данной главе, следует вместо (4.46) ввести новые функции

$$G_{2l}(t, t') = \langle z_1(t) \ldots z_{2l}(t)\, \hat{S}\ (t, t')\rangle\ (G_0 = G(t, t')), \quad (4.61)$$

где $l = 0, 1, \ldots, [N/2]$. (Отметим, что функции с нечетным числом z_i тождественно равны нулю.) Для них имеет место рекуррентное соотношение «треугольного» типа, аналогичное уравнению (4.47). Следовательно, как массовая, так и вершинная функции будут описываться конечными отрезками цепных дробей типа (4.52), (4.59). Полагая $N\langle z^2\rangle \to \sigma^2$ и $N \to \infty$, получаем соответствующие

выражения уже в виде бесконечных цепных дробей, аналогичных формулам (4.52′), (4.59′). Эти формулы имеют одинаковую структуру; поэтому те выводы, которые можно сделать для гауссовского процесса, будут справедливы и для квадрата гауссовского процесса.

При вычислении вершинной функции в случае телеграфного и гауссовского процессов мы следовали «в лоб» методике, справедливой для произвольных интегральных уравнений. Это было сделано с иллюстративной целью. Однако для уравнения (4.18) можно сразу написать выражение для вершинной функции, зная лишь решение уравнения Дайсона. В самом деле, согласно равенствам 4.22) и (4.16) для уравнения (4.18) имеет место соотношение

$$\Lambda \langle S(t, t_0) S(t_0, t')\rangle = \\ = \iint d\tau_1 d\tau_2 \langle S(t-\tau_1)\rangle \Gamma(\tau_1 - t_0, t_0 - \tau_2) \langle S(\tau_2 - t')\rangle. \quad (4.62)$$

Пусть теперь случайный процесс $z(t)$ — функция от процесса $\xi_N(t)$, определяемого формулой (4.45). Тогда для расщепления корреляции в левой части (4.62) можно воспользоваться формулой (2.4.5), которая в данном случае принимает вид

$$\langle S(t, t_0) S(t_0, t')\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{1}{\langle z^2\rangle^k} \langle z_1(t_0) \ldots z_k(t_0) S(t, t_0)\rangle \langle z_1(t_0) \ldots z_k(t_0) S(t_0, t')\rangle. \quad (4.63)$$

Выполняя преобразование Лапласа по переменным $(t - t_0)$ и $(t_0 - t')$, получаем равенство

$$\langle SS\rangle_{p,q} = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{1}{\langle z^2\rangle^k} G_k(p) G_k(q), \quad (4.64)$$

где функции G_k описываются формулой (4.46). Следовательно, для вершинной функции $\Gamma(p, q)$ получаем выражение

$$\Gamma(p, q) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{1}{\langle z^2\rangle^k} \frac{G_k(p) G_k(q)}{G_0(p) G_0(q)}. \quad (4.65)$$

Так, если в (4.18) $z(t) = \xi_N(t)$, то функции $G_k(p)$ описываются формулой (4.51) и мы приходим к формуле (4.59). Если же $z(t) = \xi_N^2(t)$, то в сумме (4.65) остаются только четные индексы k и функции $G_{2k}(p)$ определяются, как говорилось выше, решением уравнения Дайсона. Переход к гауссовскому процессу осуществляется предельным переходом $N \to \infty$, $N\langle z^2\rangle \to \sigma^2$.

Остановимся теперь на приближениях, используемых обычно при анализе стохастических уравнений.

Прежде всего рассмотрим гауссовский процесс. В этом случае массовая функция связана с вершинной функцией формулой

$$Q(t-t') = \\ = \Lambda\sigma^2 \iint d\tau_1 d\tau_2 \langle S(t-\tau_1)\rangle \Gamma(\tau_1-\tau, \tau-t') \exp\{-\alpha(t-\tau)\}, \quad (4.66)$$

где область интегрирования определяется условием положительности всех аргументов. Выполняя в (4.66) преобразование Лапласа по $(t-t')$, получаем равенство

$$Q(p) = \Lambda\sigma^2 \langle S\rangle_{p+\alpha} \Gamma(p+\alpha, p). \quad (4.67)$$

Приближение Крейчнана соответствует замене в формуле (4.67) $\Gamma(p+\alpha, p)$ на Λ, а приближение Бурре — еще и замене $\langle S\rangle_{p+\alpha}$ на $g_1(p)$.

Решение уравнения Дайсона (4.20′) определяется в первую очередь полюсами или другими существенными особенностями функции $g(p)$. Обозначим особую точку для нее через p_0. Тогда можно пренебречь всеми членами ряда (4.59′), кроме первого, если выполнено условие

$$\Lambda^2\sigma^2 \mid g_1(p_0)\mid^2 \mid K_1(p_0)\mid^2 \ll 1. \quad (4.68)$$

Поскольку функции $K_l(p_0)$ сами содержат параметр $\beta^2 = \Lambda^2\sigma^2 \mid g_1(p_0)\mid^2$, при $\beta^2 \ll 1 \mid K_1(p_0)\mid \sim 1$.

Таким образом, если выполняется условие

$$\beta^2 = \Lambda^2\sigma^2 \mid g_1(p_0)\mid^2 \ll 1, \quad (4.68')$$

то вершинную функцию $\Gamma(p, q)$ можно заменить величиной Λ. Однако, как было показано выше функция $\langle S\rangle_{p+\alpha}$ также содержит малый параметр. Поэтому в первом приближении по указанному параметру

$$Q(p) = \Lambda^2\sigma^2 g_1(p), \quad (4.69)$$

что соответствует приближению Бурре. Этот результат можно получить также с помощью метода ренормализационной группы [62, 63]. Таким образом, приближение Крейчнана для данной задачи не имеет места, в то время как приближение Бурре является первым шагом в асимптотическом разложении решения по указанному малому параметру. Отметим, что аппроксимация бесконечной цепной дроби в (4.52′) конечным отрезком имеет графическую интерпретацию и соответствует суммированию определенных диаграмм из общего ряда теории возмущений для $Q(p)$. Такая интерпретация дана в работах [64].

Массовая функция (4.69) в приближении Бурре в точности совпадает с массовой функцией для телеграфного процесса (4.30), для которого (так же как и для обобщенного телеграфного процесса) отсутствует прозрачная графическая интерпретация. Эта функция не содержит параметра β^2, тогда как вершинная функция для телеграфного процесса (4.33) его содержит. Поэтому при вы-

полнении условия (4.68′) $\Gamma \sim \Lambda$, что соответствует уже обобщенному приближению Крейчнана. Аналогичным образом обстоит дело и в случае обобщенного телеграфного процесса. В этом случае условия (4.44) и (4.68′) совпадают и можно пренебречь вторым слагаемым в правой части (4.43). Массовая же функция (4.39) при этом также совпадает с массовой функцией телеграфного процесса.

Таким образом, при выполнении условия (4.68′) для всех рассматриваемых процессов вершинная функция $\Gamma \sim \Lambda$, а массовая функция совпадает с той, которая соответствует телеграфному процессу.

Выше мы рассмотрели вывод уравнения для средней функции Грина (уравнение Дайсона). Аналогичным образом можно получить и уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1') = \langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') S^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1')\rangle.$$

Для этого умножим уравнение (4.1) на $S^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1')$ и усредним по ансамблю реализаций случайного поля $f(\boldsymbol{r})$. В результате получаем уравнение

$$\Gamma = S_0 \langle S^*\rangle + S_0 \Lambda \langle f S S^*\rangle. \tag{4.70}$$

Учитывая теперь уравнение Дайсона (4.7′)

$$\langle S\rangle = \{1 + \langle S\rangle Q\} S_0,$$

подействуем на (4.70) оператором $\{1 + \langle S\rangle Q\}$. В результате получаем уравнение

$$\Gamma = \langle S\rangle \langle S^*\rangle + \langle S\rangle \{\Lambda \langle f S S^*\rangle - Q\Gamma\}. \tag{4.71}$$

Уравнение (4.71) можно переписать в виде уравнения

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1') = \langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rangle \langle S^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1')\rangle + \\ + \int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_2' d\boldsymbol{r}_3 d\boldsymbol{r}_3' \langle S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2)\rangle \langle S^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2')\rangle \times \\ \times K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_3') \Gamma(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r}_3', \boldsymbol{r}_1'), \tag{4.72}$$

которое называется уравнением Бете — Солпитера. Функция $K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_3')$ называется ядром оператора интенсивности. Простейшее приближение для этого уравнения, так называемое «лестничное» приближение, соответствует функции K вида

$$K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_3') = \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3)\, \delta(\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_3')\, B_f(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2'), \tag{4.73}$$

где $B_f(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2')$ — корреляционная функция поля $f(\boldsymbol{r})$.

Рассмотрим более подробно простейшее интегральное уравнение (4.18), удовлетворяющее условию динамической причинности, где $z(t)$ — гауссовский δ-коррелированный случайный процесс, т. е. гауссовский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t)\, z(t')\rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t').$$

Усредняя уравнение (4.18), получаем равенство

$$\langle S(t,\ t')\rangle = g(t-t')\,\theta(t-t') + \Lambda\sigma^2 \int_0^t d\tau\, g(t-\tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} S(\tau,\ t') \right\rangle, \tag{4.74}$$

которое с учетом равенства

$$\frac{\delta S(t,\ t')}{\delta z(t)} = \Lambda g(0)\, S(t,\ t') \tag{4.75}$$

принимает форму уравнения Дайсона с массовой функцией

$$Q(\tau,\ \tau_1) = \sigma^2\Lambda^2 g(0)\,\delta(\tau-\tau_1). \tag{4.76}$$

Уравнение для корреляционной функции Γ (4.71) в данном случае принимает форму

$$\Gamma(t,\ t';\ t_1,\ t_1') = \langle S(t,\ t')\rangle \langle S^*(t_1,\ t_1')\rangle + \\ + \int_0^t d\tau \langle S(t-\tau)\rangle \left\{ \Lambda\sigma^2 \left[\left\langle \frac{\delta S(\tau,\ t')}{\delta z(\tau)} S^*(t_1,\ t'_1) \right\rangle + \right.\right. \\ \left.\left. + 2\left\langle S(\tau,\ t') \frac{\delta S^*(t_1,\ t_1')}{\delta z(\tau)} \right\rangle \right] - \Lambda^2\sigma^2 g(0)\, \Gamma(\tau,\ t';\ t_1,\ t_1') \right\}. \tag{4.77}$$

Учитывая теперь формулы (4.75) и (4.16), последняя из которых в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta S^*(t_1,\ t_1')}{\delta z(\tau)} = \Lambda^* S^*(t_1,\ \tau)\, S^*(\tau,\ t_1'),$$

уравнение (4.77) можно переписать в виде уравнения

$$\Gamma(t,\ t';\ t_1,\ t_1') = \langle S(t,\ t')\rangle \langle S^*(t_1,\ t_1')\rangle + \\ + 2|\Lambda|^2\sigma^2 \int_0^t d\tau \langle S(t,\ \tau)\rangle \langle S^*(t_1,\ \tau)\, S(\tau,\ t')\, S^*(\tau,\ t_1')\rangle. \tag{4.78}$$

Теперь учтем то обстоятельство, что функция $S^*(t_1,\ \tau)$ функционально зависит от случайной функции $z(\tilde\tau)$ при $\tilde\tau \geqslant \tau$, а функции $S(\tau,\ t')$, $S^*(\tau,\ t_1')$ — при $\tilde\tau \leqslant \tau$ и, следовательно, для дельта-коррелированного случайного процесса $z(\tilde\tau)$ статистически независимы. Тогда (4.78) можно переписать в виде замкнутого уравнения

$$\Gamma(t,\ t';\ t_1,\ t_1') = \langle S(t,\ t')\rangle \langle S^*(t_1,\ t_1')\rangle + \\ + 2|\Lambda|^2\sigma^2 \int_0^t d\tau \langle S(t,\ \tau)\rangle \langle S^*(t_1,\ \tau)\rangle\, \Gamma(\tau,\ t';\ \tau,\ t_1')\ (t_1 \geqslant t), \tag{4.79}$$

что соответствует уравнению Бете — Солпитера (4.72) с ядром оператора интенсивности вида

$$K(\tau_1, \tau_1'; \tau_2, \tau_2') = \\ = 2\,|\Lambda|^2\sigma^2\delta(\tau_1 - \tau_1')\,\delta(\tau_2 - \tau_2')\,\delta(\tau_1 - \tau_2). \qquad (4.80)$$

Таким образом, для δ-коррелированного процесса $z(t)$ лестничное приближение (4.73) является точным равенством.

В заключение отметим, что описанный функциональный подход можно применять и к задачам, описываемым нелинейными уравнениями в частных производных с флуктуирующими параметрами. При этом легко написать линейное уравнение в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи и исследовать это уравнение аналогичными методами (см., например, [65]).

Глава 5

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Стохастическое уравнение Лиувилля для уравнений в частных производных

В предыдущих главах мы говорили о том, что для любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, например вида (3.1.1):

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi, t) + f_i(\xi, t), \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{1.1}$$

можно ввести функцию

$$\varphi_t(x) = \delta(\xi(t) - x), \tag{1.2}$$

которая называется плотностью вероятностей для траектории системы (1.1) и удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}[v_i(x, t) + f_i(x, t)]\varphi_t(x). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называется стохастическим уравнением Лиувилля, если поле $f(x, t)$ — случайное поле пространственно-временной точки (x, t).

Иначе дело обстоит в случае, когда система с самого начала описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} = F\left(t, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \ldots\right), \quad q(0, x) = q_0(x). \tag{1.4}$$

В этом случае получить уравнение для функции

$$\varphi_{t,x}(q) = \delta(q(t, x) - q), \tag{1.5}$$

параметрически зависящей от пространственно-временной точки (x, t), не всегда удается. Это можно сделать, если уравнение (1.4) содержит пространственные производные только первого порядка. Прежде чем рассмотреть этот случай, обратимся к частному примеру — линейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} + u(t, x)\frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = \gamma(t, x)\, q(t, x) \tag{1.6}$$

с начальным условием

$$q(0, x) = q_0(x). \tag{1.7}$$

Как хорошо известно, решение линейных уравнений первого порядка в частных производных эквивалентно решению обыкновенных дифференциальных уравнений для его характеристик. Так, уравнение (1.6) описывает перенос полем скорости $u(t, x)$ концентрации примеси $q(t, x)$ и величина, стоящая в левой части (1.6), является полной производной по времени (лагранжевой) от величины $q(t, x)$, т. е.

$$\frac{d}{dt} q(t, x) \equiv \frac{\partial}{\partial t} q(t, x) + u(t, x) \frac{\partial q(t, x)}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Уравнение же для характеристик (1.6) имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = V(t), \quad V(t) = u(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1.9}$$

и описывает движение частицы в поле скоростей $u(t, x)$. Если поле скорости $u(t, x)$ в (1.6), (1.9) является случайным полем пространственно-временной точки (x, t), то статистическая задача (1.6), (1.9) описывает диффузию примеси и частиц в случайном поле скоростей.

Получим уравнение Лиувилля для (1.6), следуя [66]. Дифференцируя (1.5) по t и используя динамическое уравнение (1.6), получаем

$$\frac{\partial \varphi_{t, x}(q)}{\partial t} = u(t, x) \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \delta(q(t, x) - q) - \gamma(t, x) \frac{\partial}{\partial q} q \varphi_{t, x}(q). \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) еще не замкнуто относительно функции $\varphi_{t, x}(q)$ благодаря первому члену в правой части (1.10). Продифференцируем теперь (1.5) по x. В результате получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t, x}(q) = -\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \delta(q(t, x) - q). \tag{1.11}$$

Сравнивая (1.11) с правой частью (1.10), видим, что уравнение (1.10) можно переписать в замкнутом относительно функции $\varphi_{t,x}(q)$ виде:

$$\frac{\partial \varphi_{t, x}(q)}{\partial t} + u(t, x) \frac{\partial \varphi_{t, x}(q)}{\partial x} = -\gamma(t, x) \frac{\partial}{\partial q} q \varphi_{t, x}(q). \tag{1.12}$$

Это и есть уравнение Лиувилля для уравнения (1.6). Левая его часть имеет вид полной производной по времени:

$$\frac{d}{dt} \varphi_{t, x}(q) = -\gamma(t, x) \frac{\partial}{\partial q} q \varphi_{t, x}(q). \tag{1.13}$$

Рассмотрим теперь, следуя [67], случай квазилинейного уравнения,

которое запишем так:

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} + F(t, q)\frac{\partial q}{\partial x} = G(t, q), \quad q(0, x) = q_0(x). \qquad (1.14)$$

Можно рассмотреть также случай, когда F и G в (1.14) зависят от x, однако для простоты выкладок мы этого делать не будем.

Теперь написать замкнутое уравнение для функции (1.5) не удается. Дополним (1.14) уравнением для функции $\nabla q(t, x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_i} + F_i\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_k} \qquad (1.15)$$

с начальным условием $\left.\frac{\partial q}{\partial x_k}\right|_{t=0} = \frac{\partial q_0(x)}{\partial x_k}$.

Введем функцию

$$\varphi_{t,x}(q, v) = \delta(q(t, x) - q)\,\delta(\nabla q(t, x) - v), \qquad (1.16)$$

описывающую совместное распределение вероятностей поля $q(t, x)$ и его пространственного градиента $\nabla q(t, x)$. Дифференцируя (1.16) по времени и используя динамические уравнения (1.14), (1.15), получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial q}\{-F_i(t, q)v_i + G(t, q)\}\varphi -$$

$$-\frac{\partial}{\partial v_k}\left\{-\frac{\partial F_i}{\partial q}v_k v_i - F_i\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial G}{\partial q}v_k\right\}\varphi. \qquad (1.17)$$

Уравнение (1.17) не замкнуто относительно функции $\varphi_{t,x}(q, v)$ из-за наличия в правой части члена

$$F_i(t, q)\frac{\partial}{\partial v_k}\frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x_i \partial x_k}\varphi_{t,x}(q, v). \qquad (1.18)$$

Для $\nabla\varphi_{t,x}(q, v)$ имеем (дифференцируя (1.16) по x)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial q}v_i\varphi - \frac{\partial}{\partial v_k}\frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x_i \partial x_k}\varphi. \qquad (1.19)$$

Следовательно, выражение (1.18) можно переписать в терминах только функции $\varphi_{t,x}(q, v)$, а именно:

$$F_i(t, q)\frac{\partial}{\partial v_k}\frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x_i \partial x_k}\varphi_{t,x}(q, v) \equiv -F_i(t, q)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - F_i(t, q)v_i\frac{\partial \varphi}{\partial q}. \qquad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.17), получаем замкнутое уравнение для функции $\varphi_{t,x}(q, v)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\{v_i F_i(t, q) - G(t, q)\}\varphi +$$

$$+\frac{\partial}{\partial v_k}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial q}v_k v_i - \frac{\partial G}{\partial q}v_k\right\}\varphi - F_i(t, q)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - F_i(t, q)v_i\frac{\partial \varphi}{\partial q}, \qquad (1.21)$$

которое можно переписать в окончательном виде так:

$$\frac{\partial \varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q,\,\boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{F}(t,\,q)\frac{\partial \varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q,\,\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left\{\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial q}\boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial q}G\right\}\varphi_{t,\,\boldsymbol{x}} + \\ + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left\{\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial}{\partial q}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{F}(t,\,q)) - \frac{\partial G}{\partial q}\right]\right\}\varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q,\,\boldsymbol{v}). \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) является уравнением Лиувилля для исходного квазилинейного уравнения (1.14). Начальным условием для (1.22) является условие

$$\varphi_{0,\boldsymbol{x}} = \delta\,(q_0\,(\boldsymbol{x}) - q)\,\delta\,(\nabla q_0\,(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}). \quad (1.23)$$

В частном случае одномерного уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial x} = G(t,\,q), \quad (1.14')$$

описывающего распространение нелинейной волны, (1.22) упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = v\varphi - \frac{\partial}{\partial q}G(q)\,\varphi + \frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2 - v\frac{\partial G}{\partial q}\right\}\varphi. \quad (1.24)$$

В заключение отметим, что и нелинейное уравнение общего вида

$$\frac{\partial q}{\partial t} + H(\boldsymbol{p},\,q,\,\boldsymbol{x},\,t) = 0\left(\boldsymbol{p} = \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{x}}\right), \quad (1.25)$$

содержащее производные по $\boldsymbol{x}$ только первого порядка, также сводится к интегрированию функции q по характеристикам

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\boldsymbol{p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \\ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \frac{dq}{dt} = -H + \boldsymbol{p}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.6) и (1.14), подробно рассмотренные выше, являются частными случаями уравнения (1.25).

Легко написать уравнение Лиувилля для системы (1.26), которое будет определять плотность вероятностей в лагранжевом представлении. Можно показать, что и в общем случае удается непосредственно получить уравнение Лиувилля для плотности вероятностей $W(q,\,\boldsymbol{p},\,p_{ik},\,\boldsymbol{x},\,t)$ в эйлеровых переменных [68]. При этом необходимо ввести $n\,(n+1)/2$ дополнительных переменных $p_{ik} = p_{ki} = \partial^2 q/\partial x_i \partial x_k$, описывающих кривизну поверхности, ортогональной к характеристикам $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$. Схема вывода такова.

Введем плотность вероятностей

$$W = \delta\,(q\,(t,\,\boldsymbol{x}) - q)\,\delta\,(\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x},\,t) - \boldsymbol{p})\,\delta\,(\widehat{p}\,(x,\,t) - \widehat{p}), \quad (1.27)$$

где $\widehat{p}$ означает матрицу p_{ik}. Для W получаем уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}W - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}W - \frac{\partial}{\partial p_{ik}}\frac{\partial p_{ik}}{\partial t}W. \quad (1.28)$$

Дифференцируя (1.25) по x_i, а затем по x_k, можно найти уравнения для величин $\frac{\partial p_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p_{ik}}{\partial t}$, которые, вообще говоря, содержат производные от q по $\boldsymbol{x}$ третьего порядка. Однако, если записать выражение для величины $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)W$, то оно не будет содержать производных третьего порядка, и уравнение для W оказывается замкнутым. Лишь в случае, когда уравнение (1.25) является квазилинейным, величина W может не содержать дополнительных переменных p_{ik}.

Отметим, что в описанную выше схему без осложнений удается включить еще величину I, удовлетворяющую уравнению неразрывности

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(I\,\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=0, \tag{1.29}$$

так как при этом не возникает новых переменных. В том случае, когда уравнение (1.25) соответствует распространению света в малоугловом приближении геометрической оптики, величина I определяет интенсивность световой волны (см. гл. 8, 10). Если же (1.25) — это уравнение Гамильтона — Якоби, то I соответствует квадрату амплитуды квазиклассической волны.

Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим в качестве примера уравнение Гамильтона — Якоби с произвольным законом дисперсии при $n=1$; тогда

$$H=G(p)+U(x),\quad p=q_x,\quad r=q_{xx},\quad v=q_{xxx},$$

а уравнения для p и r таковы:

$$p'_t=-U'_x-G'_p r,\quad r'_t=-U''_{xx}-G''_{pp}r^2-G'_p v.$$

В результате получаем следующее уравнение для величины $W(q,\ p,\ r,\ x,\ t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+G'\frac{\partial W}{\partial x}+(pG'-H)\frac{\partial W}{\partial q}-U'\frac{\partial W}{\partial p}-(U''+r^2G'')\frac{\partial W}{\partial r}=3G''rW. \tag{1.30}$$

Случай геометрической оптики будет рассмотрен в десятой главе.

Отметим, что в общем случае для систем (1.25), (1.29) можно написать уравнения Лиувилля как для лагранжевой плотности вероятностей $P(q,\ \boldsymbol{p},\ \hat{p},\ I,\ \boldsymbol{x},\ t)$, так и для эйлеровой $W(q,\ \boldsymbol{p},\ \hat{p},\ I,\ \boldsymbol{x},\ t)$; эти величины, в соответствии с полученными в [67] результатами, связаны соотношением $P=IW$, следствием которого является то обстоятельство, что можно получить замкнутое уравнение для функции

$$\tilde{W}(q,\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x},\ t)=I(\boldsymbol{x},\ t)\,\delta(q(\boldsymbol{x},\ t)-q)\,\delta(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\ t)-\boldsymbol{p}),$$

совпадающее с уравнением для плотности вероятностей лагранжевых переменных q, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}$.

§ 2. Статистическое усреднение

В предыдущем параграфе было получено стохастическое уравнение Лиувилля для простейших уравнений в частных производных — линейного и квазилинейного. Учитывая, что уравнение Лиувилля само является линейным уравнением в частных производных, можно усреднить его по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров и, следовательно, получить замкнутое уравнение для плотности вероятностей решения уравнений в частных производных. Так, для уравнения (1.6) получаем плотность вероятностей $P_{t,\,x}(q)$, усредняя (1.10) по ансамблю полей $\boldsymbol{u}$ и γ, а для квазилинейного уравнения (1.14) находим уравнение для плотности вероятностей $P_{t,\,x}(q, \boldsymbol{v})$, усредняя (1.22) по ансамблю случайных функций $\boldsymbol{F}(t, q)$, $G(t, q)$. Такое усреднение, как мы знаем из результатов предыдущих глав, можно провести, если случайные поля $\boldsymbol{F}(t, q)$, $G(t, q)$ — дельта-коррелированные во времени или представимы в виде $z(t)\,\tilde{G}(t, q)$, где $z(t)$ — процессы телеграфного типа, а $\tilde{G}$, $\tilde{\boldsymbol{F}}$ — детерминированные функции. Рассмотрим, например, уравнение (1.12), где будем считать $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ случайным дельта-коррелированным по t полем, описываемым функционалом $\Theta_t[\psi(\boldsymbol{x}', \tau)]$. Усредняя (1.12) по ансамблю поля $\boldsymbol{u}$, получаем уравнение для плотности вероятностей решения $q(t, \boldsymbol{x})$:

$$\frac{\partial P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q)}{\partial t} = -\gamma(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial q} q P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q) + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}')}\right] \varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q)\right\rangle. \quad (2.1)$$

Учитывая, что

$$\frac{\delta}{\delta u_i(t, \boldsymbol{x}')}\varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q) = -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{t,\,\boldsymbol{x}}(q), \quad (2.2)$$

можно переписать уравнение (2.1) в замкнутой операторной форме:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \gamma(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial q} q\right\} P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q) = \dot{\Theta}_t \left[i\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right] P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q). \quad (2.3)$$

Так, если $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ — гауссовское поле, дельта-коррелированное по t, т. е.

$$\Theta_t[\psi(\boldsymbol{x}', \tau)] = \\ = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{x}_1 d\boldsymbol{x}_2 B_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \tau)\,\psi_i(\boldsymbol{x}_1, \tau)\,\psi_j(\boldsymbol{x}_2, \tau), \quad (2.4)$$

то уравнение (2.3) превращается в УЭФ:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \gamma(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial q} q\right\} P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q) = \\ = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}_1 d\boldsymbol{x}_2 B_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t)\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_j} P_{t,\,\boldsymbol{x}}(q), \quad (2.5)$$

которое можно переписать в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\gamma(t,\ x)\frac{\partial}{\partial q}\ q\right\}P_{t,\ x}(q)=$$
$$=\frac{1}{2}B_{ij}(x,\ x,\ t)\frac{\partial^2 P_{t,\ x}(q)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial B_{ij}(x,\ x',\ t)}{\partial x_i'}\bigg|_{x'=x}\frac{\partial P_{t,\ x}(q)}{\partial x_j}. \qquad (2.6)$$

Если случайное поле $u(t,\ x)$ пространственно однородно и изотропно, то уравнение (2.6) становится совсем простым УЭФ:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\gamma(t,\ x)\frac{\partial}{\partial q}\ q\right\}P_{t,\ x}(q)=\frac{1}{2}B_{ij}(0,\ t)\frac{\partial^2 P_{t,\ x}(q)}{\partial x_i\partial x_j}, \qquad (2.7)$$

которое в случае отсутствия зависимости функции $\gamma(t,\ x)$ от x нетрудно решить. Отметим, что уравнение (2.7) описывает диффузию примеси в случайном поле скорости.

Аналогичным образом можно усреднить и уравнение для функции $\varphi_{t,x}$ (1.16), соответствующей решению квазилинейного уравнения (1.14). Пример такого усреднения будет рассмотрен в следующем параграфе.

Выше мы рассматривали простейшие уравнения в частных производных. Если же имеется нелинейное уравнение в частных производных, не относящееся к рассмотренному типу (например, содержащее члены Δq или $\partial^3 q/\partial x^3$, как это имеет место для уравнений Бюргерса, Кортевега—де Вриза или Навье—Стокса), то ничего подобного сделать не удается.

Теперь понятие плотности вероятностей не всегда имеет смысл, и приходится рассматривать уравнение в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи, которое в этом случае играет роль стохастического уравнения Лиувилля и называется уравнением Хопфа (см., например [29]). Усредняя последнее по ансамблю реализаций стохастических параметров, получаем замкнутое уравнение в вариационных производных. Полученное уравнение для характеристического функционала представляет собой бесконечномерный аналог уравнений, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям и квазилинейным уравнениям в частных производных. Если же исходное уравнение само является линейным, то несущественно, какие у него производные (первого или более высокого порядка по пространственным переменным); важно лишь выполнение условия причинности (т. е. уравнение должно быть первого порядка по времени и для него должна ставиться задача Коши). Если условие причинности нарушается, т. е. мы имеем не задачу Коши, а краевую задачу, то в этом случае надо воспользоваться теорией инвариантного погружения, сводящей краевые задачи к задачам Коши для вспомогательных уравнений.

Отметим, однако, что для одного класса дифференциальных уравнений, не содержащих явной зависимости от x, а именно:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+z(t)\frac{\partial q}{\partial x}=F\left(t,\ q,\ \frac{\partial q}{\partial x},\ \frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial x},\ldots\right), \qquad (2.8)$$

где $z(t)$ — векторный случайный процесс, а F — детерминированная функция, решение можно представить в виде

$$q(t, x) = Q\left(t, x - \int_0^t d\tau\, z(\tau)\right), \tag{2.9}$$

где функция $Q(t, x)$ удовлетворяет детерминированному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = F\left(t, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial x}, \ldots\right). \tag{2.10}$$

Для таких задач различные статистические характеристики решения (2.8) определяются непосредственно путем усреднения соответствующих выражений, построенных по решению уравнения (2.10). Примеры таких уравнений рассмотрены в [69]. При этом функция $\langle q \rangle$ будет удовлетворять замкнутому уравнению, содержащему производные по x всех порядков. Рассмотрим в качестве примера уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \{q + z(t)\} \frac{\partial q}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \tag{2.11}$$

В силу равенства (2.9) для вариационной производной $q(t, x)$ по $z(\tau)$ имеем

$$\frac{\delta q(t, x)}{\delta z(\tau)} = \frac{\delta}{\delta z(\tau)} Q\left(t, x - \int_0^t d\tau\, z(\tau)\right) = -\theta(t - \tau) \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{2.12}$$

Пусть $z(t)$ — гауссовский процесс с корреляционной функцией $B(\tau)$. Усредним (2.11) по ансамблю реализаций $z(t)$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle q \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle q^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle z(t)\, q(t, x) \rangle = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle q \rangle. \tag{2.13}$$

Используем далее формулы § 3 гл. 2:

$$\langle z(t)\, q(t, x) \rangle = \int d\tau\, B(t - \tau) \left\langle \frac{\delta q(t, x)}{\delta z(\tau)} \right\rangle,$$

$$\langle q[x; z(\tau) + \eta_1(\tau)]\, q[x; z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle =$$

$$= \exp\left\{\iint d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) \frac{\delta^2}{\delta\eta_1(\tau_1)\, \delta\eta_2(\tau_2)}\right\} \langle q[\eta_1(\tau)] \rangle \langle q[\eta_2(\tau)] \rangle,$$

которые, в силу (2.12), можно записать в виде

$$\langle z(t)\, q(t,\ x)\rangle = -\int_0^t d\tau\, B(\tau)\, \frac{\partial}{\partial x}\langle q(t,\ x)\rangle, \tag{2.14}$$

$$\langle q^2(t,\ x)\rangle =$$

$$= \exp\left\{2\int_0^t d\tau\,(t-\tau)\, B(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2}\right\}\langle q(t,\ x+\eta_1)\rangle\langle q(t,\ x+\eta_2)\rangle\,|_{\eta_i=0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left[\int_0^t d\tau\,(t-\tau)\, B(\tau)\right]^n\left\langle\frac{\partial^n q(t,\ x)}{\partial x^n}\right\rangle^2.$$

В результате уравнение (2.13) принимает форму замкнутого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left[\int_0^t d\tau\,(t-\tau)\, B(\tau)\right]^n\left\langle\frac{\partial^n q}{\partial x^n}\right\rangle^2 =$$

$$= \left\{\nu + \int_0^t d\tau\, B(\tau)\right\}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle q\rangle, \tag{2.15}$$

содержащего, однако, в отличие от (2.11), производные всех порядков.

§ 3. Теория инвариантного погружения и стохастические краевые задачи

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i(t,\ \boldsymbol{x}(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.1}$$

определенной на отрезке времени $[0,\ T]$ с краевыми условиями

$$g_{ik}x_k(0) + h_{ik}x_k(T) = v_i \tag{3.2}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Функции $F_i(t,\ \boldsymbol{x})$ будем считать случайными, а постоянные матрицы g, h и вектор $\boldsymbol{v}$ — детерминированными величинами.

Для динамической задачи (3.1), (3.2) не выполняется условие причинности, сформулированное в третьей главе, т. е. решение этой задачи $\boldsymbol{x}(t)$ в момент времени t функционально зависит от случайных сил $\boldsymbol{F}(\tau,\ \boldsymbol{x}(\tau))$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Более того, даже краевые значения $\boldsymbol{x}(0)$ и $\boldsymbol{x}(T)$ являются функционалами поля $\boldsymbol{F}(\tau,\ \boldsymbol{x})$. Поэтому методы анализа статистических характеристик решения уравнений (3.1), развитые в третьей и четвертой главах, к данной задаче не применимы.

Для нахождения статистических характеристик решения задачи (3.1), (3.2) можно воспользоваться теорией инвари-

антного погружения [24]. Заметим, что решение задачи (3.1), (3.2) параметрически зависит от T и $\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ T,\ \boldsymbol{v})$. Следуя [70], введем функции

$$\boldsymbol{R}(T,\boldsymbol{v})=\boldsymbol{x}(T;T,\boldsymbol{v}),\quad \boldsymbol{S}(T,\boldsymbol{v})=\boldsymbol{x}(0;T,\boldsymbol{v}). \tag{3.3}$$

Тогда, как показано в [70], величины $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{x}(t;\ T,\ \boldsymbol{v})$, как функции параметров T, $\boldsymbol{v}$, удовлетворяют задаче Коши

$$\frac{\partial R_i}{\partial T}+\frac{\partial R_i}{\partial v_k}h_{kl}F_l(T,\boldsymbol{R})=F_i(T,\boldsymbol{R}), \tag{3.4}$$

$$R_i(0,\boldsymbol{v})=(g+h)^{-1}_{ik}v_k;$$

$$\frac{\partial x_i(t;T,\boldsymbol{v})}{\partial T}+\frac{\partial x_i}{\partial v_k}h_{kl}F_l(T,\boldsymbol{R})=0, \tag{3.5}$$

$$x_i(t;\ t,\ \boldsymbol{v})=R_i(t,\ \boldsymbol{v}).$$

В частности, полагая в (3.5) $t=0$, для функции $\boldsymbol{S}(T,\boldsymbol{v})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial S_i}{\partial T}+\frac{\partial S_i}{\partial v_k}h_{kl}F_l(T,\boldsymbol{R})=0, \tag{3.6}$$

$$S_i(0,\ \boldsymbol{v})=(g+h)^{-1}_{ik}v_k.$$

Уравнение (3.4) является замкнутым нелинейным уравнением для $\boldsymbol{R}$, а уравнения (3.5), (3.6) — линейные уравнения. Следовательно, статистические характеристики решения задачи (3.1), (3.2) могут быть выражены через статистические характеристики решений задач (3.4) — (3.6).

Отметим, что для этой задачи «вход» и «выход» (0 и T) для системы симметричны. Поэтому к решению краевой задачи можно подходить не только со стороны $T\to 0$, но и, наоборот, $0\to T$. При этом функции $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{x}(0)$ и $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}(T)$ как бы меняются местами, т. е. задачу легко переформулировать таким образом, чтобы функция $\boldsymbol{S}(a)$ удовлетворяла уравнению по a типа (3.4) с начальным условием при $a\to T$, а само решение задачи $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяло линейному уравнению типа (3.5).

Стохастические уравнения типа (3.4) — (3.6) изучались в в предыдущем параграфе. Для нахождения статистических характеристик их решений следует дополнить систему (3.4), (3.5) уравнениями для функций $\partial R_i/\partial v_j$:

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial R_i}{\partial v_j}+\frac{\partial^2 R_i}{\partial v_k\partial v_j}h_{kl}F_l(T,\boldsymbol{R})+\frac{\partial R_i}{\partial v_k}h_{kl}\frac{\partial F_l}{\partial R_m}\frac{\partial R_m}{\partial v_j}=\frac{\partial F_i}{\partial R_m}\frac{\partial R_m}{\partial v_j},$$

$$\left.\frac{\partial R_i}{\partial v_j}\right|_{t=0}=(g+h)^{-1}_{ij}. \tag{3.7}$$

После этого можно написать замкнутое линейное стохастическое уравнение Лиувилля для функции

$$\varphi_{T,v}(R_i, x_i, u_{ij}) = \prod_{i,j=1}^{N} \delta(R_i(T, v) - R_i)\,\delta(x_i(t; T, v) - x_i)\,\delta\left(\frac{\partial R_i(T, v)}{\partial v_j} - u_{ij}\right), \quad (3.8)$$

которое имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_{T,v}}{\partial T} + h_{kl}\left\{F_l(T, \boldsymbol{R})\frac{\partial}{\partial v_k} - u_{ik}\frac{\partial F_l}{\partial R_i} - \frac{\partial}{\partial u_{ij}}u_{ik}u_{mj}\frac{\partial F_l}{\partial R_m}\right\}\varphi = -\frac{\partial}{\partial R_i}\{F_i(T, \boldsymbol{R})\varphi\} - \frac{\partial}{\partial u_{ij}}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial R_m}u_{mj}\varphi\right\}. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) следует решать с начальным условием

$$\varphi_{t,v}(R_i, x_i, u_{ij}) = \delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{x})\,\tilde{\varphi}_{T,v}(R_i, u_{ij}), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{\varphi}_{T,v}(R_i, u_{ij}) = \prod_{i,j=1}^{N} \delta(R_i(T, v) - R_i)\,\delta\left(\frac{\partial R_i(T, v)}{\partial v_j} - u_{ij}\right). \quad (3.11)$$

Отметим, что уравнение (3.9) содержит переменные x_i только в параметрическом виде. Поэтому функция $\tilde{\varphi}_{T,v}$ также удовлетворяет уравнению (3.9) с начальным условием при $T = 0$, вытекающим из начальных условий (3.4), (3.7).

Для уравнения (3.9) уже можно использовать непосредственно результаты предыдущих глав. Так, если флуктуирующая часть $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ является дельта-коррелированным по t полем, то легко выполнить усреднение в уравнении (3.9) и получить замкнутое уравнение для соответствующей плотности вероятностей $P_{T,v} = \langle\varphi_{T,v}\rangle$. Аналогичным образом можно получить замкнутые уравнения и в случаях, когда флуктуирующие части функций $F_i(t, \boldsymbol{x})$ имеют структуру $z(t)\tilde{F}_i(t, \boldsymbol{x})$, где $z(t)$ — телеграфный или обобщенный телеграфный процесс, а $\tilde{F}_i(t, \boldsymbol{x})$ — детерминированные функции.

Отметим, что если функции $F_i(t, \boldsymbol{x})$ в правой части (3.1) являются линейными по $\boldsymbol{x}$, то и решение уравнений (3.4) — (3.6) можно искать на классе линейных функций по $\boldsymbol{v}$. При этом мы приходим к матричным уравнениям Риккати с квадратичной нелинейностью.

Отметим также, что изложенная методика очевидным образом обобщается и на случай уравнений (3.1) с краевыми условиями

$$g_i(\boldsymbol{x}(0)) + h_i(\boldsymbol{x}(T)) + \int_0^T d\tau\, K_i(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) = v_i, \quad (3.2')$$

где $g_i(\boldsymbol{x})$, $h_i(\boldsymbol{x})$, $K_i(t, \boldsymbol{x})$ — произвольные детерминированные функции. Для этого следует воспользоваться уравнениями, об-

общающими уравнения (3.4) — (3.6) на данные краевые условия. Эти уравнения приведены в [70].

Проиллюстрируем изложенную методику на простейших задачах (простейших по постановке, но не по возможностям решения непосредственно «в лоб»).

В качестве первого примера рассмотрим задачу о взаимодействии двух встречных мод в случайно-неоднородной среде. Задача описывается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = i\omega_1 x_1 + iz(t)\, x_2, \quad \dot{x}_2 = -i\omega_2 x_2 - iz(t)\, x_1 \tag{3.12}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) - \beta x_2(0) = v_1, \quad x_2(T) = v_2. \tag{3.13}$$

Краевые условия (3.13) соответствуют либо взаимодействию мод с заданными значениями на границах среды ($\beta = 0$), либо взаимодействию мод с условием отражения при $t = 0$ ($v_1 = 0$).

Задачу (3.12), (3.13) можно переписать в форме задачи (3.1), (3.2) с

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} i\omega_1 x_1 + iz(t)\, x_2 \\ -i\omega_2 x_2 - iz(t)\, x_1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

В этом случае очевидно, что $R_2(T, \boldsymbol{v}) \equiv v_2$ (в силу (3.13)), и, следовательно, из (3.4), (3.5) получаем уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial T} R_1(T, \boldsymbol{v}) - i(\omega_2 v_2 + z(T) R_1) \frac{\partial R_1}{\partial v_2} = i\omega_1 R_1 + iz(T) v_2, \\ \frac{\partial}{\partial T} x_i(t; T, \boldsymbol{v}) - i(\omega_2 v_2 + z(T) R_1) \frac{\partial x_i}{\partial v_2} = 0 \end{gathered} \tag{3.15}$$

с начальными условиями

$$R_1(0, \boldsymbol{v}) = v_1 + \beta v_2, \quad x_i(t; t, \boldsymbol{v}) = R_i(t, \boldsymbol{v}). \tag{3.16}$$

В силу линейности исходной задачи решение уравнений (3.15) можно искать в виде

$$\begin{aligned} R_1(T, \boldsymbol{v}) = A(T)\, v_2 + B(T)\, v_1, \quad x_i(t; T, \boldsymbol{v}) = \\ = C_i(t, T)\, v_2 + D_i(t, T)\, v_1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Тогда для функций A, B, C_i и D_i получаем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dA}{dT} = i(\omega_1 + \omega_2) A + iz(T)(1 + A^2), \quad \frac{dB}{dT} = i\omega_1 B + iz(T) AB, \\ \frac{dC_i}{dT} = i\omega_2 C_i + iz(T) AC_i, \qquad \frac{dD_i}{dT} = iz(T) BC_i \end{gathered} \tag{3.18}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} A(0) = \beta, \quad B(0) = 1, \\ C_1(t, t) = A(t), \quad D_1(t, t) = B(t), \; C_2(t, t) = 1, \quad D_2(t, t) = 0. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Далее задача решается стандартным путем. Найдем, например, средние значения $\langle x_i \rangle$. Для этого исключим в (3.18) линейные члены и перейдем к уравнениям, решение которых обусловлено только флуктуациями процесса $z(T)$. Предполагая гауссовость и дельта-коррелированность процесса $z(T)$ по T, т. е. $\langle z(T)\, z(T') \rangle = 2\sigma^2 \delta(T - T')$, можно выполнить усреднение и написать уравнения для средних величин, содержащие моментные функции более высокого порядка. Для получения медленных изменений средних характеристик (на фоне быстро осциллирующих с частотой $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ процессов) при достаточно малой величине σ^2 удается усреднить эти уравнения по периоду быстрых движений; в результате придем к замкнутой системе линейных уравнений. Решая эти уравнения с соответствующими начальными условиями, получаем решение задачи в виде

$$\langle x_1(t) \rangle = \exp\{i\omega_1 t - \sigma^2 t\}\,(v_1 + \beta v_2 \exp\{i\omega_2 T - \sigma^2 T\}), \quad (3.20)$$

$$\langle x_2(t) \rangle = v_2 \exp\{i\omega_2 (T - t) - \sigma^2 (T - t)\}.$$

Отметим, что для нахождения высших моментных функций решения задачи (3.12) следует либо выделить действительные и мнимые части решения, либо перейти к их амплитудам и фазам. Такой подход мы предпримем в седьмой главе при изучении краевой задачи для одномерных волн.

В качестве примера нелинейной задачи рассмотрим движение частицы в поле случайных сил:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(t,\ x_1(t));\ x_2(0) = v_2, \quad x_1(T) = v_1. \quad (3.21)$$

Отметим, что динамическая система (3.21) описывает также в малоугловом приближении задачу о диффузии в случайно-неоднородной среде лучей, приходящих в заданную точку (см., например, гл. 10).

Для этой задачи очевидно, что $R_1(T) \equiv v_1$, а уравнения для R_2 и x_i принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial T} R_2 + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_1} = f(T, v_1), \quad R_2(0) = v_2, \\ &\frac{\partial}{\partial T} x_i(t; T, \boldsymbol{v}) + R_2 \frac{\partial x_i}{\partial v_1} = 0, \qquad x_i(t; t; \boldsymbol{v}) = R_i(t, \boldsymbol{v}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Дополняя систему (3.22) уравнением для функции $\partial R_2/\partial v_1$

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial R_2}{\partial v_1} + \left(\frac{\partial R_2}{\partial v_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 R_2}{\partial v_1^2} R_2 = \frac{\partial f(T, v_1)}{\partial v_1}, \quad \left.\frac{\partial R_2}{\partial v_1}\right|_{T=0} = 0 \quad (3.23)$$

и предполагая, что поле случайных сил $f(T,\ \boldsymbol{v})$ — гауссовское дельта-коррелированное по T, т. е.

$$\langle f(T,\ \boldsymbol{x})\, f(T + \tau,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}) \rangle = 2F(\boldsymbol{S})\, \delta(\tau),$$

легко написать замкнутое уравнение для совместной плотности вероятностей решений уравнений (3.22), (3.23)

$$P_{T,\,v}(R, u, x) = \left\langle \delta(R_2(T, v) - R)\, \delta\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_1} - u\right) \delta(x(t; T, v) - x) \right\rangle,$$

которое имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial T} + R\frac{\partial P}{\partial v_1} - uP - \frac{\partial}{\partial u} u^2 P = D\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + B\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \qquad (3.24)$$

где постоянные $D = F(0)$, $B = -\left.\frac{\partial^2 F(S)}{\partial S^2}\right|_{S=0}$. Уравнение (3.24) следует решать с начальным условием

$$\widetilde{P}_{t,v}(R, u, x) = \widetilde{P}_t(R, u)\, \delta(R - x_2)\, \delta(v_1 - x_1), \qquad (3.25)$$

где функция $\widetilde{P}_T(R, u)$ также удовлетворяет уравнению (3.24) с начальным условием

$$\widetilde{P}_0(R, u) = \delta(R - v_2)\, \delta(u). \qquad (3.26)$$

Отметим, что переменная u является «лишней» переменной в задаче. Она была необходима для получения замкнутого статистического описания системы (3.22). Теперь мы можем ее исключить, интегрируя (3.24), (3.25) и (3.26) по u. В результате получаем уравнение для функции $P_{T,v}(R, x)$

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{T,\,v}(R, x) + R\frac{\partial P_{T,\,v}}{\partial v_1} = D\frac{\partial^2 P_{T,\,v}}{\partial R^2} \qquad (3.27)$$

с условием $P_{t,v}(R, x) = \widetilde{P}_t(R)\, \delta(R - x_2)\, \delta(v_1 - x_1)$, где функция $\widetilde{P}_T(R)$ удовлетворяет уравнению (3.27) с условием $\widetilde{P}_0(R) = \delta(R - v_2)$.

Введем характеристическую функцию

$$\Phi_{T,v}(\varkappa, \omega_1, \omega_2) = \langle \exp\{i\varkappa R + i\omega_1 x_1 + i\omega_2 x_2\}\rangle, \qquad (3.28)$$

которая, согласно (3.27), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = i\frac{\partial^2}{\partial \varkappa\, \partial v_1}\Phi - D\varkappa^2\Phi \qquad (3.29)$$

с начальным условием

$$\Phi_{t,v}(\varkappa, \omega_1, \omega_2) = \exp\{i\omega_1 v_1\}\, \varphi_{t,v}(\varkappa + \omega_2), \qquad (3.30)$$

а для функции $\varphi_{t,v}(\varkappa)$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\frac{\partial^2}{\partial \varkappa\, \partial v_1}\varphi - D\varkappa^2\varphi, \quad \varphi_{0,\,v} = e^{i\varkappa v_2}. \qquad (3.31)$$

Решение уравнения (3.29) с условием (3.30) имеет вид

$$\Phi_{T,\,v}(\varkappa, \omega_1, \omega_2) = \exp\left\{i\omega_1 v_1 - D\left[\varkappa^2(T - t) - \varkappa\omega_1(T - t)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\omega_1^2}{3}(T - t)^3\right]\right\} \varphi_t[\varkappa + \omega_2 - \omega_1(T - t)], \qquad (3.32)$$

где функция $\varphi_t(\varkappa)$, удовлетворяющая уравнению (3.31), равна

$$\varphi_t(\varkappa) = \exp\{i\varkappa v_2 - D\varkappa^2 t\}.$$

Полагая теперь в (3.32) $\varkappa = 0$, получаем для совместной характеристической функции решения задачи (3.21) выражение

$$\Phi_{T,\,v}(\omega_1, \omega_2) = \langle \exp\{i\omega_1 x_1(t) + i\omega_2 x_2(t)\}\rangle =$$
$$= \exp\left\{i\omega_1[v_1 - v_2(T-t)] + i\omega_2 v_2 - \frac{D\omega_1^2}{3}(T-t)^3 - \right.$$
$$\left. - Dt[\omega_2 - \omega_1(T-t)]^2\right\}. \qquad (3.33)$$

Таким образом, совместное одноточечное распределение вероятностей для величин $x_1(t)$ и $x_2(t)$ оказывается гауссовским. Такое же распределение вероятностей имеет статистическая задача

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = f(t,\ 0);\ x_2(0) = v_2,\quad x_1(T) = v_1. \qquad (3.34)$$

Другой подход к рассматриваемой проблеме предложен в работе [71], где проанализирован также вопрос о возможной не единственности решения краевой задачи, что мы не принимали в расчет. Отметим только следующее, важное, на наш взгляд, обстоятельство.

Как мы говорили в первой части книги, дельта-коррелированных процессов в природе не бывает, и аппроксимация флуктуирующих параметров дельта-коррелированными процессами может быть обоснована для задачи Коши. Если же имеется краевая задача, то флуктуирующие параметры могут обладать, помимо динамического радиуса корреляции, также характеристиками, связанными с размером системы (например, волна, падающая на зеркало, после отражения проходит через те же неоднородности). В этом случае условие дельта-коррелированности параметров надо понимать как условие для задачи Коши теории инвариантного погружения.

Теория инвариантного погружения может быть очень эффективным аппаратом и при анализе стохастических интегральных уравнений *).

Пусть имеется стохастическое интегральное уравнение для функции Грина

$$G(t, t_0) = g(t - t_0) + \alpha \int_0^\infty d\tau\, g(t-\tau)\, z(\tau)\, G(\tau, t_0), \qquad (3.35)$$

где $0 \leqslant t,\ t_0 < \infty$, $g(t - t_0)$ — детерминированная функция, а $z(t)$, как и ранее,— гауссовский δ-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t)\rangle = 0,\quad \langle z(t)\, z(t')\rangle = 2\sigma^2\delta(t - t'). \qquad (3.36)$$

---

*) Нижеследующие результаты получены совместно с Г. И. Бабкиным.

Характерной чертой уравнения (3.35) является отсутствие условия динамической причинности.

Обычно при изучении статистических характеристик решения (3.35) используются приближения Бурре для уравнения Дайсона и лестничное приближение для уравнения Бете — Солпитера (см. гл. 4). Для данной задачи среднее значение функции Грина в приближении Бурре удовлетворяет уравнению

$$\langle G(t, t_0)\rangle = g(t - t_0) + 2Dg(0)\int_0^\infty d\tau\, g(t-\tau)\langle G(\tau, t_0)\rangle, \quad (3.37)$$

где введен коэффициент диффузии $D = \alpha^2\sigma^2$.

Рассмотрим частный случай уравнения (3.35) с быстро затухающей функцией $g(t) = \exp\{-\alpha|t|\}$ и выберем точку расположения источника $t_0 = 0$. При этом уравнения (3.35), (3.37) примут следующий вид:

$$U(t) = e^{-\alpha t} + \alpha\int_0^\infty d\tau\, e^{-\alpha|t-\tau|} z(\tau) U(\tau), \quad (3.35')$$

$$\langle U(t)\rangle = e^{-\alpha t} + 2D\int_0^\infty d\tau\, e^{-\alpha|t-\tau|}\langle U(\tau)\rangle, \quad (3.37')$$

где $0 \leqslant t < \infty$, $U(t) = G(t, 0)$. Решение уравнения (3.37′) выглядит следующим образом:

$$\langle U(t)\rangle = \frac{2\alpha}{\alpha+\lambda}\exp\{-\lambda t\}, \quad \lambda^2 = \alpha(\alpha - 4D) > 0. \quad (3.38)$$

Перейдем теперь к точному решению задачи. Для этого естественно воспользоваться теорией инвариантного погружения. Рассмотрим вместо (3.35) уравнение

$$G(t, t_0; T) = g(t - t_0) + \alpha\int_0^T d\tau\, g(t-\tau) z(\tau) G(\tau, t_0; T), \quad (3.39)$$

где введен «параметр погружения» T. Решение уравнения (3.35) соответствует предельному переходу $T \to \infty$. Пусть в уравнении (3.39) $t_0 = T$, тогда в случае экспоненциальной функции $g(t)$ вместо (3.35′) получаем уравнение

$$U(t, T) = e^{-\alpha(T-t)} + \alpha\int_0^T d\tau\, e^{-\alpha|t-\tau|} z(\tau) U(\tau, T) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \quad (3.40)$$

Решение статистической задачи (3.35′), в силу стационарности процесса $z(t)$, связано с решением уравнения (3.40) равенством

$$\langle U(t)\rangle = \lim_{\tilde{t},\, T\to\infty}\langle U(\tilde{t}, T)\rangle \quad (T - \tilde{t} = t). \quad (3.41)$$

Отметим, что уравнение (3.40) эквивалентно краевой задаче

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \alpha^2 [1 - 2z(t)] U,$$
$$\alpha U(T) + U'(T) = 2\alpha, \quad \alpha U(0) - U'(0) = 0. \tag{3.42}$$

Теперь можно, вообще говоря, использовать изложенную выше методику, пригодную для анализа стохастических краевых задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако в данном случае удобнее исходить непосредственно из уравнения (3.40). Дифференцируя (3.40) по T, получаем интегральное уравнение для величины $\partial U(t, T)/\partial T$, решение которого с использованием (3.40) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial U(t, T)}{\partial T} = -\alpha [1 - z(T) R(T)] U(t, T), \quad U(t, t) = R(t). \tag{3.43}$$

Здесь $R(T) = U(T, T)$, для этой величины имеется интегральное уравнение

$$R(T) = 1 + \alpha \int_0^T d\tau\, e^{-\alpha(T-\tau)} z(\tau) U(\tau, T). \tag{3.44}$$

Дифференцируя его по T, находим с учетом (3.43)

$$\frac{dR(T)}{dT} = 2\alpha [1 - R(T)] + \alpha z(T) R^2(T), \quad R(0) = 1. \tag{3.45}$$

Таким образом, решение исходного интегрального уравнения (3.40) сводится к системе уравнений (3.43), (3.45). Уравнение (3.40) не обладает свойством динамической причинности, так как его решение $U(t, T)$ является функционалом процесса $z(\tau)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Уравнения (3.43), (3.45) удовлетворяют условию причинности, поскольку для них решается задача Коши.

Далее будем действовать стандартным образом. Пусть α — действительная величина. Рассмотрим плотность вероятностей для $U(t, T)$ и $R(T)$:

$$P_T(U, R) = \langle \delta(U(t, T) - U) \delta(R(T) - R) \rangle,$$

где усреднение проводится по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. Для $P_T(U, R)$ получаем уравнение Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial P_T(U, R)}{\partial T} = \alpha \left[\frac{\partial}{\partial U} U - 2 \frac{\partial}{\partial R} (1 - R) \right] P_T + D \left[\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial R} R^2 \right]^2 P_T \tag{3.46}$$

с начальным условием

$$P_t(U, R) = \delta(U - R) P_t(R), \tag{3.47}$$

где функция $P_t(R)$ является плотностью вероятностей для величины $R(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P_t(R)}{\partial t} = -2\alpha \frac{\partial}{\partial R}(1-R)P_t + D\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}R^2P_t(R) \quad (3.48)$$

с начальным условием $P_0(R) = \delta(R-1)$.

Следовательно, статистическая задача для уравнения (3.40) полностью описана. Переход к задаче (3.35′) осуществляется, как говорилось выше, при t, $T \to \infty$, если $(T-t)$ — фиксированная величина. Однако, как легко видеть, уравнение (3.48) не дает стационарного распределения вероятностей и, следовательно, все статистические характеристики величины $U(t, T)$ при этом предельном переходе стремятся к ∞, что полностью противоречит приближению Бурре (и лестничному приближению для уравнения Бете — Солпитера). Со статистической точки зрения уравнение (3.35′) бессмысленно.

В случае, когда величина $\alpha = \gamma - i\varkappa$ комплексна, уравнение (3.40) описывает задачу о падении плоской волны на слой одномерной случайно-неоднородной среды. Эта задача будет подробно рассмотрена в седьмой главе. При этом существование решения задачи (3.40) (в статистическом смысле) обусловлено (как мы увидим ниже) тем, что имеется стационарное распределение для коэффициента отражения волны от слоя среды.

На этом мы заканчиваем изложение общей теории стохастических уравнений и переходим непосредственно к изложению физической проблемы — волны в случайно-неоднородных средах.

Глава 6

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

§ 1. Приближение дельта-коррелированного случайного процесса

Продолжим рассмотрение примера о параметрическом возбуждении колебательной системы за счет флуктуаций параметров, начатое во второй главе. Динамическая задача описывается системой уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \omega_0^2 z(t) x; \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

где $z(t)$ — случайная функция времени.

Как указывалось во второй главе, это — простейшая задача, не допускающая записи решения в явном виде. В то же время эта задача возникает естественным путем во многих областях физики, ее решению посвящено большое количество работ.

Уравнение для совместной плотности вероятностей величин x и y имеет вид операторного уравнения (для дельта-коррелированного процесса $z(t)$):

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} = -y \frac{\partial P_t}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial P_t}{\partial y} + \\ + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\, \delta z(t)} \right] \delta(x(t) - x)\, \delta(y(t) - y) \right\rangle, \tag{1.2}$$

где $\Theta_t[v(\tau)]$ — логарифм характеристического функционала процесса $z(t)$.

Учитывая равенства

$$\frac{\delta x(t)}{\delta z(t)} = 0, \quad \frac{\delta y(t)}{\delta z(t)} = -\omega_0^2 x(t), \tag{1.3}$$

вытекающие из динамической системы (1.1), получаем

$$\frac{\delta}{\delta z(t)} \delta(x(t) - x)\, \delta(y(t) - y) = \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \delta(x(t) - x)\, \delta(y(t) - y). \tag{1.4}$$

Следовательно, уравнение (1.2) становится замкнутым операторным уравнением:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -y \frac{\partial P_t}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial P_t}{\partial y} + \dot{\Theta}_t \left[\frac{\omega_0^2}{i} x \frac{\partial}{\partial y} \right] P_t(x, y). \tag{1.5}$$

Для гауссовских дельта-коррелированных флуктуаций функционал

Θ_t равен

$$\Theta_t[v(\tau)] = -\sigma^2 \int_0^t d\tau\, v^2(\tau) \qquad (\langle z(t)\, z(t')\rangle = 2\sigma^2 \delta(t-t')), \quad (1.6)$$

а уравнение (1.5) принимает вид УЭФ:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -y \frac{\partial P_t}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial P_t}{\partial y} + \sigma^2 \omega_0^4 x^2 \frac{\partial^2 P_t}{\partial y^2}. \quad (1.7)$$

Для пуассоновских дельта-коррелированных флуктуаций функционал Θ_t выглядит следующим образом:

$$\Theta_t[v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\, [\exp\{i\xi v(\tau)\} - 1], \quad (1.8)$$

а уравнение (1.5) превращается в уравнение Колмогорова—Феллера:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -y \frac{\partial P_t}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial P_t}{\partial y} + \\ + \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\, P_t(x, y + \xi\omega_0^2 x) - \nu P_t(x, y). \quad (1.9)$$

Вернемся теперь к общему операторному уравнению (1.5). Из него можно получить замкнутую систему уравнений для моментов любого порядка. Это связано с тем обстоятельством, что в операторную часть уравнения (1.5) переменные входят в виде однородной комбинации $x\frac{\partial}{\partial y}$, которая не повышает порядка рассматриваемого момента. Как отмечалось в предыдущей главе, это общее свойство всех линейных систем. Более того, в уравнения для моментов войдут только кумулянты процесса $z(t)$, порядок которых не превышает порядка момента. В самом деле, разложение функционала $\dot{\Theta}_t[v(t)]$ в ряд Тейлора для дельта-коррелированных флуктуаций, согласно второй главе, имеет вид

$$\dot{\Theta}_t\ [v(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n(t)\, v^n(t), \quad (1.10)$$

где величина $K_n(t)$ определяет кумулянтную функцию n-го порядка. Если подставить разложение (1.10) в уравнение (1.5) и написать уравнения для моментов, то каждое интегрирование по частям понизит степень y на единицу. Таким образом, самый длинный отрезок ряда (1.10), который принимает участие в образовании уравнений для моментов, соответствует степени величины y. Следовательно, в уравнение для средних величин войдет кумулянт K_1, в уравнения для вторых моментов — кумулянты K_1 и K_2 и т. д. Это означает, что если интересоваться только

уравнениями для моментов, то нет необходимости знать распределение вероятностей для флуктуаций параметров, а достаточно знать только определенные кумулянты процесса $z(t)$. Как указывалось в § 5 гл. 3, это возможно только в случае, когда стохастическая система уравнений имеет вид линейной системы:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ij}x_j + z(t)B_{ij}x_j, \quad x(0) = x_0, \tag{1.11}$$

и существует степень матрицы B такая, что

$$B^n = 0. \tag{1.12}$$

Так, для рассмотренной выше системы (1.1) матрица B имеет вид

$$B = -\omega_0^2 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

и, так как уже $B^2 = 0$, в уравнение для $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ войдет лишь первый кумулянт процесса $z(t)$. Аналогичным образом, если мы введем вектор

$$A_k = x^k y^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{1.13}$$

то из системы (1.1) для него получаем стохастическое уравнение

$$\frac{dA_k}{dt} = kA_{k-1} - \omega_0^2(n-k)[1 + z(t)]A_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{1.14}$$

что соответствует записи системы (1.11) с матрицей

$$B_{ij} = -\omega_0^2(n-i)\delta_{i,\,j-1}. \tag{1.15}$$

Очевидно, что для матрицы B_{ij} (1.15) $B^{n+1} \equiv 0$.

Итак, напишем уравнения для первых моментов решения системы (1.1), считая, что $K_1 = 0$, $K_2 = 2\sigma^2$. Для средних значений $x(t)$ и $y(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle = \langle y \rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle y(t)\rangle = -\omega_0^2\langle x \rangle, \tag{1.16}$$

совпадающую с системой (1.1) в случае отсутствия флуктуаций. Пусть, например, начальные условия для (1.1) имеют вид

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{1.17}$$

Тогда решение системы (1.16) имеет вид

$$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \quad \langle y(t)\rangle = \cos\omega_0 t. \tag{1.18}$$

Вторые моменты величин $x(t)$, $y(t)$ описываются системой уравнений

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = 2\langle xy \rangle, \quad \langle \dot{x}\dot{y} \rangle = \langle y^2 \rangle - \omega_0^2\langle x^2 \rangle,$$

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = -2\omega_0^2\langle xy \rangle + 2\sigma^2\omega_0^4\langle x^2 \rangle \tag{1.19}$$

с начальными условиями

$$\langle x^2\rangle = \langle xy\rangle = 0, \quad \langle y^2\rangle = 1 \quad \text{при } t = 0. \tag{1.20}$$

Система уравнений (1.19) при условиях (1.20) легко решается. Если при этом считать, что в задаче имеется малый параметр, связанный с интенсивностью флуктуаций $z(t)$, $\sigma^2\omega_0 \ll 1$, то ее решение, с точностью до членов порядка $\sigma^2\omega_0$, имеет вид

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2\omega_0^2}\left\{\exp\{\sigma^2\omega_0{}^2 t\} - \exp\left\{-\frac{\sigma^2\omega_0^2 t}{2}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\cos 2\omega_0 t + \frac{3}{4}\sigma^2\omega_0\sin 2\omega_0 t\right]\right\},$$

$$\langle x(t)\,y(t)\rangle = \frac{1}{4\omega_0}\left\{2\exp\left\{-\frac{\sigma^2\omega_0^2 t}{2}\right\}\sin 2\omega_0 t + \right.$$
$$\left. + \sigma^2\omega_0\left[\exp\{\sigma^2\omega_0^2 t\} - \exp\left\{-\frac{\sigma^2\omega_0^2 t}{2}\right\}\cos 2\omega_0 t\right]\right\}, \tag{1.21}$$

$$\langle y^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\exp\{\sigma^2\omega_0^2 t\} + \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{\sigma^2\omega_0^2 t}{2}\right\}\times$$
$$\times\left[\cos 2\omega_0 t - \frac{1}{4}\sigma^2\omega_0\sin 2\omega_0 t\right].$$

Таким образом, решение системы (1.19) содержит растущие со временем члены, что соответствует статистической параметрической раскачке динамической системы (1.1) за счет флуктуаций параметров. В случае слабых флуктуаций инкремент нарастания, как видно из (1.21), равен

$$\mu = \sigma^2\omega_0^2 \qquad (\sigma^2\omega_0 \ll 1).$$

Отметим, что, как следует из выражения (1.21), решение статистической задачи (1.1) имеет два характерных масштаба изменения времени: $t_1 \sim 1/\omega_0$ и $t_2 \sim 1/\sigma^2\omega_0^2$. Первый временной масштаб соответствует периоду колебаний системы (1.1) в случае отсутствия флуктаций (т. е. при $z = 0$) (быстрые процессы), а второй связан с появлением медленных изменений статистических характеристик, обусловленных наличием флуктуаций (медленные процессы). При этом $t_1/t_2 = \sigma^2\omega_0 \ll 1$. Можно построить приближенный метод, основанный на малости параметра t_1/t_2, так называемый двухвременной метод, позволяющий получать выражения типа (1.21) непосредственно, не прибегая к составлению и решению системы уравнений типа (1.19) (см., например, [72, 73]).

Для получения медленных изменений статистических характеристик процесса $x(t)$ можно исключить быстрые движения, усредняя соответствующие характеристики по времени, связанному с периодом быстрых движений (в данном случае $T = 2\pi/\omega_0$).

Обозначая такое усреднение тильдой, имеем, например,

$$\widetilde{\langle x^2(t)\rangle} = \frac{1}{2\omega_0^2}\exp\{\sigma^2\omega_0^2 t\}.$$

Величина $\widetilde{\langle x^2(t)\rangle}$ при этом не обязана удовлетворять начальным условиям (1.20). Если включить в систему (1.1) линейное трение, т. е. рассмотреть динамическую систему вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2[1 + z(t)]x, \tag{1.22}$$

то соответствующая система уравнений для вторых моментов будет выглядеть таким образом:

$$\begin{gathered}\dot{\langle x^2\rangle} = 2\langle xy\rangle, \quad \dot{\langle xy\rangle} = \langle y^2\rangle - 2\gamma\langle xy\rangle - \omega_0^2\langle x^2\rangle,\\ \dot{\langle y^2\rangle} = -4\gamma\langle y^2\rangle - 2\omega_0^2\langle xy\rangle + 2\sigma^2\omega_0^4\langle x^2\rangle.\end{gathered} \tag{1.23}$$

Будем искать решение, пропорциональное $\exp\{\lambda t\}$, тогда соответствующее характеристическое уравнение для λ примет вид

$$\lambda^3 + 6\gamma\lambda^2\langle y\rangle + 4(\omega_0^2 + 2\gamma^2)\lambda + 4\omega_0^2(2\gamma - \sigma^2\omega_0^2) = 0. \tag{1.24}$$

Как известно, необходимые и достаточные условия устойчивости, т. е. отсутствие положительных вещественных частей у корней λ_k уравнения (1.24),— это условия Рауса—Гурвица, которые для кубического уравнения (1.24) эквивалентны неравенству

$$\sigma^2 < 2\gamma/\omega_0^2. \tag{1.25}$$

Таким образом, при нарушении условия (1.25), т. е. при

$$2\gamma < \sigma^2\omega_0^2, \tag{1.26}$$

имеет место параметрическое возбуждение системы (1.1).

Более полное исследование задачи показывает, что условия параметрического возбуждения сисемы будут разными для разных моментов. Так, например, условие возбуждения четвертых моментов «слабее», чем (1.26), и имеет вид (см., например, [38])

$$\sigma^2 > \frac{2\gamma}{3\omega_0^2}\,\frac{\omega_0^2 + 3\gamma^2}{\omega_0^2 + 6\gamma^2}. \tag{1.27}$$

Отметим, что уравнения (1.16) и (1.19) можно получить и непосредственно, путем усреднения соответствующих стохастических уравнений (1.1) и (1.14), предполагая гауссовость и δ-коррелированность флуктуаций $z(t)$ и используя формулы (2.6.5) и (1.3). Так, усредняя (1.14), получаем

$$\dot{\langle A_k\rangle} = k\langle A_{k-1}\rangle - (n-k)\omega_0^2\langle A_{k+1}\rangle - \sigma^2(n-k)\omega_0^2\left\langle\frac{\delta A_{k+1}(t)}{\delta z(t)}\right\rangle. \tag{1.14'}$$

Учитывая, что $\frac{\delta A_k(t)}{\delta z(t)} = -(n-k)\omega_0^2 A_{k+1}$, (1.14′) можно записать в виде рекуррентного уравнения:

$$\langle \dot{A}_k \rangle = k \langle A_{k-1} \rangle - (n-k)\omega_0^2 \langle A_{k+1} \rangle + \\ + \sigma^2 \omega_0^4 (n-k)(n-k-1) \langle A_{k+2} \rangle \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \qquad (1.14'')$$

которое является, по сути дела, замкнутой системой $n+1$ уравнений для функций $\langle A_0 \rangle$, $\langle A_1 \rangle$, . . ., $\langle A_n \rangle$.

Что касается временных корреляций функций $x(t)$ и $y(t)$, то легко видеть, что их структура описывается динамическими уравнениями типа (1.1) при отсутствии флуктуаций, начальные условия к которым содержат одновременные корреляции, определяемые решением системы уравнений (1.19). В самом деле, пусть $t > t'$. Тогда, умножая систему уравнений (1.1) на $x(t')$ и усредняя, получаем

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)x(t')\rangle = \langle y(t)x(t')\rangle, \quad \langle x(t)x(t')\rangle|_{t=t'} = \langle x^2(t')\rangle, \qquad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}\langle y(t)x(t')\rangle = -\omega^2\langle x(t)x(t')\rangle, \quad \langle y(t)x(t')\rangle|_{t=t'} = \langle y(t')x(t')\rangle.$$

При выводе уравнений (1.28) используется тот факт, что

$$\langle z(t)x(t)x(t')\rangle = \sigma^2 \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} x(t)x(t') \right\rangle = 0 \quad \text{при } t > t'.$$

Решение системы уравнений (1.28) имеет вид

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \langle x^2(t')\rangle \cos\omega_0(t-t') + \\ + \frac{1}{\omega_0}\langle y(t')x(t')\rangle \sin\omega_0(t-t') \quad (t \geqslant t'), \qquad (1.28')$$

где величины $\langle x^2(t')\rangle$, $\langle y(t')x(t')\rangle$ соответствуют решениям системы (1.19), т. е. выражениям (1.21).

Относительно медленный рост корреляций со временем, как указывалось выше, сопровождается обычными колебательными процессами с частотой ω_0. Эти процессы можно исключить, усредняя соответствующие статистические характеристики по периоду $T = 2\pi/\omega_0$. Для этого вместо $x(t)$ и $y(t)$ введем новые переменные — амплитуду и фазу колебаний — с помощью равенств

$$x(t) = A(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \\ y(t) = \omega_0 A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \qquad (1.29)$$

Подставляя (1.29) в (1.1), получаем систему уравнений для A и φ:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} z(t) A \sin 2\psi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 z(t)\sin^2\psi, \qquad (1.30)$$

где $\psi = \omega_0 t + \varphi$. Представляя амплитуду $A(t)$ в виде $A = e^u$,

можно переписать систему (1.30) в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 z(t) \sin^2\psi, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} z(t) \sin 2\psi. \tag{1.31}$$

Начальные условия к (1.31) для примера (1.17) таковы:

$$\varphi(0) = 0, \quad u(0) = \ln 1/\omega_0. \tag{1.17'}$$

Уравнения такого типа рассматривались в § 4 гл. 3.

Рассмотрим совместную плотность вероятностей для решения системы уравнений (1.31):

$$P_t(u, \varphi) = \langle \delta(u(t) - u)\delta(\varphi(t) - \varphi)\rangle. \tag{1.32}$$

Будем считать $z(t)$ гауссовским дельта-коррелированным процессом. Тогда, учитывая равенства

$$\frac{\delta\varphi(t)}{\delta z(t)} = \omega_0 \sin^2\psi, \quad \frac{\delta u(t)}{\delta z(t)} = -\frac{\omega_0}{2} \sin 2\psi, \tag{1.33}$$

УЭФ для функции (1.32) можно записать в виде

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \{\sin^2 2\psi P_t\} - \sigma^2\omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial\varphi} \{\sin 2\psi \sin^2\psi P_t\} + \\ + \sigma^2\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial u} \{\cos 2\psi \sin^2\psi P_t\} - 2\sigma^2\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial\varphi} \{\sin^3\psi \cos\psi P_t\} + \\ + \sigma^2\omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} (\sin^4\psi P_t). \tag{1.34}$$

Усредняя (1.34) по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ (для этого достаточно усреднить тригонометрические функции, входящие в правую часть (1.34), в силу предположения о малости изменения статистических характеристик за времена $\sim T$), получаем уравнение (см., например, [74])

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{\sigma^2\omega_0^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P_t - \frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} \frac{\partial P_t}{\partial u} + \frac{3}{8} \sigma^2\omega_0^2 \frac{\partial^2 P_t}{\partial\varphi^2} \tag{1.35}$$

с начальным условием

$$P_0(u, \varphi) = \delta(\varphi)\delta(u - u_0) \qquad (u_0 = \ln 1/\omega_0). \tag{1.36}$$

Отметим, что система уравнений (1.31) соответствует системе (3.4.46) с функциями $A(u, \tilde\varphi) = C(u, \tilde\varphi) = 0$, $B(u, \tilde\varphi) = -\frac{\omega_0}{2} \sin 2\tilde\varphi$, $D = \omega_0 \sin^2\tilde\varphi$. Соответствующее УЭФ (1.35) является уравнением (3.4.49) при таком определении функций A, B, C и D. Из уравнения (1.35) следует, что статистические характеристики амплитуды и фазы колебаний (усредненные по периоду колебаний) статистически независимы и соответствующие

плотности вероятностей являются гауссовскими:

$$P_t(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2(t)}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2(t)}\right\},$$
$$P_t(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(u-\langle u\rangle)^2}{2\sigma_u^2(t)}\right\}, \tag{1.37}$$

где

$$\langle u(t)\rangle = u_0 + \frac{\sigma^2\omega_0^2}{4}t, \quad \sigma_u^2(t) = \frac{\sigma^2\omega_0^2}{4}t,$$
$$\sigma_\varphi^2(t) = \frac{3}{4}\sigma^2\omega_0^2 t. \tag{1.38}$$

Вычислим теперь выражения $\langle x(t)\rangle$ и $\langle x^2(t)\rangle$, используя (1.37), (1.38). Так, для среднего значения $\langle x(t)\rangle$ (используя формулы (1.1.20) для вычисления средних) имеем выражение

$$\langle x(t)\rangle = \langle A(t)\rangle\langle\sin(\omega_0 t + \varphi(t))\rangle =$$
$$= \langle e^{u(t)}\rangle \frac{1}{2i}\langle\exp\{i\omega_0 t + i\varphi\} - \exp\{-i\omega_0 t - i\varphi\}\rangle =$$
$$= \exp\left\{\langle u\rangle + \frac{1}{2}\sigma_u^2 - \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2\right\}\sin\omega_0 t = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

совпадающее с (1.18). Для величины $\langle x^2(t)\rangle$ аналогичным образом получаем

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle e^{2u}\rangle\langle\sin^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}\langle e^{2u}\rangle\{1 - \langle\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\rangle\} =$$
$$= \frac{1}{2}\exp\{2\langle u\rangle + 2\sigma_u^2\}\{1 - e^{-2\sigma_\varphi^2}\cos 2\omega_0 t\} =$$
$$= \frac{1}{2\omega_0^2}e^{\sigma^2\omega_0^2 t}\{1 - e^{-\frac{3}{2}\sigma^2\omega_0^2 t}\cos 2\omega_0 t\},$$

совпадающее с выражением (1.21) с точностью до членов порядка $\sigma^2\omega_0 \ll 1$.

При наличии линейного трения система описывается уравнением (1.22). Вводя в этом случае новую функцию $x(t) = e^{-\gamma t}\tilde{x}(t)$, для $\tilde{x}(t)$ получаем уравнение

$$\ddot{\tilde{x}} + \Omega^2\left[1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}z(t)\right]\tilde{x} = 0 \qquad (\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2). \tag{1.1'}$$

Считая, что $\gamma \ll \omega_0$, мы возвращаемся для $\tilde{x}$ к уравнению (1.1). Следовательно, в этом случае

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2\omega_0^2}\exp\{(\sigma^2\omega_0^2 - 2\gamma)t\}\left\{1 - \exp\left\{-\frac{3}{2}\sigma^2\omega_0^2 t\right\}\cos 2\omega_0 t\right\}$$

и параметрическое возбуждение системы имеет место при выполнении условия (1.26).

Отметим, что УЭФ (1.35) можно получить и другим способом. А именно, рассмотрим уравнения, которые назовем укороченными уравнениями:

$$\dot{u} = -\frac{\omega_0}{2}\xi_1(t), \quad \varphi = \omega_0\xi_2(t), \tag{1.39}$$

где введены новые случайные процессы

$$\xi_1(t) = z(t)\sin 2\psi, \quad \xi_2(t) = z(t)\sin^2\psi. \tag{1.40}$$

Используя равенства (1.33), легко можно найти статистические характеристики процессов $\xi_i(t)$. Так, для их средних значений имеем

$$\begin{aligned} \langle\xi_1(t)\rangle &= 2\omega_0\sigma^2\langle\cos 2\psi\sin^2\psi\rangle, \\ \langle\xi_2(t)\rangle &= 2\omega_0\sigma^2\langle\sin^3\psi\cos\psi\rangle. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Усредняя теперь (1.41) по периоду колебаний T, получаем

$$\langle\tilde{\xi}_1(t)\rangle = -\frac{\omega_0\sigma^2}{2}, \quad \langle\tilde{\xi}_2(t)\rangle = 0. \tag{1.42}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \langle\widetilde{\xi_1(t)\xi_1(t')}\rangle &= \frac{\omega_0^2\sigma^4}{4} + \sigma^2\delta(t-t'), \\ \langle\widetilde{\xi_1(t)\xi_2(t')}\rangle &= 0, \quad \langle\widetilde{\xi_2(t)\xi_2(t')}\rangle = \sigma^2\delta(t-t'), \end{aligned} \tag{1.43}$$

и УЭФ (1.35) соответствует УЭФ для укороченных уравнений (1.39) при условии, что процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ можно рассматривать как гауссовские дельта-коррелированные процессы, а их статистические характеристики описываются формулами (1.42), (1.43) [74]. Конечно, это накладывает ограничения на интенсивность флуктуаций $z(t)$.

Отметим, что с формальной точки зрения УЭФ (1.35) для медленных изменений статистических характеристик $u(t)$ и $\varphi(t)$, описываемых уравнениями (1.31), можно получить следующим путем.

1. Не будем учитывать то обстоятельство, что $\psi = \psi(t) = \omega_0 t + \varphi$, т. е. «заморозим» время t в правой части (1.31). Тогда, как показано в гл. 4, можно написать уравнение для совместной плотности вероятностей $u(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\frac{\partial P_t(u,\varphi)}{\partial t} = \dot{\Theta}_t\left[\frac{\omega_0}{2i}\frac{\partial}{\partial u}\sin 2\psi - \frac{\omega_0}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin^2\psi\right]P_t(u,\varphi),$$

где $\Theta_t[v(\tau)]$ — логарифм характеристического функционала процесса.

2. Учитывая, что уравнение будет усредняться по временам $\sim T = 2\pi/\omega_0$, а это может быть справедливым только для флуктуаций $z(t)$ малой интенсивности, необходимо разложить $\Theta_t[v(\tau)]$ в ряд по интенсивности флуктуаций $z(t)$. В результате приходим к УЭФ (1.34).

3. Усредняя (1.34) по t, получаем УЭФ (1.35). Таким образом, по-видимому, переход к статистическим характеристикам, усредненным по периоду быстрых осцилляций, не зависит от вида случайного процесса $z(t)$. Аналогичная ситуация имеет место и для не дельта-коррелированных процессов. В следующей главе мы рассмотрим задачу, аналогичную (1.1), только с краевыми условиями для различных процессов $z(t)$. Там будет показано, что решение задачи для медленных изменений статистических характеристик не зависит от вида процесса.

Для стохастического параметрического осциллятора с трением можно рассмотреть задачу о стационарном режиме, устанавливающемся под действием случайных сил, статистически не зависящих от флуктуаций частоты. Итак, рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega_0^2 [1 + z(t)]x + f(t), \tag{1.22'}$$

$$x(0) = y(0) = 0,$$

где $f(t)$ — гауссовский дельта-коррелированный процесс, т. е. $\langle f(t) f(t') \rangle = 2\sigma_f^2 \delta(t - t')$, а $z(t)$ — дельта-коррелированный процесс с $\langle z(t) \rangle = 0$, $\langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t')$. Усредняя (1.22′), получаем $\langle x(t) \rangle = \langle y(t) \rangle = 0$. Уравнения для вторых моментов в этом случае выглядят как система уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = 2\langle xy \rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle xy \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma \langle xy \rangle - \omega_0^2 \langle x^2 \rangle, \\ &\frac{d}{dt}\langle y^2 \rangle = -4\gamma \langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle xy \rangle + 2\sigma^2 \omega_0^4 \langle x^2 \rangle + 2\sigma_f^2, \end{aligned} \tag{1.23'}$$

стационарное решение которой существует при $\sigma^2 \omega_0^2 > 2\gamma$ и выглядит так:

$$\langle xy \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{\omega_0^2 (\sigma^2 \omega_0^2 - 2\gamma)}, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{\sigma^2 \omega_0^2 - 2\gamma}.$$

Подробный анализ поведения стационарного решения для старших моментов и плотности вероятностей решения уравнений (1.22′) содержится в работе [75].

Аналогичным образом можно найти и стационарные корреляционные функции решения системы (1.22′).

Мы рассмотрели систему уравнений (1.1) в приближении дельта-коррелированного процесса. Оценим теперь, в каких случаях это возможно. В принципе следовало бы рассматривать уравнение для плотности вероятностей типа уравнений (2.1.15). Однако если интересоваться только моментами соответствующего распределения, то достаточно выяснить условия применимости формул (1.18) для средних значений, уравнений (1.19) для корреляций и т. д. Рассмотрим вывод условий применимости формул (1.18) для средних величин, следуя работе [15]. Этот вывод является

иллюстрацией общего метода последовательных приближений, изложенного в третьей главе.

Усредним систему уравнений (1.1). Для вычисления корреляции $\langle z(t)x(t)\rangle$ воспользуемся выражением (2.3.6). Тогда система уравнений для средних величин примет вид

$$\langle \dot{x}\rangle = \langle y\rangle, \quad \langle \dot{y}\rangle = -\omega_0^2\langle x\rangle - \omega_0^2\int_0^t d\tau\, B(t-\tau)\left\langle \frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle. \tag{1.44}$$

Отметим, что интеграл, стоящий в правой части (1.44), является совместным кумулянтом для процесса $z(t)$ и решения $x(t)$ задачи (1.1) (см. формулу (2.3.19)).

Система уравнений (1.44) не замкнута, так как содержит новую неизвестную функцию $\delta x(t)/\delta z(\tau)$. Уравнение для нее получим, варьируя (1.1) по $z(\tau)$ при $\tau < t$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)} = \frac{\delta y(t)}{\delta z(\tau)}, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta y(t)}{\delta z(\tau)} = -\omega_0^2[1+z(t)]\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Начальными условиями для (1.45), в силу (1.3), будут условия

$$\frac{\delta x(\tau)}{\delta z(\tau)} = 0, \quad \frac{\delta y(\tau)}{\delta z(\tau)} = -\omega_0^2 x(\tau). \tag{1.46}$$

При усреднении системы (1.45) возникает новая неизвестная функция $\delta^2 x(t)/\delta z(\tau_1)\delta z(\tau_2)$, связанная со второй кумулянтной функцией $z(t)$ и $x(t)$, и т. д. Если воспользоваться условием дельта-коррелированности ($B(\tau) = 2\sigma^2\delta(\tau)$) в (1.44), то мы придем к системе уравнений (1.16), соответствующей УЭФ. Затем условие дельта-коррелированности можно использовать в системе уравнений (1.45). При этом мы получим замкнутую систему уравнений более высокого порядка, являющуюся уже более точной. На этом этапе, усредняя (1.45), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle = \left\langle\frac{\delta y(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\delta y(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle = -\omega_0^2\left\langle\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle \end{aligned} \tag{1.47}$$

с начальными условиями, согласно (1.46),

$$\left\langle\frac{\delta x(\tau)}{\delta z(\tau)}\right\rangle = 0, \quad \left\langle\frac{\delta y(\tau)}{\delta z(\tau)}\right\rangle = -\omega_0^2\langle x(\tau)\rangle. \tag{1.48}$$

Решение системы (1.47) с условиями (1.48) имеет вид

$$\left\langle\frac{\delta x(t)}{\delta z(\tau)}\right\rangle = -\omega_0\langle x(\tau)\rangle\sin\omega_0(t-\tau), \tag{1.49}$$

и, следовательно, систему уравнений (1.44) можно записать в виде

интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle + \omega_0^2\langle x\rangle = \omega_0^3\int_0^t d\tau\, B(\tau)\sin\omega_0\tau\,\langle x(t-\tau)\rangle. \qquad (1.50)$$

Уравнение (1.50) решается, например, с помощью преобразования Лапласа, однако мы этого здесь делать не будем, так как нас интересуют в данном случае только условия применимости уравнений (1.16) (см. следующий параграф).

Характерным временем изменения величины $\langle x\rangle$ является $t \sim 1/\omega_0$, а величина $B(\tau)$ имеет характерное время корреляции τ_0. Если $\omega_0\tau_0 \ll 1$, то можно пренебречь изменением величины $\langle x(t-\tau)\rangle$ и ограничиться первым членом разложения $\sin\omega_0\tau$ по τ. Таким образом, можно правую часть (1.50) записать в виде

$$\omega_0^4\langle x(t)\rangle\int_0^t d\tau\,\tau B(\tau).$$

Для времен $t \gg \tau_0$ верхний предел интегрирования в (1.50) можно заменить на бесконечность, и, следовательно, при условии $\sigma^2\omega_0^2\tau_0 \ll 1$ ($\sigma^2 = B(0)$) уравнение (1.50) переходит в уравнение соответствующее УЭФ (1.7).

Таким образом, условиями применимости решения (1.17) являются условия

$$\omega_0\tau_0 \ll 1, \quad t \gg \tau_0, \quad \sigma^2\omega_0^2\tau_0 \ll 1, \qquad (1.51)$$

которые, вообще говоря, накладывают слабое ограничение на интенсивность флуктуаций σ^2. Последнее неравенство при этом имеет прозрачный физический смысл и соответствует требованию, чтобы система за время τ_0 не успевала бы параметрически возбудиться.

§ 2. Процессы с конечным радиусом корреляции

Рассмотрим теперь задачу (1.1) в случае, когда процесс $z(t)$ обладает конечным радиусом корреляции.

Для рассмотрения статистических характеристик задачи (1.1) можно воспользоваться формулами, полученными в четвертой главе для систем уравнений общего вида, конкретизируя их для системы (1.1). Однако мы этого делать не будем для большей наглядности, а получим все результаты непосредственно, конкретно для данной задачи.

Пусть сперва процесс $z(t)$ — телеграфный случайный процесс. Усредним (1.1), в результате получаем

$$\langle \dot{x}\rangle = \langle y\rangle, \quad \langle \dot{y}\rangle = -\omega_0^2\langle x\rangle - \omega_0^2\langle z(t)x(t)\rangle. \qquad (2.1)$$

Для расщепления корреляции в (2.1) можно воспользоваться либо выражением (2.4.9), либо формулой дифференцирования

(4.3.4). С целью иллюстрации рассмотрим оба эти метода. Согласно (2.4.9) уравнения (2.1) можно записать в виде

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 \langle x \rangle - \\ -\omega_0^2 \langle z^2 \rangle \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{x}[t_1, t; z(\tau)] \right\rangle, \tag{2.2}$$

где функция $\tilde{x}(t_1, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = -\omega_0^2 \tilde{x} \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}(t_1) = x(t_1), \quad \tilde{y}(t_1) = y(t_1). \tag{2.4}$$

Решение уравнений (2.3) с условиями (2.4) имеет вид

$$\tilde{x}(t_1, t) = x(t_1)\cos\omega_0(t-t_1) + \frac{1}{\omega_0} y(t_1)\sin\omega_0(t-t_1). \tag{2.5}$$

Учитывая теперь равенства (1.3), получаем

$$\frac{\delta\tilde{x}(t_1, t)}{\delta z(t_1)} = \frac{\delta x(t_1)}{\delta z(t_1)}\cos\omega_0(t-t_1) + \frac{1}{\omega_0}\frac{\delta y(t_1)}{\delta z(t_1)}\sin\omega_0(t-t_1) = \\ = -\omega_0 x(t_1)\sin\omega_0(t-t_1). \tag{2.6}$$

Следовательно, система уравнений (2.2) становится замкнутой:

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 \langle x \rangle + \\ + \omega_0^3 \langle z^2 \rangle \int_0^t dt_1 \exp\{-2\nu(t-t_1)\} \langle x(t_1) \rangle \sin\omega_0(t-t_1). \tag{2.7}$$

Система уравнений (2.7) совпадает с уравнением (1.50), если в последнем считать корреляционную функцию $B(\tau)$ экспоненциальной. Такое совпадение обусловлено тем фактом, что в системе уравнений (1.1) флуктуирующий параметр $z(\tau)$ находится при $x(t)$, а не при $y(t)$. В противном случае такого совпадения не будет.

Уравнения (2.7) можно решить с помощью преобразования Лапласа. Так, при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ для преобразования Лапласа величины $\langle x(t) \rangle$ получаем выражение

$$\langle x \rangle_p = F(p)L(p+2\nu)/[L(p)L(p+2\nu) - \omega_0^4 \langle z^2 \rangle],$$

где

$$F(p) = px_0 + y_0, \quad L(p) = p^2 + \omega_0^2. \tag{2.7'}$$

Для телеграфного процесса $z(t)$ систему (2.7) можно получить и другим путем, а именно, согласно формуле дифференцирования

(4.3.4), для корреляции $\langle z(t)x(t)\rangle$ в (2.1) можно написать уравнение

$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle z(t)\,x(t)\rangle=\langle z(t)\,\dot{x}(t)\rangle=\langle z(t)\,y(t)\rangle. \qquad (2.8)$$

Аналогичное уравнение имеем и для $\langle z(t)y(t)\rangle$:

$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle z(t)\,y(t)\rangle=\langle z(t)\,\dot{y}(t)\rangle=$$
$$=-\omega_0^2\langle z(t)\,x(t)\rangle-\omega_0^2\langle z^2\rangle\langle x(t)\rangle. \qquad (2.9)$$

Система уравнений (2.1), (2.8), (2.9) замкнута, начальными условиями для нее являются условия

$$\langle x(0)\rangle=x_0,\quad \langle y(0)\rangle=y_0,\quad \langle z(t)x(t)\rangle\,|_{t=0}=\langle z(t)y(t)\rangle\,|_{t=0}=0.$$

Выражая $\langle z(t)x(t)\rangle$ и $\langle z(t)y(t)\rangle$ через $\langle x(t)\rangle$ с помощью (2.8), (2.9), приходим опять к системе уравнений (2.7). Мы не будем останавливаться на анализе системы (2.7) (это было сделано в первом параграфе). Рассмотрим теперь вторые моменты решения задачи (1.1). Действуя аналогично выводу системы (2.1), (2.8), (2.9), для вторых моментов получаем систему шести уравнений:

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle=2\langle xy\rangle,\quad \frac{d}{dt}\langle xy\rangle=\langle y^2\rangle-\omega_0^2\langle x^2\rangle-\omega_0^2\langle zx^2\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}\langle y^2\rangle=-2\omega_0^2\langle xy\rangle-2\omega_0^2\langle zxy\rangle,$$
$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle zx^2\rangle=2\langle zxy\rangle, \qquad (2.10)$$
$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle zxy\rangle=\langle zy^2\rangle-\omega_0^2\langle zx^2\rangle-\omega_0^2\langle z^2\rangle\langle x^2\rangle,$$
$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle zy^2\rangle=-2\omega_0^2\langle zxy\rangle-2\omega_0^2\langle z^2\rangle\langle xy\rangle.$$

Отметим, что предельный переход $\nu\to\infty$, $\langle z^2\rangle\to\infty$, но $\langle z^2\rangle/2\nu=\sigma^2$, приводит к приближению гауссовского дельта-коррелированного случайного процесса (так как при таком переходе $\langle zx^2\rangle\to 0$, $\langle zxy\rangle\to-\sigma^2\omega_0^2\langle x^2\rangle$), и мы приходим к системе уравнений (1.19). Систему уравнений (2.10) легко решить с помощью преобразования Лапласа, что будет сделано в дальнейшем. Аналогичным образом для корреляционной функции $\langle x(t)x(t')\rangle$ получаем систему четырех уравнений:

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)\,x(t')\rangle=\langle y(t)\,x(t')\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}\langle y(t)\,x(t')\rangle=-\omega_0^2\langle x(t)\,x(t')\rangle-\omega_0^2\langle z(t)\,x(t)\,x(t')\rangle,$$
$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle z(t)\,x(t)\,x(t')\rangle=\langle z(t)\,y(t)\,x(t')\rangle, \qquad (2.10')$$
$$\left(\frac{d}{dt}+2\nu\right)\langle z(t)\,y(t)\,x(t')\rangle=-\omega_0^2\langle z(t)x(t)x(t')\rangle-\omega_0^2\langle z^2\rangle\langle x(t)x(t')\rangle,$$

начальные условия для которой при $t = t'$ выражаются через решение уравнений (2.10).

Пусть теперь $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс. В этом случае систему уравнений (2.1) можно переписать следующим образом (см. (2.4.15′)):

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 \langle x \rangle - \omega_0^2 \langle a\tilde{x}_t [a] \rangle e^{-\nu t} - \nu\omega_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-\nu(t-t_1)} \langle a\tilde{x}_t [t_1\, a;\, z] \rangle, \tag{2.11}$$

где функция $\tilde{x}_t [t_1, a; z]$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot{\tilde{x}}_t = \tilde{y}_t, \quad \dot{\tilde{y}}_t = -\omega_0^2 \tilde{x}_t - \omega_0^2 a\tilde{x}_t \tag{2.12}$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_{t_1} [t_1, a; z] = x(t_1), \quad \tilde{y}_{t_1} [t_1, a; z] = y(t_1), \tag{2.13}$$

а $\tilde{x}_t [a] = \tilde{x}_t [0, a; z]$. Решение системы уравнений (2.12) с начальными условиями (2.13) выглядит так:

$$\tilde{x}_t [t_1, a; z] = x(t_1) \cos \omega_0 \sqrt{1+a}\,(t - t_1) + y(t_1) \frac{\sin \omega_0 \sqrt{1+a}\,(t - t_1)}{\omega_0 \sqrt{1+a}},$$

и, следовательно, систему уравнений (2.11) можно переписать в замкнутой форме:

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 \langle x \rangle -$$
$$- \omega_0^2 e^{-\nu t} \left[x_0 \langle a \cos \omega_0 \sqrt{1+a}\, t \rangle + y_0 \left\langle a \frac{\sin \omega_0 \sqrt{1+a}\, t}{\omega_0 \sqrt{1+a}} \right\rangle \right] -$$
$$- \nu\omega_0^2 \int_0^t dt_1 \exp\{-\nu(t - t_1)\} \left\{ \langle x(t_1) \rangle \langle a \cos \omega_0 \sqrt{1+a}\,(t - t_1) \rangle + \right.$$
$$\left. + \langle y(t_1) \rangle \left\langle a \frac{\sin \omega_0 \sqrt{1+a}\,(t - t_1)}{\omega_0 \sqrt{1+a}} \right\rangle \right\}. \tag{2.14}$$

Система уравнений (2.14), так же как и для телеграфного процесса, может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем

$$\langle x \rangle_p = \frac{y_0 + px_0}{L(p) + \omega_0^2 C_1(p)/C_0(p)}, \tag{2.14′}$$

где $L(p) = p^2 + \omega_0^2$, $C_k(p) = \langle a^k / [L(p + \nu) + a\omega_0^2] \rangle$. Формула (2.14′) совпадает с решением уравнения общего вида (4.3.71), если учесть в последнем, что $L(p) = p^2 + \omega_0^2$, $M[p, q] = \omega_0^2$.

Вернемся теперь к исходному стохастическому уравнению, описывающему параметрическое возбуждение осциллятора за

счет флуктуаций частоты:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2 z(t) x = 0, \quad x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = y_0. \tag{2.15}$$

Пусть теперь $z(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t)$, где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с корреляционной функцией

$$\langle z_i(t) z_j(t') \rangle = \langle z^2 \rangle \delta_{ij} \exp\{-\alpha \mid t - t' \mid\}. \tag{2.16}$$

Поскольку для этого уравнения (см. § 3 гл. 4) $L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$, $M[p, q] = \omega_0^2$, преобразование Лапласа для среднего от решения (2.15) описывается конечным отрезком цепной дроби

$$\langle x \rangle_p = F(p) K_0(p), \quad K_l(p) = [A_l(p) - B_l(p) K_{l+1}(p)]^{-1}, \tag{2.17}$$

где

$$A_l(p) = (p + \alpha l)^2 + \omega_0^2, \quad B_l(p) = \langle z^2 \rangle (l + 1)(N - l)\omega_0^4,$$

а $F(p) = x_0 p + y_0$. Так, если $N = 1$, то цепная дробь (2.17) принимает вид

$$\langle x \rangle_p = F(p) \left[p^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^4 \langle z^2 \rangle}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right]^{-1}, \tag{2.18}$$

что соответствует решению системы уравнений (2.7) с помощью преобразования Лапласа (формула (2.7′)). Решение (2.18) было получено ранее во многих работах.

Если теперь в (2.17) положить $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу при $N \to \infty$, то, согласно результатам гл. 4, получаем решение задачи в случае гауссовского марковского процесса $z(t)$ с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t') \rangle = \sigma^2 \exp\{-\alpha \mid t - t' \mid\} \tag{2.19}$$

в виде бесконечной цепной дроби (2.17) с параметрами

$$A_l(p) = (p + \alpha l)^2 + \omega_0^2, \quad B_l = \sigma^2 (l + 1)\omega_0^4. \tag{2.20}$$

Это выражение было получено ранее другим путем в [19].

Рассмотрим теперь квадрат величины $x(t)$, описывающий энергию системы (1.1). Эта величина, как функция времени, описывается уравнением ($u = x^2(t)$)

$$\frac{d^3 u}{dt^3} + 4\omega_0^2 \frac{du}{dt} + 2\omega_0^2 \left(z(t) \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} z(t) u \right) = 0 \tag{2.21}$$

с начальными условиями

$$u(0) = x_0^2, \quad \dot{u}(0) = 2x_0 y_0, \quad \ddot{u}(0) = 2y_0^2 - \omega_0^2 [1 + z(0)] x_0^2. \tag{2.22}$$

В этом случае (2.21) также относится к уравнению типа (4.3.54),

рассмотренному в четвертой главе, с операторами

$$L(p) = p(p^2 + 4\omega_0^2), \quad M[p, q] = 2\omega_0^2 (p + q). \tag{2.23}$$

Начальное условие для (2.21) содержит в себе значение процесса $z(t)$ при $t = 0$, т. е. начальное условие, вообще говоря, коррелировано с коэффициентами уравнения. Если, например, $x(0) = 0$, то корреляции нет и решение уравнения (2.21) имеет вид отрезка цепной дроби

$$\langle u \rangle_p = F(p)\, K_0(p), \quad K_l(p) = [A_l(p) - B_l(p)\, K_{l+1}(p)]^{-1}, \tag{2.24}$$

где $F(p) = 2y_0^2$,

$$\begin{aligned} A_l(p) &= (p + \alpha l)\,[(p + \alpha l)^2 + 4\omega_0^2], \\ B_l(p) &= 4\langle z^2 \rangle (l + 1)(N - l)\,\omega_0^4 [2p + \alpha(2l + 1)]^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В случае $N = 1$ получаем решение, соответствующее одному телеграфному процессу:

$$\langle u \rangle_p = \frac{F(p)\, L(p + \alpha)}{L(p)\, L(p + \alpha) - \langle z^2 \rangle M^2(p)} \qquad (M(p) = 2\omega_0^2 (2p + \alpha)). \tag{2.25'}$$

Это выражение обобщает решение задачи (1.19) на случай телеграфного процесса и является решением системы уравнений (2.10). Полагая теперь $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем решение для гауссовского случайного процесса $z(t)$ в виде бесконечной цепной дроби (2.24) с параметрами

$$\begin{aligned} A_l(p) &= (p + \alpha l)\,[(p + \alpha l)^2 + 4\omega_0^2], \\ B_l(p) &= 4\sigma^2 \omega_0^4 (l + 1)\,[2p + \alpha(2l + 1)]^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Это решение впервые было получено в работе [19].

Аналогичные решения можно получить, как указывалось в четвертой главе, и в случае, когда $z(t)$ — квадрат гауссовского марковского процесса.

Рассмотренная выше задача о статистической параметрической раскачке динамической системы за счет флуктуаций параметров могла быть описана как в приближении дельта-коррелированности случайного процесса $z(t)$, так и для процессов с конечным радиусом корреляции благодаря тому факту, что начальные условия задавались в одной точке, т. е. выполнялась динамическая причинность. Если же граничные условия задаются в разных точках, то для соответствующей задачи не будет выполняться условие причинности. В этом случае надо воспользоваться теорией инвариантного погружения, позволяющей свести краевую задачу к задаче Коши. В следующей главе мы и рассмотрим пример такой задачи — волну в одномерной случайно-неоднородной среде.

Глава 7

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 1. Постановка задачи

Задача о распространении волн в одномерной среде со случайными неоднородностями традиционно привлекает внимание многих исследователей [76—90]. Это обусловлено, с одной стороны, простотой этой задачи по сравнению с аналогичными задачами для двух- или трехмерных сред и, с другой стороны, важностью ее для понимания физики процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что эта задача допускает точное решение, можно проследить на ней влияние различных моделей среды и краевых условий на статистические характеристики волны. Мы будем следовать в изложении материала работам [91, 92].

Пусть неоднородная среда располагается в области $0 < x < L$ и внутри этой области диэлектрическая проницаемость имеет вид $\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(x)$, где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ — среднее значение и $\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon^*(x)$ — флуктуирующая часть $\varepsilon(x)$ (так что $\langle\tilde{\varepsilon}(x)\rangle = 0$).

Пусть нормально к слою распространяется волна, волновое поле $U(x)$ которой удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x)U(x) = 0. \tag{1.1}$$

К уравнению такого же типа можно свести и случай наклонного падения волны на неоднородный слой. Подобная задача рассматривалась в работе [93], где было показано, что конкретный вид уравнения для электромагнитной волны зависит от ее поляризации. В этой же работе рассматривается применение развитой ниже теории к конкретной физической задаче о тепловом излучении слоистых сред. Такая слоистая среда может служить моделью для льдов Антарктиды.

Пусть при $x > L\varepsilon(x) = \varepsilon_L = \text{const}$ $(\varepsilon_L = \varepsilon_{L_1} + i\varepsilon_{L_2})$, а при $x < 0$ $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 = \text{const}$ $(\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + i\varepsilon_{02})$.

Рассмотрим задачу о падении на неоднородный слой из области $x > L$ волны $U_0(x) = A_L \exp\{-ik_L(x-L)\}$, где $k_L = \omega\sqrt{\varepsilon_L}/c$ (рис. 13). Тогда волновое поле при $x > L$ будет (с учетом отраженной волны) следующим:

$$U(x) = A_L \exp\{-ik_L(x-L)\} + B_L \exp\{ik_L(x-L)\}. \tag{1.2}$$

Здесь A_L — заданная амплитуда падающей волны, а B_L — неизвестная амплитуда отраженной волны.

В области $x < 0$ решение имеет вид

$$U(x) = A_0 \exp\{-ik_0 x\}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}, \tag{1.3}$$

где A_0 — неизвестная амплитуда прошедшей волны.

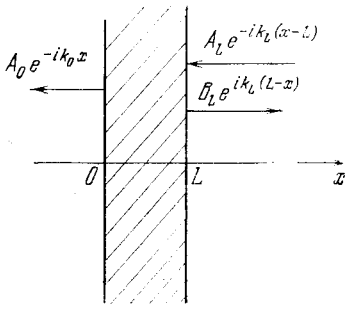

Рис. 13. На слой флуктуирующей среды из $+\infty$ падает волна $A_L \exp\{-ik_L(x-L)\}$. $B_L \exp\{ik_L(x-L)\}$ — отраженная волна, а $A_0 \exp\{-ik_0 x\}$ —прошедшая волна.

Решение внутри неоднородного слоя будем искать в виде

$$U(x) = A(x)\exp\{-ikx\} + B(x)\exp\{ikx\}, \tag{1.4}$$

где $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\bar{\varepsilon}}$. Поскольку вместо одной неизвестной функции $U(x)$ мы ввели две функции $A(x)$ и $B(x)$, их можно связать произвольным условием, которое удобно выбрать в виде

$$A'(x)\exp\{-ikx\} + B'(x)\exp\{ikx\} = 0 \tag{1.5}$$

(через штрих обозначена производная по x). В силу этого условия получаем

$$U'(x) = -ik\,[A(x)\exp\{-ikx\} - B(x)\exp\{ikx\}]. \tag{1.6}$$

На границах слоя $x = 0$ и $x = L$ должны выполняться условия непрерывности $U(x)$ и $U'(x)$. Они имеют вид*)

$$A(0) + B(0) = A_0, \quad k\,[A(0) - B(0)] = k_0 A_0; \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} A(L)\exp\{-ikL\} + B(L)\exp\{ikL\} = A_L + B_L, \\ k\,[A(L)\exp\{-ikL\} - B(L)\exp\{ikL\}] = k_L(A_L - B_L). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.6) и подставляя в (1.1), получаем уравнение

$$A'(x)\exp\{-ikx\} - B'(x)\exp\{ikx\} = -i\frac{\omega}{c\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\tilde{\varepsilon}(x)\,[A(x)\exp\{-ikx\} + B(x)\exp\{ikx\}]. \tag{1.9}$$

Уравнения (1.5) и (1.9) образуют систему уравнений для амплитуд A и B. Введем отношение полей

$$R(x) = B(x)\exp\{ikx\}/A(x)\exp\{-ikx\}.$$

---

*) Отметим, что условия (1.7), (1.8) можно записать в виде краевых условий для уравнения (1.1): $U(L) + \frac{i}{k_L}U'(L) = 2A_L$, $U(0) - \frac{i}{k_0}U'(0) = 0$.

Для этой величины из (1.5) и (1.9) легко получить уравнение

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2ikR + \frac{i\omega}{2c\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\tilde{\varepsilon}(x)[1 + R(x)]^2. \qquad (1.10)$$

Начальное условие к уравнению (1.10) следует из формул (1.7):

$$R(0) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{k - k_0}{k + k_0} = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}} - \sqrt{\bar{\varepsilon}_0}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}} + \sqrt{\bar{\varepsilon}_0}}. \qquad (1.11)$$

Если уравнение (1.10) с начальным условием (1.11) решено, т. е. найдена величина $R(L)$, то, пользуясь формулами (1.8), легко найти коэффициент отражения волны от слоя $R_L = B_L/A_L$, который выражается через $R(L)$ следующим образом:

$$R_L = \frac{(\sqrt{\varepsilon_L} - \sqrt{\bar{\varepsilon}}) + (\sqrt{\varepsilon_L} + \sqrt{\bar{\varepsilon}})R(L)}{(\sqrt{\varepsilon_L} + \sqrt{\bar{\varepsilon}}) + (\sqrt{\varepsilon_L} - \sqrt{\bar{\varepsilon}})R(L)}. \qquad (1.12)$$

Положим $\sqrt{\bar{\varepsilon}} = n_1 + in_2$ и обозначим $\frac{\omega}{c}n_1 = \varkappa$, $\frac{\omega}{c}n_2 = \gamma$. Будем считать, что $n_2 \ll n_1$, т. е. $\gamma \ll \varkappa$. Тогда в правой части уравнения (1.10) можно приближенно считать

$$\frac{\omega}{c\sqrt{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\varkappa - i\gamma}{|n|^2} \approx \frac{\varkappa}{|n|^2} = \frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|} \qquad (1.13)$$

и переписать (1.10) в виде

$$\frac{dR}{dx} = 2i(\varkappa + i\gamma)R + \frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(x)[1 + R(x)]^2. \qquad (1.14)$$

Сохранение малой величины γ в первом слагаемом правой части обеспечивает правильный учет затухания. При этом функция $R(x)$ связана с волновым полем $U(x)$ формулой

$$R(x) = \frac{kU(x) - iU'(x)}{kU(x) + iU'(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad U'(x) = \frac{dU(x)}{dx}.$$

Отметим, что введенное выше условие (1.5) фактически определяет амплитуды $A(x)$ и $B(x)$. Ввиду произвольности этого условия поля $A(x)\exp\{-ikx\}$ и $B(x)\exp\{ikx\}$ не обязательно совпадают с падающей и отраженной волной в среде, в чем легко убедиться в случае $\tilde{\varepsilon}(x) = \text{const}$. Однако коэффициент отражения волны от слоя, определенный по формуле (1.12), не зависит от способа разделения полей при $0 < x < L$. В силу этого замечания функция $R(x)$ не имеет какого-либо физического смысла. Физический смысл имеет только величина $R(L)$, так как через нее выражается коэффициент отражения волны от слоя флуктуирующей среды толщины L. Эта же величина, как функция толщины слоя, будет, очевидно, удовлетворять уравнению, вытекающему из (1.14):

$$\frac{dR(L)}{dL} = 2i(\varkappa + i\gamma)R(L) + \frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(L)[1 + R(L)]^2, \qquad (1.14')$$

с начальным условием, получающимся из (1.11):

$$R(L)|_{L=0} = \frac{k-k_0}{k+k_0}. \tag{1.11'}$$

Такая запись уравнения соответствует теории инвариантного погружения (см. гл. 5). Имея в виду сказанное выше, мы будем работать с уравнением (1.14). Отметим, что в частном случае, когда $k = k_L$, выражение (1.12) упрощается и принимает вид

$$R_L = R(L), \tag{1.15}$$

а если при этом и $k_0 = k$, то начальное условие (1.11′) станет таким:

$$R(0) = 0. \tag{1.16}$$

Для определения поля внутри среды введем функцию

$$\psi(x) = \frac{i}{k}\frac{U'(x)}{U(x)} \equiv \frac{1-R(x)}{1+R(x)}. \tag{1.17}$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению первого порядка по x (уравнение Риккати):

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = ik\left(\psi^2 - 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}\right), \quad \psi(0) = \frac{k_0}{k}. \tag{1.18}$$

Если мы знаем решение уравнения (1.18), то поле волны внутри среды можно найти из линейного дифференциального уравнения (относительно $U(x)$) (1.17), решение которого с условием $U|_{x=L} = A_L(1+R_L)$ имеет вид

$$U(x) = A_L(1+R_L)\exp\left\{ik\int_x^L d\xi\,\psi(\xi)\right\}. \tag{1.19}$$

Выражение (1.19), однако, не очень удобно для анализа. Его можно переписать в другом виде, а именно:

$$U(x) = A_L(1+R_L)\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_x^L d\xi\,[(\psi+\psi^*)+(\psi-\psi^*)]\right\}. \tag{1.20}$$

Теперь можно исключить из (1.20) мнимую часть $\psi(x)$. В самом деле, из уравнения (1.18) следует, что

$$\frac{d}{dx}(\psi+\psi^*) = i\varkappa(\psi^2-\psi^{*2}) + \gamma(2-\psi^2-\psi^{*2}) \tag{1.21}$$

(в правой части (1.21) мы пренебрегли малым членом $\gamma\tilde{\varepsilon}$), и, следовательно,

$$i\varkappa(\psi-\psi^*) = \frac{d}{dx}\ln(\psi+\psi^*) + \gamma\frac{\psi^2+\psi^{*2}-2}{\psi+\psi^*}. \tag{1.22}$$

Подставляя (1.22) в (1.20), получаем выражение для поля $U(x)$:

$$U(x) = A_L(1 + R_L)\left[\frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)}\right]^{\frac{1}{2} + \frac{i\gamma}{2\varkappa}} \times$$
$$\times \exp\left\{i\frac{\varkappa}{2}\int_x^L d\xi\,(\psi + \psi^*) - \gamma\int_x^L d\xi\,\frac{1 + \psi\psi^*}{\psi + \psi^*}\right\}. \qquad (1.23)$$

Следовательно, интенсивность волны $I = UU^*$ внутри среды описывается формулой

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*)\left[\frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)}\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-2\gamma\int_x^L d\xi\,\frac{1 + \psi\psi^*}{\psi + \psi^*}\right\} \quad (I_0 = |A_L|^2). \qquad (1.24)$$

Отметим, что в случае отсутствия поглощения ($\gamma = 0$) равенство

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*)\left[\frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)}\right] \qquad (1.24')$$

сразу следует из закона сохранения потока энергии в среде

$$\frac{d}{dx}\left(U^*\frac{dU}{dx} - U\frac{dU^*}{dx}\right) = 0, \qquad (1.25)$$

если вместо $U'(x)$ подставить ее выражение через ψ по формуле (1.17). Выразим теперь в формуле (1.24) функцию $\psi(x)$ через $R(x)$ согласно (1.17). В результате получаем равенство

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*)\frac{1 - |R(L)|^2}{1 - |R(x)|^2}\,\frac{[1 + R(x)]\,[1 + R^*(x)]}{[1 + R(L)]\,[1 + R^*(L)]} \times$$
$$\times \exp\left\{-2\gamma\int_x^L d\xi\,\frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2}\right\}, \qquad (1.26)$$

где R_L связана с величиной $R(L)$ формулой (1.12). Выражение (1.26) сильно упрощается в случае $k = k_L$ и, в силу (1.15), принимает вид

$$I(x) = I_0[1 - |R(L)|^2]\,\frac{1 + |R(x)|^2 + R(x) + R^*(x)}{1 - |R(x)|^2} \times$$
$$\times \exp\left\{-2\gamma\int_x^L d\xi\,\frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2}\right\}. \qquad (1.27)$$

Отметим, что величина $I(0)/I_0 \equiv |T|^2$ представляет собой квадрат модуля коэффициента прохождения волны через слой среды ($T = A_0/A_L$). Следовательно, полагая в (1.27) $x = 0$, получаем связь между коэффициентом прохождения и коэффициентом отражения волны при наличии поглощения в среде, которая являет-

ся, однако, очень сложной. В частном случае $k_0 = k$ эта формула упрощается:

$$|T|^2 = (1 - |R_L|^2) \exp\left\{-2\gamma \int_0^L d\xi \frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2}\right\}. \tag{1.28}$$

Введем теперь модуль и фазу комплексной функции $R(x)$:

$$R(x) = \sqrt{\frac{u(x) - 1}{u(x) + 1}} \exp\{i\varphi(x)\}, \quad u \geqslant 1. \tag{1.29}$$

Тогда формулу (1.27) можно записать как

$$I(x) = \frac{2I_0}{1 + u(L)} [u(x) + \sqrt{u^2(x) - 1} \cos\varphi(x)] \times$$
$$\times \exp\left\{-2\gamma \int_x^L d\xi\, u(\xi)\right\}, \tag{1.30}$$

а сами функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ описываются уравнениями, вытекающими из (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -2\gamma(u^2 - 1) + \varkappa \frac{\tilde{\varepsilon}}{|\tilde{\varepsilon}|} \sqrt{u^2 - 1} \sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dx} &= 2\varkappa + \varkappa \frac{\tilde{\varepsilon}}{|\tilde{\varepsilon}|} \left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos\varphi\right], \end{aligned} \tag{1.31}$$

с начальными условиями, получающимися из равенства

$$\sqrt{\frac{u(0) - 1}{u(0) + 1}} \exp\{i\varphi(0)\} = \frac{k - k_0}{k + k_0}. \tag{1.32}$$

Далее для разных целей нам будет удобнее использовать другие переменные. Приведем соответствующие обозначения и уравнения в новых переменных:

$$R(x) = \rho(x) \exp\{i\varphi(x)\}, \quad \rho \geqslant 0, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} &= -2\gamma\rho + \frac{\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|} (1 - \rho^2) \sin\varphi, \qquad \rho(0) = \left|\frac{k - k_0}{k + k_0}\right|, \\ \frac{d\varphi}{dx} &= 2\varkappa + \frac{\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|} \left[2 + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos\varphi\right], \quad \varphi(0) = \arg\frac{k - k_0}{k + k_0}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$I(x) = I_0 \frac{1 - \rho^2(L)}{1 - \rho^2(x)} \{1 + \rho^2(x) + 2\rho\cos\varphi\} \exp\left\{-2\gamma \int_x^L d\xi \frac{1 + \rho^2(\xi)}{1 - \rho^2(\xi)}\right\}. \tag{1.35}$$

Если же представить $R(x)$ следующим образом:

$$R(x) = \exp\{-\tilde{u}(x) + i\varphi(x)\}, \quad 0 \leqslant \tilde{u}(x) < \infty, \tag{1.36}$$

то

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = 2\gamma + \varkappa \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|} \sin\varphi \operatorname{sh}\tilde{u}(x),$$
$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\varkappa - \varkappa \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|} [1 + \cos\varphi \operatorname{ch}\tilde{u}(x)]. \tag{1.37}$$

Отметим, что все системы (1.31), (1.34), (1.37) имеют общую структуру, соответствующую системе уравнений (3.4.46).

Аналогичным методом можно рассмотреть и задачу, когда источник волн находится внутри слоя случайно-неоднородной среды [84] (при отсутствии затухания).

§ 2. Статистические характеристики коэффициентов отражения и прохождения волны

Обратимся теперь к статистическому описанию характеристик волны. Важной особенностью как уравнения (1.14), так и уравнений, вытекающих из него: (1.31), (1.34), (1.37), является то обстоятельство, что их решения $R(x)$ (или $\{u(x), \varphi(x)\}$) зависят лишь от предшествующих по x значений случайной функции $\tilde{\varepsilon}(x')$ при $x' \leqslant x$, т. е. для этих решений выполняется условие динамической причинности. В то же время решение уравнения (1.1) этим свойством не обладает, так как граничные условия к нему ставятся на обоих концах неоднородного слоя. Поэтому для уравнений (1.31) и т. п. можно использовать приближение дельта-коррелированного случайного процесса и исследовать, в каких случаях такая аппроксимация оказывается справедливой. Этот вопрос мы исследуем несколько позже, а сейчас будем считать, что $\tilde{\varepsilon}(x)$ — гауссовская случайная функция с корреляционной функцией

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x)\, \tilde{\varepsilon}(x') \rangle = 2\sigma^2 l\, \delta(x - x'), \tag{2.1}$$

где l — радиус корреляции для $\tilde{\varepsilon}(x)$ ($l > 0$). Решение системы уравнений (1.31) является марковским процессом, т. е. $\{u(x), \varphi(x)\}$ — марковский двумерный процесс, описываемый соответствующим УЭФ. Если интенсивность флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ достаточно мала и γ также мало, то переменная $\varphi(x)$ имеет структуру

$$\varphi(x) = \varphi(0) + 2\varkappa x + \tilde{\varphi}(x), \tag{2.2}$$

где статистические характеристики функций $u(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ медленно меняются на расстояниях порядка длины волны $2\pi/\varkappa$, в то время как в правой части (1.31) имеются быстро меняющиеся функции. Поэтому по аналогии со случаем параметрического резонанса, рассмотренным в предыдущей главе (см. также § 4 гл. 3), для определения медленных изменений статистических характеристик можно усреднить УЭФ по периоду быстрых изменений.

Рассмотрим плотность вероятностей $P_x(u)$ решения системы уравнений (1.31)

$$P_x(u) = \langle \delta(u(x) - u) \rangle. \tag{2.3}$$

Дифференцируя (2.3) по x и используя (1.31), получаем уравнение

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) P_x(u) - \\ - \frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2 - 1} \langle \tilde{\varepsilon}(x) \sin\varphi\, \delta(u(x) - u) \rangle. \tag{2.4}$$

Для расщепления корреляции в (2.4) воспользуемся формулой (2.6.4):

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) P_x(u) - \\ - \frac{\varkappa\sigma^2 l}{|\bar{\varepsilon}|} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2 - 1} \left[\left\langle \cos\varphi \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} \delta(u(x) - u) \right\rangle - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \sin\varphi\, \delta(u(x) - u) \frac{\delta u(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} \right\rangle \right]. \tag{2.5}$$

Учитывая теперь равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta u(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= \frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|} \sqrt{u^2 - 1} \sin\varphi(x), \\ \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= \frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|} \left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos\varphi(x) \right], \end{aligned} \tag{2.6}$$

вытекающие непосредственно из уравнений (1.31), можно переписать (2.5) в виде

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial u} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) P_x(u) - \\ - 2D \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2 - 1} \left\{ \left\langle \cos\varphi \left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos\varphi \right] \delta(u(x) - u) \right\rangle - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial u} \langle \sin^2\varphi \sqrt{u^2 - 1}\, \delta(u(x) - u) \rangle \right\}. \tag{2.7}$$

Как мы говорили выше, переменная $\varphi(x)$ имеет структуру (2.2). Поэтому, усредняя (2.7) по периоду быстрых осцилляций тригонометрических функций, получаем замкнутое уравнение для $P_x(u)$ [86, 87]:

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) P_x(u) + D \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_x(u), \tag{2.8}$$

где коэффициент диффузии $D = \frac{\varkappa^2}{2|\bar{\varepsilon}|^2} \sigma^2 l$. Это уравнение соответствует уравнению (3.4.50) для данной задачи. Если теперь рассмотреть двухточечную плотность вероятностей $P(u_x, x;\ u_y, y)$,

то для нее получается уравнение типа (2.8) по переменной $x > y$. Это означает, что для вычисления медленных изменений многоточечных статистических характеристик процесса $u(x)$ можно рассматривать его как марковский процесс, плотность вероятностей перехода которого также удовлетворяет уравнению (2.8) с соответствующим начальным условием.

В общем случае уравнение (2.8) решить не удается. Имеется, однако, стационарное распределение вероятностей при $x \to \infty$ (напомним, что для переменной $R(x)$ роль x играет параметр L — толщина слоя) [86, 87]:

$$P_\infty(u) = \frac{2\gamma}{D} \exp\left\{-\frac{2\gamma}{D}(u-1)\right\} \qquad (u \geqslant 1), \tag{2.9}$$

с помощью которого можно оценить, например, величину

$$\langle |R(L)|^2 \rangle = \int_1^\infty du \frac{u-1}{u+1} P_\infty(u).$$

При $2\gamma/D \gg 1$ распределение вероятностей (2.9) сосредоточено вблизи $u \sim 1$ и, следовательно,

$$\langle |R(L)|^2 \rangle \approx \frac{D}{4\gamma}.$$

Если же $2\gamma/D \ll 1$, то распределение вероятностей (2.9) имеет большую ширину и

$$\langle |R(L)|^2 \rangle \to 1 - \frac{4\gamma}{D} \ln \frac{D}{\gamma}.$$

В случае, когда слой флуктуирующей среды не поглощает волну, т. е. все величины k вещественны, $\gamma = 0$ и уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) \frac{\partial P_x(u)}{\partial u} \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) получено описанным выше путем в работе [80]. Это же уравнение было выведено ранее в работах [76] с использованием красивой аналогии рассматриваемой задачи с броуновским движением частицы на плоскости Лобачевского; при этом величины u и φ в выражении (1.29) связаны с полярными координатами на этой плоскости. Решение уравнения (2.10) с начальным условием $P_{x=L}(u_x) = \delta(u_x - u_L)$ определяет плотность вероятностей перехода и записывается в виде интеграла Мелера — Фока (см. гл. 3):

$$p(u_L, L \mid u_x, x) = \\ = \int_0^\infty d\mu\, \mu\, \mathrm{th}\, \mu\pi \exp\left\{-D\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(L - x)\right\} P_{-1/2+i\mu}(u_L) P_{-1/2+i\mu}(u_x), \tag{2.11}$$

где $P_{-1/2+i\mu}(u)$ — функция Лежандра первого рода (функция конуса), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{du}(u^2-1)\frac{d}{du}P_{-1/2+i\mu}(u) = -\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)P_{-1/2+i\mu}(u). \qquad (2.12)$$

Рассмотрим теперь частный случай $k_0 = k$. Тогда начальное условие для (2.10), определяющее одноточечную плотность вероятностей, будет

$$P_0(u) = \delta(u-1),$$

что соответствует условию $R(0) = 0$ в (1.11′). При этом решение уравнения (2.10) упрощается и принимает вид

$$P_x(u) = \int_0^\infty d\mu\,\mu\,\mathrm{th}\,\mu\pi \exp\left\{-D\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)x\right\}P_{-1/2+i\mu}(u). \qquad (2.13)$$

Используя интегральное представление для функции Лежандра (см. гл. 3), можно переписать (2.13) следующим образом [80]:

$$P_L(\mathrm{ch}\,u) = \frac{\exp\{-DL/4\}}{2\sqrt{2\pi}(DL)^{3/2}}\int_u^\infty dx\,\frac{x\exp\left\{-\frac{x^2}{4D}\right\}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}\,u}}. \qquad (2.14)$$

С помощью распределения (2.14) легко вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения и прохождения волны. Так, для величин $\langle|R(L)|^2\rangle$ и $\langle|T|^2\rangle$ получаем выражения

$$\langle|R(L)|^2\rangle = \int_1^\infty du\,\frac{u-1}{u+1}P_L(u) = 1-\langle|T|^2\rangle,$$

$$\langle|T|^2\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{DL}{4}\right\}\int_0^\infty dx\,\frac{x^2e^{-x^2}}{\mathrm{ch}\,(x\sqrt{DL})}. \qquad (2.15)$$

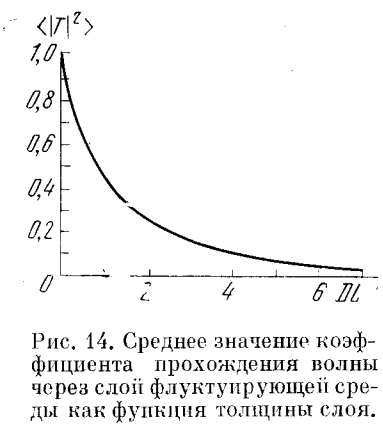

Рис. 14. Среднее значение коэффициента прохождения волны через слой флуктуирующей среды как функция толщины слоя.

На рис. 14 по данным работы [80] приведен результат численного интегрирования для величины $\langle|T|^2\rangle$ как функции параметра DL. Из рисунка видно, что при $L\to\infty$ $(DL \gg 1)$ $\langle|T(L)|^2\rangle \to 0$, т. е. одномерная среда, занимающая полупространство, полностью отражает волну. При этом все моменты величины $|R(L)|^2$ стремятся к 1 (см. следующий параграф).

§ 3. Флуктуации интенсивности волны внутри слоя среды (стохастический волновой параметрический резонанс)

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении статистических характеристик интенсивности волны внутри среды. Как мы говорили, интенсивность волны описывается формулой (1.30), где функция $\varphi(x)$ имеет структуру (2.2), а функции $u(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ медленно меняются на расстояниях порядка длины волны. Поэтому при изучении различных комбинаций из функций $I(x)$ целесообразно рассматривать их медленные изменения по x, т. е. предварительно усреднить по быстро меняющимся на длине волны функциям. Такое усреднение будем обозначать тильдой. Так, усреднение выражения (1.30) дает

$$\tilde{I}(x) = \frac{2I_0 u(x)}{1 - u(L)} \exp\left\{-2\gamma \int_x^L d\xi\, u(\xi)\right\}. \tag{3.1}$$

Эта формула была найдена ранее в работе [89]. Аналогичным образом получаем

$$\tilde{I}^2(x) = \frac{2I_0}{(1 - u(L))^2} (3u^2(x) - 1) \exp\left\{-4\gamma \int_x^L d\xi\, u(\xi)\right\} \tag{3.2}$$

и т. п. Далее, без ограничения общности положим $I_0 = 1/2$. Как указывалось выше, функция $u(x)$ в (3.1), (3.2) и т. п. является марковским случайным процессом. Если при этом систему (1.31) для функции $u(x)$ дополнить уравнением

$$\frac{dq}{dx} = 2\gamma u(x), \quad q(0) = 0, \tag{3.3}$$

то для нахождения медленно меняющихся статистических характеристик $u(x)$ и $q(x)$ можно рассматривать их как совместный марковский процесс, плотность вероятностей которого описывается уравнением (2.8) с добавлением в правую часть члена $-2\gamma \frac{\partial}{\partial q} u P_x$. При этом можно, пользуясь плотностью вероятностей перехода и одноточечной вероятностью $u(x)$, $q(x)$, вычислить все одноточечные статистические характеристики интенсивности волны. Однако решить уравнение для плотности вероятностей в этом случае затруднительно.

Рассмотрим подробно случай отсутствия поглощения, т. е. $\gamma = 0$. Тогда плотность вероятностей перехода и одноточечная плотность вероятностей описываются формулами (2.11), (2.13), а нахождение одноточечных моментов интенсивности сводится к квадратурам. Так, для величины $\tilde{I}^n(x)$ получаем выражение

$$\tilde{I}^n(x) = \frac{g_n(u_x)}{[1 - u(L)]^n}, \tag{3.4}$$

где $g_n(u_x)$ — полином по $u(x)$ степени n, и, следовательно,

$$\langle \mathcal{T}^n(x)\rangle = \int_1^\infty \frac{du_L}{(1+u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_n(u_x)\, p(u_L, L \mid u_x, x)\, P_x(u_x). \qquad (3.5)$$

Отметим, что все моменты величины $I(0) = |T|^2$, как было показано выше, экспоненциально затухают с ростом толщины слоя $L \to \infty$, т. е. такой слой среды в среднем полностью отражает волну. Моменты величины $I(L) = 1 - |T|^2$ при $L \to \infty$ будут стремиться к единице. Рассмотрим теперь поведение статистических характеристик интенсивности внутри слоя. Подставляя в (3.5) выражение (2.11) для p, с помощью формулы (см., например, [50])

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} P_{-1/2+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\mu\pi} K_n(\mu),$$

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{\mu^2 + (n-1/2)^2}{2n} K_n, \quad K_1 = 1, \qquad (3.6)$$

можно выполнить интегрирование по u_L и перейти к двукратному (по внешнему виду) интегралу (здесь и далее до конца параграфа обозначено $DL \to L$, $Dx \to x$):

$$\langle \mathcal{T}^n(x)\rangle = \pi \exp\left\{-\frac{1}{4}(L-x)\right\} \int_0^\infty d\mu\, \mu \frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}^2\mu\pi} \times$$

$$\times K_n(\mu) \exp\{-\mu^2(L-x)\} \int_1^\infty du\, g_n(u)\, P_{-1/2+i\mu}(u)\, P_x(u). \qquad (3.7)$$

Поскольку $I(0) = 1/(1 + u(L))$, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{du_L}{(1+u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_k(u_x)\, p(u_L, L \mid u_x, x)\, P_x(u_x) \qquad (3.5')$$

описывает корреляции коэффициента прохождения волны с интенсивностью внутри слоя.

Дальнейшая задача заключается в вычислении внутренних интегралов в (3.7) и (3.5′). Покажем, что их вычисление сводится к решению простой системы дифференциальных уравнений. Для этого рассмотрим выражения

$$f_k(x) = \int_1^\infty du\, u^k P_{-1/2+i\mu}(u)\, P_x(u) \qquad (k = 0, 1, \ldots), \qquad (3.8)$$

являющиеся преобразованием Мелера — Фока для функций $u^k P_x(u)$ (см. гл. 3). Дифференцируя (3.8) по x, используя уравнения (2.10), (2.12) и интегрируя по частям, приходим к

уравнению

$$\frac{df_k}{dx}=\int_1^\infty du\, P_x(u)\frac{d}{du}(u^2-1)\frac{d}{du}u^k P_{-1/2+i\mu}(u)=$$

$$=-\left(\mu^2+\frac{1}{4}-k^2-k\right)f_k+2k\psi_k-k(k-1)f_{k-2}(x), \qquad (3.9)$$

где

$$\psi_k(x)=\int_1^\infty du\, u^{k-1}(u^2-1)P_x(u)\frac{d}{du}P_{-1/2+i\mu}(u). \qquad (3.10)$$

Дифференцируя теперь функцию $\psi_k(x)$ по x, аналогичным образом получаем уравнение для $\psi_k(x)$:

$$\frac{d\psi_k}{dx}=\int_1^\infty du\, P_x(u)\frac{d}{du}(u^2-1)\frac{d}{du}u^{k-1}(u^2-1)\frac{d}{du}P_{-1/2+i\mu}(u)=$$

$$=-\left(\mu^2+\frac{1}{4}-k^2+k\right)\psi_k-2k\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)f_k-$$

$$-(k-1)(k-2)\psi_{k-2}+2(k-1)\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)f_{k-2}. \qquad (3.11)$$

Начальными условиями для (3.9) и (3.11) являются, очевидно, условия

$$f_k(0)=1,\ \psi_k(0)=0.$$

Таким образом, функции $f_k(x)$ и $\psi_k(x)$ связаны замкнутой рекуррентной системой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которую не представляет труда решить. Представим решение (3.9), (3.11) в виде

$$\begin{aligned} f_k(x)&=\tilde f_k(x)\exp\left\{-\left(\mu^2+\frac{1}{4}-k^2\right)x\right\},\\ \psi_k(x)&=\tilde\psi_k(x)\exp\left\{-\left(\mu^2+\frac{1}{4}-k^2\right)x\right\}. \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Тогда для $\tilde f_k(x)$ и $\tilde\psi_k(x)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d\tilde f_k}{dx}-k\tilde f_k=2k\tilde\psi_k-k(k-1)\tilde f_{k-2}\exp\{-4(k-1)x\},$$

$$\frac{d\tilde\psi_k}{dx}+k\tilde\psi_k=-2k\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tilde f_k+$$

$$+(k-1)\left[2\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tilde f_{k-2}-(k-2)\tilde\psi_{k-2}\right]\exp\{-4(k-1)x\} \qquad (3.13)$$

с начальными условиями $\tilde f_k(0)=1$, $\tilde\psi_k(0)=0$. Отметим, что соответствующее решение однородной системы таково:

$$\tilde f_k(x)=A(\mu)\sin 2k\mu x+B(\mu)\cos 2k\mu x.$$

Рассмотрим простейшие случаи.

$$1)\quad k=0,\quad \frac{d\tilde{f}_0}{dx}=0,\quad \tilde{f}_0=1,\quad f_0(x)=\exp\left\{-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)x\right\}. \tag{3.14}$$

Тогда интеграл, получающийся из (3.5′), равен

$$\pi\int_0^\infty d\mu\,\frac{\mu\,\mathrm{sh}\,\mu\pi}{\mathrm{ch}^2\,\mu\pi}\,K_n(\mu)\exp\left\{-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)L\right\}\equiv\langle|T|^{2n}\rangle,$$

$$\langle|T|^{2n}\rangle\to\frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{4L^{3/2}}K_n e^{-L/4}\quad\text{при}\quad L\to\infty,$$

$$K_{n+1}=\frac{(n-{}^1/_2)^2}{2n}K_n,\quad K_1=1,$$

где T — коэффициент прохождения волны через слой флуктуирующей среды.

$$2)\quad k=1,\quad \frac{d\tilde{f}_1}{dx}-\tilde{f}_1=2\tilde{\psi}_1,\quad \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx}+\tilde{\psi}_1=-2\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tilde{f}_1.$$

Следовательно,

$$f_1(x)=\exp\left\{-\left(\mu^2-\frac{3}{4}\right)x\right\}\left\{\cos 2\mu x+\frac{\sin 2\mu x}{2\mu}\right\}, \tag{3.15}$$

и интеграл, получающийся из (3.5′), имеет вид

$$\pi\exp\left\{x-\frac{L}{4}\right\}\int_0^\infty d\mu\,\frac{\mu\,\mathrm{sh}\,\mu\pi}{\mathrm{ch}^2\,\mu\pi}\,K_n(\mu)\exp\{-\mu^2L\}\times$$

$$\times\left\{\cos 2\mu x+\frac{\sin 2\mu x}{2\mu}\right\}=$$

$$=\begin{cases}\langle\tilde{I}(x)\rangle\ \text{при}\ n=1,\\ \langle\tilde{I}(0)\tilde{I}(x)\rangle=\langle\tilde{I}(x)\rangle-\langle\tilde{I}(L)\tilde{I}(x)\rangle\ \text{при}\ n=2\ \text{и т. д.}\end{cases} \tag{3.16}$$

Отметим, что выражение (3.16) для $\langle\tilde{I}(x)\rangle$ было получено впервые в работе [79]. При этом функция $\langle\tilde{I}(x)\rangle$, как функция переменных L, x, удовлетворяет уравнению параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial L}\langle\tilde{I}\rangle=\frac{1}{4}\frac{\partial^2\langle\tilde{I}\rangle}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\langle\tilde{I}\rangle}{\partial x} \tag{3.16′}$$

с начальным условием

$$\langle\tilde{I}(x)\rangle|_{L=0}=\pi e^x\int_0^\infty d\mu\,\frac{\mu\,\mathrm{sh}\,\mu\pi}{\mathrm{ch}^2\,\mu\pi}\left\{\cos 2\mu x+\frac{\sin 2\mu x}{2\mu}\right\}=$$

$$=x\,\mathrm{ch}^{-2}x+e^x\,\mathrm{ch}^{-1}x.$$

$$3)\qquad k=2,\ \frac{d\tilde{f}_2}{dx}-2\tilde{f}_2=4\tilde{\psi}_2-2e^{-4x},$$

$$\frac{d\tilde{\psi}_2}{dx}+2\tilde{\psi}_2=-4\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tilde{f}_2+2\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{\mu^2 + 5/4}{2(1+\mu^2)} \cos 4\mu x + \frac{\mu^2 + 3/4}{2\mu(1+\mu^2)} \sin 4\mu x + \frac{\mu^2 + 3/4}{2(1+\mu^2)} e^{-4x}. \quad (3.17)$$

В этом случае интегралы (3.7), (3.5′) будут описывать второй момент интенсивности и корреляции квадрата интенсивности в точке x с коэффициентами прохождения и отражения волны:

$$\langle \tilde{I}^2(x) \rangle = \frac{\pi}{4} e^{-L/4} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp\{-\mu^2 L\} \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) (3\tilde{f}_2(x) e^{4x} - 1),$$

$$(3.18)$$

$$\langle \tilde{I}^2 \rangle = \frac{\pi}{2} \exp\left\{4x - \frac{L}{4}\right\} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp\{-\mu^2 L\} \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) \tilde{f}_2(x).$$

Отметим, что при $L \to \infty$ и $x \neq 0$ $\langle \tilde{I}^2 \rangle / \langle \tilde{I}^2 \rangle = 3/2$.

Таким образом, решая последовательно рекуррентную систему уравнений (3.13), можно выразить соответствующий момент интенсивности через единственную квадратуру. Интегралами такого типа, как мы видели выше, описываются и корреляции $I^n(x)$ с интенсивностью на границах слоя.

Рассмотрим теперь структуру возникающих выражений. Как мы видели выше, моменты интенсивности волны внутри слоя среды описываются интегралами вида

$$\langle \tilde{I}^n(x) \rangle \sim$$

$$\sim \exp\left\{n^2 x - \frac{L}{4}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \Phi(\mu) \exp\{-\mu^2 L + 2in\mu x\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{L}{4} + n^2 L \xi (1-\xi)\right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \Phi(\mu) \exp\{-L(\mu - in\xi)^2\},$$

$$(3.19)$$

где величина $\xi = x/L$, а $\Phi(\mu)$ — алгебраическая функция параметра μ. Если обратиться к асимптотическому случаю $L \to \infty$, ξ — фиксированная величина $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$, то из выражения (3.19) следует существование двух масштабов

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1 - \frac{1}{2n}$$

таких, что при $0 \leqslant \xi < \xi_1$ величина $\langle \widetilde{I^n} \rangle$ экспоненциально мала. При $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ величина $\langle \widetilde{I^n} \rangle$ экспоненциально велика, достигая максимума в точке $\xi \approx 1/2$, $\langle \widetilde{I^n} \rangle_{\max} \sim \exp\left\{\frac{(n^2-1)L}{4}\right\}$. При $1 \geqslant \xi > \xi_2$ величина $\langle \widetilde{I^n} \rangle$ экспоненциально быстро стремится к единице. Все вышесказанное относится к случаю $n \geqslant 2$.

Исключение составляет случай $n = 1$, когда точки ξ_1 и ξ_2 сливаются и распределение средней интенсивности носит монотонный характер. В пределе (см., например, [79]) при $L \to \infty$

$$\langle \tilde{I}(\xi)\rangle = \theta(\xi - {}^1/_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < {}^1/_2, \\ {}^1/_2 & \text{при } \xi = {}^1/_2, \\ 1 & \text{при } \xi > {}^1/_2. \end{cases}$$

Отметим, что такой ступенчатый вид средней интенсивности связан с выбором переменной $\xi = x/L$. В самом деле, при $L \to \infty$ ширина переходной области, как показано в [90], $\sim \sqrt{L}$. В масштабе же ξ она имеет вид $1/\sqrt{L}$ при $L \to \infty$. Первый масштаб определяется равенством $n^2\xi(1 - \xi) = 1/4$, а второй обусловлен тем фактом, что в силу условия $\langle \tilde{I}^n(L)\rangle \to 1$ при $L \to \infty$ основной вклад в интеграл (3.19) должен давать полюс $\mu_n = i(n - {}^1/_2)$. При этом контур интегрирования должен быть сдвинут выше значения μ_n, т. е. $\mu_n < in\xi$. Отметим, что с ростом n $\xi_1 \to 0$, а $\xi_2 \to 1$. На рис. 15 схематически изображено распределение моментных функций интенсивности волны внутри слоя среды. Тот факт, что моментные функции интенсивности экспоненциально растут внутри слоя, свидетельствует о наличии явления стохастического параметрического резонанса, аналогичного обычному параметрическому резонансу. Разница заключается в том, что, поскольку в граничных точках моменты интенсивности заданы, экспоненциальный рост происходит внутри слоя и максимальное значение достигается в его середине.

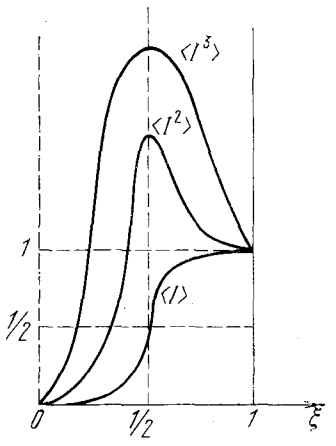

Рис. 15. Схематическое изображение поведения моментов интенсивности внутри флуктуирующей среды ($DL \gg 1$, $k = k_L$).

Аналогично одноточечным характеристикам интенсивности волны можно рассмотреть и многоточечные характеристики, такие, как корреляции интенсивности в двух и более точках внутри среды. Они также будут описываться квадратурой типа интегралов (3.16), (3.18). Найдем, например, корреляционную функцию интенсивности $B_{y,x} = \langle \tilde{I}(x)\, \tilde{I}(y)\rangle$, где $L \geqslant y \geqslant x$. Тогда по определению плотности вероятностей перехода

$$B_{y,x} = \iiint\limits_1^\infty \frac{du_x du_y du_L}{(1 + u_L)^2} u_x u_y p(u_L, L|u_y, y) p(u_y, y|u_x, x) P_x(u_x). \quad (3.20)$$

Подставляя в (3.20) интегральное представление для первой

функции p (2.11) и интегрируя по u_L, получаем выражение

$$B_{y,x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty d\mu\,\mu\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}^2\mu\pi}\exp\left\{-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)(L-y)\right\}\times$$

$$\times\int_1^\infty du_x u_x P_x(u_x)\int_1^\infty du_y u_y P_{-1/2+i\mu}(u_y)\,p(u_y, y\,|\,u_x, x). \qquad (3.21)$$

Внутренний интеграл $f_1(y) = \int_1^\infty du_y u_y P_{-1/2+i\mu}(u_y)\ p(u_y,\ y\,|u_x, x)$ можно вычислить совершенно аналогично вычислению функции $f_k(x)$ (3.8). В самом деле, поскольку плотность вероятностей перехода, как функция переменной y, удовлетворяет тому же уравнению, что и одноточечная плотность вероятностей P_y, для функции $f_1(y)$ справедлива система уравнений

$$f_1(y) = \exp\{-(\mu^2 - {}^3/_4)(y-x)\}\,\tilde f_1(y),$$

$$\frac{d\tilde f_1}{dy} - \tilde f_1 = 2\tilde\psi_1,\quad \frac{d\tilde\psi_1}{dy} + \tilde\psi_1 = -2\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tilde f_1, \qquad (3.22)$$

где функция $\tilde\psi_1(y)$ аналогична $\tilde\psi_1(x)$ (3.10) с заменой $P_x(u)$ на $p(u_y, y\mid u_x, x)$. Начальные условия для системы (3.22) получаются из определения функций $f_1(y)$ и $\psi_1(y)$ при предельном переходе $y\to x$, т. е.

$$\tilde f_1|_{y=x} = u_x P_{-1/2+i\mu}(u_x),$$

$$\tilde\psi_1|_{y=x} = (u_x^2-1)\frac{d}{du_x}P_{-1/2+i\mu}(u_x). \qquad (3.23)$$

Решение системы (3.22) с условиями (3.23) имеет вид

$$\tilde f_1(y) = u_x P_{-1/2+i\mu}(u_x)\left[\cos 2\mu(y-x) + \frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu}\right] +$$

$$+\frac{1}{\mu}(u_x^2-1)\frac{d}{du_x}P_{-1/2+i\mu}(u_x)\sin 2\mu(y-x). \qquad (3.24)$$

Подставляя теперь (3.24) в (3.21), получаем выражение

$$B_{y,x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty d\mu\,\mu\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}^2\mu\pi}\exp\left\{-L\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)+y+\right.$$

$$\left.+x\left(\mu^2-\frac{3}{4}\right)\right\}\int_1^\infty du_x u_x \tilde f_1(y)\,P_x(u_x),$$

или

$$B_{y,x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty d\mu\,\mu\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}^2\mu\pi}\exp\left\{-L\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)+y+\right.$$

$$\left.+x\left(\mu^2-\frac{3}{4}\right)\right\}\left\{\left[\cos 2\mu(y-x)+\frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu}\right]f_2(x)+\right.$$

$$\left.+\psi_2(x)\frac{\sin 2\mu(y-x)}{\mu}\right\}, \qquad (3.25)$$

где функции $f_2(x)$ и $\psi_2(x)$ описываются системой уравнений (3.9), (3.11). Таким образом, корреляционную функцию интенсивности можно записать окончательно в виде интеграла

$$B_{y,x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty d\mu\,\mu\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)\frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}^2\mu\pi}\exp\left\{-L\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)+y+3x\right\}\times$$
$$\times\left\{\left[\cos 2\mu(y-x)-\frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu}\right]\tilde{f}_2(x)+\tilde{\psi}_2(x)\frac{\sin 2\mu(y-x)}{\mu}\right\}, \quad (3.26)$$

где функция $\tilde{f}_2(x)$ описывается формулой (3.17), а $\tilde{\psi}_2(x)$ определяется равенством

$$\tilde{\psi}_2(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{d\tilde{f}_2}{dx} - 2\tilde{f}_2 + 2e^{-4x}\right]. \quad (3.27)$$

При $y = x$ выражение (3.26) переходит, естественно, в (3.18), а при $x = 0$ получаем корреляцию $\langle\tilde{I}(0)\,\tilde{I}(y)\rangle$, совпадающую с формулой (3.16).

Таким образом, все одноточечные моментные функции интенсивности волны внутри слоя флуктуирующей среды и корреляционные функции разного порядка описываются одной квадратурой.

Выше мы подробно рассмотрели задачу в отсутствие поглощения ($\gamma = 0$). Учет конечности величины γ будет рассмотрен в седьмом параграфе, а здесь отметим только, что легко вычислить среднее значение уровня интенсивности $\langle\chi(x)\rangle = \langle\ln I(x)\rangle$ при наличии поглощения *).

В самом деле, функция $\chi(x)$, согласно (1.30), описывается выражением

$$\chi(x) = \ln 2I_0 - \ln[1+u(L)] - 2\gamma\int_x^L d\xi\,u(\xi) +$$
$$+\ln\left[u(x)+\sqrt{u^2(x)-1}\cos\varphi(x)\right] \quad (3.28)$$

и для нахождения среднего значения $\chi(x)$ не требуется знания двухточечной плотности вероятностей (u_L, u_x). Усредняя (3.28) по φ, получаем выражение

$$\langle\chi(x)\rangle_\varphi = \ln I_0 - \ln(1+u_L) + \ln(1+u_x) - 2\gamma\int_x^L d\xi\,u(\xi). \quad (3.29)$$

Из (3.29) следует равенство

$$\langle\chi(x)\rangle\,|_{x=L} = \ln I_0. \quad (3.30)$$

---

*) На это обстоятельство обратил мое внимание В. И. Гельфгат. Формула (3.32) была им получена ранее другим путем и доложена на научной сессии Совета АН СССР по проблеме «Физическая и техническая акустика» (Акуст. журн., 1975, т. 21, с. 483).

Усредним теперь (3.29) по u и продифференцируем по x. В результате получаем

$$\frac{d}{dx}\langle\chi(x)\rangle = 2\gamma\langle u(x)\rangle + \frac{d}{dx}\langle\ln[1+u(x)]\rangle. \qquad (3.31)$$

Для нахождения среднего значения в правой части (3.31) умножим уравнение (2.8) на $\ln(1+u)$ и проинтегрируем по всем $u \geqslant 1$. Интегрируя по частям, получаем выражение

$$\frac{d}{dx}\langle\ln[1+u(x)]\rangle = -2\gamma\langle u\rangle + 2\gamma + D.$$

Следовательно, независимо от краевых условий при $x = 0$, согласно (3.31), (3.30), имеет место

$$\frac{d}{dx}\langle\chi(x)\rangle = 2\gamma + D, \quad \langle\chi(x)\rangle = \ln I_0 - (2\gamma + D)(L - x). \qquad (3.32)$$

§ 4. О влиянии краевых условий на флуктуации интенсивности волны

В первом параграфе было получено стохастическое выражение для интенсивности волны внутри слоя. Конкретные расчеты в предыдущем параграфе ограничивались случаем, когда невозмущенная диэлектрическая проницаемость (показатель преломления) в слое среды совпадает с диэлектрической проницаемостью вне слоя. Случай разных значений диэлектрической проницаемости дает возможность проследить за влиянием краевых условий на статистические характеристики интенсивности волны и, в частности, учесть наличие отражательной границы (либо от более плотной среды, либо, для акустических волн, от вакуума). Ниже мы подробно рассмотрим эти предельные случаи. Удобно воспользоваться записью величины $R(x)$ в виде (1.33)

$$R(x) = \rho(x)\exp\{i\varphi(x)\}, \qquad (4.1)$$

где функции $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнению (1.34) (в отсутствие поглощения):

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{k}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(x)(1-\rho^2)\sin\varphi, \quad \rho(0) = \left|\frac{k-k_0}{k+k_0}\right|, \qquad (4.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2k + \frac{k}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(x)\left[2 + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi\right], \quad \varphi(0) = \begin{cases} 0, & k_0 < k, \\ \pi, & k_0 > k, \end{cases}$$

а сама интенсивность волны связана с функциями $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ формулой

$$I(x) = I_0\frac{1-\rho^2(L)}{1-\rho^2(x)}\{1 + \rho^2(x) + 2\rho(x)\cos\varphi\}. \qquad (4.3)$$

По-прежнему будем считать $\tilde{\varepsilon}(x)$ гауссовской дельта-коррелированной случайной функцией по x, т. е.

$$\langle\tilde{\varepsilon}(x)\,\tilde{\varepsilon}(x')\rangle = 2\sigma^2 l\,\delta(x - x'). \qquad (4.4)$$

В этом случае решение системы уравнений (4.2) $\{\rho(x), \varphi(x)\}$ является марковским процессом. Функция $\varphi(x)$ при этом имеет структуру

$$\varphi(x) = \varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \tag{4.5}$$

а функции $\rho(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ медленно меняются на расстояниях порядка длины волны.

В данной задаче, помимо различных статистических параметров, имеется дополнительный параметр k_0/k, который характеризует влияние краевого условия при $x = 0$ на динамику волны. Случай $k_0 \sim k$ соответствует при этом задаче о прохождении и отражении волны от слоя среды, в то время как значение параметра $k_0/k \to \infty$ отвечает наличию зеркальной поверхности при $x = 0$. Этот предельный случай приводит к краевому условию $U(0) = 0$ для уравнения (1.1). Другое предельное значение $k_0/k \to 0$ описывает отражение акустической волны от вакуума, а соответствующее краевое условие для уравнения (1.1) имеет вид $U'(0) = 0$. В предыдущем параграфе подробно рассматривалось условие $k_0 = k$. Очевидно, что при $k_0 \sim k$, кроме естественного усложнения формул, полученных выше, никаких новых эффектов не появится. Рассмотрим теперь предельные случаи $k_0 \to \infty$ и $k_0 \to 0$.

Как при $k_0 \to \infty$, так и при $k_0 \to 0$ $\rho(0) \to 1$, и, следовательно, из уравнения (4.2) получаем равенство

$$\rho(x) \equiv 1 \qquad (k_0 \to \infty, \ k_0 \to 0). \tag{4.6}$$

В предыдущем параграфе вместо $\rho(x)$ рассматривалась функция $u(x)$, определяемая формулой $\rho(x) = \sqrt{\frac{u-1}{u+1}}$. Однако в силу того, что значению $\rho(x) = 1$ соответствует значение $u(x) = \infty$, использовать ее здесь было бы неудобно. Таким образом, в выражении (4.3) для интенсивности волны содержится неопределенность при $k_0 \to \infty$, $k_0 \to 0$. Чтобы ее раскрыть, нам надо знать характер стремления величины $\rho^2(x)$ к единице. Это можно найти следующим образом. Уравнение (4.2) легко решить относительно функции $\rho(x)$. В результате получаем равенство

$$\rho(x) = \frac{[1+\rho(0)]\exp\{q(x)\} - [1-\rho(0)]}{[1+\rho(0)]\exp\{q(x)\} + [1-\rho(0)]}, \tag{4.7}$$

$$\rho(0) = \left|\frac{k-k_0}{k+k_0}\right|,$$

где

$$q(x) = \frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \bar{\varepsilon}(\xi)\sin\varphi(\xi). \tag{4.8}$$

Следовательно,

$$1 - \rho^2(x) = \frac{4[1-\rho^2(0)]\exp\{q(x)\}}{[(1+\rho(0))\exp\{q(x)\} + (1-\rho(0))]^2}, \tag{4.9}$$

поэтому имеем асимптотики

$$1-\rho^2(x)\to\begin{cases}4\dfrac{k}{k_0}\exp\{-q(x)\} & (k_0\to\infty),\\ 4\dfrac{k_0}{k}\exp\{-q(x)\} & (k_0\to 0).\end{cases}\tag{4.10}$$

Итак, в обоих предельных случаях формула (4.3) принимает простой вид:

$$I(x)=2I_0\exp\{-q(L)+q(x)\}\,[1+\cos\{\varphi(0)+2kx+\tilde{\varphi}(x)\}],\tag{4.11}$$

где функции $q(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dx}&=\frac{k}{\bar{\varepsilon}}\,\tilde{\varepsilon}(x)\sin\{\varphi(0)+2kx+\tilde{\varphi}(x)\},\quad q(0)=0,\\ \frac{d\tilde{\varphi}}{dx}&=\frac{k}{\bar{\varepsilon}}\,\tilde{\varepsilon}(x)\,[1+\cos\{\varphi(0)+2kx+\tilde{\varphi}(x)\}],\quad \tilde{\varphi}(0)=0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Система уравнений (4.12) является частным случаем системы (3.4.46). Так как величины $q(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ оказываются медленно меняющимися функциями на расстояниях порядка длины волны, при изучении различных статистических характеристик целесообразно произвести усреднение по быстро меняющимся на длине волны функциям. Учитывая, что решение задачи (4.12) $(q(x),\ \tilde{\varphi}(x))$ является марковским процессом, такое усреднение достаточно провести в уравнениях для плотности вероятностей перехода и одноточечной плотности вероятностей.

Введем функцию

$$\Phi_x(q,\ \tilde{\varphi})=\delta(\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi})\ \delta(q(x)-q),\tag{4.13}$$

которая удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial\Phi_x}{\partial x}=-\frac{k}{\bar{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\sin\theta+\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}(1+\cos\theta)\right\}\tilde{\varepsilon}(x)\,\Phi_x,\tag{4.14}$$

где $\theta=\varphi(0)+2kx+\tilde{\varphi}$. Усредняя уравнение (4.14) по ансамблю реализаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ стандартным путем, получаем уравнение Эйнштейна — Фоккера для одноточечной плотности вероятностей $P_x(q,\ \tilde{\varphi})=\langle\Phi_x(q,\ \tilde{\varphi})\rangle$:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x}=2D\left\{\frac{\partial}{\partial q}\sin\theta+\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}(1+\cos\theta)\right\}^2P_x(q,\tilde{\varphi})\tag{4.15}$$

$$\left(D=\frac{k^2\sigma^2 l}{2\bar{\varepsilon}^2}\right),$$

которое можно переписать в виде, более удобном для усреднения по быстро меняющимся функциям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial x}=2D\Big\{&\frac{\partial^2}{\partial q^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial\tilde{\varphi}}\sin\theta(1+\cos\theta)-\\ &-\frac{\partial}{\partial q}\cos\theta(1+\cos\theta)+\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\varphi}^2}(1+\cos\theta)^2+\\ &+\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}\sin\theta(1+\cos\theta)\Big\}P_x(q,\tilde{\varphi}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Усредняя теперь (4.16) по быстро меняющимся функциям, получаем уравнение

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial q}P_x + D\frac{\partial^2}{\partial q^2}P_x + 3D\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2}P_x \qquad (4.17)$$

с начальным условием

$$P_0(q, \tilde{\varphi}) = \delta(q)\,\delta(\tilde{\varphi}). \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.17) соответствует уравнению (3.4.49) для данной задачи. Очевидно, что уравнение для усредненной плотности вероятностей перехода марковского процесса $\{q(x), \tilde{\varphi}(x)\}$ также имеет вид (4.17). Отсюда следует, что случайные процессы $q(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$, входящие в формулу (4.11), являются гауссовскими независимыми процессами со средними значениями

$$\langle\tilde{\varphi}(x)\rangle = 0, \quad \langle q(x)\rangle = Dx \qquad (4.19)$$

и корреляционными функциями

$$\langle\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x')\rangle = 6D\min\{x, x'\}, \quad \langle\tilde{q}(x)\tilde{q}(x')\rangle = 2D\min\{x, x'\}, \qquad (4.20)$$

где $\tilde{q}(x) = q(x) - \langle q(x)\rangle$. Подобное усреднение уравнения (4.16) можно, очевидно, провести, если выполнено условие $D \ll k$ ($D\lambda \ll 1$, $\lambda = 2\pi|k|$).

Таким образом, мы можем переписать выражение для интенсивности волны (4.11) в виде

$$I(x) = 2I_0\exp\{-D(L-x) - \tilde{q}(L) + \tilde{q}(x)\}[1 - \cos(2kx + \tilde{\varphi})] \quad (k_0 \to \infty), \qquad (4.21)$$

$$I(x) = 2I_0\exp\{-D(L-x) - \tilde{q}(L) + \tilde{q}(x)\}[1 + \cos(2kx + \tilde{\varphi})] \quad (k_0 \to 0). \qquad (4.22)$$

Формулы (4.21), (4.22) позволяют легко вычислять любые моменты интенсивности волны (как одноточечные, так и многоточечные). Так, для распределения средней интенсивности волны в слое среды получаем выражения

$$\langle I(x)\rangle = 2I_0\{1 \mp \exp\{-3Dx\}\cos 2kx\}, \qquad (4.23)$$

где верхний знак относится к случаю $k_0 \to \infty$, а нижний — к случаю $k_0 \to 0$. Отметим, что при $Dx \gg 1$ распределение вероятностей для $\tilde{\varphi}(x)$ стремится к равномерному распределению на отрезке $[0, 2\pi]$; поэтому получаем, что при $Dx \gg 1$ $\langle\tilde{I}(x)\rangle = 2I_0$ независимо от краевых условий при $x = 0$. Аналогичным образом находим, что при $Dx \gg 1$

$$\langle\tilde{I}^2(x)\rangle = 6I_0^2\exp\{2D(L-x)\} \quad \text{и т. д.} \quad (\langle\tilde{I}^2\rangle = 4I_0^2). \qquad (4.24)$$

Максимальное значение дисперсии интенсивности, как и других моментов, достигается внутри слоя среды вблизи зеркальной по-

верхности, т. е. моменты интенсивности также экспоненциально растут внутри слоя среды при увеличении его толщины, как это имеет место и в случае отсутствия отражения от граничной плоскости.

Таким образом, можно нарисовать следующую картину поведения моментов интенсивности внутри слоя среды с изменением краевых условий (параметра k_0) при достаточно большой величине L — толщины слоя. Для малых k_0 имеется резкий максимум вблизи границы $x = 0$ и экспоненциальный выход на значение 1 при $x = L$. При увеличении k_0 максимум смещается внутрь слоя (максимальное смещение до $\sim L/2$ при $k_0 = k$), но экспоненциальный выход на значение 1 вблизи $x = L$ не изменяется ($I_0 = 1/2$). При дальнейшем увеличении k_0 максимум опять смещается к границе $x \sim 0$, а экспоненциальный выход на 1 не изменяется. Таким образом, само явление экспоненциального роста интенсивности внутри слоя среды оказывается очень чувствительным к краевому условию при $x = 0$. Однако экспоненциальный характер выхода на значение $\tilde{I}(L) = 1$ оказывается универсальным. Ширина этой области зависит от краевых условий, как отмечалось выше.

В работе [90] изучался вопрос о флуктуации интенсивности волны внутри слоя среды с зеркальной отражающей поверхностью при $x = 0$. При этом за основу брались «укороченные» уравнения, типа рассмотренных в предыдущей главе, для стохастического параметрического резонанса. Однако существенное различие этих двух задач состоит в том, что рассмотренная здесь задача является краевой, в то время как в работе [90] для нахождения статистических характеристик «укороченных» уравнений использовалось условие динамической причинности, которой на самом деле нет. Результаты расчетов флуктуаций интенсивности, полученные выше, совпадают, однако, с результатами, полученными в [90]. Это означает, по-видимому, что метод «укороченных» уравнений, развитый в [90] для данной задачи, может быть корректно обоснован.

§ 5. О влиянии моделей среды на статистические характеристики задачи

Выше мы изучали различные статистические характеристики волны в случайно-неоднородном слое среды в предположении, что $\tilde{\varepsilon}(x)$ в (1.11) — случайная гауссовская функция, дельта-коррелированная во времени. При наличии затухания в среде имеется стационарное распределение вероятностей для флуктуаций модуля коэффициента отражения волны от слоя среды. Представим коэффициент отражения в виде

$$R(x) = \exp\{-[u(x) + i\varphi(x)]\}, \quad 0 \leqslant u \leqslant \infty, \tag{5.1}$$

где функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнениям (1.37):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 2\gamma + \alpha\xi(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{sh}\,u(x), \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -2\varkappa - \alpha\xi(x)\,[1 + \cos\varphi(x)\,\mathrm{ch}\,u(x)], \end{aligned} \tag{5.2}$$

а $\tilde{\varepsilon}(x) = \mu\xi(x)$, $\alpha = \frac{\varkappa\mu}{|\tilde{\varepsilon}|}$; величина μ характеризует интенсивность флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Соответствующее уравнение для одноточечной плотности вероятностей (аналогичное уравнению (2.8)) имеет вид

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} + 2\gamma\frac{\partial P_x(u)}{\partial u} = D\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{sh}\,u\left[\mathrm{ch}\,u + \frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{sh}\,u\right]P_x(u), \tag{5.3}$$

где $D = \frac{\alpha^2\sigma^2 l}{2\mu^2}$. Стационарное распределение вероятностей при этом таково:

$$P_\infty(u) = \frac{\beta}{\mathrm{sh}^2 u}\exp\{-\beta(\mathrm{cth}\,u - 1)\} \qquad \left(\beta = \frac{2\gamma}{D}\right), \tag{5.4}$$

что соответствует распределению (2.9) в переменных (1.29).

Отметим, что в переменных (1.33) стационарное распределение вероятностей для ρ будет иметь, очевидно, вид

$$P_\infty(\rho) = \frac{4\beta\rho}{(1-\rho^2)^2}\exp\left\{-\frac{2\beta\rho^2}{1-\rho^2}\right\} \qquad \left(\beta = \frac{2\gamma}{D}\right). \tag{5.4'}$$

В общем случае, если $u = f(\psi)$, и стационарное распределение для величины u дается в виде (2.9), стационарное распределение для ψ равно

$$P_\infty(\psi) = P_\infty(u = f(\psi))\,|f'(\psi)|.$$

Отметим, что при выводе как (5.3), так и (5.4) используются два приближения. Это, во-первых, гауссовость и дельта-коррелированность случайной функции $\xi(x)$ и, во-вторых, возможность перейти к уравнениям, усредненным на расстояниях порядка длины волны. Поэтому представляет определенный интерес точное решение задачи для какой-нибудь модели флуктуаций диэлектрической проницаемости с конечным радиусом корреляции. Такими моделями являются флуктуации в виде телеграфного случайного процесса и обобщенного телеграфного процесса [92].

Итак, рассмотрим стохастическую систему уравнений (5.2) и введем величину

$$\Phi[u, \varphi, x;\ \xi(\tilde{x})] = \delta(u(x) - u)\delta(\varphi(x) - \varphi), \tag{5.3'}$$

являющуюся функционалом от случайного процесса $\xi(\tilde{x})$. Среднее значение этой величины — совместная плотность вероятностей для $u(x)$, $\varphi(x)$:

$$\langle\Phi[u, \varphi, x;\ \xi(\tilde{x})]\rangle = W_x(u, \varphi). \tag{5.4''}$$

Дифференцируя (5.3′) по x и используя уравнения (5.2), получим стохастическое линейное уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi)\Phi = \alpha\xi(x)\hat{M}(u, \varphi)\Phi, \tag{5.5}$$

где линейные операторы $\hat{L}(u, \varphi)$ и $\hat{M}(u, \varphi)$ определяются формулами

$$\begin{gathered}\hat{L}(u, \varphi) f = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial u} - \varkappa \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f, \\ \hat{M}(u, \varphi) f = -\frac{\partial}{\partial u}(\sin\varphi \operatorname{sh} u) f + \frac{\partial}{\partial \varphi}(1 + \cos\varphi \operatorname{ch} u) f.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Для дальнейшего нам понадобится выражение для вариационной производной функционала $\Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})]$ по $\xi(x')$ при $x' = x$. Стандартным путем получаем для нее равенство

$$\frac{\delta\Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})]}{\delta\xi(x)} = \alpha\hat{M}(u, \varphi)\Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})]. \tag{5.7}$$

Усредним теперь уравнение (5.5). С учетом (5.4″) получаем уравнение для совместной плотности вероятностей величин $u(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = \alpha\hat{M}(u, \varphi)\langle\xi(x)\Phi(u, \varphi, x)\rangle. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) не замкнуто относительно функции W_x. Конкретный вид этого уравнения определяется средней величиной в правой части и зависит от характера случайной функции $\xi(x)$.

Уравнение (5.8), согласно третьей главе можно переписать также в форме операторного уравнения:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = \left\langle \dot{\Theta}_x\left[\frac{\delta}{i\,\delta\xi(\tilde{x})}\right]\Phi(u, \varphi, x)\right\rangle, \tag{5.9}$$

где $\dot{\Theta}_x[v(\tilde{x})] = \frac{d}{dx}\Theta_x[v(\tilde{x})]$, а $\Theta_x[v(\tilde{x})]$ — логарифм характеристического функционала процесса $\xi(x)$, т. е.

$$\Theta_x[v(\tilde{x})] = \ln\left\langle \exp\left\{i\int_0^x d\tilde{x}\, v(\tilde{x})\xi(\tilde{x})\right\}\right\rangle.$$

Перейдем теперь к изучению уравнения (5.8) для конкретных процессов.

5.1. Дельта-коррелированные процессы. Прежде всего рассмотрим модель флуктуаций $\xi(x)$ с нулевым радиусом корреляции, т. е. модель дельта-коррелированных по x флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Для дельта-коррелированных процессов $\xi(x)$ логарифм характеристического функционала $\Theta_x[v(\tilde{x})]$ удовлетворяет равенству

$$\dot{\Theta}_x[v(\tilde{x})] = \dot{\Theta}_x[v(x)],$$

и, следовательно, уравнение (5.9) с учетом равенства (5.7) принимает форму замкнутого уравнения:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = \dot{\Theta}_x \left[\frac{\alpha}{i} \hat{M}(u, \varphi) \right] W_x. \qquad (5.10)$$

Так, для гауссовского дельта-коррелированного процесса $\xi(x)$ с функционалом Θ_x, равным

$$\Theta_x [v(\tilde{x})] = -\frac{1}{2} \int_0^x d\tilde{x}\, v^2(\tilde{x}),$$

(5.10) принимает вид уравнения Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = \frac{\alpha^2}{2} \hat{M}^2(u, \varphi) W_x(u, \varphi). \qquad (5.11)$$

Перейдем теперь непосредственно к процессам $\xi(x)$ с конечным радиусом корреляции. При этом мы подробно рассмотрим случай телеграфного процесса и более кратко остановимся на случае обобщенного телеграфного процесса.

5.2. Телеграфный процесс. Пусть $\xi(x)$ — телеграфный случайный процесс, определяемый формулой

$$\xi(x) = a(-1)^{n(0, x)}, \qquad (5.12)$$

где Prob. $(a = 1) =$ Prob. $(a = -1) = 1/2$, а $n(0, x)$ — целочисленный случайный процесс, обладающий свойствами:

1) $n(x_1, x_3) = n(x_1, x_2) + n(x_2, x_3), \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3;$

2) $n(x_1, x_2)$ и $n(x_2, x_3)$ при $x_1 < x_2 < x_3$ статистически независимы;

3) $\text{Prob.}\,(n(x_1, x_2) = m) = \dfrac{[\bar{n}(x_1, x_2)]^m}{m!} \exp\{-\bar{n}(x_1, x_2)\},$

$$\bar{n}(x_1, x_2) = \nu\, |x_1 - x_2|.$$

Корреляционная функция для $\tilde{\varepsilon}(x)$ в этом случае имеет вид

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x_1)\, \tilde{\varepsilon}(x_2) \rangle = \mu^2 \exp\{-2\nu\, |x_1 - x_2|\},$$

а радиус корреляции $l = 1/2\nu$.

Как было показано во второй главе, для произвольного функционала от телеграфного процесса $F_x[\xi(\tilde{x})]$, где $\tilde{x} \leqslant x$, имеет место формула дифференцирования корреляции

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\nu\right) \langle \xi(x) F_x[\xi(\tilde{x})] \rangle = \left\langle \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} F_x[\xi(\tilde{x})] \right\rangle. \qquad (5.13)$$

Обозначим функцию $\langle \xi(x) \Phi(u, \varphi, x) \rangle$ в правой части (5.8) через $\alpha \Psi_x(u, \varphi)$. Дифференцируя $\Psi_x(u, \varphi)$ по x и используя (5.13) и (5.5), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\nu\right) \Psi_x(u, \varphi) = -2\hat{L}(u, \varphi) \Psi_x(u, \varphi) + \\ + \hat{M}(u, \varphi) \langle \xi^2(x) \Phi(u, \varphi, x) \rangle. \qquad (5.14)$$

Учитывая теперь, что для телеграфного процесса (5.12) $\xi^2(x) \equiv 1$, получаем замкнутую систему уравнений первого порядка по x для функций W_x и Ψ_x:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = \alpha^2 \hat{M}(u, \varphi) \Psi_x, \\ &\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + 2[\nu + \hat{L}(u, \varphi)] \Psi_x = \hat{M}(u, \varphi) W_x, \end{aligned} \tag{5.15}$$

с начальными условиями: при $x = 0$

$$W_0(u, \varphi) = \Phi(u, \varphi, 0), \quad \Psi_0(u, \varphi) = 0.$$

Отметим, что систему уравнений (5.15) можно записать в виде одного интегро-дифференциального уравнения для функции W_x:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x =$$

$$= \alpha^2 \hat{M}(u, \varphi) \int_0^x dx' \exp\{-2(x - x')[\nu + \hat{L}(u, \varphi)]\} \hat{M}(u, \varphi) W_{x'}(u, \varphi). \tag{5.15'}$$

Легко вычислить предел в случае $\nu \to \infty$ (т. е. $l = 1/2\nu \to 0$). Отсюда следует, что при этих условиях имеет место УЭФ:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = D\hat{M}^2(u, \varphi) W_x(u, \varphi), \tag{5.16}$$

где

$$D = \frac{\alpha^2}{2\nu} = \alpha^2 l = \frac{\mu^2 \varkappa^2}{|\bar{\varepsilon}|^2} l.$$

Рассмотрим систему уравнений (5.15). Будем искать решение в виде рядов Фурье по φ:

$$W_x(u, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} W_n(u, x) e^{in\varphi}, \quad \Psi_x(u, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(u, x) e^{in\varphi}. \tag{5.17}$$

Тогда для коэффициентов Фурье W_n, Ψ_n легко получить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W_n}{\partial x} + 2\left(\gamma \frac{\partial}{\partial u} - i\varkappa n\right) W_n = \\ &\quad = i\frac{\alpha^2}{2}\left\{2n\Psi_n + \left[n \operatorname{ch} u + \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{sh} u\right] \Psi_{n-1} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[n \operatorname{ch} u - \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{sh} u\right] \Psi_{n+1}\right\}, \\ &\frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + 2\left(\nu + \gamma \frac{\partial}{\partial u} - i\varkappa n\right) \Psi_n = \\ &\quad = \frac{i}{2}\left\{2nW_n + \left[n \operatorname{ch} u + \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{sh} u\right] W_{n-1} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[n \operatorname{ch} u - \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{sh} u\right] W_{n+1}\right\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Нас будет интересовать плотность вероятностей для $|R|$, связанная с функцией $\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, W_x(u, \varphi) = 2\pi W_0(u, x)$. Для нее получаем уравнение

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial W_0}{\partial u} = i\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\,(\Psi_{-1} - \Psi_1), \tag{5.19}$$

где функции $\Psi_{\pm 1}$ описываются системой

$$\frac{\partial \Psi_{\mp 1}}{\partial x} + 2\left(\nu + \gamma\frac{\partial}{\partial u} \pm i\varkappa\right)\Psi_{\mp 1} =$$
$$= \mp\frac{i}{2}\left\{2W_{\mp 1} + \left[\operatorname{ch} u + \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\right]W_0 + \left[\operatorname{ch} u - \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\right]W_{\mp 2}\right\}. \tag{5.20}$$

Система уравнений (5.19), (5.20) не замкнута, так как помимо W_0, $\Psi_{\pm 1}$ в нее входят функции $W_{\pm 1}$, $W_{\pm 2}$.

Сделаем теперь упрощающее предположение: $|W_{\pm 1}|$, $|W_{\pm 2}| \ll |W_0|$, т. е. влияние гармоник $W_{\pm 1}$, $W_{\pm 2}$ на динамику W_0 не существенно. В этом случае система уравнений (5.19), (5.20) становится замкнутой:

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + 2\gamma\frac{\partial W_0}{\partial u} = i\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\,(\Psi_{-1} - \Psi_1),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{\mp 1} + 2\left(\nu + \gamma\frac{\partial}{\partial u} \pm i\varkappa\right)\Psi_{\mp 1} = \mp\frac{i}{2}\left[\operatorname{ch} u + \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\right]W_0.$$

Отметим, что эта система эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению для функции $W_0(u, x)$:

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + 2\gamma\frac{\partial W_0}{\partial u} =$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\int\limits_0^x dx' \exp\left\{-2(x - x')\left(\nu + \gamma\frac{\partial}{\partial u}\right)\right\} \times$$
$$\times \cos 2\varkappa(x - x')\left[\operatorname{ch} u + \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u\right]W_0(u, x'), \tag{5.21}$$

которое формально совпадает с уравнением (5.15′), проинтегрированным по φ при дополнительном предположении

$$\langle \hat{M}(u, \varphi)\exp\left\{2(x - x')\varkappa\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\hat{M}(u, \varphi)\,W_{x'}(u, \varphi)\rangle =$$
$$= \langle \hat{M}(u, \varphi)\exp\left\{2(x - x')\varkappa\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\hat{M}(u, \varphi)\rangle\, W_0(u, x')$$

(здесь угловыми скобками обозначена операция интегрирования по φ). Это предположение соответствует обычно используемому в таких задачах методу усреднения по быстро меняющимся величинам (см., например, предыдущие параграфы).

При наличии затухания ($\gamma \neq 0$) решение уравнения (5.15′) при $x \to \infty$ дает стационарное распределение

$$W_\infty(u, \varphi) = W(u, \varphi).$$

Уравнение для стационарного распределения легко получить из (5.15′), совершив замену переменной интегрирования $x' \to x - x'$ и устремив x к ∞:

$$\hat{L}(u, \varphi) W(u, \varphi) = \frac{\alpha^2}{4} M(u, \varphi) \frac{1}{\nu + \hat{L}(u, \varphi)} \hat{M}(u, \varphi) W(u, \varphi). \qquad (5.22)$$

Соответствующее стационарное уравнение для нулевой фурье-гармоники принимает вид

$$W_0(u) = \frac{\alpha^2}{8\gamma} \operatorname{sh} u \left\{ \left[\left(\nu + \gamma \frac{d}{du} \right)^2 + \varkappa^2 \right]^{-1} \left(\nu + \gamma \frac{d}{du} \right) \times \right.$$
$$\times \left[2 \operatorname{ch} u\, W_0 + \operatorname{sh} u \frac{dW_0}{du} + (W_1 + W_{-1}) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} u \frac{d}{du} (W_2 + W_{-2}) \right] +$$
$$\left. + i\varkappa \left[\left(\nu + \gamma \frac{d}{du} \right)^2 + \varkappa^2 \right]^{-1} \left[W_1 - W_{-1} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} u \frac{d}{du} (W_2 - W_{-2}) \right] \right\}. \qquad (5.23)$$

Уравнение (5.23), так же как и нестационарное уравнение, не является замкнутым, поскольку помимо W_0 в него входят функции $W_1 \pm W_{-1}$, $W_2 \pm W_{-2}$. Сделаем теперь два упрощающих предположения относительно стационарного распределения:

1. $$|W_1 \pm W_{-1}|, \quad |W_2 \pm W_{-2}| \ll W_0.$$

В этом случае в уравнении (5.23) можно оставить лишь $W_0(u)$; в результате получаем

$$W_0(u) = \frac{\alpha^2}{2\gamma} \operatorname{sh} u \left[\left(\nu + \gamma \frac{d}{du} \right)^2 + \varkappa^2 \right]^{-1} \times$$
$$\times \left(\nu + \gamma \frac{d}{du} \right) \left(2 \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \frac{d}{du} \right) W_0. \qquad (5.24)$$

Отметим, что уравнение (5.24) соответствует переходу $x \to \infty$ в (5.21).

2. $$\left| \gamma \frac{d}{du} \left(2 \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \frac{d}{du} \right) W_0 \right| \ll \nu \left| 2 \operatorname{ch} u\, W_0 + \operatorname{sh} u \frac{dW_0}{du} \right|,$$

т. е. в правой части (5.24) можно пренебречь оператором $\gamma \frac{d}{du}$. В этом случае в уравнении (5.24) можно заменить оператор $\frac{\nu + \gamma\, d/du}{(\nu + \gamma\, d/du)^2 + \varkappa^2}$ на число $\nu/(\nu^2 + \varkappa^2)$. Тогда уравнение (5.24) примет вид

$$W_0(u) = \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} u \left(2 \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \frac{d}{du} \right) W_0, \qquad (5.25)$$

$$\beta = \frac{8\gamma}{\alpha^2 \nu} (\nu^2 + \varkappa^2) = \frac{4\gamma}{\alpha^2 l} (1 + 4\varkappa^2 l^2),$$

где $l = 1/2\nu$ — радиус корреляции функции $\xi(x)$. Уравнение (5.25) совпадает с уравнением для стационарной плотности вероятностей (5.3).

Нормируемое на единицу решение этого уравнения таково:

$$W_0(u) = \frac{\beta}{\operatorname{sh}^2 u} \exp\{-\beta(\operatorname{cth} u - 1)\}, \tag{5.26}$$

и совпадает с распределением (5.4). Функция (5.26) имеет максимум при $u = u_0 = \frac{1}{2}\ln[\beta + \sqrt{1 + \beta^2}]$. Условие 2 после подстановки в него решения (5.26) принимает вид

$$\left| \frac{\beta}{\operatorname{sh}^2 u} - 3\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \right| \ll \frac{\nu}{\gamma}. \tag{5.27}$$

Если $\nu/\gamma < 3$, то условие (5.27) нарушается в большой области значений u. Поэтому необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\gamma \ll \nu. \tag{5.28}$$

В этом случае (5.27) сводится к условию

$$\operatorname{sh}^2 u \gg \frac{\gamma\beta}{\nu} \equiv \operatorname{sh}^2 u_*.$$

Отметим, что (5.28) является условием малости затухания волны на масштабах порядка радиуса корреляции и является естественным требованием задачи. В противном случае волна из-за большого затухания не почувствует слоистую структуру среды.

Таким образом, решение (5.26) заведомо непригодно в области малых u, соответствующих значениям коэффициента отражения, по модулю близким к единице. Если выполняется условие $W_0(u_*) \ll W_0(u_0)$, то область $u < u_*$ не является существенной. Так как на участке $0 < u < u_*$ функция $W_0(u)$ монотонно возрастает, то условие $W_0(u_*) \ll W_0(u_0)$ можно заменить более удобным:

$$\operatorname{sh} 2u_* \ll \operatorname{sh} 2u_0 = \beta.$$

Это приводит к неравенству $\beta(\nu/\gamma - \gamma/\nu) \gg 1$, или к условию $\beta\nu/\gamma \gg 1$. Подставляя β из (5.25), находим окончательно, что предположение 2 справедливо в существенной области по u при условии

$$\alpha^2 \ll (\varkappa^2 + \nu^2), \text{ или } \sigma_\varepsilon^2 \ll |\bar{\varepsilon}|^2\left(1 + \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right) \qquad (\sigma_\varepsilon^2 = \mu^2), \tag{5.29}$$

а распределение вероятностей (5.26) правильно описывает интервал

$$|R| < e^{-u_*} = \sqrt{1 + \frac{\beta\gamma}{\nu}} - \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\nu}}.$$

Теперь перейдем к выяснению условий, при которых справедливо предположение 1, считая, что (5.28), (5.29) выполняются. Для этого следует изучить уравнение для W_1. В правой его части

стоит общий коэффициент $\alpha^2/(\varkappa^2+\nu^2)$, который, согласно (5.29), мал. Поэтому в правой части уравнения для W_1 можно оставить лишь W_0, пренебрегая амплитудами других (малых) гармоник. В результате получаем уравнение

$$\gamma\frac{dW_1}{du}-i\varkappa W_1=-\frac{\alpha^2\beta}{8(\nu-i\varkappa)}\frac{W_0(u)}{\operatorname{sh}u}. \tag{5.30}$$

При наличии затухания выполняется условие $W(0,\varphi)=0$, так как значения R, равные по модулю единице, не могут появиться ни в одной из реализаций. Поэтому уравнение (5.30) следует решать с граничным условием $W_1(0)=0$. Это решение имеет вид

$$W_1(u)=-\frac{\alpha^2\beta}{8(\nu-i\varkappa)\gamma}\int\limits_0^u du'\exp\left\{i\frac{\varkappa}{\gamma}u'\right\}\frac{W_0(u-u')}{\operatorname{sh}(u-u')}. \tag{5.31}$$

Если выполняются условия $\gamma\ll\varkappa$, $\alpha^2\ll\frac{\varkappa}{\nu}(\varkappa^2+\nu^2)$, то функция $W_0(u-u')/\operatorname{sh}(u-u')$ является плавной по сравнению с экспоненциальным множителем, и из (5.31) можно в этом случае получить

$$W_1(u)=-\frac{i\alpha^2\beta}{8\varkappa(\nu-i\varkappa)}\frac{W_0(u)}{\operatorname{sh}u}. \tag{5.31'}$$

Теперь можно выяснить условия, при которых в уравнении (5.23)

$$|W_1(u)|=\frac{\alpha^2\beta}{8\varkappa\sqrt{\nu^2+\varkappa^2}}\frac{W_0(u)}{\operatorname{sh}u}\ll 2\operatorname{ch}W_0+\operatorname{sh}u\frac{dW_0}{du}=\frac{\beta}{\operatorname{sh}u}W_0(u).$$

Эти условия имеют вид

$$\alpha^2\ll\varkappa\sqrt{\varkappa^2+\nu^2},\quad\text{или}\quad\sigma_\varepsilon^2\ll|\bar{\varepsilon}|^2\sqrt{1+\frac{\nu^2}{\varkappa^2}}. \tag{5.32}$$

При выполнении (5.32) автоматически выполняется и условие $\alpha^2\ll\frac{\varkappa}{\nu}(\varkappa^2+\nu^2)$, использованное при переходе от (5.31) к (5.31'). Кроме того, условие (5.29) также выполняется, если справедливо (5.32).

Таким образом, если

$$\gamma\ll\nu,\quad\gamma\ll\varkappa,\quad\sigma_\varepsilon^2\ll|\bar{\varepsilon}|^2\sqrt{1+\nu^2/\varkappa^2}, \tag{5.33}$$

то распределение вероятностей для u описывается формулой (5.26). Отметим, что распределение вида (5.26), но с другими параметрами было получено и проанализировано в работе [86] как стационарное решение УЭФ. Полученное выше распределение (5.26) переходит в него при $\nu\gg\varkappa$, когда $\beta\approx 8\frac{\gamma\nu}{\sigma_\varepsilon^2\varkappa^2}|\bar{\varepsilon}|^2$. В противоположном случае крупномасштабных неоднородностей $\nu\ll\varkappa$, $\beta=\frac{8\gamma\varkappa^2}{\alpha^2\nu}=\frac{8\gamma|\bar{\varepsilon}|^2}{\nu\sigma_\varepsilon^2}$ и не зависит от длины волны, что соответствует геометрооптическому приближению.

Следует подчеркнуть, что условие (5.33) допускает любое соотношение между радиусом корреляции $l = 1/2\nu$ и длиной волны $2\pi/\varkappa$.

5.3. Обобщенный телеграфный процесс. Рассмотрим теперь другую модель флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ с конечным радиусом корреляции, также допускающую точное решение задачи. А именно, будем считать функцию $\tilde{\varepsilon}(x)$ обобщенным телеграфным процессом (см. гл. 1, 2):

$$\tilde{\varepsilon}(x) = a_{n(0,x)}, \tag{5.34}$$

где совокупность случайных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ статистически независима с распределением $p(a)$ ($\langle a\rangle = 0$, $\langle a^2\rangle = \mu^2$), а $n(0, x)$ — целочисленный случайный процесс, введенный выше.

Для такой модели флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ корреляционная функция также имеет экспоненциальный вид:

$$\langle\tilde{\varepsilon}(x)\tilde{\varepsilon}(x')\rangle = \mu^2 \exp\{-\nu\,|\,x - x'\,|\},$$

с радиусом корреляции $l = 1/\nu$.

Чтобы получить замкнутое уравнение для плотности вероятностей $W_x(u, \varphi)$, нам нужно, как следует из (5.8), вычислить величину $\langle\tilde{\varepsilon}(x)\,\Phi(u, \varphi, x)\rangle$. Для вычисления такой корреляции воспользуемся формулой (2.4.15′), справедливой для обобщенного телеграфного процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ и произвольного функционала от него $F_x[\tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]$ ($\tilde{x} \leqslant x$):

$$\langle\tilde{\varepsilon}(x)\,F_x[\tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]\rangle = \langle\tilde{a}\tilde{F}_x[\tilde{a}]\rangle\, e^{-\nu x} + \\ + \nu\int_0^x dx' \exp\{-\nu(x - x')\}\,\langle\tilde{a}\tilde{F}_x[x', a; \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]\rangle. \tag{5.35}$$

Здесь

$$\tilde{F}_x[x', \tilde{a}; \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})] = F_x[\tilde{a}\theta(\tilde{x} - x') + \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})\,\theta(x' - \tilde{x})], \\ \tilde{F}_x[\tilde{a}] = \tilde{F}_x[0, \tilde{a}; 0], \tag{5.36}$$

а случайная величина $\tilde{a}$ считается статистически независимой от процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ с распределением $p(\tilde{a})$. Таким образом, функционал $\tilde{F}_x$ совпадает с функционалом F_x при $x < x'$, а для $x > x'$ следует заменить процесс $\tilde{\varepsilon}(x)$ на случайную величину $\tilde{a}$, не зависящую от $\tilde{\varepsilon}(x)$. При этом, естественно, должно выполняться условие непрерывности для $\tilde{F}_x$ при $x = x'$.

Следовательно, уравнение (5.8) для обобщенного телеграфного процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ примет вид

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi)\,W_x = \tilde{\alpha}\hat{M}(u, \varphi)\,\langle\tilde{a}\tilde{\Phi}[u, \varphi, x; \tilde{a}]\rangle\, e^{-\nu x} + \\ + \tilde{\alpha}\nu\hat{M}(u, \varphi)\int_0^x dx' \exp\{-\nu(x - x')\}\,\langle\tilde{a}\tilde{\Phi}[u, \varphi, x, x'; \tilde{a}]\rangle \tag{5.37}$$

$$\left(\tilde{\alpha} = \frac{\varkappa}{|\tilde{\varepsilon}|}\right),$$

где функционал $\widetilde{\Phi}$, согласно (5.5), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x}+2\hat{L}(u,\varphi)\widetilde{\Phi}=\tilde{\alpha}\tilde{a}\hat{M}(u,\varphi)\widetilde{\Phi}\quad(x>x') \tag{5.38}$$

с начальным условием

$$\widetilde{\Phi}|_{x=x'}=\Phi(u,\varphi,x'). \tag{5.39}$$

Решение уравнения (5.38) легко написать в общем виде. Для этого представим функцию $\widetilde{\Phi}$ следующим образом:

$$\widetilde{\Phi}=\exp\{-2(x-x')\hat{L}(u,\varphi)\}\widetilde{\widetilde{\Phi}}. \tag{5.40}$$

С учетом того факта, что оператор в (5.40) является оператором сдвига по u и φ, для функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\widetilde{\widetilde{\Phi}}}{\partial x}=\tilde{\alpha}\tilde{a}\hat{M}(u+2\gamma(x-x'),\varphi-2\varkappa(x-x'))\widetilde{\widetilde{\Phi}}, \tag{5.41}$$

решение которого с условием (5.39) таково:

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}}=\exp\left\{\tilde{\alpha}\tilde{a}\int\limits_0^{x-x'}d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi,\varphi-2\varkappa\xi)\right\}\Phi(u,\varphi,x'). \tag{5.42}$$

В уравнении (5.37) фигурирует, однако, не сама функция $\widetilde{\Phi}$, а средняя величина $\langle\tilde{a}\widetilde{\Phi}\rangle$, связанная с распределением вероятностей случайной величины $\tilde{a}$. Это приводит к тому, что в уравнении (5.37) появляется оператор

$$\left\langle\tilde{a}\exp\left\{\tilde{\alpha}\tilde{a}\int\limits_0^{x-x'}d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi,\varphi-2\varkappa\xi)\right\}\right\rangle W_{x'}(u,\varphi), \tag{5.43}$$

зависящий от конкретного вида распределения $p(\tilde{a})$. Уравнение (5.37) при этом оказывается замкнутым уравнением. Если же, однако, интенсивность флуктуаций $\tilde{a}$ достаточно мала, то можно ограничиться первыми членами разложения экспоненты под знаком усреднения. В первом порядке малости по $\mu^2=\langle\tilde{a}^2\rangle$ выражение (5.43) принимает вид

$$\tilde{\alpha}\mu^2\int\limits_0^{x-x'}d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi,\varphi-2\varkappa\xi)W_{x'}(u,\varphi) \tag{5.43'}$$

и функция $\langle\tilde{a}\widetilde{\Phi}\rangle$ будет определяться выражением

$$\langle\tilde{a}\widetilde{\Phi}[u,\varphi,x,x';\tilde{a}]\rangle=$$
$$=\tilde{\alpha}\mu^2\exp\left\{-2(x-x')\hat{L}(u,\varphi)\right\}\int\limits_0^{x-x'}d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi,\varphi-2\varkappa\xi)W_{x'}(u,\varphi)\,. \tag{5.44}$$

Таким образом, уравнение (5.37) с правой частью вида (5.44) является замкнутым интегро-дифференциальным уравнением, существенно отличающимся от уравнения (5.15′), справедливого для флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ в виде телеграфного процесса.

При $\nu \to \infty$ уравнение (5.37) также переходит в УЭФ:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W_x = D\hat{M}^2(u, \varphi) W_x(u, \varphi), \tag{5.45}$$

где

$$D = \frac{\tilde{\alpha}^2\mu^2}{\nu} = \alpha^2 l \qquad \left(\alpha^2 = \frac{\mu^2\varkappa^2}{|\bar{\varepsilon}|^2}\right).$$

Дальнейший анализ уравнения (5.37) можно провести аналогично случаю телеграфного процесса. Рассмотрим стационарное решение, т. е. перейдем к пределу при $x \to \infty$. В этом случае уравнение (5.37) с правой частью (5.44) можно переписать в виде операторного уравнения:

$$\hat{L}(u, \varphi) W(u, \varphi) = \\ = \frac{\nu\alpha^2}{2} \hat{M}(u, \varphi) \frac{1}{\nu + 2\hat{L}(u, \varphi)} \hat{M}(u, \varphi) \frac{1}{\nu + 2\hat{L}(u, \varphi)} W(u, \varphi). \tag{5.46}$$

Уравнение (5.46) отличается от стационарного уравнения для функции W в случае флуктуаций параметров в виде телеграфного процесса (см. уравнение (5.22)) наличием перед W дополнительного оператора $\nu/(\nu + 2\hat{L}(u, \varphi))$. Однако если мы поступим далее так же, как и в предыдущем разделе, т. е. рассмотрим только первую гармонику разложения W_0 в ряде Фурье по φ, пренебрегая остальными гармониками, и, в силу малости параметра γ, пренебрежем оператором $\gamma \frac{d}{du}$ в правой части (5.46), то, очевидно, придем к уравнению, совпадающему с уравнением (5.25), с параметром

$$\beta = \frac{4\gamma}{\alpha^2 l}(1 + 4\varkappa^2 l^2), \tag{5.47}$$

где $l = 1/\nu$ — радиус корреляции функции $\tilde{\varepsilon}(x)$. Таким образом, стационарное распределение вероятностей для u в этом случае также будет описываться формулой (5.26).

Следует подчеркнуть некоторое различие между уравнениями (5.10), (5.15′), (5.37). Формально уравнение (5.10) (или его частный случай (5.11)), как и (5.15′), (5.37), является точным в случае, если $\tilde{\varepsilon}(x)$ — дельта-коррелированная случайная функция. Однако такие функции реально неосуществимы и всегда являются аппроксимацией реальных случайных функций с конечным радиусом корреляции. При исследовании законности такой аппроксимации возникают ограничения на уравнение (5.10). В то же время телеграфный или обобщенный телеграфный процессы физически осуществимы с гораздо большей точностью, так как для них

следует требовать лишь узости реальных «фронтов», а не малости радиусов корреляции по сравнению с другими масштабами задачи. В этом смысле уравнение (5.15′) или (5.37), в отличие от (5.10), можно считать точным.

Как видно из уравнений (5.10), (5.15′), (5.37), предположение о характере закона распределения вероятностей для $\tilde{\varepsilon}(x)$ существенно сказывается на виде уравнения для плотности вероятностей комплексного коэффициента отражения, и эти распределения, вообще говоря, могут сильно отличаться друг от друга.

Имеются, однако, и некоторые общие свойства этих распределений. Прежде всего, это существование стационарного распределения вероятностей при наличии затухания. Во-вторых, при выполнении условий (5.33) вид стационарного распределения вероятностей для модуля коэффициента отражения во всех рассмотренных случаях оказывается одинаковым и совпадает с распределением, впервые полученным в [86]. Вполне возможно, что этот закон распределения (при указанных ограничениях) не зависит от вида распределения для $\tilde{\varepsilon}(x)$.

§ 6. Двухпроводная линия и уравнения переноса

Близкой задачей как к рассмотренной в данной, так и в предыдущей главе является задача о распространении и взаимодействии двух встречных мод. Исходная система уравнений такова:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (i\omega_1 - \gamma_1)x_1 + iz(t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(i\omega_2 - \gamma_2)x_2 - iz(t)x_1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где ω_i — собственные частоты распространяющихся мод, γ_i — их коэффициенты затухания, а $z(t)$ — функция, которую будем считать гауссовской случайной функцией с корреляционной функцией вида

$$\langle z(t+\tau)z(t)\rangle = B(|\tau|). \tag{6.2}$$

К системе уравнений (6.1) надо задать начальные или краевые условия. Рассмотрим сначала задачу Коши, т. е. пусть при $t = 0$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \tag{6.3}$$

Нас будет интересовать вопрос о поведении интенсивности каждой моды $W_1 = |x_1|^2$, $W_2 = |x_2|^2$. Для этих функций из (6.1) получаем замкнутую систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{W}_1 = -2\gamma_1 W_1 + iz(t)\Psi, \ \dot{W}_2 = 2\gamma_2 W_2 + iz(t)\Psi, \\ &\dot{\Psi} = -i\Omega\Phi - \gamma\Psi - 2iz(t)(W_1 + W_2), \\ &\dot{\Phi} = -i\Omega\Psi + \gamma\Phi, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \Omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \Psi(t) = x_2 x_1^* - x_2^* x_1,$$
$$\Phi(t) = x_2 x_1^* + x_2^* x_1.$$

Вместо функций Ψ и Φ введем две функции $A(t)$ и $B(t)$ согласно равенствам

$$\Psi = Ae^{-i\Omega t} + Be^{i\Omega t}, \quad \Phi = Ae^{-i\Omega t} - Be^{i\Omega t}. \tag{6.5}$$

Тогда система (6.4) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= -2\gamma_1 W_1 + iz(t)\{Ae^{-i\Omega t} + Be^{i\Omega t}\}, \\ \dot{W}_2 &= 2\gamma_2 W_2 + iz(t)\{Ae^{-i\Omega t} + Be^{i\Omega t}\}, \\ \dot{A} &= -\gamma Be^{2i\Omega t} - iz(t)e^{i\Omega t}(W_1 + W_2), \\ \dot{B} &= \gamma Ae^{-2i\Omega t} - iz(t)e^{-i\Omega t}(W_1 + W_2). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Введем теперь вместо случайного процесса $z(t)$ две комплексные случайные функции

$$\xi_1(t) = z(t)e^{-i\Omega t}, \qquad \xi_2(t) = z(t)e^{i\Omega t} \tag{6.7}$$

с комплексными «корреляционными» функциями

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(t+\tau)\xi_1(t)\rangle &= B(\tau)\exp\{-i\Omega\tau - 2i\Omega t\}, \\ \langle \xi_1(t+\tau)\xi_2(t)\rangle &= B(\tau)\exp\{-i\Omega\tau\}, \\ \langle \xi_2(t+\tau)\xi_2(t)\rangle &= B(\tau)\exp\{i\Omega\tau + 2i\Omega t\}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Тогда система (6.6) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= -2\gamma_1 W_1 + i\{\xi_1(t)A + \xi_2(t)B\}, \\ \dot{W}_2 &= 2\gamma_2 W_2 + i\{\xi_1(t)A + \xi_2(t)B\}, \\ \dot{A} &= -\gamma Be^{2i\Omega t} - i\xi_2(t)(W_1 + W_2), \\ \dot{B} &= \gamma Ae^{-2i\Omega t} - i\xi_1(t)(W_1 + W_2). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Рассмотрим теперь плотность вероятностей для $W_1(t)$, $W_2(t)$, т. е. функцию

$$P_t(W_1, W_2) = \langle \delta(W_1(t) - W_1)\delta(W_2(t) - W_2)\rangle, \tag{6.10}$$

где усреднение производится по ансамблю реализаций функции $z(t)$. Дифференцируя (6.10) по t и используя два первых уравнения (6.9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial t} &= 2\gamma_1 \frac{\partial}{\partial W_1} W_1 P_1 - 2\gamma_2 \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 P_t - \\ &- i\left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right)\langle [\xi_1(t)A + \xi_2(t)B]\,\delta(W_1(t) - W_1)\delta(W_2(t) - W_2)\rangle. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Перейдем теперь к приближению дельта-коррелированного процесса для функций $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, т. е. положим

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(t)\xi_1(t+\tau)\rangle &= 2\sigma^2\delta(\tau)\exp\{-2i\Omega t\}, \\ \langle \xi_2(t)\xi_1(t+\tau)\rangle &= 2\sigma^2\delta(\tau), \\ \langle \xi_2(t)\xi_2(t+\tau)\rangle &= 2\sigma^2\delta(\tau)\exp\{2i\Omega t\}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, B(\tau)\exp\{i\Omega\tau\} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, B(\tau)\cos\Omega\tau. \quad (6.12)$$

Отметим, что мы можем действовать с комплексными случайными функциями $\xi_i(t)$ полностью аналогично тому, как мы работали с действительными функциями.

Если интенсивность флуктуаций $z(t)$, т. е. параметр σ^2, достаточно мала, а также малы величины γ_i, характеризующие затухание мод, то мы имеем медленные стохастические процессы на фоне быстрых осциллирующих (с частотой Ω) процессов. Для исключения таких быстрых процессов надо усреднить, как об этом говорилось неоднократно выше, по периоду осцилляций. При этом очевидно, что надо считать $\langle\xi_1\xi_1\rangle = \langle\xi_2\xi_2\rangle = 0$. Итак, усредним по времени (6.11) и воспользуемся формулой Фурутцу—Новикова для расщепления среднего значения в правой части (6.11). В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_t}{\partial t} &= 2\gamma_1\frac{\partial}{\partial W_1}W_1P_t - 2\gamma_2\frac{\partial}{\partial W_2}W_2P_t - \\ &- i\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial W_1}+\frac{\partial}{\partial W_2}\right)\left\langle\left[\frac{\delta A(t)}{\delta\xi_2(t)}+\frac{\delta B(t)}{\delta\xi_1(t)}\right]\delta(W_1(t)-W_1)\,\delta(W_2(t)-W_2)\right\rangle + \\ &+ i\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial W_1}+\frac{\partial}{\partial W_2}\right)\left\langle\left[\frac{\partial}{\partial W_1}\left(A\frac{\delta}{\delta\xi_2(t)}+B\frac{\delta}{\delta\xi_1(t)}\right)W_1(t) + \right.\right. \\ &+ \left.\left.\frac{\partial}{\partial W_2}\left(A\frac{\delta}{\delta\xi_1(t)}+B\frac{\delta}{\delta\xi_2(t)}\right)W_2\right]\delta(W_1(t)-W_1)\,\delta(W_2(t)-W_2)\right\rangle.\end{aligned} \quad (6.13)$$

Учитывая теперь равенства, вытекающие из (6.9):

$$\begin{gathered}\frac{\delta W_1(t)}{\delta\xi_2(t)} = \frac{\delta W_2(t)}{\delta\xi_2(t)} = iB(t), \quad \frac{\delta W_1(t)}{\delta\xi_1(t)} = \frac{\delta W_2(t)}{\delta\xi_1(t)} = iA(t), \\ \frac{\delta A(t)}{\delta\xi_2(t)} = \frac{\delta B(t)}{\delta\xi_1(t)} = -i(W_1+W_2),\end{gathered} \quad (6.14)$$

получаем уравнение вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_t}{\partial t} &= 2\gamma_1\frac{\partial}{\partial W_1}W_1P_t - 2\gamma_2\frac{\partial}{\partial W_2}W_2P_t - \\ &- 2\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial W_1}+\frac{\partial}{\partial W_2}\right)(W_1+W_2)P_t - \\ &- 2\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial W_1}+\frac{\partial}{\partial W_2}\right)^2\langle\overline{AB}\,\delta(W_1(t)-W_1)\,\delta(W_2(t)-W_2)\rangle,\end{aligned} \quad (6.15)$$

где черта обозначает усреднение по времени. В силу того, что

$$\overline{\Psi^2} = 2\overline{AB} = \overline{(x_2x_1^* - x_2^*x_1)^2} = -2W_1W_2, \quad (6.16)$$

можно записать уравнение (6.15) в замкнутой форме УЭФ:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = 2\gamma_1 \frac{\partial}{\partial W_1} W_1 P_t - 2\gamma_2 \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 P_t + \\ + 2\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right) W_1 W_2 \left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right) P_t, \quad (6.17)$$

с начальным условием

$$P_0(W_1, W_2) = \delta(W_1 - W_1^0)\delta(W_2 - W_2^0). \quad (6.18)$$

Из уравнения (6.17) вытекают уравнения для моментов величин W_1, W_2. Так, для средних значений интенсивностей мод имеем уравнения

$$\begin{aligned} \langle \dot{W}_1 \rangle &= -2\gamma_1 \langle W_1 \rangle + 2\sigma^2 \{\langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle\}, \\ \langle \dot{W}_2 \rangle &= 2\gamma_2 \langle W_2 \rangle + 2\sigma^2 \{\langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Эти уравнения называются уравнениями переноса и соответствуют обычной линейной феноменологической теории (см., например, [94]).

Для вторых моментов получаем систему

$$\begin{aligned} \langle \dot{W}_1^2 \rangle &= 4(\sigma^2 - \gamma_1)\langle W_1^2 \rangle + 8\sigma^2 \langle W_1 W_2 \rangle, \\ \langle \dot{W}_2^2 \rangle &= 4(\sigma^2 + \gamma_2)\langle W_2^2 \rangle + 8\sigma^2 \langle W_1 W_2 \rangle, \\ \langle W_1 \dot{W}_2 \rangle &= -2(\gamma_1 - \gamma_2)\langle W_1 W_2 \rangle + 4\sigma^2 \langle (W_1 + W_2)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Отметим, что система уравнений (6.19) была получена ранее в работе [95].

Пусть теперь системе уравнений (6.1) поставлены краевые условия:

$$x_1(0) - \beta x_2(0) = v_1, \quad x_2(T) - \gamma x_1(T) = v_2. \quad (6.21)$$

В этом случае для решения задачи не будет выполняться условие причинности, и надо воспользоваться теорией инвариантного погружения или методом, аналогичным использованному в задаче о распространении волн в одномерной среде. Отметим, что вопрос о поведении средних значений решения задачи (6.1) рассматривался в пятой главе.

Рассмотрим две вспомогательные задачи, описываемые уравнениями (6.1) с краевыми условиями:

$$1)\ x_1^{(1)}(0) - \beta x_2^{(1)}(0) = 0, \quad 2)\ x_1^{(2)}(0) - \beta x_2^{(2)}(0) = 1, \\ x_2^{(1)}(T) - \gamma x_1^{(1)}(T) = 1; \qquad x_2^{(2)}(T) - \gamma x_1^{(2)}(T) = 0.$$

Тогда очевидно, что сумма таких решений $x_i = v_2 x_i^{(1)} + v_1 x_i^{(2)}$ будет давать искомое решение задачи, а каждую из этих задач можно рассмотреть методом, изложенным в предыдущих параграфах.

Отметим, что уравнения линейной теории переноса, которые для данной задачи имеют вид уравнений $\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \frac{\partial}{\partial t} W_2 = D(W_1 - W_2)$, рассматривались в работах [96], где было показано, что линейная теория переноса работает лишь в случае $DT \ll 1$. В работах [84] производилось рассмотрение линейной теории переноса для волны, распространяющейся в одномерной случайно-неоднородной среде, рассмотренной в третьем параграфе. Сопоставление точных выражений с выражениями, полученными на основе линейной теории переноса, показывает, что последняя является асимптотической теорией, справедливой лишь при выполнении условия $DL \ll 1$, когда можно проводить расчеты по теории возмущений.

§ 7. О влиянии затухания волны на флуктуации интенсивности

Как указывалось выше, в случае наличия затухания волны при распространении в случайно-неоднородной среде флуктуации интенсивности волнового поля в слое флуктуирующей среды описываются формулами (3.1), (3.2) и т. п. (здесь и далее считаем, что $k_0 = k = k_L$). Поэтому для нахождения статистических характеристик интенсивности волны надо знать одноточечную плотность вероятностей и плотность вероятностей перехода для двумерного марковского процесса $(u(x), \int_0^x d\xi\, u(\xi))$. Легко написать уравнения, которым эти функции удовлетворяют, решения коих, однако, выражаются через малоизученные сфероидальные функции. Поэтому продвинуться в таком направлении в данном вопросе в настоящее время не удается. Как было показано в четвертом параграфе, в случае отсутствия затухания имеется область пространственных масштабов, не зависящая от краевых условий на левом конце слоя (напомним, что волна падает на слой среды справа). В этой области средняя интенсивность остается постоянной (с точностью до экспоненциально малых членов), а высшие моменты экспоненциально нарастают. Если толщина слоя L стремится к ∞, то область экспоненциального роста флуктуаций интенсивности занимает все полупространство, расположенное слева от границы, на которую падает волна. Естественно изучить влияние затухания волны на флуктуации интенсивности в этом предельном случае. Можно ожидать, что задача в этом случае должна существенно упроститься. Однако, так как исходная задача является краевой задачей, необходимо переформулировать задачу таким образом, чтобы исключить условие на левой границе. Это можно сделать, например, следующим образом. Прежде всего сдвинем систему координат вправо так, чтобы слой флуктуирующей среды занимал бы пространственную область $-L \leqslant x \leqslant 0$. Введем функции

$$a(x) = A(x) \exp\{\gamma x\}, \quad b(x) = B(x) \exp\{-\gamma x\}, \tag{7.1}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — функции, введенные в § 1 (см. (1.4)). Тогда волновое поле внутри слоя среды имеет структуру

$$U(x) = a(x)\exp\{-i\varkappa x\} + b(x)\exp\{i\varkappa x\}, \tag{7.2}$$

а функции $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют, согласно (1.5), (1.9), системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= \gamma a - \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[a + be^{2i\varkappa x}], \\ \frac{db}{dx} &= -\gamma b + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[ae^{-2i\varkappa x} + b] \end{aligned} \tag{7.3}$$

с краевыми условиями

$$a(0) = 1, \quad b(-L) = 0. \tag{7.4}$$

(Здесь считаем интенсивность падающей волны равной единице.)

Волновое поле в области $x > 0$ имеет вид

$$U(x) = \exp\{\gamma x - i\varkappa x\} + R_L\exp\{-\gamma x + i\varkappa x\}, \tag{7.5}$$

где комплексный коэффициент отражения волны от слоя R_L определяется через решение уравнения (1.14):

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2i(\varkappa + i\gamma)R + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R(x)]^2, \quad R(-L) = 0, \tag{7.6}$$

с помощью равенства

$$R(0) = R_L. \tag{7.7}$$

При этом функция $R(x)$ связана с функциями $a(x)$ и $b(x)$ согласно равенству (1.13):

$$R(x) = \frac{b(x)}{a(x)}\exp\{2i\varkappa x\}, \tag{7.8}$$

и, следовательно,

$$b(0) = R_L. \tag{7.9}$$

Таким образом, если мы знаем решение уравнения (7.6) и, следовательно, величину R_L, то можно переформулировать задачу (7.3), (7.4) как задачу Коши, описываемую системой уравнений (7.3) с начальными условиями $a(0) = 1$, $b(0) = R_L$. Однако решение ее уже не удовлетворяет условию причинности, так как комплексная величина R_L является функционалом поля $\tilde{\varepsilon}(x)$ во всей области $-L \leqslant x \leqslant 0$, т. е. функции $a(x)$, $b(x)$ являются функционалами поля $\tilde{\varepsilon}(x)$ во всей области пространства, занимаемого слоем флуктуирующей среды. В этом случае необходимо вычислить вариационные производные функций $a(x)$ и $b(x)$ по полю $\tilde{\varepsilon}(x)$. Для них имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta a(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')} &= \left.\frac{\delta a(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')}\right|_{\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}}=0} + \frac{\partial a(x)}{\partial R_L}\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')}, \\ \frac{\delta b(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')} &= \left.\frac{\delta b(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')}\right|_{\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}}=0} + \frac{\partial b(x)}{\partial R_L}\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Введем функции $u(x) = \partial a(x)/\partial R_L$, $v(x) = \partial b(x)/\partial R_L$. Эти функции удовлетворяют, очевидно, системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \gamma u - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[u + ve^{2i\varkappa x}], \qquad u(0) = 0, \\ \frac{dv}{dx} &= -\gamma v + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[ue^{-2i\varkappa x} + v], \quad v(0) = 1, \end{aligned} \tag{7.11}$$

и решение ее удовлетворяет условию причинности. Отметим, что функции $a(x)$, $b(x)$, $u(x)$, $v(x)$ связаны равенством

$$a(x)\,v(x) - b(x)\,u(x) = 1, \tag{7.12}$$

являющимся интегралом для систем (7.3), (7.11). Теперь остается вычислить величину $\delta R_L/\delta\tilde{\varepsilon}(x')$. Для этого проварьируем уравнение (7.6) по $\tilde{\varepsilon}(x')$ при $x > x'$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta R(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')} = \left\{2i(\varkappa + i\gamma) + i\varkappa\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R(x)]\right\}\frac{\delta R(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')}. \tag{7.13}$$

Начальным условием к (7.13) является равенство

$$\left.\frac{\delta R(x)}{\delta\varepsilon(x')}\right|_{x\to x'} = i\frac{\varkappa}{2}\frac{1}{|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R(x')]^2,$$

и, следовательно, решение уравнения (7.13) при $x = 0$ имеет вид

$$\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')} = \\ = i\frac{\varkappa}{2|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R(x')]^2\exp\left\{\int_{x'}^{0} d\xi\left[2i(\varkappa + i\gamma) + i\varkappa\frac{\tilde{\varepsilon}(\xi)}{|\tilde{\varepsilon}|}(1 + R(\xi))\right]\right\}. \tag{7.14}$$

Величину $\delta R_L/\delta\tilde{\varepsilon}$ удается связать с волновым полем $U(x)$ внутри слоя среды. Чтобы получить такую связь, перепишем первое из уравнений (7.3) следующим образом:

$$\frac{da}{dx} = \gamma a - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}a[1 + R(x)], \quad a(0) = 1; \tag{7.15}$$

решение его можно записать как

$$a(x) = \exp\left\{\gamma x - i\frac{\varkappa}{2|\tilde{\varepsilon}|}\int_0^x d\xi\,\tilde{\varepsilon}(\xi)[1 + R(\xi)]\right\}. \tag{7.16}$$

Следовательно, формулу (7.14) можно переписать в виде

$$\frac{\delta R_L}{\delta\tilde{\varepsilon}(x')} = i\frac{\varkappa}{2|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R(x')]^2 a^2(x')\exp\{-2i\varkappa x'\}. \tag{7.17}$$

Учитывая теперь, что само волновое поле (7.2) в терминах функций $a(x)$ и $R(x)$ имеет вид

$$U(x) = a(x)[1 + R(x)]\exp\{-i\varkappa x\}, \tag{7.2'}$$

получаем искомую зависимость

$$\frac{\delta R_L}{\delta\varepsilon(x)} = i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}U^2(x) \equiv i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}[a(x)e^{-i\varkappa x} + b(x)e^{i\varkappa x}]^2. \qquad (7.18)$$

Таким образом, системы уравнений (7.3), (7.11) и равенства (7.10), (7.18) образуют замкнутую систему, статистические свойства которой можно полностью описать, считая, как и ранее, $\tilde{\varepsilon}(x)$ гауссовским дельта-коррелированным процессом. Отметим, что такая переформулировка задачи полностью эквивалентна исходной постановке. Однако здесь мы уже можем перейти непосредственно к пределу $L \to \infty$, при котором $|R_L|$ имеет стационарное распределение вероятностей, описываемое формулой (5.4′).

Отметим замечательную, на наш взгляд, особенность равенства (7.18). Исходная волновая задача, постановка которой была описана в первом параграфе данной главы, является краевой задачей, для которой удается ввести функцию $R(x)$, не имеющую особого физического смысла и удовлетворяющую уравнению первого порядка по x. С помощью этой функции можно определить комплексную постоянную R_L, имеющую четкий физический смысл — коэффициента отражения волны от слоя флуктуирующей среды. Равенство же (7.18) показывает, что величина R_L определяет поле не только в свободном пространстве, но и внутри слоя, т. е. в принципе достаточно для данной задачи исследовать решение единственного уравнения (7.6).

Перейдем теперь к изучению статистических характеристик интенсивности волны внутри слоя среды. Введем функции $W_1(x) = |a(x)|^2$, $W_2(x) = |b(x)|^2$, $p(x) = |u(x)|^2$, $q(x) = |v(x)|^2$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dW_1}{dx} = 2\gamma W_1 - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(a^*be^{2i\varkappa x} - ab^*e^{-2i\varkappa x}), \qquad W_1(0) = 1,$$

$$\frac{dW_2}{dx} = -2\gamma W_2 - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(a^*be^{2i\varkappa x} - ab^*e^{-2i\varkappa x}), \qquad W_2(0) = |R_L|^2, \qquad (7.19)$$

$$\frac{dp}{dx} = 2\gamma p - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(u^*ve^{2i\varkappa x} - uv^*e^{-2i\varkappa x}), \qquad p(0) = 0,$$

$$\frac{dq}{dx} = -2\gamma q - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(u^*ve^{2i\varkappa x} - uv^*e^{-2i\varkappa x}), \qquad q(0) = 1,$$

и функцию

$$\Phi_x(W_1, W_2, p, q) = \delta(W_1(x) - W_1)\,\delta(W_2(x) - W_2)\,\delta(p(x) - p)\,\delta(q(x) - q). \qquad (7.20)$$

Функция Φ_x, как функция своих переменных, удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} = \hat{L}_\gamma\Phi_x + i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(x)\hat{M}\Phi_x, \qquad (7.21)$$

с начальным условием

$$\Phi_0(W_1, W_2, p, q) = \delta(W_1 - 1)\,\delta(p)\,\delta(q-1)\,\delta(W_2 - |R_L|^2),$$

где введены операторы

$$\begin{gathered}\hat{L}_\gamma = -2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W_1}W_1 - \frac{\partial}{\partial W_2}W_2 + \frac{\partial}{\partial p}p - \frac{\partial}{\partial q}q\right),\\ \hat{M} = \left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right)(a^*be^{2i\varkappa x} - ab^*e^{-2i\varkappa x}) + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)(u^*ve^{2i\varkappa x} - uv^*e^{-2i\varkappa x}).\end{gathered} \tag{7.22}$$

Усредним теперь уравнение (7.21) по ансамблю реализаций $\varepsilon(x)$, считая, как и ранее, $\tilde{\varepsilon}(x)$ гауссовской дельта-коррелированной функцией, т. е.

$$\langle\tilde{\varepsilon}(x)\,\tilde{\varepsilon}(x')\rangle = 2\sigma^2 l_0 \delta(x - x').$$

Тогда для функции $\langle\Phi_x\rangle = P_x(W_1, W_2, p, q)$ — одноточечной совместной плотности вероятностей функций $W_1(x)$, $W_2(x)$, $p(x)$, $q(x)$ — получаем уравнение

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = \hat{L}_\gamma P_x + i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\sigma^2 l_0\left\{\left\langle\frac{\delta\hat{M}}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)}\Phi_x\right\rangle + \left\langle\hat{M}\frac{\delta\Phi_x}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)}\right\rangle\right\}. \tag{7.23}$$

Для вариационных производных, фигурирующих в (7.23), согласно (7.3), (7.10), (7.18) и (7.21) имеем равенства

$$\begin{aligned}\frac{\delta a(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}[a + be^{2i\varkappa x}] + i\frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|}uU^2(x),\\ \frac{\delta b(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= -i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}[ae^{-2i\varkappa x} + b] + i\frac{\varkappa}{|\bar{\varepsilon}|}vU^2(x),\\ \frac{\delta u(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}[u + ve^{2i\varkappa x}],\\ \frac{\delta v(x)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= -i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}[ue^{-2i\varkappa x} + v],\\ \frac{\delta\Phi_x}{\delta\tilde{\varepsilon}(x)} &= -i\frac{\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\hat{M}\Phi_x - i\varkappa\hat{N}\Phi_x,\end{aligned} \tag{7.24}$$

где

$$\hat{N} = \frac{\partial}{\partial W_1}[ua^*U^2 - u^*aU^{*2}] + \frac{\partial}{\partial W_2}[vb^*U^2 - v^*bU^{*2}].$$

Отметим, что при $x' \to x$ в формулах (7.10) вклад членов, связанных с $\delta R_L/\delta\tilde{\varepsilon}$, удваивается, так как они определены при любых x', в то время как величины $\delta a(x)/\delta\tilde{\varepsilon}(x')$, $\delta b(x)/\delta\tilde{\varepsilon}(x')\,|_{\delta R_{L/\delta\tilde{\varepsilon}=0}} \sim \theta(x' - x)$.

Подстановка (7.24) в (7.23) приводит, вообще говоря, к незамкнутому уравнению для P_x. Однако, если, как и ранее, интересоваться только медленными изменениями статистических характеристик всех величин, необходимо усреднить это уравнение

по периоду быстрых осцилляций, что приводит уже к замкнутому уравнению:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = (\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_{1,2})\, P_x, \tag{7.25}$$

$$\hat{L}_1 = -2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 - \frac{\partial}{\partial W_2} W_2\right) - \\ - D\left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial W_2} W_1^2 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2^2\right),$$

$$\hat{L}_2 = -2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial p}\, p - \frac{\partial}{\partial q}\, q\right) - D\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right) pq \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right),$$

$$\hat{L}_{1,2} = D\left(\frac{\partial}{\partial W_1} + \frac{\partial}{\partial W_2}\right)\left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} + W_2 \frac{\partial}{\partial W_2}\right)(W_1 - W_2)(W_1 q - W_2 p) + \\ + D\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2\right)[p + q + (p - q)(W_1 q - W_2 p)],$$

где коэффициент диффузии $D = \varkappa^2 \sigma^2 l_0 / 2 \mid \bar{\varepsilon} \mid^2$. При выводе (7.25) используется также формула, вытекающая из (7.12):

$$W_1(x)\, q(x) - W_2(x)\, p(x) = 1 + b(x)\, u(x) + b^*(x)\, u^*(x). \tag{7.26}$$

Начальным условием для (7.25) является равенство

$$P_0(W_1, W_2, p, q) = \delta(W_1 - 1)\, \delta(p)\, \delta(q - 1)\, P_L(W_2), \tag{7.27}$$

где $P_L(W_2)$ — плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения волны от слоя среды.

Отметим, что из уравнения (7.25) следует равенство

$$\langle (W_1 q - W_2 p) \rangle = 1 \tag{7.28}$$

и уравнения для первых моментов величин $W_1(x)$, $W_2(x)$, играющие роль уравнений переноса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle W_1 \rangle &= 2\gamma \langle W_1 \rangle + D \langle (W_1 - W_2)(W_1 q - W_2 p) \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle W_2 \rangle &= -2\gamma \langle W_2 \rangle + D \langle (W_1 - W_2)(W_1 q - W_2 p) \rangle, \end{aligned} \tag{7.29}$$

с начальными условиями

$$\langle W_1(0) \rangle = 1, \quad \langle W_2(0) \rangle = \langle \mid R_L \mid^2 \rangle. \tag{7.30}$$

Выражение, стоящее в правой части (7.29), связано с корреляцией функций W_1, W_2 и p, q, описывающих влияние начальных данных на поведение $W_i(x)$. Если выражение $W_1 q - W_2 p$ заменить на его среднее значение, равное единице (см. (7.28)), то получаем уравнения, соответствующие линейной теории переноса. Отметим, что при $x \to 0$ поведение функций $\langle W_1 \rangle$, $\langle W_2 \rangle$, как это следует из (7.29), (7.30), описывается формулами

$$\begin{aligned} \langle W_1(x) \rangle &= 1 + \{2\gamma + D(1 - \langle \mid R_L \mid^2 \rangle)\}\, x, \\ \langle W_2(x) \rangle &= \langle \mid R_L \mid^2 \rangle - \{2\gamma \langle \mid R_L \mid^2 \rangle - D(1 - \langle \mid R_L \mid^2 \rangle)\}\, x \quad (x \leqslant 0). \end{aligned} \tag{7.31}$$

Уравнения (7.29), (7.25) и формулы (7.31) справедливы для слоя любой конечной толщины L. Если теперь перейти к пределу $L \to \infty$, то функция $P_L(W_2)$ в (7.27), как отмечалось выше, будет иметь стационарное распределение

$$P_\infty(W_2) = \frac{2\beta}{(1-W_2)^2} \exp\left\{-\frac{2\beta W_2}{1-W_2}\right\}, \quad \beta = \frac{2\gamma}{D}, \tag{7.32}$$

и величина $\langle \mid R_L \mid^2 \rangle$, фигурирующая в (7.30), (7.31), вычисляется по этому распределению.

Сравним теперь точное решение (7.31) с соответствующим решением уравнений линейной теории переноса. В линейной теории переноса исходными уравнениями являются ($L = \infty$)

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dx} &= 2\alpha W_1 + \delta(W_1 - W_2), \qquad W_1(0) = 1, \\ \frac{dW_2}{dx} &= -2\alpha W_2 + \delta(W_1 - W_2), \qquad W_2(0) = R, \end{aligned} \tag{7.33}$$

где неизвестная константа R определяется из условия отсутствия растущей экспоненты на $x = -\infty$, а феноменологические параметры α и δ играют роль коэффициентов затухания и диффузии. Соответствующее решение задачи (7.33) и еет вид

$$W_1(x) = e^{\lambda x}, \quad W_2(x) = Re^{\lambda x}, \quad \lambda = 2\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)}, \quad R = (2\alpha + \delta - \lambda)/\delta. \tag{7.34}$$

Сравнение решения (7.34) при $x \to 0$ с (7.31) показывает, что невозможно отождествить параметры α, δ с истинными коэффициентами γ, D и формулы (7.34) несправедливы для любых достаточно малых значений x. Таким образом, линейная теория переноса для полуплоскости, заполненной случайно-неоднородной средой, не применима в общем случае. Решения согласуются с параметрами $\alpha = \gamma$, $\delta = D$, $R = \langle \mid R_L \mid^2 \rangle$ лишь в асимптотическом пределе $\beta \gg 1$. При малых значениях x уравнения (7.33) справедливы с параметрами $\alpha = \gamma$, $\delta = D$, $R = \langle \mid R_L \mid^2 \rangle$, однако они довольно быстро перестают быть справедливыми, так как решение их содержит растущую с расстоянием экспоненту.

Рассмотрим случай $\gamma = 0$. Тогда $P_\infty(W_2) \equiv \delta(W_2 - 1)$ и

$$P_x(W_1, W_2, p, q) = \delta(W_1 - W_2)\,\delta(q - p - 1)\,P_x(W_1, q), \tag{7.35}$$

так как в этом случае сохраняется поток энергии, т. е.

$$\frac{d}{dx}[W_1(x) - W_2(x)] = \frac{d}{dx}[q(x) - p(x)] = 0.$$

Подставляя (7.35) в (7.25) и интегрируя по W_2, p, q, получаем уравнение для $P_x(W_1) = \langle \delta(W_1(x) - W_1) \rangle$ вида

$$\frac{\partial P_x(W_1)}{\partial x} = -D\frac{\partial^2}{\partial W_1^2} W_1^2 P_x(W_1), \quad P_0(W_1) = \delta(W_1 - 1), \tag{7.36}$$

что соответствует логарифмически-нормальному распределению для величины $W_1(x)$. В частности, из (7.36) следуют формулы

$$\langle W_1(x)\rangle = 1, \quad \langle W_1^2(x)\rangle = \exp\{-2Dx\} \text{ и т. д.},$$

полученные ранее другим путем в четвертом параграфе.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу о статистических характеристиках поля источника в безграничной среде. Пусть источник расположен в начале координат, величины, соответствующие значениям $x \gtrless 0$, будем отмечать индексами $\pm$. Рассмотрим вначале слой конечной толщины с границами в точках $-L_-$, L_+. В этом случае волновое поле $U(x)$ в области $-L_- \leqslant x \leqslant L_+$ описывается уравнением

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2\left[1 + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}\right]U = 2ik\delta(x) \qquad (k = \varkappa + i\gamma), \tag{7.37}$$

откуда вытекают граничные условия при $x = 0$:

$$U_+(0) = U_-(0), \; U'_+(0) - U'_-(0) = 2ik. \tag{7.38}$$

Граничными условиями при $-L_-$, L_+, как и ранее, являются условия непрерывности поля U и его производной.

Волновое поле в областях $x \gtrless 0$ можно представить в виде

$$U_\pm(x) = a_\pm(x)\exp(-i\varkappa x) + b_\pm(x)\exp(i\varkappa x), \tag{7.39}$$

где функции $a_\pm(x)$, $b_\pm(x)$ удовлетворяют системе уравнений (7.3) с граничными условиями

$$b_-(-L_-) = 0, \; a_+(L_+) = 0. \tag{7.40}$$

Введем функции

$$R_-(x) = \frac{b_-(x)}{a_-(x)}e^{2i\varkappa x}, \quad R_+(x) = \frac{a_+(x)}{b_+(x)}e^{-2i\varkappa x}, \tag{7.41}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dR_\mp(x)}{dx} = \pm\left\{2i(\varkappa + i\gamma)R_\mp(x) + i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\tilde{\varepsilon}|}[1 + R_\mp(x)]^2\right\} \tag{7.42}$$

с начальными условиями

$$R_-(-L_-) = 0, \quad R_+(L_+) = 0. \tag{7.43}$$

Введем обозначения

$$R_-(0) = R_-, \quad R_+(0) = R_+ \tag{7.44}$$

и отметим, что величина R_- соответствует коэффициенту отражения волны от слоя среды, занимающего область $(-L_-, 0)$, в предположении, что в правой полуплоскости $\tilde{\varepsilon} \equiv 0$. Величина же R_+ соответствует коэффициенту отражения от слоя среды $(0, L_+)$. Следовательно,

$$b_-(0) = R_-a_-(0), \quad a_+(0) = R_+b_+(0), \tag{7.45}$$

и согласно (7.38) получаем

$$a_-(0)=\frac{1+R_+}{1-R_+R_-},\quad b_+(0)=\frac{1+R_-}{1-R_+R_-}. \tag{7.46}$$

Теперь задача для левого и правого слоев сводится к рассмотренной ранее, но начальные условия при $x=0$ как для $a_\pm$, так и для $b_\pm$, описываемые формулами (7.45), (7.46), будут функционалами поля $\tilde{\varepsilon}(x)$ во всем пространстве $(-L_-, L_+)$. Можно было бы описанным выше способом найти уравнение для плотности вероятностей величин W_1, W_2, однако оно становится в данном случае очень громоздким. Ограничимся поэтому вычислением величины

$$I_0=\langle W_1(0)\rangle+\langle W_2(0)\rangle=\langle\,|\,a\,(0)\,|^2+|\,b\,(0)\,|^2\rangle \tag{7.47}$$

в предельном случае L_-, $L_+\to\infty$. Представляя $R_\pm$ в виде

$$R_\pm(x)=\sqrt{\frac{u_\pm-1}{u_\pm+1}}\exp(i\varphi_\pm)$$

и выполняя усреднение по фазам, которые равномерно распределены в интервале $(0, 2\pi)$, получаем

$$I_0=2\left\langle\frac{u_+u_-}{u_++u_-}\right\rangle.$$

Величины $u_\pm(x)$ статистически независимы (в силу предполагаемой δ-коррелированности $\tilde{\varepsilon}(x)$), в неограниченной среде для них существует стационарное распределение вероятностей (2.9):

$$P_\infty(u)=\beta\exp\{-\beta(u-1)\}\qquad\left(\beta=\frac{2\gamma}{D}\right). \tag{7.48}$$

Выполняя оставшееся усреднение, находим

$$I_0=\frac{2}{3}\left(2-\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\frac{4}{3}\beta^2e^{2\beta}\,\mathrm{Ei}\,(-2\beta), \tag{7.49}$$

где $\mathrm{Ei}\,(x)$ — интегральная показательная функция. Используя уравнения (7.19) и учитывая, что, в полном соответствии с (7.18),

$$\frac{\delta R_\pm}{\delta\varepsilon(x)}=i\frac{\varkappa}{2\,|\,\bar{\varepsilon}\,|}U_\pm^2(x),$$

можно найти следующие члены разложения по x для величин $\langle W_1\rangle$ и $\langle W_2\rangle$, аналогичные (7.31).

Рассмотрим теперь, для полноты картины, предельные случаи слабого ($\beta\ll1$) и сильного ($\beta\gg1$) затухания. С помощью выражения (7.49) находим

$$I_0\sim\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\beta}+2\right),\quad\beta\ll1,$$

$$I_0\sim1+\frac{1}{\beta},\qquad\beta\gg1.$$

Для величины $\langle |R|^2\rangle = \lim\limits_{L\to\infty}\langle |R_L|^2\rangle$ легко получить равенство

$$\langle |R|^2\rangle = 1 + 2\beta e^{2\beta}\mathrm{Ei}(-2\beta),$$

откуда для формул (7.31) имеем при $\beta \ll 1$

$$\langle W_1\rangle = 1 + 2\gamma x(1-2\ln 2\beta),$$
$$\langle W_2\rangle = 1 + 2\beta\ln 2\beta - 2\gamma x(1 + 2\ln 2\beta),$$
$$\langle I(x)\rangle = 2(1 + \beta\ln 2\beta) - 4Dx\beta\ln 2\beta,$$

а в случае $\beta \gg 1$

$$\langle W_1\rangle = 1 + 2\gamma x\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad \langle W_2\rangle = \frac{1}{2\beta}(1 + 2\gamma x),$$
$$\langle I(x)\rangle = 1 + \frac{1}{2\beta} + 2\gamma x\left(1 + \frac{3}{2\beta}\right).$$

Аналогичным образом для среднего значения интенсивности в точке расположения источника

$$\langle I(0)\rangle = \langle |a(0) + b(0)|^2\rangle = \left\langle \left| \frac{(1 + R_+)(1 - R_-)}{1 - R_+R_-} \right|^2 \right\rangle$$

в предельном случае L_-, $L_+ \to \infty$ после усреднения по углам получаем выражение

$$\langle I(0)\rangle = \left\langle \frac{3u_+u_- - (u_+ + u_-) + 1}{u_+ + u_-} \right\rangle,$$

которое можно записать в виде однократного интеграла

$$\langle I(0)\rangle = \beta^2 \int\limits_0^\infty dt\, \frac{t^3/2 + 2t(t+1)}{2+t} e^{-\beta t}. \qquad (7.50).$$

Следовательно, для поведения $\langle I(0)\rangle$ в зависимости от параметра β получаем выражение

$$\langle I(0)\rangle = 1 + \frac{1}{\beta}. \qquad (7.51)$$

Выше было получено уравнение, описывающее распределение вероятностей для интенсивностей встречных мод, которое содержало две дополнительные переменные, учитывающие влияние границ на флуктуации волны. Полученное уравнение, однако, оказывается очень сложным. Теория инвариантного погружения дает прямой путь получения более простых уравнений *).

Пусть как и в § 1, слой случайно-неоднородной среды занимает часть пространства $0 \leqslant x \leqslant L$ и справа на него падает плоская волна единичной интенсивности. Тогда решение задачи в области

*) Приведенные ниже результаты получены совместно с Г. И. Бабкиным.

$0 \leqslant x \leqslant L$ описывается формулой (1.19):

$$U(x) = (1 + R_L) \exp\left\{ik \int_x^L d\xi\, \psi(\xi)\right\} \qquad (k = \varkappa + i\gamma), \quad (7.52)$$

где функция $\psi(x)$ определяется равенством (1.17), а комплексный коэффициент отражения R_L, как функция параметра L — толщины слоя, описывается уравнением (1.14′):

$$\frac{dR_L}{dL} = 2i(\varkappa + i\gamma) R_L + i \frac{\varkappa}{2|\tilde{\varepsilon}|} \tilde{\varepsilon}(L)[1 + R_L]^2, \qquad R_0 = 0. \quad (7.53)$$

Следуя идеям теории инвариантного погружения, будем рассматривать волновое поле $U(x)$ как функцию двух переменных, x и L, где $x \leqslant L$, т. е. $U = U(x, L)$. Тогда, дифференцируя формулу (7.52) по L и используя равенства (1.17), (7.53), получаем уравнение

$$\frac{\partial U(x, L)}{\partial L} = (i\varkappa - \gamma) U + i \frac{\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\tilde{\varepsilon}|} (1 + R_L) U(x, L) \quad (7.54)$$

с начальным условием

$$U(x, L)\,|_{L \to x} = 1 + R_x, \quad (7.55)$$

где функция R_x описывается уравнением (7.53). Уравнения (7.53) и (7.54) являются уравнениями теории инвариантного погружения для данной задачи. Отметим, что в § 3 гл. 5 они были получены другим способом, исходя из описания задачи с помощью интегрального уравнения. Принципиальным отличием систем (7.53), (7.54) от исходной задачи (1.1) является то, что уравнения теории инвариантного погружения удовлетворяют условию причинности.

Представим волновое поле $U(x, L)$ в виде

$$U(x, L) = A(x, L) \exp\{-ikx\} + B(x, L) \exp\{ikx\}, \quad (7.56)$$

где $B(x, L)$ связана с функциями $A(x, L)$ и $R(x)$ условием

$$B(x, L) = A(x, L) R(x) \exp\{-2ikx\}, \quad (7.57)$$

и, следовательно,

$$U(x, L) = A(x, L)[1 + R(x)] \exp\{-ikx\}. \quad (7.58)$$

Подчеркнем, что функция $R(x)$ в (7.57), (7.58) не зависит от параметра L. Дифференцируя выражения (7.57), (7.58) по L, получаем с помощью (7.54) следующие уравнения:

$$\frac{\partial A(x, L)}{\partial L} = ikA + i \frac{\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\tilde{\varepsilon}|} (1 + R_L) A(x, L), \quad A(x, x) = \exp\{ikx\},$$

$$\frac{\partial B(x, L)}{\partial L} = ikB + i \frac{\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\tilde{\varepsilon}|} (1 + R_L) B(x, L), \quad B(x, x) = R_x \exp\{-ikx\}. \quad (7.59)$$

Уравнения для функций A, B, U отличаются только начальными значениями.

Введем теперь, как и ранее, функции

$$a(x, L) = A(x, L) \exp\{\gamma x\}, \quad b(x, L) = B(x, L) \exp\{-\gamma x\}, \tag{7.60}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial a}{\partial L} = ika + i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[1 + R_L]a, \quad a(x, x) = \exp\{i\varkappa x\},$$

$$\frac{\partial b}{\partial L} = ikb + i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[1 + R_L]b, \quad b(x, x) = R_x \exp\{-i\varkappa x\}. \tag{7.59'}$$

Функции $a(x, L)$ и $b(x, L)$ описывают амплитуды встречных волн. Введем их интенсивности

$$W_1(x, L) = |a|^2, \quad W_2(x, L) = |b|^2,$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial L} W_n(x, L) = -2\gamma W_n(x, L) + i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[R_L - R_L^*]W_n(x, L) \tag{7.61}$$

с начальными условиями

$$W_1(x, x) = 1, \quad W_2(x, x) = |R_x|^2. \tag{7.62}$$

Используя (7.53), для функции $\rho_x = |R_x|^2$ получаем

$$\frac{d\rho_x}{dx} = -4\gamma\rho_x - i\frac{\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(1 - \rho_x)(R_x - R_x^*), \quad \rho_0 = 0. \tag{7.63}$$

Перейдем теперь к статистическому описанию. Будем считать, как и ранее, что $\tilde{\varepsilon}(x)$ — гауссовский δ-коррелированный случайный процесс. Введем функцию

$$\Phi_L(W_1, W_2, \rho) = \delta(W_1(x, L) - W_1)\,\delta(W_2(x, L) - W_2)\,\delta(\rho_L - \rho), \tag{7.64}$$

удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \Phi_L}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W_1}W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2}W_2 + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right)\Phi_L - \\ - \frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\left[\frac{\partial}{\partial W_1}W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2}W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1 - \rho)\right]\tilde{\varepsilon}(L)(R_L - R_L^*)\Phi_L \tag{7.65}$$

с начальным условием при $L = x$

$$\Phi_{L=x}(W_1, W_2, \rho) = \delta(W_1 - 1)\,\delta(W_2 - \rho)\,\delta(\rho_x - \rho). \tag{7.66}$$

Усредним уравнение (7.65) по ансамблю реализаций $\tilde{\varepsilon}(L)$. Полу-

чим для совместной плотности вероятностей W_n, ρ уравнение

$$\frac{\partial P_L(W_1, W_2, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L(W_1, W_2, \rho) +$$
$$+ \frac{D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]\langle[(1+R_L)^2+(1+R_L^*)^2]\Phi_L\rangle -$$
$$- \frac{D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2\langle(R_L - R_L^*)^2\Phi_L\rangle$$
$$\left(D = \frac{\varkappa^2\sigma^2 l_0}{2|\bar{\varepsilon}|^2}\right) \quad (7.67)$$

с начальным условием при $L = x$

$$P_x(W_1, W_2, \rho) = \delta(W_1 - 1)\,\delta(W_2 - \rho)\,P_x(\rho). \quad (7.67')$$

Уравнение (7.67) не замкнуто относительно функции $P_L(W_n, \rho)$. Учитывая, что нас интересует медленное изменение статистических характеристик решения задачи, можно обычным способом усреднить уравнение (7.67) по быстрым осцилляциям. В результате получим уравнение Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial P_L(W_1, W_2, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right] P_L +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2 \rho P_L(W_1, W_2, \rho) \quad (7.68)$$

с начальным условием (7.67′), где функция $P_x(\rho)$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial P_x(\rho)}{\partial x} = 4\gamma\frac{\partial}{\partial \rho}\rho P_x(\rho) - 2D\frac{\partial}{\partial \rho}\rho(1-\rho)P_x(\rho) +$$
$$+ D\frac{\partial}{\partial \rho}\rho(1-\rho)^2\frac{\partial}{\partial \rho}P_x(\rho), \quad P_0(\rho) = \delta(\rho). \quad (7.69)$$

Уравнения (7.68), (7.69) полностью описывают статистические характеристики интенсивности волны. Если же интересоваться интенсивностью отдельных встречных волн, то для них получается более простое уравнение

$$\frac{\partial P_L(W, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W} W + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L(W, \rho) +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial W} W - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right] P_L +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial W} W - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2 \rho P_L(W, \rho) \quad (7.68')$$

с начальными условиями

$$P_x(W_1, \rho) = \delta(W_1 - 1)\,P_x(\rho), \quad P_x(W_2, \rho) = \delta(W_2 - \rho)P_x(\rho).$$

Из уравнения (7.68′) следуют уравнения инвариантного погру-

жения для первых моментов

$$\frac{\partial}{\partial L}\langle W(x, L)\rangle = -2\gamma\langle W\rangle - D[\langle W\rangle - \langle\rho W\rangle]$$

с начальными условиями при $L = x$:

$$\langle W_1(x, x)\rangle = 1, \ \langle W_2(x, x)\rangle = \langle\rho_x\rangle.$$

Умножая уравнение (7.68) на $W_1^{\lambda_1} W_2^{\lambda_2}$ и интегрируя по W_1, W_2 получаем для функции $Q_L(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \iint dW_1 dW_2 W_1^{\lambda_1} W_2^{\lambda_2} \cdot P_L(W_1, W_2, \rho)$ более простое уравнение

$$\frac{\partial Q_L}{\partial L} = -2\gamma\left(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)Q_L - D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]Q_L + \\ + D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]^2 \rho Q_L(\lambda_1, \lambda_2, \rho) \quad (7.68'')$$

с начальным условием $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \rho^{\lambda_2} P_x(\rho)$. Если решение уравнения (7.68″) известно, то соответствующие моменты интенсивностей для встречных волн можно получить, интегрируя его по ρ. В случае мнимых значений λ_1, λ_2 величина Q_L является характеристической функцией логарифмов интенсивностей W_1, W_2.

Рассмотрим теперь предельный случай, когда случайная среда занимает полупространство $x < 0$. Этот случай соответствует предельному переходу $L \to \infty$, $x \to \infty$ при условии, что $L - x \to -x$ — фиксированная величина. В результате вместо (7.69) получаем стационарное уравнение

$$2[2\gamma - D(1-\rho)]P_\infty(\rho) + D(1-\rho)^2\frac{dP_\infty(\rho)}{d\rho} = 0, \quad (7.69')$$

решение которого описывается формулой (7.32). Уравнение (7.68′) переходит в уравнение Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial P_x(W, \rho)}{\partial x} = -2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial W}W + 2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)P_x(W, \rho) - \\ - D\left[\frac{\partial}{\partial W}W - \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]P_x - D\left[\frac{\partial}{\partial W}W - \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]^2\rho P_x \quad (7.70)$$

с начальными условиями

$$P_0(W_1, \rho) = \delta(W_1 - 1)P_\infty(\rho), \quad P_0(W_2, \rho) = \delta(W_2 - \rho)P_\infty(\rho).$$

Для величин $\langle W_1\rangle$, $\langle W_2\rangle$ находим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle W\rangle = 2\gamma\langle W\rangle + D[\langle W\rangle - \langle\rho W\rangle] \quad (7.71)$$

с начальными условиями

$$\langle W_1(0)\rangle = 1, \quad \langle W_2(0)\rangle = \langle\rho\rangle.$$

Уравнения (7.71) играют роль уравнений переноса. Отметим, что их внешний вид не соответствует линейной теории переноса. Исходя из (7.71), можно найти поведение функций $\langle W\rangle$ в окрестности точки $x = 0$:

$$\langle W_1(x)\rangle = 1 + x\,[2\gamma + D\,(1 - \langle\rho\rangle)], \qquad (7.72)$$
$$\langle W_2(x)\rangle = \langle\rho\rangle + x\,[2\gamma\,\langle\rho\rangle + D\,(\langle\rho\rangle - \langle\rho^2\rangle)].$$

С учетом соотношения $\langle\rho^2\rangle = 2\,(\beta + 1)\,\langle\rho\rangle - 1$, являющегося следствием стационарного уравнения (7.69′), эти выражения совпадают с соответствующими формулами (7.31).

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение решения уравнения (7.70) при $\beta \gg 1$. Учитывая, что в этом предельном случае стационарное распределение вероятностей имеет вид $P_\infty(\rho) = 2\beta \exp\{-2\beta\rho\}$, можно сделать в (7.70) замену переменных $\rho\beta \to \rho$. При этом ясно, что последний член в (7.70) будет иметь порядок β^{-2}, поэтому с точностью до членов $\sim\beta^{-1}$ имеем

$$\frac{\partial P_x(W_1, W_2)}{\partial x} = -(2\gamma + D)\left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2\right) P_x(W_1, W_2),$$
$$P_0(W_1, W_2) = \delta(W_1 - 1)\,2\beta \exp\{-2\beta W_2\}. \qquad (7.73)$$

Уравнение (7.73) легко решается, в результате для средних значений функций W получаем выражения

$$\langle W_1(x)\rangle = \exp\{2\gamma x\,(1 + \beta^{-1})\}, \quad \langle W_2(x)\rangle = (2\beta)^{-1} \exp\{2\gamma x\,(1 + \beta^{-1})\},$$

что соответствует феноменологической линейной теории переноса. Отметим, что в этом случае, как видно из уравнения (7.73), отсутствует связь между интенсивностями встречных волн.

Интегральное уравнение, соответствующее рассматриваемой задаче, изучалось в работе [97] с помощью приближения Бурре и лестничного приближения для уравнения Бете — Солпитера. В этой работе было получено решение, согласующееся с линейной теорией переноса. Следовательно, использованные в [97] приближенные методы расчета справедливы, по-видимому, лишь при условии $\beta \gg 1$.

В случае $\gamma = 0$ $P_\infty(\rho) \to \delta(\rho - 1)$ и уравнение (7.70) переходит в (7.36). При $\gamma \neq 0$ решить уравнение (7.70) не удается. Однако для функции $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$, описывающей моменты величин W_1, W_2, можно получить уравнение, аналогичное (7.68″):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 2\gamma\left(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right) Q_x + D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1 - \rho)\right] Q_x - D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1 - \rho)\right]^2 \rho Q_x, \qquad (7.74)$$

где функция $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \iint dW_1 dW_2 W_1^{\lambda_1} W_2^{\lambda_2} P_x(W_1, W_2, \rho)$

и $Q_0(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \rho^{\lambda_2} P_\infty(\rho)$. Решение уравнения (7.74) можно представить с помощью кулоновских сфероидальных функций. Кроме того, для уравнений подобного вида существуют хорошо разработанные численные методы (см., например, [39]).

Отметим, что теория инвариантного погружения позволяет связать решение задачи об источнике внутри случайно-неоднородной среды с решением задачи о падении волны на слой среды. При этом, например, средняя интенсивность волны в задаче с источником в среде, занимающей все пространство, простым образом (через квадратуру) определяется корреляционной функцией интенсивности волны в задаче о падении волны на полупространство. Решение, соответствующее линейной теории переноса, в этом случае также является асимптотическим пределом при $\beta \gg 1$.

Выше мы подробно рассмотрели одномерную задачу о распространении волны через слой флуктуирующей среды. Однако в реальных условиях (трехмерная среда), прежде чем станет определяющим отражение волны (обратное рассеяние), существенную роль будет играть рассеяние на малые углы (поперечная диффузия волны). Статистическое описание волнового поля для этого случая будет рассмотрено в последующих главах книги. Теория инвариантного погружения, описанная выше для одномерной задачи, легко обобщается и на трехмерный случай [162]. Это позволяет, в принципе, установить условия, при которых можно пренебречь обратным рассеянием. Однако, учитывая, что в настоящее время еще не имеется конкретных результатов в данном направлении, мы не будем на этом останавливаться.

Глава 8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ (МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ)

При распространении волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния, становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций). Этот эффект был обнаружен экспериментально Грачевой и Гурвичем [98] в опытах по распространению света в турбулентной атмосфере и в дальнейшем исследовался более подробно во многих работах [99]. Сильные флуктуации интенсивности могут возникать при распространении радиоволн через ионосферу, солнечную корону или межзвездную среду [100], при просвечивании атмосферы планет во время покрытия ими естественных или искусственных источников излучения [101] и в ряде других случаев.

Общее состояние теории распространения волн в случайно-неоднородных средах приведено в обзорных работах [33, 102—107]. Ниже мы, следуя [102, 103], рассмотрим описание процесса распространения волн в случайно-неоднородных средах в приближении диффузионного случайного процесса и обсудим условия применимости такого подхода.

При этом целесообразно разбить рассматриваемый материал на три части. В первой (настоящая глава) рассмотрение ведется на основе изучения статистических свойств стохастического уравнения, описывающего процесс распространения волны; во второй части (гл. 9) изучаются статистические свойства решения этого стохастического уравнения, выписанного в явном виде (в виде континуального интеграла), и в третьей части (гл. 10) рассматривается приближение геометрической оптики.

§ 1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия

Распространение монохроматической волны в среде с крупномасштабными неоднородностями будем описывать скалярным волновым уравнением

$$\Delta\psi + k^2 [1 + \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r})]\psi = 0, \tag{1.1}$$

здесь ψ связано с компонентой волнового поля E соотношением

$$E = \psi \exp(-i\omega t), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\langle\varepsilon\rangle, \quad \text{а} \quad \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon - \langle\varepsilon\rangle}{\langle\varepsilon\rangle}$$

— флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости или показателя преломления (в дальнейшем тильду у ε писать не будем).

Если пренебречь рассеянием на большие углы, то вместо (1.1) можно использовать параболическое уравнение для функции u, связанной с ψ соотношением $\psi = u \exp\{ikx\}$:

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x} + \Delta_\perp u + k^2\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\, u(x, \boldsymbol{\rho}) = 0, \tag{1.2}$$

$$\left(\boldsymbol{\rho} = \{y, z\}, \ \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

где ось x выбрана в направлении первоначального распространения волны. При переходе от (1.1) к (1.2) отбрасывается слагаемое $\partial^2 u/\partial x^2$. Начальным условием к уравнению (1.2) является условие

$$u(0, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}). \tag{1.3}$$

В дальнейшем мы будем исходить из уравнения (1.2).

Отметим, что процесс распространения волны, описываемый уравнением (1.2) с граничным условием (1.3), является обобщением на бесконечномерный случай рассмотренной в шестой главе системы уравнений для параметрического возбуждения колебательной системы с флуктуирующими параметрами.

Уравнение (1.2) с граничным условием (1.3) можно записать в виде следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}) \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho})\right\} +$$

$$+ \frac{i}{2k}\int_0^x d\xi \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_\xi^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \boldsymbol{\rho})\right\} \Delta_\perp u(\xi, \boldsymbol{\rho}), \tag{1.4}$$

которое в ряде случаев оказывается более удобным.

Так как уравнение (1.2) является уравнением первого порядка по x с граничным условием (1.3) при $x = 0$, то для этого уравнения выполняется условие причинности, введенное в гл. 3 (координата x играет роль времени), т. е. имеет место соотношение

$$\frac{\delta u(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}')} = 0 \quad \text{при} \quad x' < 0, \quad x' > x. \tag{1.5}$$

Для вариационной производной при $x = x'$ получаем стандартным путем

$$\frac{\delta u(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}')} = i\frac{k}{2}\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')\, u(x, \boldsymbol{\rho}). \tag{1.6}$$

В общем случае величина $\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x', \rho')}$ при $0 \leqslant x' < x$ может быть выражена через функцию Грина уравнения (1.2), связывающую $u(x, \rho)$ и $u(x', \rho')$ при $0 < x' < x$:

$$u(x, \rho) = \int d\rho' G(x, \rho; x', \rho') u(x', \rho') \tag{1.7}$$

$$(u(x, \rho) = \int d\rho' G(x, \rho; 0, \rho') u_0(\rho')),$$

при помощи соотношения

$$\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x', \rho')} = i \frac{k}{2} G(x, \rho; x', \rho') u(x', \rho').$$

Функция Грина G удовлетворяет при этом уравнению

$$G(x, \rho; x', \rho') = g(x, \rho; x', \rho') + \\ + i \frac{k}{2} \int_{x'}^{x} d\xi \int d\rho'' g(x, \rho; \xi, \rho'') \varepsilon(\xi, \rho'') G(\xi, \rho''; x', \rho'), \tag{1.8}$$

где

$$g(x, \rho; x', \rho') = \frac{k}{2\pi i (x - x')} \exp\left\{\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x - x')}\right\} \qquad (x > x')$$

представляет собой функцию Грина для уравнения (1.2) в отсутствие неоднородностей. При $x' \to x$ формула (1.8) переходит в формулу

$$G(x, \rho; x', \rho')|_{x' \to x} = g(x, \rho; x', \rho')|_{x' \to x} = \delta(\rho - \rho'),$$

являющуюся обобщением известной формулы теории диффузии на мнимый коэффициент диффузии. Отметим, что функция Грина $G(x, \rho; x', \rho')$ описывает поле сферической волны, распространяющейся из точки (x', ρ').

Интегральное уравнение (1.8) можно записать в эквивалентной форме в виде функционального уравнения в вариационных производных (см. § 4 гл. 4):

$$\frac{\delta G(x, \rho; x', \rho')}{\delta \varepsilon(\xi, \rho_1)} = i \frac{k}{2} G(x, \rho; \xi, \rho_1) G(\xi, \rho_1; x', \rho') \tag{1.9}$$

$$(x' \leqslant \xi \leqslant x)$$

с «начальным» условием

$$G(x, \rho; x', \rho') \mid_{\varepsilon = 0} = g(x, \rho; x', \rho').$$

В ряде случаев, когда ε достаточно мало, можно использовать теорию возмущений по ε и представить $u(x, \rho)$ в виде итерационного ряда:

$$u(x, \rho) = u_0(x, \rho) + u_1(x, \rho) + u_2(x, \rho) + \ldots,$$

где $u_0(x, \rho) = \int d\rho' g(x, \rho; 0, \rho') u_0(\rho')$ — решение соответствующей задачи в случае отсутствия неоднородностей (т. е. при $\varepsilon \equiv 0$),

а $u_n(x, \rho)$ — n-й итерационный член n-й степени по полю ε. С помощью формул (1.7) и (1.9) легко выписать выражения для $u_1(x, \rho)$, $u_2(x, \rho)$ и т. д. В самом деле, раскладывая поле $u(x, \rho)$ в функциональный ряд Тейлора по ε, получаем

$$u_1(x, \rho) = \int_0^x dx' \int d\rho' \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta\varepsilon(x', \rho')}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon(x', \rho') =$$

$$= i\frac{k}{2}\int_0^x dx' \int d\rho' G(x, \rho; x', \rho') u(x', \rho')|_{\varepsilon=0} \varepsilon(x', \rho') =$$

$$= i\frac{k}{2}\int_0^x dx' \int d\rho' g(x, \rho; x', \rho') u_0(x', \rho') \varepsilon(x', \rho').$$

Для следующего приближения получаем

$$u_2(x, \rho) =$$

$$= \frac{1}{2!}\int dx'\, dx'' \int d\rho'\, d\rho'' \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta\varepsilon(x', \rho')\,\delta\varepsilon(x'', \rho'')}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon(x', \rho')\,\varepsilon(x'', \rho'') =$$

$$= -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' \int d\rho'\, d\rho'' \varepsilon(x', \rho')\,\varepsilon(x'', \rho'') \times$$

$$\times g(x, \rho; x', \rho')\, g(x', \rho'; x'', \rho'')\, u_0(x'', \rho'') \text{ и т. д.}$$

Выражение для $u_1(x, \rho)$ описывает рассеяние падающей волны $u_0(x, \rho)$ на неоднородностях $\varepsilon(x, \rho)$ в так называемом «борновском приближении».

Итерационный ряд для $u(x, \rho)$, разумеется, легко получить и непосредственно, исходя из уравнений (1.2) или (1.8). Однако описанный прием оказывается эффективным для нахождения итерационных членов различных функций от $u(x, \rho)$, например для комплексной фазы волны $\varphi(x, \rho) = \ln u(x, \rho)$ (см. далее уравнение (1.21)). Так, представляя функцию Грина в виде

$$G(x, \rho; x', \rho') = \frac{k}{2\pi i(x - x')} \exp\left\{\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x - x')} + \psi(x, \rho; x', \rho')\right\}, \quad (1.10)$$

где $\psi(x, \rho; x', \rho')$ — набег комплексной фазы сферической волны, распространяющейся из точки (x', ρ') в точку (x, ρ), для функции $\psi(x, \rho; x', \rho')$ получаем разложение

$$\psi(x, \rho; x', \rho') = \psi_1(x, \rho; x', \rho') + \psi_2(x, \rho; x', \rho') + \ldots,$$

где

$$\psi_1(x, \rho; x', \rho') = \int d\xi \int d\rho_1 \varepsilon(\xi, \rho_1) \frac{\delta \ln G(x, \rho; x', \rho')}{\delta\varepsilon(\xi, \rho_1)}\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= i\frac{k}{2}\int_{x'}^{x} d\xi \int d\rho_1 \varepsilon(\xi, \rho_1) \frac{g(x, \rho; \xi, \rho_1)\, g(\xi, \rho_1; x', \rho')}{g(x, \rho; x', \rho')} =$$

$$= \frac{k^2}{4\pi} \int\limits_{x'}^{x} \frac{d\xi\,(x-x')}{(x-\xi)(\xi-x')} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}_1) \times$$

$$\times \exp\left\{ i\,\frac{k}{2}\,\frac{[\boldsymbol{\rho}(\xi-x') - \boldsymbol{\rho}_1(x-x') - \boldsymbol{\rho}'(x-\xi)]^2}{(x-\xi)(\xi-x')(x-x')} \right\}. \quad (1.11)$$

Функция Грина $G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}')$, помимо уравнения (1.8), удовлетворяет также уравнению

$$G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = g(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') +$$

$$+ i\,\frac{k}{2} \int\limits_{x'}^{x} d\xi \int d\boldsymbol{\rho}'' G(x, \boldsymbol{\rho}; \xi, \boldsymbol{\rho}'') \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}'') g(\xi, \boldsymbol{\rho}'', x', \boldsymbol{\rho}'). \quad (1.8')$$

В этом легко можно убедиться, сравнивая итерационные ряды по ε для уравнений (1.8) и (1.8′).

Выполним комплексное сопряжение в (1.8′) и переставим точки $(x, \boldsymbol{\rho})$ и $(x', \boldsymbol{\rho}')$ (имея в виду, что по-прежнему $x > x'$). Учитывая тождество

$$g^*(x', \boldsymbol{\rho}'; x, \boldsymbol{\rho}) = g(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}'),$$

получаем уравнение

$$G^*(x', \boldsymbol{\rho}'; x, \boldsymbol{\rho}) = g(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') +$$

$$+ i\,\frac{k}{2} \int\limits_{x'}^{x} d\xi \int d\boldsymbol{\rho}'' g(x, \boldsymbol{\rho}; \xi, \boldsymbol{\rho}'') \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}'') G^*(x', \boldsymbol{\rho}'; \xi, \boldsymbol{\rho}''),$$

сравнение которого с уравнением (1.7) дает равенство

$$G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = G^*(x', \boldsymbol{\rho}'; x, \boldsymbol{\rho}) \quad (x > x'), \quad (1.12)$$

выражающее теорему взаимности для рассматриваемой задачи (приближение параболического уравнения). Если же функция $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \equiv \varepsilon(\boldsymbol{\rho})$, то очевидно, что имеется еще одно свойство симметрии для функции Грина:

$$G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = G(x, \boldsymbol{\rho}'; x', \boldsymbol{\rho}). \quad (1.12')$$

Уравнения (1.8), (1.8′) можно записать, очевидно, также в виде дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = \frac{i}{2k} \Delta_\rho G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') + i\,\frac{k}{2} \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = -\frac{i}{2k} \Delta_{\rho'} G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') -$$

$$- i\,\frac{k}{2} \varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}') G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') \quad (1.8'')$$

с начальным условием

$$G(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}')|_{x \leftrightarrow x'} = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}').$$

При этом, как легко видеть, функция Грина удовлетворяет условиям ортогональности

$$\begin{aligned} &\int d\rho\, G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')\, G^*(x,\ \rho;\ x'',\ \rho'') = \delta(\rho' - \rho''), \\ &\int d\rho'\, G(x_1,\ \rho_1;\ x',\ \rho')\, G^*(x_2,\ \rho_2;\ x',\ \rho') = \delta(\rho_1 - \rho_2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Следствием этих условий является равенство

$$\int d\rho\, u_1(x,\ \rho)\, u_2^*(x,\ \rho) = \int d\rho\, u_1^0(\rho)\, u_2^{0*}(\rho), \tag{1.14}$$

где $u_1(x,\ \rho)$ и $u_2^*(x,\ \rho)$ — решения уравнения (1.2) с начальными условиями $u_1(0,\ \rho) = u_1^0(\rho)$, $u_2(0,\ \rho) = u_2^0(\rho)$. В частном случае, когда $u_1^0(\rho) = u_2^0(\rho) = u_0(\rho)$, формула (1.14) выражает закон сохранения энергии:

$$\int d\rho\, I(x,\ \rho) = \int d\rho\, I_0(\rho) = \mathrm{const}\,(I(x,\ \rho) = u(x,\ \rho)\, u^*(x,\ \rho)). \tag{1.14'}$$

Отметим, что если мы имеем произвольную функцию $\tilde{G}(x,\ \rho;\ x',\ \rho')$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\tilde{G}(x,\ \rho;\ x',\ \rho') = g(x,\ \rho;\ x',\ \rho') + \\ + \int_{x'}^{x} d\xi \int d\rho''\, g(x,\ \rho;\ \xi,\ \rho'')\, [\varepsilon(\xi,\ \rho'')\, \tilde{G}(\xi,\ \rho'';\ x',\ \rho') + \psi(\xi,\ \rho'',\ x',\ \rho')],$$

то можно исключить из уравнения (1.8) функцию g, аналогично тому как это делалось в § 4 гл. 4, и переписать (1.7) в терминах функций $\tilde{G}$ и ψ в виде [108]

$$G(x,\ \rho;\ x',\ \rho') = \tilde{G}(x,\ \rho;\ x',\ \rho') - \\ - \int_{x'}^{x} d\xi \int d\rho''\, G(x,\ \rho;\ \xi,\ \rho'')\, \psi(\xi,\ \rho'';\ x',\ \rho').$$

Функция Грина $G^*(x,\ \rho;\ x',\ \rho')$ описывает сферическую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении по оси x, источник которой находится в точке $(x',\ \rho')$. С помощью этой функции можно решить задачу об отражении от зеркала волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде [109]. Аналогичная задача в случае одномерной среды рассматривалась в седьмой главе.

Пусть отражающая граница является плоскостью $(L,\ \rho)$. Тогда поле падающей волны на отражающей плоскости, согласно (1.7), имеет вид

$$u_+(L,\ \rho_1) = \int d\rho_0 G(L,\ \rho_1;\ 0,\ \rho_0)\, u_0(\rho_0).$$

Отражающая плоскость осуществляет интегральное преобразование падающей волны

$$u_-(L,\ \rho_2) = \int d\rho_1 V(\rho_2,\ \rho_1)\, u_+(L,\ \rho_1),$$

и, наконец, поле отраженной волны в точке (x, ρ) определяется формулой

$$u_-(x, \rho) = \int d\rho_2 G^*(x, \rho;\ L, \rho_2)\, u_-(L, \rho_2) =$$
$$= \int d\rho_2 d\rho_1 d\rho_0 V(\rho_2, \rho_1)\, G(L, \rho_2;\ x, \rho)\, G(L, \rho_1;\ 0, \rho_0)\, u_0(\rho_0). \quad (1.15)$$

Для абсолютно отражающей плоскости $V(\rho_2, \rho_1) = V_0 \delta(\rho_2 - \rho_1)$ и формула (1.15) упрощается:

$$u_-(x, \rho) = V_0 \int d\rho_1 d\rho_2 G(L, \rho_1;\ x, \rho)\, G(L, \rho_1;\ 0, \rho_2)\, u_0(\rho_2). \quad (1.15')$$

Отметим, что характеристики отражающей плоскости могут быть случайны, т. е. функция $V(\rho_2, \rho_1)$ в (1.15) может быть случайной функцией пространственных координат.

Используя соотношения ортогональности (1.13), для интенсивности отраженной волны получаем интегральный закон сохранения [109]:

$$\int d\rho\, I_-(x, \rho) = \int d\rho_2 d\rho_1 d\rho_1' V(\rho_2, \rho_1)\, V^*(\rho_2, \rho_1')\, u_+(L, \rho_1)\, u_+^*(L, \rho_1'),$$

который для абсолютно отражающей плоскости принимает особо простую форму:

$$\int d\rho\, I_-(x, \rho) = |V_0|^2 \int d\rho\, I_+(L, \rho) = |V_0|^2 \int d\rho\, I_0(\rho).$$

Уравнение (1.2) с граничным условием (1.3) описывает распространение волны в неоднородной среде в малоугловом приближении, при этом выполняется закон сохранения энергии (1.14′). Его можно получить и непосредственно, исходя из уравнения (1.2). В самом деле, для величины

$$\varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho) = u\left(x, \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u^*\left(x, \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right)$$

из уравнения (1.2) получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{i}{k} \nabla_\rho \nabla_{\boldsymbol{R}} \varphi + i \frac{k}{2} \left[\varepsilon\left(x, \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) - \varepsilon\left(x, \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right)\right] \varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho). \quad (1.16)$$

Интегрируя это уравнение по $\boldsymbol{R}$ и предполагая, что поле u убывает на бесконечности достаточно быстро, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int d\boldsymbol{R}\, \varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho) =$$
$$= i \frac{k}{2} \int d\boldsymbol{R} \left[\varepsilon\left(x, \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) - \varepsilon\left(x, \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right)\right] \varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho),$$

откуда при $\rho = 0$ следует интеграл энергии

$$\frac{d}{dx}\int d\boldsymbol{R}\, I(x, \boldsymbol{R}) = 0, \quad \text{или} \quad \int d\boldsymbol{R}\, I(x, \boldsymbol{R}) = P_0 = \text{const}, \quad (1.17)$$

где $I(x, \boldsymbol{R}) = u(x, \boldsymbol{R})\, u^*(x, \boldsymbol{R})$ — интенсивность волны.

При распространении ограниченных пучков в неоднородной среде часто интересуются не только флуктуациями интенсивности волны внутри пучка, но и флуктуациями положения пучка в пространстве как целого. Такое смещение пучка приближенно характеризуется флуктуациями положения «центра тяжести» интенсивности волны [30]. При этом вектор положения центра тяжести определяется естественным образом:

$$\rho_c(x) = \frac{\int d\rho\, \rho I(x, \rho)}{\int d\rho\, I(x, \rho)} = \frac{1}{P_0}\int d\rho\, \rho I(x, \rho). \quad (1.18)$$

Величина, стоящая в знаменателе (1.18), согласно (1.17) не зависит от x и является детерминированной. Умножая уравнение (1.16) на $\boldsymbol{R}$, интегрируя по $\boldsymbol{R}$ и полагая $\rho = 0$, получаем уравнение для $\rho_c(x)$:

$$\frac{d}{dx}\rho_c(x) = -\frac{i}{kP_0}\int d\boldsymbol{R}\, \nabla_\rho \varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho)\big|_{\rho=0}. \quad (1.19)$$

Для вычисления величины, стоящей в правой части (1.19), подействуем на уравнение (1.16) оператором $-\frac{i}{kP_0}\nabla_\rho$, положим $\rho = 0$ и проинтегрируем по $\boldsymbol{R}$. В результате получим равенство

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{i}{kP_0}\int d\boldsymbol{R}\, \nabla_\rho \varphi(x, \boldsymbol{R}, \rho)\right]_{\rho=0} = \frac{1}{2P_0}\int d\boldsymbol{R}\, I(x, \boldsymbol{R})\, \nabla_{\boldsymbol{R}}\varepsilon(x, \boldsymbol{R}),$$

с помощью которого уравнение (1.19) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\rho_c(x) = \frac{1}{2P_0}\int d\boldsymbol{R}\, I(x, \boldsymbol{R})\, \nabla_{\boldsymbol{R}}\varepsilon(x, \boldsymbol{R}). \quad (1.19')$$

Интегрируя (1.19′) с граничными условиями (для симметричных пучков, распространяющихся вдоль оси x)

$$\rho_c(0) = 0, \quad \frac{d\rho_c(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = 0,$$

получаем формулу [110]

$$\rho_c(x) = \frac{1}{2P_0}\int_0^x d\xi\, (x - \xi)\int d\boldsymbol{R}\, I(\xi, \boldsymbol{R})\, \nabla_\perp \varepsilon(\xi, \boldsymbol{R}), \quad (1.20)$$

более удобную в ряде случаев, чем первоначальная формула (1.18).

Отметим, что выражения (1.17) и (1.20) имеют смысл только для ограниченных пучков, но не для плоской падающей волны ($u_0(\rho) = u_0 = \text{const}$).

Рассмотрим теперь описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны $u(x, \rho) = A(x, \rho)\exp\{iS(x, \rho)\}$.

Вводя комплексную фазу волны $u/u_0 = \exp\{\varphi\}$, $\varphi = \chi + iS$, где $\chi = \ln A/A_0$ — уровень амплитуды волны, а S — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны kx, можно написать, исходя из (1.2), нелинейное уравнение метода плавных возмущений (МПВ):

$$2ik\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Delta_\perp\varphi + (\nabla_\perp\varphi)^2 + k^2\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) = 0. \qquad (1.21)$$

Если $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ достаточно мало, то для решения уравнения (1.21) можно построить итерационный ряд по полю ε, т. е. представить комплексную фазу волны $\varphi(x, \boldsymbol{\rho})$ в виде

$$\varphi(x, \boldsymbol{\rho}) = \varphi^0(x, \boldsymbol{\rho}) + \varphi_1(x, \boldsymbol{\rho}) + \varphi_2(x, \boldsymbol{\rho}) + \ldots,$$

где $\varphi^0(x, \boldsymbol{\rho}) = \ln u_0(x, \boldsymbol{\rho})$ — фаза волны в случае отсутствия неоднородностей, а итерационные члены $\varphi_n(x, \boldsymbol{\rho})$ имеют вид

$$\varphi_n(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{n!}\int\ldots\int dx_1\ldots dx_n\int d\boldsymbol{\rho}_1\ldots d\boldsymbol{\rho}_n\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\ldots\varepsilon(x_n, \boldsymbol{\rho}_n)\times$$
$$\times\frac{\delta^n\varphi(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\ldots\delta\varepsilon(x_n, \boldsymbol{\rho}_n)}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

С помощью описанной выше процедуры (нахождение итерационных членов ряда для u) легко получить явные выражения для любых $\varphi_n(x, \boldsymbol{\rho})$. Так, например,

$$\varphi_1(x, \boldsymbol{\rho}) = \int_0^x dx_1\int d\boldsymbol{\rho}_1\frac{\delta\varphi(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1) =$$
$$= i\frac{k}{2}\int_0^x dx_1\int d\boldsymbol{\rho}_1\frac{1}{u(x, \boldsymbol{\rho})}G(x, \boldsymbol{\rho};\ x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,u(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\big|_{\varepsilon=0}\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1) =$$
$$= i\frac{k}{2}\int_0^x dx_1\int d\boldsymbol{\rho}_1\frac{1}{u_0(x, \boldsymbol{\rho})}g(x, \boldsymbol{\rho};\ x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,u_0(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1);$$

при этом выражение для $\varphi_1(x, \boldsymbol{\rho})$ соответствует так называемому первому приближению МПВ (см. § 4 настоящей главы).

Для случая плоской падающей волны $u_0(\boldsymbol{\rho}) = u_0$ и, следовательно,

$$u_0(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0 \quad (\varphi^0(x, \boldsymbol{\rho}) = 0),$$
$$\varphi_1(x, \boldsymbol{\rho}) = i\frac{k}{2}\int_0^x dx_1\int d\boldsymbol{\rho}_1 g(x, \boldsymbol{\rho};\ x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1).$$

Аналогичным образом для плоской падающей волны получаем

$$\varphi_2(x, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{k^2}{8}\int dx_1 dx_2\int d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2\varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,\varepsilon(x_2, \boldsymbol{\rho}_2)\times$$
$$\times\{-g(x, \boldsymbol{\rho};\ x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,g(x, \boldsymbol{\rho};\ x_2, \boldsymbol{\rho}_2) + 2g(x, \boldsymbol{\rho};\ x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\,g(x_1, \boldsymbol{\rho}_1;\ x_2, \boldsymbol{\rho}_2)\}$$

и т. д.

Вернемся теперь непосредственно к уравнению (1.21). Разделяя в (1.21) действительную и мнимую части, получаем

$$2k\frac{\partial\chi}{\partial x}+\Delta_\perp S+2\nabla_\perp\chi\nabla_\perp S=0, \tag{1.22}$$

$$2k\frac{\partial S}{\partial x}-\Delta_\perp\chi-(\nabla_\perp\chi)^2+(\nabla_\perp S)^2=k^2\varepsilon(x,\rho). \tag{1.23}$$

С помощью уравнения (1.22) можно получить уравнение для интенсивности волны $I=\exp\{2\chi\}$ в виде

$$k\frac{\partial I}{\partial x}+\nabla_\perp(I\nabla_\perp S)=0. \tag{1.24}$$

Уравнение (1.22) можно переписать также в виде интеграла по траектории. Введем вектор $\boldsymbol{a}=\{k,\nabla_\perp S\}$. Тогда получим

$$\boldsymbol{a}\nabla\chi=-\frac{1}{2}\Delta_\perp S(x,\rho). \tag{1.25}$$

Вводя единичный вектор $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}/a$, направленный вдоль луча, приходящего в точку (x,ρ), уравнение (1.25) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dl}\chi(x,\rho)=-\frac{1}{2a}\Delta_\perp S(x,\rho). \tag{1.26}$$

Дифференциальное уравнение луча имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}=\boldsymbol{l}=\frac{\boldsymbol{a}}{a}. \tag{1.27}$$

Взяв x-компоненту уравнения (1.27), получаем $dl=\frac{a}{k}dx$. Аналогично для поперечных компонент имеем $d\boldsymbol{R}/dl=\nabla_\perp S/a$, или

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dx}=\frac{1}{k}\nabla_\perp S(x,\boldsymbol{R}). \tag{1.28}$$

Пусть $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(x,\xi;\rho)$ — уравнение луча (ξ — текущая координата), удовлетворяющего условию $\boldsymbol{R}(x,x;\rho)=\rho$. Интегрируя (1.26) и (1.28) с условиями $\chi(0,\rho)=0$ (для простоты рассматривается случай плоской волны) и $\boldsymbol{R}(x,x;\rho)=\rho$, получаем [111]

$$\chi(x,\rho)=-\frac{1}{2k}\int_0^x d\xi\,\Delta_\perp S(\xi,\boldsymbol{R}(x,\xi;\rho)), \tag{1.29а}$$

$$\boldsymbol{R}(x,\xi;\rho)=\rho-\frac{1}{k}\int_\xi^x d\eta\,\nabla_\perp S(\eta,\boldsymbol{R}(x,\eta;\rho)). \tag{1.29б}$$

Уравнение (1.24) можно также записать в виде

$$\operatorname{div}(I\boldsymbol{a})=0 \tag{1.30}$$

Как следует из (1.30), энергия распространяется вдоль лучей, построенных при помощи (1.29б), так как плотность потока энергии сохраняется вдоль лучевой трубки, определяемой уравнением (1.29б). В силу того, что луч, приходящий в данную точку, единствен, имеет место соотношение

$$\boldsymbol{R}(\xi_1, \xi; \boldsymbol{R}(x, \xi_1; \boldsymbol{\rho})) \equiv R(x, \xi; \boldsymbol{\rho}), \tag{1.31}$$

смысл которого заключается в том, что в качестве граничного условия для луча можно, наряду с условием $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho}$ при $\xi = x$, брать также условие $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x, \xi_1; \boldsymbol{\rho})$ при $\xi = \xi_1$ (рис. 16).

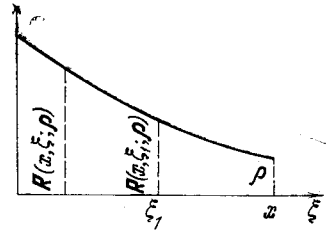

Рис. 16. Поперечное смещение луча $\boldsymbol{R}$, приходящего в точку наблюдения $(x, \boldsymbol{\rho})$.

Перейдем теперь к компонентам Фурье всех величин по поперечным координатам:

$$\chi(x, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{p}\, \chi_{\boldsymbol{p}}(x) \exp\{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\rho}\}, \quad S(x, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{p}\, S_{\boldsymbol{p}}(x) \exp\{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\rho}\}.$$

Тогда уравнение (1.22) после интегрирования по продольной координате можно переписать в виде

$$\chi_{\boldsymbol{p}}(x) = \frac{p^2}{2k} \int_0^x d\xi\, S_{\boldsymbol{p}}(\xi) + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2 \Lambda^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2} S_{\boldsymbol{q}_1}(\xi)\, \chi_{\boldsymbol{q}_2}(\xi), \tag{1.32}$$

где $\Lambda^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2} = (\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_2)\, \delta(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p})$. Решение уравнения (1.32) можно представить в следующей форме:

$$\chi_{\boldsymbol{p}}(x) = \frac{1}{2k^2} \int_0^\infty d\xi \int d\boldsymbol{q}\, q^2 S_{\boldsymbol{q}}(\xi)\, D_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}(x, \xi), \tag{1.33}$$

где функция $D_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'}(x, x')$ удовлетворяет уравнению

$$D_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'}(x, x') = D^0_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'}(x, x') + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{q}_2 \Lambda^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2} S_{\boldsymbol{q}_1}(\xi)\, D_{\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}}(\xi, x'), \tag{1.34}$$

а

$$D^0_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'}(x, x') = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\, \theta(x - x'), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Сравнивая (1.33) с (1.29), получаем связь функции D с траекторией луча:

$$D_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'}(x, x') = 4\pi^2 (\theta)\, (x - x')\, \delta(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}(x, x', \boldsymbol{\rho})). \tag{1.35}$$

Если справедливо приближение геометрической оптики ($k \to \infty$), рассмотрение амплитудно-фазовых флуктуаций существенно упрощается. В этом случае уравнение для величины

$\chi(x, \rho)$ (1.22) не меняется, а уравнение (1.23) принимает вид

$$2k \frac{\partial S}{\partial x} + (\nabla_\perp S)^2 = k^2 \varepsilon(x, \rho). \tag{1.36}$$

Таким образом, в приближении геометрической оптики уравнение для фазы волны не зависит от амплитуды.

Как мы видели выше, траектории лучей, приходящих в точку наблюдения (x, ρ) (1.29), определяются величиной $\nabla_\perp S$, уравнение для которой, в свою очередь, в приближении геометрической оптики имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla_\perp S + \frac{1}{k} (\nabla_\perp S \nabla_\perp) \nabla_\perp S = \frac{k}{2} \nabla_\perp \varepsilon(x, \rho). \tag{1.37}$$

Решение уравнения (1.37) также можно записать в виде интеграла по тому же лучу:

$$\nabla_\perp S(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \, \nabla_\perp \varepsilon(\xi, \boldsymbol{R}(x, \xi; \rho)). \tag{1.38}$$

Подставляя (1.38) в (1.29б), можно исключить фазу волны из рассмотрения и прийти к уравнению для траектории

$$\frac{d^2 \boldsymbol{R}(x')}{dx'^2} = \frac{1}{2} \nabla_\perp \varepsilon(x', \boldsymbol{R}(x')) \qquad (\boldsymbol{R}(x') \equiv \boldsymbol{R}(x, x'; \rho)) \tag{1.39}$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{R}(x) = \rho, \quad \left. \frac{d\boldsymbol{R}(x')}{dx'} \right|_{x'=0} = 0. \tag{1.40}$$

Таким образом, в приближении геометрической оптики как уровень амплитуды, так и градиент фазы, определяющий угол прихода волны в точку наблюдения при заданной реализации поля $\varepsilon(x, \rho)$, определяются единственным «динамическим» уравнением (1.39) с граничными условиями (1.40). Однако в этом приближении возможна не единственность решения уравнения (1.39).

Отметим также, что если мы знаем решение уравнения (1.36) для фазы волны, т. е. фазу как функционал поля $\varepsilon(x, \rho)$, то можно в явном виде выписать и решение для χ [112].

§ 2. Приближение диффузионного случайного процесса

Рассмотрим теперь статистическое описание волны. Как отмечалось выше, поле $u(x, \rho)$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(\xi, \rho')$. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \rho)$ и последующими значениями ε, так как значения $\varepsilon(x', \rho')$ при $x' < x$ коррелированы со значениями $\varepsilon(\xi, \rho)$ при $\xi > x$. Ясно, что корреляция поля $u(x, \rho)$ с последующими значениями $\varepsilon(x', \rho')$ заметна при $x' - x \lesssim l_\parallel$, где $l_\parallel$ — продольный радиус корреляции ε. В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \rho)$ по продольному направлению

имеет величину порядка x (см., например, [30]). Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр $l_{\parallel}/x$, который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{\parallel} = 0$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \rho_i)$ при $\xi_i < x$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \rho_j)$ при $\eta_j > x$, т. е.

$$\left\langle \prod_{i,j} u(\xi_i, \rho_i)\, \varepsilon(\eta_j, \rho_j) \right\rangle = \left\langle \prod_i u(\xi_i, \rho_i) \right\rangle \left\langle \prod_j \varepsilon(\eta_j, \rho_j) \right\rangle \qquad (2.1)$$

$$(\xi_i < x;\ \eta_j > x).$$

Используя свойство (2.1), легко получить уравнения для статистических моментов поля $u(x, \rho)$. Покажем это на примере $\langle u \rangle$. Для этого воспользуемся уравнением (1.4). Усредняя его, учтем, что во втором слагаемом в правой части величина $\varepsilon(\eta, \rho)$ в экспоненте берется всегда при значениях $\eta > \xi$, т. е. статистически независима от второго сомножителя $\Delta_\perp u(\xi, \rho)$. Поэтому при усреднении (1.4) эти множители можно усреднять независимо:

$$\langle u(x, \rho) \rangle = u_0(\rho) \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi\, \varepsilon(\xi, \rho) \right\} \right\rangle +$$

$$+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right\} \right\rangle \Delta_\perp \langle u(\xi, \rho) \rangle. \qquad (2.2)$$

Полученное уравнение является замкнутым, так как не содержит других неизвестных функций, кроме $\langle u \rangle$.

Перейдем теперь от интегро-дифференциального уравнения (2.2) к дифференциальному. Заметим, что для дельта-коррелированных флуктуаций ε имеет место равенство

$$\left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right\} \right\rangle = \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \left[\int_0^\xi d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) + \int_\xi^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right] \right\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_0^\xi d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right\} \right\rangle \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right\} \right\rangle, \qquad (2.1')$$

справедливое для любого $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Поэтому, если мы введем функцию $\Phi_x(\rho) = \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\eta\, \varepsilon(\eta, \rho) \right\} \right\rangle$, то уравнение (2.2) с учетом равенства (2.1′) можно переписать в виде

$$\langle u(x, \rho) \rangle = u_0(\rho)\, \Phi_x(\rho) + \frac{i}{2k}\, \Phi_x(\rho) \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi_\xi(\rho)}\, \Delta_\perp \langle u(\xi, \rho) \rangle,$$

откуда уже легко можно получить дифференциальное уравнение

для $\langle u(x)\rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle u(x,\ \boldsymbol{\rho})\rangle = \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\langle u\rangle + \langle u(x,\ \boldsymbol{\rho})\rangle \frac{\partial}{\partial x}\ln \Phi_x(\boldsymbol{\rho}). \qquad (2.2')$$

Введем характеристический функционал поля $\varepsilon(x,\ \boldsymbol{\rho})$:

$$\Phi_x^{\varepsilon}[\psi(\xi,\ \boldsymbol{\rho}')] = \left\langle \exp\left\{i\int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{\rho}'\varepsilon(\xi,\ \boldsymbol{\rho}')\,\psi(\xi,\ \boldsymbol{\rho}')\right\}\right\rangle = \\ = \exp\{\Theta_x[\psi(x',\boldsymbol{\rho}')]\}.$$

Тогда уравнение (2.2′) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle u\rangle = \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\langle u\rangle + \dot{\Theta}_x\left[\frac{k}{2}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\right]\langle u\rangle,$$

$$\langle u(0,\ \boldsymbol{\rho})\rangle = u_0(\boldsymbol{\rho}) \qquad \left(\dot{\Theta}_x \equiv \frac{d}{dx}\Theta_x\right). \qquad (2.2'')$$

Аналогичным образом можно получить уравнения для моментов поля произвольного порядка

$$M_{n,m}(x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\rho}_n;\ \boldsymbol{\rho}_1',\ \ldots,\ \boldsymbol{\rho}_m') = \\ = \langle u(x,\ \boldsymbol{\rho}_1)\ldots u(x,\ \boldsymbol{\rho}_n)\, u^*(x,\ \boldsymbol{\rho}_1')\ldots u^*(x,\ \boldsymbol{\rho}_m')\rangle.$$

Для этого необходимо сначала записать дифференциальное уравнение для $u(x,\ \boldsymbol{\rho}_1)\ldots u^*(x,\ \boldsymbol{\rho}_m')$, а затем преобразовать его в интегро-дифференциальное уравнение типа (1.4). После этого, используя (2.1), можно выполнить усреднение. Уравнение для $M_{n,m}$, полученное таким образом в [113], имеет вид

$$M_{n,m}(x,\ \{\boldsymbol{\rho}_i\},\ \{\boldsymbol{\rho}_j'\}) = \\ = M^0(\{\boldsymbol{\rho}_i\},\ \{\boldsymbol{\rho}_j'\})\left\langle \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon(\xi,\ \boldsymbol{\rho}_i) - \sum_{j=1}^m \varepsilon(\xi,\ \boldsymbol{\rho}_j')\right]\right\}\right\rangle + \\ + \frac{i}{2k}\int_0^x d\xi \left\langle \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_{\xi}^x d\eta\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon(\eta,\ \boldsymbol{\rho}_i) - \sum_{j=1}^m \varepsilon(\eta,\ \boldsymbol{\rho}_j')\right]\right\}\right\rangle \times \\ \times\left(\sum_{l=1}^n \Delta_{\rho_l} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho_k'}\right) M^0_{n,m}(\xi,\ \{\rho_i\},\ \{\boldsymbol{\rho}_j'\}), \qquad (2.3)$$

где $\{\boldsymbol{\rho}_i\}$ — совокупность всех $\boldsymbol{\rho}_i$, через $M^0_{n,m}$ обозначена величина

$$M^0_{n,m}(\{\boldsymbol{\rho}_i\},\ \{\boldsymbol{\rho}_j'\}) = u_0(\boldsymbol{\rho}_1)\ldots u_0(\boldsymbol{\rho}_n)\, u_0^*(\boldsymbol{\rho}_1')\ldots u_0^*(\boldsymbol{\rho}_m').$$

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид [114]

$$\frac{\partial}{\partial x}M_{n,m} = \frac{i}{2k}\left(\sum_{l=1}^n \Delta_{\rho_l} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho_k'}\right)M_{n,m} + \\ + \dot{\Theta}_x\left[\frac{k}{2}\sum_{l=1}^n \delta(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}_l) - \frac{k}{2}\sum_{k=1}^m \delta(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}_k')\right]M_{n,m}. \qquad (2.3')$$

При выводе уравнений (2.3), (2.3′) было использовано свойство дельта-коррелированности функции $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ вдоль направления распространения волны, а закон распределения не конкретизировался. Рассмотрим теперь частный случай гауссовских флуктуаций поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$. В этом случае статистические характеристики ε полностью описываются корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\, \varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}')\rangle = B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}').$$

Условие дельта-коррелированности эквивалентно замене B_ε на эффективную корреляционную функцию

$$B_\varepsilon^{\text{эфф}}(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}') = \delta(x - x')\, A(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'), \tag{2.4}$$

где A определяется из условия равенства интегралов по x' от B_ε и $B_\varepsilon^{\text{эфф}}$:

$$A(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}; x', \boldsymbol{\rho}').$$

Для статистически однородного поля ε функция A не зависит от x, т. е. $A = A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$. В рассматриваемом случае функционал Θ_x имеет вид

$$\Theta_x[\psi(\xi, \boldsymbol{\rho}')] = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2 A(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)\, \psi(\xi, \boldsymbol{\rho}_1)\, \psi(\xi, \boldsymbol{\rho}_2)$$

и уравнение (2.3′) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} M_{n,m} = \frac{i}{2k}[\Delta_1 + \ldots + \Delta_n - \Delta_1' - \ldots - \Delta_m']\, M_{n,m} - \\ - \frac{k^2}{8} Q(\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m')\, M_{n,m}, \tag{2.5}$$

где

$$Q_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j') + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A(\boldsymbol{\rho}_j' - \boldsymbol{\rho}_k'). \tag{2.6}$$

Если мы рассматриваем гауссовские дельта-коррелированные флуктуации ε, то совокупность уравнений (2.5), а также уравнение для характеристического функционала поля u можно получить и другим методом [115]. Проиллюстрируем его на примере уравнения для $\langle u\rangle$. Усредняя (1.2), получим

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \Delta_\perp\right)\langle u(x, \boldsymbol{\rho})\rangle + k^2\langle \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\, u(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = 0. \tag{2.7}$$

Для нахождения последнего слагаемого используем формулу (2.3.6′):

$$\langle \varepsilon(\boldsymbol{r})\, R[\varepsilon]\rangle = \int d\boldsymbol{r}' \langle \varepsilon(\boldsymbol{r})\, \varepsilon(\boldsymbol{r}')\rangle \left\langle \frac{\delta R[\varepsilon]}{\delta \varepsilon(\boldsymbol{r}')}\right\rangle, \tag{2.8}$$

позволяющую вычислять корреляцию гауссовской случайной функции $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ ($\langle\varepsilon(\boldsymbol{r})\rangle = 0$) с функционалом R от нее. Так как решение $u(x, \rho)$ уравнения (1.2) является функционалом от ε, то, применяя (2.8), можно получить

$$\langle\varepsilon(x, \rho)\, u(x, \rho)\rangle = \int_0^x dx' \int d\rho' \langle\varepsilon(x, \rho)\, \varepsilon(x', \rho')\rangle \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta\varepsilon(x', \rho')} \right\rangle. \qquad (2.9)$$

Подставляя вместо $\langle\varepsilon(x, \rho)\, \varepsilon(x', \rho')\rangle$ эффективную корреляционную функцию (2.4), имеем

$$\langle\varepsilon(x, \rho)\, u(x, \rho)\rangle = \frac{1}{2} \int d\rho' A(\rho - \rho') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta\varepsilon(x, \rho')} \right\rangle,$$

причем при интегрировании по x учтена четность δ-функции, в результате чего появился множитель 1/2. Подставляя усредненное равенство (1.6), получаем

$$\langle\varepsilon(x, \rho)\, u(x, \rho)\rangle = i\frac{k}{4} A(0) \langle u(x, \rho)\rangle,$$

так что уравнение (2.7) окончательно принимает вид

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \Delta_\perp\right) \langle u(x, \rho)\rangle + i\frac{k^3}{4} A(0) \langle u(x, \rho)\rangle = 0, \qquad (2.7')$$

совпадающий с уравнением для $M_{1,0}$, следующим из (2.5).

Полное статистическое описание поля $u(x, \rho)$ можно получить из характеристического функционала

$$\Phi_x[v, v^*] = \left\langle \exp\left\{i \int d\rho\, [u(x, \rho)\, v(\rho) + u^*(x, \rho)\, v^*(\rho)]\right\}\right\rangle.$$

Выведем уравнение для него, не задаваясь пока статистическим характером флуктуаций ε.

Рассмотрим вспомогательное уравнение для функции

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_\perp\right) w(x, \rho) = i\frac{k}{2}[\varepsilon(x, \rho) + \varphi(x, \rho)]\, w(x, \rho) \qquad (2.2''')$$

с начальным условием $w(0, \rho) = u_0(\rho)$. Уравнение (2.2‴) отличается от (1.2) введением произвольной детерминированной функции $\varphi(x, \rho)$.

Ясно, что решение уравнения (2.2‴) w — функционал от $\varepsilon + \varphi$, т. е. $w = w[\varepsilon + \varphi]$. Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta w(x, \rho)}{\delta\varepsilon(x', \rho')} = \frac{\delta w(x, \rho)}{\delta\varphi(x', \rho')}.$$

Введем характеристический функционал для $w(x, \rho)$:

$$\Psi_x[v, v^*, \varphi] = \left\langle \exp\left\{i \int d\rho\, [w(x, \rho)\, v(\rho) + w^*(x, \rho)\, v^*(\rho)]\right\}\right\rangle.$$

Интересующий нас характеристический функционал Φ_x получается из него при $\varphi \equiv 0$, т. е. $\Phi_x[v, v^*] = \Psi_x[v, v^*, 0]$.

Дифференцируя Ψ_x по x и используя уравнение (2.2‴), а также комплексно сопряженное к нему, получим

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\boldsymbol{\rho} \left[v(\boldsymbol{\rho}) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v(\boldsymbol{\rho})} - v^*(\boldsymbol{\rho}) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v^*(\boldsymbol{\rho})} \right] \Psi_x + \\ + i \frac{k}{2} \int d\boldsymbol{\rho}\, \varphi(x, \boldsymbol{\rho}) \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \Psi_x + i \frac{k}{2} \int d\boldsymbol{\rho}\, \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \times \\ \times \left\langle \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \exp \left\{ i \int d\boldsymbol{\rho}' \left[w(x, \boldsymbol{\rho}') v(\boldsymbol{\rho}') + w^*(x, \boldsymbol{\rho}') v^*(\boldsymbol{\rho}') \right] \right\} \right\rangle;$$

здесь введен эрмитов оператор

$$\widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) = v(\boldsymbol{\rho}) \frac{\delta}{\delta v(\boldsymbol{\rho})} - v^*(\boldsymbol{\rho}) \frac{\delta}{\delta v^*(\boldsymbol{\rho})}.$$

Используя общую методику, изложенную во второй главе, последний член в правой части уравнения для Ψ_x можно переписать в виде

$$i \frac{k}{2} \int d\boldsymbol{\rho}\, \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\left\langle \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \exp \left\{ \int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{\rho}' \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \boldsymbol{\rho}')} \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{\rho}' \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \boldsymbol{\rho}')} \right\} \right\rangle} \Psi_x.$$

Учитывая, далее, равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(x, \boldsymbol{\rho})} \Psi_x = i \frac{k}{2} \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \Psi_x,$$

которое проверяется непосредственной подстановкой, можно переписать уравнение для Ψ_x так:

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\boldsymbol{\rho} \left[v(\boldsymbol{\rho}) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v(\boldsymbol{\rho})} - v^*(\boldsymbol{\rho}) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v^*(\boldsymbol{\rho})} \right] \Psi_x + \\ + i \frac{k}{2} \int d\boldsymbol{\rho}\, \varphi(x, \boldsymbol{\rho}) \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \Psi_x + \dot{\Theta}_x \left[\frac{\delta}{i\, \delta \varphi(x', \boldsymbol{\rho}')} \right] \Psi_x, \quad (2.10)$$

где, как и ранее,

$$\Theta_x [\psi(\xi, \boldsymbol{\rho}')] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\boldsymbol{\rho}' \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}') \psi(\xi, \boldsymbol{\rho}') \right\} \right\rangle$$

— логарифм характеристического функционала поля $\varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho})$.

Важной особенностью уравнения (2.10) является его «однородность» по v: каждая операция вариационного дифференцирования по v (или v^*) сопровождается умножением на v (или v^*). Это позволяет получить из (2.10) уравнения для моментов поля $w(x, \boldsymbol{\rho})$, которые, как и само уравнение (2.10), являются точными следствиями исходного уравнения (2.2‴).

Для дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho})$

$$\dot{\Theta}_x \left[\frac{\delta}{i\, \delta \varphi(\xi, \boldsymbol{\rho}')} \right] \Psi_x = \dot{\Theta}_x \left[\frac{\delta}{i\, \delta \varphi(x, \boldsymbol{\rho}')} \right] \Psi_x = \dot{\Theta}_x \left[\frac{k}{2} \widehat{M}(\boldsymbol{\rho}) \right] \Psi_x,$$

и, полагая $\varphi = 0$, получаем для характеристического функционала поля $u(x, \rho)$ уравнение вида [114]

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[v(\rho) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Phi_x + \dot{\Theta}_x \left[\frac{k}{2} \hat{M}(\rho) \right] \Phi_x. \tag{2.11}$$

Для гауссовского дельта-коррелированного вдоль оси x случайного поля $\varepsilon(x, \rho)$ с корреляционной функцией вида (2.4)

$$\dot{\Theta}_x [\psi(x, \rho')] = -\frac{1}{2} \int d\rho\, d\rho' A(\rho - \rho') \psi(x, \rho) \psi(x, \rho'),$$

и мы приходим к уравнению [115]

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[v(\rho) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_\perp \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Phi_x - \\ - \frac{k^2}{8} \int d\rho\, d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \hat{M}(\rho') \Phi_x. \tag{2.11'}$$

Уравнение (2.11′) является бесконечномерным аналогом УЭФ, в связи с чем описанное приближение распространения волны в среде с гауссовскими дельта-коррелированными флуктуациями ε можно назвать приближением диффузионного случайного процесса. Выпишем в явном виде уравнения для функций

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \rho) = \left\langle u\left(x, \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u^*\left(x, \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right) \right\rangle,$$

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_1', \rho_2') = \langle u(x, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_1') u^*(x, \rho_2') \rangle,$$

вытекающие из (2.5) при $n = m = 1$ и $n = m = 2$:

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = \frac{i}{k} \nabla_{\boldsymbol{R}} \nabla_\rho \Gamma_2 - \frac{k^2}{4} D(\rho) \Gamma_2, \quad D(\rho) = A(0) - A(\rho), \tag{2.12}$$

$$\Gamma_2(0, \boldsymbol{R}, \rho) = u_0\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u_0^*\left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right);$$

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} = \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_1' - \Delta_2'] \Gamma_4 - \frac{k^2}{4} [D(\rho_1 - \rho_1') + D(\rho_2 - \rho_2') + \\ + D(\rho_1 - \rho_2') + D(\rho_2 - \rho_1') - D(\rho_2 - \rho_1) - D(\rho_2' - \rho_1')] \Gamma_4, \tag{2.13}$$

$$\Gamma_4(0, \rho_1, \rho_2, \rho_1', \rho_2') = u_0(\rho_1) u_0(\rho_2) u_0^*(\rho_1') u_0^*(\rho_2').$$

Уравнения (2.5) другим путем получены в монографии [116], а разные частные случаи их — в [117—121].

Уравнение (2.12) эквивалентно так называемому малоугловому приближению уравнения переноса излучения [117]. Действительно, подставляя в (2.12)

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \rho) = \int d\varkappa\, J(x, \boldsymbol{R}, \varkappa) \exp(i\varkappa\rho),$$

для функции J можно получить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\varkappa}{k}\nabla_{\boldsymbol{R}}J=-\gamma J+\int d\varkappa' f(\varkappa-\varkappa')\,J(x,\boldsymbol{R},\varkappa'),\quad (2.14)$$

где $\gamma=\frac{k^2A(0)}{4}=\int d\varkappa\, f(\varkappa)$ — коэффициент экстинкции, $f(\varkappa)=\frac{\pi k^2}{2}\Phi_\varepsilon(0,\varkappa)$ — индикатриса рассеяния, а $\Phi_\varepsilon(\varkappa_1,\varkappa)$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции $B_\varepsilon(x,\boldsymbol{\rho})$.

Уравнение (2.12) для Γ_2 описывает среднюю интенсивность волны и может быть решено в общем случае для произвольной функции D и произвольных начальных условий. Что касается уравнения для Γ_4, то его аналитического решения получить не удается, и необходимо прибегать к численным или приближенным методам. Асимптотика решения для Γ_4 будет приведена в следующей главе.

Отметим, что в случае плоской падающей волны, когда начальное условие к уравнению (2.13) можно взять в виде $\Gamma_4(0,\{\boldsymbol{\rho}_i\})=1$, уравнение (2.13) упрощается и записывается в форме

$$\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x}=\frac{i}{k}\frac{\partial^2\Gamma_4}{\partial\boldsymbol{r}_1\partial\boldsymbol{r}_2}-\frac{k^2}{4}F(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\Gamma_4,\quad (2.13')$$

где

$$F(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=2D(\boldsymbol{r}_1)+2D(\boldsymbol{r}_2)-D(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)-D(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{\rho}_1'-\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_2',\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{\rho}_2'-\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1'.$$

Помимо уравнений для средних значений произведения полей $u(x,\boldsymbol{\rho}_1)\ldots u^*(x,\boldsymbol{\rho}_m')$ с одинаковыми продольными координатами x, могут быть получены уравнения и для функций $\langle u(x_1,\boldsymbol{\rho}_1)\ldots u^*(x_m,\boldsymbol{\rho}_m')\rangle$ при несовпадающих значениях x [122]. Граничные условия к этим уравнениям содержат функции $M_{n,m}$ при совпадающих значениях продольного аргумента.

Покажем это на примере функции $\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2)=\langle u(x,\boldsymbol{\rho}_1)\,u^*(y,\boldsymbol{\rho}_2)\rangle$. Пусть для определенности $x>y$. Умножая тогда уравнение (1.2) на $u^*(y,\boldsymbol{\rho}_2)$ и усредняя, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2)=$$
$$=\frac{i}{2k}\Delta_{\rho_1}\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2)+i\,\frac{k}{2}\langle\varepsilon(x,\boldsymbol{\rho}_1)\,u(x,\boldsymbol{\rho}_1)\,u^*(y,\boldsymbol{\rho}_2)\rangle.\quad (2.15)$$

Используя теперь формулы (2.8), (2.4), (1.6) и учитывая условия причинности (1.5), уравнение (2.15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2)=$$
$$=\frac{i}{2k}\Delta_{\rho_1}\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2)-\frac{k^2}{8}A(0)\,\Gamma(x,\boldsymbol{\rho}_1;\ y,\boldsymbol{\rho}_2).\quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) следует решать с условием

$$\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1; y, \boldsymbol{\rho}_2)|_{x=y} = \Gamma_2(y, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2), \tag{2.17}$$

где функция $\Gamma_2(y, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \langle u(y, \boldsymbol{\rho}_1) u^*(y, \boldsymbol{\rho}_2)\rangle$ описывается уравнением (2.12).

Аналогичным образом можно получать и уравнения для величин $\langle \varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1) \ldots \varepsilon(x_n, \boldsymbol{\rho}_n) u(x_1', \boldsymbol{\rho}_1') \ldots u^*(x_m', \boldsymbol{\rho}_m')\rangle$, описывающих корреляции поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ с решением задачи.

Уравнение (2.7′) для среднего поля легко может быть решено. Его решение имеет вид

$$\langle u(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = u_0(x, \boldsymbol{\rho}) \exp\left\{-\frac{\gamma}{2} x\right\}, \tag{2.18}$$

где $u_0(x, \boldsymbol{\rho})$ — поле при отсутствии флуктуаций, а $\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)$ — коэффициент экстинкции.

Можно в общем случае решить и уравнение для функции Γ_2. Это решение было получено в работе [123] при исследовании уравнения переноса излучения в малоугловом приближении (2.14). Позднее аналогичное решение исследовалось в работах [110, 124]. Если в (2.14) произвести преобразование Фурье по переменной $\boldsymbol{R}$, которая не входит в коэффициенты уравнения, то мы получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое легко решается, например, методом характеристик. Это решение имеет вид

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) =$$

$$= \int d\boldsymbol{q}\, \gamma_0\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{q}\frac{x}{k}\right) \exp\left\{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{R} - \frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{q}\frac{\xi}{k}\right)\right\}, \tag{2.19}$$

где $\gamma_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho})$ — начальное значение функции когерентности при $x = 0$.

Для частного случая плоской падающей волны, когда $\Gamma_2(0, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2$, $\gamma_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \delta(\boldsymbol{q})$, формула (2.19) приобретает простой вид:

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \exp\left\{-\frac{k^2 x}{4} D(\boldsymbol{\rho})\right\}. \tag{2.19′}$$

Функция Γ_2 определяет когерентность второго порядка. Из условия

$$\frac{1}{4} k^2 x D(\boldsymbol{\rho}_k) = 1 \tag{2.20}$$

можно определить радиус когерентности для поля $u(x, \boldsymbol{\rho})$.

При вычислении конкретных интегралов, связанных с корреляционной функцией поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$, удобно перейти к спектральной

функции, определяемой равенствами

$$B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) = \int dq\, d\boldsymbol{\varkappa}\, \Phi_\varepsilon(q, \boldsymbol{\varkappa}) \exp\{iqx + i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\},$$
$$\Phi_\varepsilon(q, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx\, d\boldsymbol{\rho}\, B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \exp\{-iqx - i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\}. \tag{2.21}$$

Если теперь воспользоваться приближением (2.4) и считать поле $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ статистически однородным и изотропным, то из (2.21) и определения функции $A(\rho)$ получаем

$$A(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\}, \quad \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) = \Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\varkappa}).$$

Следовательно, в приближении дельта-коррелированности поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$

$$\langle \varepsilon(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)\, \varepsilon(x_2, \boldsymbol{\rho}_2)\rangle = \\ = 2\pi\, \delta(x - x_1) \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)\}. \tag{2.4'}$$

Умножая равенство (2.4′) на $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp\{-i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\rho}_1 - i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{\rho}_2\}$ и интегрируя по всему пространству $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, получаем равенство

$$\langle \varepsilon_{\boldsymbol{p}_1}(x_1)\, \varepsilon_{\boldsymbol{p}_2}(x_2)\rangle = 2\pi\, \delta(x_1 - x_2)\, \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{p}_1), \tag{2.21'}$$

удобное для практического применения. Здесь

$$\varepsilon_{\boldsymbol{p}}(x) = \int d\boldsymbol{\rho}\, \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \exp\{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\rho}\}.$$

Отметим, что если поле $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ отлично от нуля только в слое $(0, \Delta x)$, а при $x > \Delta x$ $\varepsilon = 0$, то вместо формулы (2.21′) получаем выражение

$$\langle \varepsilon_{\boldsymbol{p}_1}(x_1)\varepsilon_{\boldsymbol{p}_2}(x_2)\rangle = 2\pi\, \delta(x_1 - x_2)\, \theta(\Delta x - x_1)\, \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{p}_1). \tag{2.21''}$$

Если рассмотреть флуктуации $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$, вызываемые турбулентными пульсациями температуры, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность $\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})$ имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) = AC_\varepsilon^2 \varkappa^{-11/3} \quad (\varkappa_{\min} \ll \varkappa \ll \varkappa_{\max}), \tag{2.22}$$

где $A = 0{,}033$ — численная константа, C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров потока [30]. В этом случае функция $D(\boldsymbol{\rho})$ вычисляется:

$$D(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\, [1 - \cos \boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}] = NC_\varepsilon^2 \rho^{5/3},$$

где $N = 36\pi^2 A\, \Gamma(7/6)/15 \cdot 2^{2/3}\, \Gamma(11/6) = 1{,}46$. Подставляя это выражение в (2.19), можно рассчитать как функцию $\Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})$, так и среднюю интенсивность волны $\langle I(x, \boldsymbol{R})\rangle$.

В качестве примера рассмотрим пучок, распределение поля в начальном сечении которого имеет вид

$$u_0(\boldsymbol{\rho}) = u_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2a^2} + i\,\frac{k\rho^2}{2F}\right\}; \tag{2.23}$$

здесь a — эффективная ширина пучка, F — расстояние до центра излучения (если $F = \infty$, то пучок коллимированный, если $F > 0$ — пучок расходящийся, если $F < 0$ — сфокусированный на расстоянии $x = |F|$). Функция $\gamma_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho})$, входящая в (2.19), в этом случае равна

$$\gamma_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{\rho^2}{a^2} + \left(\frac{k\boldsymbol{\rho}}{F} - \boldsymbol{q}\right)^2 a^2\right]\right\},$$

и для средней интенсивности в пучке $\langle I(x, \boldsymbol{R})\rangle = \Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, 0)$ получаем [110]

$$\langle I(x, \boldsymbol{R})\rangle = \frac{2u_0^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int\limits_0^\infty dt\, t J_0(2kaRt/xg(x)) \times$$
$$\times \exp\left\{-t^2 - \frac{3\pi N}{32} C_\varepsilon^2 k^2 x \left(\frac{2a}{g(x)}\right)^{5/3} t^{5/3}\right\}, \tag{2.24}$$

где $g(x) = \left\{1 + k^2 a^4 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{F}\right]^2\right\}^{1/2}$ и J_0 — функция Бесселя.

В работах [125, 126] экспериментально проверялись зависимости (2.19), (2.24) и обнаружено их хорошее согласие с опытными данными.

Отметим, что для пучка (2.23) решение уравнения (1.2) в случае отсутствия неоднородностей имеет вид

$$u_0(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{u_0}{1 + x/F + ix/ka^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2a^2}\,\frac{1 - ika^2/F}{1 + x/F + ix/2a^2}\right\}. \tag{2.18'}$$

Интенсивность волны в этом случае будет описываться выражением

$$I_0(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{|u_0|^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \exp\left\{-\frac{\rho^2 k^2 a^2}{x^2 g^2(x)}\right\}. \tag{2.24'}$$

Также нетрудно получить и решение уравнения (2.16), описывающего продольную корреляцию в волне. Оно имеет вид

$$\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1; y, \boldsymbol{\rho}_2) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{k}{8} A(0)(x - y)\right\} \int d\boldsymbol{\rho}' g(x - y, \boldsymbol{\rho}') \Gamma_2(y; \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}_2)$$
$$(x \geqslant y), \tag{2.19''}$$

где $g(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{k}{2\pi i x} \exp\left\{\frac{ik\rho^2}{2x}\right\}$ — функция Грина уравнения (1.2) в отсутствие неоднородностей, т. е. при $\varepsilon = 0$.

Что касается уравнения для Γ_4 и уравнений, описывающих более высокие моменты флуктуаций интенсивности, то, как указывалось выше, их аналитического решения получить не удается.

Приближенное решение уравнения (2.13) (с учетом однократного рассеяния в смысле теории переноса излучения) приведено в [110] для случая турбулентных флуктуаций ε. В работе [127] приводятся результаты численного решения этого уравнения в двумерном случае. В этой работе получено поведение флуктуаций интенсивности, качественно согласующееся с экспериментальными результатами, описанными в [99]. В работе [128] приводятся результаты численного интегрирования уравнения (2.13) в трехмерном случае для гауссовской корреляционной функции диэлектрической проницаемости. В этом случае также получено насыщение флуктуаций интенсивности, качественно согласующееся с результатами [99]. В работе [129] уравнение (2.13′) в случае турбулентных пульсаций ε интегрировалось численным методом — методом Монте-Карло. При этом полученные результаты также согласуются с экспериментальными данными.

Функция Γ_4 описывает также флуктуации смещения пространственно-ограниченных пучков в случайно-неоднородных средах. Так, для дисперсии положения центра тяжести интенсивности волны в пучке, согласно (1.20), имеем

$$\langle \rho_c^2(x)\rangle = \frac{1}{4P_0^2}\int_0^x\int_0^x d\xi_1 d\xi_2 (x-\xi_1)(x-\xi_2)\times$$

$$\times \int d\boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{R}_2 \langle I(\xi_1, \boldsymbol{R}_1) I(\xi_2, \boldsymbol{R}_2) \nabla_{\boldsymbol{R}_1}\varepsilon(\xi_1, \boldsymbol{R}_1) \nabla_{\boldsymbol{R}_2}\varepsilon(\xi_2, \boldsymbol{R}_2)\rangle. \quad (2.25)$$

Используя условие дельта-коррелированности, в выражении (2.25) можно расщепить корреляции интенсивности и ε в силу того, что

$$\frac{\delta I(\xi, \boldsymbol{R})}{\delta\varepsilon(\xi, \boldsymbol{R}')} = 0,$$

$$\frac{\delta I(\xi_1, \boldsymbol{R}_1)}{\delta\varepsilon(\xi_2, \boldsymbol{\rho}')}\frac{\delta I(\xi_2, \boldsymbol{R}_2)}{\delta\varepsilon(\xi_1, \boldsymbol{\rho}')} \sim \theta(\xi_1-\xi_2)\theta(\xi_2-\xi_1) \equiv 0.$$

Это позволяет переписать (2.25) в виде

$$\langle \rho_c^2(x)\rangle = \frac{\pi}{2P_0^2}\int_0^x d\xi (x-\xi)^2 \int d\boldsymbol{R}_1 d\boldsymbol{R}_2 \langle I(\xi, \boldsymbol{R}_1) I(\xi, \boldsymbol{R}_2)\rangle\times$$

$$\times \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \varkappa^2 \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\}. \quad (2.26)$$

Воспользовавшись теперь фурье-преобразованием для интенсивности волны

$$\mathcal{J}(x, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\boldsymbol{R}\, I(x, \boldsymbol{R}) \exp\{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}\},$$

$$\mathcal{J}^*(x, \boldsymbol{\varkappa}) = \mathcal{J}(x, -\boldsymbol{\varkappa}),$$

формулу (2.26) можно записать следующим образом:

$$\langle \rho_c^2(x)\rangle = \frac{8\pi^5}{P_0^4}\int_0^x d\xi (x-\xi)^2 \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \varkappa^2 \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) \langle |\mathcal{J}(\xi, \boldsymbol{\varkappa})|^2\rangle. \quad (2.27)$$

Величина $\langle | \mathcal{J}(\xi, \varkappa) |^2 \rangle$ описывается функцией Γ_4, аналитического выражения для которой не имеется. Поэтому при дальнейшем изучении (2.27) приходится использовать различные приближения. Анализ таких приближений проводился в работах [110]. Отметим, что по мере распространения волнового пучка в случайно-неоднородной среде начальное распределение интенсивности «расплывается». Флуктуации положения центра тяжести определяются, таким образом, двумя эффектами: средним уширением пучка и флуктуациями интенсивности относительно этого уже уширенного среднего профиля. Для учета первого эффекта следует заменить $\mathcal{J}(\xi, \varkappa)$ на $\langle \mathcal{J}(\xi, \varkappa) \rangle$ в (2.27), и формула (2.27) принимает вид

$$\langle \rho_c^2(x) \rangle = \frac{8\pi^5}{P^2} \int_0^x d\xi (x-\xi)^2 \int d\varkappa \varkappa^2 \Phi_\varepsilon(\varkappa) | \langle \mathcal{J}(\xi, \varkappa) \rangle |^2, \qquad (2.27')$$

где величина $\langle \mathcal{J}(\xi, \varkappa) \rangle$ находится из выражения (2.19).

Рассмотрим теперь задачу о нахождении статистических характеристик волны, отраженной от зеркала. Поле отраженной волны описывается выражением (1.15). Предполагая статистическую независимость флуктуаций параметров среды от характеристик зеркала, усредняя выражение (1.15), получаем выражение для среднего отраженного поля [109]:

$$\langle u_-(0, \rho) \rangle = \\ = \int^1 d\rho_2 d\rho_1 d\rho_0 \langle V(\rho_2, \rho_1) \rangle \langle G(L, \rho_2; 0, \rho) G(L, \rho_1; 0, \rho_0) \rangle u_0(\rho_0). \qquad (2.28)$$

Формула (2.28) особенно просто выглядит для отражающей плоскости с постоянным коэффициентом отражения $\langle V(\rho) \rangle = V_0 \delta(\rho)$ и для плоской падающей волны единичной интенсивности:

$$\langle u_-(0, \rho) \rangle = V_0 \langle u_+^2(L, \rho) \rangle. \qquad (2.29)$$

Отметим, что формула (2.29) была получена впервые в работе [41] с использованием явной записи функций Грина в виде континуального интеграла (см. следующую главу).

Выше мы подробно рассмотрели задачу о распространении волн в среде со случайными неоднородностями в предположении, что отсутствует регулярная составляющая поля $\varepsilon(x, \rho)$, т. е. при условии, что $\langle \varepsilon(x, \rho) \rangle = 0$. При наличии же регулярной составляющей ε также легко написать соответствующие уравнения для моментных функций волнового поля в диффузионном приближении. Однако нахождение решения их и анализ, естественно, усложняются. Пусть, например, $\langle \varepsilon(x, \rho) \rangle = \varepsilon_0(\rho)$. Тогда волновое уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} = \frac{i}{2k} [\Delta_\perp + k^2 \varepsilon_0(\rho)] u + i \frac{k}{2} \tilde{\varepsilon}(x, \rho) u, \qquad (2.30)$$
$$u(0, \rho) = u_0(\rho),$$

где $\langle\tilde{\varepsilon}(x, \rho)\rangle = 0$. Для уравнения (2.30) можно воспользоваться диффузионным приближением. Так, для среднего поля получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle u(x, \rho)\rangle = \frac{i}{2k}[\Delta_\perp + k^2\varepsilon_0(\rho)]\langle u\rangle - \frac{k^2}{8}A(0)\langle u\rangle, \quad (2.31)$$

решение которого имеет вид

$$\langle u(x, \rho)\rangle = u_0(x, \rho)\exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)x\right\}, \quad (2.32)$$

где функция $u_0(x, \rho)$ — решение уравнения (2.30) в случае отсутствия случайных неоднородностей (т. е. при $\tilde{\varepsilon} = 0$). Аналогичным образом для функции когерентности второго порядка получаем уравнение ($\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, \rho_1)\, u^*(x, \rho_2)\rangle$)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) =$$
$$= \frac{i}{2k}(\Delta_1 - \Delta_2)\Gamma + i\frac{k}{2}[\varepsilon_0(\rho_1) - \varepsilon_0(\rho_2)]\Gamma - \frac{k^2}{4}D(\rho_1 - \rho_2)\Gamma, \quad (2.33)$$

которое в переменных $\rho_1 - \rho_2 = \rho$, $\rho_1 + \rho_2 = 2R$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x, \rho, \boldsymbol{R}) =$$
$$= \frac{i}{k}\nabla_\rho\nabla_{\boldsymbol{R}}\Gamma + i\frac{k}{2}\left[\varepsilon_0\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right) - \varepsilon_0\left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right)\right]\Gamma - \frac{k^2}{4}D(\rho)\Gamma, \quad (2.34)$$

$$\Gamma(0, \rho, R) = \Gamma_0(\rho, R) \equiv u_0\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\rho\right)u_0^*\left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\rho\right).$$

Ясно, что в общем случае решить уравнения (2.31), (2.34) не представляется возможным. Важным частным случаем уравнения (2.30) является случай, когда $\varepsilon_0(\rho) = -\alpha^2\rho^2$. Такая задача возникает при волноводном распространении волн. Это могут быть как акустические волны в природном волноводе (океане), так и радиоволны. В случае отсутствия флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$ решение уравнения (2.30) можно представить в виде

$$u_0(x, \rho) = f(x, \rho)\,\tilde{u}(x, \rho), \quad (2.35)$$

где функции f, $\tilde{u}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{i}{2k}[\Delta_\perp - \alpha^2k^2\rho^2]f, && f(0, \rho) = 1, \\ &\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{i}{2k}[\Delta_\perp + 2(\nabla_\perp \ln f)\nabla_\perp]\tilde{u}, && \tilde{u}(0, \rho) = u_0(\rho). \end{aligned} \quad (2.35')$$

Уравнения (2.35′) легко решаются, и в результате получаем

$$\begin{aligned} &f(x, \rho) = \frac{1}{\cos\alpha x}\exp\left\{-i\frac{\alpha k}{2}\rho^2\operatorname{tg}\alpha x\right\}, \\ &\tilde{u}(x, \rho) = \int d\varkappa\, u_0(\varkappa)\exp\left\{-i\frac{\varkappa^2}{2k\alpha}\operatorname{tg}\alpha x + \frac{i\varkappa\rho}{\cos\alpha x}\right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$u_0(\boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\varkappa} u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\}.$$

Отметим, что функция $f(x, \boldsymbol{\rho})$ описывает распространение плоской волны и волновое поле в этом случае является периодической функцией с периодом $L = \frac{2\pi}{\alpha}$. При этом в точках $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}$ функция f обращается в бесконечность, что соответствует фокусировке плоской волны. Волновое же поле $u_0(x, \boldsymbol{\rho})$ в общем случае в бесконечность не обращается. Рассмотрим в качестве примера волновой пучок

$$u_0(\boldsymbol{\rho}) = u_0 \exp\{-\rho^2/2a^2\}. \tag{2.37}$$

В этом случае волновое поле

$$u_0(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{u_0}{\cos\alpha x\left(1 + \frac{i}{k\alpha a^2}\operatorname{tg}\alpha x\right)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\left[i\alpha k \operatorname{tg}\alpha x + \frac{1}{a^2\cos^2\alpha x\left(1 + \frac{i}{a^2 k\alpha}\operatorname{tg}\alpha x\right)}\right]\right\}, \tag{2.38}$$

а формула для интенсивности принимает вид

$$I_0(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0(x, \boldsymbol{\rho}) u_0^*(x, \boldsymbol{\rho}) = \frac{|u_0|^2}{g_\alpha^2(x)} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{a^2 g_\alpha^2(x)}\right\},$$

где

$$g_\alpha^2(x) = \cos^2\alpha x + \frac{1}{k^2\alpha^2 a^4}\sin^2\alpha x. \tag{2.39}$$

Уравнение для функции когерентности (2.34) в этом случае также упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma = \frac{i}{k}\nabla_\rho\nabla_{\boldsymbol{R}}\Gamma - i\alpha^2 k\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{R}\Gamma - \frac{k^2}{4}D(\boldsymbol{\rho})\Gamma. \tag{2.40}$$

Решение уравнения (2.40) представим в виде

$$\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}) = f\left(x, \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) f^*\left(x, \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\widetilde{\Gamma}(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}), \tag{2.41}$$

где функция $f(x, \boldsymbol{\rho})$ описывается формулой (2.36). Тогда для функции $\widetilde{\Gamma}(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\widetilde{\Gamma}}{\partial x} = \frac{i}{k}\nabla_\rho\nabla_{\boldsymbol{R}}\widetilde{\Gamma} + \alpha\operatorname{tg}\alpha x\,[\boldsymbol{R}\nabla_{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\rho}\nabla_\rho]\widetilde{\Gamma} - \frac{k^2}{4}D(\boldsymbol{\rho})\widetilde{\Gamma}, \tag{2.42}$$

$$\widetilde{\Gamma}(0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}) = \Gamma_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}).$$

Уравнение (2.42) легко решается путем преобразования Фурье

по $\boldsymbol{R}$, и в результате получаем выражение [130]

$$\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}) = \frac{1}{\cos^2 \alpha x} \exp\{-i\alpha k \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{R} \operatorname{tg} \alpha x\} \int d\boldsymbol{q}\, \gamma_0 \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\cos \alpha x} - \frac{1}{k\alpha} \boldsymbol{q} \operatorname{tg} \alpha x, \boldsymbol{q}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{\cos \alpha x} \boldsymbol{q}\boldsymbol{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi\, D\left[\frac{\cos \alpha\xi}{\cos \alpha x} \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{k\alpha} \frac{\sin \alpha(x-\xi)}{\cos \alpha x} \boldsymbol{q}\right]\right\}, \quad (2.43)$$

где $\Gamma_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}) = \int d\boldsymbol{q}\, \gamma_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{q}) \exp\{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{R}\}$. Полагая в (2.43) $\boldsymbol{\rho} = 0$, получаем выражение для средней интенсивности:

$$\langle I(x, \boldsymbol{R})\rangle = \frac{1}{\cos^2 \alpha x} \int d\boldsymbol{q}\, \gamma_0 \left(-\frac{1}{k\alpha} \boldsymbol{q} \operatorname{tg} \alpha x, \boldsymbol{q}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{\cos \alpha x} \boldsymbol{q}\boldsymbol{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi\, D\left(\frac{1}{k\alpha} \frac{\sin \alpha\xi}{\cos \alpha x} \boldsymbol{q}\right)\right\}, \quad (2.43')$$

а полагая в (2.43′) $\boldsymbol{R} = 0$, получаем изменение средней интенсивности вдоль оси волновода:

$$\langle I(x, 0)\rangle = \frac{1}{\cos^2 \alpha x} \int d\boldsymbol{q} \gamma_0 \left(-\frac{1}{k\alpha} \boldsymbol{q} \operatorname{tg} \alpha x, \boldsymbol{q}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi\, D\left(\frac{1}{k\alpha} \frac{\sin \alpha\xi}{\cos \alpha x} \boldsymbol{q}\right)\right\}. \quad (2.43'')$$

При $\alpha \to 0$ формула (2.43) переходит, естественно, в формулу (2.19).

Отметим, что если волновой пучок (2.37) согласован с неоднородной средой, т. е. параметр a удовлетворяет равенству

$$k\alpha a^2 = 1, \quad (2.44)$$

то волновое поле $u_0(x, \boldsymbol{\rho})$ (2.38) принимает вид

$$u_0(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0 \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2a^2} - i\alpha x\right\} \quad (2.45)$$

и, следовательно, амплитуда его не меняется в процессе распространения волны.

Выше мы рассмотрели случай однородных изотропных флуктуаций поля $\tilde{\varepsilon}(x, \boldsymbol{\rho})$ в параболическом волноводе. Представляет определенный интерес и случай флуктуаций параметров самого волновода. Пусть $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ имеет вид [130]

$$\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) = -\alpha^2\boldsymbol{\rho}^2 + z(x)\, \boldsymbol{\rho}^2, \quad (2.46)$$

где параметр α детерминирован, а $z(x)$ будем считать гауссовской дельта-коррелированной случайной функцией ($\langle z(x)\, z(x')\rangle = 2\sigma^2\, l\delta(x - x')$). В этом случае уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_\perp u + \frac{ik}{2} [-\alpha^2 + z(x)]\, \boldsymbol{\rho}^2 u, \quad (2.47)$$

а в качестве начального условия рассмотрим распространение волнового пучка (2.37). Отметим, что для согласованного с волноводом пучка (т. е. для которого выполняется равенство (2.44)) данная задача рассматривалась в работе [131].

Решение уравнения (2.47) с начальным условием (2.37) можно представить в виде

$$u(x, \rho) = \exp\left\{-\frac{1}{2a^2} A(x)\rho^2 + B(x)\right\}, \tag{2.48}$$

где функции $A(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= -\frac{i}{ka^2}[A^2(x) - \alpha^2 k^2 a^4] - ika^2 z(x), \quad A(0) = 1, \\ \frac{dB}{dx} &= -\frac{i}{ka^2} A(x), \quad B(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Следовательно, $B(x) = -\frac{i}{ka^2}\int\limits_0^x d\xi\, A(\xi)$ и интенсивность волнового поля описывается выражением

$$I(x, \rho) = \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\rho^2[A(x) + A^*(x)] - \frac{i}{ka^2}\int\limits_0^x d\xi\,[A(\xi) + A^*(\xi)]\right\}. \tag{2.50}$$

Мнимую часть функции A в (2.50) можно исключить, используя первое уравнение (2.49), а именно:

$$-\frac{i}{ka^2}[A(x) - A^*(x)] = \frac{d}{dx}\ln[A(x) + A^*(x)]. \tag{2.51}$$

В результате получаем следующее выражение для интенсивности поля:

$$I(x, \rho) = \frac{1}{2}[A(x) + A^*(x)]\exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\rho^2[A(x) + A^*(x)]\right\}, \tag{2.52}$$

или, полагая $\rho = 0$, выражение для изменения интенсивности вдоль оси невозмущенного волновода:

$$I(x, 0) = \frac{1}{2}[A(x) + A^*(x)]. \tag{2.52'}$$

Следовательно, статистические характеристики интенсивности волны описываются статистическими характеристиками решения уравнения (2.49) для функции $A(x)$, которое аналогично уравнению для коэффициента отражения волны в одномерной слоисто-неоднородной среде, рассмотренному в седьмой главе.

Представим функцию $A(x)$ в виде

$$A(x) = k\alpha a^2 \frac{1 + \psi(x)\exp\{-2i\alpha x\}}{1 - \psi(x)\exp\{-2i\alpha x\}}. \tag{2.53}$$

Тогда для функции $\psi(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{i}{2\alpha k}(e^{i\alpha x} - \psi e^{-i\alpha x})^2 z(x), \quad \psi(0) = \frac{1 - k\alpha a^2}{1 + k\alpha a^2}. \tag{2.54}$$

Положим теперь

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{u(x) - 1}{u(x) + 1}} \exp\{i(\varphi - 2\alpha x)\} \quad (u \geqslant 1). \tag{2.55}$$

Тогда функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\alpha k} z(x) \sqrt{u^2 - 1} \sin(\varphi - 2\alpha x), \quad u(0) = \frac{1}{2k\alpha a^2}[1 + k^2\alpha^2 a^4],$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\alpha k} z(x) \left[1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos(\varphi - 2\alpha x)\right], \quad \varphi(0) = 0, \tag{2.56}$$

а выражение для $I(x, 0)$ принимает вид

$$I(x, 0) = \frac{\alpha k a^2}{u(x) + \sqrt{u^2(x) - 1} \cos(\varphi - 2\alpha x)}. \tag{2.57}$$

Далее, как обычно, будем считать, что интенсивность флуктуаций $z(x)$ достаточно мала и, следовательно, статистические характеристики $u(x)$ и $\varphi(x)$ медленно меняются на масштабах $\sim 1/\alpha$. Поэтому для нахождения статистических характеристик интенсивности волны (2.57) следует усреднить их по быстро осциллирующим функциям. При этом распределение вероятностей для функции $u(x)$ описывается уравнением (см. гл. 7)

$$\frac{\partial P_x(u)}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_x(u) \qquad \left(D = \frac{\sigma^2 l}{2\alpha^2 k^2}\right), \tag{2.58}$$

а величину $\varphi(x)$ следует считать статистически независимой от $u(x)$ и равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$ $(Dx \gg 1)$.

Вычислим моменты интенсивности волны $\langle I^n \rangle$. Усреднение будем проводить в два этапа. Сначала усредним по углу, в результате получаем выражение

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k \alpha^2}\right)^n \right\rangle_\varphi = P_{n-1}(u), \tag{2.59}$$

где $P_n(u)$ — полином Лежандра n-го порядка. Теперь усредним (2.59) по u. Для этого умножим (2.58) на $P_{n-1}(u)$ и проинтегрируем по всем $u \geqslant 1$. Интегрируя по частям и используя равенство

$$\frac{d}{du}(u^2 - 1) \frac{d}{du} P_{n-1}(u) = n(n - 1) P_{n-1}(u),$$

получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} \langle P_{n-1}(u) \rangle = Dn(n - 1) \langle P_{n-1}(u) \rangle,$$

решение которого имеет вид

$$\langle P_{n-1}(u) \rangle = P_{n-1}(u_0) \exp\{Dn(n - 1)x\}. \tag{2.60}$$

Следовательно,

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle = P_{n-1}(u_0) \exp \{Dn(n-1)x\}. \tag{2.61}$$

Если параметры пучка согласованы с параметрами волновода, т. е. выполняется условие $\alpha k a^2 = 1$, что соответствует собственной моде невозмущенного волновода, то

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = \exp \{D\, n\, (n-1)\, x\}, \tag{2.62}$$

что соответствует логарифмически-нормальному распределению вероятностей для величины $I(x, 0)$. В частности, из (2.62) следуют равенства

$$\langle I(x, 0) \rangle = 1, \quad \langle I^2(x, 0) \rangle = \exp \{2Dx\},$$

полученные впервые в работе [131]. Таким образом, моменты интенсивности волны на оси волновода растут экспоненциально с увеличением расстояния в отличие от случая однородных изотропных флуктуаций ε, где средняя интенсивность описывается формулой (2.43″) и, вообще говоря, затухает с ростом x.

§ 3. Метод последовательных приближений и условия применимости диффузионного приближения

Остановимся теперь на условиях применимости приближения диффузионного случайного процесса. Может быть построена теория последовательных приближений, уточняющая функциональную зависимость статистических характеристик волны от поля ε [53]. Рассмотренное выше приближение диффузионного случайного процесса является первым шагом в этой теории; следующие приближения учитывают конечность продольного радиуса корреляции поля и приводят к системе замкнутых интегро-дифференциальных уравнений для моментов (см. § 6 гл. 3).

Указанный метод последовательных приближений строится следующим образом. Вначале выписывается бесконечная зацепляющаяся система уравнений для какого-либо момента. При этом используется предположение о гауссовском распределении для ε и формула (2.3.6′), однако предположение о дельта-коррелированности не используется. В каждое из этих уравнений входит корреляционная функция $B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$. Если использовать условие дельта-коррелированности (2.4) в первом из этих уравнений, то мы приходим к описанному выше диффузионному приближению, а остальные уравнения системы оказываются ненужными. Если же в первых $n-1$ уравнениях оставить точное значение $B_\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$, а в n-м уравнении использовать аппроксимацию (2.4), то мы приходим к замкнутой системе из n уравнений для интересующего нас момента. Частично описанная процедура демонстрировалась на примере параметрического возбуждения системы за счет флуктуаций параметров. Проиллюстрируем теперь этот метод на примере уравнения для среднего поля.

Усредним уравнение (1.2) и для нахождения $\langle \varepsilon u \rangle$ используем (2.8). В результате получим выражение (2.9), подстановка которого в уравнение для $\langle u \rangle$ дает

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\Delta_{\perp}\right)\langle u\rangle+k^2\int\limits_0^x dx'\int d\boldsymbol{\rho}' B_{\varepsilon}(x,\boldsymbol{\rho};x',\boldsymbol{\rho}')\left\langle\frac{\delta u(x,\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle=0. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) не является замкнутым, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle \delta u/\delta\varepsilon \rangle$. Чтобы получить уравнение для нее, подействуем на (1.2) оператором $\delta/\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')$ при $x'<x$ и усредним. Для вычисления величины $\left\langle \varepsilon(x,\boldsymbol{\rho})\frac{\delta u(x,\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle$ снова воспользуемся формулой (2.8). В результате получим

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\rho}^2}\right)\left\langle\frac{\delta u(x,\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle+$$
$$+k^2\int\limits_0^x dx''\int d\boldsymbol{\rho}'' B_{\varepsilon}(x,\boldsymbol{\rho};x'',\boldsymbol{\rho}'')\left\langle\frac{\delta^2 u(x,\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')\,\delta\varepsilon(x'',\boldsymbol{\rho}'')}\right\rangle=0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) снова оказывается незамкнутым, так как содержит вторую вариационную производную от поля u. К уравнению (3.2) следует добавить граничное условие при $x=x'$, которое получим, усредняя формулу (1.6):

$$\left\langle\frac{\delta u(x',\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle=i\frac{k}{2}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\langle u(x',\boldsymbol{\rho}')\rangle. \tag{3.3}$$

Теперь мы можем написать уравнение для функции $\langle \delta^2 u/\delta\varepsilon\delta\varepsilon \rangle$ и т. д. Таким образом, уравнения (3.1), (3.2) и т. д. образуют зацепляющуюся бесконечную систему уравнений. Начальные условия к появляющимся новым уравнениям можно получить вариационным дифференцированием (1.6) и последующим усреднением. Например, при $x''<x$ получаем

$$\left\langle\frac{\delta^2 u(x',\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x'',\boldsymbol{\rho}'')\,\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle=i\frac{k}{2}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\left\langle\frac{\delta u(x',\boldsymbol{\rho}')}{\delta\varepsilon(x'',\boldsymbol{\rho}'')}\right\rangle. \tag{3.4}$$

Отметим, что начальное условие к n-му уравнению содержит функцию, входящую в $(n-1)$-е уравнение. Замкнутое уравнение в приближении диффузионного случайного процесса, как указывалось выше, получается при замене в уравнении (3.1) функции B_{ε} на $B_{\varepsilon}^{\text{эфф}}=\delta(x-x')A(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')$, так как в этом случае возникает величина $\langle \delta u(x,\boldsymbol{\rho})/\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')\rangle$ при совпадающих значениях $x=x'$, которая, согласно (3.3), выражается через $\langle u \rangle$. Замену B_{ε} на $B_{\varepsilon}^{\text{эфф}}$ можно произвести не в первом уравнении цепочки (3.1), а в одном из последующих. Если это сделать, например, в уравнении (3.2), то под знаком интеграла появляется величина $\left\langle\frac{\delta^2 u(x,\boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x,\boldsymbol{\rho}'')\,\delta\varepsilon(x',\boldsymbol{\rho}')}\right\rangle$, которая, согласно (3.4), выражается через

среднее значение первой вариационной производной, и мы получаем уравнение

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\varepsilon(x',\rho')}\right\rangle+i\frac{k^2}{4}A(0)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\varepsilon(x',\rho')}\right\rangle=0, \qquad (3.5)$$

справедливое при $x>x'$, с начальным условием (3.3) при $x=x'$. Уравнения (3.1) и (3.5) образуют замкнутую систему второго приближения.

Аналогичным образом можно получить замкнутую систему уравнений следующих приближений, а также и системы уравнений для других моментов поля u.

Решение уравнения (3.5) с условием (3.3) имеет вид

$$\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\varepsilon(x',\rho')}\right\rangle=i\frac{k}{2}\langle u(x',\rho')\rangle\left[\frac{k}{2\pi i(x-x')}\exp\left\{-\frac{k(\rho-\rho')^2}{2i(x-x')}\right\}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)(x-x')\right\}. \qquad (3.6)$$

Выражение, заключенное в квадратных скобках, при $x-x'\to 0$ стремится к $\delta(\rho-\rho')$. Подставляя (3.6) в уравнение (3.1), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2k}\Delta_\perp\right)\langle u\rangle=$$
$$=-\frac{k^2}{4}\int_0^x dx'\int d\rho'\left[\frac{k}{2\pi i(x-x')}\exp\left\{-\frac{k(\rho-\rho')}{2i(x-x')}\right\}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)(x-x')\right\}B_\varepsilon(x-x',\rho-\rho')\langle u(x',\rho')\rangle. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) можно решить преобразованием Лапласа по x и преобразованием Фурье по ρ. Мы не будем делать этого, а выясним лишь, при каких условиях решение уравнения (3.7) переходит в решение уравнения, соответствующего приближению диффузионного случайного процесса.

Выражение в квадратных скобках в (3.7) представляет собой «размазанную» на масштаб $a=[(x-x')/k]^{1/2}$ δ-функцию по $\rho-\rho'$. В свою очередь величина $(x-x')$ ограничивается величиной порядка продольного масштаба неоднородностей $l_\parallel$ за счет множителя $B_\varepsilon(x-x',\rho-\rho')$, откуда получаем, что $a\sim(l_\parallel/k)^{1/2}$. Если масштаб a мал по сравнению с $l_\perp$-масштабом функции B_ε по $(\rho-\rho')$, т. е. $(l_\parallel/k)^{1/2}\ll l_\perp$, то выражение в квадратных скобках можно заменить на δ-функцию. Итак, если $l_\parallel\ll kl_\perp^2$, то уравнение (3.7) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2k}\Delta_\perp\right)\langle u(x,\rho)\rangle=$$
$$=-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, B_\varepsilon(\xi,0)\langle u(x-\xi,\rho)\rangle\exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)\xi\right\}.$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$\frac{k^2}{8} A(0) l_{\parallel} \ll 1,$$

т. е. ослабление среднего поля на масштабах порядка $l_{\parallel}$ мало, то можно пренебречь экспоненциальным множителем и сдвигом аргумента функции $\langle u \rangle$. В результате уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp}\right) \langle u \rangle = -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi\, B_{\varepsilon}(\xi, 0) \langle u(x, \boldsymbol{\rho}) \rangle.$$

Если, наконец, $x \gg l_{\parallel}$, то верхний предел интегрирования можно устремить к бесконечности, и мы приходим к уравнению (2.7′). Таким образом, приближение диффузионного случайного процесса для среднего поля справедливо при выполнении следующих трех условий:

$$l_{\parallel} \ll k l_{\perp}^2, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad x \gg l_{\parallel} \quad (A(0) \sim \sigma_{\varepsilon}^2 l_{\parallel}). \tag{3.8}$$

Аналогичным образом можно получить и исследовать уравнения второго приближения для функции когерентности $\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})$. Условия применимости приближения диффузионного случайного процесса для $\Gamma_2(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})$ имеют вид (при плоской падающей волне)

$$\boldsymbol{\rho} \ll x, \quad kx \mid \nabla_{\perp} A(\boldsymbol{\rho}) \mid \ll 1. \tag{3.9}$$

Важно подчеркнуть, что условия (3.8) и (3.9) практически независимы, так как накладывают ограничения на различные параметры. В частности, может оказаться, что условия (3.9) выполняются в том случае, когда условие $\gamma l_{\parallel} \ll 1$ $\left(\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)\right)$ нарушается. Отметим также, что условия (3.9) накладывают ограничения только на локальные характеристики флуктуаций ε и поэтому могут быть записаны и для турбулентной среды, в то время как величина γ определяется наиболее крупномасштабными флуктуациями ε.

Относительно условий применимости диффузионного приближения для флуктуаций интенсивности см. следующую главу.

§ 4. Амплитудно-фазовые флуктуации волны

Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны.

Комплексная фаза волны $\varphi = \chi + iS$ описывается уравнением (1.21). Точные решения уравнений (1.21) и (1.2) эквивалентны. В первом приближении метода плавных возмущений Рытова (МПВ) (см. монографию [30]) в уравнении (1.21) опускается член $(\nabla_{\perp}\varphi)^2$, т. е. рассматривается уравнение

$$2ik \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \Delta_{\perp} \varphi_0 + k^2 \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.1}$$

с начальным условием $\varphi_0(0, \boldsymbol{\rho}) = 0$ (для плоской падающей волны).

Решение уравнения (4.1) для фурье-компонент по поперечным координатам дает после разделения действительной и мнимой частей для уровня амплитуды и фазы следующие формулы:

$$\chi_{\boldsymbol{p}}^0(x) = \frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon_{\boldsymbol{p}}(\xi) \sin\frac{p^2}{2k}(x-\xi),$$
$$S_{\boldsymbol{p}}^0(x) = \frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon_{\boldsymbol{p}}(\xi) \cos\frac{p^2}{2k}(x-\xi). \tag{4.2}$$

Решение в этом случае является гауссовским случайным полем, и статистические свойства амплитудных флуктуаций описываются параметром $\sigma_0^2 = \langle \chi_0^2(x, \boldsymbol{\rho})\rangle$, для которого, согласно формулам (2.21′), (2.21″) и (4.2), имеем

$$\sigma_0^2(x) = \iint d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2 \langle \chi_{\boldsymbol{p}_1}^0(x)\, \chi_{\boldsymbol{p}_2}^0(x)\rangle \exp\{i(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\rho}\} =$$
$$= \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2}\int_0^\infty dp\, p\Phi_\varepsilon(p)\left\{1 - \frac{k}{p^2\Delta x}\left[\sin\frac{p^2}{k}x - \sin\frac{p^2}{k}(x-\Delta x)\right]\right\}. \tag{4.3}$$

Если поле $\varepsilon(x, \rho)$ заполняет все пространство, то $\Delta x = x$ и

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 x}{2}\int_0^\infty dp\, p\Phi_\varepsilon(p)\left[1 - \frac{k}{p^2 x}\sin\frac{p^2}{k}x\right]. \tag{4.3′}$$

Если же поле $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ отлично от нуля только в тонком слое $\Delta x \ll x$, то

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2}\int_0^\infty dp\, p\Phi_\varepsilon(p)\left[1 - \cos\frac{p^2}{k}x\right]. \tag{4.3″}$$

Этот случай называется случайным фазовым экраном, и волна после прохождения тонкого слоя флуктуирующей среды распространяется далее в пустом пространстве.

Если флуктуации $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ вызваны турбулентными пульсациями температуры, то функция $\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ описывается формулой (2.22) и интегралы (4.3′), (4.3″) легко вычисляются. В результате получаем [30]

$$\sigma_0^2 = 0{,}077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \qquad (\Delta x = x),$$
$$\sigma_0^2 = 0{,}144 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6}\Delta x \qquad (\Delta x \ll x). \tag{4.4}$$

При этом оказывается, что условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флуктуаций является $\sigma_0^2(x) \ll 1$. Область флуктуаций амплитуды, в которой выполняется это неравенство, называется «областью слабых флуктуаций». В области,

где $\sigma_0^2 \gtrsim 1$ (которая называется «областью сильных флуктуаций»), необходимо изучать полное уравнение (1.21). На рис. 17 приведена экспериментальная зависимость дисперсии уровня ампли-

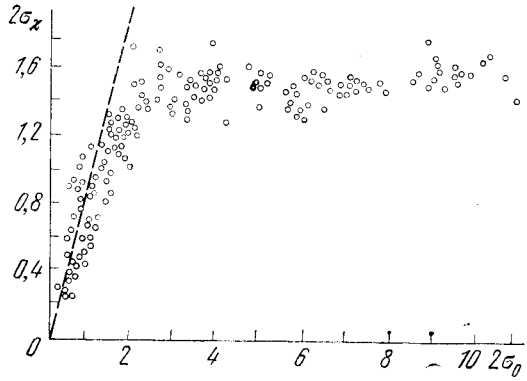

Рис. 17. Экспериментальные значения дисперсии χ (x, ρ) в зависимости от параметра σ_0 [99] (штриховая линия соответствует расчету по первому приближению МПВ).

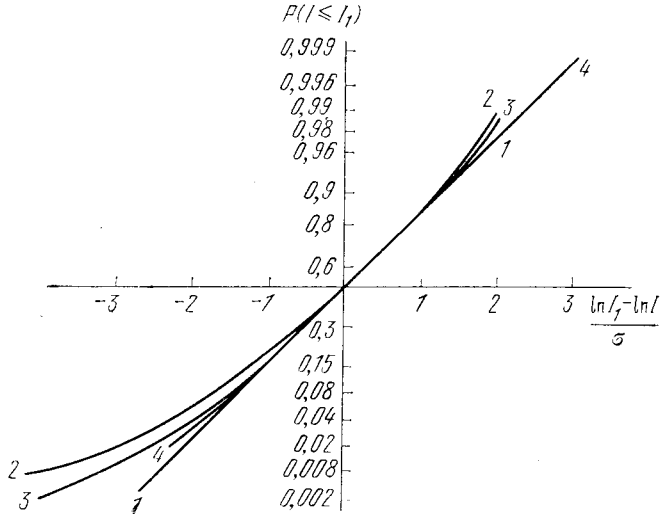

Рис. 18. Распределение вероятностей для интенсивности света в турбулентной среде [99] (линия *1* соответствует $\sigma_0^2 < 1$; *2* — $\sigma_0^2 = 1 \div 4$, *3* — $\sigma_0^2 > 4$; *4* — $\sigma_0^2 \geqslant 25$).

туды σ_χ от параметра σ_0 при распространении света в турбулентной атмосфере [99]. Решение, соответствующее первому приближению МПВ, показано на этом рисунке штриховой прямой. На рис. 18 изображено распределение вероятностей для уровня

амплитуды [99]. Из этого рисунка видно, что в области слабых и очень сильных флуктуаций распределение вероятностей близко к гауссовскому, отклонения от которого наблюдаются только в области $\sigma_0^2 \sim 1$. Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями величины $\nabla_\perp S$, то они хорошо описываются первым приближением МПВ [132]. При этом для дисперсии угла прихода волны в точку (x, ρ) $\alpha(x, \rho) = \frac{1}{k} \nabla_\perp S(x, \rho)$, аналогично выводу формул (4.3′) и (4.3″), получаем выражения

$$\langle \alpha^2(x) \rangle = \frac{\pi^2 x}{2} \int_0^\infty dp\, p^3 \Phi_\varepsilon(p) \left[1 + \frac{k}{p^2 x} \sin \frac{p^2}{k} x \right] \qquad (\Delta x = x),$$

$$\langle \alpha^2(x) \rangle = \frac{\pi^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dp\, p^3 \Phi_\varepsilon(p) \left[1 + \cos \frac{p^2}{k} x \right] \qquad (\Delta x \ll x). \tag{4.5}$$

Отметим, что диффузионное приближение для уравнения (1.2) практически не накладывает ограничения на амплитудные флуктуации и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, \rho)$, полученные выше, справедливы и в области сильных флуктуаций амплитуды.

Статистические свойства решения уравнения (1.21) также могут быть описаны в диффузионном приближении. Однако, в силу нелинейности самого стохастического уравнения, уравнения для моментов функции $\varphi(x, \rho)$ оказываются незамкнутыми. Поэтому для изучения амплитудно-фазовых флуктуаций надо привлекать какую-либо дополнительную информацию. В качестве такой информации можно использовать, например, экспериментальные данные о нормальности одноточечного распределения вероятностей для уровня амплитуды в области сильных флуктуаций. Для случая плоской падающей волны уровень амплитуды и интенсивность волны описываются уравнениями (1.22), (1.24) с условиями $\chi(0, \rho) = 0$, $I(0, \rho) = 1$, и решения этих уравнений будут однородными случайными полями в плоскости $x = \text{const}$.

Усредняя уравнение (1.24), получаем соотношение

$$\langle I(x, \rho) \rangle = 1, \tag{4.6}$$

выражающее закон сохранения энергии для рассматриваемой задачи. При нормальном распределении для $\chi(x, \rho)$ из (4.6) получаем

$$\langle I(x, \rho) \rangle = \langle \exp\{2\chi\} \rangle = \exp\{2\langle \chi \rangle + 2\sigma_\chi^2\} = 1,$$

и, следовательно, среднее значение уровня амплитуды $\langle \chi(x, \rho) \rangle$ и дисперсия уровня $\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle$ связаны соотношением

$$\sigma_\chi^2 = -\langle \chi \rangle. \tag{4.7}$$

Не представляет труда получить в этом случае формулу

$$\langle \chi(x, \rho) I(x, \rho) \rangle = \sigma_\chi^2. \tag{4.8}$$

Умножая теперь уравнение (1.24) на $\chi(x, \rho)$ и усредняя, получаем с учетом (4.6) и пространственной однородности соотношение

$$\langle \chi(x, \rho) I(x, \rho) \rangle = \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_\perp I(\xi, \rho) \nabla_\perp S(\xi, \rho) \rangle. \tag{4.9}$$

Левая часть уравнения (4.9) при нормальном распределении вероятностей для χ связана с дисперсией χ согласно (4.8), а величина в правой части (4.9) определяется корреляцией $\nabla_\perp I$ и $\nabla_\perp S$. Если при расчете амплитудных флуктуаций можно использовать для $\nabla_\perp S$ формулу первого приближения МПВ (4.2), то правую часть уравнения (4.9) можно вычислить в диффузионном приближении и получить асимптотическое выражение [133]

$$\sigma_\chi^2 \sim \ln \sigma_0 \qquad (\sigma_0^2 \gg 1).$$

Эта формула противоречит экспериментальным данным (см. рис. 17). Отсюда можно сделать вывод, что несмотря на то, что флуктуации угла прихода, связанные с величиной $\nabla_\perp S$, могут быть описаны в первом приближении МПВ даже в области сильных флуктуаций амплитуды, пользоваться этим выражением для расчета амплитудных флуктуаций нельзя. В этом мы убедимся еще раз ниже, рассматривая приближение геометрической оптики.

Отметим, что в области слабых флуктуаций интенсивности уровень амплитуды имеет гауссовское распределение вероятностей. Поэтому формула (4.7) справедлива в этой области. Рассмотрим теперь дисперсию интенсивности плоской волны. Для нее имеем

$$\beta_0^2 = \langle I^2 \rangle - 1 = \langle \exp\{4\chi\} \rangle - 1 = \exp\{4\langle \chi \rangle + 8\sigma_\chi^2\} - 1 \approx 4\sigma_0^2, \tag{4.10}$$

где σ_0^2 описывается формулой (4.3). Следовательно, в области слабых флуктуаций для турбулентных пульсаций температуры

$$\beta_0^2 = 0{,}307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \qquad (\Delta x = x), \tag{4.11}$$

$$\beta_0^2 = 0{,}563 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x \qquad (\Delta x \ll x). \tag{4.12}$$

Глава 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ (ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД)

Рассмотрим теперь статистическое описание характеристик волнового поля в среде со случайными неоднородностями, основанное на использовании функциональной записи решения задачи.

§ 1. Континуальная запись решения задачи

Для описания процесса распространения волны в неоднородной среде будем исходить, как и в предыдущей главе, из параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp u + i\frac{k}{2}\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})u, \quad u(0, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}), \tag{1.1}$$

где ось x совпадает с направлением падающей волны, $\boldsymbol{\rho} = \{y, z\}$ — поперечные координаты, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ — флуктуирующая часть поля диэлектрической проницаемости.

Используя метод, предложенный Фрадкиным [134] в квантовой теории поля (см. также [135—138]), решение уравнения (1.1) можно представить в операторной форме, или в виде континуального интеграла [139]. Для этого рассмотрим вместо (1.1) более сложное уравнение, содержащее произвольную детерминированную функцию $\boldsymbol{\tau}(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp \Phi + i\frac{k}{2}\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\Phi + \boldsymbol{\tau}(x)\nabla_\perp \Phi, \tag{1.2}$$

$$\Phi(0, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}), \quad u(x, \boldsymbol{\rho}) = \Phi(x, \boldsymbol{\rho})|_{\boldsymbol{\tau}=0}.$$

Для вариационной производной $\delta\Phi(x, \boldsymbol{\rho})/\delta\boldsymbol{\tau}(x)$ стандартным путем получаем выражение

$$\frac{\delta\Phi(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\boldsymbol{\tau}(x)} = \nabla_\perp \Phi(x, \boldsymbol{\rho}), \tag{1.3}$$

и уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{i}{2k}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(x)} + i\frac{k}{2}\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\Phi + \boldsymbol{\tau}(x)\nabla_\perp \Phi. \tag{1.4}$$

Будем искать решение уравнения (1.4) в виде

$$\Phi(x, \boldsymbol{\rho}) = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\}\varphi(x, \boldsymbol{\rho}). \tag{1.5}$$

Тогда для функции $\varphi(x, \boldsymbol{\rho})$ получаем уравнение первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = i\frac{k}{2}\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\varphi + \boldsymbol{\tau}(x)\nabla_{\perp}\varphi, \quad \varphi(0, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}), \tag{1.6}$$

решение которого выглядит так:

$$\varphi(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0\left(\boldsymbol{\rho} + \int_0^x d\xi\, \boldsymbol{\tau}(\xi)\right)\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{\tau}(\eta)\right)\right\}. \tag{1.7}$$

Следовательно, с учетом (1.5) и (1.2) получаем

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\}u_0\left(\boldsymbol{\rho} + \int_0^x d\xi\, \boldsymbol{\tau}(\xi)\right)\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{\tau}(\eta)\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\tau}=0}. \tag{1.8}$$

Это равенство можно записать в виде континуального интеграла (см. ниже):

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \int D\boldsymbol{v}\, u_0\left(\boldsymbol{\rho} + \int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi)\right)\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{\kappa}{2}\int_0^x d\xi\left[\boldsymbol{v}^2(\xi) + \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{v}(\eta)\right)\right]\right\}, \tag{1.9}$$

$$D\boldsymbol{v} = \prod_{\xi=0}^{x} d\boldsymbol{v}(\xi)\left\{\int\ldots\int\prod_{\xi=0}^{x} d\boldsymbol{v}(\xi)\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}^2(\xi)\right\}\right\}^{-1}.$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\boldsymbol{\rho}) = u_0$ и формула (1.8) принимает вид

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = u_0\exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\}\exp\left\{i\frac{k}{2}d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{\tau}(\eta)\right)\right\}_{\boldsymbol{\tau}=0}. \tag{1.10}$$

Выражение (1.9) допускает вероятностную интерпретацию [17], а именно, его можно формально записать в виде средней величины:

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \left\langle u_0\left(\boldsymbol{\rho} + \int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi)\right)\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{v}(\eta)\right)\right\}\right\rangle_{\boldsymbol{v}}. \tag{1.11}$$

Усреднение здесь производится по ансамблю реализаций поля $\boldsymbol{v}(\xi)$ $(\xi \leqslant x)$, которое можно рассматривать как «гауссовское» случайное поле со средним значением, равным нулю, и с комплекс-

ной «корреляционной» функцией

$$\langle v_\alpha(\xi_1) v_\beta(\xi_2)\rangle = \frac{i}{k}\delta_{\alpha\beta}\delta(\xi_1-\xi_2) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Легко видеть, что все формулы, справедливые для обычных гауссовских случайных полей, верны и в этом случае. В частности, будет справедлива и формула (2.3.8).

Представляя (1.11) в виде

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\} \times$$
$$\times \left\langle \exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}\int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi) + i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{v}(\eta)\right)\right\}\right\rangle_v,$$

где $u_0(\boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\boldsymbol{\rho}' u_0(\boldsymbol{\rho}') \exp\{-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}'\}$, можно выполнить усреднение по формуле (2.3.8) и получить выражение

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho} - \frac{i\varkappa^2}{2k}x\right\}\psi(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa}), \tag{1.12}$$

$$\psi(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa}) = \left\langle \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\left[\boldsymbol{v}(\eta) - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\right]\right)\right\}\right\rangle_v.$$

Возвращаясь к операторному виду, выражение для $\psi(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa})$ можно записать в форме

$$\psi(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa}) =$$
$$= \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\} \exp\left\{i\,\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\left[\boldsymbol{\tau}(\eta) - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\right]\right)\right\}_{\boldsymbol{\tau}=0}. \tag{1.13}$$

Представление (1.13) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp\psi + i\frac{k}{2}\varepsilon\psi - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\nabla_\perp\psi, \quad \psi(0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa}) = 1. \tag{1.14}$$

Выражения (1.12)—(1.14) представляют разложение задачи по плоским волнам. Выражение (1.12) и уравнение (1.14) для величины ψ можно получить, разумеется, и непосредственно из уравнения (1.1).

Выражение, стоящее в правой части (1.12) под знаком интеграла, описывает дифракцию плоской волны за счет неоднородностей поля ε; при этом множитель $u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho} - i\frac{\varkappa^2}{2k}x\}$ описывает дифракцию в свободном пространстве в отсутствие ε, а множитель ψ учитывает влияние неоднородностей на такую дифрагированную волну.

Решение исходного уравнения (1.1) в форме (1.8), (1.9) можно получить и непосредственно, используя вероятностную интерпретацию для решения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, \boldsymbol{\rho})}{\partial x} = i\frac{k}{2}\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\rho})\varphi(x, \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{v}(x)\nabla_{\perp}\varphi(x, \boldsymbol{\rho}), \qquad (1.15)$$

$$\varphi(0, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}),$$

где $\boldsymbol{v}(x)$ — «гауссовское» случайное поле с тензором «корреляций»

$$\langle v_\alpha(\xi_1) v_\beta(\xi_2)\rangle = \frac{i}{k}\delta_{\alpha\beta}\delta(\xi_1 - \xi_2) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Решение уравнения (1.15) является функционалом поля $\boldsymbol{v}(\xi)$, т. е. $\varphi = \varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{v}(\xi)]$. Усредним уравнение (1.15) по $\boldsymbol{v}$, а для расщепления корреляции $\langle \boldsymbol{v}(x)\nabla_{\perp}\varphi(x, \boldsymbol{\rho})\rangle$ воспользуемся формулой (2.3.6′). Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\varphi\rangle_{\boldsymbol{v}} = i\frac{k}{2}\varepsilon\langle\varphi\rangle_{\boldsymbol{v}} + \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\langle\varphi\rangle_{\boldsymbol{v}}, \qquad (1.16)$$

$$\langle\varphi[0, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{v}]\rangle_{\boldsymbol{v}} = u_0(\boldsymbol{\rho}).$$

Сравнивая (1.16) с (1.1), видим, что

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \langle\varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{v}(\xi)]\rangle_{\boldsymbol{v}}. \qquad (1.17)$$

А учитывая, что решение уравнения (1.15) имеет вид

$$\varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{v}(\xi)] = \\ = u_0\left(\boldsymbol{\rho} + \int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi)\right)\exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\, \boldsymbol{v}(\eta)\right)\right\},$$

мы вновь приходим к выражению (1.9).

Для перехода от (1.17) к форме (1.8) перепишем (1.17) в виде

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \langle\varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{v}(\xi) + \boldsymbol{\tau}(\xi)]\rangle_{\boldsymbol{v}}|_{\boldsymbol{\tau}=0} = \\ = \left\langle \exp\left\{\int_0^x d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\tau}(\xi)}\right\}\right\rangle_{\boldsymbol{v}} \varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\tau}(\xi)]|_{\boldsymbol{\tau}=0}, \qquad (1.18)$$

где $\boldsymbol{\tau}(x)$ — произвольная детерминированная вектор-функция. В формуле (1.18) можно выполнить усреднение, и в результате получаем

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\}\varphi[x, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\tau}(\xi)]_{\boldsymbol{\tau}=0},$$

что, естественно, совпадает с выражением (1.8).

В заключение приведем выражения для функции Грина уравнения (1.1), описывающей поле сферической волны:

$$G(x, \rho; x', \rho') = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_{x'}^{x} d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)}\right\}\left[\delta\left(\rho - \rho' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x'}^{x} d\xi\, \tau(\xi)\right) \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_{x'}^{x} d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \rho + \int_{\xi}^{x} d\eta\, \tau(\eta)\right)\right\}\right]_{\tau=0}; \quad (1.19)$$

$$G(x, \rho; x', \rho') = \int D\boldsymbol{v}\, \delta\left(\rho - \rho' + \int_{x'}^{x} d\xi\, \boldsymbol{v}(\xi)\right) \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_{x'}^{x} d\xi \times\right.$$

$$\left. \times \left[\boldsymbol{v}^2(\xi) + \varepsilon\left(\xi, \rho + \int_{\xi}^{x} d\eta\, \boldsymbol{v}(\eta)\right)\right]\right\},$$

$$D\boldsymbol{v} = \prod_{\xi=x'}^{x} d\boldsymbol{v}(\xi)\left\{\int\ldots\int \prod_{\xi=x'}^{x} d\boldsymbol{v}(\xi) \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_{x'}^{x} d\xi\, \boldsymbol{v}^2(\xi)\right\}\right\}^{-1}. \quad (1.20)$$

Комплексно сопряженные формулы описывают функцию Грина для сферической волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x.

Отметим, что можно записать в виде континуального интеграла и решение линейного дифференциального уравнения общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(\boldsymbol{x}, \nabla)u = 0,$$

которое, однако, в отличие от рассмотренного уравнения, будет содержать двукратный континуальный интеграл [136].

§ 2. Статистическое описание волнового поля

Перейдем теперь к статистическому описанию распространения волны в случайно-неоднородной среде. Как и в предыдущей главе, будем считать, что флуктуации поля $\varepsilon(x, \rho)$ являются гауссовским однородным, дельта-коррелированным по оси x, случайным полем с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1)\varepsilon(x_2, \rho_2)\rangle = \delta(x_1 - x_2)A(\rho_1 - \rho_2), \quad (2.1)$$

где $A(\rho) = 2\pi \int d\boldsymbol{\varkappa}\, \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})e^{i\boldsymbol{\varkappa}\rho}$, а $\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})$ — трехмерная спектральная функция поля $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ от двумерного вектора $\boldsymbol{\varkappa}$.

В силу формулы (1.12) нам достаточно изучить статистические характеристики функции ψ.

Усредняя формулу (1.13) по ансамблю реализаций поля ε, получаем

$$\langle \psi(x, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa})\rangle =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi_1 \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}^2(\xi)}\right\}\exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)x\right\}_{\boldsymbol{\tau}=0} \equiv \exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)x\right\},$$

и, следовательно, выражение для среднего поля имеет вид

$$\langle u(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = \exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)x\right\}\int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa})\exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho} - i\frac{\varkappa^2}{2k}x\right\},$$

естественно, совпадающий с формулой (8.2.18).

Образуя билинейную комбинацию $\psi\psi^*$ и усредняя, получаем (здесь обозначим $\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\varkappa}_1 - \boldsymbol{\varkappa}_2 = \boldsymbol{\varkappa}$)

$$\langle \psi(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\varkappa}_1)\psi^*(x, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\varkappa}_2)\rangle =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\left[\frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}_2^2(\xi)}\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\left[\boldsymbol{\tau}_1(\eta) - \boldsymbol{\tau}_2(\eta) - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\right]\right)\right\}_{\boldsymbol{\tau}_i=0}$$

(где $D(\boldsymbol{\rho}) = A(0) - A(\boldsymbol{\rho})$). Делая функциональную замену переменных $\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = 2\boldsymbol{T}$, это выражение можно переписать в виде

$$\langle \psi(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\varkappa}_1)\psi^*(x, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\varkappa}_2)\rangle = \exp\left\{\frac{i}{k}\int_0^x d\xi\,\frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{\tau}(\xi)\,\delta\boldsymbol{T}(\xi)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta\left[\boldsymbol{\tau}(\eta) - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\right]\right)\right\}_{\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{T}=0} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}(x-\xi)\right)\right\} \qquad (2.2)$$

и, следовательно, получить выражение для функции когерентности второго порядка $\langle u(x, \boldsymbol{\rho}_1)u^*(x, \boldsymbol{\rho}_2)\rangle$. Аналогичным образом легко получить выражение и для продольной корреляции $\langle u(x_1, \boldsymbol{\rho}_1)u^*(x_2, \boldsymbol{\rho}_2)\rangle$. Эти выражения, естественно, совпадают с формулами (2.19), (2.19″) предыдущей главы. Для всех остальных моментов полей $u(x, \boldsymbol{\rho}_1)$ и $u^*(x, \boldsymbol{\rho}_2)$ замкнутых выражений получить не удается. Это обусловлено тем, что в рассмотренных задачах дифракционные эффекты не сказываются на статистическом поведении функций $\langle\psi\rangle$ и $\langle\psi\psi^*\rangle$ (действие соответствующих операторов сводится к единице), в то время как для всех других моментов влияние дифракционного оператора существенно.

Выражения для среднего поля и функции когерентности, как было показано в предыдущей главе, легко получить и непосред-

ственно, усредняя соответствующие стохастические уравнения. В этом смысле для вычисления указанных величин эти методы можно считать эквивалентными. Представляется, однако, существенным, что с помощью операторного метода, или континуального интеграла мы можем выписывать выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями (например, выражения, связанные с флуктуациями интенсивности волны). Так, например, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности четвертого порядка

$$\Gamma_4 = \langle u(x, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3) u^*(x, \rho_4)\rangle,$$

с помощью которого затем найти величину $\langle I^2(x, \rho)\rangle$, полагая в решении $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho$. Однако решить аналитически это уравнение не представляется возможным, и оно содержит много лишних (для нахождения $\langle I^2\rangle$) параметров, в то время как запись величины $\langle I^2(x, \rho)\rangle$ в континуальном виде этих параметров не содержит. Поэтому такая запись может быть полезна для изучения асимптотических характеристик любых моментов и, следовательно, распределения вероятностей для интенсивности волнового поля (см. следующий параграф). Кроме того, в ряде случаев представление поля в операторном виде позволяет найти соответствующие средние характеристики технически проще по сравнению с изучением соответствующих уравнений. Так, в § 4 предыдущей главы при изучении амплитудно-фазовых флуктуаций требовалось вычислить величину $\langle \varepsilon(y, \rho_1) I(x, \rho_2)\rangle$ $(x > y)$. Если исходить при этом из уравнения (1.1), то следует составить дифференциальное уравнение для величины $\varepsilon(y, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3)$ при $y < x$, усреднить его, установить граничное условие для величины $\langle \varepsilon u u^*\rangle$ при $x = y$, решить полученное уравнение с соответствующим граничным условием, а уже затем положить $\rho_3 = \rho_2$. В то же время вычисление этой величины с помощью представления $I(x, \rho_2)$ в операторном виде мало чем отличается от вычисления величины $\langle \psi\psi^*\rangle$, рассмотренного выше. Запись решения в виде континуального интеграла удобна и при анализе структуры волнового поля, отраженного от зеркальной поверхности [41]. Используя формулу (8.1.15) и явное выражение для функции Грина (1.19), для поля отраженной волны в точке $(0, \rho)$ получаем выражение (предполагаем для простоты, что зеркало пространственно однородно, т. е. $V(\rho_2, \rho_1) = V(\rho_2 - \rho_1)$)

$$u_{\text{отр}}(0, \rho) = \int d\tilde{\rho}\, V(\tilde{\rho}) \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^L d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta\tau_1^2} + \frac{\delta^2}{\delta\tau_2^2}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^L d\xi \left[\varepsilon\left(\xi, \rho - \int_0^\xi d\eta\, \tau_1\right) + \varepsilon\left(\xi, \rho - \tilde{\rho} - \int_0^L d\eta\, \tau_1 + \int_\xi^L d\eta\, \tau_2\right)\right]\right\} \times$$

$$\times u_0\left(\rho - \tilde{\rho} - \int_0^L d\xi\, [\tau_1 + \tau_2]\right)\Big|_{\tau_i = 0}, \qquad (2.3)$$

которое можно переписать в виде

$$u_{\text{отр}}(0, \boldsymbol{\rho}) = \int d\tilde{\boldsymbol{\rho}}\, V(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) \int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\rho} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}) - i\frac{\varkappa^2}{k}L\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^L d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta\tau_1^2} + \frac{\delta^2}{\delta\tau_2^2}\right]\right\} \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^L d\xi \left[\varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} + \int_0^\xi d\eta\, \boldsymbol{\tau}_1 - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\xi\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon\left(\xi, \boldsymbol{\rho} - \tilde{\boldsymbol{\rho}} + \int_0^L d\eta\, \boldsymbol{\tau}_1 + \int_\xi^L d\eta\, \boldsymbol{\tau}_2 - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}(2L - \xi)\right)\right]\right\}_{\boldsymbol{\tau}_i = 0}. \qquad (2.4)$$

Усредним теперь (2.4) по ансамблю реализаций поля ε, предполагая, как и ранее, гауссовость и дельта-коррелированность ε. В результате получаем равенство

$$\langle u_{\text{отр}}(0, \boldsymbol{\rho})\rangle = \int d\tilde{\boldsymbol{\rho}}\, V(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) \int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\rho} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}) - i\frac{\varkappa^2}{k}L\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^L d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta\tau_1^2} + \frac{\delta^2}{\delta\tau_2^2}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^L d\xi \left[A(0) + A\left(\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \int_\xi^L d\eta\, (\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) + \frac{2\boldsymbol{\varkappa}}{k}(L - \xi)\right)\right]\right\}_{\boldsymbol{\tau}_i = 0}. \qquad (2.5)$$

Легко видеть, что формулу (2.5) можно записать в виде

$$\langle u_{\text{отр}}(0, \boldsymbol{\rho})\rangle = \int d\tilde{\boldsymbol{\rho}}\, V(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) \int d\boldsymbol{\varkappa}\, u_0(\boldsymbol{\varkappa}) \exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\rho} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}) - i\frac{\varkappa^2}{k}L\right\} \times$$

$$\times \langle \psi(L, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varkappa})\, \psi(L, \boldsymbol{\rho} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}, -\boldsymbol{\varkappa})\rangle, \qquad (2.6)$$

где функция ψ описывается формулой (1.13). Формула (2.6) упрощается для плоской падающей волны, для которой $u_0(\boldsymbol{\varkappa}) = \delta(\boldsymbol{\varkappa})$, и принимает вид

$$\langle u_{\text{отр}}(0, \boldsymbol{\rho})\rangle = \langle u_{\text{пад}}(L, \boldsymbol{\rho})\, u_{\text{отр}}(L, \boldsymbol{\rho})\rangle, \qquad (2.7)$$

где

$$u_{\text{отр}}(L, \boldsymbol{\rho}) = \int d\tilde{\boldsymbol{\rho}}\, V(\tilde{\boldsymbol{\rho}})\, u_{\text{пад}}(L, \boldsymbol{\rho} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}).$$

Формулы (2.6), (2.7) связывают поле отраженной волны в плоскости $(0, \boldsymbol{\rho})$ с полем на отражающей плоскости $(L, \boldsymbol{\rho})$.

Выше мы рассматривали случай отсутствия регулярной составляющей у поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$. Если имеется $\langle\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\rangle \neq 0$, то формально формулы (1.8), (1.12), (1.13) дают операторное выражение для решения задачи и в этом случае. Однако такая форма записи неудобна, так как она базируется на учете дифракции волны в свободном пространстве, а не в пространстве с регулярными неоднородностями. Рассмотрим случай параболического профиля

регулярной составляющей поля $\varepsilon(x, \rho)$, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k}[\Delta_\perp - \alpha^2 k^2 \rho^2] u + i\frac{k}{2}\tilde{\varepsilon}(x, \rho) u, \tag{2.8}$$

$$u(0, \rho) = u_0(\rho).$$

Как отмечалось в предыдущей главе, решение уравнения (2.8) можно представить в виде (8.2.35), т. е. в виде

$$u(x, \rho) = \frac{1}{\cos \alpha x} \exp\left\{-i\frac{\alpha k}{2}\rho^2 \operatorname{tg} \alpha x\right\} \tilde{u}(x, \rho), \tag{2.9}$$

где функция $\tilde{u}(x, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp \tilde{u} + \alpha \operatorname{tg} \alpha x \rho \nabla_\rho \tilde{u} + i\frac{k}{2}\tilde{\varepsilon}(x, \rho)\tilde{u}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{u}(0, \rho) = u_0(\rho).$$

Далее стандартным путем получаем операторное выражение

$$\tilde{u}(x, \rho) = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)}\right\} \tilde{\tilde{u}}[x, \rho, \tau]|_{\tau=0},$$

где $\tilde{\tilde{u}}$ удовлетворяет уравнению первого порядка по ρ:

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial x} = [\alpha\rho \operatorname{tg} \alpha x + \tau(x)] \nabla_\rho \tilde{\tilde{u}} + i\frac{k}{2}\tilde{\varepsilon}(x, \rho)\tilde{\tilde{u}}, \tag{2.11}$$

$$\tilde{u}(0, \rho) = u_0(\rho).$$

Уравнение (2.11) легко решается методом характеристик, и в результате получаем запись решения уравнения (2.8) в операторном виде:

$$u(x, \rho) = \frac{1}{\cos \alpha x} \exp\left\{-i\frac{\alpha k}{2}\rho^2 \operatorname{tg} \alpha x + \frac{i}{2k}\int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)}\right\} \times$$

$$\times u_0\left(\frac{1}{\cos \alpha x}\rho + \int_0^x d\xi \frac{\tau(\xi)}{\cos \alpha\xi}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \rho\frac{\cos \alpha\xi}{\cos \alpha x} + \int_\xi^x d\eta \frac{\cos \alpha\xi}{\cos \alpha\eta}\tau(\eta)\right)\right\}_{\tau=0}. \tag{2.12}$$

Представляя поле $u_0(\rho)$ в виде

$$u_0(\rho) = \int d\varkappa\, u_0(\varkappa) \exp\{i\varkappa\rho\}$$

и используя вероятностную аналогию (переходя к соответствующему континуальному интегрированию), получаем окончательное выражение [130]:

$$u(x, \rho) = \frac{1}{\cos \alpha x}\int d\varkappa\, u_0(\varkappa) \exp\left\{-i\frac{\alpha k}{2}\rho^2 \operatorname{tg} \alpha x + \frac{i\varkappa\rho}{\cos \alpha x} - \right.$$

$$\left. - \frac{i\varkappa^2}{2k\alpha} \operatorname{tg} \alpha x\right\} \psi(x, \rho, \varkappa), \tag{2.13}$$

где

$$\psi(x, \rho, \varkappa) =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\, \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)}\right\} \exp\left\{i\frac{k}{2}\int_0^x d\xi\, \varepsilon\left(\xi, \frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha x}\rho - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\varkappa}{k\alpha}\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{\cos\alpha x} + \int_\xi^x d\eta \frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha\eta}\tau(\eta)\right)\right\}_{\tau=0}. \quad (2.14)$$

Выражение (2.13) представляет разложение решения задачи по плоским волнам. При этом множитель при функции ψ в (2.13) описывает дифракцию плоской волны в среде с параболическим профилем $\langle\varepsilon\rangle$, а функция ψ учитывает влияние случайных неоднородностей на такую дифрагированную волну. При $\alpha \to 0$ формулы (2.12)—(2.14), естественно, переходят в формулы (1.8), (1.12), (1.13).

Для нахождения средних характеристик волнового поля $u(x, \rho)$ можно, как и ранее, считать поле $\varepsilon(x, \rho)$ гауссовским дельта-коррелированным случайным полем, и задача сводится к нахождению статистических характеристик функции ψ. Так, для $\langle\psi\rangle$ получаем

$$\langle\psi(x, \rho, \varkappa)\rangle = \exp\left\{-\frac{k^2}{8}A(0)x\right\},$$

а

$$\langle\psi(x, \rho_1, \varkappa_1)\psi^*(x, \rho_2, \varkappa_2)\rangle = \exp\left\{\frac{i}{2k}\int_0^x d\xi\left[\frac{\delta^2}{\delta\tau_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta\tau_2^2(\xi)}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha x}\rho - \frac{\varkappa}{k\alpha}\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{\cos\alpha\xi} + \int_\xi^x d\eta\frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha\eta}(\tau_1 - \tau_2)\right)\right\}_{\tau_i=0} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x d\xi\, D\left(\frac{\cos\alpha\xi}{\cos\alpha x}\rho - \frac{\varkappa}{k\alpha}\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{\cos\alpha\xi}\right)\right\}, \quad (2.14')$$

где $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$. Формулы (2.14′) позволяют получить выражения для функций $\langle u\rangle$ и $\Gamma(x, \rho, \boldsymbol{R})$, которые, естественно, совпадают с формулами (8.2.32), (8.2.43).

Перейдем теперь к выяснению асимптотического поведения флуктуаций интенсивности плоской волны в области сильных флуктуаций в среде без регулярной составляющей поля $\varepsilon(x, \rho)$, следуя работе [140].

§ 3. Флуктуации интенсивности плоской волны

Рассмотрим статистический момент поля $u(x, \rho)$

$$\Gamma_{2n}(x, \rho_1, \ldots, \rho_{2n}) = \left\langle\prod_{k=1}^n u(x, \rho_{2k-1})u^*(x, \rho_{2k})\right\rangle. \quad (3.1)$$

В приближении диффузионного случайного процесса функция Γ_{2n} удовлетворяет уравнению (8.2.5) при $n = m$, которое в переменных ρ_k записывается в виде

$$\frac{\partial \Gamma_{2n}}{\partial x} = \frac{i}{2k} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \Delta_l \Gamma_{2n} + \frac{k^2}{8} \sum_{l, j=1}^{2n} (-1)^{j+l} D(\rho_j - \rho_l) \Gamma_{2n} \quad (3.2)$$

с начальным условием $\Gamma_{2n}(0, \rho_1, \ldots, \rho_{2n}) = 1$.

Функция $D(\rho)$ в (3.2), согласно § 2 гл. 8 описывается формулой

$$D(\rho) = A(0) - A(\rho) = 2\pi \int d\varkappa \, \Phi_\varepsilon(\varkappa)(1 - \cos \varkappa\rho), \quad (3.3)$$

где $\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ — трехмерный спектр поля $\varepsilon(r)$ от двумерного вектора $\varkappa$.

Используя запись поля $u(x, \rho)$ в виде континуального интеграла (1.9), проводя усреднение по полю $\varepsilon(x, \rho)$, получаем выражение для Γ_{2n} в виде

$$\Gamma_{2n}(x, \{\rho_i\}) =$$

$$= \int \ldots \int D\boldsymbol{v}_1(\xi) \ldots D\boldsymbol{v}_{2n}(\xi) \exp\left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \boldsymbol{v}_j^2(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2}{8} \sum_{j, l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x d\xi \, D\left(\rho_j - \rho_l + \int_\xi^x dx' [\boldsymbol{v}_j(x') - \boldsymbol{v}_l(x')]\right)\right\}. \quad (3.4)$$

Формулу (3.4) можно также получить, решая уравнение (3.2) методом, описанным в первом параграфе. Формулу (3.4) можно записать в операторной форме, которая иногда более удобна для проведения конкретных вычислений:

$$\Gamma_{2n}(x, \{\rho_j\}) = \prod_{l=1}^{2n} \exp\left\{ \frac{i}{2k} (-1)^{l+1} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau_l^2(\xi)} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{k^2}{8} \sum_{j, l=1}^{2n} (-1)^{l+j+1} \int_0^x d\xi \, D\left(\rho_j - \rho_l + \int_\xi^x dx' [\boldsymbol{\tau}_j(x') - \boldsymbol{\tau}_l(x')]\right)\right\}_{\boldsymbol{\tau}_i = 0}. \quad (3.5)$$

Если теперь совместить точки $\rho_{2k-1} = \rho_{2k}$, то функция Γ_{2n} перейдет в функцию $\langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_3) \rangle \ldots I(x, \rho_{2n-1}) \rangle$, описывающую корреляционные характеристики интенсивности волны. Если же теперь положить все $\rho_i = \rho$, то функция $\Gamma_{2n}(x, \rho) = \langle I^n(x, \rho) \rangle$ будет описывать n-ый момент интенсивности волны.

Прежде чем исследовать асимптотику функций Γ_{2n} для случая флуктуирующих параметров, рассмотрим более простую задачу о флуктуациях поля за случайным фазовым экраном. Аналогия между этими задачами уже отмечалась в работе [104]. Однако при использовании континуальной записи решений для Γ_{2n} эта анало-

гия, по существу, переходит в единый для обеих задач метод получения асимптотики решений в области сильных флуктуаций.

3.1. Случайный фазовый экран. Пусть имеется слой неоднородной среды, толщина Δx которого настолько мала, что волна при прохождении через слой приобретает только случайный набег фазы

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k}{2}\int\limits_0^{\Delta x} d\xi\, \varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho}) \tag{3.6}$$

и не меняет амплитуды. Будем считать, что $\varepsilon(\xi, \boldsymbol{\rho})$ — гауссовское, дельта-коррелированное по x поле, описываемое формулой (8.2.4). После прохождения неоднородного слоя волна распространяется в однородной среде, и ее распространение описывается уравнением, которое получается из (8.1.2) при $\varepsilon = 0$. Решение этой задачи дается формулами

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) = \exp\left\{i\frac{k}{2k}\Delta\right\}\exp\{iS(\boldsymbol{\rho})\} = \tag{3.7}$$

$$= \frac{k}{2\pi i x}\int d\boldsymbol{v}\exp\left\{i\frac{k}{2x}\boldsymbol{v}^2 + iS(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{v})\right\}, \tag{3.7'}$$

аналогичными приведенным выше формулам (1.8), (1.9).

Рассмотрим функцию $\Gamma_{2n}(x, \{\boldsymbol{\rho}\})$. Подставляя (3.7) в (3.1) и усредняя, легко получаем формулу

$$\Gamma_{2n}(x, \{\boldsymbol{\rho}\}) = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^{2n}\int\ldots\int d\boldsymbol{v}_1\ldots d\boldsymbol{v}_{2n}\exp\left\{i\frac{k}{2x}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}\boldsymbol{v}_j^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2\Delta x}{8}\sum_{j,\,l=1}^{2n}(-1)^{j+l+1}D(\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_l + \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_l)\right\}. \tag{3.8}$$

Эта формула является аналогом (3.4). Рассмотрим подробнее случай $n = 2$ при попарно совмещенных точках наблюдения $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}'$, $\boldsymbol{\rho}_3 = \boldsymbol{\rho}_4 = \boldsymbol{\rho}''$, $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'' = \boldsymbol{\rho}$. Тогда

$$\Gamma_4(x, \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'', \boldsymbol{\rho}'') = \langle I(x, \boldsymbol{\rho}')\, I(x, \boldsymbol{\rho}'')\rangle$$

— ковариация интенсивностей $I = |u|^2$. Если в (3.8) (при $n = 2$) ввести новые переменные интегрирования

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{r}_3,\ \frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}{2} = \boldsymbol{r},$$

то интегрирование по $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_3$ можно выполнить и получить в результате формулу

$$\langle I(x, \boldsymbol{\rho}')\, I(x, \boldsymbol{\rho}'')\rangle =$$

$$= \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2\int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2\exp\left\{i\frac{k}{x}\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{\rho}) - \frac{k^2\Delta x}{4}F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\right\}, \tag{3.9}$$

где $F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ определяется из (8.2.13′). Интеграл (3.9) подробно исследовался (в том числе и численными методами) во многих

работах (см. обзор [104]). Рассмотрим его асимптотику при $x \to \infty$.

Сомножитель $\exp\{-k^2\Delta x\, F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)/4\} \equiv f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ обращается в единицу при $\boldsymbol{r}_1 = 0$ и при $\boldsymbol{r}_2 = 0$. Уравнение

$$\frac{1}{4} k^2 \Delta x\, F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = 1 \tag{3.10}$$

определяет границу области, вне которой $f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ экспоненциально мало. Так как F состоит из линейной комбинации функций D, а уравнение $\frac{1}{4}k^2\Delta x\, D(\rho_k) = 1$ (см. (8.2.20)) определяет радиус когерентности поля, то ясно, что одним из характерных размеров этой области также будет ρ_k.

На рис. 19 приведены кривые (3.10) для функции $D(\boldsymbol{r}) = pC_\varepsilon^2 r^{5/3}$, появляющейся в задаче о распространении волн в

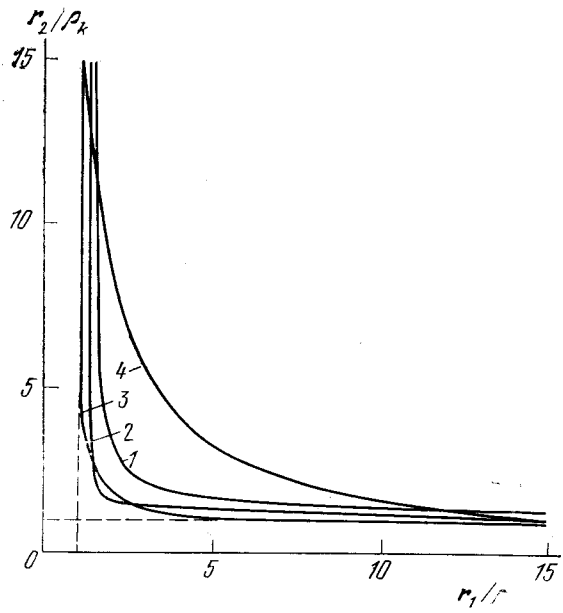

Рис. 19. Кривые $^1/_4 k^2 \Delta x\, F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = 1$ для случаев: *1* — $D(\boldsymbol{r}) \sim r^{5/3}$, $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$; *2* — $D(\boldsymbol{r}) \sim r^{5/3}$, $\boldsymbol{r}_1 \parallel \boldsymbol{r}_2$; *3* — $D(\boldsymbol{r}) \sim [1 - \exp(-r^2/2l)]$, $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$, $\rho_k/2l^2 = 0{,}1$. Кривая *4* соответствует френелевскому множителю при $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = 16\rho_k^2$. Штриховые линии — изолинии $r_1 = \rho_k$, $r_2 = \rho_k$.

турбулентной среде. Кривые построены на плоскости $r_1 = |\boldsymbol{r}_1|$, $r_2 = |\boldsymbol{r}_2|$ для двух предельных случаев взаимной ориентации векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$: $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = 0$ и $[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = 0$. Все остальные кривые располагаются между приведенными на рисунке. В областях $r_1 \gg r_2$ и $r_2 \gg r_1$ кривые (3.10) асимптотически приближаются к пря-

мым, являющимся решениями уравнений $\frac{1}{2}\ k^2\Delta x\, D(\boldsymbol{r}_2) = 1$ и $\frac{1}{2} k\,\Delta x\, D(\boldsymbol{r}_1) = 1$. Это связано с тем, что комбинация

$$\Omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = D(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) + D(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - 2D(\boldsymbol{r}_1) \qquad (3.11)$$

обращается в нуль при $\boldsymbol{r}_1 \gg \boldsymbol{r}_2$, и в уравнении (3.10) в этой области остается только первое слагаемое. Такой вид области, ограничиваемой кривой $\frac{1}{4}\ k^2\Delta x F = 1$, практически не зависит от выбора корреляционной функции B_ε. Если, например, построить эту область для функции $B_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\{-r^2/2l^2\}$, то мы получим (при $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = 0$) кривую *3* на рис. 19, имеющую такой же характер, что и для степенной функции D.

Сомножитель $f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \exp\left\{i\frac{k}{x}\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2 - \rho)\right\}$ имеет характерный масштаб $\rho_F = (x/k)^{1/2}$ (радиус первой зоны Френеля). Поэтому, если

$$(x/k)^{1/2} \gg \rho_k, \qquad (3.12)$$

то внутри центральной части области, ограниченной кривой (3.10), функция f_2 меняется слабо, т. е. здесь обрезающим множителем является функция f_1. Однако при $r_{1,2} > \pi x/2k\rho_F$ период осцилляций дифракционного множителя становится меньшим, чем ρ_k (см. рис. 19), поэтому на периферии этой области существенным множителем становится f_2. Отсюда длина полосы на рис. 19, существенной для интегрирования, определяется множителем f_2 и имеет порядок $x/k\rho_k$. В связи с этим в задаче появляется второй характерный масштаб

$$r_0 = x/k\rho_k. \qquad (3.13)$$

Таким образом, можно считать, что при выполнении условия (3.12) существенной в интеграле (3.9) является область, примыкающая к гиперплоскостям $\boldsymbol{r}_1 = 0$ и $\boldsymbol{r}_2 = 0$. При этом, чем больше параметр $r_0/\rho_k = x/k\rho_k^2$, тем уже эта область. Поэтому интеграл (3.9) можно разбить на два, один из которых распространен на область $r_1 \lesssim \rho_k$, а другой — на область $r_2 \lesssim \rho_k$. Но в первой области интегрирования можно использовать разложение

$$f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2} D(\boldsymbol{r}_1) + \frac{k^2\Delta x}{4}\Omega(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)\right\} \approx$$
$$\approx \exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2} D(\boldsymbol{r}_1)\right\}\left\{1 + \frac{k^2\Delta x}{4}\Omega(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) + \ldots\right\}, \qquad (3.14)$$

так как изолинии функции f_1 здесь весьма близки к изолиниям функции $\exp\{-\frac{1}{2}k^2\Delta x\, D(\boldsymbol{r}_1)\}$, изображенным на рис. 19 штриховыми линиями. Точно так же в области $r_2 \lesssim \rho_k$ можно положить

$$f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \approx \exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2} D(\boldsymbol{r}_2)\right\}\left\{1 + \frac{k^2\Delta x}{4}\Omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) + \ldots\right\}. \qquad (3.15)$$

Так как множители $\exp\{-\frac{1}{2}k^2\Delta x\, D(\boldsymbol{r}_{1,2})\}$ быстро убывают вне полос $r_{1,2} < \rho_k$, каждый из интегралов теперь можно распространить на бесконечную область. В результате получаем асимптотическую формулу

$$\langle I(x,\boldsymbol{\rho}')\, I(x,\boldsymbol{\rho}'')\rangle = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2 \exp\left\{i\frac{k}{x}\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{\rho})\right\}\times$$
$$\times\left\{\exp\left[-\frac{k\Delta x}{2}D(\boldsymbol{r}_1)\right]\left[1+\frac{k^2\Delta x}{4}\Omega(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)+\ldots\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{k^2\Delta x}{2}D(\boldsymbol{r}_2)\right]\left[1+\frac{k^2\Delta x}{4}\Omega(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+\ldots\right]\right\}. \qquad (3.16)$$

Заметим, что при этом дважды учитывается область интегрирования, образуемая пересечением полос $r_1 < \rho_k$ и $r_2 < \rho_k$. Учитываемый дважды вклад можно оценить как

$$\delta \approx \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2 \exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2}[D(\boldsymbol{r}_1)+D(\boldsymbol{r}_2)]\right\},$$

и он оказывается величиной более высокого порядка малости (по малому параметру $\rho_k/r_0 = k\rho_k^2/x$), чем основной учтенный член, а также меньшим нескольких следующих членов. Тем не менее пренебрежение этим слагаемым не позволяет получить еще более высокие члены асимптотического разложения.

Если использовать спектральное разложение (3.3) функции D в формуле (3.11) для Ω, то из (3.16) будем иметь

$$\langle I(x,\boldsymbol{\rho}')\, I(x,\boldsymbol{\rho}'')\rangle = 1+\exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2}D(\boldsymbol{\rho})\right\}+$$
$$+\pi k^2\Delta x\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\left[1-\cos\frac{\varkappa^2 x}{k}\right]\exp\left\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}-\frac{k^2\Delta x}{2}D\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}x}{k}\right)\right\}+$$
$$+\pi k^2\Delta x\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\left[1-\cos\left(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}-\frac{\varkappa^2 x}{k}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2}D\left(\boldsymbol{\rho}-\frac{\boldsymbol{\varkappa}x}{k}\right)\right\}+\ldots \qquad (3.17)$$

Если положить здесь $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}''=0$ и учесть, что $\varkappa \lesssim r_0^{-1}$, то для среднего квадрата относительных флуктуаций интенсивности получаем

$$\beta^2 = 1+\pi x^2\Delta x\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\,\varkappa^4\exp\left\{-\frac{k^2\Delta x}{2}D\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}x}{k}\right)\right\}+\ldots \qquad (3.18)$$

Пусть флуктуации ε в неоднородном слое вызываются турбулентностью, так что $\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}) = AC_\varepsilon^2\varkappa^{-11/3}$. Тогда (3.18) приводит к известному результату [104]:

$$\beta^2 = 1+0{,}429\,\beta_0^{-4/5}+\ldots, \qquad (3.19)$$

где $\beta_0^2 = 0{,}563C_\varepsilon^2k^{7/6}x^{5/6}\Delta x$ — средний квадрат относительных флуктуаций интенсивности, рассчитанный по методу плавных возмущений (см. (8.4.12)). Приведенная выше ошибка δ оказы-

вается при этом порядка $(\beta_0^2)^{-12/5}$, т. е. при $\beta_0^2 \gg 1$ мала по сравнению с учтенным в (3.19) слагаемым.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию интенсивности, которая, согласно (3.17), складывается из трех составляющих:

$$B_I(x, \rho) = \langle I(x, \rho')\, I(x, \rho'')\rangle - 1 = B_I^{(1)}(x, \rho) + B_I^{(2)}(x, \rho) + B_I^{(3)}(x, \rho).$$

Наибольшая из них равна

$$B_I^{(1)}(x, \rho) = |\Gamma_2(x, \rho)|^2 = \exp\left\{-\frac{1}{2} k^2 \Delta x\, D(\rho)\right\}.$$

Вычисление слагаемых $B_I^{(2)}$ и $B_I^{(3)}$ дает

$$B_I^{(2)}(x, \rho) = \begin{cases} (\beta^2 - 1)/2 & \text{при } \rho \ll r_0, \quad (3.20\text{а}) \\ -x^2 \Delta x\, \Delta^2 D(\rho)/4 & \text{при } \rho \gg r_0. \quad (3.20\text{б}) \end{cases}$$

$$B_I^{(3)}(x, \rho) = (\beta^2 - 1)/2 \quad \text{при } \rho \ll \rho_k, \quad (3.20\text{в})$$

$$B_I^{(3)}(x, \rho) = \frac{\pi^2}{2} k^2 \Delta x\, \Phi_\varepsilon\left(\frac{k\rho}{x}\right) \rho^2 \times$$

$$\times \int_0^\infty d\varkappa\, \varkappa^3 \exp\left\{-\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\varkappa x}{k}\right)\right\} \text{ при}$$

$$\rho_k \ll \rho \ll r_0. \quad (3.20\text{г})$$

Масштабом функции $B_I^{(3)}(x, \rho)$ является радиус когерентности ρ_k. Схематический вид функции $B_I(x, \rho)$ приведен на рис. 20.

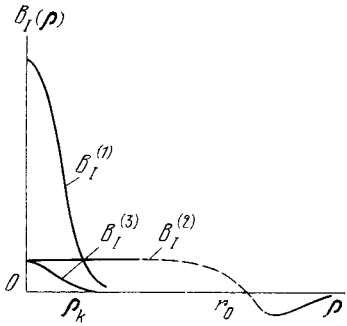

Рис. 20. Схематический вид корреляционной функции флуктуаций интенсивности $B_I(x, \rho)$ при фиксированном x.

Изложенные соображения легко обобщаются на более высокие моменты Γ_{2n}. При этом мы ограничимся исследованием $\langle I^n\rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Формула (3.8) в этом случае имеет вид

$$\langle I^n\rangle = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^{2n} \int dv_1 \ldots dv_{2n} \times$$

$$\times \exp\left\{i \frac{k}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} v_j^2 - F(v_1, \ldots, v_{2n})\right\}, \quad (3.21)$$

где

$$F = \frac{1}{8} k^2 \Delta x \sum_{j,\, l=1}^{2n} (-1)^{j+l-1} D(v_j - v_l). \quad (3.22)$$

Функция F связана со случайными набегами фазы $S(v_i)$, определяемыми формулой (3.6), соотношением

$$F = \frac{1}{2} \left\langle \left[\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} S(v_j)\right]^2 \right\rangle \geqslant 0.$$

Отсюда ясно, что если все нечетные точки v_{2l+1} совпадают попарно с какими-либо четными точками, то положительные и отрицательные набеги фаз компенсируются и F обращается в нуль. Поэтому становится очевидным, что при $(x/k)^{1/2} \gg \rho_k$ основной вклад в $\langle I^n \rangle$ будут давать те области, где происходит такая компенсация. Нетрудно подсчитать, что число таких областей равно $n!$. Тогда, заменяя (3.21) на умноженный на $n!$ интеграл лишь по одной из этих областей A_1, в которой

$$|v_1 - v_2| \sim |v_3 - v_4| \sim \ldots \sim |v_{2n-1} - v_{2n}| < \rho_k,$$

получим

$$\langle I^n \rangle \approx n! \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^{2n} \int\limits_{A_1} dv_1 \ldots dv_n \exp\left\{i \frac{k}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} v_j^2 - F\right\}. \tag{3.23}$$

Убывание подынтегрального выражения по каждой из переменных $v_1 - v_2$, $v_3 - v_4$ и т. д. обеспечивается соответствующим слагаемым из (3.22):

$$\frac{1}{8} k^2 \Delta x \left[D(v_1 - v_2) + D(v_2 - v_1)\right],$$

$$\frac{1}{8} k^2 \Delta x \left[D(v_3 - v_4) + D(v_4 - v_3)\right]$$

и т. д. Эти слагаемые следует оставить в показателе экспоненты, а экспоненту от остальных слагаемых, как и в рассмотренном выше случае $n = 2$, следует разложить в ряд:

$$\langle I^n \rangle = n! \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^{2n} \int\limits_{A_1} dv_1 \ldots dv_{2n} \exp\left\{i \frac{k}{2x} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m-1} v_m^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2}{4} \Delta x \sum_{m=1}^{n} D(v_{2m-1} - v_{2m})\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j=1}^{2n'} \sum_{l=1}^{2n'} (-1)^{j+l} D(v_j - v_l) + \ldots\right\}. \tag{3.24}$$

Штрихи у знаков сумм означают, что из них выброшены члены, вошедшие в экспоненту. В формуле (3.24) интегрирование можно распространить на все пространство, так как вне области A_1 подынтегральная функция пренебрежимо мала. С учетом этого многократный интеграл в (3.24) можно вычислить точно и получить для $\langle I^n \rangle$ формулу

$$\langle I^n \rangle = n! \left[1 + n(n-1)(\beta^2 - 1)/4\right] + \ldots, \tag{3.25}$$

в которой β^2 определяется выражением (3.18). Обсуждение полученной формулы мы проведем несколько позднее, после того как

рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной среде, поскольку получающиеся в обоих случаях результаты аналогичны.

3.2. **Случайно-неоднородная среда.** Здесь мы рассмотрим асимптотику высших моментов поля Γ_{2n}, распространяющегося в случайно-неоднородной среде. Формальное решение этой задачи дается выражениями (3.4), (3.5). От рассмотренных выше формул для фазового экрана они отличаются лишь заменой обычного интегрирования на континуальное. Рассмотрим сначала величину $\langle I(x, \rho') I(x, \rho'')\rangle$, которая получается из Γ_4 при попарном слиянии точек наблюдения $\rho_1 = \rho_2 = \rho'$, $\rho_3 = \rho_4 = \rho''$. Для плоской волны ($\Gamma_{2n}^{(0)} = 1$), используя (3.5) и вводя новые переменные, получим ($\rho = \rho' - \rho''$)

$$\langle I'I''\rangle = \exp\left\{\frac{i}{k}\int\limits_0^x d\xi\,\frac{\delta^2}{\delta \boldsymbol{r}_1 \delta \boldsymbol{r}_2}\right\}\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x dx'\left[2D\left(\rho + \int\limits_{x'}^x d\xi\,\boldsymbol{r}_1\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2D\left(\int\limits_{x'}^x d\xi\,\boldsymbol{r}_2\right) - D\left(\rho + \int\limits_{x'}^x d\xi\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)\right) - D\left(\rho + \int\limits_{x'}^x d\xi\,(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right)\right]\right\}_{\boldsymbol{r}_\alpha = 0}. \tag{3.26}$$

Формулу (3.26) можно записать и в виде, вытекающем из (3.4), однако мы будем использовать операторную форму записи. Обозначим

$$\boldsymbol{R}_1 = \rho + \int\limits_{x'}^x d\xi\,\boldsymbol{r}_1(\xi), \quad \boldsymbol{R}_2 = \int\limits_{x'}^x d\xi\,\boldsymbol{r}_2(\xi).$$

Стоящий в экспоненте функционал

$$\Psi \equiv \frac{k^2}{4}\int\limits_0^x dx'\,[2D(\boldsymbol{R}_1) + 2D(\boldsymbol{R}_2) - D(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) - D(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)]$$

неотрицателен и обращается в нуль на таких траекториях $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, для которых $\boldsymbol{R}_1 = 0$ или $\boldsymbol{R}_2 = 0$. Существенный вклад в континуальный интеграл дают траектории, лежащие в области, граница которой определяется условием $\Psi = 1$. Но для тех траекторий, у которых $\boldsymbol{R}_2$ велико по сравнению с $\boldsymbol{R}_1$,

$$2D(\boldsymbol{R}_2) - D(\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_1) - D(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1) \to 0$$

и условие $\Psi = 1$ переходит в

$$\frac{k^2}{2}\int\limits_0^x dx' D(\boldsymbol{R}_1) = 1.$$

Поэтому для этих траекторий

$$\exp\{-\Psi\} = \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\int\limits_0^x dx' D(\boldsymbol{R}_1)\right\} \times$$

$$\times\left\{1 - \frac{k^2}{4}\int\limits_0^x dx'[D(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_1)+D(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1)-2D(\boldsymbol{R}_2)]+\ldots\right\}, \tag{3.27}$$

а интегрирование можно распространить на всю область, подобно тому как это делалось для фазового экрана. Точно такую же формулу можно записать и для второй области, где $|\boldsymbol{R}_1| \gg |\boldsymbol{R}_2|$.

Если $x/k\rho_k^2 \gg 1$, то, как и в случае фазового экрана, дифракционный оператор

$$\hat{L} = \exp\left\{\frac{i}{k}\int\limits_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \boldsymbol{r}_1(\xi)\,\delta \boldsymbol{r}_2(\xi)}\right\} \tag{3.28}$$

сказывается лишь на периферии области интегрирования, где либо $|\boldsymbol{R}_1| \gg |\boldsymbol{R}_2|$, либо $|\boldsymbol{R}_2| \gg |\boldsymbol{R}_1|$.

Подставим разложения $\exp\{-\Psi\}$ в соответствующих областях в (3.26). Тогда будем иметь

$$\langle I'I''\rangle = \hat{L}\exp\left\{-\frac{k^2}{2}\int\limits_0^x dx' D\left(\boldsymbol{\rho}+\int\limits_{x'}^x d\xi\, \boldsymbol{r}_1(\xi)\right)\right\} \times$$

$$\times\left\{1+\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x dx'\left[D\left(\boldsymbol{\rho}+\int\limits_{x'}^x d\xi(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)\right)+D\left(\boldsymbol{\rho}+\int\limits_{x'}^x d\xi(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2D\left(\int\limits_{x'}^x d\xi\, \boldsymbol{r}_2\right)\right]+\ldots\right\}_{\boldsymbol{r}_i=0}+$$

$$+\hat{L}\exp\left\{-\frac{k^2}{2}\int\limits_0^x dx' D\left(\int\limits_{x'}^x d\xi\, \boldsymbol{r}_2(\xi)\right)\right\}\left\{1+\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x dx'\left[D\left(\boldsymbol{\rho}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x'}^x d\xi(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)\right)+D\left(\boldsymbol{\rho}+\int\limits_{x'}^x d\xi(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\right)-$$

$$\left.\left.-2D\left(\boldsymbol{\rho}+\int\limits_{x'}^x d\xi\, \boldsymbol{r}_1\right)\right]+\ldots\right\}_{\boldsymbol{r}_i=0}. \tag{3.29}$$

Если в предэкспоненциальных множителях использовать спектральные разложения для функций D, то можно вычислить действие оператора $\hat{L}$ в (3.29), после чего $\langle I'I''\rangle$ принимает вид

$$\langle I'I''\rangle - 1 = B_I(x,\boldsymbol{\rho}) = B_I^{(1)}(x,\boldsymbol{\rho}) + B_I^{(2)}(x,\boldsymbol{\rho}) + B_I^{(3)}(x,\boldsymbol{\rho}), \tag{3.30}$$

где

$$B_I^{(1)}(x, \rho) = \exp\left\{-\frac{1}{2}k^2 x D(\rho)\right\}, \tag{3.31}$$

$$B_I^{(2)}(x, \rho) = \pi k^2 \int^x dx' \int d\varkappa \Phi_\varepsilon(\varkappa)\left[1 - \cos\left\{\frac{\varkappa^2}{k}(x - x')\right\}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{i\varkappa\rho - \frac{k^2 x'}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\}, \tag{3.32}$$

$$B_I^{(3)}(x, \rho) = \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\varkappa \Phi_\varepsilon(\varkappa)\left[1 - \cos\left\{\varkappa\rho - \frac{\varkappa^2}{k}(x - x')\right\}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2 x'}{2} D\left[\rho - \frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\rho - \frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\}. \tag{333}$$

Полагая здесь $\rho = 0$ и учитывая первый член разложения в ряд $1 - \cos\frac{\varkappa^2}{k}(x - x')$, для $\beta^2(x) = B_I(x, 0)$ будем иметь формулу, аналогичную (3.18):

$$\beta^2(x) = 1 + \pi \int_0^x dx' (x - x')^2 \int d\varkappa \varkappa^4 \Phi_\varepsilon(\varkappa) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2 x'}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\} + \ldots \tag{3.34}$$

Выражение (3.34) остается в силе и в том случае, когда Φ_ε, D медленно меняются вдоль x. В этом случае легко перейти от (3.34) к (3.18), если считать, что $\Phi_\varepsilon = 0$ вне слоя $0 \leqslant x' \leqslant \Delta x \ll x$.

Исследование корреляционной функции $B_I(x, \rho)$ проводится аналогично рассмотренному выше случаю фазового экрана. Главный член $B_I^{(1)}$ в (3.30) представляет собой квадрат модуля функции когерентности второго порядка. Во втором слагаемом (3.32) из-за наличия множителя $\exp\left\{-\frac{1}{2}k^2 x' D\left]\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right]\right\}$ аргумент косинуса мал в большей части интегрирования по x', так что

$$B_I^{(2)}(x, \rho) = \frac{\pi}{2}\int_0^x dx' (x - x')^2 \int d\varkappa \varkappa^4 \Phi_\varepsilon(\varkappa) \times$$

$$\times \exp\left\{i\varkappa\rho - \frac{k^2 x'}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\}. \tag{3.35}$$

Так как в (3.35) $\varkappa \lesssim k\rho_k/x = 1/r_0$, имеем $\rho \ll r_0$, $e^{i\varkappa\rho} \sim 1$. Отсюда следует, что и в этом случае выполняется соотношение (3.20а). Если же $\rho \gg r_0$, то в экспоненте в (3.35) можно оставить лишь слагаемое $i\varkappa\rho$, что приводит к формуле, аналогичной (3.20б):

$$B_I^{(2)}(x, \rho) \approx -\frac{1}{12} x^3 \Delta_\rho^2 D(\rho), \quad \rho \gg r_0. \tag{3.36}$$

Слагаемое $B_I^{(3)}$ при $\rho \ll \rho_k$ равно $(\beta^2 - 1)/2$, что совпадает с (3.20в). В области расстояний $\rho_k \ll \rho \ll r_0$ легко получить выражение

$$B_I^{(3)}(x, \rho) \approx \frac{\pi k^2}{2} \rho_j \rho_l \int_0^x dx' \Phi_\varepsilon\left(\frac{k\rho}{x - x'}\right) \int d\varkappa\, \varkappa_j \varkappa_l \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2 x'}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\frac{x'' - x'}{x - x'}\rho - \frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\}, \tag{3.37}$$

аналогичное (3.20г).

Если рассмотреть случай турбулентной среды, то из (3.9) имеем [141—143]

$$\beta^2(x) = 1 + 0{,}861\,(\beta_0^2)^{-2/5} + \ldots, \tag{3.38}$$

где использовано обозначение $\beta_0^2 = 0{,}307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$ для среднего квадрата флуктуаций интенсивности, рассчитанного по методу плавных возмущений (см. (8.4.11)). Для слагаемых корреляционной функции $B_I(x, \rho)$ получаются при этом формулы, совпадающие с соответствующими результатами работ [108, 142].

Рассмотрим теперь высшие моменты $\langle I^n \rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Из формулы (3.4) ясно, что при $\rho_j = 0$ основной вклад в интеграл дают те траектории, для которых обращается в нуль функционал

$$\frac{k^2}{8} \sum_{j,\, l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x dx' D\left(\int_{x'}^{x} dx'' [v_j(x'') - v_l(x'')]\right).$$

Мы можем поступать здесь по аналогии с фазовым экраном. Выделяя одну из $n!$ существенных областей интегрирования и оставляя в показателе экспоненты из (3.5) лишь слагаемые вида

$$D\left[\int_{x'}^{x} d\xi\,(\tau_{2j+1} - \tau_{2j})\right],$$

обеспечивающие быстрое убывание подынтегрального функцис-

нала, получим

$$\langle I^n\rangle \approx n!\exp\left\{\frac{i}{2k}\sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1}\int_0^x d\xi\,\frac{\delta^2}{\delta\tau_l^2(\xi)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x dx' D\left(\int_{x'}^{x} d\xi\,[\tau_{2j-1}(\xi)-\tau_{2j}(\xi)]\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{k^2}{8}\sum_{j,\,l=1}^{2n}{}'(-1)^{j+l+1}\int_0^x dx' D\left(\int_{x'}^{x} d\xi\,[\tau_j(\xi)-\tau_l(\xi)]\right)+\ldots\right\}\Big|_{\tau_\alpha=0}. \tag{3.39}$$

Штрих у знака суммы означает, что в ней пропущены слагаемые, оставленные в экспоненте. Введем новые переменные

$$\tau_{2j-1}-\tau_{2j}=\boldsymbol{r}_j,\quad \tau_{2j-1}+\tau_{2j}=2\boldsymbol{R}_j.$$

Тогда

$$\frac{\delta^2}{\delta\tau_{2j-1}^2}-\frac{\delta^2}{\delta\tau_{2j}^2}=2\,\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{r}_j\delta\boldsymbol{R}_j}.$$

В этих переменных первое слагаемое в (3.39) имеет следующий вид:

$$J_1=n!\exp\left\{\frac{i}{k}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x d\xi\,\frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{r}_j\delta\boldsymbol{R}_j}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x dx' D\left(\int_{x'}^{x} d\xi\,\boldsymbol{r}_j(\xi)\right)\right\}_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}=0}=n!. \tag{3.40}$$

Если во втором слагаемом из (3.39) использовать спектральное разложение (3.3) функций D в предэкспоненциальном множителе, то после несложных преобразований это слагаемое запишется в виде

$$J_2=-n!\pi k^2\sum_{l,\,s=1}^{n}\int_0^x dx'\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\exp\left\{\frac{i}{k}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x d\xi\,\frac{\delta^2}{\delta\boldsymbol{r}_j\delta\boldsymbol{R}_j}\right\}\times$$

$$\times\sin\left[\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\int_{x'}^{x} d\xi\,\boldsymbol{r}_s(\xi)\right]\sin\left[\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\int_{x'}^{x} d\xi\,\boldsymbol{r}_l(\xi)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x dx'' D\left(\int_{x''}^{x} d\xi\,\boldsymbol{r}_j(\xi)\right)+\right.$$

$$\left.+i\boldsymbol{\varkappa}\int_0^x d\xi'\theta(\xi'-x')\,[\boldsymbol{R}_s(\xi')-\boldsymbol{R}_l(\xi')]\right\}_{\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}=0}. \tag{3.41}$$

Вычисляя действие операторов, в итоге получаем

$$J_2 = -n!\pi k^2 \sum_{l,\, s=1}^{n} \int_0^x dx' \int d\varkappa\, \Phi_\varepsilon(\varkappa) \times$$

$$\times \sin\left[\frac{\varkappa^2}{2k}\int_{x'}^{x} d\xi\, \theta(\xi - x')(\delta_{l,\,s} - 1)\right] \sin\left[\frac{\varkappa^2}{2k}\int_{x'}^{x} d\xi\, \theta(\xi - x')(1 - \delta_{l,s})\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x dx'' D\left(\int_{x''}^{x} d\xi\, \theta(\xi - x')\frac{\varkappa}{k}(\delta_{s,\,j} - \delta_{l,\,j})\right)\right\},$$

где $\delta_{s,j}$ — символ Кронекера. Суммирование по s, l дает

$$J_2 = n!\, n(n-1)\pi k^2 \int_0^x dx' \int d\varkappa\, \Phi_\varepsilon(\varkappa) \sin^2\left[\frac{\varkappa^2}{2k}(x - x')\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2 x'}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x')\right] - \frac{k^2}{2}\int_{x'}^{x} dx'' D\left[\frac{\varkappa}{k}(x - x'')\right]\right\}. \quad (3.42)$$

Разлагая $\sin^2\left[\frac{\varkappa^2}{2k}(x - x')\right]$ в ряд и сравнивая полученную формулу с (3.34), имеем

$$J_2 = n!\, n(n-1)(\beta^2(x) - 1)/4.$$

С учетом (3.40) получаем, что и в случае распространения волн в случайно-неоднородной среде имеет место разложение

$$\langle I^n \rangle = n!\,[1 + n(n-1)(\beta^2(x) - 1)/4 + \ldots], \quad (3.43)$$

совпадающее с (3.25) для фазового экрана; при этом, разумеется, $\beta^2(x)$ в каждом случае определяется различными формулами.

Формула (3.43) дает первые два члена асимптотического разложения $\langle I^n \rangle$ при $\beta_0^2 \to \infty$. Так как $\beta^2 \to 1$ при $\beta_0^2 \to \infty$, второе слагаемое в (3.43) мало по сравнению с первым при достаточно больших β_0^2. Лишь в том случае, когда

$$(\beta^2(x) - 1)\, n(n-1)/4 \ll 1, \quad (3.44)$$

выражение (3.43) имеет смысл. Однако при фиксированном β_0^2 всегда найдутся такие номера n, для которых условие (3.44) будет нарушаться. Поэтому формула (3.43) справедлива лишь для не слишком больших n. Если не принимать во внимание ограничение (3.44), то по моментам (3.43) можно восстановить плотность вероятностей для I

$$p(I) = \theta(I) \exp(-I)\,\{1 + (\beta^2 - 1)(1 - 2I + I^2/2)/2 + \ldots\}. \quad (3.45)$$

Из этой формулы следовало бы, что при $\beta^2 - 1 \to 0$ плотность вероятностей для I стремится к экспоненциальной, что соответст-

вует гауссовскому распределению для случайного волнового поля. Однако, в силу (3.44), это не так, и лишь низшие моменты $\langle I^n \rangle$ могут хорошо описываться распределением (3.45). Следует также отметить, что и выход на асимптотику (3.43) при $\beta_0^2 \to \infty$ может быть достаточно медленным (например, для степенной структурной функции $D(\rho) \sim \rho^{5/3}$ существенной оказывается разница скоростей роста функций $\rho^{5/3}$ и ρ^2). Отметим, что формула (3.43) другим путем была получена в работе [143].

Использование записи статистических моментов поля в виде континуального интеграла позволяет исследовать применимость так называемого метода Гюйгенса — Кирхгофа, который в настоящее время используется в ряде работ как для численных оценок [144], так и для получения аналитических выражений [145].

Метод Гюйгенса — Кирхгофа, предложенный в работе [146], основывается на записи решения задачи (8.1.2) в виде (8.1.7):

$$u(x, \rho) = \int d\rho' G(x, \rho; 0, \rho') u_0(\rho'),$$

где $u_0(\rho')$ — распределение поля в начальной плоскости $x = 0$, G — стохастическая функция Грина для уравнения (8.1.2). Функция Грина в случае отсутствия флуктуаций $\varepsilon(x, \rho)$ имеет вид

$$G|_{\varepsilon=0} = g(x, \rho; x', \rho') = \frac{k}{2\pi i (x - x')} \exp\left\{\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x - x')}\right\} (x > x').$$

Приближение, использованное в [146], состоит в том, что функцию Грина в случайно-неоднородной среде записывают в виде (8.1.10):

$$G(x, \rho; x', \rho') = \frac{k}{2\pi i (x - x')} \exp\left\{\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x - x')} + \Psi_1(x, \rho; x', \rho')\right\},$$

где функция $\Psi_1(x, \rho; x', \rho')$ — набег комплексной фазы сферической волны, распространяющейся из точки (x', ρ') в точку (x, ρ), в первом приближении по ε определяемый по формуле (8.1.11). Для случайно-неоднородных сред статистические характеристики Ψ_1 изучались в работе [147]. Отметим, что в настоящее время это приближение не обосновано.

В работе [144] метод Гюйгенса — Кирхгофа был использован для изучения статистических характеристик волновых пучков в турбулентной среде. При этом для величины Γ_4, описываемой в случае плоской волны уравнением (8.2.13′), он приводит к выражению

$$\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^4 \int d\rho_1 d\rho_2 \exp\left\{\frac{ik}{x}(\boldsymbol{r}_1 - \rho_1)(\boldsymbol{r}_2 - \rho_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi F\left(\rho_1\left(1 - \frac{\xi}{x}\right) + \boldsymbol{r}_1 \frac{\xi}{x};\ \rho_2\left(1 - \frac{\xi}{x}\right) + \boldsymbol{r}_2 \frac{\xi}{x}\right)\right\}, \quad (3.46)$$

где $F(\boldsymbol{R}_1; \boldsymbol{R}_2)$ определяется формулой (8.2.13′).

Приближение (3.46) не применимо в области слабых флуктуаций, где оно дает ошибку того же порядка величины, что и основной член. С другой стороны, как было видно из предыдущего раздела, приближение (3.46) в области сильных флуктуаций дает качественно верный результат, но с ошибкой порядка основного члена. Приближение (3.46) могло бы оказаться полезным для промежуточной области $\beta_0^2 \approx 1$, где не справедливы ни теория возмущений, ни асимптотические решения. Однако так как и при $\beta_0^2 \ll 1$, и при $\beta_0^2 \gg 1$ приближение (3.46) дает не малую ошибку, то нет оснований считать, что в области $\beta_0^2 \sim 1$ точность его будет удовлетворительной, хотя, по всей видимости, это приближение дает правильную качественную картину.

В заключение отметим, что представление поля $u(x, \boldsymbol{\rho})$ в виде континуального интеграла позволяет исследовать и вопрос о пределах применимости диффузионного марковского приближения для флуктуаций интенсивности [148]. Результат оказывается следующим. Все условия применимости марковского приближения для вычисления величины $\langle I^n \rangle$ совпадают с условиями применимости марковского приближения для величины $\langle I^2 \rangle$. Иначе говоря, марковское приближение не изменяет вида распределения вероятностей для интенсивности.

Для турбулентных пульсаций температуры в области слабых флуктуаций марковское приближение справедливо при выполнении неравенств

$$\lambda \ll (\lambda x)^{1/2} \ll x, \tag{3.47}$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В области же сильных флуктуаций условием применимости марковского приближения является условие

$$\lambda \ll \rho_k \ll r_0 \ll x, \tag{3.48}$$

где ρ_k и r_0 определяются формулами (8.2.20) и (3.13). Неравенства (3.47), (3.48) имеют простой физический смысл. Пока в задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями наименьшим из всех продольных масштабов является радиус корреляции ε (его роль для турбулентных пульсаций температуры играет размер зоны Френеля), справедливо марковское приближение. При движении в область сильных флуктуаций появляется продольный масштаб $\sim \rho_k (kx)^{1/2}$, который постепенно уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра β_0^2 он может стать меньше радиуса корреляции ε. При возникновении такой ситуации уже нельзя пользоваться марковским приближением.

Неравенства (3.47), (3.48) можно рассматривать и как ограничения снизу и сверху на величину масштаба функции корреляции интенсивности. При этом марковское приближение справедливо лишь в том случае, когда любые масштабы, возникающие в задаче, остаются малыми по сравнению с длиной трассы.

Глава 10

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ)

Рассмотрим теперь статистическое описание волны в случайно-неоднородных средах в приближении геометрической оптики (акустики). Исходными уравнениями являются уравнения для интенсивности (8.1.24), фазы волны (8.1.36) и уравнение для лучей (8.1.39). Зная решение уравнения (8.1.39) — траекторию луча, можно, непосредственно интегрируя, определить как интенсивность волны (формула (8.1.33)), так и фазу (формула (8.1.38)). Поэтому основной задачей в геометрооптическом приближении является задача о диффузии лучей в случайно-неоднородной среде, решению которой посвящено большое количество работ (см., например, [116, 149—152]). Ниже мы будем следовать работе [15].

§ 1. Диффузия лучей в случайно-неоднородных средах

Обычно в качестве переменной, описывающей поведение лучей, используется длина луча l. Принимая l за независимую переменную, можно записать уравнения лучей в форме

$$\frac{dr_i(l)}{dl} = \tau_i(l), \quad \frac{d\tau_i(l)}{dl} = (\delta_{ij} - \tau_i\tau_j)\frac{\partial\mu(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} \tag{1.1}$$

$$(i = 1, 2, 3; \ |\tau| = 1),$$

где $\mu = \ln n$, n — показатель преломления. Такая запись уравнения лучей используется, например, в книгах [153].

Будем считать, что μ является гауссовским однородным и изотропным случайным полем со средним значением, равным нулю.

Если ввести шестимерные векторы $\xi = \{\boldsymbol{r}, \tau\}$, $\boldsymbol{v} = \{\tau, 0\}$ и $\boldsymbol{f} = \{0, \boldsymbol{a}\}$, где $a_i = (\delta_{ik} - \tau_i\tau_k)\frac{\partial\mu(\boldsymbol{r})}{\partial r_k}$, то систему уравнений (1.1) можно записать в виде, аналогичном системе (3.1.1), — условия а), б) выполнены, а что касается перехода к аппроксимации корреляционной функции для $\boldsymbol{f}$ при помощи δ-функции (формула (3.1.4), то здесь мы сталкиваемся с непреодолимым затруднением. Дело в том, что $a_i = a_i(\boldsymbol{r}, \tau) \equiv a_i(\xi)$ не зависит от l (которое в данном случае играет роль времени). Формально можно считать, что функция $B_{kl}(\xi, \xi', l, l')$ (не зависящая в данном случае от l, l') имеет по переменной $(l - l')$ бесконечный интервал корреляции,

ибо при сколь угодно больших $(l - l')$, но фиксированных ξ, ξ' эта функция не убывает. Таким образом, записать УЭФ, соответствующее динамической системе (1.1), не удается.

Можно, однако, записать уравнения лучей, взяв за независимую переменную координату z. Если уравнение луча искать в форме $\boldsymbol{R}_\perp = \boldsymbol{R}_\perp(z)$, где $\boldsymbol{R}_\perp = \{x, y\}$ — поперечное смещение, то вместо (1.1) будем иметь динамическую систему

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{R}_\perp(z) = \frac{\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}}, \qquad \frac{d}{dz}\boldsymbol{\tau}_\perp(z) = \frac{\boldsymbol{a}_\perp(\boldsymbol{R}_\perp, \boldsymbol{\tau}_\perp; z)}{\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\tau}_\perp = \{\tau_x, \tau_y\}$, $\boldsymbol{a}_\perp = \{a_1, a_2\}$. Заметим, однако, что в этой форме уравнение лучей можно использовать лишь до первой точки поворота, где обращается в нуль знаменатель $\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}$. Отсюда вытекает, что в статистической задаче уравнения (1.2) можно использовать лишь в области, где мала вероятность отрицательных τ_z, т. е. в области малых угловых отклонений луча ($\tau_z \sim 1$). В этом случае вместо (1.2) мы можем написать приближенную систему уравнений для лучей в малоугловом приближении [15]:

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{R}_\perp(z) = \boldsymbol{\tau}_\perp(z), \qquad \frac{d}{dz}\boldsymbol{\tau}_\perp(z) = \nabla_\perp \mu(\boldsymbol{R}_\perp, z). \tag{1.3}$$

Уравнения для лучей (1.3) совпадают с уравнением (8.1.39), описывающим распространение волны в малоугловом приближении в приближении геометрической оптики, если учесть, что $n^2 = 1 + \varepsilon$. Для системы (1.3) независимая переменная z уже входит в число аргументов f, и поэтому здесь можно перейти к приближению диффузионного случайного процесса. Соответствующее УЭФ принимает вид (координата z играет роль времени)

$$\frac{\partial P_z(\boldsymbol{R}_\perp, \boldsymbol{\tau}_\perp)}{\partial z} + \boldsymbol{\tau}_\perp \frac{\partial P_z}{\partial \boldsymbol{R}_\perp} = D\frac{\partial^2 P_z}{\partial \boldsymbol{\tau}_\perp^2}, \tag{1.4}$$

где D — коэффициент диффузии, который возникает при вычислении F_{kl} и для модели статистически однородных и изотропных флуктуаций μ равен

$$D = \pi^2 \int_0^\infty d\varkappa\, \varkappa^3 \Phi(\varkappa) \tag{1.5}$$

($\Phi(\varkappa)$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции μ).

Уравнение (1.4) легко решается, и его решение, соответствующее начальному условию

$$P_0(\boldsymbol{R}_\perp, \boldsymbol{\tau}_\perp) = \delta(\boldsymbol{R}_\perp)\,\delta(\boldsymbol{\tau}_\perp), \tag{1.6}$$

имеет вид гауссовского распределения с моментами

$$\langle R_{\perp i}(z) R_{\perp k}(z)\rangle = \frac{2}{3} D\delta_{ik} z^3, \quad \langle R_{\perp i}(z)\tau_{\perp k}(z)\rangle = D\delta_{ik} z^2, \tag{1.7}$$
$$\langle \tau_{\perp i}(z)\tau_{\perp k}(z)\rangle = 2D\delta_{ik} z.$$

На основе уравнений (1.3) легко получить и продольную корреляционную функцию смещений луча. Умножим (1.3) на $\boldsymbol{R}_\perp(z')$, где $z' < z$, и усредним. В результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\langle \boldsymbol{R}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle = \langle \boldsymbol{\tau}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle, \\ &\frac{d}{dz}\langle \boldsymbol{\tau}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle = \langle \boldsymbol{R}_\perp(z')\,\nabla_\perp\mu(\boldsymbol{R}_\perp, z)\rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Так как приближению диффузионного случайного процесса соответствует модель дельта-коррелированных по z неоднородностей, то $\boldsymbol{R}_\perp(z')$ не коррелировано с «последующими» значениями $\nabla_\perp\mu(\boldsymbol{R}_\perp, z)$, т. е. $\langle \boldsymbol{R}_\perp(z')\nabla_\perp\mu(\boldsymbol{R}_\perp(z), z\rangle = 0$ при $z' < z$. Отсюда следует, что

$$\langle \boldsymbol{\tau}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle = \langle \boldsymbol{\tau}_\perp(z')\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle = 2Dz'^2.$$

Подставляя это значение в первое из уравнений (1.8) и решая его при начальном условии $\langle \boldsymbol{R}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle_{z=z'} = \frac{4}{3}Dz'^3$, получаем

$$\langle \boldsymbol{R}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle = 2Dz'^2\left(z - \frac{1}{3}z'\right), \tag{1.9}$$

$$\frac{\langle \boldsymbol{R}_\perp(z)\,\boldsymbol{R}_\perp(z')\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{R}_\perp^2(z)\rangle\langle \boldsymbol{R}_\perp^2(z')\rangle}} = \left(1 + \frac{3}{2}\xi\right)(1+\xi)^{-3/2}, \quad \xi = \frac{|z - z'|}{z_{\min}}.$$

Рассмотрим теперь задачу о совместной диффузии двух лучей. В этом случае мы имеем динамическую систему восьмого порядка

$$\frac{d\boldsymbol{R}_{\perp i}}{dz} = \boldsymbol{\tau}_{\perp i}, \quad \frac{d}{dz}\boldsymbol{\tau}_{\perp i} = \frac{\partial\mu(\boldsymbol{R}_{\perp i}, z)}{\partial \boldsymbol{R}_{\perp i}} \tag{1.10}$$

($i = 1, 2$ — номера лучей) и приходим к УЭФ, описывающему относительную диффузию лучей:

$$\begin{aligned} &P_z(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{l}) = \langle \delta(\boldsymbol{R}_{\perp 1} - \boldsymbol{R}_{\perp 2} - \boldsymbol{\rho})\,\delta(\boldsymbol{\tau}_{\perp 1} - \boldsymbol{\tau}_{\perp 2} - \boldsymbol{l})\rangle, \\ &\frac{\partial P_z}{\partial z} + \boldsymbol{l}\frac{\partial P_z}{\partial \boldsymbol{\rho}} = D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha \partial l_\beta}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi\int d\boldsymbol{\varkappa}\,[1 - \cos\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}]\,\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\Phi(\boldsymbol{\varkappa}).$$

Если l_0 — радиус корреляции для градиентов показателя преломления, то при $\rho \gg l_0$ $D_{\alpha\beta} = 2D\delta_{\alpha\beta}$. Это соотношение означает, что при больших по сравнению с l_0 начальных расстояниях между лучами их относительная диффузия происходит с удвоенным коэффициентом диффузии, что соответствует независимой диффузии каждого луча. Совместное распределение вероятностей в этом случае можно считать гауссовским. В общем же случае уравнение (1.11) решить не удается. Ясно лишь, что при переменном коэф-

фициенте диффузии решение его не является гауссовским распределением.

Случай $\rho \ll l_0$ допускает более полный анализ. Разлагая в (1.11) функцию $1 - \cos \varkappa\rho$ в ряд, получаем

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}) = \pi\rho_i\rho_j \int d\varkappa\, \varkappa_i\varkappa_j\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\Phi(\varkappa).$$

Ясно, что в статистически изотропном случае

$$\int d\varkappa\, \varkappa_i\varkappa_j\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\Phi(\varkappa) = B(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}).$$

Свертывая это равенство по парам индексов i, j и α, β, найдем, что

$$B = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty d\varkappa\, \varkappa^5\Phi(\varkappa)$$

и

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}) = \pi B(\rho^2\delta_{\alpha\beta} + 2\rho_\alpha\rho_\beta). \tag{1.12}$$

Заметим, что величина B определяет в приближении геометрической оптики амплитудные флуктуации (см. следующий параграф). Это не является неожиданным, ибо амплитудные флуктуации связаны с изменениями сечения лучевой трубки, т. е. с относительными смещениями лучей.

Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ можно использовать в форме (1.12) лишь в том случае, когда средний квадрат расстояния между лучами мал по сравнению с l_0^2.

Если уравнение (1.11) с коэффициентами (1.12), т. е. уравнение

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + l_\alpha\frac{\partial P_z}{\partial\rho_\alpha} = \pi B(\rho^2\delta_{\alpha\beta} + 2\rho_\alpha\rho_\beta)\frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha\partial l_\beta} \tag{1.13}$$

умножить на $\boldsymbol{l}^2$ и проинтегрировать по всем $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{l}$, то после интегрирования по частям получим уравнение

$$\frac{d}{dz}\langle\boldsymbol{l}^2(z)\rangle = 8\pi B\langle\boldsymbol{\rho}^2(z)\rangle. \tag{1.14}$$

Умножая уравнение (1.13) сначала на $\boldsymbol{\rho}^2$, а затем на $\boldsymbol{\rho l}$, получим таким же образом еще пару уравнений:

$$\frac{d}{dz}\langle\boldsymbol{\rho}^2(z)\rangle = 2\langle\boldsymbol{\rho l}\rangle, \quad \frac{d}{dz}\langle\boldsymbol{\rho}(z)\boldsymbol{l}(z)\rangle = \langle\boldsymbol{l}^2(z)\rangle. \tag{1.14'}$$

Уравнения (1.14), (1.14′) образуют замкнутую систему, которую легко решить. Из решения этой системы следует, что если существует такой интервал значений z, на котором $\alpha z \gg 1$ ($\alpha = (16\pi B)^{1/3}$), но все еще $\rho_0^2\exp\{\alpha z\} \ll l_0^2$ (он всегда существует для достаточно малых ρ_0 — начальных расстояний между лучами), то в этой области происходит экспоненциальный рост $\langle\boldsymbol{\rho}^2\rangle$, $\langle\boldsymbol{\rho l}\rangle$,

$\langle I^2 \rangle$. Заметим, что начало этой области экспоненциального роста, определяемое условием $\alpha z \sim 1$, совпадает с началом области сильных флуктуаций интенсивности, так как $\alpha z \sim \sigma_I^{2/3} = \langle [\ln (I/I_0)]^2 \rangle^{1/3}$.

Выше мы рассматривали задачи о диффузии одного и двух лучей. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу о диффузии любого конечного числа лучей. Отметим, что в этом случае имеется специфический статистический интеграл движения.

Рассмотрим задачу о диффузии N лучей. Динамическая система описывается уравнениями

$$\frac{d\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)}{dz} = \boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z)}{dz} = \nabla_{\perp i}\mu(\boldsymbol{R}_{\perp i}, z) = i\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\boldsymbol{\varkappa}\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)\},$$

$$i = 1, \ldots, N \qquad (1.10')$$

$$(\mu(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d\boldsymbol{\varkappa}\,\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}\}),$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{R}_{\perp i}(0) = \boldsymbol{R}^0_{\perp i}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\perp i}(0) = 0.$$

Поле $\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)$, как и ранее, предполагается гауссовским однородным случайным полем, дельта-коррелированным вдоль оси z, т. е. корреляционная функция поля $\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)$ имеет вид

$$\langle \mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\,\mu(\boldsymbol{\varkappa}', z')\rangle = 2\delta(\boldsymbol{\varkappa} + \boldsymbol{\varkappa}')\,\delta(z - z')\,\Phi(\boldsymbol{\varkappa}),$$

где, как и ранее, $\Phi(\boldsymbol{\varkappa})$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции $\mu(\boldsymbol{r})$.

Рассмотрим векторы, направленные вдоль оси z:

$$\boldsymbol{A}_{ik}(z) = [\boldsymbol{R}_{\perp i}(z) \times \boldsymbol{R}_{\perp k}(z)], \quad \boldsymbol{B}_{ik}(z) = [\boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z) \times \boldsymbol{R}_{\perp k}(z)],$$

$$\boldsymbol{C}_{ik}(z) = [\boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z) \times \boldsymbol{\tau}_{\perp k}(z)] \quad (i, k = 1, \ldots, N).$$

С помощью системы уравнений (1.10′) для этих величин получаем

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{A}_{ik}(z) = \boldsymbol{B}_{ik}(z) - \boldsymbol{B}_{ki}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{B}_{ik}(z) = \boldsymbol{C}_{ik}(z) + i\int d\boldsymbol{\varkappa}\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)\}[\boldsymbol{\varkappa} \times \boldsymbol{R}_{\perp k}(z)], \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{C}_{ik}(z) = i\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\{\exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)\}[\boldsymbol{\varkappa} \times \boldsymbol{\tau}_{\perp k}(z)] +$$

$$+ \exp\{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}_{\perp k}(z)\}[\boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z) \times \boldsymbol{\varkappa}]\}.$$

Усредним эту систему уравнений. Для расщепления корреляций воспользуемся формулой (2.3.6′), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\langle \mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\,R[\mu]\rangle = \Phi(\boldsymbol{\varkappa})\left\langle \frac{\delta R[\mu]}{\delta\mu(-\boldsymbol{\varkappa}, z)}\right\rangle.$$

Учитывая, далее, соотношения

$$\frac{\delta \boldsymbol{R}_{\perp i}(z)}{\delta\mu(-\varkappa, z)} = 0, \quad \frac{\delta \boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z)}{\delta\mu(-\varkappa, z)} = -i\varkappa \exp\{-i\varkappa \boldsymbol{R}_{\perp i}(z)\},$$

вытекающие из характера динамической системы (1.10′), усредненную систему уравнений (1.15) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz}\langle \boldsymbol{A}_{ik}(z)\rangle = \langle \boldsymbol{B}_{ik}(z)\rangle - \langle \boldsymbol{B}_{ki}(z)\rangle, \\ \frac{d}{dz}\langle \boldsymbol{B}_{ik}(z)\rangle = \langle \boldsymbol{C}_{ik}(z)\rangle, \quad \frac{d}{dz}\langle \boldsymbol{C}_{ik}(z)\rangle = 0. \end{gathered} \tag{1.15′}$$

Решение (1.15′) с учетом начальных данных имеет вид

$$\begin{gathered} \langle \boldsymbol{B}_{ik}(z)\rangle = \langle \boldsymbol{C}_{ik}(z)\rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{A}_{ik}(z)\rangle = [\boldsymbol{R}^0_{\perp i} \times \boldsymbol{R}^0_{\perp k}] = \text{const}. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Из (1.16), в частности, следует, что сохраняется средняя величина площади N-угольника, построенного на точках $\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)$:

$$\langle S(z)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle \boldsymbol{A}_{i,\,i+1}(z)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle[\boldsymbol{R}_{\perp i}(z) \times \boldsymbol{R}_{\perp i+1}(z)]\rangle$$
$$(\boldsymbol{R}_{\perp N+1}(z) \equiv \boldsymbol{R}_{\perp 1}(z)).$$

Переходя в этой формуле к пределу при $N \to \infty$, получаем выражение

$$\langle S(z)\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \oint_{C(z)} (x\,dy - y\,dx)\right\rangle = S_0, \tag{1.16′}$$

которое показывает, что среднее значение площади сечения лучевой трубки сохраняется ($C(z)$ — контур, охватывающий эту лучевую трубку в плоскости $z = \text{const}$) *).

Отметим, что сохранение средней площади в случае трех лучей было получено в работе [154] на основе изучения соответствующего УЭФ для совместной диффузии трех лучей.

Остановимся теперь на условиях применимости УЭФ. Как отмечалось выше, УЭФ для диффузии лучей удается обосновать только в малоугловом приближении. Отсюда, согласно (1.7), возникает условие

$$\langle \boldsymbol{\tau}^2_{\perp}\rangle \ll 1, \quad \text{или} \quad Dz \sim \frac{\sigma^2_{\mu} z}{l_0} \ll 1. \tag{1.17}$$

Это условие накладывает очень слабое ограничение на поперечное смещение луча: $\langle \boldsymbol{R}^2_{\perp}(z)\rangle \ll z^2$. Что касается поправок, связанных с конечностью продольного радиуса корреляции, то, как показа-

*) Равенство (1.16′) справедливо и для негауссовских дельта-коррелированных флуктуаций поля $\mu(\boldsymbol{r})$ [17].

но в [15], требование их малости приводит к условию $z \gg l_0$ и к тому же условию (1.17).

В ряде задач, связанных с распространением света в случайно-неоднородных средах, приходится рассматривать систему уравнений (1.3) с граничными условиями, которые ставятся не в одной точке $z = 0$, а в двух различных точках (см. (8.1.40)):

$$\boldsymbol{R}_\perp (L) = \boldsymbol{\rho}_0, \quad \boldsymbol{\tau}_\perp (0) = 0. \tag{1.18}$$

В этом случае для рассматриваемой задачи не выполняется условие причинности и, следовательно, эти лучи не описываются диффузионным приближением. Вообще говоря, плотность вероятностей для этих лучей будет условной плотностью вероятностей всей совокупности лучей, рассмотренных выше. При этом, для того чтобы луч из начальной плоскости $z = 0$ попал в точку $\boldsymbol{\rho}_0$ при $z = L$, необходимо, чтобы он вышел из точки $\boldsymbol{R}_\perp (0)$, удовлетворяющей условию

$$\boldsymbol{R}_\perp (0) = \boldsymbol{\rho}_0 - \int_0^L dz\,(L - z)\,\nabla_\perp \mu\,(\boldsymbol{R}_\perp (z), z) \qquad (\langle \boldsymbol{R}_\perp (z) \rangle = \boldsymbol{\rho}_0). \tag{1.19}$$

Если расстояние L, проходимое лучом, достаточно мало, то можно решать систему уравнений (1.3) с условиями (1.18) методом последовательных приближений. В первом приближении в формуле (1.19) можно заменить величину $\boldsymbol{R}_\perp (z)$ в правой части на ее среднее значение $\boldsymbol{\rho}_0$. В этом приближении, в силу случайной природы функции $\mu\,(\boldsymbol{r}_0, z)$, сама точка $\boldsymbol{R}_\perp (0)$ является случайной точкой, плотность вероятностей для которой будет гауссовской. Если же теория возмущений не работает, то надо воспользоваться теорией инвариантного погружения, сводящей краевую задачу (1.18) к задаче Коши для некоторой вспомогательной функции (см. гл. 5). При этом, как показано в § 3 гл. 5, одноточечные характеристики луча совпадают с вычисленными по первому приближению.

Отметим, что такая лучевая постановка задачи позволяет подойти к вопросу о флуктуациях интенсивности волны из чисто геометрических соображений. В рассматриваемой задаче должен сохраняться поток энергии через сечение лучевой трубки, т. е. величина $\tilde{I} S = \mathrm{const}$, где S — площадь сечения лучевой трубки, а $\tilde{I}$ — интенсивность волны, усредненная по сечению лучевой трубки. Вырежем в плоскости наблюдения $z = L$ площадку площадью S_0. Тогда имеем

$$I_0 S = \tilde{I} S_0, \tag{1.20}$$

где $\tilde{I}_0$ — интенсивность волны в плоскости $z = 0$. Из (1.20) следует, что случайная величина $I\,(\boldsymbol{\rho}_0, L)$ определяется флуктуациями величины S в плоскости $z = 0$, т. е.

$$I\,(\boldsymbol{\rho}_0, L) = I_0 \lim_{S_0 \to 0} \frac{S}{S_0} \qquad (I_0 = \mathrm{const}). \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что статистические характеристики интенсивности волны должны определяться статистическими характеристиками величины $\boldsymbol{R}_\perp(0)$, которая задается уравнением (1.19). Не ограничивая общности, можно положить в (1.21) $\rho_0 = 0$ и рассматривать случай, когда S_0 — площадь круга. В первом приближении, описанном выше, величина $\boldsymbol{R}_\perp(0)$ имеет гауссовское распределение вероятностей. В этом приближении имеет место малая деформация контура площадки, а именно: он подвергается линейным деформациям, и случайная величина S представляет собой площадь эллипса со случайными величинами полуосей, различные средние значения которых определяются статистическими характеристиками величины $\boldsymbol{R}_\perp(0)$. Можно показать [155], что в этом случае случайная величина $\xi = S/S_0$ при $S_0 \to 0$ распределена по закону

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+\alpha^2 t^2} \exp\left\{-t\left(i\xi + \frac{1}{i-\alpha t}\right)\right\} \qquad (\alpha > 0), \quad (1.22)$$

где положительная постоянная α связана со статистическими характеристиками величины $\boldsymbol{R}_\perp(0)$. Отрицательные значения ξ в (1.22) соответствуют изменению направления обхода контура эллипса и, следовательно, отрицательным значениям площади S.

Вернемся теперь снова к задаче о лучах, описываемых системой уравнений (1.1). В малоугловом приближении статистические характеристики лучей могут быть описаны, как показано выше, на основе УЭФ. Из физических соображений ясно, что при дальнейшем распространении луча в неоднородной среде будут развиваться флуктуации направления распространения, и закон распределения вероятностей должен стремиться к изотропному. Однако эту дальнейшую эволюцию закона распределения уже нельзя описывать при помощи УЭФ. Тем не менее оказывается возможным получить точное решение этой задачи для предельного распределения вероятностей [156].

Используем для τ сферическую систему координат

$$\tau = \{\cos\varphi \sin\theta, \quad \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta\},$$

так что уравнения (1.1) примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dl} = \cos\varphi \sin\theta, \quad \frac{dy}{dl} = \sin\varphi \sin\theta, \quad \frac{dz}{dl} = \cos\theta, \\
\frac{d\theta}{dl} = \cos\theta \left[\cos\varphi \frac{\partial\mu}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial\mu}{\partial y}\right] - \sin\theta \frac{\partial\mu}{\partial z}, \qquad (1.23) \\
\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial\mu}{\partial y}.
\end{gathered}$$

Функцию распределения вероятностей

$$W(l, \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) = \langle \delta(\boldsymbol{r}(l) - \boldsymbol{r}) \delta(\theta(l) - \theta) \delta(\varphi(l) - \varphi) \rangle \quad (1.24)$$

найдем в два этапа. На первом этапе зафиксируем одну из реализаций $\mu(\boldsymbol{r})$ и рассмотрим задачу с вероятностными начальными условиями. Если при $l=0$ задано начальное условие

$$W(0,\ \boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi)=W_0(\boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi), \tag{1.25}$$

то дальнейшая эволюция распределения W описывается уравнением Лиувилля, соответствующим динамической системе (1.23). Это уравнение можно преобразовать в уравнение для функции $P(l,\ \boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi)=W/\sin\theta$, нормированной условием

$$\int d\boldsymbol{r}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\, P(l,\ \boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi)=1,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial l}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial\mu}{\partial z}\sin\theta-\left[\frac{\partial\mu}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\mu}{\partial y}\sin\varphi\right]\cos\theta\right\}-\\ -\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial\mu}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial\mu}{\partial y}\cos\varphi\right]=\\ =\cos\varphi\sin\theta\left[2P\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right]+\sin\varphi\sin\theta\left[2P\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]+\\ +\cos\theta\left[2P\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z}\right]\equiv\tau(2P\nabla\mu-\nabla P).\end{aligned} \tag{1.26}$$

Чтобы получить отсюда соответствующее среде со случайными неоднородностями уравнение для W, (1.26) следует усреднить по μ. Можно, однако, получить точное решение неусредненного уравнения (1.26), соответствующее установившемуся режиму. Это решение аналогично распределению Гиббса в статистической механике, которое является решением стационарного уравнения Лиувилля *). Искомое решение не должно зависеть от l, θ, φ. Легко видеть, что таким решением уравнения (1.26) является функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla P=2P\ \nabla\mu$, т. е.

$$P(l,\ \boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi)=P_0\exp\{2\mu(\boldsymbol{r})\}. \tag{1.27}$$

Это выражение является аналогом формулы Больцмана. Учитывая, что $\mu=\ln n$, будем иметь

$$P(l,\ \boldsymbol{r},\ \theta,\ \varphi)=P_0 n^2(\boldsymbol{r}).$$

Константа P_0 может быть определена из условия нормировки (что имеет смысл лишь для конечного объема)

$$P(l,\boldsymbol{r},\theta,\varphi)=\frac{n^2(\boldsymbol{r})}{4\pi\int d\boldsymbol{r}\, n^2(\boldsymbol{r})}. \tag{1.28}$$

Теперь не представляет труда выполнить усреднение по n, что

---

*) Отметим, что уравнения для лучей можно, как хорошо известно, записать в форме гамильтоновых уравнений.

приводит к формуле

$$\langle P(l, \boldsymbol{r}, \theta, \varphi)\rangle = \left\langle \frac{n^2(\boldsymbol{r})}{4\pi \int d\boldsymbol{r}\, n^2(\boldsymbol{r})} \right\rangle. \tag{1.29}$$

Если можно считать, что интеграл от n^2 не флуктуирует, то $\langle P\rangle \sim \langle n^2(\boldsymbol{r})\rangle$. Этот результат имеет простой смысл: так как лучи изгибаются в сторону увеличения n, то плотность вероятностей больше в той области, где больше $\langle n^2\rangle$.

§ 2. Амплитудно-фазовые флуктуации

Рассмотрим теперь флуктуации интенсивности и фазы волны в геометрооптическом приближении.

Из уравнений для интенсивности (8.1.24) и фазы в геометрооптическом приближении (8.1.36) легко получить с учетом пространственной неоднородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$ выражение [157]

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle IS\rangle = \frac{k}{2}\langle \varepsilon I\rangle + \frac{1}{2k}\langle I(\nabla_\perp S)^2\rangle. \tag{2.1}$$

С другой стороны, имеет место соотношение

$$\nabla_1\nabla_2\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)\,|_{\rho_i=0} = \langle I[(\nabla_\perp\chi)^2 + (\nabla_\perp S)^2]\rangle, \tag{2.2}$$

где $\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \langle u(x, \boldsymbol{\rho}_1)\, u^*(x, \boldsymbol{\rho}_2)\rangle$ — функция когерентности второго порядка, рассмотренная во втором параграфе восьмой главы. В приближении геометрической оптики выражение (2.2) упрощается и принимает вид

$$\nabla_1\nabla_2\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)\,|_{\rho_i=0} = \langle I(\nabla_\perp S)^2\rangle. \tag{2.3}$$

Левая часть уравнения (2.3) может быть вычислена в приближении диффузионного случайного процесса. В этом случае функция Γ для плоской волны описывается формулой (8.2.19′) ($u_0 = 1$), а

$$\langle \varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = \int d\boldsymbol{\rho}' A(\boldsymbol{\rho}') \left\langle \frac{\delta I(x, \boldsymbol{\rho})}{\delta\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}')} \right\rangle =$$
$$= \int d\boldsymbol{\rho}' A(\boldsymbol{\rho}') \left\langle u(x, \boldsymbol{\rho}) \frac{\delta u^*}{\delta\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}')} + u^*(x, \boldsymbol{\rho}) \frac{\delta u}{\delta\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}')} \right\rangle = 0.$$

Следовательно, в геометрооптическом и диффузионном приближениях имеют место равенства

$$\langle I(\nabla_\perp S)^2\rangle = \frac{k^2}{4}\Delta_\perp D(0)\, x = k^2\tilde{\gamma}, \quad \langle IS\rangle = \frac{k}{16}\Delta_\perp D(0)\, x, \tag{2.4}$$

где $\tilde{\gamma} = \pi^2 \int\limits_0^\infty d\varkappa\, \varkappa^3 \Phi_\varepsilon(\varkappa)\, x = \frac{1}{k^2}\langle(\nabla_\perp S_0)^2\rangle$ — дисперсия угла прихода волны в точку наблюдения в первом приближении МПВ в приближении геометрической оптики.

В приближении геометрической оптики и диффузионном приближении можно получить также замкнутое уравнение для функции

$$G(x, \rho; S, u) = \langle I(x, \rho)\,\delta(S(x, \rho) - S)\,\delta(\nabla S(x, \rho) - u)\rangle,$$

описывающей корреляции интенсивности с фазой и градиентом фазы волны [158]. Дифференцируя эту функцию по x и используя уравнения (1.24), (1.36), (1.37) восьмой главы, после несложных преобразований получаем уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{k}(u\nabla_\perp)G + \frac{1}{2k}u^2\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{k^2 A(0)}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{k^2}{8}\Delta_\perp D(0)\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{2.5}$$

Для плоской падающей волны, в силу статистической однородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$, $\nabla_\perp G = 0$ и уравнение (2.5) упрощается:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2k}u^2\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{k^2 A(0)}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{k^2}{8}\Delta_\perp D(0)\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{2.6}$$

Это уравнение обладает той особенностью, что для величин $\langle IS^m(\partial S/\partial\rho_\alpha)^n\rangle$ из него может быть получена замкнутая конечномерная линейная система уравнений первого порядка, решение которой не вызывает особых затруднений. Полученные выше выражения (2.4) являются частным случаем решений такой системы уравнений.

Отметим, что можно проинтегрировать уравнение (2.5) по S, т. е. исключить фазу волны из рассмотрения. Мы приходим при этом к уравнению

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x} + \frac{1}{k}(u\nabla_\perp)\widetilde{G} = \frac{k^2}{8}\Delta_\perp D(0)\frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial u^2}. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) совпадает, естественно, с уравнением для плотности вероятностей, описывающим диффузию отдельного луча, так как, согласно результатам гл. 5, уравнение для величины $\widetilde{G}$ совпадает с уравнением для плотности вероятностей лагранжевых переменных, т. е. характеристик лучей.

Если же искать уравнение для плотности вероятностей

$$P_{x,\rho}(I, S, u) = \\ = \langle\delta(I(x, \rho) - I)\,\delta(S(x, \rho) - S)\,\delta(\nabla_\perp S(x, \rho) - u)\rangle,$$

параметрически зависящей от пространственной точки (x, ρ), то получить его в замкнутом виде не удается. Однако уравнение для плотности вероятностей можно замкнуть, если ее переменные дополнить величинами, характеризующими кривизну фазового фронта [67, 68]. Это связано с тем, что именно флуктуации кривизны фазового фронта порождают флуктуации интенсивности волны в геометрооптическом приближении.

Уравнение для фазы волны (8.1.36) соответствует уравнению Гамильтона — Якоби, рассмотренному в пятой главе, в котором

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2k} - \frac{k}{2}\,\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}) \qquad \left(p_i = \frac{\partial S}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, 2\right). \qquad (2.8)$$

Для получения замкнутого уравнения для плотности вероятностей фазовых переменных достаточно ввести три дополнительные переменные $p_{ik} = \frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\rho}_i \partial \boldsymbol{\rho}_k}$, и стохастическое уравнение Лиувилля принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{k} p_i \frac{\partial W}{\partial \rho_i} + \frac{p_i^2}{2k}\frac{\partial W}{\partial S} - \frac{1}{k} p_{ii}\frac{\partial}{\partial I} IW - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial p_{ik}} p_{il} p_{kl} W -$$
$$- \frac{1}{k} p_{ii} W = -\frac{k}{2}\left[\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})\frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_i \partial \rho_k}\frac{\partial}{\partial p_{ik}}\right] W. \qquad (2.9)$$

Далее, учитывая гауссовский характер флуктуаций ε и дельта-коррелированность поля $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ по x, можно выполнить усреднение по ансамблю реализаций ε, что приводит к появлению в правой части (2.9) диффузионных членов:

$$P_{x,\,\rho}(S, p_i, p_{ik}, I) =$$
$$= \left\langle \delta(I(x, \boldsymbol{\rho}) - I)\,\delta(S(x, \boldsymbol{\rho}) - S)\,\delta\left(\frac{\partial S}{\partial \rho_i} - p_i\right)\delta\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - p_{ik}\right)\right\rangle,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{k} p_i \frac{\partial P}{\partial \rho_i} + \frac{p_i^2}{2k}\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{1}{k} p_{ii}\frac{\partial}{\partial I} IP - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial p_{ik}} p_{il} p_{kl} P - \frac{1}{k} p_{ii} P =$$
$$= \frac{k^2}{4}\left\{A(0)\frac{\partial^2}{\partial S^2} - \Delta_\perp D(0)\left(\frac{\partial^2}{\partial S\,\partial p_{ii}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\Delta_\perp^2 D(0)\left(2\frac{\partial^2}{\partial p_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_{ii}^2}\right)\right\} P, \qquad (2.10)$$

где $D(\boldsymbol{\rho}) = A(0) - A(\boldsymbol{\rho})$.

Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, $\nabla_\rho P = 0$. Интегрируя уравнение (2.10) по S и I, получаем более простое уравнение, описывающее флуктуации фазовых градиентов:

$$P_{x,\,\rho}(p_i, p_{ik}) = \left\langle \delta(\nabla_\perp S(x, \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{p})\,\delta\left(\frac{\partial^2 S(x, \rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - p_{ik}\right)\right\rangle,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial p_{ik}} p_{il} p_{kl} P - \frac{1}{k} p_{ii} P =$$
$$= \frac{k^2}{4}\left\{\frac{1}{2}\Delta_\perp D(0)\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} - \frac{1}{8}\Delta_\perp^2 D(0)\left(\frac{\partial^2}{\partial p_{ii}^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial p_{kl}^2}\right)\right\} P. \qquad (2.11)$$

Аналогичным образом, интегрируя (2.10) по S и по $\boldsymbol{p}$, получаем

уравнение, описывающее флуктуации интенсивности волны:

$$P_{x,\rho}(I, p_{ik}) = \left\langle \delta(I(x, \boldsymbol{\rho}) - I)\, \delta\left(\frac{\partial^2 S(x, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - p_{ik}\right)\right\rangle,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{k} p_{ii} \frac{\partial}{\partial I} IP - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial p_{ik}} p_{ii} p_{kl} P - \frac{1}{k} p_{ii} P =$$

$$= -\frac{k^2}{32} \Delta_\perp^2 D(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial p_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_{ii}^2}\right) P. \quad (2.11')$$

Интегрируя (2.11′) по I, получаем уравнение для плотности вероятностей вторых производных фазы, описывающих кривизну фазового фронта, вида

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial p_{ik}} p_{ii} p_{kl} P - \frac{1}{k} p_{ii} P = -\frac{k^2}{32} \Delta_\perp^2 D(0) \left(\frac{\partial^2}{\partial p_{ii}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial p_{kl}^2}\right) P. \quad (2.11'')$$

Сравнивая (2.11″) с (2.11), видим что первые и вторые производные фазы волны являются статистически независимыми и плотность вероятностей для градиентов фазы удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{k^2}{8} \Delta_\perp D(0) \frac{\partial^2 P}{\partial p_i^2}. \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что распределение (одноточечное) величины $\nabla_\perp S$ является гауссовским с дисперсией

$$\langle (\nabla_\perp S)^2 \rangle = \frac{k^2}{4} \Delta_\perp D(0)\, x,$$

что совпадает с известным результатом для малых флуктуаций амплитуды волны и, следовательно, обобщает его на случай произвольных флуктуаций амплитуды. В то же время, как видно из (2.11′), существует сильная статистическая связь между флуктуациями интенсивности и кривизной фазового фронта. Уравнения (2.10) — (2.11″) существенно упрощаются в двумерном случае. Так, уравнение (2.11′) в этом случае принимает вид $\left(q = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{k} q \frac{\partial}{\partial I} IP - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial q} q^2 P - \frac{1}{k} qP = -\frac{3}{32} k^2 \Delta_\perp^2 D(0) \frac{\partial^2 P}{\partial q^2}.$$

Отметим, что рассмотренная выше задача о статистическом описании амплитудно-фазовых флуктуаций световой волны в геометрооптическом приближении аналогична задаче о статистическом описании системы невзаимодействующих частиц в гидродинамическом приближении. С помощью аналогичных уравнений можно исследовать различные статистические свойства пучка частиц (см. [159]).

Полученные выше уравнения, однако, достаточно сложны и в настоящее время еще мало изучены. Поэтому разумно привлекать

некоторые дополнительные физически обоснованные предположения.

Формулы (2.4) можно использовать для проверки тех или иных предположений относительно характера амплитудно-фазовых флуктуаций и, в частности, предположения о возможности замены $\nabla_\perp S$ на $\nabla_\perp S_0$ из первого приближения МПВ для расчета амплитудных флуктуаций. Как указывалось выше, в приближении диффузионного случайного процесса могут быть вычислены в явном виде величины

$$\langle u(x, \boldsymbol{\rho}_1)\, u^*(x, \boldsymbol{\rho}_2)\, \varepsilon(y, \boldsymbol{\rho}_3)\rangle,$$

$$\langle u(x, \boldsymbol{\rho}_1)\, u^*(x, \boldsymbol{\rho}_2)\, \varepsilon(y_1, \boldsymbol{\rho}_3)\, \varepsilon(y_2, \boldsymbol{\rho}_4)\rangle,$$

с помощью которых не представляет труда найти выражения для $\langle I\nabla_\perp S\nabla_\perp S_0\rangle$, $\langle I(\nabla_\perp S_0)^2\rangle$. Это позволяет проверить возможность замены $\nabla_\perp S$ на $\nabla_\perp S_0$ в (2.4) при расчете амплитудных флуктуаций в области сильных флуктуаций. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат [157] (для флуктуаций ε, вызванных турбулентностью):

$$\langle I\nabla_\perp S\nabla_\perp S_0\rangle = k^2\tilde{\gamma} f_1(\sigma_0^2),$$

$$\langle I(\nabla_\perp S_0)^2\rangle = k^2\tilde{\gamma}\,[1 - f_2(\sigma_0^2)],$$

где функции f_1 и f_2 имеют асимптотический вид

$$f_1(\sigma_0^2) \approx 1, \quad f_2(\sigma_0^2) \sim \sigma_0^2 \qquad (\sigma_0^2 \ll 1),$$

что соответствует первому приближению МПВ, и

$$f_1(\sigma_0^2) \sim \sigma_0^{-1/3}, \quad f_2(\sigma_0^2) \sim \sigma_0^{-2/3} \quad (\sigma_0^2 \gg 1),$$

где параметр σ_0^2 определяется по формуле $\sigma_0^2 = \frac{\pi^2 k^2}{2} x \int\limits_0^\infty d\varkappa\, \varkappa \Phi_\varepsilon(\varkappa)$.

Эти асимптотические оценки свидетельствуют о том, что в области сильных флуктуаций интенсивности нельзя проводить замену $\nabla_\perp S$ на $\nabla_\perp S_0$ при расчете амплитудных флуктуаций.

Формулы (2.4) можно также использовать и для вывода условий применимости приближения диффузионного случайного процесса при описании амплитудно-фазовых флуктуаций в геометрооптическом приближении, которые, как легко видеть, совпадают с условиями применимости приближения диффузионного случайного процесса для статистического описания диффузии лучей в случайно-неоднородной среде (формула (1.17)).

Отметим, что в приближении диффузионного случайного процесса можно получить замкнутое уравнение для характеристического функционала $S(x, \boldsymbol{\rho})$ в плоскости $x = \text{const}$. Это уравнение аналогично уравнению для характеристического функционала поля $u(x, \boldsymbol{\rho})$. Однако, в силу нелинейности уравнения для фазы волны, уравнения для моментов фазы волны будут незамкнутыми.

§ 3. Геометрическое приближение в статистической теории волн *)

Выше мы рассмотрели приближение геометрической оптики для волн в случайно-неоднородной среде без регулярной рефракции на основе малоуглового приближения для уравнения Гельмгольца. На самом деле геометрическое приближение является универсальным аппаратом, пригодным для любых видов волн, распространяющихся в произвольной среде, и позволяющим ориентироваться в основных эффектах, сопровождающих процесс распространения волн. Ниже мы рассмотрим геометрическое приближение в теории волн с общих позиций и проиллюстрируем основные идеи на конкретных примерах, рассмотренных в предыдущих главах.

Рассмотрим уравнение, описывающее распространение скалярной волны в среде, свойства которой мало меняются на протяжении периода и длины волны. Хорошо известно, что его решение можно представить в виде локальной плоской волны

$$u(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}, t) \exp\{iS(\boldsymbol{x}, t)\}, \tag{3.1}$$

где A и S — ее амплитуда и фаза соответственно. По аналогии со случаем однородной среды можно ввести локальный волновой вектор $\boldsymbol{k}$ и локальную частоту ω:

$$\boldsymbol{k} = \nabla S, \quad \omega = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.2}$$

Подставим затем выражение (3.1) в описывающее волну уравнение и разложим амплитуду в ряд по малому параметру, представляющему собой отношение периода или длины волны к характерному временному или пространственному масштабу среды.

В нулевом приближении получаем дисперсионное соотношение $\Phi(\omega, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t) = 0$, или

$$\omega = \Omega(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t). \tag{3.3}$$

С учетом (3.2) соотношение (3.3) является уравнением в частных производных первого порядка (уравнение Гамильтона — Якоби). Уравнение первого приближения обычно имеет вид закона сохранения:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{c}_g I = 0 \qquad (I = A^2), \tag{3.4}$$

где I — интенсивность волны, а $\boldsymbol{c}_g$ — ее групповая скорость:

$$\boldsymbol{c}_g = \partial\Omega/\partial\boldsymbol{k}. \tag{3.5}$$

Из дисперсионного соотношения (3.3) можно найти характеристические уравнения, определяющие вид соответствующих волне

*) Результаты данного параграфа получены совместно с Г. И. Бабкиным и Б. М. Шевцовым. (Акуст. журн., 1980, т. 26, № 4).

лучей:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{k}}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = -\nabla\Omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t}, \tag{3.6}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{c}_g\nabla$. Имеются, кроме того, уравнения для фазы

$$\frac{dS}{dt} = -\Omega + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{k}} \tag{3.7}$$

и интенсивности

$$\frac{dI}{dt} = -I\nabla\boldsymbol{c}_g. \tag{3.8}$$

Подобный подход к теории волн строго обоснован с помощью вариационного принципа (см., например, [160]).

Как показано в пятой главе, для любого уравнения в частных производных вида (3.3) можно ввести плотность вероятностей в фазовом пространстве, для которой удается написать линейное уравнение эволюции (кинетическое уравнение, или уравнение Лиувилля). При наличии в задаче случайных параметров это уравнение является стохастическим и подлежит дополнительному усреднению по ансамблю реализаций параметров. С учетом (3.8) в число переменных этого уравнения легко включить $I(\boldsymbol{x}, t)$. Однако для нахождения статистических характеристик интенсивности волны можно воспользоваться более простым подходом. Как показано в гл. 5, легко написать замкнутое кинетическое уравнение для величины

$$\Phi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t) = I(\boldsymbol{x}, t)\,\delta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{k}), \tag{3.9}$$

причем по форме оно совпадает с уравнением для плотности вероятностей лагранжевых координат $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$ (лучей)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{k}}\nabla\Omega. \tag{3.10}$$

Согласно определению (3.9) с помощью величины Φ можно найти интенсивность (плотность энергии) волны

$$I(\boldsymbol{x}, t) = \int d\boldsymbol{k}\Phi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t) \tag{3.11}$$

и плотность потока энергии

$$\Pi(\boldsymbol{x}, t) = \int d\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{c}_g\Phi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t). \tag{3.12}$$

В соответствии с уравнением (3.10)

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla\Pi = 0. \tag{3.13}$$

Отсюда следует, что величину $\Phi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t)$ можно отождествить с лучевой интенсивностью, а уравнение (3.10) — с уравнением переноса излучения в описанном выше геометрическом приближении.

Пусть теперь частота волны ω задана и остается неизменной. Предположим, кроме того, что волна слабо отклоняется от перво-

начального направления распространения, которое примем за одну из осей координат. Обозначим выделенную координату ξ, тогда при $\boldsymbol{x} = 0$ $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 = (k_\xi^0, 0, 0)$. Дисперсионное соотношение можно разложить по степеням величины $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$. Ясно, что в полученном разложении имеется первая степень малой величины $k_\xi - k_\xi^0$ (более высокие степени отбросим).

В результате получим уравнение

$$k_\xi = \widetilde{\Omega}(\omega, \boldsymbol{k}_\perp, \boldsymbol{x}_\perp, \xi), \tag{3.14}$$

в котором, вообще говоря, достаточно оставить первые неисчезающие члены разложения по $\boldsymbol{k}_\perp$ (здесь $\boldsymbol{k}_\perp$ и $\boldsymbol{x}_\perp$ — соответственно проекции векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{x}$ на плоскость, перпендикулярную оси ξ). Это уравнение аналогично соотношению (3.3), в котором выделенная координата ξ играет роль времени. Теперь можно использовать все приведенные выше рассуждения и учесть зависимость параметров среды от координаты ξ. В том случае, когда радиус корреляции по ξ значительно больше длины волны, но существенно меньше проходимого ею расстояния, можно применить методы, описанные выше для δ-коррелированных случайных процессов. Такой способ применялся в предыдущих параграфах.

В качестве конкретного примера рассмотрим в описанном приближении распространение скалярной волны в плоском волноводе, показатель преломления которого изменяется пропорционально квадрату поперечной координаты z (соответствующая дифракционная задача рассматривалась в гл. 8, 9). В отсутствие случайной составляющей показателя преломления дисперсионное соотношение (3.14) таково:

$$-2(k_\xi - k_\xi^0)/k_\xi^0 = v^2 + \alpha^2 z^2 \qquad (v = k_z/k_\xi^0), \tag{3.15}$$

а характеристические уравнения (3.6) выглядят следующим образом:

$$\frac{dz}{d\xi} = v, \quad \frac{dv}{d\xi} = -\alpha^2 z. \tag{3.16}$$

Пусть при $\xi = 0$ $z = z_0$, $v = 0$, $I = I_0(z)$; тогда $z = z_0 \cos \alpha\xi$,

$$v = -\alpha z_0 \sin \alpha\xi, \quad I = |\cos \alpha\xi|^{-1} I_0(z/\cos \alpha\xi).$$

Если учесть теперь случайную составляющую показателя преломления $\varepsilon(\xi, z)$, то уравнения (3.16) будут иметь вид

$$\frac{dz}{d\xi} = v, \quad \frac{dv}{d\xi} = -\alpha^2 z + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon(\xi, z)}{\partial z}. \tag{3.16'}$$

Считая, далее, $\varepsilon(\xi, z)$ гауссовским однородным случайным полем, δ-коррелированным по ξ, т. е. имеющим корреляционную функцию

$$\langle \varepsilon(\xi, z)\, \varepsilon(\xi', z') \rangle = A(z - z')\, \delta(\xi - \xi'),$$

и проводя усреднение в уравнении (3.10), получаем уравнение

Эйнштейна — Фоккера ($P = \langle\Phi\rangle$)

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + v\frac{\partial P}{\partial z} - \alpha^2 z\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{4}H(0)\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \tag{3.17}$$

с начальным условием $P = P_0(z, v)$ при $\xi = 0$; здесь $H(\rho) = \frac{1}{2}\Delta_\perp A(\rho)$.

С помощью преобразования Фурье введем новую функцию $\Gamma(z, \rho, \xi)$:

$$P(z, v, \xi) = \int d\rho\, \Gamma(z, \rho, \xi)\exp\{-ikv\rho\}, \tag{3.18}$$

где $k = k_\xi^0$ — начальное волновое число. Тогда для функции $\Gamma(z, \rho\ \xi)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z\,\partial \rho} - i\alpha^2 k\rho z\Gamma + \frac{k^2}{4}H(0)\rho^2\Gamma = 0 \tag{3.17'}$$

Уравнение (3.17′) совпадает с уравнением для функции когерентности уравнения Гельмгольца в параболическом приближении, где вместо структурной функции $D(\rho) = A(0) - A(\rho)$ входит величина $H(0)\rho^2$, связанная с первым членом ее разложения по ρ. Такая связь между величинами P и Γ была отмечена в работе [161]. Таким образом, как уже говорилось выше, величина P является лучевой интенсивностью, а уравнение (3.17) для данной задачи представляет собой уравнение переноса излучения в приближении геометрической оптики (акустики).

Уравнение (3.17) можно решить:

$$\begin{aligned} P(z, v, \xi) = \int dp\, dq\, \tilde{P}_0(p, q)\exp\{&ip(z\cos\alpha\xi - v\alpha^{-1}\sin\alpha\xi) + \\ &+ iq(z\alpha\sin\alpha\xi + v\cos\alpha\xi) - (1/8)H(0)[p^2\alpha^{-2}(\xi - (2\alpha)^{-1}\sin 2\alpha\xi) + \\ &+ pq\alpha^{-2}(\cos 2\alpha\xi - 1) + q^2(\xi + (2\alpha)^{-1}\sin 2\alpha\xi)]\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$\tilde{P}_0(p, q) = (2\pi)^{-2}\int dz\, dv\, P_0(z, v)\exp\{-ipz - iqv\}.$$

С помощью формул (3.11) и (3.12) легко найти среднюю интенсивность $\langle I\rangle$ и плотность потока энергии $\langle\Pi\rangle$, например:

$$\langle I(\xi, z)\rangle = \frac{2\pi}{|\cos\alpha\xi|}\int dp\, \tilde{P}_0\left(p, \frac{p}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha\xi\right)\exp\left\{\frac{ipz}{\cos\alpha\xi} - \frac{H(0)p^2}{8\alpha^2}\left[\frac{\xi}{\cos^2\alpha\xi} - \frac{\operatorname{tg}\alpha\xi}{\alpha}\right]\right\}.$$

Если величина $\tilde{P}_0$ не зависит от q, т. е. $P_0(z, v) = P_0(z)\,\delta(v)$, то

$$\langle\Pi(\xi, z)\rangle = -\alpha\operatorname{tg}\alpha\xi\left[z\langle I\rangle + \frac{H(0)\xi}{4\alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}\langle I\rangle\right]. \tag{3.20}$$

Поскольку справедливо вытекающее из (3.13) равенство $\frac{\partial}{\partial \xi}\langle I\rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle\Pi\rangle = 0$, для средней интенсивности $\langle I\rangle$ получается

уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\langle I\rangle = \alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\xi\,\frac{\partial}{\partial z}\left[z\langle I\rangle + \frac{H(0)\,\xi}{4\alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}\langle I\rangle\right] \qquad (3.21)$$

с начальным условием $I(0, z) = P_0(z)$. Пусть $P_0(z) = I_0 \exp\{-z^2/a^2\}$, тогда

$$\langle I(\xi, z)\rangle = \frac{I_0}{\sqrt{F}}\exp\left\{-\frac{z^2}{a^2 F}\right\}, \quad \langle \Pi(\xi, z)\rangle = \frac{\langle I\rangle z}{2F}\frac{dF(\xi)}{d\xi},$$

где

$$F(\xi) = \cos^2\alpha\xi + \frac{H(0)}{2\alpha^2 a^2}\left(\xi - \frac{\sin 2\alpha\xi}{2\alpha}\right).$$

При $H(0) = 0$ получаем выражение для I, найденное выше с помощью уравнений (3.16).

Для величины

$$Q(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t) = \\ = I(\boldsymbol{x}_1, t)\, I(\boldsymbol{x}_2, t)\,\delta(\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{k}_1)\,\delta(\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{x}_2, t) - \boldsymbol{k}_2) \qquad (3.22)$$

также удается получить замкнутое кинетическое уравнение, совпадающее по форме с уравнением для плотности вероятностей лагранжевых координат $\boldsymbol{x}_i(t)$, $\boldsymbol{k}_i(t)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \boldsymbol{c}_1\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{x}_1} + \boldsymbol{c}_2\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}_1}Q\nabla_1\Omega + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}_2}Q\nabla_2\Omega. \qquad (3.23)$$

С помощью выражения (3.22) можно найти величину

$$I(\boldsymbol{x}_1, t)\, I(\boldsymbol{x}_2, t) = \int d\boldsymbol{k}_1\, d\boldsymbol{k}_2 Q(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t).$$

После усреднения по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров отсюда получается функция корреляции для интенсивности.

В частности, для задачи о диффузии двух лучей в двумерном случае из (3.23) вытекает уравнение ($P = \langle Q\rangle$)

$$\frac{\partial P}{\partial\xi} + v_1\frac{\partial P}{\partial z_1} + v_2\frac{\partial P}{\partial z_2} = \frac{H(0)}{4}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial v_2^2}\right] + \frac{1}{2}H(z_1 - z_2)\frac{\partial^2 P}{\partial v_1\partial v_2}. \qquad (3.24)$$

Когда расстояние $(z_1 - z_2)$ между лучами превышает радиус корреляции, имеет место независимая диффузия двух лучей.

Введем функцию $\Gamma_4(q_i, z_i, \xi)$:

$$P(v_i, z_i, \xi) = \int dq_1\, dq_2\Gamma_4(q_i, z_i, \xi)\exp\{-ik(v_1q_1 + v_2q_2)\}, \qquad (3.25)$$

для которой из (3.24) получаем уравнение

$$\frac{\partial\Gamma_4}{\partial\xi} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2\Gamma_4}{\partial z_1\partial q_1} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2\Gamma_4}{\partial z_2\partial q_2} = \\ = -\frac{k^2}{4}H(0)(q_1^2 + q_2^2)\Gamma_4 - \frac{k^2}{2}H(z_1 - z_2)\,q_1q_2\Gamma_4, \qquad (3.26)$$

что совпадает с уравнением для функции когерентности четвертого порядка, в котором структурная функция $D(\rho)$ разложена в ряд по малым величинам q_1 и q_2 до квадратичных членов.

В ряде задач «медленные» процессы диффузии протекают на фоне «быстрых» осциллирующих изменений переменных. В этом случае, как мы видели в предыдущих главах, полезен прием, связанный с усреднением плотности вероятностей по быстрым осцилляциям. Рассмотрим для простоты плоский волновод, показатель преломления которого равен $[\alpha^2 - \varepsilon(\xi)]\, z^2$, где ξ и z — продольная и поперечная координаты, а $\varepsilon(\xi)$ — гауссовская δ-коррелированная случайная функция, для которой $\langle \varepsilon(\xi)\, \varepsilon(\xi') \rangle = 2\sigma^2 l_0 \delta(\xi - \xi')$. Такая постановка задачи описывает флуктуации параметров волновода.

Уравнения для лучей таковы:

$$\frac{dz}{d\xi} = v, \qquad \frac{dv}{d\xi} = -\alpha^2 z + \varepsilon(\xi)\, z. \tag{3.27}$$

Введем новые переменные u и φ, соответствующие амплитуде и фазе осцилляций луча:

$$z = \cos\varphi \cdot \exp u, \qquad v = -\alpha \sin\varphi \exp u,$$

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{\varepsilon(\xi)}{\alpha} \sin\varphi \cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \alpha - \frac{\varepsilon(\xi)}{\alpha} \cos^2\varphi. \tag{3.28}$$

Для функции $P = \delta(u(\xi) - u)$, описывающей плотность вероятностей для величины $u(\xi)$, после усреднения по $\varepsilon(\xi)$ и быстро осциллирующей фазе φ получим уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\sigma^2 l_0}{4\alpha^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial P}{\partial u} - 2P \right], \tag{3.29}$$

соответствующее гауссовскому распределению для величины u.

Можно ввести плотность вероятностей P для двух лучей. После усреднения по фазам обоих лучей уравнение для P будет иметь такой же вид, как в случае двух лучей, распространяющихся независимо друг от друга.

Аналогичным образом можно рассмотреть и трехмерный волновод с показателем преломления $(\alpha_1^2 - \varepsilon_1)\, z_1^2 + (\alpha_2^2 - \varepsilon_2)\, z_2^2$, где оси координат z_1 и z_2 направлены вдоль главных осей. В случае цилиндрически-симметричного волновода $(\alpha_1 = \alpha_2)$ задача сводится к предыдущей, поскольку движение луча происходит в одной плоскости. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$ такое движение имеет место лишь в плоскостях, соответствующих главным осям. В общем же случае траектория луча уже не будет плоской. Однако в переменных u_1, u_2 уравнение для величины P по-прежнему имеет такой же вид, как для двух независимо распространяющихся лучей, но с различными коэффициентами диффузии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной книге были развиты функциональные методы изучения статистических характеристик решений стохастических уравнений и были рассмотрены применения этих методов к конкретным статистическим волновым задачам.

Проводя формальную классификацию, развитыми выше методами можно рассматривать нелинейные динамические системы под действием случайных возмущений, описываемые как системами обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнениями в частных производных и интегральными уравнениями, причем случайные параметры могут входить как в коэффициенты уравнения, так и в правую часть. Важно лишь, чтобы выполнялось условие динамической причинности.

Функциональные методы изучения статистических характеристик решения задач были развиты для анализа линейных (вообще говоря, операторных) стохастических уравнений. При этом важным моментом является вопрос о возможности сведения исходной нелинейной задачи к линейным задачам рассмотренного типа.

Если стохастическая задача описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, то всегда путем расширения пространства (конечномерного, однако) можно перейти к эквивалентному ей описанию с помощью линейного уравнения в частных производных (уравнению Лиувилля). При этом уравнение Лиувилля содержит больше информации, чем исходное, и описывает плотность вероятностей для исходной динамической системы в фазовом пространстве. В случае же произвольного нелинейного уравнения в частных производных также можно перейти к линейному уравнению, но уже в бесконечномерном пространстве, содержащему вариационные производные (уравнению Хопфа). Конечно, при конкретизации типа уравнений можно в ряде случаев упростить такой переход. Так, если исходное уравнение содержит пространственные производные только первого порядка, то можно ограничиться переходом к конечномерному пространству, а если к тому же оно является квазилинейным, то размерность расширенного пространства еще более сокращается.

Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью теории инвариантного погружения сводится к квазилинейному уравнению.

Итак, мы перешли к линейному (дифференциальному или интегральному) стохастическому уравнению. При усреднении этого уравнения по флуктуирующим параметрам мы, вообще говоря, не получаем замкнутого уравнения для интересующей нас величины. И такое замыкание можно произвести путем дополнительного перехода к новому расширенному пространству, вообще говоря, бесконечномерному. В результате получаем линейное уравнение для среднего значения интересующей нас величины, но с вариационными производными (например, уравнение Швингера для стохастических интегральных уравнений). И в этом смысле проблема анализа линейных стохастических задач полностью аналогична анализу нелинейных детерминированных задач физики, т. е. можно утверждать, что линейные стохастические задачи по своей сущности являются нелинейными задачами. При конкретизации статистической природы флуктуирующих параметров ситуация в ряде случаев упрощается. Так, если флуктуирующие параметры являются марковскими процессами общего типа, то расширенное пространство может быть сведено к конечномерному, а для частных случаев марковских процессов, таких, как телеграфный, обобщенный телеграфный и марковские процессы с конечным числом состояний, вообще можно обойтись без какого-либо расширения пространства.

Результаты для случая, когда флуктуирующими параметрами являются гауссовские марковские процессы или функции от них, можно получить, исходя из предельной теоремы о переходе суммы независимых телеграфных процессов с увеличением числа членов в гауссовский марковский процесс.

Вернемся теперь к стохастическому линейному уравнению общего типа. Имеется один асимптотический случай, называемый приближением дельта-коррелированного процесса (поля), когда ситуация совсем упрощается. В этом асимптотическом пределе статистические характеристики решений стохастических уравнений сами удовлетворяют линейным уравнениям и теорию можно рассматривать как теорию обобщенного броуновского движения. С физической точки зрения эта асимптотическая теория пригодна для тех ситуаций, когда рассматриваемая система уже испытала достаточное число «независимых» случайных воздействий и можно удовлетвориться усредненным описанием ее поведения за времена, большие по сравнению со временем «единичного толчка». Это обстоятельство и обусловливает преимущества рассмотренного функционального подхода, так как методы, основанные на применении теории возмущений, обычно приводят к бесконечным системам уравнений для статистических характеристик решения задачи и их приближенные решения часто оказываются справедливыми лишь при весьма жестких ограничениях. Преимуществом данного под-

хода является также возможность одновременно исследовать и его границы применимости.

Все, что говорилось выше, относится к задачам, для которых выполняется условие динамической причинности. Ситуация, однако, даже для случая дельта-коррелированных процессов, коренным образом меняется, если мы имеем линейную краевую исходную задачу. Для нее не выполняется условие динамической причинности, и, как мы видели на примере вывода уравнения переноса излучения в одномерной случайно-слоистой среде, уравнения для средних характеристик имеют вид нелинейных незамкнутых уравнений и замыкание их удается осуществить только путем расширения (конечномерного, однако) фазового пространства.

Что же касается волновых статистических задач, рассмотренных выше, то они демонстрируют весьма широкую возможность применения функциональных методов к нахождению статистических характеристик решения задач. При этом, как часто оказывается, рассмотренные методы дают более мощный аппарат для решения конкретных задач, чем другие статистические методы (примером этого может служить задача о распространении волн в среде со случайными неоднородностями, где другими методами трудно получить обоснованную картину поведения сильных флуктуаций волнового поля).

При этом такие задачи, как задачи о стохастическом параметрическом резонансе и волнах в одномерных случайных средах, являются простейшими, по постановке, модельными физическими задачами, допускающими полное всестороннее исследование. Более реальная задача, такая, как волна в трехмерной среде, уже не допускает такого полного исследования, и в этом случае рабочим аппаратом является приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды.

При рассмотрении трехмерной задачи мы ограничились приближением параболического уравнения. Отметим, что теория инвариантного погружения позволяет, в принципе, снять это ограничение [162].

Следует подчеркнуть еще раз в заключение, что в стохастических задачах переменными являются функции, и поэтому только функциональный подход должен быть и является адекватным исходной постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение, сб. статей.— М.: ОНТИ, 1936.
2. *Langevin P.*— C. R. Acad. Sci.— 1908, Paris, v. 146, p. 530.
3. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.*— Phys. Rev., 1930, v. 36, p. 823.
4. *Wang M. C., Uhlenbeck G. E.*— Rev. Mod. Phys., 1945, v. 17, p. 323.
5. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М.: ИЛ, 1947.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1964, 1967, т. 1, 2.
7. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М: ИЛ, 1962.
8. *Ито К.* Вероятностные процессы:— М.: ИЛ, 1960, 1963, вып. 1, 2.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965.
10. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей.— М.: Наука, 1965.
11. *Дуб Д. Л.* Вероятностные процессы.— М.: ИЛ, 1956.
12. *Дынкин Е. Б.* Основания теории марковских процессов.— М.: Физматгиз, 1959; Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.
13. *Ито К., Маккин Г. П.* Диффузионные процессы и их траектории.— М.: Мир, 1968.
14. *Новиков Е. А.*— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1919.
15. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, с. 707; — УФН, 1973, т. 110, с. 499.
16. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Теор. мат. физ., 1973, т. 17, с. 273.
17. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1454.
18. *Bourret R. C., Frish U., Pouquet A.*— Physica, 1973, v. 65, p. 303.
19. *Музычук О. В.*— Теор. мат. физ., 1976, т. 28, с. 371.
20. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 562; *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1980, т. 23, № 6.
21. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1752.
22. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1979, т. 22, с. 716.
23. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.*— Теор. мат. физ., 1979, т. 41, с. 368.
24. *Кляцкин В. И.*,— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1165.
25. *Morrison J. A., McKenna J.*— SIAM—AMS Proc., 1973, v. 6, p. 97.
26. *Haken H.*— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 67.
27. *Van Kampen N. G.*— Phys. Rep., 1976, v. C-24, p. 171.
28. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.
29. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика.— М.: Наука, 1965, ч. I; 1967, ч. II.
30. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
31. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.

32. *Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 570.
33. *Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М.* и др.— УФН, 1970, т. 102, с. 3.
34. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1978.
35. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1965.
36. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики.— М.: Наука, 1967.
37. *Brissaud A., Frish U.*— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 524.
38. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1976, ч. I.
39. *Гихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1977.
40. *Хелстром К. В.*— В сб.: Теория связи / Под ред. Б. Р. Левина.— М.: Связь, 1972, с. 37.
41. *Кляцкин В. И.*— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 234.
42. *Furutsu K.*— J. Res. NBS, 1963, v. D 667, p. 303.
43. *Donsker M. D.*— Proc. Conf. Theory and Appl. of Analysis in Funct. Space: M. I. I. Press, 1964, p. 17. (Перевод в сб.: Математика, 1967, т. 11, № 3, с. 128).
44. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск: Наука и техника, 1976.
45. *Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 1279.
46. *Логинов В. М., Шапиро В. Е.*— Изв. АН СССР, Физ. атм. и ок., 1977, т. 13, с. 690; Physica, 1978, v. 91A, p. 563.
47. *Леонов В. Л., Ширяев А. Н.*— Теор. вер. и ее прим., 1959, т. 4, с. 342; 1960, т. 5, с. 293.
48. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.
49. *Питовранов С. Е., Четвериков В. М.*— ТМФ, 1978, т. 35, с. 211.
50. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Наука, 1974.
51. *Глуховский А. Б., Кляцкин В. И.*— Изв. АН СССР, Физ. атм. и ок., 1973, т. 9, с. 675.
52. *Hasegava H.*— Phys. Lett., 1977, v. 60A, № 3, p. 171.
53. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, с. 1400.
54. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М.* и др. Нелинейные системы гидродинамического типа.— М., Наука, 1974.
55. *Кузовлев Г. Н., Бочков Ю. Е.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1503.
56. *Гледзер Е. Б., Монин А. С.*— УМН, 1974, т. 29, № 3, с. 111.
57. *Апресян Л. А.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 165.
58. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 169.
59. *Kraichnan R. H.*— J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 124.
60. *Bourret R. C.*— Canad. J. Phys., 1962, v. 40, p. 782; — Nuovo Cimento, 1962, v. 26, p. 1.
61. *Финкельберг В. М.*— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 401.
62. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.
63. Квантовая теория поля и физика фазовых переходов: сб. статей.— М.: Мир, 1975.
64. *Дубков А. А., Музычук О. В.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 901; *Налбандян О. Г., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 549.
65. *Кляцкин В. И.*, Изв. АН СССР: Мех. жидк. и газа, 1971, № 4, с. 120.
66. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 699.

67. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 2080;— Изв. вузов, Радиофизика, 1976, т. 19, с. 1368.
68. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1979, т. 22, с. 1283.
69. *Гурбатов С. Н., Пелиновский Е. М., Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 1485.
70. *Golberg M. A.*— Appl. Math. and Com., 1975, v. 1, p. 1; *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике.— М.: Мир, 1976.
71. *Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 998.
72. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
73. *Papanicolaou G. C., Keller J. B.*— SIAM, J. Appl. Math., 1971, v. 21, p. 287.
74. *Митропольский Ю. А.* Методы усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.
75. *Музычук О. В.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 534.
76. *Герценштейн М. Е., Васильев В. Б.*— Теор. вер. и ее прим., 1959, т. 4, с. 424; — Радиот. и электр., 1959, т. 4, с. 611.
77. *Беспалов В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1959, т. 2, с. 711.
78. *McKenna J., Morrison J. A.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2348.
79. *Газарян Ю. Л.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1856.
80. *Papanicolaou G. C.*— SIAM, J. Appl. Math., 1971, v. 21, p. 13.
81. *Morrison J. A., Papinicolaou G. C., Keller J. B.*— Com. Pure and Appl. Math., 1971, v. 24, p. 473.
82. *Sulem P. L., Frish U.*— J. Plasma Phys., 1972 v. 8, p. 217.
83. *Рыжов Ю. А.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1240.
84. *Гельфгат В. И.*— Акуст. журн., 1972, т. 18, с. 31; *Kohler W., Papanicolaou G. C.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1733; 1974, v. 15, p. 2186.
85. *Lang R. H.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1921.
86. *Абрамович Б. С., Дятлов А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1975, т. 18 с. 1222.
87. *Kohler W., Papanicolaou G. C.*— SIAM J. Appl. Math., 1976, v. 30, p. 263.
88. *Захар-Иткин М. Х.*— УМН, 1976, т. 31, с. 2.
89. *Абрамович Б. С., Рыжов Ю. А.*: Тезисы 7-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению радиоволн.— Ростов н/Д, 1977.
90. *Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1979, т. 22, с. 566.
91. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1979, т. 22, с. 180; 1979, т. 22, с. 591; *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.* Изв. вузов, Радиофизика, 1980, т. 23, с. 413.
92. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1040.
93. *Бреховских В. Л., Татарский В. И.*— Изв. АН СССР, Физ. атм. и ок., 1977, т. 13, с. 144.
94. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии.— М.: ИЛ, 1953; *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: Гостехиздат, 1956.
95. *Papanicolaou G. C.*— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1912.
96. *Marcuse D.*— IEEE Trans, 1972, v. MTT-20, p. 54; *Morrison J. A.*— IEEE Trans., 1974, v. MTT-22, p. 126.
97. *Белов В. Д., Рыбак С. А.*— Акуст. журн., 1975, т. 21, с. 173.
98. *Грачева М. Е., Гурвич А. С.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1965, т. 8, с. 717.
99. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л.* и др. Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1976.
100. *Лотова Н. А.*— УФН, 1975, т. 115, с. 603.
101. *Liller W., Elliot J. L., Veverka J.* et al.— Icarus, 1974, v. 22, p. 82.

102. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1972, т. 15, с. 1433.
103. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1629.
104. *Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С.* и др.— УФН, 1974, т. 114, с. 31.
105. *Фэнте Р. Л.* — ТИИЭР, 1975, т. 63, № 12, с. 43.
106. Wave Propagation and Underwater Acoustics/Ed. by J. B. Keller and J. S. Papadakis, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
107. Laser Beam Propagation in the Atmosphere/Ed. J. W. Strohbehn, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.
108. *Якушкин И. Г.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1350.
109. *Гельфгат В. И.*— Акуст. журн., 1976, т. 22, с. 123; *Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 1240.
110. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, с. 1061; *Кляцкин В. И., Кон В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1972, т. 15, с. 1381.
111. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 662.
112. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 12, с. 1506.
113. *Кляцкин В. И.*— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 952.
114. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1975, т. 18, с. 63.
115. *Татарский В. И.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2106.
116. *Чернов Л. А.* Волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1975.
117. *Долин Л. С.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. 11, с. 840.
118. *Beran H. J.*— J. Opt. Soc. Am., 1970, v. 60, p. 518.
119. *Beran H. J., Ho T. L.*— J. Opt. Soc. Am., 1969, v. 59, p. 1134.
120. *Шишов В. И.*— Труды ФИАН, 1967, т. 38, с. 171.
121. *Шишов В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. 11, с. 866.
122. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, с. 1069.
123. *Долин Л. С.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1964, т. 7, с. 380.
124. *Whitman A. M., Beran M. J.*— J. Opt. Soc. Am., 1970, v. 60, p. 1595.
125. *Артемьев А. В., Гурвич А. С.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, с. 734.
126. *Каллистратова М. А., Покасов В. В.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, с. 1200.
127. *Brown W. P.*— J. Opt. Soc. Am., 1972, v. 62, p. 966.
128. *Дагкесманская И. М., Шишов В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, с. 16.
129. *Елепов Б. С., Михайлов Г. А.*— ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, с. 1264.
130. *Кляцкин В. И.*— Акуст. журн., 1980, т. 26, с. 207.
131. *Papanicolaou G. C., McLaughlin D., Burridge R.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 84.
132. *Гурвич А. С., Каллистратова М. А.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. II, с. 661; *Кляцкин В. И.*, —Изв. вузов, Радиофизика, 1969, т. 12, с. 723.
133. *Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1972, т. 15, с. 540.
134. *Фрадкин Е. С.*— Труды ФИАН, 1965, т. 29, с. 7; Nucl. Phys., 1966, v. 76, p. 588.
135. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.*— УМН, 1956, т. 11, № 1, с. 77.
136. *Feynman R.*— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 108; *Евграфов М. А.*, ДАН СССР, 1970, т. 191, № 5, с. 979.
137. *Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М.*— УФН, 1972, т. 106, с. 593.
138. *Pau-Liu Chow.*— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1224.
139. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 624.
140. *Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 481.
141. *Gochelashvilli K. S., Shishov V. I.* — Opt. Acta, 1971, v. 18, p. 767.
142. *Гочелашвили К. С., Шишов В. И.*— ЖЭТФ, 1974, т. 36, с. 1237.
143. *Якушкин И. Г.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, № 8, с. 1194.

144. *Банах В. А., Креков Г. М., Миронов В. Л.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 252.
145. *Lee M. H., Elliot R. A., Holmes J. K.* et al.— J. Opt. Soc. Am., 1976, v. 66, p. 1389.
146. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И.* Изв. вузов, Радиофизика, 1967, т. 10, с. 68.
147. *Кон А. И., Фейзулин З. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, с. 71.
148. *Заворотный В. У.*— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 56.
149. *Денисов Н. Г.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, с. 34.
150. *Комиссаров В. М.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1966, т. 9, с. 292.
151. *Келлер Д. Б.*— В сб.: Гидродинамическая неустойчивость.— М.: Мир, 1964, с. 265.
152. *Фейнберг Е. Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
153. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954; Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.
154. *Зубарева Н. В.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1973, т. 16, с. 310.
155. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.*— Теор. вер. и ее прим., 1959, т. 14, с. 357.
156. *Татарский В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, с. 960.
157. *Заворотный В. У., Кляцкин В. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1972, т. 15, с. 897.
158. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1817.
159. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 940.
160. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
161. *Саичев А. И.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, с. 543.
162. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Тюбавин Л. Я.*— ДАН СССР, 1980, т. 250, № 5, с. 1112.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Статистические характеристики случайных величин и процессов** 9
§ 1. Случайные величины и их характеристики 9
§ 2. Вариационные (функциональные) производные 16
§ 3. Случайные процессы, поля и их характеристики 19
§ 4. Марковские процессы 30

Глава 2. **Расщепление корреляций в динамических системах** . . 44
§ 1. Примеры динамических систем 44
§ 2. Среднее значение произведения двух функционалов 48
§ 3. Гауссовский и пуассоновский случайные процессы 52
§ 4. Процессы телеграфного типа 57
§ 5. Марковские процессы 63
§ 6. Дельта-коррелированные случайные процессы 68

Глава 3. **Приближение дельта-коррелированного случайного процесса** 76
§ 1. Уравнение Эйнштейна — Фоккера (УЭФ) для системы дифференциальных уравнений 76
§ 2. Плотность вероятностей перехода 80
§ 3. Об условиях применимости уравнения Эйнштейна — Фоккера 82
§ 4. О методах решения УЭФ 82
§ 5. Обобщение на случай негауссовских флуктуаций параметров 93
§ 6. Метод последовательных приближений 105

Глава 4. **Случайные процессы с конечным радиусом корреляции** 113
§ 1. О некоторых классах стохастических уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание 113
§ 2. Марковские процессы общего вида 119
§ 3. Процессы телеграфного типа 121
§ 4. Методы квантовой теории поля в динамике стохастических систем (стохастические интегральные уравнения) 138

Глава 5. **Уравнения в частных производных и краевые задачи** 158
§ 1. Стохастическое уравнение Лиувилля для уравнений в частных производных 158
§ 2. Статистическое усреднение 163
§ 3. Теория инвариантного погружения и стохастические краевые задачи 166

Глава 6. **Стохастический параметрический резонанс** 176
§ 1. Приближение дельта-коррелированного случайного процесса 176
§ 2. Процессы с конечным радиусом корреляции 187

Глава 7. **Распространение волн в одномерной случайно-неоднородной среде** 193
§ 1. Постановка задачи 193
§ 2. Статистические характеристики коэффициентов отражения и прохождения волны 199
§ 3. Флуктуации интенсивности волны внутри слоя среды (стохастический волновой параметрический резонанс) 203
§ 4. О влиянии краевых условий на флуктуации интенсивности волны 211
§ 5. О влиянии моделей среды на статистические характеристики задачи 215
5.1. Дельта-коррелированные процессы (217). 5.2. Телеграфный процесс (218). 5.3. Обобщенный телеграфный процесс (224).
§ 6. Двухпроводная линия и уравнения переноса 227
§ 7. О влиянии затухания волны на флуктуации интенсивности 231

Глава 8. **Распространение волн в случайно-неоднородных средах (метод стохастического уравнения)** 247
§ 1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия 247
§ 2. Приближение диффузионного случайного процесса 258
§ 3. Метод последовательных приближений и условия применимости диффузионного приближения 276
§ 4. Амплитудно-фазовые флуктуации волны 279

Глава 9. **Распространение волн в случайно-неоднородных средах (функциональный метод)** 284
§ 1. Континуальная запись решения задачи 284
§ 2. Статистическое описание волнового поля 288
§ 3. Флуктуации интенсивности плоской волны 293
3.1. Случайный фазовый экран (295). 3.2. Случайно-неоднородная среда (301).

Глава 10. **Распространение волн в случайно-неоднородных средах (приближение геометрической оптики)** 309
§ 1. Диффузия лучей в случайно-неоднородных средах 309
§ 2. Амплитудно-фазовые флуктуации 318
§ 3. Геометрическое приближение в статистической теории волн 323

Заключение 329
Литература 332