В.К.Кобушкин, А.С.Кондратьев, Н.А.Приняткин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Данная книга представляет собой сборник задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике в Ленинградском университете, на городских физических олимпиадах, проводимых в Ленинграде, а также при прохождении курса физики в 239-й физико-математической средней школе г. Ленинграда.

Значительная часть задач составлена авторами. Все задачи снабжены подробными решениями. Сборник составлен таким образом, чтобы его содержание практически не совпадало с известными задачниками Зубова и Шальнова, Шаскольской и Эльцина.

Большое число задач посвящено разделам, которые, как показывает опыт, представляют наибольшую трудность для абитуриентов. Книга будет также полезной для учащихся и преподавателей старших классов средней школы.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I

МЕХАНИКА

В разделе „Механика“ употребляется ряд терминов и формулировок, значение которых заранее надо оговорить.

1. Считается известным, что каждый вектор может быть разложен на составляющие, в частности по взаимно-перпендикулярным направлениям. В случае, если движение происходит в одной плоскости, наиболее употребительными являются направления по горизонтали и вертикали, а также по касательной к движению ($\vec{t}$-направление) и по нормали к нему ($\vec{n}$-направление). Отсюда всякому векторному равенству

$$\vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{l}=\vec{k}$$

соответствуют два скалярных

$$\left.\begin{aligned} a_x+b_x+\ldots+l_x=k_x, \\ a_y+b_y+\ldots+l_y=k_y, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_t+b_t+\ldots+l_t=k_t, \\ a_n+b_n+\ldots+l_n=k_n, \end{aligned}\right\}$$

где a_x, b_x ... k_n — проекции векторов на соответствующие направления. Проекция вектора считается положительной, если соответствующая составляющая вектора имеет то же направление, что и положительное направление выбранной оси; например, при выборе положительного направления оси y вверх, проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на ось y будет отрицательной, ибо $\vec{g}$ направлено вертикально вниз.

2. Вектор, умноженный на положительный скаляр c, есть вектор того же направления, что и умножаемый вектор (на-

пример, векторы $\vec{g}$ и $\vec{g}t$ направлены одинаково — вертикально вниз), но в c раз больший.

3. Соотношения между элементами векторного треугольника или параллелограмма находятся по обычным тригонометрическим формулам.

4. Движение во всех задачах, кроме некоторых задач на криволинейное движение, считается равнопеременным

$$\left(\vec{a} = \text{const}\right),$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \vec{\Delta r} &= \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t, \end{aligned}\right\}$$

где $\vec{\Delta r}$ — перемещение тела; $\vec{v}_0$ — начальная скорость движения; $\vec{v}$ — конечная скорость движения; $\vec{a}$ — ускорение; t — время движения.

5. В задачах на работу и энергию используется закон изменения энергии, записанный в виде

$$A = A_{\text{сопр}} + \Delta W, \qquad (*)$$

где A — работа внешних сил, кроме сил сопротивления и силы тяжести; $A_{\text{сопр}}$ — работа против сил сопротивления; ΔW — изменение полной механической энергии тела или системы тел, причем

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}.$$

6. В задачах на вращательное движение надо различать два случая:

а) движение происходит с постоянной по величине скоростью. В этом случае для решения задачи достаточно только одного динамического уравнения, а именно: второго закона Ньютона, записанного в виде

$$F_n = ma_n. \qquad (**)$$

Здесь F_n — проекция равнодействующей силы на направление, перпендикулярное скорости: m — масса вращающегося тела, a_n — нормальная составляющая ускорения тела, которая находится из следующих соотношений:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2 f^2 R = \frac{4\pi}{T^2} R,$$

где v — величина скорости тела; R — радиус кривизны траектории; ω — угловая скорость вращения; f — частота вращения; T — период;

б) движение происходит с переменной по величине скоростью. В этом случае к равенству (**) добавляют закон изменения энергии (*) и решают систему уравнений, выражая a_n по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

7. Моментом силы называется произведение

$$M = Fr \sin\alpha,$$

где F—сила, r—расстояние от оси вращения до точки приложения силы; α—угол между направлениями $\vec{F}$ и $\vec{r}$. Знак момента силы определяется тем, в какую сторону он вращает тело. Обычно моменты сил, вращающих тело по часовой стрелке, считают положительными, против часовой стрелки — отрицательными.

Задача № 1

Лодочник гребет, передвигаясь со скоростью v относительно воды под углом α к течению. Зная скорость течения воды u, найти скорость лодки относительно берегов (рис. 1).

Решение. Так как лодка участвует в двух движениях, то ее результирующая скорость равна

$$\vec{v}_{\text{рез}} = \vec{v} + \vec{u}.$$

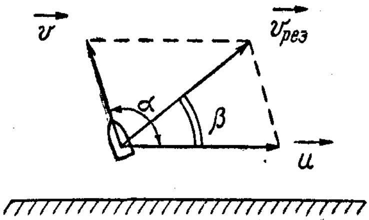

Рис. 1.

Найти вектор $\vec{v}_{\text{рез}}$ — значит найти величину $v_{\text{рез}}$ и ее направление, т. е. угол β, который составляет $\vec{v}_{\text{рез}}$ с каким-нибудь известным направлением, например с направлением течения реки.

Из рис. 1 видно, что

$$v_{\text{рез}} = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos(180^\circ - \alpha)},$$

или

$$v_{\text{рез}} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha}.$$

Далее по теореме синусов находим угол β:

$$\frac{\sin\beta}{v} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{v_{\text{рез}}}; \quad \sin\beta = \sin\alpha\,\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha}}.$$

Задача № 2

Два корабля движутся относительно берега со скоростями v_1 и v_2, направленными под углами α_1 и α_2 к меридиану. С какой скоростью второй корабль движется по отношению к первому (рис. 2)?

Решение. Очевидно, речь идет об относительной скорости, поэтому

$$\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Из чертежа видно, что $v_{2,1} = \sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2v_2v_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$. Направление $\vec{v}_{2,1}$ можно определить углом β, который составляет скорость $\vec{v}_{2,1}$ со скоростью первого корабля. Из

$$\frac{\sin\beta}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{v_{2,1}}$$

находим $\sin\beta$, а затем и сам угол β по тригонометрическим таблицам.

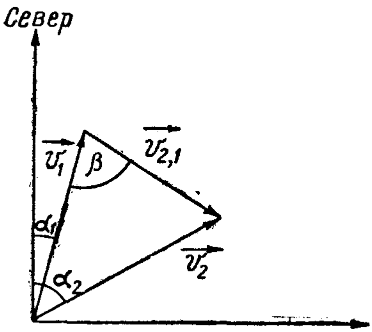

Рис. 2.

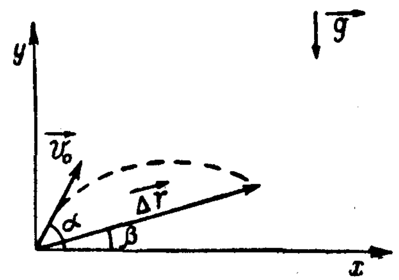

Рис. 3.

Задача № 3

Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0 Где оно будет через время t (рис. 3)?

Решение. Тело участвует в двух перемещениях: по инерции со скоростью $\vec{v}_0$ и в свободном падении с ускорением $\vec{g}$. Построив треугольник перемещений, получим (теорема косинусов):

$$\Delta r = r = \sqrt{(v_0t)^2 + \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 - 2v_0t\cdot\frac{gt^2}{2}\cos(90^\circ - \alpha)}.$$

Направление радиуса-вектора $\vec{r}$ определим углом β с горизонталью, тогда по теореме синусов

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\frac{gt^2}{2}} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{r},$$

откуда

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{r}\cdot\frac{gt^2}{2}.$$

Найдя $\sin(\alpha - \beta)$, по известному α определим β.

Задача № 4

Из ямы глубиной h производится выстрел со скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту. На каком расстоянии S по горизонтали упадет снаряд? Какова при этом максимальная высота подъема снаряда над уровнем земли (рис. 4)?

Решение. Перемещение снаряда определяется выражением

$$\vec{\Delta r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

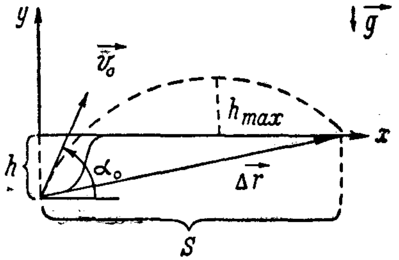

Рис. 4.

Проектируя все векторы на вертикальное и горизонтальное направления, получим

$$\Delta y = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2};$$

$$\Delta x = v_0 t \cos\alpha_0,$$

исключая отсюда t и учитывая, что $\Delta y = h$ и $\Delta x = S$, получим

$$h = S\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}.$$

Решая это уравнение, находим S.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся тем, что в искомой точке $v_y = 0$. Но из $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ следует, что

$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt.$$

Отсюда время подъема снаряда

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}.$$

Подставляя это значение t в выражение для Δy и учитывая, что в данном случае $\Delta y = h_{\max} + h$, получим

$$h_{\max} + h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g^2},$$

откуда

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g} - h.$$

Задача № 5

На какой высоте (h_0) была сброшена бомба с самолета, летевшего горизонтально со скоростью v_0, если она попала в вершину горы, высотой h, на расстоянии S по горизонтали от точки бросания (рис. 5)?

Решение. Как и в предыдущей задаче,

$$\vec{\Delta r}=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{g}t^2}{2};$$

$$\Delta y=v_0 t\sin\alpha_0-\frac{gt^2}{2};$$

$$\Delta x=v_0 t\cos\alpha_0.$$

Учитывая, что $\alpha_0=0$, $\Delta y=h-h_0$ и $\Delta x=S$, получим, исключая время t из системы уравнений, $h-h_0=-\frac{gS^2}{2v_0^2}$, откуда $h_0=h+\frac{gS^2}{2v_0^2}$.

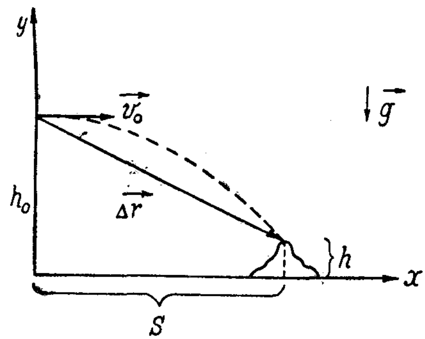

Рис. 5.

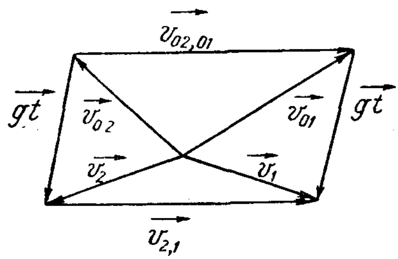

Рис. 6.

Задача № 6

Из некоторой точки брошены одновременно два тела со скоростью $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$. Какова скорость их взаимного перемещения и как меняется расстояние между ними (рис. 6)?

Решение

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{01}+\vec{g}t;$$

$$\vec{v}_2=\vec{v}_{02}+\vec{g}t.$$

Так как речь идет об относительном движении, то $\vec{v}_{2,1}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ или $\vec{v}_{2,1}=(\vec{v}_{02}+\vec{g}t)-(\vec{v}_{01}+\vec{g}t)$, откуда

$$\vec{v}_{2,1}=\vec{v}_{02}-\vec{v}_{01}.$$

Аналогично для перемещений

$$\vec{\Delta r}_1=\vec{v}_{01}t+\frac{\vec{g}t^2}{2};$$

$$\vec{\Delta r}_2=\vec{v}_{02}t+\frac{\vec{g}t^2}{2},$$

откуда

$$\vec{\Delta} r_{2,1}=\vec{\Delta} r_2-\vec{\Delta} r_1=\left(\vec{v}_{0\,2}t+\frac{\vec{g}t^2}{2}\right)-\left(\vec{v}_{0\,1}t+\frac{\vec{g}t^2}{2}\right)=\left(\vec{v}_{0\,2}-\vec{v}_{0\,1}\right)t,$$

т. е. тела движутся относительно друг друга с постоянной по величине и направлению скоростью.

Задача № 7

По наклонной доске пустили скользить снизу вверх льдинку. Через 1 *сек* и 2 *сек* от начала движения она дважды побывала на расстоянии $S=30$ *см* от начала доски. Определить начальную скорость и ускорение движения льдинки (рис. 7).

Решение. Вектор перемещения $\vec{\Delta} r$ проводим в точку, где тело побывало в указанные моменты времени

$$\vec{\Delta} r=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

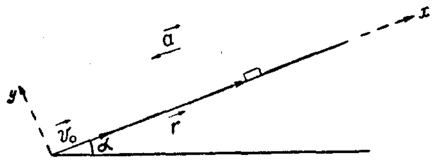

Рис. 7.

Выбрав ось x вдоль наклонной плоскости, находим проекции $\vec{\Delta} r$ на ось x в моменты времени t_1 и t_2. Учитывая, что $|\vec{\Delta} r|=S$, получаем

$$S=v_0t_1-\frac{at_1^2}{2};$$

$$S=v_0t_2-\frac{at_2^2}{2}.$$

Решение системы дает

$$v_0=45\,\frac{см}{сек};$$

$$a=30\,\frac{см}{сек^2}.$$

Задача № 8

Лошадь везет равномерно воз весом 6000 *н*, прикладывая силу 600 *н* под углом 30° к горизонту. Найти коэффициент трения k воза о дорогу (рис. 8).

Решение. На воз действует сила $\vec{F}$, прикладываемая лошадью, вес тела $\vec{P}$, сила $\vec{Q}$ — нормальная реакция дороги и сила $\vec{F}_{тр}$, обусловленная шероховатостью дороги. По второму закону Ньютона

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}+\vec{Q}+\vec{F}_{тр}+\vec{P}}{m},$$

но так как $\vec{v}=\overrightarrow{\text{const}}$, то $\vec{a}=0$, и, значит, $\vec{F}+\vec{Q}+\vec{F}_{тр}+\vec{P}=0$.

В проекциях на оси x и y имеем

$$F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0;$$
$$F\sin\alpha + Q - P = 0,$$

и так как $F_{\text{тр}} = kQ$, то

$$F\cos\alpha - kQ = 0;$$
$$F\sin\alpha + Q - P = 0.$$

Исключая из этих равенств Q, получим

$$k = \frac{F\cos\alpha}{P - F\sin\alpha} = \frac{600\frac{\sqrt{3}}{2}}{6000 - 600\cdot\frac{1}{2}} \approx 0{,}09.$$

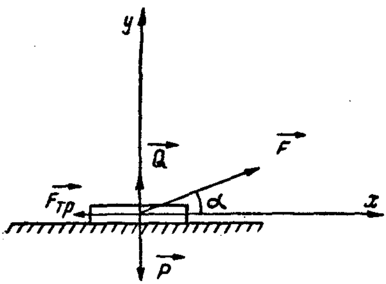

Рис. 8.

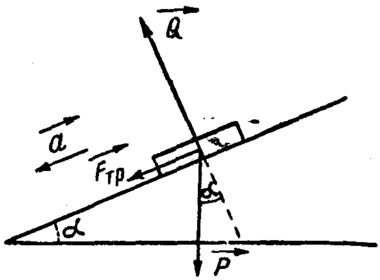

Рис. 9.

Задача № 9

Автомобиль, имея у основания горы (угол наклона $\alpha = 30°$) скорость 36 *км/час*, движется далее с выключенным двигателем. Считая коэффициент трения k равным 0,05, найти время, в течение которого скорость автомобиля уменьшится до 18 *км/час* (рис. 9).

Решение. На автомобиль действуют силы: $\vec{P}$, обусловленная притяжением к земле, $\vec{Q}$, обусловленная деформацией дороги, и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. По второму закону Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{Q} + F_{\text{тр}}}{m}.$$

Так как ускорение в задаче не упомянуто, то к этому уравнению надо добавить кинематическое уравнение $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ (ибо в задаче упомянуты v_0, v и t). Тогда

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{\text{тр}}}{m};$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Исключая отсюда $\vec{a}$, получим

$$\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}=\frac{\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{\text{тр}}}{m},$$

или в проекциях на t и n направления с учетом $F_{\text{тр}}=kQ$ получим

$$\frac{v-v_0}{t}=\frac{-P\sin\alpha-kQ}{m};$$

$$0=Q-P\cos\alpha \quad (\text{так как } a_n=0).$$

Исключая Q, имеем

$$\frac{v-v_0}{t}=-\frac{P\sin\alpha+kP\cos\alpha}{m}.$$

Отсюда, учитывая $\frac{P}{m}=g$, получим

$$t=-\frac{v-v_0}{g(\sin\alpha+k\cos\alpha)}=1 \text{ сек}.$$

Задача № 10

На нити, выдерживающей натяжение 10 *н*, поднимают груз весом в 5 *н* из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным и силу сопротивления равной в среднем 1 *н*, найти предельную высоту, на которую можно поднять груз за 1 *сек* так, чтобы нить не порвалась (рис. 10).

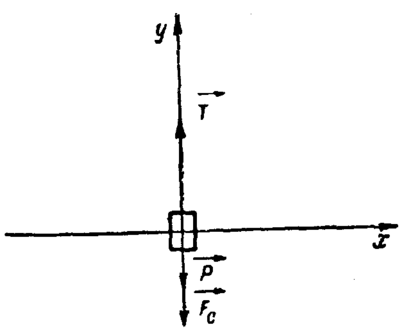

Рис. 10.

Решение. На груз действуют: сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{F}_c$. По второму закону Ньютона

$$\vec{a}=\frac{\vec{T}+\vec{P}+\vec{F}_c}{m}.$$

С учетом кинематического уравнения $\vec{h}=\frac{\vec{a}t^2}{2}$ имеем в проекции на вертикаль

$$a=\frac{T-P-F_c}{m};$$

$$a=\frac{2h}{t^2}.$$

Исключая отсюда a, получим после преобразований

$$h=\frac{T-P-F_c}{P}\cdot g\frac{t^2}{2}=3{,}92 \text{ м}.$$

Задача № 11

Ведро с водой поднимают из колодца равноускоренно. Зная, что за время t скорость ведра возросла от v_0 до v и что масса воды m, найти давление воды на дно. Площадь дна S, ведро цилиндрическое (рис. 11).

Решение. На воду действуют: сила тяжести $\vec{P}$ и сила давления $\vec{Q}$ со стороны деформированного дна. Очевидно,

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{Q}}{m};$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

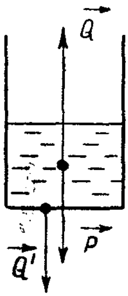

Рис. 11.

Исключая отсюда $\vec{a}$, получим

$$\frac{\vec{P} + \vec{Q}}{m} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Проектируя на вертикаль, имеем

$$\frac{-P + Q}{m} = \frac{v - v_0}{t},$$

откуда с учетом того, что $P = mg$,

$$Q = m\left(\frac{v - v_0}{t} + g\right).$$

Q — это сила, действующая на воду со стороны ведра, нас же интересует давление p, оказываемое водой на дно ведра; но по третьему закону Ньютона $\vec{Q} = -\vec{Q}'$, или в проэкции на вертикаль $Q = Q'$. С учетом $Q' = pS$ получим

$$pS = +m\left(\frac{v - v_0}{t} + g\right),$$

откуда

$$p = +\frac{m}{S}\left(\frac{v - v_0}{t} + g\right).$$

Задача № 12

По наклонной плоскости (угол наклона α) движутся два тела весом P_1 и P_2, связанные нерастяжимой и невесомой нитью. Считая коэффициент трения между вторым грузом и плоскостью равным k, найти силу Q, действующую на блок со стороны плоскости (блок невесом и трение в оси отсутствует) (рис. 12).

Решение. На блок действуют: наклонная плоскость и нить. Отсюда видно, что для определения Q необходимо знать натяжение нити T, для нахождения которой в свою очередь надо рассмотреть движение грузов. Тогда

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{P}_1 + \vec{T}_4}{m_1};$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{T}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{P}_2 + \vec{F}_{тр}}{m_2}.$$

Так как $a_n = 0$ и $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$, то $a_{t1} = a_{t2} = a$ и потому, расписывая уравнения по t и n-направлениям и учитывая, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |T_4| = T$, а $m = \frac{P}{g}$, получим

$$a = \frac{P_1 - T}{P_1} \cdot g;$$

$$a = \frac{T - F_{тр} - P_2 \sin\alpha}{P_2} \cdot g;$$

$$0 = Q_2 - P_2 \cos\alpha.$$

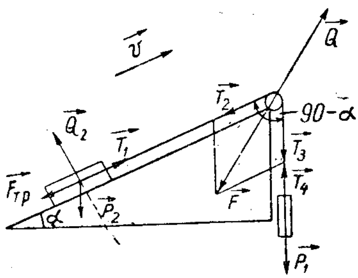

Рис. 12.

Так как $F_{тр} = kQ_2$, то, исключая из этих уравнений a и Q_2, получим

$$\frac{P_1 - T}{P_1} = \frac{T - kP_2 \cos\alpha - P_2 \sin\alpha}{P_2},$$

откуда

$$T = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Из рис. 12 видно, что $\vec{Q} = -\vec{F}$ (или $Q = F$ численно). Из ромба со сторонами $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$ имеем

$$F = 2T\cos\frac{90^\circ - \alpha}{2},$$

и тогда

$$Q = +2T\cos\frac{90^\circ - \alpha}{2}.$$

Задача № 13

На два бруска с массами m_1 и m_2, связанных нерастяжимой нитью, действуют силы F_1 и F_2 под углами α_1 и α_2 к горизонту. Найти ускорение системы, если коэффициент трения между брусками и горизонтальной плоскостью равен k (рис. 13).

Решение. Так как силы натяжения нас не интересуют, можем рассматривать всю систему как одно тело. Тогда, считая направление вдоль движения положительным и учитывая, что $a_n = 0$ (и, следовательно, $a_t = a$), получим

$$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_{\text{тр}_1}-F_2\cos\alpha_2-F_{\text{тр}_2}}{m_1+m_2};$$

$$0=F_1\sin\alpha_1+Q_1-P_1+Q_2+F_2\sin\alpha_2-P_2;$$

и так как $F_{\text{тр}}=F_{\text{тр}_1}+F_{\text{тр}_2}=k(Q_1+Q_2)$, то

$$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-k(Q_1+Q_2)}{m_1+m_2};$$

$$0=F_1\sin\alpha_1+F_2\sin\alpha_2+(Q_1+Q_2)-P_1-P_2.$$

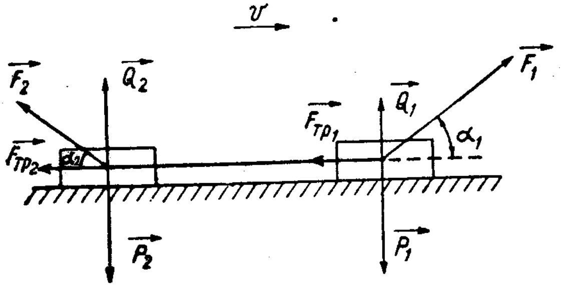

Рис. 13.

Исключая отсюда (Q_1+Q_2), получим

$$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-k(P_1+P_2-F_1\sin\alpha_1-F_2\sin\alpha_2)}{m_1+m_2}$$

и окончательно, учитывая, что $P=mg$,

$$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-k[(m_1+m_2)g-F_1\sin\alpha_1-F_2\sin\alpha_2]}{m_1+m_2}.$$

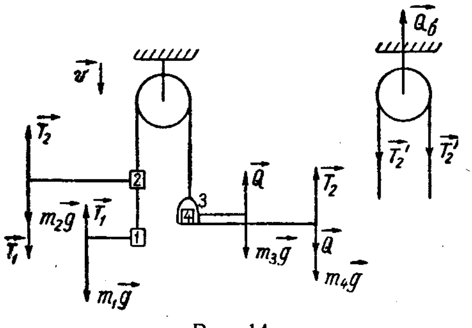

Рис. 14.

Задача № 14

Найти натяжения T_1 и T_2, а также силы, с которыми взаимодействуют тела *3* и *4* (чашка и груз), если m_1, m_2, m_3 и m_4 известны, блок невесом, трения в оси нет. Найти также силы, действующие на ось блока (рис. 14).

Решение. Считая направление вдоль движения положительным и учитывая, что $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4| = a$, получим в проекциях на вертикаль

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \qquad Q - m_3 g = m_3 a;$$

$$T_1 + m_2 g - T_2 = m_2 a; \quad T_2 - Q - m_4 g = m_4 a.$$

Решая систему, найдем T_1, T_2 и Q. Так как блок не имеет ускорения, то $\vec{Q}_б = -2\vec{T}_2'$, где $T_2' = T_2$ находится из системы.

Задача № 15

С каким ускорением должен ехать автомобиль массой m вниз по доске массой M, лежащей на неподвижном клине с углом наклона α, чтобы доска скользила по клину равномерно вверх. Коэффициент трения автомобиля о доску равен k_1, доски о клин — k_2 (рис. 15).

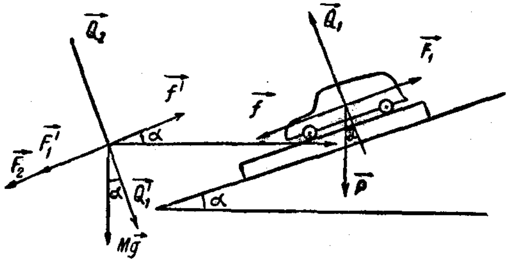

Рис. 15.

Решение. Считая направление по движению атомобиля положительным и учитывая, что $a_n = 0$ (и значит $a_t = a$), имеем в проекциях на t и n-направления

$$f + mg\sin\alpha - F_1 = ma_1; \tag{1}$$

$$Q_1 - mg\cos\alpha = 0; \tag{2}$$

$$F_1 + F_2 + Mg\sin\alpha - f = 0; \tag{3}$$

$$-Q_1 + Q_2 - Mg\cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Складывая (1) с (3) и (2) с (4), получим

$$g(m + M)\sin\alpha + F_2 = ma_1; \tag{5}$$

$$Q_2 - g(m + M)\cos\alpha = 0. \tag{6}$$

Учитывая, что $F_2 = k_2 Q_2$, имеем, исключая из (5) и (6) Q_2,

$$g(m + M)\sin\alpha + k_2 g(m + M)\cos\alpha = ma_1.$$

Откуда

$$a_1 = g\left(1 + \frac{M}{m}\right)(\sin\alpha + k_2\cos\alpha).$$

Видно, что ускорение автомобиля не зависит от k_1, т. е. от трения между автомобилем и доской.

Задача № 16

По горизонтально расположенному полу лифта, движущегося с ускорением a, направленным вертикально вверх, равномерно перемещают брусок, прикладывая силу F, направленную горизонтально. Коэффициент трения бруска о пол k. Определить массу бруска (рис. 16).

Решение. На брусок действуют силы; вес P, сила реакции пола лифта $F_р$, сила трения $F_{тр}$ и сила F. На основании второго закона Ньютона

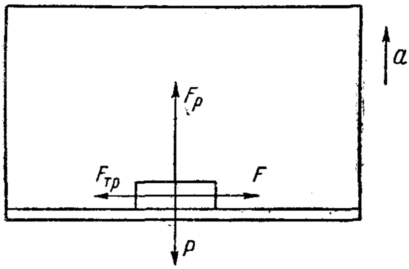

Рис. 16.

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_р}{m}.$$

Проектируя это уравнение на горизонтальное и вертикальное направления, имеем

$$F_р - P = ma;$$
$$F = F_{тр}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = kF_р$ и $P = mg$, получим, исключив $F_р$ из системы,

$$m = \frac{F}{k(g+a)}.$$

Задача № 17

К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $a_0 = 1,2$ *м/сек*^{2}, прикреплен динамометр, к которому подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ *г* и $m_2 = 300$ *г*. Пренебрегая массой блока, определить показание динамометра (рис. 17).

Решение. Динамометр показывает силу растяжения пружины $\vec{F}$, которую можно определить из второго закона Ньютона. На блок действуют силы: $\vec{F}$ — сила растяжения пружины, $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$ — силы натяжения нитей. По второму закону Ньютона $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2' = 0$, так как массой блока M мы пренебрегаем. Проектируя выражение на вертикальное направление, получаем $F = 2T$, так как $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_2'\right| = T$.

Силы натяжения нитей определяем из уравнений движения грузов m_1 и m_2 относительно земли. Для груза m_1 $\vec{a}_1 + \vec{a}_0 = \frac{\vec{P}_1 + \vec{T}_1}{m_1}$; для груза m_2 $\vec{a}_2 + \vec{a}_0 = \frac{\vec{P}_2 + \vec{T}_2}{m_2}$, где $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения грузов относительно лифта, причем $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$.

Проектируя равенства на вертикальное направление, получаем

$$\begin{cases} a + a_0 = \dfrac{-P_1 + T}{m_1}, \\ -a + a_0 = \dfrac{-P_2 + T}{m_2}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем

$$T = \frac{2m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2}$$

и показание динамометра

$$F = \frac{4m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2} = 5{,}3 \ н.$$

Следует заметить, что численное равенство ускорений грузов (относительно лифта) следует из условия нерастяжимости нити, а сила натяжения нити постоянна вследствие отсутствия трения и пренебрежения массой блока и нити.

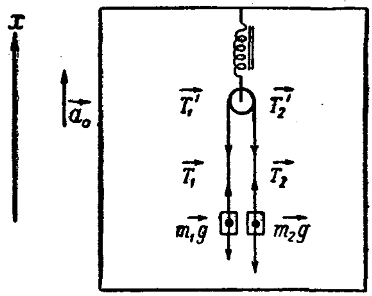

Рис. 17.

Задача № 18

Каков коэффициент трения машины о землю, если она очень медленно и равномерно движется в результате выброса из нее струи воды сечением S со скоростью u в направлении, противоположном движению машины; масса машины M и $M \gg m$, где m — масса выбрасываемой за время движения воды (рис. 18)? Плотность воды ρ считать известной.

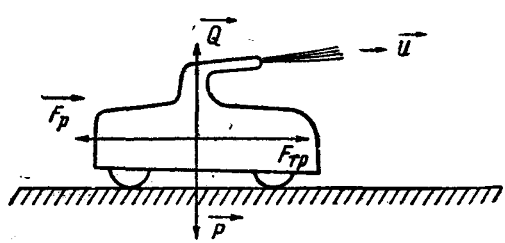

Рис. 18.

Решение. Очевидно,

$$F_{тр} - F_р = 0;$$
$$Q - Mg = 0,$$

где $F_р$ — сила реакции вытекающей воды, причем $F_р = u\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$.

Тогда

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} - u\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 0, \\ Q - Mg = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} kQ - u\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 0, \\ Q - Mg = 0. \end{cases}$$

Исключая отсюда Q, имеем $kMg - u\frac{\Delta m}{\Delta t} = 0$, где Δm — изменение массы системы за счет выброса воды. Но $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho S u$, а тогда

$$kMg - \rho S u^2 = 0,$$

откуда

$$k = \frac{\rho S u^2}{Mg}.$$

Задача № 19

Космический корабль влетает со скоростью v_1 в облако космической пыли плотностью ρ_1. Чтобы скорость его не уменьшилась, включили двигатель. Какова плотность ρ_2 вытекающих из сопла сечением S_2 газов, если скорость их вытекания относительно корабля равна v_2, а сечение корабля S_1? Пылинки при ударе о корабль прилипают к нему (рис. 19).

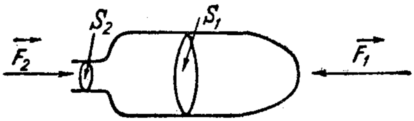

Рис. 19.

Решение. Возьмем за систему отсчета корабль. Так как корабль по отношению к самому себе ускорения не имеет, то $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ или $F_1 - F_2 = 0$, где $F_1 = v_1\frac{\Delta m}{\Delta t_1} = \rho_1 S_1 v_1^2$. Аналогично и $F_2 = \rho_2 S_2 v_2^2$. Тогда

$$\rho_1 S_1 v_1^2 - \rho_2 S_2 v_2^2 = 0,$$

откуда

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 S_1 v_1^2}{S_2 v_2^2}.$$

Задача № 20

Тело весом P, находящееся на вершине горы высотой h, соскальзывает вниз по наклону горы и, пройдя некоторый путь, останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы втащить его обратно на гору по тому же пути?

Решение. Находясь на вершине горы, тело обладало потенциальной энергией, равной Ph. За счет этого запаса энергии тело, спускаясь по склону и скользя дальше по горизонтальному участку до остановки, совершает работу против силы трения. Величина этой работы равняется, следовательно, Ph. Чтобы втащить тело обратно по тому же пути на гору, нужно, во-первых, сообщить ему запас потенциальной энергии, равный Ph, и, во-вторых, совершить работу против силы трения, которая тоже равняется Ph. Следовательно, всего необходимо совершить работу, равную $2Ph$.

Задача № 21

По кривому желобу длиною l соскальзывает брусок весом P. Считая силу трения равной в среднем $F_{тр}$, а разность высот верхней и нижней части желоба равной H, найти скорость бруска в конце желоба (рис. 20).

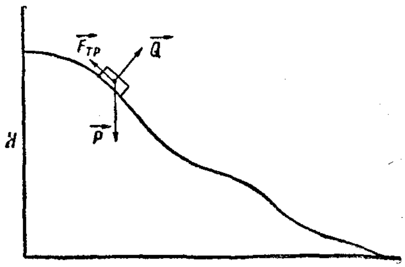

Рис. 20.

Решение. По закону изменения энергии имеем $A = A_{сопр} + \Delta W$. Так как сила тяги отсутствует, то $0 = A_{сопр} + \Delta W$. Учитывая, что ΔW — изменение полной механической энергии бруска, получим:

$$0 = F_{тр} l + \left(\frac{mv^2}{2} + mgh\right) - \left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh_0\right).$$

Зная, что $m = \frac{P}{g}$, $v_0 = 0$ и $h_0 - h = H$, получим

$$0 = F_{тр} l + \frac{P}{g}\left(\frac{v^2}{2} - gH\right),$$

откуда

$$v = \sqrt{2\left(gH - \frac{F_{тр} l}{P} \cdot g\right)}.$$

Задача № 22

Текущая по прямой трубе, наклоненной под углом α к горизонту, жидкость тормозится с постоянным ускорением так, что скорость ее уменьшается от v_0 до v за время Δt. Какую удельную работу $\frac{\Delta A}{\Delta V}$ совершает поток, если плотность жидкости равна ρ?

Решение. В соответствии с законом изменения энергии имеем для элемента жидкости

$$\Delta A = \Delta m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + g\Delta h\right)$$

и так как $\Delta m = \rho \Delta V$, а $\Delta h = \Delta l \sin \alpha = \frac{v_0 + v}{2} \Delta t \cdot \sin \alpha$,

то

$$\Delta A = \rho \Delta V \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + g \frac{v + v_0}{2} \Delta t \cdot \sin \alpha \right),$$

откуда

$$\frac{\Delta A}{\Delta V} = \rho \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + g \frac{v + v_0}{2} \Delta t \cdot \sin \alpha \right).$$

При этом в силу малой сжимаемости жидкости $\rho \approx \mathrm{const}$ по всему потоку, и торможение происходит практически для всего потока одновременно, в отличие, например, от потока газа, в котором одни части потока могут иметь существенные изменения скорости при практически неизменной скорости в других частях потока.

Задача № 23

Через два маленьких неподвижных блока, оси которых горизонтальны и находятся на одной высоте на расстоянии 90 *см* друг от друга, перекинута нить. К концам и к середине нити привязаны три одинаковых груза. Средний груз поднимают так, чтобы нить была горизонтальна, а сам груз находился посередине между блоками, и отпускают, после чего средний груз опускается, а крайние поднимаются. С какой скоростью двигаются грузы в тот момент, когда части нити образуют угол 120°? Трением пренебречь (рис. 21 и 22).

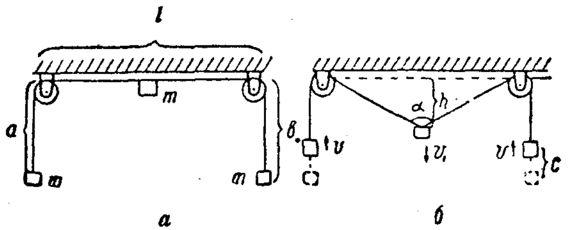

Рис. 21.

Решение. Так как трение отсутствует, то полный запас механической энергии системы остается неизменным. Примем высоту, на которую подвешены блоки, равной нулю. Тогда в начальный момент система обладает только потенциальной энергией

$$E_1 = - mg(a + b). \tag{1}$$

Когда части нити образуют угол α, равный 120°, средний груз опустится на высоту h и будет двигаться со скоростью v_1. Крайние грузы поднимутся на высоту c и будут двигаться со скоростью v. Полный запас энергии в этом положении

$$E_2 = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} - mg(a + b - 2c) - mgh. \tag{2}$$

Так как $E_1 = E_2$, то приравнивая (1) и (2), получаем

$$v^2 + \frac{v_1^2}{2} + 2gc - gh = 0. \qquad (3)$$

Для того чтобы выразить c через l и угол α, нужно учесть, что вследствие нерастяжимости нити расстояние от любого крайнего груза до среднего вдоль нити остается постоянным во все время движения.

$$c = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right);$$

h находится из треугольника

$$h = \frac{l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

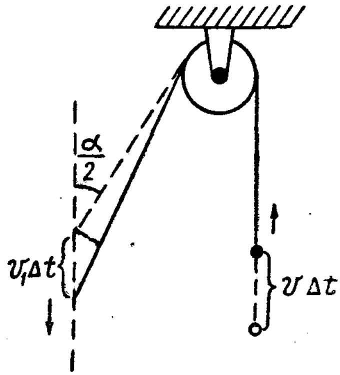

Рис. 22.

Теперь остается связать между собой v и v_1. Рассмотрим движение грузов в течение промежутка времени Δt настолько малого, чтобы можно было пренебречь изменением скорости за этот промежуток (рис. 22).

Когда один из крайних грузов поднимется на высоту $v\Delta t$, средний опустится на $v_1\Delta t$. Учитывая нерастяжимость нити и незначительность времени Δt, находим

$$v = v_1 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Подставляя значения c, h и v в (3), находим v_1, а затем из (4) находим v: $v_1 = 126$ *см/сек*; $v = 63$ *см/сек*.

Задача № 24

Два костяных шарика одинаковой массы налетают друг на друга со скоростями v_1 и v_2 под углом α (рис. 23, *а*) и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найти угол разлета (β) (рис. 23, *б*).

Решение. По закону сохранения количества движения и закону сохранения кинетической энергии при ударе имеем

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2;$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2},$$

после сокращения на m и на 2 эти формулы примут вид

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2;$$

$$v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Но $m\left|\vec{v}_1+\vec{v}_2\right|$ и $m\left|\vec{u}_1+\vec{u}_2\right|$ суть величины диагоналей векторных параллелограммов, которые по закону сохранения количества движения равны друг другу. Применяя теорему косинусов, получим

$$m^2\left[v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos(180°-\alpha)\right]=$$
$$=m^2\left[u_1^2+u_2^2-2u_1u_2\cos(180°-\beta)\right].$$

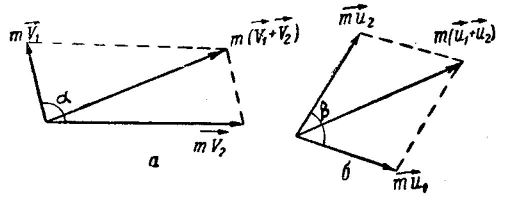

Рис. 23.

И так как $v_1^2+v_2^2=u_1^2+u_2^2$, то $2\,v_1v_2\cos\alpha=2u_1u_2\cos\beta$, откуда окончательно

$$\cos\beta=\frac{v_1v_2\cos\alpha}{u_1u_2}.$$

Задача № 25

При абсолютно упругом ударе двух шаров, налетевших под углом α друг на друга, скорость одного из шаров по величине не изменилась. Под каким углом β шары разлетелись (рис. 23)?

Решение. Как и в предыдущей задаче,

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2;$$
$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Из второго равенства, в силу $v_1=u_1$, вытекает $v_2=u_2$. Но тогда из

$$m_1^2v_1^2+m_2v_2^2-2m_1m_2v_1v_2\cos(180°-\alpha)=$$
$$=m_1^2u_1^2+m_2u_2^2-2m_1m_2u_1u_2\cos(180°-\beta)$$

следует

$$v_1v_2\cos\alpha=u_1u_2\cos\beta,$$

откуда, в силу $v_1v_2=u_1u_2$, получаем $\cos\beta=\cos\alpha$.

Задача № 26

Два глиняных шарика с массами m_1 и m_2, подвешенные на нитях одинаковой длины l, отклонены на углы α_1 и α_2 от вертикали и отпущены. На какой угол β они отклонятся после абсолютно неупругого удара, который происходит в наинизшем положении шаров (рис. 24)?

Решение. Очевидно, после удара $A = A_{\text{сопр}} + \Delta W$, откуда из-за отсутствия сил тяги и сопротивления следует $\Delta W = 0$ или $(m_1 + m_2) gh = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}$ (кинетическая энергия после удара превратилась в потенциальную энергию отклонившихся шаров). После сокращения на $(m_1 + m_2)$ получим $gh = \frac{u^2}{2}$, или $gl(1 - \cos\beta) = \frac{u^2}{2}$, или $2gl \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{u^2}{2}$. Для нахождения α необходимо знать u — скорость шаров после удара. Но при ударе

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \qquad (1)$$

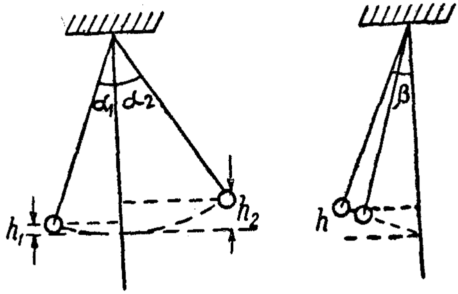

Рис. 24.

Следовательно, необходимо знать v_1 и v_2, т. е. скорости шаров перед ударом. Очевидно,

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h_1$$

и $$\frac{m_2 v_2^2}{2} = m_2 g h_2,$$

или

$$v_1^2 = 4lg \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \text{ и } v_2^2 = 4lg \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}.$$

Подставляя значения скоростей v_1, v_2 и u в равенство (1), получим $m_1 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{gl} - m_2 2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \sqrt{gl} = (m_1 + m_2) 2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{gl}$.

Сокращая на $2\sqrt{gl}$, имеем $m_1 \sin \frac{\alpha_1}{2} - m_2 \sin \frac{\alpha_2}{2} = (m_1 + m_2) \sin \frac{\beta}{2}$, откуда легко находим $\sin \frac{\beta}{2}$, а затем по тригонометрическим таблицам и β. В окончательное равенство l не входит, а это означает, что искомый угол β от l не зависит.

Задача № 27

Какую работу надо совершить по удалению тела массой m, покоившегося на поверхности Земли, в бесконечность, если работа против сил сопротивления в атмосфере составляет n-ю часть искомой работы. Вращение Земли не учитывать и считать известным, что потенциальная энергия тела в поле тяжести подсчитывается по формуле $W_{\text{п}} = -m\gamma \frac{M}{r}$, где r — расстояние тела до центра Земли; γ — гравитационная постоянная; M и m — массы Земли и тела соответственно.

Решение. По закону изменения энергии

$$A = A_{\text{сопр}} + \Delta W,$$

или

$$A = An + \left(\frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r}\right) - \left(\frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_0}\right).$$

Так как r бесконечно велико; v — бесконечно мало; $v_0 = 0$ и $r_0 = R_З$,

$$A = An + \gamma\frac{mM}{R_З},$$

откуда $A = \frac{\gamma mM}{(1-n)R_З}$.

Задача № 28

Какую работу надо совершить для равномерного переноса тела массы m с поверхности Земли на поверхность Луны, не учитывая их вращения и сопротивления атмосферы Земли? Все необходимые расстояния считать известными, среднюю плотность Луны и Земли считать одинаковой и равной ρ (рис. 25).

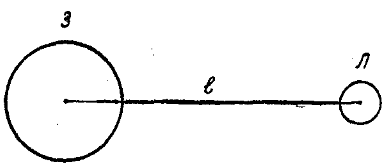

Рис. 25.

Решение. По закону изменения энергии $A = A_{\text{сопр}} + \Delta W$, учитывая отсутствие сил сопротивления, $A = \Delta W$. Так как движение тела равномерное, то $\Delta W_к = 0$ и, значит, $\Delta W = \Delta W_п$, а тогда $A = \Delta W_п$, т. е. перенос требует совершения работы, численно равной изменению потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли и Луны. Учитывая сказанное в предыдущей задаче, имеем

$$A = \left(-\gamma\frac{mM_Л}{R_Л} - \gamma\frac{mM_З}{l-R_Л}\right) - \left(-\gamma\frac{mM_З}{R_З} - \gamma\frac{mM_Л}{l-R_З}\right),$$

и так как $l \gg R_З$ и $l \gg R_Л$, то после очевидных преобразований получаем приближенное равенство

$$A \approx \gamma m\left[M_З\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{l}\right) - M_Л\left(\frac{1}{R_Л} - \frac{1}{l}\right)\right].$$

Так как $\frac{1}{R_З} \gg \frac{1}{l}$ и $\frac{1}{R_Л} \gg \frac{1}{l}$, то с еще более грубым приближением получаем

$$A \approx \gamma m\left(\frac{M_З}{R_З} - \frac{M_Л}{R_Л}\right).$$

Учитывая, что масса шара $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, окончательно получим

$$A \approx \frac{4}{3}\pi\rho m\gamma\left(R_З^2 - R_Л^2\right).$$

Задача № 29

Какую силу тяги развивают двигатели космического корабля, имеющего на расстоянии r от центра планеты ускорение $\vec{a}$ в направлении, противоположном ускорению свободного падения $\vec{g}$ у этой планеты? Массы корабля (M) и планеты (m) известны (рис. 26).

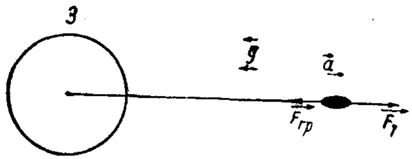

Рис. 26.

Решение. По второму закону Ньютона $\vec{F}_т + \vec{F}_{гр} = m\vec{a}$ или в проекции на прямую корабль — центр планеты $F_т - F_{гр} = ma$ или $F_т - \gamma \frac{mM}{r^2} = ma$, откуда

$$F_т = m\left(a + \gamma \frac{M}{r^2}\right).$$

Задача № 30

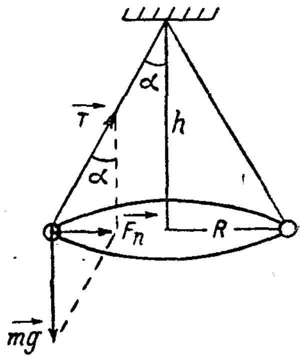

Рис. 27.

Грузик, подвешенный на нити, вращается в горизонтальной плоскости так, что расстояние от точки подвеса до плоскости, в которой происходит вращение, равно h. Найти частоту вращения f груза, считая ее неизменной (рис. 27).

Решение. Вращение вызывается суммой всех сил, действующих на грузик. Очевидно, что $F_n = ma_n$. Но $F_n = mg \operatorname{tg} \alpha$ и $a_n = 4\pi^2 f^2 R$, тогда $mg \operatorname{tg} \alpha = m 4\pi^2 f^2 R$; но так как $R = h \operatorname{tg} \alpha$, то $g = 4\pi f^2 h$, откуда

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Задача № 31

Две звезды с массами m_1 и m_2 движутся в космосе так, что расстояние l между их центрами остается неизменным. Определить характер их движения (рис. 28).

Решение. Так как между звездами действуют силы взаимного притяжения, то каждая из них должна двигаться ускоренно. По условию расстояние между ними неизменно, поэтому ускорения звезд должны быть перпендикулярными их скоростям, следовательно, каждая из них должна двигаться по окружности, причем обе окружности имеют общий центр (центр масс системы). Найдем его положение в периоды обращения звезд вокруг центра масс.

По второму закону Ньютона $F_{n_1}=ma_{n_1}$ и $F_{n_2}=ma_{n_2}$. Так как по третьему закону Ньютона $F_{n_1}=F_{n_2}$, то $m_1a_{n_1}=m_2a_{n_2}$ или, учитывая, что $a_n=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$,

$$m_1\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}=m_2\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}, \text{ или } \frac{m_1 r_1}{T_1^2}=\frac{m_2 r_2}{T_2^2}.$$

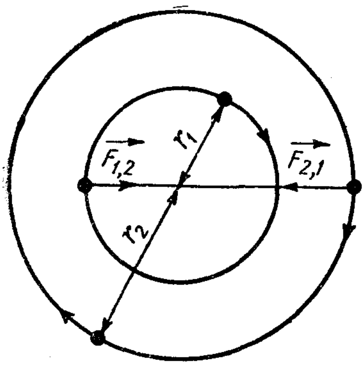

Рис. 28.

Чтобы звезды были все время на одинаковом друг от друга расстоянии l, проходящем через центр масс, необходимо, чтобы $T_1=T_2$, тогда $m_1r_1=m_2r_2$ и поскольку $r_1+r_2=l$, то

$$r_1=\frac{m_2 l}{m_1+m_2} \text{ и } r_2=\frac{m_1 l}{m_1+m_2}.$$

Так как на обе звезды внешние силы не действуют, то общее их количество движения не меняется. Это означает, что совместно с их вращением вокруг центра масс они могут двигаться в пространстве еще и так, что центр масс перемещается с постоянной скоростью.

Найдем периоды обращения звезд вокруг центра масс.

Для первой, например, звезды имеем $F_{n_1}=m_1a_n$, или $\gamma\frac{m_1m_2}{l^2}=m_1\frac{4\pi^2 r_1}{T^2}$, откуда $T=2\pi\sqrt{\frac{r_1 l^2}{\gamma m^2}}$. Учитывая, что $r_1=\frac{m_2 l}{m_1+m_2}$, получим $T=2\pi\sqrt{\frac{l^3}{\gamma(m_1+m_2)}}$. Отсюда видно, что период обращения звезд зависит только от суммарной их массы и расстояния между их центрами и не зависит от соотношения между m_1 и m_2, а также между r_1 и r_2. Если $m_1\gg m_2$, то из $m_1r_1=m_2r_2$ следует, что $r_2\gg r_1$, т. е. звезда с большой массой „топчется“ на небольшом расстоянии от центра масс, в то время как звезда с малой массой движется по окружности большого радиуса, т. е. практически звезда малой массы движется около почти неподвижной звезды большой массы по окружности радиуса $r_2\approx l$.

Задача № 32

Нить с шариком массой m отведена на угол α_0 от вертикали и отпущена. Найти натяжение нити в зависимости от переменного угла α и проекции этой силы на вертикальное и горизонтальное направления (рис. 29).

Решение. По второму закону Ньютона для проекций сил и ускорения на радиус дуги окружности имеем

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}. \qquad (1)$$

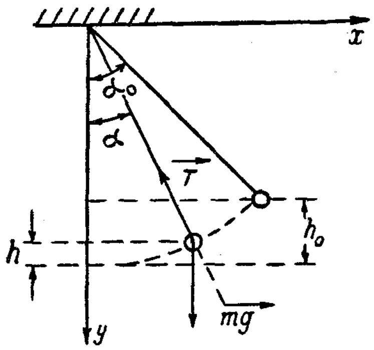

Рис. 29.

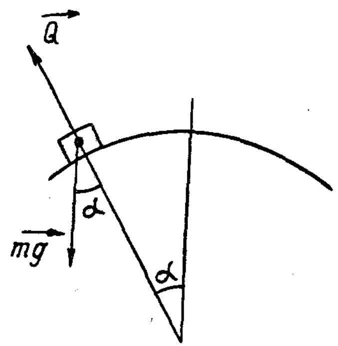

Рис. 30.

По закону изменения энергии (с учетом отсутствия силы тяги и силы сопротивления) $\Delta W = 0$ или $W = W_0$. Тогда

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Но $h = l(1 - \cos\alpha)$ и равенство (2) приобретает при подстановке значения h вид

$$gl(1 - \cos\alpha_0) - gl(1 - \cos\alpha) = \frac{v^2}{2} \quad \text{или} \quad v^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Подставляя значение v^2 в (1), получим

$$T - mg\cos\alpha = \frac{2mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{l},$$

откуда

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0).$$

Очевидно, $T_x = T\sin\alpha$; $T_y = T\cos\alpha$.

Задача № 33

С какой скоростью должен двигаться автомобиль по выпуклому мосту радиуса R, чтобы в некоторой точке водитель не давил на сидение (рис. 30)?

Решение. Проектируя силы, действующие на водителя, на направление радиуса вращения, имеем равенство

$$mg\cos\alpha - Q = \frac{mv^2}{R}.$$

Так как по условию водитель не давит на сидение (т. е. $Q' = 0$), то и сидение не давит на водителя ($Q = 0$). Тогда

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$v = \sqrt{gR\cos\alpha}.$$

Очевидно, что и автомобиль в этот же момент не будет давить на мост, т. е. и автомобиль и шофер будут в этот момент „невесомы".

Задача № 34

В пробирке массой M, закрытой пробкой массой m, находится капля эфира. При нагревании пробирки пробка вылетает под давлением паров эфира. Пробирка подвешена таким образом, что может совершать обороты вокруг горизонтальной оси. С какой минимальной горизонтальной скоростью должна вылетать пробка, чтобы пробирка сделала полный оборот вокруг точки подвеса? Рассмотреть случаи: 1) пробирка подвешена на невесомом стержне длиной l; 2) пробирка подвешена на невесомой нити той же длины (рис. 31).

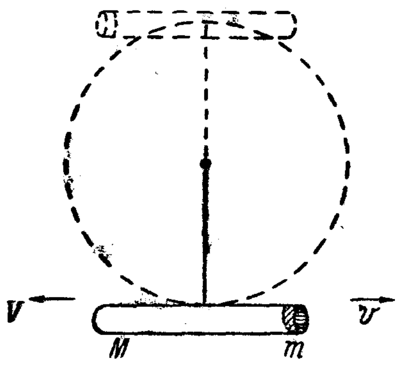

Рис. 31.

Решение. 1. Пробирка на стержне.

При вылете пробки со скоростью v пробирка приобретает противоположно направленную скорость V, причем, на основании закона сохранения количества движения $mv = MV$, откуда $V = v\frac{m}{M}$. В результате пробирка приобретает запас кинетической энергии

$$E = \frac{MV^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2M},$$

за счет которой поднимается на высоту $h = 2l$. Считая, что в высшей точке пробирка останавливается, имеем

$$\frac{m^2v^2}{2M} = Mg2l,$$

откуда

$$v=\frac{M}{m}2\sqrt{gl}.$$

2. Пробирка на нити.

В этом случае в высшей точке минимальная скорость пробирки не может обратиться в нуль и определяется из соотношения

$$Mg=\frac{MV_1^2}{l}.$$

Поэтому закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{MV^2}{2}=Mg2l+\frac{MV_1^2}{2},$$

или

$$\frac{m^2v^2}{2M}=2Mgl+\frac{Mgl}{2}.$$

Отсюда

$$v=\frac{M}{m}\sqrt{5gl}.$$

Задача № 35

Горизонтально расположенная однородная постоянного сечения балка, нагруженная силами F_1 и F_2 под углами α_1 и α_2 к ней, находится в равновесии. Найти реакцию опоры и положение точки опоры. Вес балки равен P, длина — l (рис. 32).

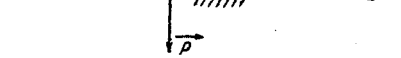

Рис. 32.

Решение. Так как балка находится в покое, то сумма действующих на нее сил и сумма моментов сил равны нулю.

Проектируя действующие на балку силы на вертикальное и горизонтальное направления, имеем

$$F_1\cos\alpha_1-Q_x-F_2\cos\alpha_2=0;$$

$$F_1\sin\alpha_1+Q_y+F_2\sin\alpha_2-P=0.$$

Откуда

$$Q_x=F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2;$$

$$Q_y=P-F_1\sin\alpha_1-F_2\sin\alpha_2.$$

Уравнение моментов относительно точки опоры имеет вид

$$F_1\sin\alpha_1\left(\frac{l}{2}+x\right)-F_2\sin\alpha_2\left(\frac{l}{2}-x\right)-Px=0.$$

Откуда

$$x = \frac{F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2}{2(P - F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2)} l.$$

Задача № 36

Однородная балка весом P и длиной l лежит на двух опорах. На балку действуют две силы F_1 и F_2, точки приложения которых известны. Определить силы давления балки на опоры (рис. 33).

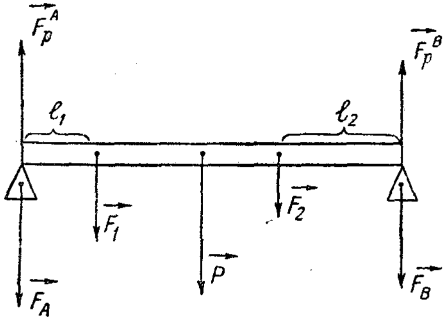

Рис. 33.

Решение. Если балка давит на опоры с силами F_A и F_B, то опоры действуют на балку с силами $F_р^A$ и $F_р^B$, причем на основании третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_р^A,$$

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_р^B.$$

Так как балка находится в положении равновесия, то равнодействующая всех действующих на нее сил равняется нулю, и моменты сил, вращающих балку против часовой стрелки (около любой возможной точки поворота), уравновешиваются моментами сил, вращающих балку по часовой стрелке.

Равновесие сил дает

$$F_р^A + F_р^B - P - F_1 - F_2 = 0. \tag{1}$$

Считая точкой возможного поворота точку A, имеем

$$F_р^B l - F_1 l_1 - P\frac{l}{2} - F_2(l - l_2) = 0. \tag{2}$$

Найдя из (2) $F_р^B$, из (1) находим $F_р^A$.

Задача № 37

Длинный шест постоянного сечения, сделанный из однородного материала, прислонен к стене, так что он образует угол α с горизонтом. Определить соотношение между коэффициентами трения, при которых шест еще не соскользнет вниз (рис. 34).

Решение. Предположив наличие трения в точках A и B, рассмотрим действующие на шест силы: вес P приложен посередине шеста, F_1 и F_2 — силы реакции опор в точках A

и B, $F_{\text{тр}_1}$ и $F_{\text{тр}_2}$ — силы трения. Тогда, так как $F_{\text{тр}} = kQ = kF_{\text{р}}$, то, очевидно, что

$$F_{\text{тр}_1} = k_1 F_1; \qquad (1)$$

$$F_{\text{тр}_2} = k_2 F_2. \qquad (2)$$

Условие равновесия шеста запишется так:

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{тр}_1} + \vec{F}_{\text{тр}_2} = 0,$$

т. е.

$$P = F_1 + F_{\text{тр}_2}; \qquad (3)$$

$$F_2 = F_{\text{тр}_1}. \qquad (4)$$

Отсюда сразу видно, что при отсутствии трения в точке A равновесие невозможно, так как если $F_{\text{тр}_1}$ равно 0, то и F_2 должно равняться 0, но тогда из (2) следует, что и $F_{\text{тр}_2}$ равно 0. Условие равенства моментов относительно точки A запишется в следующем виде:

$$P \frac{l}{2} \cos\alpha = F_2 l \sin\alpha + F_{\text{тр}_2} \, l \cos\alpha, \qquad (5)$$

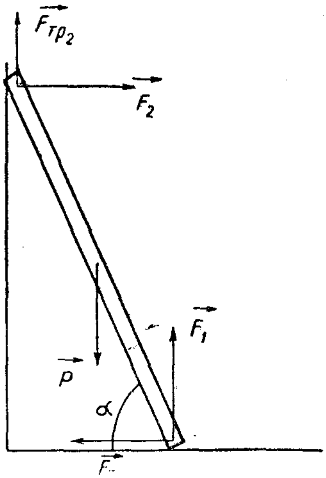

Рис. 34.

т. е.

$$\frac{1}{2} P \cos\alpha = F_2 \sin\alpha + F_{\text{тр}_2} \cos\alpha. \qquad (5а)$$

Выражая с помощью (1) — (4) все силы, входящие в (5а), через P, получим

$$k_1 k_2 \cos\alpha + 2k_1 \sin\alpha - \cos\alpha = 0. \qquad (6)$$

Из (6) видно, что при $k_1 = 0$ действительно равновесие невозможно, за исключением тривиального случая $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Задача № 38

Найти объем полости шара, погруженного на n-ю часть своего наружного объема V в жидкость. Удельный вес вещества шара и жидкости равны соответственно d и $d_{\text{ж}}$ (рис. 35).

Решение. Так как шар в равновесии, то действующая на него выталкивающая сила $F_{\text{Арх}}$ и вес P уравновешены, поэтому

$$d_{\text{ж}} V n = d (V - \Delta V),$$

откуда

$$\Delta V = V \frac{d - d_{\text{ж}} n}{d}.$$

Задача № 39

Найти работу по всплыванию тела объемом V с глубины h в жидкости с удельным весом d (рис. 36).

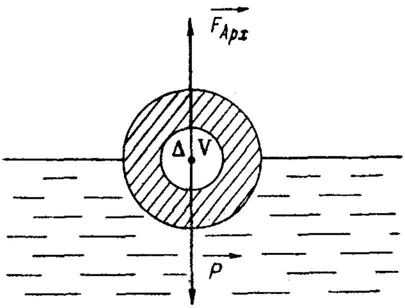

Рис. 35.

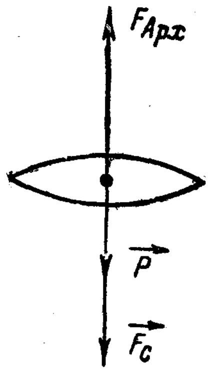

Рис. 36.

Решение. Здесь силой тяги является выталкивающая сила $F_{\text{Арх}}$. Поэтому $A = F_{\text{Арх}} h$, но так как $F_{\text{Арх}} = dV$, то $A = d \cdot V \cdot h$.

Задача № 40

Стакан массой m и площадью основания S с очень тонкими стенками плавает в двух несмешивающихся жидкостях, как изображено на рис. 37. Плотность слоя нижней жидкости ρ. Определить объем и давление воздуха, заключенного в стакане. Атмосферное давление p_0. Массой газа пренебречь.

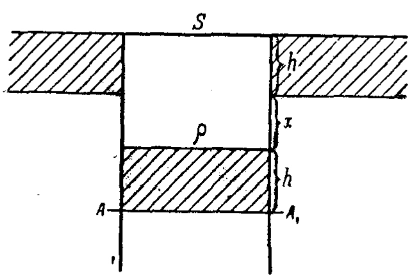

Рис. 37.

Решение. Воздух, заключенный в стакане, сжат силой атмосферного давления и силой тяжести стакана, поэтому его давление определяется сразу $p = p_0 + \frac{mg}{S}$.

Определим далее объем, занимаемый воздухом. Он равен

$$V = S(h + x), \qquad (1)$$

где x — высота воздушного столбика, обозначенного на рисунке. Величина x может быть определена из условия плавания стакана. Для удобства записи условия плавания предположим, что на границе раздела жидкостей внутри стакана поставлена невесомая перегородка AA_1, не пропускающая жидкость. Такая перегородка не изменит состояния системы никоим образом. Тогда условие плавания примет вид

$$mg+\rho_1 ghS=\rho_1 ghS+\rho gSx+\rho ghS,$$

где ρ_1 — плотность жидкости верхнего слоя.

Решая это уравнение, находим

$$x=\frac{mg-\rho ghS}{\rho gS}.$$

Подставляя найденное значение x в формулу (1), получим

$$V=S\left(h+\frac{mg-\rho ghS}{\rho gS}\right), \text{ или } V=\frac{m}{\rho}.$$

Задача № 41

Однородная тонкая деревянная палочка постоянного сечения S помещена в сосуд с водой под углом $\alpha=45°$ к горизонту. Как она будет всплывать (рис. 38)?

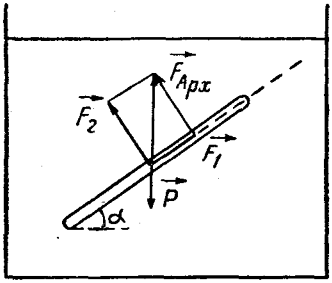

Рис. 38.

Решение. Пока палочка неподвижна, на нее действуют две силы: сила веса P и выталкивающая сила $F_{\text{Арх}}$, направленная вертикально вверх. Так как палочка однородная, то точки приложения этих сил совпадают.

Результирующая сила направлена вертикально вверх, и поэтому в первый момент ускорение палочки при всплытии направлено вертикально вверх. Однако, как только скорость палочки станет отличной от нуля, появляется сила сопротивления жидкости. Разложим результирующую веса и выталкивающей силы на две составляющие: одну вдоль палочки F_1 и вторую в перпендикулярном направлении F_2. Под действием сил F_1 и F_2 палочка будет набирать скорость в направлении действия каждой из сил, пока сила сопротивления жидкости, равная $F_{\text{сопр}}=k\eta Lv$ (где η — коэффициент вязкости, L — линейный размер тела, v — скорость движения тела), не уравновесит разгоняющую силу. Так как палочка выбрана длинной и тонкой, то линейные размеры палочки в направлениях действия сил F_1 и F_2 сильно отличаются друг от друга, т. е. уже при незначительной скорости в направлении действия силы F_2 сила сопротивления уравновесит эту силу. В направлении действия силы F_1 палочка наберет значительную скорость. Поэтому невооруженному глазу будет казаться, что палочка всплывает под углом 45° к горизонту, хотя, строго говоря, она всплывает под несколько бóльшим углом.

Раздел II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕПЛОТА И РАБОТА

При решении задач этого раздела необходимо учесть следующее:

1. Закон сохранения и превращения энергии E для процессов, идущих с выделением тепла Q, записывается в виде

$$\Delta Q = -\Delta E_{\text{мех}},$$

где

$$\Delta E_{\text{мех}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}},$$

т. е. выделившееся тепло равно убыли механической энергии. При этом Q может пойти на нагрев, плавление или парообразование.

2. В случае чисто тепловых процессов, сопровождающихся теплообменом, закон сохранения энергии записывается в виде уравнения теплового баланса

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}},$$

т. е. тепло, отданное одними телами, равно теплу, полученному другими телами.

3. Если процесс происходит при наличии тепловых потерь, то это отображается равенствами

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q}, \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где η — коэффициент полезного действия или тепловая отдача; $A_{\text{полезн}} = Q_1 - Q_2$ — полезная работа, или теплота, использованная по назначению; Q, Q_1 — количество тепла, выделившееся в данном процессе или подведенное к системе извне; Q_2 — потери тепла.

Для идеальной машины, работающей по циклу Карно,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

4. Состояние идеального газа описывается уравнением

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где m — масса газа в *кг*; μ — молекулярный вес газа в *кг/кмоль*; R — универсальная газовая постоянная.

5. В ряде задач учитывается тот факт, что под изогнутой пленкой жидкости сферической формы создается добавочное давление

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; R — радиус кривизны сферической поверхности пленки.

6. При неупругих соударениях тел выполняется закон сохранения количества движения, но не имеет места закон сохранения механической энергии.

Задача № 42

Поезд, весом $4 \cdot 10^6$ *н*, идущий со скоростью 36 *км/час*, затормаживается до остановки. Какое количество тепла выделится в тормозах?

Решение. На основании закона сохранения энергии

$$-\Delta E_{\text{мех}} = \Delta Q, \tag{1}$$

или

$$\Delta Q = -\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\right),$$

а так как $v = 0$, то

$$\Delta Q = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{Pv_0^2}{g^2} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ дж.}$$

Знак минус в (1) означает, что тепло выделяется за счет убыли механической энергии системы.

Задача № 43

На сколько температура воды у основания водопада высотой 120 *м* должна быть больше, чем у его вершины? Где происходит повышение температуры?

Решение. Нагревание падающей воды происходит при ударе ее о дно и воду около основания водопада.

Применяя закон сохранения энергии, получим

$$-\Delta E_{\text{мех}} = mc\,\Delta t^\circ,$$

или

$$-mg(h - h_0) = mc\,\Delta t^\circ.$$

Так как конечная высота $h = 0$, то $gh_0 = c\Delta t^\circ$, откуда

$$\Delta t^\circ = \frac{gh_0}{c} = 0{,}28^\circ\text{C}.$$

Задача № 44

С какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стенку она расплавилась? Температура плавления свинца 325°С. Температура летящей пули 100°С.

Решение. По закону сохранения и превращения энергии

$$-\Delta E_{\text{мех}} = mc\,\Delta t^\circ + \lambda\cdot m,$$

или

$$-\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\right) = mc\,\Delta t^\circ + \lambda\cdot m.$$

Так как $v = 0$, то

$$\frac{v_0^2}{2} = c\,\Delta t^\circ + \lambda,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2\left[c\,(t^\circ - t_0^\circ) + \lambda\right]} \approx 290\ м/сек.$$

Задача № 45

Два одинаковых свинцовых шарика движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. Определить, на сколько градусов они нагрелись в результате неупругого центрального столкновения (рис. 39).

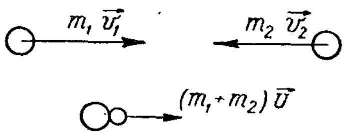

Рис. 39.

Решение. Свинцовые шарики образуют замкнутую систему в механическом смысле; значит, в ней выполняется закон сохранения количества движения $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}$, или в скалярной форме $mv_1 - mv_2 = 2mv$, откуда

$$v = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

На основании закона сохранения энергии

$$-\Delta E_{\text{мех}} = 2mc\,\Delta t^\circ,$$

или

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) - \left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\right) = -2mc\,\Delta t^\circ.$$

Учитывая, что $v = \frac{v_1 - v_2}{2}$, получим после очевидных преобразований

$$\Delta t^\circ = \frac{(v_1 + v_2)^2}{8c}.$$

Задача № 46

M граммов жидкого олова при температуре плавления вливают в латунный калориметр массы M_1, содержащий M_2 граммов льда при $t_0^\circ = 0°C$. Написать уравнение теплового баланса, если в результате теплообмена в калориметре окажется теплая вода. Определить ее температуру Θ°.

Решение. Уравнение теплового баланса $Q_{отд} = Q_{пол}$ с учетом всех агрегатных превращений примет вид

$$M\lambda + Mc(T^\circ - \Theta^\circ) = M_1 c_1 (\Theta^\circ - t_0^\circ) + M_2\lambda_1 + M_2 c_2 (\Theta^\circ - t_0^\circ),$$

где c, c_1, c_2 — соответствующие удельные теплоемкости; λ и λ_1 — удельные теплоты плавления; T° — температура затвердевания олова.

Из уравнения находим

$$\Theta^\circ = \frac{M\lambda + McT^\circ + M_1 c_1 t_0^\circ - M_2\lambda_1 + M_2 c_2 t_0^\circ}{Mc + M_1 c_1 + M_2 c_2}.$$

На основании этого уравнения можно составить и решить столько задач, сколько величин входит в уравнение. Предлагается для тренировки проделать это учащимся самим.

Задача № 47

m граммов льда, находящегося при температуре $t^\circ = 0°C$, смешивают с $2m$ граммами воды, находящейся при температуре $t^\circ = 35°C$. Определить температуру смеси, считая, что теплообмен происходит только между льдом и водой.

Решение. Так как масса воды в два раза больше массы льда, можно считать, что каждый грамм льда обменивается теплом с двумя граммами воды. Для плавления 1 *г* льда нужно 80 *кал* тепла; 2 *г* воды, даже охладившись до нуля, дадут только 70 *кал* теплоты, которой не хватит для плавления льда. Значит, результатом теплообмена будет процесс плавления льда, причем часть его вообще не расплавится, и температура смеси будет равна 0°C. Уравнение теплового баланса $Q_{отд} = Q_{пол}$ для этого процесса примет вид

$$2mc(t^\circ - \Theta^\circ) = m_1\lambda,$$

где Θ — температура смеси; m_1 — масса растаявшего льда.

Задача № 48

В калориметр с 100 *г* льда при $t_0^\circ = 0°C$ впущен пар при $t^\circ = 100°C$. Сколько воды окажется в калориметре непосредственно после того, как весь лед растает?

Решение. В момент полного превращения льда в воду в калориметре окажется

$$M = m_1 + m_2 \qquad (1)$$

граммов воды при температуре $t_0^\circ = 0°C$. Здесь m_1 — масса растаявшего льда, а m_2 — масса конденсировавшегося пара; m_2 можно определить из уравнения теплового баланса

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}},$$

или $m_1\lambda = m_2 r + m_2 c\,(t^\circ - t_0^\circ)$, где r и λ — соответственно удельные теплоты парообразования и плавления.

Выражая отсюда m_2 и подставляя его в (1), получаем

$$M = m_1\left[1 + \frac{\lambda}{r + c\left(t^\circ - t_0^\circ\right)}\right]; \; M = 112{,}5 \text{ г}.$$

Задача № 49

При 0°С цинковый стержень имеет длину $l_0 = 200$ *мм*, а медный $l_0' = 201$ *мм*. Поперечные размеры их при 0° одинаковы. Определить: а) при какой температуре их длины одинаковы? б) при какой температуре их объемы одинаковы?

Решение. а) При нагревании длины стержней меняются по закону

$$l = l_0\,(1 + \alpha_1 t^\circ) \text{ и } l' = l_0'\,(1 + \alpha_2 t^\circ),$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты линейного расширения.

При искомой температуре t° $l = l'$, а значит,

$$l_0\,(1 + \alpha_1 t^\circ) = l_0'\,(1 + \alpha_2 t^\circ),$$

отсюда

$$t^\circ = \frac{l_0 - l_0'}{l_0'\alpha_2 - l_0\alpha_1}; \; t^\circ = 420°C.$$

б) При нагревании объемы тел меняются по закону

$$V = V_0(1 + \beta_1 t^\circ) \text{ и } V' = V_0'(1 + \beta_2 t^\circ),$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты объемного расширения. Поскольку металлы изотропны, можно считать, что $\beta_1 = 3\alpha_1$ и $\beta_2 = 3\alpha_2$; тогда

$$V = V_0\,(1 + 3\alpha_1 t^\circ) \text{ и } V' = V_0'\,(1 + 3\alpha_2 t^\circ).$$

При искомой температуре t° объемы должны быть равны, т. е. $V' = V$; значит, и

$$V_0(1 + 3\alpha_1 t^\circ) = V_0'\,(1 + 3\alpha_2 t^\circ),$$

отсюда

$$t^\circ = \frac{V_0 - V_0'}{3\left(V_0'\alpha_2 - V_0\alpha_1\right)}.$$

Учитывая, что $V_0 = l_0 S$ и $V_0' = l_0' S$, получаем

$$t^\circ = \frac{l_0 - l_0'}{3\,(l_0'\alpha_2 - l_0\alpha_1)}; \; t^\circ = 140°C.$$

Задача № 50

Часы с медным маятником идут правильно при 0°C. На сколько отстанут часы за сутки, если температура повысится до $t^\circ = 20$°C?

Решение. Вследствие удлинения маятника при нагревании и увеличения периода его колебаний, часы за сутки отстанут на время $\Delta t = A(T_2 - T_1)$, где A — число колебаний маятника в сутки при $t^\circ = 20$°C, а T_2 и T_1 — соответственно периоды колебаний маятника при температуре 20 и 0°C.

Число колебаний такого маятника в сутки равно

$$A = \frac{86400}{T_2}.$$

Значит,

$$\Delta t = \frac{86400}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\right),$$

где l и l_0 — длины маятника при температурах 20 и 0°C. Так как $l = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, то

$$\Delta t = \frac{86400}{2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t^\circ)}{g}}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\left(\sqrt{1+\alpha t^\circ} - 1\right)$$

и окончательно

$$\Delta t = 86400\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+\alpha t^\circ}}\right); \ \Delta t = 16 \ \textit{сек.}$$

Задача № 51

Стеклянный сосуд весит $P_0 = 53$ Г. Тот же сосуд, наполненный ртутью, при 0°C весит $P_1 = 1384$ Г. Когда этот сосуд нагрели до $t^\circ = 40$°C, то часть ртути вытекла и сосуд стал весить $P_2 = 1376$ Г. Каков коэффициент объемного расширения стекла?

Решение. По определению коэффициента объемного расширения стекла

$$\beta = \frac{V_{t^\circ} - V_0}{V_0 \cdot t^\circ},$$

где V_0 — объем стеклянного сосуда при $t^\circ = 0$°C; V_{t° — объем при температуре t°.

Если стенки сосуда достаточно тонки, то объем сосуда равен объему ртути, его наполняющей, при соответствующих температурах. Объем ртути при температуре t° будет

$$V_{t^\circ} = \frac{P_2 - P_0}{D_{t^\circ}} = \frac{P_2 - P_0}{D_0}(1 + \beta_1 t^\circ),$$

где D_0 — удельный вес ртути при $t^\circ = 0^\circ C$, β_1 — коэффициент объемного расширения ртути.

$$V_0 = \frac{P_1 - P_0}{D_0}.$$

Используя эти выражения, находим

$$\beta = \frac{[(P_2 - P_0)(1 + \beta_1 t^\circ) - (P_1 - P_0)] D_0}{D_0 (P_1 - P_0) t^\circ} = \frac{P_2 - P_1 + \beta_1 t^\circ (P_2 - P_0)}{(P_1 - P_0) t^\circ};$$

$$\beta = 2{,}9 \cdot 10^{-5} \ 1/\text{град}.$$

Задача № 52

Стеклянный шарик с коэффициентом объемного расширения α взвешивается в жидкости при температурах t° и $\overset{\circ}{t_1}$. Веса вытесненной жидкости соответственно P и P_1. Определить коэффициент объемного расширения жидкости α_1 в интервале температур t° и $\overset{\circ}{t_1}$.

Решение. При температурах t° и $\overset{\circ}{t_1}$, согласно закону Архимеда, вес вытесненной жидкости равен

$$P = D_{t^\circ} V_{t^\circ} \text{ и } P_1 = D_{t_1^\circ} V_{t_1^\circ},$$

где D — удельные веса жидкости при соответствующих температурах; V — объемы вытесненной жидкости, а значит, объемы стеклянного шарика при соответствующих температурах. С учетом зависимости плотности тела и объема от температуры получаем

$$P = \frac{D_0 V_0}{1 + \alpha_1 t^\circ} (1 + \alpha t^\circ) \text{ и } P_1 = \frac{D_0 V_0}{1 + \alpha_1 \overset{\circ}{t_1}} (1 + \alpha \overset{\circ}{t_1}),$$

где V_0 и D_0 — соответственно объем шарика и удельный вес жидкости при $t^\circ = 0^\circ C$.

Решая систему уравнений, получаем (пренебрегая членами, содержащими произведение $\alpha \cdot \alpha_1$)

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(1 + \alpha t^\circ)(1 + \alpha_1 \overset{\circ}{t_1})}{(1 + \alpha_1 t^\circ)(1 + \alpha \overset{\circ}{t_1})} = \frac{1 + \alpha t^\circ + \alpha_1 \overset{\circ}{t_1}}{1 + \alpha_1 t^\circ + \alpha \overset{\circ}{t_1}}.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \frac{P_1 - P + \alpha (P_1 t^\circ - P \overset{\circ}{t_1})}{P t^\circ - P_1 \overset{\circ}{t_1}}.$$

Задача № 53

Какое количество теплоты нужно сообщить куску стекла чтобы увеличить его объем на ΔV?

Решение. Для увеличения объема тела на ΔV его нужно нагреть на Δt градусов, т. е. сообщить ему $\Delta Q = m c \Delta t^\circ$ тепла. Помня, что $m = \rho_0 V_0$, где ρ_0 и V_0 — плотность и объем стекла при температуре $t^\circ = 0^\circ C$ и $\Delta V = V_0 \beta \Delta t^\circ$, где $\beta = 3\alpha$ — коэффициент объемного расширения стекла, сразу получаем:

$$\Delta Q = \frac{\rho_0 c \Delta V}{\beta}.$$

Задача № 54

Медный обруч вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести, с угловой скоростью ω_0. Как изменится его угловая скорость, если температура повысилась от 0°С до t°С (рис. 40)?

Решение. В случае свободного вращения обруча его момент количества движения остается постоянным и не зависит от изменения температуры обруча.

Определим момент количества движения обруча при температуре $t^\circ = 0^\circ C$.

Малый элемент его Δm можно принять за материальную точку, а всю массу обруча m представить как сумму материальных точек, тогда $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Момент количества движения материальной точки $\Delta m v_0 r_0$, а всего обруча

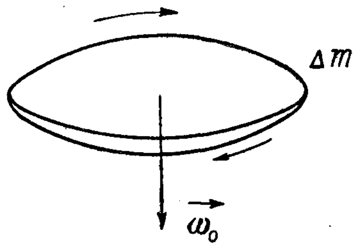

Рис. 40.

$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_0 r_0 = m v_0 r_0$, так как вся масса обруча распределена по окружности радиуса r_0. В результате нагревания будет увеличиваться длина обруча, что эквивалентно увеличению его радиуса ($l = 2\pi r$).

Согласно закону сохранения момента количества движения,

$$m v_0 r_0 = m v_1 r_1, \quad \text{или} \quad \omega_0 r_0^2 = \omega_1 r_1^2,$$

но $r_1 = r_0 (1 + \alpha t^\circ)$, тогда

$$\omega_0 r_0^2 = \omega_1 r_0^2 (1 + \alpha t^\circ)^2$$

и новая угловая скорость

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{(1 + \alpha t^\circ)^2}.$$

Задача № 55

Концы железного стержня, предварительно нагретого до $\overset{\circ}{t_1}$, прочно закреплены. С какой силой на единицу площади стержень растягивается при охлаждении до $\overset{\circ}{t_2}$? Модуль Юнга — E.

Решение. При температуре t_1° длина стержня

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1^\circ),$$

а при температуре t_2° должна быть

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2^\circ),$$

где l_0 — длина стержня при $t_0^\circ = 0°C$. Поскольку при охлаждении длина закрепленного стержня не меняется, то в нем происходит накопление механической энергии за счет упругой деформации. Сила упругой деформации

$$F = ES\frac{\Delta l}{l_2},$$

где Δl — кажущееся удлинение стержня, равное сокращению его длины в результате охлаждения. Относительное „сокращение" длины $\frac{\Delta l}{l_2}$ равно

$$\frac{\Delta l}{l_2} = \frac{l_1 - l_2}{l_2} = \frac{\alpha(t_1^\circ - t_2^\circ)}{1 + \alpha t_2^\circ},$$

где α — коэффициент линейного расширения железа, а значит

$$F = ES\frac{\alpha(t_1^\circ - t_2^\circ)}{1 + \alpha t_2^\circ}.$$

Пренебрегая изменением поперечных размеров стержня, находим окончательно

$$\frac{F}{S} = E\frac{\alpha(t_1^\circ - t_2^\circ)}{1 + \alpha t_2^\circ}.$$

Задача № 56

В запаянную у одного конца U-образную трубку налита вода, причем за счет присутствующего в трубке воздуха разность уровней у ее концов оказалась равной h. Во сколько раз нужно изменить температуру воздуха в трубке, чтобы разность уровней воды у ее концов сократилась вдвое? Атмосферное давление p_0 (рис. 41).

Решение. Для уменьшения разности уровней вдвое необходимо воздух охладить, в результате чего произойдет его сжатие.

Процесс изменения состояния газа можно описать уравнением Клапейрона

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

В обоих состояниях газа его давление равно $p = p_0 + \rho gh$, где h — разность уровней жидкости в коленах трубки. Плотность жидкости ρ следует считать неизменной, полагая, что она существенно свой объем не изменила. Тогда

$$\frac{(p_0+\rho gh)Sh}{T}=\frac{\left(p_0+\rho g\frac{h}{2}\right)\frac{3}{4}Sh}{T_1},$$

откуда

$$\frac{T}{T_1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{p_0+\rho gh}{p_0+\rho g\frac{h}{2}}.$$

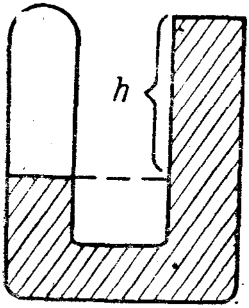

Рис. 41.

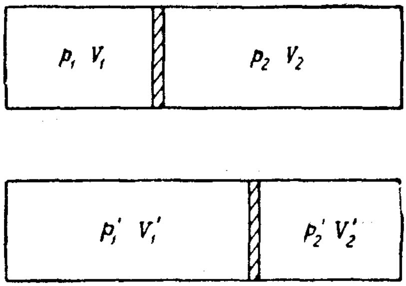

Рис. 42.

Задача № 57

Цилиндрический сосуд с газом разделен поршнем на две части. Давление и объем каждой части указаны на рис. 42. Начальные температуры одинаковы. Затем освобождают поршень и увеличивают вдвое температуру в левой части сосуда. На сколько в результате этого изменится объем газа в левой части сосуда?

Решение. Изменение состояния газа в левой части цилиндра при нагревании может быть описано уравнением Клапейрона

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_1'V_1'}{T_1'}.$$

Изменение состояния газа в правой части цилиндра можно описать уравнением Бойля—Мариотта, так как температура газа в правой части цилиндра не будет меняться и тепло из левой части туда не поступает, если поршень и стенки цилиндра абсолютно нетеплопроводны,

$$p_2V_2=p_2'V_2'.$$

Для равновесия поршня необходимо $p_1'=p_2'$. Кроме того, учтем, что $V_1'=V_1+\Delta V$; $V_2'=V_2-\Delta V$ и $T_1'=2T_1$.

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{p_1 V_1}{T_1} = \dfrac{p_1'(V_1 + \Delta V)}{2T_1} \\ p_2 V_2 = p_1'(V_2 - \Delta V). \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\Delta V = \frac{(2p_1 - p_2)\, V_1 V_2}{2p_1 V_1 + p_2 V_2}.$$

Задача № 58

Запаянная с одного конца цилиндрическая трубка длиной L погружалась в воду до тех пор, пока запаянный конец ее оказался на одном уровне с поверхностью воды. Когда температуры воздуха и воды уравнялись, оказалось, что вода в трубке поднялась на высоту $2/3\,L$. Определить начальную температуру воздуха в трубке, если температура воды T_1, а атмосферное давление p_0 (рис. 43).

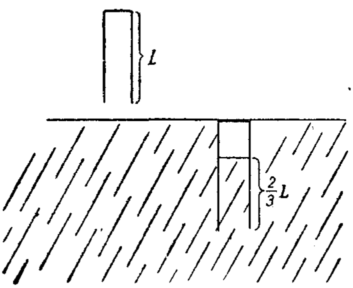

Рис. 43.

Решение. Процесс изменения состояния газа можно описать уравнением Клапейрона, так как происходит изменение всех параметров состояния газа (p, V и T) при $m = \text{const}$:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Определяя давление воздуха в трубке через атмосферное и давление столба воды, получаем

$$\frac{p_0 LS}{T} = \frac{\left(p_0 + \frac{1}{3}\rho g L\right)\frac{1}{3} L S}{T_1}.$$

Отсюда следует

$$T = T_1 \frac{3p_0}{p_0 + \frac{1}{3}\rho g L}.$$

Задача № 59

Два одинаковых, герметически закрытых откачанных цилиндра соединены между собой узкой трубкой с краном. В цилиндрах подвешены на одинаковых пружинах поршни, положения равновесия которых находятся у дна цилиндров. Под поршень одного цилиндра вводят такое количество газа, что поршень поднимается на высоту x. На какой высоте x_1

установятся поршни, если открыть кран? Температуру газа считать постоянной (рис. 44).

Решение. Так как температура газа остается постоянной, то процесс изменения его состояния будет изотермическим $pV = p_1 V_1$, где p и V — давление и объем газа до открывания крана; p_1, V_1 — давление и объем газа после открывания крана. Объемом узкой трубки можно пренебречь. Силой веса поршень вызывает статическое растяжение пружины

$$x_0 = \frac{P}{k},$$

где P — вес поршня; k — постоянная пружины. Давление, под которым находится газ под поршнем,

$$p = \frac{P}{S} + \frac{k(x - x_0)}{S} = \frac{kx}{S}.$$

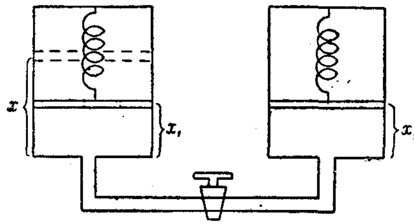

Рис. 44.

Учитывая это, получаем

$$\frac{kx}{S} \cdot xS = \frac{kx_1}{S} \cdot 2x_1 S,$$

откуда

$$x^2 = 2x_1^2 \text{ и } x_1 = x\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача № 60

Цилиндрическая пробирка длиной L, содержащая газ при температуре T, полностью погружена в жидкость с плотностью ρ. Уровень жидкости внутри пробирки находится на ее середине. Пробирку вынимают из жидкости настолько, что она едва касается поверхности жидкости открытым концом. Как следует изменить температуру газа в пробирке, чтобы жидкость внутри нее вновь установилась посередине? Атмосферное давление p_0 (рис. 45).

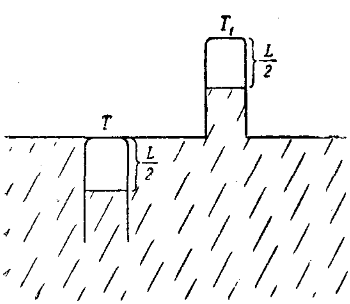

Рис. 45.

Решение. Процесс изменения состояния газа является изохорическим, так как его объем остается постоянным. Его уравнение

$$\frac{p}{T} = \frac{p_1}{T_1},$$

где p и p_1 — давления газа в соответствующих состояниях, T и T_1 — температуры.

Выражая давление газа через давление атмосферы и столба жидкости, получаем

$$\frac{p_0+\rho g\frac{L}{2}}{T}=\frac{p_0-\rho g\frac{L}{2}}{T_1}.$$

Отсюда

$$T_1=T\frac{p_0-\rho g\frac{L}{2}}{p_0+\rho g\frac{L}{2}},$$

так как T_1 — абсолютная температура воздуха — не может быть меньше или равна 0°К, то добиться установления уровня жидкости посередине трубки, поднятой над уровнем жидкости, можно только при условии $p_0>\frac{\rho g L}{2}$.

Задача № 61

В закрытом с обоих концов откачанном цилиндре подвешен скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. В пространство под поршнем вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту x. На какой высоте x_1 установится поршень, если этот газ нагреть от начальной температуры T до T_1? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня (рис. 46).

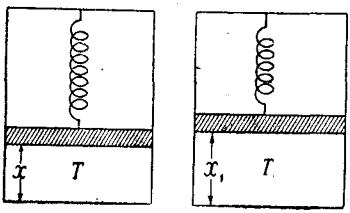

Рис. 46.

Решение. Положение равновесия поршня у дна сосуда означает, что поршень силой своего веса вызывает статическое растяжение пружины $x_0=\frac{P}{k}$, где P — вес поршня, k — постоянная пружины.

Если в результате впускания некоторого количества газа под поршень он поднялся на высоту x, то давление, под которым окажется газ, будет равно

$$p=\frac{P}{S}+\frac{kx'}{S}=\frac{P}{S}+\frac{k(x-x_0)}{S},$$

где $x'=x-x_0$ — смещение поршня от положения равновесия нерастянутой пружины.

Так как при нагревании газа его масса не меняется, то процесс описывается уравнением Клапейрона

$$\frac{pV}{T}=\frac{p_1V_1}{T_1}.$$

Подставляя значения объемов и давлений, получаем

$$\frac{[P+k(x-x_0)]\,xS}{ST}=\frac{[P+k(x_1-x_0)]\,x_1S}{ST_1}.$$

Учитывая, что $P=kx_0$, находим

$$\frac{kx^2}{T}=\frac{kx_1^2}{T_1},$$

откуда

$$x_1=x\sqrt{\frac{T_1}{T}}.$$

Задача № 62

В запаянной с одного конца стеклянной трубке, длина которой $l=70$ *см*, находится столбик воздуха, запертый столбиком ртути, высотой $h=20$ *см*, доходящим до верхнего края трубки. Трубку осторожно перевертывают, причем часть ртути выливается. Какова высота x столбика ртути, который останется в трубке, если атмосферное давление соответствует давлению столба ртути высотой 75 *см*? При какой длине трубки столбик ртути той же высоты выльется из трубки полностью (рис. 47)?

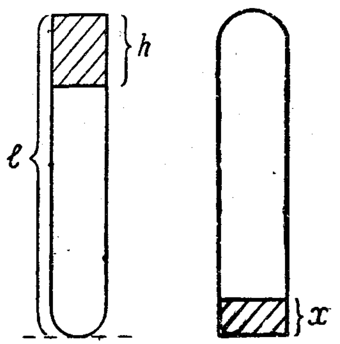

Рис. 47.

Решение. Процесс изменения состояния газа при переворачивании трубки можно считать изотермическим. Его уравнение $pV=p_1V_1$ применим к данной задаче

$$(p_0+\rho gh)(l-h)S=$$
$$=(p_0-\rho gx)(l-x)S,$$

где ρ — плотность ртути; g — ускорение силы тяжести; S — площадь поперечного сечения трубки.

Решаем полученное уравнение относительно x, пренебрегая членами, содержащими x^2, ввиду малости x по сравнению с l. Тогда окажется, что x равно

$$x=h\,\frac{p_0-\rho g(l-h)}{p_0+\rho gl};\quad x=3{,}5\ \text{см}.$$

Пользуясь данным выражением x, можно найти длину трубки, из которой столбик ртути длины h выльется полностью. Для этого положим $x=0$, что возможно только тогда, когда

$$p_0-\rho g(l-h)=0.$$

Решение этого уравнения дает

$$l=\frac{p_0+\rho gh}{\rho g}.$$

Очевидно, что при $l>\frac{p_0+\rho gh}{\rho g}$ ртуть будет выливаться также полностью, т. е. при $l\geqslant 95$ *см.*

Задача № 63

Герметическая камера максимального объема V наполнена воздухом наполовину. Сколько ходов должен сделать поршень накачивающего насоса, чтобы накачать в камеру воздух до давления p? Атмосферное давление p_0. Емкость насоса V_0. Нагреванием пренебречь. Стенки камеры гибки, но не растяжимы.

Решение. Чтобы без изменения температуры и объема газа его давление сильно возросло, в камеру нужно вкачать некоторое количество газа. С каждым ходом поршня в камеру поступает постоянная масса воздуха, забираемая насосом из окружающего пространства. Поэтому число ходов поршня n равно

$$n=\frac{M}{m}, \tag{1}$$

где M — масса воздуха, которую нужно вкачать в камеру; m — масса воздуха, вкачиваемая за один ход поршня. Масса

$$M=M_2-M_1, \tag{2}$$

где M_1 — масса воздуха, находившегося в камере до накачивания; M_2 — масса воздуха, оказавшаяся в камере после накачивания. Массы M_1, M_2 и m можно определить из уравнений газового состояния, написанных для камеры и насоса. Они имеют вид:

$p_0\frac{1}{2}V=\frac{M_1}{\mu}RT$ — для воздуха, находившегося в камере до накачки;

$pV=\frac{M_2}{\mu}RT$ — для воздуха, оказавшегося в камере после накачки;

$p_0V_0=\frac{m}{\mu}RT$ — для воздуха, забираемого насосом из атмосферы.

Учитывая, что, согласно (1) и (2), $n=\frac{M_2-M_1}{m}$, и подставляя массы газа из уравнений газового состояния, получаем

$$n=\frac{\frac{pV\mu}{RT}-\frac{p_0\frac{V}{2}\mu}{RT}}{\frac{p_0V_0\mu}{RT}}=\frac{V(2p-p_0)}{2p_0V_0}.$$

Задача № 64

Сколько ходов должен сделать поршень откачивающего насоса, чтобы откачать воздух из сосуда объема V от атмосферного давления p_0 до давления $p=p_0\cdot 10^{-4}$, если емкость насоса V_0? Температуру считать неизменной.

Решение. Так как начальное и конечное состояние газа в сосуде различны (масса газа сильно уменьшилась), то к ним не применимо уравнение Бойля—Мариотта.

Решение следует искать, рассматривая последовательные ходы поршня разрежающего насоса. Для них применимо уравнение Бойля—Мариотта, так как и температура и масса газа остаются постоянными.

Для первого хода поршня можно написать $p_0V=p_1(V+V_0)$;
для второго хода $p_1V=p_2(V+V_0)$;
для третьего хода $p_2V=p_3(V+V_0)$ и т. д.

Выражая давления p_1, p_2 и p_3 через p_0, получаем

$$p_1=\frac{p_0V}{V+V_0};\quad p_2=\frac{p_0V^2}{(V+V_0)^2};\quad p_3=\frac{p_0V^3}{(V+V_0)^3} \text{ и т. д.}$$

Очевидно, после n-го хода поршня давление в сосуде будет $p_n=\frac{p_0V^n}{(V+V_0)^n}$, и, значит, $p_0\cdot 10^{-4}=p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^n$, откуда, логарифмируя, находим

$$n=-\frac{4}{\lg\frac{V}{V+V_0}}=\frac{4}{\lg\frac{V+V_0}{V}}.$$

Задача № 65

В сосудах объемами V_1, V_2 и V_3 находится соответственно водород под давлением p_1, кислород под давлением p_2, азот под давлением p_3. Какое установится давление в сосудах, если их соединить трубкой ничтожно малого объема? Температуру считать неизменной.

Решение. По закону Дальтона давление смеси газов $p=p_1'+p_2'+p_3'$, где p_1', p_2' и p_3'—парциальные давления газов, т. е. давления, которые создавали бы газы порознь, заполняя объем

$$V=V_1+V_2+V_3.$$

Можно определить парциальные давления газов, считая, что каждый газ порознь изотермически расширяется, заполняя весь объем V. Это получится из уравнений

$$\begin{cases} p_1 V_1 = p'_1 V, \\ p_2 V_2 = p'_2 V, \\ p_3 V_3 = p'_3 V. \end{cases}$$

С их учетом давление смеси газов

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

Задача № 66

Определить плотность смеси 32 *г* кислорода и 8 *г* азота при давлении $p = 1$ *атм* и температуре $t_0^\circ = 0°$ С, считая азот и кислород идеальными газами.

Решение. По закону Дальтона давление смеси газов равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в состав смеси. В данном случае имеем

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где p_1 и p_2 — парциальные давления азота и кислорода, т. е. те давления, которые газы оказывали бы на стенки сосуда, занимая порознь весь объем смеси и находясь при той же температуре, что и смесь.

Из уравнения Менделеева—Клапейрона можно найти p_1 и p_2

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT, \tag{2}$$

где V — объем сосуда, содержащего смесь. Подставляя p_1 и p_2 из (2) в (1), находим

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT.$$

Плотность смеси равна

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{p(m_1 + m_2)}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT}.$$

Задача № 67

В вертикальном, закрытом сверху и снизу цилиндре находится движущийся с ничтожным трением поршень. Над и под поршнем находятся одинаковые массы одного и того же газа при температуре $T_1 = 300°$ К. Вес поршня уравновешивается разностью сил давлений газа, если объем нижней части цилиндра в n ($n = 3$) раз меньше объема верхней части. Каково будет соотношение объемов, если температура повысится до $T_2 = 400°$ К (рис. 48)?

Решение. Объем, занимаемый всем газом, остается неизменным при движении поршня

$$V_1^A + V_1^B = V_2^A + V_2^B. \tag{1}$$

Разность давлений сверху и снизу поршня есть величина постоянная

$$p_1^B - p_1^A = p_2^B - p_2^A. \tag{2}$$

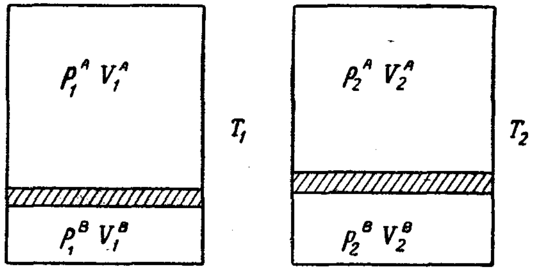

Рис. 48.

Так как над и под поршнем находятся одинаковые массы одного и того же газа при одинаковой температуре, то

$$p_1^A V_1^A = p_1^B V_1^B; \tag{3}$$

$$p_2^A V_2^A = p_2^B V_2^B. \tag{4}$$

Наконец, учитывая, что в результате движения поршня не меняется масса и род газа, можно записать

$$\frac{p_1^A V_1^A}{T_1} = \frac{p_2^A V_2^A}{T_2}. \tag{5}$$

Из (3) и (4) с учетом данных задачи получаем

$$\frac{V_1^A}{V_1^B} = \frac{p_1^B}{p_1^A} = n; \quad \frac{V_2^A}{V_2^B} = \frac{p_2^B}{p_2^A} = x. \tag{6}$$

Подставляем (6) в (1) и (2):

$$V_1^A\left(1 + \frac{1}{n}\right) = V_2^A\left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad p_1^A(n-1) = p_2^A(x-1).$$

Перемножаем почленно

$$p_1^A V_1^A (n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = p_2^A V_2^A (x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Учитывая (5), переписываем в виде

$$(x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{T_1}{T_2}(n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$x = 1 + \sqrt{2}.$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет.

Задача № 68

Два мыльных пузыря с радиусами R_1 и R_2 выдуты на разных концах одной и той же трубки. Какой пузырь будет увеличиваться и какой уменьшаться, если их предоставить самим себе? Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки α. Атмосферное давление p_0. Температура постоянна (рис. 49).

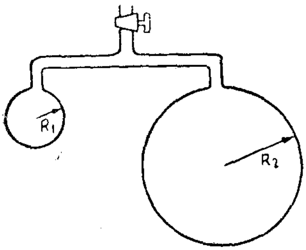

Рис. 49.

Решение. Давление воздуха внутри пузыря равно $p = p_0 + \frac{2\alpha}{R}\cdot 2$. Множитель 2 следует поставить потому, что пленка имеет две поверхности, внешнюю и внутреннюю. Из формулы видно, что давление воздуха будет больше в пузыре меньшего радиуса, поэтому воздух из меньшего пузыря будет перетекать в больший, и малый пузырь будет уменьшаться, а большой возрастать. Разница давлений внутри шаров будет

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 4\alpha\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Задача № 69

На концах трубки выдуты пузыри из жидкостей, коэффициенты поверхностного натяжения которых α_1 и α_2. Пузыри сообщаются друг с другом. Каково должно быть соотношение радиусов пузырей, чтобы они находились в равновесии? Будет ли это равновесие устойчиво (рис. 49)?

Решение. Давление, под которым находится воздух в любом пузыре, равно $p = p_0 + p'$, где p' — добавочное давление под кривой поверхностью. Для равновесия пузырей необходимо, чтобы давление воздуха в них было одинаково, т. е. $p_0 + p_1' = p_0 + p_2'$, где p_0 — давление атмосферы; это значит, что $p_1' = p_2'$, или $2\,\frac{2\alpha_1}{r_1} = 2\,\frac{2\alpha_2}{r_2}$, откуда

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Равновесие мыльных пузырей не может быть устойчивым, так как любое самое незначительное изменение размеров одного шара в любом направлении приведет либо к полному исчезновению шара, либо к раздуванию его.

Задача № 70

Стеклянная капиллярная трубка длиной l опускается в горизонтальном положении в воду так, что заключенный в ней воздух полностью остается в ней. Какова станет длина столбика воздуха, если трубка погружена на глубину h? Давление воздуха нормальное. Температура постоянна (рис. 50).

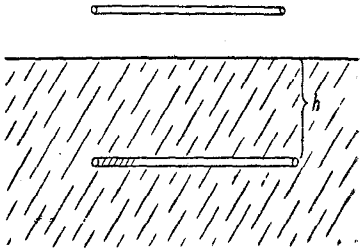

Рис. 50.

Решение. Процесс изменения состояния воздуха в трубке изотермический, его уравнение $pV = p_1 V_1$, где давление $p = p_0$ — атмосферному давлению; $V = V_{тр}$ — объему всей трубки; p_1 — давление воздуха на глубине h равно

$$p_1 = p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r},$$

где $\rho g h$ — давление столба воды, которое по закону Паскаля передается по всем направлениям без изменения; $\frac{2\alpha}{r}$ — давление под искривленной поверхностью мениска в трубке, направленное внутрь трубки. Таким образом, получаем

$$p_0 l S = \left(p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r}\right) l' S,$$

где S — площадь сечения трубки. Отсюда

$$l' = \frac{p_0 l}{p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r}}.$$

Задача № 71

Две капиллярных трубки различных диаметров погружают сначала в воду, а затем в керосин. Высоты поднятия воды в капиллярах h_1 и h_2, керосина — h_1' и h_2'. Определить коэффициент поверхностного натяжения керосина α, если коэффициент поверхностного натяжения воды α_0 (рис. 51).

Решение. Подъем жидкости в трубке прекращается, когда давление столбика жидкости уравновешивает давление под искривленной поверхностью мениска

$$\rho g h = \frac{2\alpha}{r},$$

где r — радиус капилляра.

В каждом случае погружения пары капилляров в воду или керосин из-за различия диаметров капилляров возникает разность уровней жидкости. Для воды эта разность уровней

$$h_1 - h_2 = \frac{2\alpha_0}{\rho_0 g}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где ρ_0 — плотность воды; r_1 и r_2 — радиусы капилляров. Для керосина

$$h_1' - h_2' = \frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

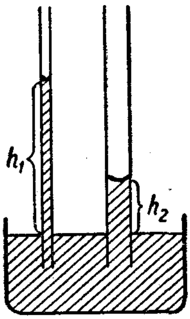

Рис. 51.

Из этих уравнений находим

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\rho\left(h_1' - h_2'\right)}{\rho_0 (h_1 - h_2)}.$$

Задача № 72

В цилиндре с подвижным поршнем заключен мыльный пузырь радиуса r, наполненный воздухом. Вначале давление воздуха вне пузыря равно атмосферному p_0. Медленным вдвиганием поршня мыльный пузырь сжимают так, что радиус его уменьшается вдвое. Определить давление наружного воздуха p в цилиндре в этот момент. Температуру считать неизменной.

Решение. Процесс изменения состояния воздуха в мыльном пузыре изотермический. Его уравнение

$$pV = p_1 V_1, \quad \text{или} \quad \left(p_0 + \frac{2\alpha}{r}\cdot 2\right) V = \left(p + \frac{2\alpha}{r_1}\cdot 2\right) V_1.$$

Множитель 2 поставлен, так как у мыльного пузыря имеется две поверхности. Учитывая, что $r = 2r_1$, получаем

$$\left(p_0 + \frac{4\alpha}{r}\right)\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(p + \frac{8\alpha}{r}\right)\frac{4}{3}\pi\frac{r^3}{8}.$$

Упрощая выражение, находим

$$p = 8\left(p_0 + \frac{3\alpha}{r}\right),$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки.

Задача № 73

Некоторый объем воды вытекает из тонкого вертикального капилляра в количестве n капель, тот же объем некоторой жидкости плотности ρ_1 вытекает в количестве n_1 капель. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения воды α.

Решение. В последний момент перед отрывом капля имеет форму, подобную изображенной на рис. 52, и поддерживается силой поверхностного натяжения вдоль периметра сужения (шейки). Если диаметр сужения в момент отрыва $2r$, ($r < R$, где R — радиус тонкого капилляра), то условие отрыва запишется

$$P = 2\pi r\alpha,$$

где P — вес капли. Из этого выражения получаем:

$$\text{для воды } \alpha = \frac{P}{2\pi r};$$

$$\text{для жидкости } \alpha_1 = \frac{P_1}{2\pi r_1}.$$

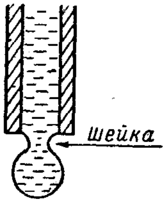

Рис. 52.

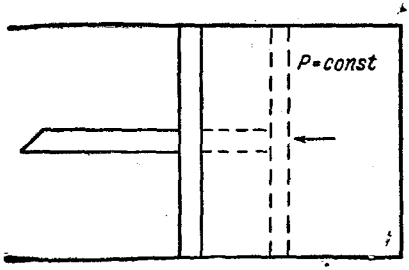

Рис. 53.

Можно считать, что при полном смачивании стенок тонкого капилляра периметры сужения весьма малы для воды и жидкости и равны друг другу, т. е. $r_1 \approx r$.

Вес прокапавшей воды $nP = \rho g V = n2\pi r\alpha$.

Вес прокапавшей жидкости $n_1 P_1 = \rho_1 g V = n_1 2\pi r\alpha_1$.

Исключая объем одинаковый по условию в обоих случаях, находим

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{n\alpha}{n_1\alpha_1},$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha\frac{\rho_1 n}{\rho n_1}.$$

Задача № 74

2 *кг* воздуха находятся в цилиндре. Какова будет работа при его изобарном нагревании на 100° (рис. 53)?

Решение. Обозначим начальный объем, давление и температуру 2 *кг* воздуха через V_1, p_1, T_1. При изобарном нагревании на 100° объем увеличится до значения

$$V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1}.$$

Совершаемая при этом работа

$$A = p_1(V_2 - V_1) = p_1\left(V_1 \frac{T_2}{T_1} - V_1\right) = \frac{p_1 V_1}{T_1}(T_2 - T_1).$$

Если, не меняя массы воздуха, привести его к нормальным условиям ($T_0 = 273°$ К, $p = 760$ *мм* Hg), то, очевидно,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

где $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$ (ρ_0 — плотность воздуха при нормальных условиях). Отсюда выражение для работы получаем в виде

$$A = \frac{p_0 m}{T_0 \rho_0}(T_2 - T_1) = \frac{p_0 m}{T_0 \rho_0}\Delta T.$$

Задача № 75

В котле паровой машины температура $t_1^0 = 150°$ С. Температура холодильника $t_2^0 = 10°$ С. Какую максимальную работу можно теоретически получить от машины, если в топке, коэффициент полезного действия которой 80%, сожжено 200 *кг* угля, теплотворная способность которого равна 7500 *ккал/кг*?

Решение.

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

где η — к. п. д. тепловой машины; A — совершенная ею работа; Q — тепло, полученное машиной от нагревания. Максимально возможный к. п. д. тепловой машины равен $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, если машина работает по циклу Карно. Максимальную работу можно получить лишь с помощью машины, работающей по этому циклу. Значит,

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{Q},$$

где T_1 и T_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника. Тепло Q, как видно из условия задачи, — лишь часть тепла, выделившегося при сгорании топлива, поэтому

$$Q = \eta_1 Q_{\text{полн}} = \eta_1 mk,$$

где η_1 — к. п. д. топки. Окончательно получаем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{\eta_1 mk},$$

откуда

$$A = \eta_1 mk\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad A = 1{,}6 \cdot 10^9 \text{ дж}.$$

Задача №76

Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% тепла, получаемого от нагревателя, передается холодильнику, температура которого равна 0° С. Определить: 1) температуру нагревателя; 2) коэффициент полезного действия машины.

Решение. Для любой тепловой машины $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$. Коэффициент полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Поэтому $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ или $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, откуда $T_1 = T_2 \cdot \frac{Q_1}{Q_2}$. Так как $Q_2 = 0{,}8\, Q_1$, то окончательно

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{1}{0{,}8} = \frac{273}{0{,}8} \approx 340^\circ \text{ K} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 0{,}2.$$

Раздел III

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

В этот раздел преднамеренно включены задачи таких типов, с которыми учащиеся сравнительно редко встречаются. Но, на наш взгляд, именно в этих задачах существенным образом раскрывается физический смысл целого ряда явлений, имеющих место, например, при перезарядке конденсаторов, протекании тока в неоднородном (т. е. с включенной э. д. с.) участке цепи и т. д.

При решении этих задач следует учитывать:

1. Энергия заряженного конденсатора выражается следующими соотношениями:

$$W=\frac{CU^2}{2};\quad W=\frac{qU}{2};\quad W=\frac{q^2}{2C},$$

где W — энергия конденсатора; C — его емкость; U — разность потенциалов между обкладками; q — заряд одной пластины. В тех случаях, когда энергия конденсатора в результате каких-либо процессов меняется, ее целесообразно вычислять через ту из величин q и U, которая в данном процессе не изменилась; так, если заряд конденсатора не изменится, то

$$W=\frac{q^2}{2C};$$

если напряжение не изменилось, то

$$W=\frac{CU^2}{2}$$

независимо от того, как меняется при этом емкость конденсатора.

2. Закон Ома для неразветвленного участка цепи имеет в общем случае вид

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}}{R+r}=\frac{U+\mathscr{E}}{R+r},$$

где I — сила тока в цепи; φ_1 — потенциал той точки, от которой течет ток (имея в виду техническое направление тока); φ_2 — потенциал той точки, к которой течет ток; $\mathscr{E}$ — включенная в цепь э. д. с.; R — сопротивления участка без сопротивления включенного источника; r — внутреннее сопротивление источника.

Знак $\mathscr{E}$ определяется тем, повышает или понижает $\mathscr{E}$ потенциал в направлении протекания тока: если повышает, то $\mathscr{E} > 0$; если понижает, то $\mathscr{E} < 0$.

Следует заметить, что решение задач о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях производится так же, как и в случае незаряженных частиц, т. е. с использованием законов механики (законы Ньютона, закон изменения энергии и т. д.). И единственная разница заключается в том, что помимо иных сил на частицу с зарядом q со стороны электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{B}$ действуют силы Кулона $\vec{F}_К = q\vec{E}$ и Лоренца $\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ или $F_Л = qvB\sin\alpha$, где α — угол между $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Направление $\vec{F}_Л$ определяют по правилу левой руки.

Задача № 77

Два одинаковых маленьких шарика, подвешенных на шелковых нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке, под действием сообщенного им заряда расходятся так, что угол между нитями равен 90° (рис. 54). Вследствие неизбежной потери заряда шарики начинают сближаться. Определить, какую долю заряда потеряет каждый из шариков, когда угол, составляемый нитями, сделается равным 60°.

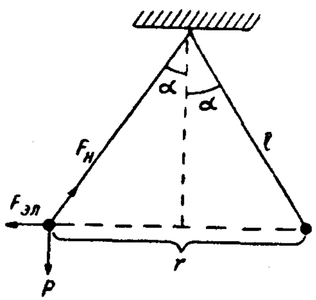

Рис. 54.

Решение. Вначале

$$\vec{P} + \vec{F}_{эл} + \vec{F}_н = 0$$

($F_н$ — натяжение нити), т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{эл}}{P} = \frac{q^2}{r^2 P} = \frac{q^2}{(2l\sin\alpha)^2 P}. \qquad (1)$$

После потери некоторой части заряда

$$\vec{P} + \vec{F}'_{эл} + \vec{F}'_н = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F'_{эл}}{P} = \frac{(xq)^2}{r_1^2 P} = \frac{(xq)^2}{(2l\sin\alpha_1)^2 P}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим

$$x=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha}}=0{,}46.$$

Задача № 78

Наэлектризованный мыльный пузырь раздувается настолько, что его радиус R делается вдвое больше, заряд на пузыре при этом не меняется. Как изменяется энергия заряда? Помогает или препятствует присутствие заряда раздуванию пузыря?

Решение. При раздувании пузыря энергия заряда убывает: считая пузырь сферическим, можно написать

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2}{2R}.$$

Так как заряд пузыря не меняется, а радиус становится вдвое больше, то энергия уменьшается в 2 раза.

Заряженный пузырь раздувать легче, так как избыточные заряды взаимно отталкиваются и способствуют увеличению свободной поверхности.

Задача № 79

Два шарика с зарядами q_1 и q_2, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин. Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же?

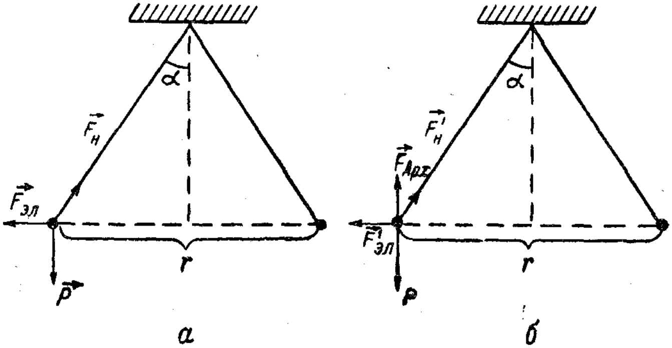

Рис. 55.

Решение. В воздухе (рис. 55, *а*) шарик будет в состоянии покоя при

$$\vec{P}+\vec{F}_{эл}+\vec{F}_{н}=0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{эл}}{P} = \frac{q_1 q_2}{r^2 D V g}, \quad (1)$$

где D и V — плотность и объем шарика.

В керосине (рис. 55, *б*) шарик будет в равновесии при

$$\vec{P} + \vec{F}_{Арх} + \vec{F}'_{эл} + \vec{F}'_{н} = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F'_{эл}}{P - F_{Арх}} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2 V(D - D_к)\, g}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$D = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} D_к.$$

Задача № 80.

Тысяча одинаковых, одинаково наэлектризованных дождевых капель сливаются в одну, причем заряды всех капель сохраняются. Как велика будет энергия заряда большой капли по сравнению с энергией маленьких капель?

Решение. Имелось n одинаковых капель, радиуса r, заряженных до потенциала φ каждая. Тогда полная энергия системы (пренебрегая энергией взаимодействия капель между собой) определялась суммой энергий отдельных капель, т. е.

$$W_1 = n \frac{r\varphi^2}{2}.$$

При слиянии n капель в одну ее заряд равняется сумме зарядов всех капель

$$Q = nq = nr\varphi,$$

а энергия

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2R},$$

где R — радиус большой капли, который находится из условия

$$n \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad R = r\sqrt[3]{n}.$$

Отсюда

$$W_2 = \frac{n^2 r^2 \varphi^2}{2r\sqrt[3]{n}} = \frac{n^{5/3} r\varphi^2}{2}.$$

Составляя отношение, получаем

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{n^{5/3}}{n} = n^{2/3},$$

т. е. энергия увеличивается в 100 раз.

Задача № 81

В пространстве между пластинами плоского конденсатора, присоединенного к полюсам батареи 360 *в*, находится эбонит ($\varepsilon = 2{,}7$); расстояние между пластинами конденсатора 5,4 *см*. Затем эбонитовая пластинка вынимается. Как нужно изменить расстояние между пластинками конденсатора, чтобы энергия конденсатора осталась без изменения? Рассмотреть два случая: 1) если пластины остаются присоединенными к батарее; 2) если пластины отключить от батареи.

Решение. 1 случай. Разность потенциалов между обкладками конденсаторов остается постоянной и равной $U = 360$ *в*. Емкость конденсатора меняется от $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$ до $C_0 = \frac{S}{4\pi d}$, энергия меняется от $W_1 = \frac{CU^2}{2}$ до $W_2 = \frac{C_0 U^2}{2}$. Так как $C_0 < C$, то энергия конденсатора убывает; чтобы сохранить ее неизменной, нужно увеличить емкость, т. е. сдвинуть обкладки на величину x, которая находится из условия $C = C_0'$.

$$\frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{S}{4\pi (d - x)}; \quad x = \frac{d(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = 3{,}4 \ \text{см}.$$

2 случай. Неизменным остается заряд на обкладках конденсатора $q = CU = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} U$. Энергия конденсатора меняется от $W_1 = \frac{q^2}{2C}$ до $W_2 = \frac{q^2}{2C_0}$, т. е. увеличивается, так как $C > C_0$. Чтобы сохранить ее неизменной, нужно увеличить емкость конденсатора, т. е. сдвинуть пластины на величину x, тогда $C = C_0'$;

$$\frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{S}{4\pi (d - x)}; \quad x = 3{,}4 \ \text{см}.$$

Задача № 82

Два одинаковых воздушных конденсатора с емкостью $C = 800$ *см* каждый, заряжены до напряжения $U = 900$ *в*. Один из конденсаторов погружается в заряженном состоянии в керосин, после чего конденсаторы соединяются параллельно. Определить работу происходящего при этом разряда.

Решение. Энергия каждого заряженного конденсатора

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

При помещении заряженного конденсатора в керосин (отсоединенного предварительно от источника питания) заряд его остается неизменным, а емкость увеличивается в ε раз, поэтому его энергия принимает значение

$$W_1' = \frac{CU^2}{2\varepsilon}.$$

Общая энергия конденсаторов до соединения

$$W_2 = W_1 + W_1' = \frac{CU^2(\varepsilon+1)}{2\varepsilon}.$$

При параллельном соединении конденсаторов происходит перетекание заряда с одного на другой до выравнивания разностей потенциалов между обкладками. Общий заряд конденсаторов остается при этом неизменным. Так как емкость образовавшейся батареи равняется сумме емкостей конденсаторов, то батарея обладает запасам энергии

$$W_3 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{(2q)^2}{2(C+\varepsilon C)} = \frac{2C^2U^2}{C(\varepsilon+1)} = \frac{2CU^2}{\varepsilon+1}.$$

Работа разряда совершается за счет убыли энергии системы

$$A_{разр} = W_2 - W_3 = \frac{CU^2(\varepsilon-1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon+1)} = 600 \text{ эрг.}$$

Задача № 83

Имея прибор для измерения емкостей, определить простейшим образом межэлектродные емкости триода $C_{ак}$, $C_{ас}$, $C_{ск}$ (рис. 56).

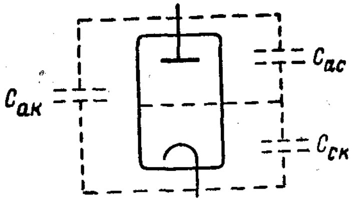

Рис. 56.

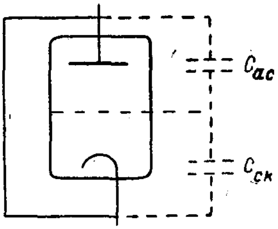

Рис. 57.

Решение. Закоротив анод и катод, измеряем емкость C_1, включив прибор между сеткой и анодом (рис. 57).

Нетрудно видеть, что при этом $C_{ас}$ и $C_{ск}$ оказываются включенными параллельно, поэтому

$$C_1 = C_{ас} + C_{ск}. \quad (1)$$

Аналогично, закоротив сетку и катод, найдем

$$C_2 = C_{ас} + C_{ак}. \quad (2)$$

И, наконец, закоротив анод и сетку, найдем

$$C_3 = C_{ак} + C_{ск}. \quad (3)$$

Решая (1), (2) и (3) совместно, найдем

$$C_{\text{ак}} = \frac{C_2 + C_3 - C_1}{2};$$

$$C_{\text{ас}} = \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2};$$

$$C_{\text{ск}} = \frac{C_1 + C_3 - C_2}{2}.$$

Задача № 84

Батарея из n последовательно соединенных конденсаторов, емкостью C каждый, поддерживается при постоянном напряжении U (рис. 58). Один из конденсаторов пробивается. Определить: а) изменение энергии батареи; б) работу разряда; в) работу источника напряжения.

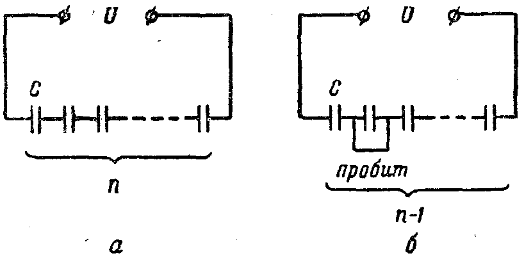

Рис. 58.

Решение. До пробоя (рис. 58, *а*) емкость батареи $C_n = \frac{C}{n}$, запас энергии

$$W_1 = \frac{C_n U^2}{2} = \frac{CU^2}{2n}.$$

После пробоя (рис. 58, *б*) емкость батареи $C_{n-1} = \frac{C}{n-1}$, запас энергии

$$W_2 = \frac{C_{n-1} U^2}{2} = \frac{CU^2}{2(n-1)}.$$

Изменение энергии системы

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2n(n-1)} > 0.$$

Энергия системы увеличилась, несмотря на работу разряда. Это произошло за счет совершения работы источником питания. Так как $U = \text{const}$, то

$$A_{\text{ист}} = U \Delta q,$$

где Δq — изменения заряда на обкладках конденсаторов в результате пробоя одного из них.

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C_{n-1}U - C_nU = \frac{CU}{n(n-1)};$$

$$A_{ист} = \frac{CU^2}{n(n-1)}.$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что

$$A_{ист} = \Delta W + A_{разр}.$$

Отсюда

$$A_{разр} = A_{ист} - \Delta W = \frac{CU^2}{2n(n-1)}.$$

Задача № 85

Имеются два конденсатора переменной емкости с диапазоном каждый от 10 до 200 *см*. Каков будет диапазон батареи, если их соединить: 1) последовательно; 2) параллельно (рис. 59)?

Решение. 1) При последовательном соединении (рис. 59, *а*)

$$C' = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Отсюда видно, что диапазон C'

$$5\ см \underset{C_1=C_2=10\ см}{\leqslant} C' \underset{C_1=C_2=200\ см}{\leqslant} 100\ см.$$

2) При параллельном соединении (рис. 59, *б*)

$$C'' = C_1 + C_2$$

$$20\ см \underset{C_1=C_2=10\ см}{\leqslant} C'' \underset{C_1=C_2=200\ см}{\leqslant} 400\ см.$$

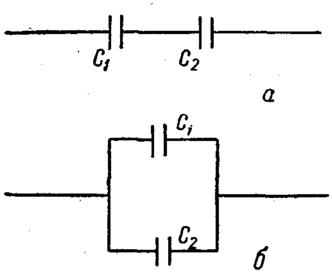

Рис. 59.

Задача № 86

Батарея из четырех конденсаторов включена один раз по схеме *а*, а другой раз по схеме *б* (рис. 60). Если емкости конденсаторов различны, то какому соотношению они должны удовлетворять, чтобы при переключении со схемы *а* на схему *б* емкость батареи не менялась?

Решение. Перечерчиваем схемы в более привычном виде (рис. 61). I способ. В схеме *а*: $C = C_4 + C'$, где

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \qquad C' = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3};$$

$$C = C_4 + \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = \frac{C_1C_2C_3 + C_1C_2C_4 + C_1C_3C_4 + C_2C_3C_4}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}. \quad (1)$$

В схеме *б*: $C = C'' + C'''$, где

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C'' = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2};$$

$$\frac{1}{C'''} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}, \quad C''' = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4};$$

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = \frac{C_1C_2C_3 + C_1C_2C_4 + C_1C_3C_4 + C_2C_3C_4}{C_1C_3 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_2C_4}. \qquad (2)$$

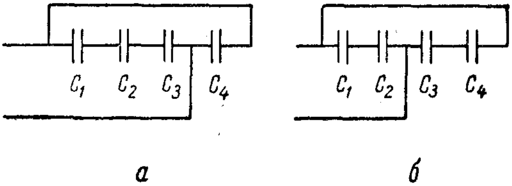

Рис. 60.

Сравнивая (1) и (2), имеем

$$C_4 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

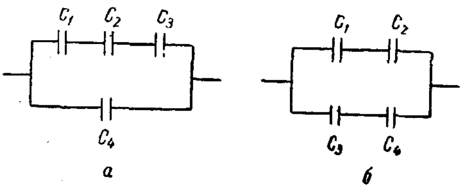

Рис. 61.

II способ. Ответ можно написать непосредственно, если заметить, что переключение C_3 не будет менять емкости батареи, только если емкость C_4 будет эквивалентна емкостям C_1 и C_2, включенным последовательно, т. е.

$$C_4 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача № 87

Плоский конденсатор состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии a. Как изменится электроемкость конденсатора, если его поместить в металлическую коробку, стенки которой будут на расстоянии a от пластин? Влиянием краев пренебречь (рис. 62).

Решение. На первый взгляд кажется, что емкость не должна измениться, так как электрическое поле конденсатора сосредоточено внутри его обкладок, а влиянием краев мы пренебрегаем. Однако, так как вне обкладок конденсатора поля нет, то потенциалы точек, соединенных металлическими стенками коробки, и будут различны (до надевания коробки потенциалы этих точек совпадали с потенциалами ближайших пластин). Поэтому при надевании коробки на ней появятся индуцированные заряды, что приведет к изменению емкости системы. Для нахождения новой емкости произведем последовательное графическое преобразование схемы (рис. 63).

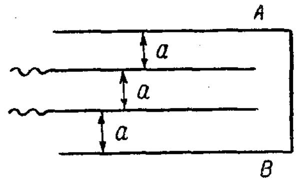

Рис. 62.

Если емкость конденсатора обозначить C, то емкость полученной системы равна

$$C' = C + C'',$$

где

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C};$$

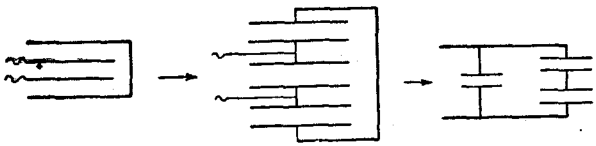

Рис. 63.

тогда

$$C' = \frac{3}{2} C,$$

т. е. емкость системы увеличится в 1,5 раза.

Задача № 88

Имеется система конденсаторов, соединенных по произвольной схеме, внутри которой поставлен ключ K (например, схема, показанная на рис. 64). Увеличится или уменьшится емкость системы, если замкнуть ключ K?

Решение. Зарядим схему при разомкнутом ключе K и отсоединим от источника питания. Так как ключ K не соединяется с наружными обкладками конденсаторов системы (которые заряжаются от источника питания), то при замыкании ключа K полный заряд системы (заряд наружных обкладок) измениться не может. Однако внутри схемы может произойти перераспределение заряда, что приведет к убыли энергии системы. Так как $W = \frac{q^2}{2C}$, где q — полный заряд, а C — емкость всей системы, то видно, что емкость системы может только увеличиться (при перераспределении заряда между внутренними обкладками) или остаться неизменной (если при замыкании ключа K нет перераспределения зарядов).

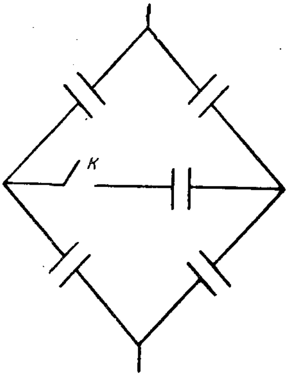

Рис. 64.

Задача № 89

Два вольтметра с внутренними сопротивлениями $R_1 = 6000$ *ом* и $R_2 = 4000$ *ом* соединены последовательно. Параллельно к ним включено сопротивление $R_3 = 10\,000$ *ом*. На эту систему подано напряжение $U = 180$ *в* (рис. 65).

1. Что показывают вольтметры при разомкнутом ключе K?

2. Каковы показания вольтметров, когда ключ K замкнут, а движок соединен с серединой сопротивления R_3?

3. Движок двигают до тех пор, пока показания вольтметров не уравняются между собой. На какие части R_3' и R_3'' делит движок сопротивление R_3?

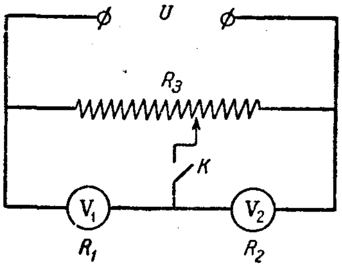

Рис. 65.

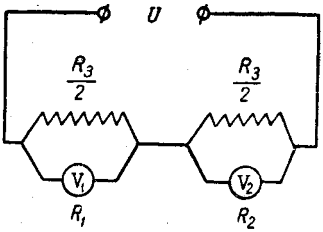

Рис. 66.

Решение. 1. Рис. 65. При разомкнутом ключе K на вольтметры, соединенные последовательно между собой, подано напряжение U, поэтому

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad U_1 + U_2 = U;$$

отсюда

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 108 \text{ в}; \quad U_2 = 72 \text{ в}.$$

2. Рис. 66. В этом случае

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1'}{R_2'},$$

где

$$R_1' = \frac{R_1 \cdot \frac{R_3}{2}}{R_1 + \frac{R_3}{2}}, \quad R_2' = \frac{R_2 \cdot \frac{R_3}{2}}{R_2 + \frac{R_3}{2}} \text{ и } U_1 + U_2 = U;$$

отсюда найдем

$$U_1 = U \frac{R_1 (R_3 + 2R_2)}{4R_1R_2 + R_3(R_1 + R_2)} = 99 \text{ } в; \; U_2 = 81 \text{ } в.$$

3. Рис. 67. В этом случае

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1''}{R_2''} = 1,$$

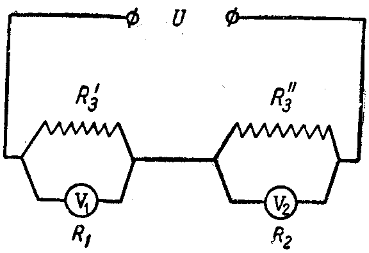

Рис. 67.

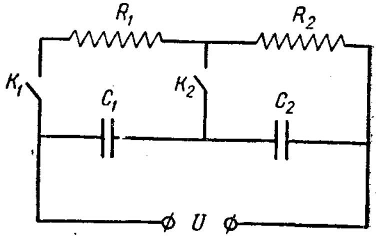

Рис. 68.

где

$$R_1'' = \frac{R_1 R_3'}{R_1 + R_3'}; \quad R_2'' = \frac{R_2 R_3''}{R_2 + R_3''}; \; R_3' + R_3'' = R_3.$$

Отсюда видно, что это возможно при

$$R_3' = R_2; \quad R_3'' = R_1.$$

Задача № 90

Собрана схема (рис. 68); значения сопротивлений и емкостей считаются известными. Напряжение U поддерживается неизменным. Определить напряжения на конденсаторах в случаях: 1) ключи K_1 и K_2 замкнуты; 2) K_1 замкнут, K_2 разомкнут; 3) K_1 разомкнут, K_2 замкнут; 4) оба ключа разомкнуты.

Решение. 1) Напряжения на конденсаторах равны напряжениям на сопротивлениях, параллельно которым они включены. Сопротивления включены между собой последовательно, поэтому

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}; \quad U_1 + U_2 = U.$$

Отсюда

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

2) Конденсаторы включены между собой последовательно, поэтому

$$U_1 + U_2 = U; \quad C_1U_1 = C_2U_2.$$

Отсюда

$$U_1 = U\frac{C_2}{C_1 + C_2}; \qquad U_2 = U\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

3) В этом случае сопротивление R_2 просто закорачивает конденсатор C_2. Поэтому напряжение на нем будет отлично от нуля только в течение переходного процесса. По окончании зарядки $U_1 = U$; $U_2 = 0$.

4) для конденсаторов этот случай ничем не отличается от случая 2.

Задача № 91

Сопротивление угольной лампы при $t_1^\circ = 20°C$ равно $R_1 = 400$ ом, а при накале до $t_2^\circ = 1200°C$ оно равно $R_2 = 256$ ом. Найти температурный коэффициент угла α.

Решение.

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1^\circ);$$
$$R_2 = R_0(1 + \alpha t_2^\circ),$$

где R_0 — сопротивление при 0°C. Отсюда

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_2 t_1^\circ - R_1 t_2^\circ} = -0{,}0003\ \text{град}^{-1}.$$

Задача № 92

Угольный стержень соединен последовательно с железным такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление такой комбинации не зависит от температуры?

Решение. Обозначив сопротивления угольного и железного стержней при 0°C через R_1 и R_2, а при температуре t° — через R_1' и R_2', можно написать

$$R_1 = \rho_1\frac{l_1}{S}; \quad R_1' = R_1(1 + \alpha_1 t^\circ) = \rho_1\frac{l_1}{S}(1 + \alpha_1 t^\circ);$$

$$R_2 = \rho_2\frac{l_2}{S}; \qquad R_2' = R_2(1 + \alpha_2 t^\circ) = \rho_2\frac{l_2}{S}(1 + \alpha_2 t^\circ).$$

Причем с увеличением температуры R_1' будет убывать ($\alpha_1 < 0$), а R_2' — возрастать. Для общего сопротивления имеем

$$R = R_1 + R_2 = R_1' + R_2';$$

$$\frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{S} = \frac{\rho_1 l_1(1 + \alpha_1 t^\circ) + \rho_2 l_2(1 + \alpha_2 t^\circ)}{S}$$

Отсюда получаем

$$\frac{l_1}{l_2} = -\frac{\rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1}.$$

Задача № 93

Определить температурный коэффициент сопротивления провода α, составленного из алюминиевой проволоки с сопротивлением $R_1 = 3$ *ом* и железной проволоки с сопротивлением $R_2 = 2$ *ом*, соединенных последовательно.

Решение. При 0°С сопротивление провода $R = R_1 + R_2$. При некоторой температуре $t°$ сопротивление провода найдется по формуле

$$R' = R_1' + R_2' = R_1(1 + \alpha_1 t°) + R_2(1 + \alpha_2 t°). \quad (1)$$

С другой стороны, для сопротивления провода при температуре $t°$ можно написать:

$$R' = R(1 + \alpha t°) = (R_1 + R_2)(1 + \alpha t°). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), найдем

$$\alpha = \frac{R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2}{R_1 + R_2} = 0{,}0049\ \textit{град}^{-1}.$$

Задача № 94

Найти сопротивление между точками A и B (рис. 69). Величины R_1, R_2 и R_3 известны: $R_1 = 10$ *ом*, $R_2 = 20$ *ом*, $R_3 = 5$ *ом*.

Решение. Считая для определенности потенциал точки A выше потенциала точки B, обозначим на схеме распределение токов в цепи, учитывая симметрию схемы.

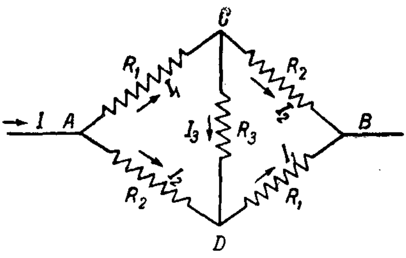

Рис. 69.

Потенциал точки C предполагаем выше потенциала точки D. Тогда, на основании закона Ома для участка цепи, можно написать

$$\left.\begin{aligned} U &= IR_{AB} \\ U &= I_1R_1 + I_2R_2 \\ U &= 2I_1R_1 + I_3R_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь U — напряжение между точками A и B.

Для узлов можно написать

$$I = I_1 + I_2;$$
$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Тогда (1) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned} U &= IR_{AB}, \\ U &= I_1R_1 + (I - I_1)R_2, \\ U &= 2I_1R_1 + (2I_1 - I)R_3. \end{aligned}\right\}$$

Из третьего уравнения находим

$$I_1 = \frac{U + IR_3}{2(R_1 + R_3)}.$$

Подставляя найденное значение I_1 во второе уравнение, найдем для I

$$I = \frac{U(R_1 + R_2 + 2R_3)}{R_1R_3 + 2R_1R_2 + R_2R_3}.$$

Из первого уравнения находим

$$R_{AB} = \frac{R_1R_3 + 2R_1R_2 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} = 13{,}75 \text{ ом}.$$

Задача № 95

К концам некоторого сопротивления R приложена неизменная разность потенциалов $U = 100$ *в*. Вольтметр, включенный параллельно участку R_1, который имеет сопротивление, составляющее 40% от полного, показывает $U_1 = 18{,}2$ *в*. Найти отношение сил токов, идущих через вольтметр и тот участок, параллельно которому он включен (рис. 70).

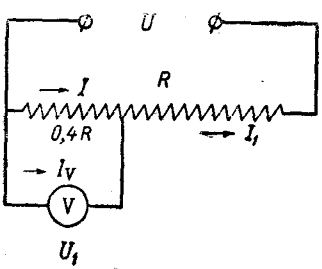

Рис. 70.

Решение. Ток I определяется на основании закона Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U_1}{0{,}4R}.$$

Аналогично для I_1 получим

$$I_1 = \frac{U - U_1}{0{,}6R}.$$

Тогда

$$I_V = I_1 - I = \frac{1}{R}\left(\frac{U - U_1}{0{,}6} - \frac{U_1}{0{,}4}\right);$$

$$\frac{I_V}{I} = \frac{\frac{U - U_1}{0{,}6} - \frac{U_1}{0{,}4}}{\frac{U_1}{0{,}4}} = 2.$$

Задача № 96

Каково внутреннее сопротивление элемента, если при замыкании внешней цепи сопротивлением в $R_1 = 2$ *ом* через элемент идет ток $I_1 = 0{,}2$ *а* (рис. 71, *а*), а при соединении параллельно с этим сопротивлением нового сопротивления $R_2 = 8$ *ом* — ток $I_2 = 0{,}2$ *а* (рис. 71, *б*)?

Решение. По закону Ома для полной цепи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}; \qquad (1)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} + r}. \qquad (2)$$

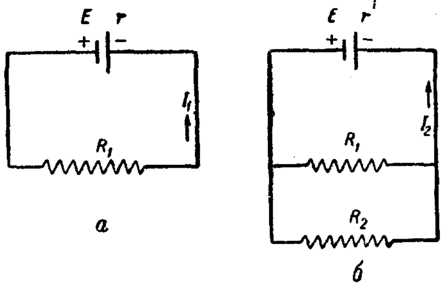

Рис. 71.

Решая (1) и (2) как систему, найдем

$$r = \frac{I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 0{,}4 \text{ ом}.$$

Задача № 97

Определить электродвижущую силу $\mathcal{E}$ элемента, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления, замыкающего элемент в n ($n = 3$) раз, разность потенциалов на его зажимах $U = 3$ *в* увеличивается на $k = 20\%$.

Решение. Используя закон Ома для участка и для полной цепи, имеем: в первом случае

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}}{R + r} R.$$

Во втором случае

$$U_1 = (1 + k) U = I_1 R_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} R_1 = \frac{\mathcal{E}}{nR + r} nR,$$

так как $\frac{R_1}{R} = n$.

Решая систему, найдем

$$\mathcal{E} = \frac{U(1 + k)(n - 1)}{n - k - 1} = 4 \text{ в}.$$

Задача № 98

Для определения сопротивления гальванометра G, его вводят в цепь последовательно с сопротивлением $R_1 = 350$ *ом* и наблюдают отклонение стрелки. Затем параллельно с гальванометром вводится шунт $R_ш = 10$ *ом*. Тогда, чтобы получить прежнее отклонение гальванометра, надо вместо R_1 взять меньшее сопротивление $R_2 = 100$ *ом*. Определить сопротивление гальванометра R_G, пренебрегая внутренним сопротивлением батареи (рис. 72).

Решение. В первом случае ток через гальванометр определяется по закону Ома для полной цепи:

$$I_G = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_G}. \qquad (1)$$

Во втором случае

$$\frac{I_G}{I_ш} = \frac{R_ш}{R_G},$$

а полный ток в цепи:

$$I = I_G + I_ш = I_G\left(1 + \frac{R_G}{R_ш}\right) = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + \frac{R_G R_ш}{R_G + R_ш}}. \qquad (2)$$

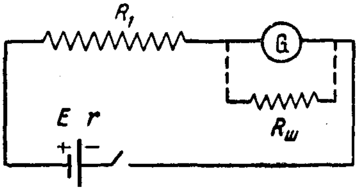

Рис. 72.

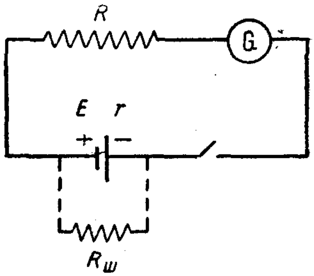

Рис. 73.

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$R_G = \frac{R_1 - R_2}{R_2} R_ш = 25 \text{ ом}.$$

Задача № 99

Цепь состоит из элемента E, магазина сопротивлений R и гальванометра G (рис. 73). Когда в магазине сопротивление равно $R = 980$ *ом*, в гальванометре наблюдается некоторое отклонение. Если элемент шунтируется сопротивлением $R_{ш_1} = 20$ *ом*, то, чтобы получить такую же силу тока, в магазине надо взять сопротивление $R_1 = 630$ *ом*. Если элемент шунтируется сопротивлением $R_{ш_2} = 30$ *ом*, то для получения той же силы тока нужно взять в магазине $R_2 = 712{,}5$ *ом*. Определить внутреннее сопротивление элемента r и сопротивление гальванометра R_G.

Решение. В первом случае ток через гальванометр

$$I_G = \frac{\mathscr{E}}{r + R + R_G}. \qquad (1)$$

Во втором случае

$$\frac{I_G}{I_{ш_1}} = \frac{R_{ш_1}}{R_1 + R_G},$$

а полный ток в цепи

$$I_1 = I_G + I_{ш_1} = I_G\left(1 + \frac{R_1 + R_G}{R_{ш_1}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{(R_1 + R_G)R_{ш_1}}{R_1 + R_G + R_{ш_1}}}. \qquad (2)$$

Аналогично для третьего случая

$$\frac{I_G}{I_{ш_2}} = \frac{R_{ш_2}}{R_2 + R_G};$$

$$I_2 = I_G + I_{ш_2} = I_G\left(1 + \frac{R_2 + R_G}{R_{ш_2}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{(R_2 + R_G)R_{ш_2}}{R_2 + R_G + R_{ш_2}}}. \qquad (3)$$

Сравнивая (1), (2) и (3), находим

$$R_G = \frac{R_{ш_1}R_2(R_1 - R) + R_{ш_2}R_1(R - R_2)}{R_{ш_1}(R - R_1) - R_{ш_2}(R - R_2)} = 3 \text{ ом};$$

$$r = \frac{R_{ш_1}(R - R_1)}{R_1 + R_G} = 10 \text{ ом}.$$

Задача № 100

Для определения внутреннего сопротивления гальванического элемента можно воспользоваться схемой, изображенной на рис. 74. Гальванометр с известным сопротивлением R дает одинаковые отклонения стрелки, будет ли переключатель K находиться в положении B или C, причем сопротивление AB для этой цели специально подбирается и поэтому известно r. Определить внутреннее сопротивление ρ источника тока.

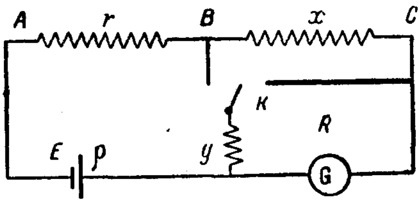

Рис. 74.

Решение. В случае, когда ключ K в положении C:

$$\frac{I_G}{I_y} = \frac{y}{R}.$$

Ток в неразветвленной цепи

$$I = I_G + I_y = I_G\left(1 + \frac{R}{y}\right).$$

По закону Ома для полной цепи

$$\mathcal{E} = I(\rho + r + x) + I_G R = I_G\left[R + \left(1 + \frac{R}{y}\right)(\rho + r + x)\right]. \qquad (1)$$

В случае, когда ключ K в положении B:

$$\frac{I_G}{I'_y} = \frac{y}{R + x}.$$

Ток в неразветвленной цепи

$$I' = I_g + I_y' = I_g\left(1 + \frac{R+x}{y}\right).$$

Аналогично

$$\mathscr{E} = I'(\rho + r) + I_g(R + x) = I_g\left[R + x + (\rho + r)\left(1 + \frac{R+x}{y}\right)\right]. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$Ry + (y + R)(\rho + r + x) = Ry + xy + (\rho + r)(y + R + x);$$
$$\rho = R - r.$$

Задача № 101

Два гальванических элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, вольтметр V с большим сопротивлением и шкалой, нуль которой находится на ее середине, и сопротивление R соединены по схеме, изображенной на рис. 75. Сопротивление R и внутреннее сопротивление каждого из элементов равны между собой. При разомкнутом ключе K стрелка вольтметра отклоняется вправо. При каком соотношении между $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ стрелка вольтметра при замкнутом ключе K: 1) отклонится вправо; 2) остановится на нуле; 3) отклонится влево?

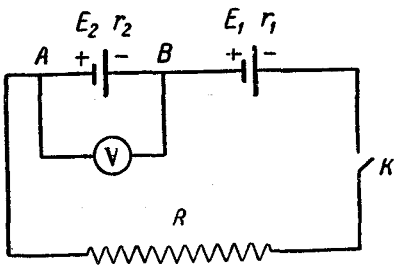

Рис. 75.

Решение. При разомкнутом ключе вольтметр с большим собственным сопротивлением показывает $\mathscr{E}_2$ $\left(\text{строго говоря, показывет } U = \frac{\mathscr{E}_2 R_V}{R_V + r_2} \approx \right.$ $\left. \approx \mathscr{E}_2 \text{ при } R_V \gg r_2\right)$.

При замкнутом ключе ток в цепи определяется выражением

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{3R},$$

так как $R = r_1 = r_2$.

Вольтметр показывает

$$U = \mathscr{E}_2 - Ir_2 = \mathscr{E}_2 - \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{3} = \frac{2\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{3}.$$

Отсюда видно, что отклонения стрелки будут происходить в ту же сторону, что и при разомкнутом ключе, при $2\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 > 0$, т. е. $2\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$, и в противоположную сторону при $2\mathscr{E}_2 < \mathscr{E}_1$; стрелка останется на нуле при $\mathscr{E}_1 = 2\mathscr{E}_2$.

Физически результат совершенно понятен. Действительно, вольтметр даст отброс в противоположную сторону, когда потенциал точки B будет выше потенциала точки A, т. е. когда ток короткого замыкания для элемента $\mathscr{E}_2$ будет меньше, чем ток, идущий по цепи:

$$\frac{\mathscr{E}_2}{R} < \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{3R},$$

откуда $2\mathscr{E}_2 < \mathscr{E}_1$.

Задача № 102

Определить, в каком случае два различных гальванических элемента, замкнутых последовательно на внешнее сопротивление, дадут меньший ток, чем один из этих элементов, включенный на то же сопротивление (рис. 76).

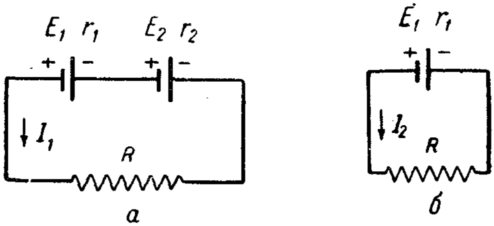

Рис. 76.

Решение.

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} \text{ (рис. 76, } a\text{)}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1} \text{ (рис. 76, } б\text{)}.$$

По условию задачи

$$I_1 < I_2, \text{ т. е. } \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} < \frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1}.$$

Упрощая неравенство, найдем

$$\frac{r_2}{\mathscr{E}_2} > \frac{R + r_1}{\mathscr{E}_1}.$$

Задача № 103

Какое наименьшее число одинаковых гальванических элементов с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r надо взять и как их соединить между собой, чтобы получить ток силой I во внешнем сопротивлении R (рис. 77)?

Решение. Если N элементов соединить в батарею из m параллельных групп по $n = \frac{N}{m}$ последовательно соединенных элементов в каждой, то выражение для силы тока во внешней цепи R будет имеет вид

$$I=\frac{n\mathscr{E}}{R+\frac{nr}{m}}=\frac{n\mathscr{E}}{R+\frac{n^2r}{N}}. \qquad (1)$$

Так как мы хотим получить силу тока I при минимально возможном числе элементов N, то внешнее сопротивление R должно равняться внутреннему сопротивлению батареи:

$$R=\frac{nr}{m}=\frac{n^2r}{N},$$

тогда, согласно (1),

$$I=\frac{n\mathscr{E}}{2R}.$$

Отсюда

$$n=\frac{2IR}{\mathscr{E}}, \text{ а } N=\frac{n^2r}{R}=\frac{4I^2Rr}{\mathscr{E}^2}.$$

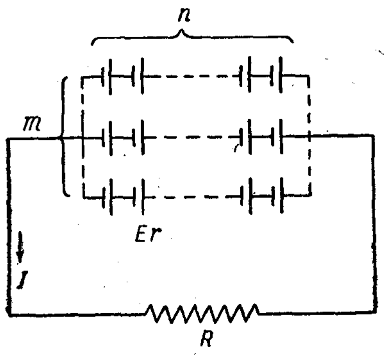

Рис. 77.

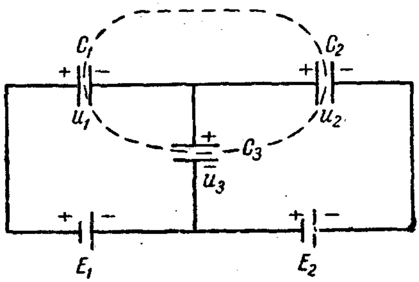

Рис. 78.

Задача № 104

Собрана схема (рис. 78). Емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Источники тока с электродвижущими силами $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Определить заряд каждого конденсатора.

Решение. Конденсаторы C_1 и C_2 заряжаются, как показано на схеме. Конденсатор C_3 может зарядиться по-разному (в зависимости от соотношений между C_i и $\mathscr{E}_i$).

Предположим, что он зарядился, как показано на схеме. Тогда, так как напряжение на зажимах разомкнутого источника тока равняется его э. д. с., то

$$U_1+U_3=\mathscr{E}_1; \qquad (1)$$
$$U_1+U_2=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2, \qquad (2)$$

где U_i — разность потенциалов между обкладками i-го конденсатора.

Далее, так как обведенная пунктиром часть схемы изолирована (заряжается через влияние), то общий заряд на ней равен нулю, т. е.

$$-C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 = 0. \qquad (3)$$

Решая (1), (2) и (3) как систему, найдем

$$U_1 = \frac{C_3\mathscr{E}_1 + C_2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$U_2 = \frac{C_3\mathscr{E}_2 + C_1(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$U_3 = \frac{C_1\mathscr{E}_1 - C_2\mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Видно, что C_1 и C_2 действительно заряжаются, как показано на схеме; C_3 заряжается, как показано на схеме, при $C_1\mathscr{E}_1 > C_2\mathscr{E}_2$ и, наоборот, при $C_1\mathscr{E}_1 < C_2\mathscr{E}_2$.

Заряд каждого конденсатора определяется по формуле

$$q_i = C_iU_i.$$

Задача № 105

N одинаковых источников тока включены последовательно друг другу (рис. 79). Что покажет вольтметр, включенный параллельно *n* элементам? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

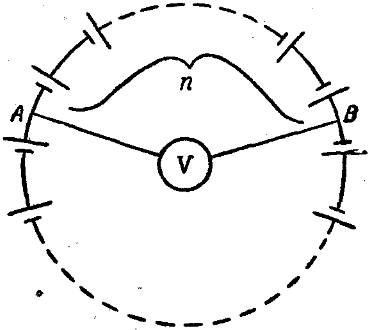

Рис. 79.

Решение. До включения вольтметра сила тока в цепи определялась из условия

$$I = \frac{N\mathscr{E}}{Nr},$$

где $\mathscr{E}$ и r — э. д. с. и внутреннее сопротивление одного источника.

Подсчитаем разность потенциалов между точками *A* и *B*. Рассматривая эти точки как начало внешней цепи для *n* последовательно соединенных элементов, получим

$$U = n\mathscr{E} - Inr = n\mathscr{E} - \frac{N\mathscr{E}}{Nr}nr = 0,$$

т. е. вольтметр включается между точками с одинаковыми потенциалами и поэтому покажет нуль.

Задача № 106

Три элемента включены параллельно реостату R (рис. 80). Электродвижущие силы элементов $\mathcal{E}_1 = 2$ *в*, $\mathcal{E}_2 = 1{,}7$ *в*, $\mathcal{E}_3 = 1{,}6$ *в*, а внутренние сопротивления соответственно: $r_1 = 0{,}3$ *ом*, $r_2 = r_3 = 0{,}1$ *ом*. Включенный последовательно с элементом $\mathcal{E}_3$ чувствительный гальванометр не обнаруживает тока. Определить величину сопротивления реостата R и силу тока в остальных частях цепи.

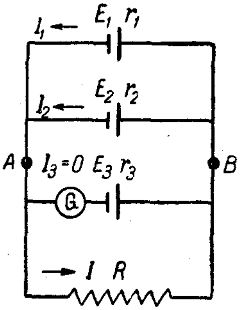

Рис. 80.

Решение. Так как $I_3 = 0$, то разность потенциалов между точками A и B:

$$U = \mathcal{E}_3. \qquad (1)$$

Поэтому

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}_3}{R}.$$

С другой стороны, можно написать выражение для напряжений, падающих внутри $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$.

Учитывая (1), имеем

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = I_1 r_1;$$
$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = I_2 r_2.$$

и, наконец,

$$I = I_1 + I_2.$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3}{r_1} = 1{,}33 \ a; \qquad R = \frac{\mathcal{E}_3}{I} = 0{,}69 \ \textit{ом}.$$
$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{r_2} = 1 \ a;$$

Задача № 107

Генератор постоянного тока с э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 12$ *в* и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}2$ *ом* заряжает аккумуляторную батарею с э. д. с. $\mathcal{E}_2 = 10$ *в* и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ *ом*. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $R = 3$ *ом*. Определить ток в батарее аккумуляторов и в лампочке (рис. 81).

Решение. Задача легко решается с применением законов Кирхгофа:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \\ Ir_1 + I_1 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ Ir_1 + I_2 R = \mathcal{E}_1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} I_1(r_1 + r_2) + I_2 r_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ I_1 r_1 + I_2(r_1 + R) = \mathcal{E}_1. \end{cases}$$

$$I_1=\frac{\mathscr{E}_1 R-\mathscr{E}_2(r_1+R)}{r_1r_2+R(r_1+r_2)}=1{,}58\ a;$$

$$I_2=\frac{\mathscr{E}_1 r_2+\mathscr{E}_2 r_1}{r_1r_2+R(r_1+r_2)}=3{,}65\ a.$$

Задачу можно решить и не используя второго закона Кирхгофа. Обозначив разность потенциалов между точками A и B через U, можно написать:

$U=I_2R$ — закон Ома для участка однородной цепи, содержащего лампочку;

$U-\mathscr{E}_2=I_1r_2$ — закон Ома для участка неоднородной цепи, содержащего $\mathscr{E}_2$;

$\mathscr{E}_1-U=Ir_1$ — выражение для внутреннего напряжения работающего источника тока.

Комбинируя эти уравнения, получаем (1).

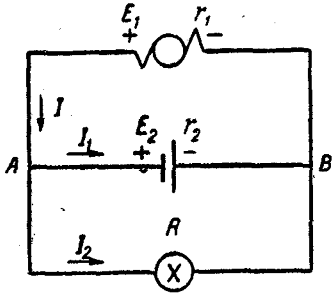

Рис. 81.

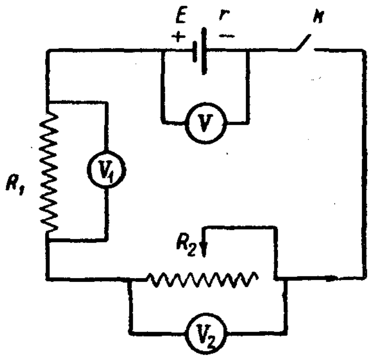

Рис. 82.

Задача № 108

Собрана следующая схема (рис. 82). Как изменяются показания вольтметров (при замкнутом ключе K) при уменьшении сопротивления R_2? Собственные сопротивления вольтметра велики.

Решение. Ток в цепи определяется выражением:

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_1+R_2+r}.$$

Напряжения, показываемые вольтметрами:

$$V\ldots U=\mathscr{E}-Ir;$$

$$V_1\ldots U_1=IR_1;$$

$$V_2\ldots U_2=IR_2.$$

Отсюда сразу видно, что при уменьшении R_2, (а значит, при увеличении I) U уменьшается, U_1 увеличивается, а так как $U=U_1+U_2$, то U_2 должно уменьшаться настолько быстро, чтобы обеспечить уменьшение U, несмотря на рост U_1. При решении задачи предполагалось, что сопротивления r, R_1 и R_2 не зависят от силы тока в цепи.

Задача № 109

Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое в течение одной секунды в следующих случаях; 1) в проводе, по которому идет ток 1 *а*; напряжение между концами провода равно 2 *в*; 2) в аккумуляторе, который заряжается током от зарядной станции; напряжение между полюсами аккумулятора равно 2 *в*; э. д. с. аккумулятора равна 1,3 *в*, внутреннее сопротивление 0,7 *ом*; 3) в батарее аккумуляторов, которая дает ток на внешнее сопротивление $R = 2$ *ом*; э. д. с. батареи равна 2,6 *в*, внутреннее сопротивление 0,5 *ом*.

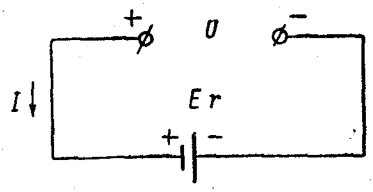

Рис. 83.

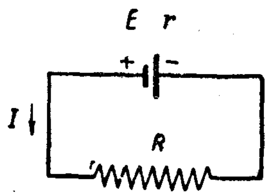

Рис. 84.

Решение. 1) Мощность электрического тока (т. е. работа, совершаемая в единицу времени) находится из выражения: $N = IU$, а количество теплоты, выделяемое в единицу времени, — $Q = I^2R$. Так как в первом случае выражение для силы тока в участке цепи имеет вид $I = \frac{U}{R}$, то $Q = IU = 2$ *дж*, т. е. в данном случае вся работа электрических сил переходит в теплоту.

2) Схема для зарядки аккумулятора изображена на рис. 83. Ток находится на основании закона Ома для участка неоднородной цепи:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{r}.$$

Здесь r — внутреннее сопротивление аккумулятора (сопротивлением подводящих проводов пренебрегаем).

Полная мощность тока

$$N = IU = \frac{(U - \mathcal{E})\, U}{r}.$$

На зарядку аккумулятора расходуется только часть мощности

$$N_{зар} = I\mathcal{E} = \frac{(U - \mathcal{E})\, \mathcal{E}}{r},$$

а остальное переходит в теплоту:

$$N_Q = N - N_{зар} = \frac{(U - \mathscr{E})^2}{r} = I^2 r,$$

т. е. как и должно быть по закону Джоуля—Ленца.

3) В этом случае схема имеет вид, изображенный на рис. 84. Мощность, развиваемая батареей,

$$N = I\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}^2}{R + r}.$$

Эта мощность развивается сторонними силами, совершающими работу по разделению электрических зарядов. Поэтому работа, совершаемая электрическими силами в единицу времени, $N_1 = -N$. Количество теплоты, выделяющееся внутри батареи в единицу времени,

$$Q = I^2 r = \frac{\mathscr{E}^2}{(R + r)^2} r.$$

Задача № 110

Элемент замыкается: один раз проволокой с сопротивлением $R_1 = 4$ *ом*, другой раз проволокой с сопротивлением $R_2 = 9$ *ом*. И в том, и в другом случае количество теплоты, выделяющееся в проволоке, оказывается одинаковым. Определить внутреннее сопротивление элемента.

Решение.

$$Q = I^2 R t = \frac{\mathscr{E}^2}{(R + r)^2} R t,$$

поэтому

$$\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2}; \quad r = \sqrt{R_1 R_2} = 6 \text{ ом}.$$

Задача № 111

Если напряжение в сети равно $U_1 = 120$ *в*, то вода в электрическом чайнике закипает через $t_1 = 20$ *мин*. Если же напряжение в сети равно $U_2 = 110$ *в*, то при таком же количестве воды и при такой же начальной температуре вода закипает через $t_2 = 28$ *мин*. Предполагая для упрощения, что потери теплоты от чайника в окружающее пространство пропорциональны времени нагревания, рассчитать, через сколько времени t_3 закипит вода в чайнике при напряжении в сети, равном $U_3 = 100$ *в*.

Решение. Пренебрегая изменением сопротивления спирали чайника при различных силах тока, идущего по ней, можем написать выражение для количества тепла, сообщенного воде, в виде

$$Q = \frac{U_1^2}{R} t_1 - k t_1 = \frac{U_2^2}{R} t_2 - k t_2 = \frac{U_3^2}{R} t_3 - k t_3.$$

Отсюда легко найти

$$k = \frac{U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2}{R(t_1 - t_2)};$$

$$t_3 = \frac{\frac{U_1^2}{R} t_1 - k t_1}{\frac{U_3^2}{R} - k} = \frac{t_1 t_2 (U_1^2 - U_2^2)}{U_3^2 (t_2 - t_1) + U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2} = 44 \text{ мин.}$$

Задача № 112

Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков коэффициент полезного действия, если при полной мощности 60 *квт* 40 *кг* масла нагрелись за 4 *мин* на 20°С. Теплоемкость масла $C = 210$ *дж/кг·град.*

Решение. Коэффициент полезного действия трансформатора равен $\eta = \frac{P_2}{P_1}$, где P_2 и P_1 мощности тока во вторичной и первичной обмотках трансформатора. Очевидно, что $P_2 = P_1 - P'$, где P' — мощность, выделяемая в форме джоулева тепла вследствие нагревания обмоток трансформатора и сердечника.

Можно считать, что все это тепло поглощается маслом, в которое помещен трансформатор, тогда

$$\eta = \frac{P_1 - \frac{m c \Delta t^\circ}{t}}{P_1} = 1 - \frac{m c \Delta t^\circ}{P_1 t} \approx 0{,}88.$$

Задача № 113

Определить количество меди, потребное для устройства проводки с общей длиной $l = 5$ *км*. Напряжение на шинах станции $U_0 = 240$ *в*. Передаваемая потребителю мощность $N = 60$ *квт*. Допускается в проводке потеря напряжения $k = 8\%$ (рис. 85).

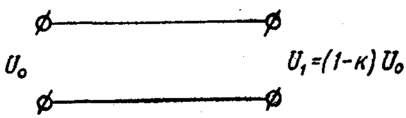

Рис. 85.

Решение. Масса необходимой меди найдется из соотношения:

$$m = D l S,$$

где D — плотность меди.

Сечение проволоки S выбирается таким образом, чтобы потери напряжения на подводящих проводах составили kU_0. Ток, идущий в цепи, определяется как $I_0 = \frac{N}{U_0}$.

На основании закона Ома для участка цепи

$$kU_0 = I_0 R;$$

$$kU_0 = \frac{N}{U_0} \rho \frac{l}{S},$$

отсюда

$$S = \frac{N \rho l}{kU_0^2}.$$

Тогда

$$m = DlS = \frac{DN\rho l^2}{kU_0^2} = 54 \ m.$$

Задача № 114

Два источника постоянного тока с э. д. с. $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соединены последовательно и замкнуты на некоторую внешнюю цепь. Так как э. д. с. источников складываются, то нетрудно видеть, что полная мощность, развиваемая системой, равна $\frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{R}$, где R — сумма сопротивлений внешнего и внутренних. Однако, казалось бы, что мощность батареи источников можно подсчитать, сложив мощности каждого источника, если бы он работал один на цепь с тем же сопротивлением. Но тогда получается

$$\frac{\mathcal{E}_1^2}{R} + \frac{\mathcal{E}_2^2}{R},$$

т. е. другой результат. Выяснить недоразумение.

Решение. Мощность, развиваемая каждым источником, равна $\mathcal{E}I$, где I — ток, идущий через данный источник. Для нахождения же тока в последовательной цепи нужно учесть все действующие там э. д. с. В нашем случае

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R}.$$

Вычисляя теперь полную мощность как сумму мощностей, развиваемых каждым источником, получим

$$N = N_1 + N_2 = \mathcal{E}_1 I + \mathcal{E}_2 I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R} = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{R}.$$

Задача № 115

Определить коэффициент полезного действия трансформатора η, дающего во вторичной обмотке ток $I_2 = 0{,}48a$ при пропускании в первичной обмотке тока $I_1 = 15a$, если коэффициент трансформации $k = 30$.

Решение. Коэффициент полезного действия трансформатора определяется как отношение мощности, которая может быть получена на выходе вторичной обмотки, к мощности, развиваемой в первичной обмотке:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1},$$

но

$$\frac{U_2}{U_1} = k,$$

поэтому

$$\eta = \frac{I_2}{I_1} k = 0{,}96.$$

Задача № 116

Как будет двигаться электрон, влетевший в однородное магнитное поле, если направление поля перпендикулярно к направлению начальной скорости электрона?

Решение. На электрон в магнитном поле действует сила $F_л = evB \sin\alpha$, перпендикулярная векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$; α — угол между этими векторами, равный в нашем случае $\frac{\pi}{2}$.

Пренебрегая весом электрона mg, который при обычных условиях много меньше силы $F_л$, получаем, что на электрон действует единственная сила, перпендикулярная его скорости. Как известно, в этом случае тело движется по окружности, а уравнение его движения запишется следующим образом:

$$|e| vB = \frac{mv^2}{R},$$

откуда для радиуса окружности получаем выражение

$$R = \frac{mv}{|e| B}.$$

Интересно заметить, что время полного оборота электрона не зависит от его скорости. Действительно,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|e| B}.$$

Задача № 117

Узкий пучок электронов различных скоростей попадает в электрическое поле, образованное сильно сближенными пластинами плоского конденсатора (рис. 86). Перпендикулярно плоскости чертежа создается, кроме того, однородное магнитное поле, причем границы магнитного и электрического полей совпадают. Найти условие, которому должна удовлетворять скорость электронов, выходящих из конденсатора.

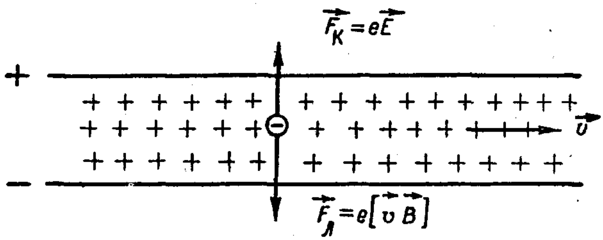

Рис. 86.

Решение. Для того чтобы электрон мог пролететь между обкладками конденсатора не отклоняясь, силы, действующие на него со стороны электрического и магнитного полей, должны уравновешивать друг друга. Поэтому

$$eE = evB,$$

откуда

$$v = \frac{E}{B}.$$

Задача № 118

В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости чертежа, вращается с угловой скоростью ω металлический диск радиуса R. Найти напряженность кулоновского поля E как функцию расстояния r от оси диска и разность потенциалов между центром и его краем (рис. 87).

Решение. При вращении диска каждая его частица удерживается на окружности радиуса r, для чего необходима удерживающая сила. На каждую частицу с зарядом q действуют сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля и сила Кулона $\vec{F}_К$ со стороны перераспределившихся в результате вращения зарядов. Поскольку перемещаться в металле могут только электроны, то будем рассматривать силы, действующие на них (помня, однако, что все правила сформулированы для положительных зарядов).

Выбрав направление $\vec{B}$, например, за плоскость чертежа, а вращение диска по часовой стрелке, получим, что $\vec{F}_л$ для электрона будет направлена к центру диска. О направлении же $\vec{F}_к$ пока ничего сказать нельзя. Предположим, что $\vec{F}_к$ направлена тоже к центру. Тогда, по второму закону Ньютона, имеем в проекциях на радиус диска

$$F_к + F_л = m\omega^2 r,$$

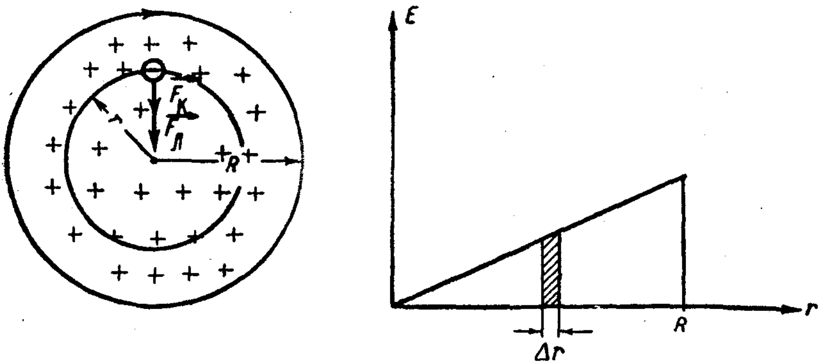

Рис. 87.

или

$$e(E + B\omega r) = m\omega^2 r,$$

откуда

$$E = \left(\frac{m\omega^2}{e} - B\omega\right) r.$$

Здесь величины m, ω, B и r положительны, а e — отрицательна, поэтому при данном выборе направления вращения и вектора $\vec{B}$ скобка отрицательна и $E < 0$ ($\vec{E}$ направлено от центра), что соответствует $F_к > 0$ (т. е. $\vec{F}_к$ направлена к центру в соответствии с предположением).

Так как E пропорционально r, то график $E = E(r)$ будет представлять собой прямую, проходящую через начало координат.

Учитывая, что между близкими точками $|\Delta\varphi| = |E \cdot \Delta r|$, получим, что на графике разность потенциалов между двумя очень близкими точками численно равна заштрихванной на графике полоске. Разность же потенциалов между центром диска и краем равна численно площади треугольника, и, значит

$$\left|\varphi_0 - \varphi_R\right| = \left|\frac{m\omega^2}{e} - B\omega\right| \frac{R^2}{2}.$$

Задача № 119

Определить направление индукционного тока в левой катушке, если в правой катушке рычаг реостата двигается в указанном направлении (рис. 88).

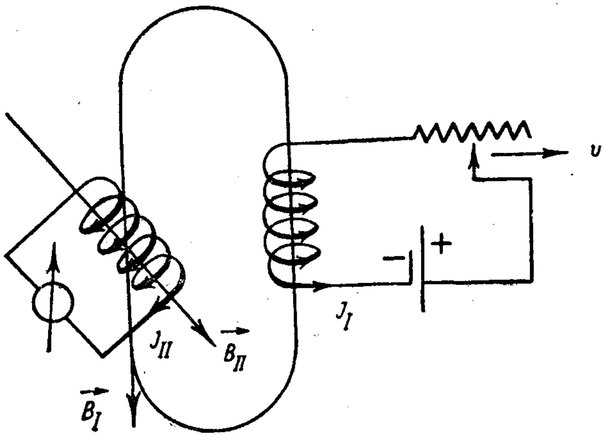

Рис. 88.

Решение. Правило Ленца говорит о том, что направление индукционного тока (I_{II}) определяется направлением и характером изменения того магнитного поля ($\vec{B}_I$), которое вызывает индукцию. При этом магнитное поле $\vec{B}_{II}$ индукционного тока I_{II} всегда направлено так, чтобы препятствовать *изменению* $\vec{B}_I$.

Отсюда, если $|\vec{B}_I|$ растет, то $\vec{B}_{II}$ имеет составляющую, направленную навстречу $\vec{B}_I$; если $|\vec{B}_I|$ убывает, то $\vec{B}_{II}$ имеет составляющую по направлению $\vec{B}_I$.

Из рис. 88 видно, как направлено $\vec{B}_I$ около левой катушки. И так как из-за увеличения сопротивления реостата в правой катушке I_I убывает, то убывает и $\vec{B}_I$. Это означает, что $\vec{B}_{II}$ должно иметь составляющую, как указано на рис. 88, и по правилу буравчика I_{II} направлено так, как указано на рисунке.

Задача № 120

Для определения $\frac{e}{m}$ электронов используется откачанная цилиндрическая камера, в которой помещена проволока K, раскаливаемая электрическим током, ряд диафрагм C и фотопластинка P. Камера помещается в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа. Диафрагмы расположены по окружности радиуса R. Между электродом K и диафрагмами приложено ускоряющее электроны напряжение U. Вывести условие, при котором электроны, выходя из K, попадут на фотопластинку через диафрагмы C (рис. 89).

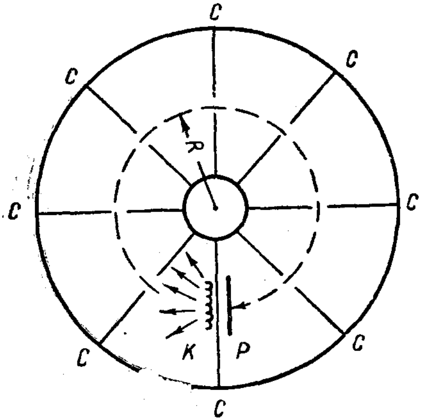

Рис. 89.

Решение. Пролетая от проволоки K до первой диафрагмы C, электрон набирает скорость, которая может быть определена на основании закона изменения кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv^2}{2} = eU. \qquad (1)$$

Дойти до фотопластинки P смогут лишь те электроны, которые, начиная от первой диафрагмы, будут двигаться по окружности радиуса R. Поэтому, исходя из второго закона Ньютона в виде

$$\frac{mv^2}{R} = evB, \qquad (2)$$

совместно с (1) по исключении v^2 получим искомое решение

$$2U = vBR.$$

Само же отношение $\frac{e}{m}$ можно найти из (1) или (2).

Раздел IV

ОПТИКА. КОЛЕБАНИЯ

В этом разделе используются известные формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d}, \quad D=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \; k_\perp=\frac{f}{d},$$

где F — главное фокусное расстояние линзы; d — расстояние от предмета до линзы; f — расстояние от линзы до изображения; $k_\perp$ — коэффициент линейного поперечного увеличения линзы; $D=\frac{1}{F}$ — оптическая сила линзы; n — показатель преломления материала линзы относительно среды; R_1 и R_2 — — радиусы ограничивающих линзу сферических поверхностей.

$$h\nu=A+\frac{mv^2}{2},$$

где $h\nu$ — энергия кванта света; A — работа выхода электрона из тела; $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия «выбитого» квантом света электрона.

Освещенность поверхности E определяется по формуле

$$E=\frac{\Phi}{S},$$

где Φ — световой поток, падающий на поверхность S.

В формуле для определения периода гармонических колебаний T

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

m — масса колеблющегося малого тела; k — коэффициент возвращающей силы, т. е. $k=\frac{\Delta F}{\Delta x}$, где Δx — отклонение тела от равновесия, а ΔF — возникшая при этом возвращающая сила.

Задача № 121

На высоте h над поверхностью воды, налитой в сосуд с зеркальным дном, находится точка A. Зная глубину сосуда d и показатель преломления воды n, построить все изображения точки A и рассчитать их положения.

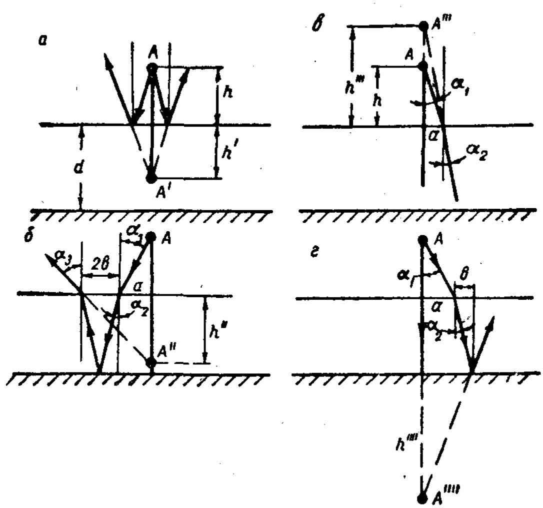

Рис. 90.

Решение. Можно увидеть четыре ярких изображения: два — наблюдателем, находящимся над водой и смотрящим на поверхность воды, и два — наблюдателем, находящимся в воде и смотрящим один раз наверх, а другой раз на зеркальное дно.

Первое изображение обусловлено тем, что часть света, отражаясь от воды, попадает в глаз наблюдателю (рис. 90, *а*). Очевидно, изображение A' будет находиться в воде на расстоянии $h' = h$ от поверхности воды.

Второе изображение будет обусловлено тем, что часть света, пройдя в воду и отразившись от зеркала, вновь выйдет наружу и попадет в глаз наблюдателю (рис. 90, *б*). Это изображение A'' будет находиться на расстоянии h'' от поверхности жидкости. Найдем его:

$$h'' = (a + 2b)\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_3} = (h\operatorname{tg}\alpha_1 + 2d\operatorname{tg}\alpha_2)\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_3}.$$

Считая все углы α_1, α_2 и α_3 малыми, что справедливо для случая наблюдения из точки, близкой к вертикали AA'', получим $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$, и, значит, $n=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$ и $n=\frac{\operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_2}$, откуда $\alpha_3=\alpha_1$, и, значит, с учетом $\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_3}=\frac{1}{n}$ получим

$$h''=h+\frac{2d}{n}.$$

Третье изображение A''' увидел бы наблюдатель, смотрящий из воды вверх. Это изображение обусловлено светом, попадающим в глаз сразу после преломления на границе воздух — вода (рис. 99, *в*):

$$h'''=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{h\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=hn$$

(считаем $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$).

Четвертое изображение A''' увидел бы наблюдатель, находящийся в воде и смотрящий на зеркало. Это изображение обусловлено светом, отразившимся от зеркала, и еще не вышедшим из воды (рис. 90, *г*):

$$h''''=\frac{c}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{a+b}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{h\operatorname{tg}\alpha_1+d\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2}=hn+d.$$

Очевидно, можно построить еще много изображений, обусловленных повторными отражениями и преломлениями, но каждое следующее будет все менее ярким, ибо количество света, дающее это изображение, будет все меньшим из-за рассеяния, поглощения, отражения и т. д.

Задача № 122

Две собирающие линзы, плоскости которых находятся на расстоянии $l>F_1+F_2$, имеют общую главную ось. На расстоянии $d_1>F_1$ на главной оси — светящаяся точка. Построить ее изображение и рассчитать положение (рис. 91, *а*).

Решение. Первый луч пускаем по главной оси, второй — под небольшим углом к ней. Для построения его хода проводим побочную ось *aa* параллельно второму лучу. Второй луч и побочная ось *aa* пересекут фокальную плоскость *AA* в одной точке *c*. Этим определен ход второго луча до второй линзы. Аналогично строим с помощью побочной оси *bb* его ход после второй линзы. Таким образом, получим A'' — искомое изображение точки *A*.

Для расчета ее положения воспользуемся тем формальным приемом, что изображение A', данное первой линзой, можно рассматривать как предмет для второй линзы:

$$f_2=\frac{d_2F_2}{d_2-F_2}=\frac{(l-f_1)F_2}{l-f_1-F_2},$$

где

$$f_1 = \frac{d_1 F_1}{d_1 - F_1}.$$

Замечание. Если бы одна из линз была рассеивающей, то второй луч шел бы так, чтобы его *продолжение* и побочная ось *сс* пересекли фокальную плоскость этой линзы в одной точке (рис. 91, *б*).

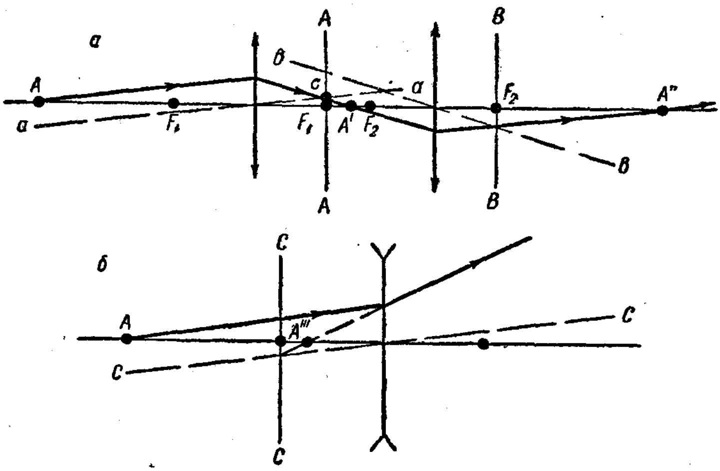

Рис. 91.

Задача № 123

Светящаяся точка на высоте h над главной осью линзы и на расстоянии d от ее плоскости имеет скорость $\vec{v}$. Найти скорость движения ее изображения $\vec{u}$ (рис. 92), если главное фокусное расстояние линзы равно F.

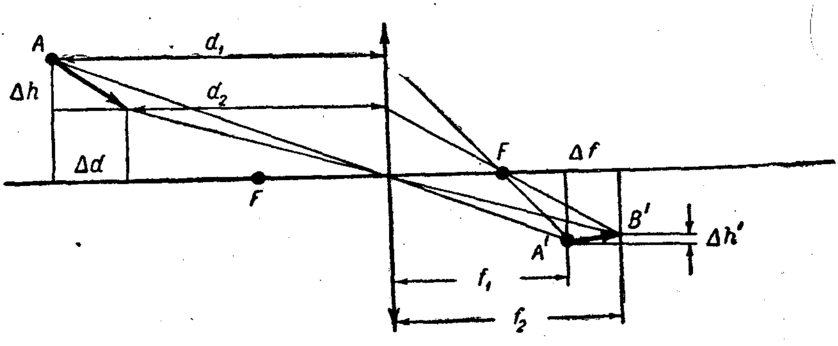

Рис. 92.

Решение. За малое время Δt точка переместится на $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$, а ее изображение — на $\Delta\vec{r}' = \vec{u}\Delta t$. Задача сводится по существу к нахождению *малого* $\Delta\vec{r}'$ (или, что все равно, его проекций $\Delta h'$ и Δf).

Построим малое перемещение точки и его изображение. Тогда

1) для составляющей по главной оптической оси:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{d - \Delta d} + \frac{1}{f + \Delta f} = \frac{1}{F}.$$

Приравнивая левые части равенств, получим

$$\frac{1}{d - \Delta d} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f + \Delta f},$$

что после очевидных преобразований дает $\frac{\Delta f}{\Delta d} = \frac{f^2}{d^2}$, и, так как $f = \frac{dF}{d - F}$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta d} = \frac{F^2}{(d - F)^2} \quad \text{или} \quad \frac{u_x \Delta t}{v_x \Delta t} = \frac{F^2}{(a - F)^2},$$

откуда

$$u_x = v_x \frac{F^2}{(d - F)^2};$$

2) для составляющей поперек оси:

$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{d} \quad \text{и} \quad \frac{h' - \Delta h'}{h - \Delta h} = \frac{f}{d},$$

откуда

$$\frac{\Delta h'}{\Delta h} = \frac{f}{d},$$

или

$$\frac{u_y \Delta t}{v_y \Delta t} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F},$$

откуда

$$u_y = v_y \frac{F}{d - F}.$$

Зная u_x и u_y, находим $\vec{u}$, ибо проекции вектора вполне определяют сам вектор.

Задача № 124

Стеклянную линзу переместили из воды в сероуглерод. Как при этом изменилась оптическая сила линзы?

$$(n_{\text{сероугл}} > n_{\text{стекл}} > n_{\text{воды}}.)$$

Решение.

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{(n_2-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{(n_1-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)},$$

или

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{\left(\frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{сероугл}}}-1\right)}{\left(\frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{воды}}}-1\right)}.$$

Поскольку $\frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{воды}}}>1$, а $\frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{сероугл}}}<1$, то $\frac{D_2}{D_1}<0$. При этом если $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)>0$ (т. е. линза выпукла), то $D_1>0$, а $D_2<0$. Если линза вогнутая, т. е. $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)<0$, то, наоборот, $D_1<0$, а $D_2>0$.

Задача № 125

Показать, что изображение, даваемое рассеивающей линзой, всегда мнимое и уменьшенное.

Решение. Поперечное линейное увеличение линзы дается формулой

$$k_\perp=\frac{f}{d}=\frac{Fd}{(d-F)d}=\frac{F}{d-F}=\frac{1}{\frac{d}{F}-1},$$

так как $d>0$ (предмет действителен), а $F<0$ (линза рассеивающая), то $\frac{d}{F}<0$ и, значит, $k_\perp=\frac{1}{-\frac{d}{|F|}-1}<0$, причем $|k|<1$, что и означает мнимое ($k<0$) и уменьшенное ($|k|<1$) изображение.

Задача № 126

Заданы расположение и размеры предмета и его изображения в двух случаях: линза собирающая (рис. 93, *а*) и рассеивающая (рис. 93, *б*). Найти положение линз и их фокальные плоскости построением.

Решение. Так как лучи, исходящие из любой точки предмета, после прохождения линзы сходятся в одной точке, то, соединив точку A предмета с точкой A' изображения, мы получим луч, который, пройдя через линзу, не изменил своего направления. Такой луч обязан пройти через центр линзы. Значит, точка O определяет положение линзы.

1. Пустив теперь из точки A луч, параллельный главной оси, и направив его после линзы в точку A', определим положение правой фокальной плоскости ($F_{\text{прав}}$). Слева из сообра-

жений симметрии определяется и положение левой фокальной плоскости ($F_{лев}$).

2. Так как изображение мнимое, то все *продолжения* лучей из A (а не сами лучи, как в случае действительного изображения) должны собраться в точке A'. Положение линзы определяется, как и в случае 1, путем соединения A с A'. Для определения левой фокальной плоскости пустим из A луч параллельно главной оси. Он линзой будет отклонен кверху так, что его продолжение (пунктир) пройдет через точку A'. Пересечение этого продолжения с главной осью и определит положение $F_{лев}$, а $F_{прав}$ будет симметрично относительно линзы.

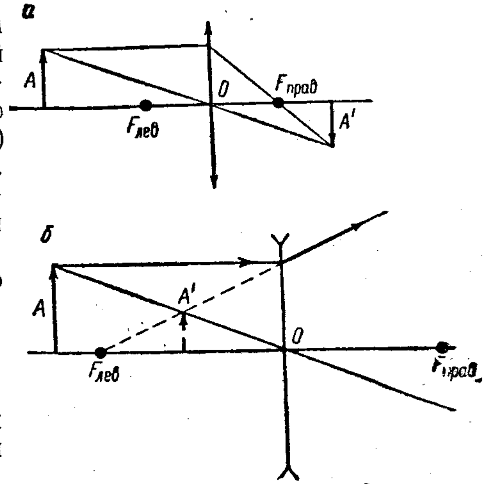

Рис. 93.

Задача № 127

Две собирающие линзы с общей главной осью и фокусными расстояниями F_1 и F_2 находятся на расстоянии l друг от друга. На расстоянии d_1 от первой линзы находится предмет высотой h. Какова высота H изображения, данного этой системой линз (рис. 94)? При каком l изображение будет действительным?

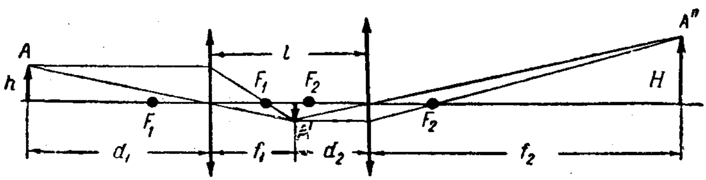

Рис. 94.

Решение. Из определения поперечного увеличения линзы имеем $H = k_\perp h$. Но $k_\perp$ для центрированной системы линз равно произведению отдельных k_1 и k_2. Поэтому

$$H = k_1 k_2 h = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \cdot \frac{F_2}{d_2 - F_2} h = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \cdot \frac{F_2}{(l - f_1) - F_2} h =$$

$$= \frac{F_1}{d_1 - F_1} \cdot \frac{F_2}{\left(l - \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1}\right) - F_2} h = \frac{F_1 F_2 h}{(l - F_2)(d_1 - F_1) - F_1 d_1}.$$

Легко видеть, что лишь при $(l-F_2)(d_1-F_1)>F_1d_1$ изображение будет действительным.

Задача № 128

Крупинка металла совмещена с изображением точечного источника света, даваемым собирающей линзой. Когда источник находится на расстоянии d_1 от линзы, крупинка нагревается на Δt_1^0 за одну секунду. На сколько градусов нагревается за одну секунду эта крупинка, вновь совмещенная с изображением того же источника света, если последний находится на расстоянии d_2 от линзы? (d_1 и $d_2 \gg F$).

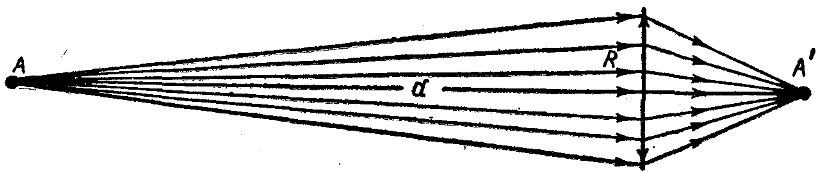

Рис. 95.

Решение. Так как крупинка металла в обоих случаях совмещена с действительным изображением точечного источника, то на нее падает весь световой поток, прошедший через линзу (рис. 95). На линзу от точечного изотропного источника A падает световой поток

$$\Phi = I\omega, \tag{1}$$

где I — сила света источника, а ω — телесный угол, под которым видна линза из точки, где расположен источник. Так как $d \gg F$, то

$$\omega = \frac{S}{d^2} \tag{2}$$

и $S=\pi R^2$, где R — радиус линзы. Поэтому из равенства

$$\Phi\Delta\tau = mc\Delta t^0,$$

где $\Delta\tau$ — время облучения, имеем

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\Delta t_1^0}{\Delta t_2^0},$$

или с учетом (1) и (2)

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\Delta t_1^0}{\Delta t_2^0},$$

откуда

$$\Delta t_2^0 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \Delta t_1^0.$$

Задача № 129

Точечный изотропный источник света расположен на расстоянии a над поверхностью стола. Освещенность стола под источником равна E. Как изменится эта освещенность, если над источником на расстоянии a от него поместить зеркало, составляющее с поверхностью стола угол α?

Решение. После помещения зеркала NN освещенность стола под источником будет создаваться самим источником A и его изображением в зеркале A' (рис. 96). Поэтому освещенность увеличится на величину

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha_1, \tag{1}$$

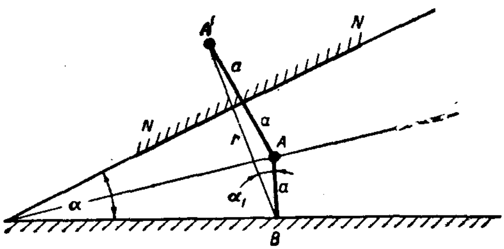

Рис. 96.

где I определится из условия

$$E = \frac{I}{a^2}, \tag{2}$$

а $\cos \alpha_1$ и r могут быть найдены из $\Delta AA'B$. По теореме косинусов $r^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos A'AB$, и так как $\angle A'AB = 180° - \alpha$, то $\cos A'AB = -\cos \alpha$. Поэтому

$$r^2 = 5a^2 + 4a^2 \cos \alpha. \tag{3}$$

С другой стороны, $4a^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha_1$, что совместно с (3) дает

$$\cos \alpha_1 = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}}. \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получим

$$E_1 = E \frac{1 + 2 \cos \alpha}{(5 + 4 \cos \alpha)^{3/2}}.$$

Задача № 130

Шару радиуса R сообщили малый заряд q. Как изменится красная граница фотоэффекта с него?

Решение. Заряжение шара эквивалентно изменению работы выхода электрона на $e\varphi$, где φ — потенциал шара. Значит, $h\Delta\nu_{кр} = \Delta A_{вых}$, или

$$h\Delta\nu_{кр} = e\varphi = e\frac{q}{R},$$

откуда

$$\Delta\nu_{кр} = \frac{eq}{hR}.$$

Очевидно, положительный заряд q, увеличивая работу выхода, увеличивает $\nu_{кр}$, а отрицательный — уменьшает.

Надо отметить, что механизм изменения работы выхода при зарядах разного знака различен, но практически результаты отличаются тем меньше, чем меньше заряд, чем и обусловлена в задаче оговорка о малости заряда q на шаре.

Задача № 131

Фотоэлемент с коэффициентом полезного действия η отдает во внешнюю цепь с сопротивлением R мощность N_R. Считая фотоэлектродвижущую силу элемента пропорциональной корню квадратному из светового потока, падающего на фотоэлемент (т. е. $\mathcal{E} = k\sqrt{\Phi}$), найти коэффициент пропорциональности k. Активная поверхность элемента S и ее освещенность E известны.

Решение. Имеем

$$\eta = \frac{N_{эл}}{N_{св}} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R+r}}{\Phi} = \frac{k^2}{R+r}. \tag{1}$$

Кроме того,

$$N_R = I^2R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R = \frac{k^2\Phi}{(R+r)^2} R = \frac{k^2ESR}{(R+r)^2}. \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) $(R+r)$, получим

$$k = \eta\sqrt{\frac{ESR}{N_R}}.$$

Задача № 132

В фотоэлементе слой калия освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 4\cdot10^3$ Å. Найти, с какой скоростью вылетают фотоэлектроны из слоя, если фотоэффект для калия начинается с $\lambda_0 = 10^4$ Å.

Решение. На основании закона Энштейна

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

где A — работа выхода электронов из металла.

Так как фотоэффект для калия начинается с λ_0, то

$$A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}, \tag{2}$$

и из (1) и (2) получаем

$$v = \sqrt{\frac{2hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}{m}} = 8\cdot 10^7\ \frac{см}{сек}.$$

Задача № 133

В электрической цепи, состоящей из емкости C и сопротивления R, могут происходить колебания, период которых равен или произведению R и C или их частному. Чему именно?

Решение. Исходить надо из правила размерностей (наименований). Предположим, что $T = RC$. Проверим:

$$RC = [ом\cdot ф] = \left[\frac{в}{а}\cdot\frac{к}{в}\right] = \left[\frac{к}{а}\right] = [сек].$$

Отсюда произведение RC по размерности совпадает с размерностью периода T. Значит, $T = RC$.

Задача № 134

Звук частоты f от источника до приемника распространяется в течение времени Δt. Каков сдвиг по фазе $\Delta\varphi$ между колебаниями в этих точках и сколько длин волн N укладывается на этом расстоянии?

Решение. Если точки находятся на расстоянии λ, то они колеблются со сдвигом по фазе в 2π. Отсюда для точек, находящихся на расстоянии Δl, имеем

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l = \frac{2\pi v\Delta t}{\lambda} = 2\pi f\Delta t,$$

а

$$N = \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{v\Delta t}{\lambda} = f\Delta t.$$

Задача № 135

В тонкостенном цилиндре длиной $2l$, ось которого наклонена под углом α к горизонту, находится поршень массой m и сечением S, способный без трения скользить по стенкам цилиндра. Зная, что при положении поршня посреди цилиндра давления справа и слева от него равны p_0, найти период колебания поршня (рис. 97), если температура газа постоянна.

Решение. Для малых колебаний, вызываемых силой, пропорциональной смещению, имеем

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где

$$k=\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{\Delta F}{\Delta l}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициента упругости k.

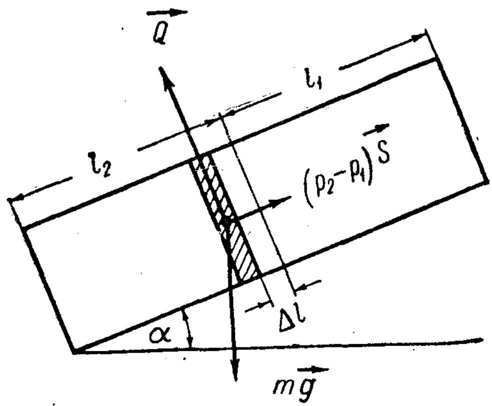

Рис. 97.

Очевидно, при смещении поршня из положения равновесия на Δl возникает возвращающая сила.

$$\Delta F=(\Delta p_1+\Delta p_2)S, \tag{1}$$

где Δp_1 и Δp_2 — изменения давления справа и слева от поршня. Так как процесс изотермический, то, по закону Бойля-Мариотта,

$$(p_1+\Delta p_1)(l_1-\Delta l)=p_1 l_1,$$
$$(p_2-\Delta p_2)(l_2+\Delta l)=p_2 l_2,$$

где p_1 и p_2 — давления газа при равновесии поршня. Отсюда при учете малости $\Delta p \Delta l$ получим

$$\Delta p_1=\frac{p_1}{l_1}\Delta l \quad \text{и} \quad \Delta p_2=\frac{p_2}{l_2}\Delta l,$$

что с учетом (1) дает

$$k=\frac{\Delta F}{\Delta l}=\left(\frac{p_1}{l_1}+\frac{p_2}{l_2}\right)S. \tag{2}$$

Далее из $p_1 l_1=p_0 l$ и $p_2 l_2=p_0 l$ выражаем p_1 и p_2, что дает при подстановке в (2)

$$k = p_0 l\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right) S. \qquad (3)$$

Для нахождения l_1 и l_2 имеем

$$l_1 + l_2 = 2l \qquad (4)$$

и $(p_1 - p_2) S = mg \sin\alpha$ (из условия равновесия поршня). Выражая p_1 и p_2 через p_0, получаем

$$p_0 l\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) S = mg \sin\alpha. \qquad (5)$$

Находя из этой системы l_1 и l_2 и подставляя их значения в (3), получим решение задачи.

Ответ получается, к сожалению, громоздким. Но если считать, что $\alpha = 0$, то решение мгновенно упрощается. Именно из (5) следует $l_1 = l_2 = l$ и тогда (3) дает

$$k = \frac{2p_0 S}{l},$$

и потому

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2p_0 S}}.$$

Задача № 136

Одним из примеров гармонического колебания является движение проекции, движущейся по окружности материальной точки, у которой величина скорости v постоянна.

Пользуясь приемом проектирования векторов $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{a}$ на один из диаметров, получить законы $x = x(t)$, $v_x = v_x(t)$, $a_x = a_x(t)$ и разъяснить смысл вошедших в эти выражения величин.

Решение. Спроектируем все векторы, например, на вертикальный диаметр (рис. 98), считая направление вверх положительным. Тогда

$$x = r\sin\varphi = r\sin\omega t = r\sin 2\pi f t = r\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$v_x = v\cos\varphi = v\cos\omega t = v\cos 2\pi f t = v\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$a_x = -a\sin\varphi = -a\sin\omega t = -a\sin 2\pi f t = -a\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

или с учетом $v = \omega r$ и $a = \omega^2 r$

$$x = r\sin\omega t = \ldots,$$
$$v_x = \omega r\cos\omega t = \ldots,$$
$$a_x = -\omega^2 r\sin\omega t = \ldots$$

Очевидно, здесь величины r, $r\omega$ и $r\omega^2$ имеют смысл максимальных значений колеблющихся величин x, v_x и a_x.

Величины же ω, f, T имеют для колеблющейся точки смысл круговой частоты ($\omega = 2\pi f$), частоты и периода колебаний.

Чисто формальным образом можно эти закономерности для x, v_x и a_x применять теперь и для описания движения материальной точки, на которую действует сила типа $\vec{F} = -k\vec{x}$, где $\vec{x}$ — отклонение точки от устойчивого равновесия, а $\vec{F}$ — возникающая при этом возвращающая сила.

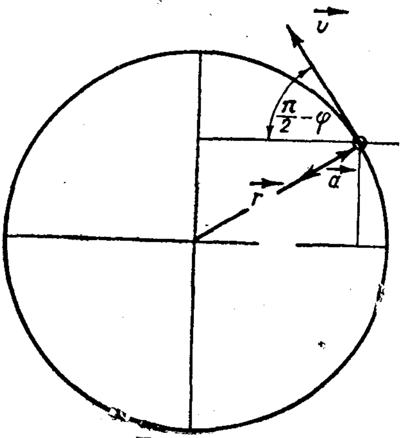

Рис. 98.

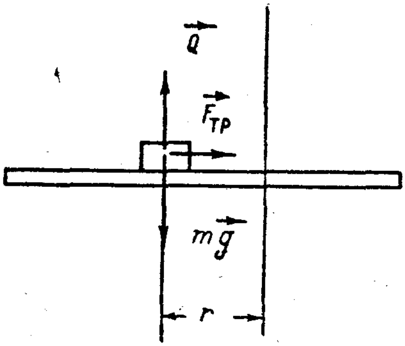

Рис. 99.

Задача № 137

Доска совершает колебания в горизонтальной плоскости (рис. 99) с частотой f. На доске находится тело, коэффициент трения о доску которого k.

При какой амплитуде колебания тело начнет скользить по доске?

Решение. Колеблющееся тело движется ускоренно, и в любой момент времени по второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q} = m\vec{a}$, или, так как $m\vec{g} + \vec{Q} = 0$, $\vec{F}_{тр} = m\vec{a}$. Тело не будет скользить, пока сила трения покоя не достигнет максимального значения.

Скольжение может произойти при некотором амплитудном смещении тела от положения равновесия (т. е. $x = r$), когда ускорение максимально. При этом $kmg = ma_{max}$ или $kg = 4\pi^2 f^2 r$, откуда

$$r = \frac{kg}{4\pi^2 f^2}.$$

Очевидно, при $r > \frac{kg}{4\pi^2 f^2}$ начинается скольжение.

Задача № 138

Маленький грузик, подвешенный к вертикальной пружине, растянул ее на x_0. Каков будет период вертикальных колебаний грузика, вызванных легким толчком?

Решение. Период колебания грузика $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; из условия равновесия груза $mg=kx_0$ вытекает $\frac{m}{k}=\frac{x_0}{g}$. Значит, период колебаний груза

$$T=2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}.$$

Задача № 139

Полная энергия колеблющегося математического маятника W. Амплитуда колебания r. Найти длину его нити l, если масса маятника равна m.

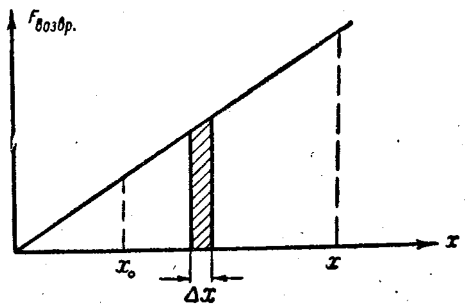

Рис. 100.

Решение. В положении равновесия полная энергия колеблющегося маятника равна кинетической, поэтому

$$W=\frac{mv^2}{2}=\frac{m4\pi^2r^2}{2T^2},$$

и так как $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то $W=\frac{mr^2g}{2l}$, откуда

$$l=\frac{mgr^2}{2W}.$$

Задача № 140

Какую работу совершит возвращающая сила при гармоническом колебании за $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, T, если отсчет вести от положения равновесия?

Решение. Работа силы, пропорциональной смещению, $A=\frac{k}{2}(x^2-x_0^2)$. Действительно, на графике (рис. 100) $F=F(x)$ малая работа $\Delta A=F\Delta x$, а работа на конечном участке $(x-x_0)$ равна $\frac{k}{2}\left(x^2-x_0^2\right)$.

При $t=\frac{T}{4}$ $x_0=0$, $x=r$ и $A=\frac{kr^2}{2}$, при $t=\frac{T}{2}$ $x_0=0$, $x=0$ и $A=0$.

Аналогично и при $t=T$.

Это обусловлено тем, что при удалении тела из равновесия $F_{возвр}$ совершает отрицательную, а при движении к равновесию — положительную работу.

СОДЕРЖАНИЕ

Кобушкин Виктор Кириллович
Кондратьев Александр Сергеевич
Приякин Николай Александрович

Сборник задач по физике

Редактор *З. И. Царькова*

Техн. редактор *С. Д. Водолагина* Корректор *Г. А. Морген*

Сдано в набор 13 IV 1966 г. М 06991. Подписано к печати 11 VI 1966 г.
Уч.-изд. л. 5,29. Печ. л. 6,75. Бум. л. 3,38. Формат бум. 60×90 1/16.
Бумага типогр. № 3. Тираж 100 000 экз. (25 001—50000). Заказ 345.
Тематический план 1966 г. № 15. Цена 19 к.

Набор типографии ЛГУ, Ленинград, Университетская наб., 7/9. Отпечатано с матриц в типографии им. Котлякова издательства «Финансы» Комитета по печати при Совете Министров СССР, Ленинград, Садовая, 21.
Заказ № 120.

ОПЕЧАТКИ

Стр	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
73	3 сверху	$I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} + r}$	$I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r}$