

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.Н. ТУПОЛЕВА – КАИ

---

В.Ю. БЕЛАШОВ, Л.Ю. ФАДЕЕВА

## **СБОРНИК ЗАДАЧ**

по курсам

«Электродинамика и распространение радиоволн»,  
«Электромагнитные поля и волны», «ЭМС и  
помехоустойчивость информационных систем»

УДК 621.311  
ББК 22.31  
Б-43

**Белашов В.Ю., Фадеева Л.Ю.**

**Б 43** Сборник задач по курсам «Электродинамика и распространение радиоволн», «Электромагнитные поля и волны», «ЭМС и помехоустойчивость информационных систем». Учебное пособие. – Казань: редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 184 с.  
**ISBN 978-5-906935-16-8**

Настоящее учебное пособие является сборником задач для студентов университетов, обучающихся по радиофизическим и радиотехническим направлениям подготовки и изучающих как собственно теорию электромагнитного поля и распространение радиоволн, так и вопросы электромагнитной совместимости. Пособие знакомит обучающихся с основными методиками практического расчета как стационарных, так и переменных электромагнитных полей. Особое внимание обращено на графическое построение картины полей, что весьма полезно для успешного усвоения сложных физических закономерностей и является первым и необходимым шагом в приложении результатов теории к решению практических задач. В пособии приведены решения некоторых задач и поясняющие постановку задач указания, что делает представленный задачный материал более доступным.

Пособие представляет собой сборник задач, рассматриваемых в курсах «Электродинамика и распространение радиоволн», «Электромагнитные поля и волны» и «ЭМС и помехоустойчивость информационных систем». Оно также может быть полезным для студентов самого широкого спектра направлений подготовки, в частности, при изучении курсов «Теоретические основы радиотехники» и «Теоретические основы электротехники».

Ил. 62. Библиогр.: 25 назв.

---

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук доцент О.Н. Шерстюков  
д-р физ.-мат. наук профессор В.Л. Матухин

**ISBN 978-5-906935-16-8**

© Белашов В.Ю., Фадеева Л.Ю., 2017  
© РИЦ «Школа», 2017  
© КФУ, 2017

# ГЛАВА 1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

## 1.1. Основные формулы

Выражение вектора через проекции (декартовы прямоугольные координаты):

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}; \quad (1.1)$$

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2};$$

$$\cos(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{i}) = \frac{A_x}{A}; \quad \cos(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{j}) = \frac{A_y}{A}; \quad \cos(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{k}) = \frac{A_z}{A}.$$

Сумма двух векторов:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} + S_z \mathbf{k};$$

$$S_x = A_x + B_x; \quad S_y = A_y + B_y; \quad S_z = A_z + B_z. \quad (1.2)$$

Разность двух векторов:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k};$$

$$R_x = A_x - B_x; \quad R_y = A_y - B_y; \quad R_z = A_z - B_z. \quad (1.3)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = AB \cos(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1.4)$$

Векторное произведение двух векторов:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{l}_n AB \sin(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{B}) = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{l}_n$  – единичный вектор по нормали к плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Уравнение линии вектора  $\mathbf{A}$ :

$$[\mathbf{A} d\mathbf{l}] = 0;$$

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (1.6)$$

Дифференциальный оператор – «набла»:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.7)$$

Градиент потенциала

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{1}_n, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{1}_n$  – единичный вектор по нормали к поверхности  $\varphi = \text{const}$ .

Поток вектора через поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S A_n dS. \quad (1.9)$$

Дивергенция вектора

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta S} \mathbf{A} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}. \quad (1.10)$$

Теорема Гаусса – Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV. \quad (1.11)$$

Циркуляция вектора

$$C = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_L A_L dl. \quad (1.12)$$

Ротор вектора

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (1.13)$$

Проекция ротора на направление  $n$

$$|\operatorname{rot} \mathbf{A}|_n = \operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{dC}{dS}, \quad (1.14)$$

где площадка  $\Delta S$  нормальна к направлению  $\mathbf{n}$ .

Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}, \quad (1.15)$$

где  $L$  – периметр поверхности  $S$ .

Лапласиан скаляра  $\varphi$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi. \quad (1.16)$$

Лапласиан вектора  $\mathbf{A}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{i} + (\nabla^2 A_y) \mathbf{j} + (\nabla^2 A_z) \mathbf{k}. \quad (1.17)$$

Ротор градиента

$$[\nabla, (\nabla \varphi)] = 0. \quad (1.18)$$

Дивергенция ротора

$$\nabla[\nabla, \mathbf{A}] = 0. \quad (1.19)$$

Дивергенция произведения скаляра и вектора

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.20)$$

Дивергенция векторного произведения

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (1.21)$$

Ротор от ротора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (1.22)$$

## 1.2. Задачи

1.2.1. Составить выражение градиента потенциала  $\varphi$  в прямоугольной декартовой системе координат.

**Решение.** В общем случае величина потенциала зависит от всех пространственных координат:

$$\varphi = f(x, y, z),$$

поэтому приращение потенциала можно записать как полный дифференциал функции трех переменных:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz.$$

Рассматривая это выражение как скалярное произведение векторов ( $d\mathbf{l}$  и  $\text{grad}\varphi$ ) и зная, что

$$d\mathbf{l} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz,$$

получим выражение градиента

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

1.2.3. Составить выражение градиента потенциала  $\varphi$  в цилиндрической системе координат.

1.2.3. Составить выражение градиента потенциала  $\varphi$  в сферической системе координат.

1.2.4. Имеем скалярное поле  $U = 3x^2 y \cos z + 2z^2$ . Найти градиент  $U$ .

1.2.5. Даны два вектора  $\mathbf{A} = 5\mathbf{x}_0 + 10\mathbf{y}_0 + 4\mathbf{z}_0$  и  $\mathbf{B} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + 10\mathbf{z}_0$ . Найти градиент их скалярного произведения и линии вектора градиента.

1.2.6. Задан потенциал  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

Найти градиент этого потенциала. Какую форму будут иметь эквипотенциальные поверхности?

1.2.7. Даны два вектора:  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  и  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Найти градиент их скалярного произведения. Какую форму будут иметь эквипотенциальные поверхности?

1.2.8. Найти градиент потенциала  $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

1.2.9. Задан потенциал  $\varphi = x^y - z^2$ . Найти градиент потенциала в точке  $x = 2,7$ ;  $y = 2$ ;  $z = 2$ .

1.2.10. Найти уравнение линии вектора  $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ .

**Решение.** Поле плоское, следовательно, во всех плоскостях  $z = \text{const}$  линии вектора  $\mathbf{A}$  будут одинаковыми. Они определяются из соотношения

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}.$$

Так как  $A_x = -y$ ;  $A_y = x$ , то

$$x dx = -y dy.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \text{const}.$$

Положим  $\text{const} = a^2 / 2$ . Тогда уравнение линии вектора примет вид  $x^2 + y^2 = a^2$  для всех  $z = \text{const}$ . Это семейство окружностей радиусами  $0 < a < \infty$ . Они лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $xOy$ . Центры их лежат на оси  $z$ .

1.2.11. В декартовой системе координат проекции векторного поля  $\mathbf{A}$  постоянны в каждой точке пространства:  $A_x = A_0$ ,  $A_y = B_0$ ,  $A_z = 0$ . Построить картину силовых линий векторного поля.

**Решение.** Поскольку одна из декартовых составляющих векторного поля отсутствует, силовые линии должны представлять собой семейство плоских кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $xу$ . Вектор поля в каждой точке касателен к силовой линии, откуда вытекает дифференциальное уравнение силовых линий

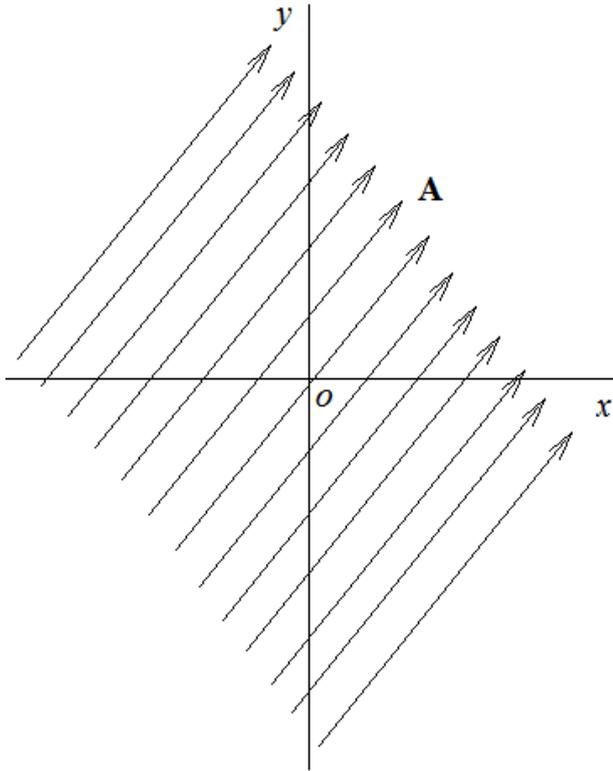


Рис. 1.1

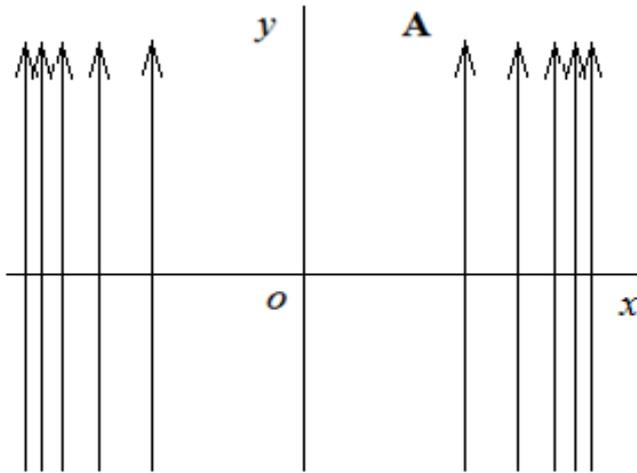


Рис. 1.2

$$dx/A_0 = dy/B_0,$$

являющееся следствием подобия двух прямоугольных треугольников с катетами  $dx$ ,  $dy$  и  $A_0$ ,  $B_0$  соответственно. Уравнение имеет вид:

$$y = (B_0/A_0)x + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Таким образом, силовые линии поля представляют собой семейство прямых с угловым коэффициентом наклона к оси  $x$ , равным  $B_0/A_0$  (рис. 1.1).

1.2.12. Векторное поле  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее во всех точках рассматриваемой области условию  $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ , называется соленоидальным (полем без источников). При выполнении условия  $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$  поле  $\mathbf{A}$  является потенциальным векторным полем. Если такое поле характеризует силу, действующую на материальную точку, то работа внешних сил при обходе замкнутого контура будет равна нулю.

В декартовой системе координат векторное поле  $\mathbf{A}$  имеет

единственную составляющую  $A_y = 15x^2$ . Проверить, является ли поле: а) соленоидальным; б) потенциальным.

**Решение.** Картина силовых линий поля  $\mathbf{A}$  в плоскости  $xy$  изображена на рис. 1.2. Вычисляя дивергенцию этого поля, получим, что  $\operatorname{div}\mathbf{A} = dA_y/dy = 0$ . Следовательно, исследуемое поле соленоидально. Однако,  $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 30x\mathbf{1}_z$ , поэтому поле не является потенциальным.

1.2.13. Записать уравнение и нарисовать силовые линии поля  $\mathbf{E} = 10x_0 + 5y_0$ .

1.2.14. Записать уравнение и нарисовать силовые линии поля  $\mathbf{E} = 10x_0 - 25y_0$ .

1.2.15. Записать уравнение и нарисовать силовые линии поля  $\mathbf{E} = -10x_0 + 5y_0$ .

1.2.16. Найти линии вектора  $\mathbf{A} = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j}$ .

1.2.17. Подсчитать поток вектора  $\mathbf{A} = \frac{5}{r^2}\mathbf{1}_r$  сквозь сферическую поверхность радиусом  $r = a$ . Центр сферы совпадает с точкой  $r = 0$ .

**Решение.** Поток вектора  $\mathbf{A}$  сквозь замкнутую поверхность называют скалярную величину

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_S A_n dS,$$

где  $A_n$  – проекция вектора на направление положительной нормали к площадке.

Так как в задаче поверхность  $S$  – сферическая и направление вектора  $\mathbf{A}$  совпадает с направлением радиус-вектора, то  $A_n = A_r = 5/a^2$  для всех точек поверхности интегрирования.

Следовательно, поток

$$\Phi = \oint_S \frac{5}{a^2} dS = \frac{5}{a^2} 4\pi a^2 = 20\pi.$$

1.2.18. Подсчитать поток вектора  $\mathbf{R}$  (радиус-вектора точки) сквозь

сферическую поверхность, центр которой совпадает с началом координат.

1.2.19. Подсчитать поток радиус-вектора  $\mathbf{R}$  сквозь полную поверхность прямого, круглого цилиндра. Размеры цилиндра указаны на рис. 1.3.

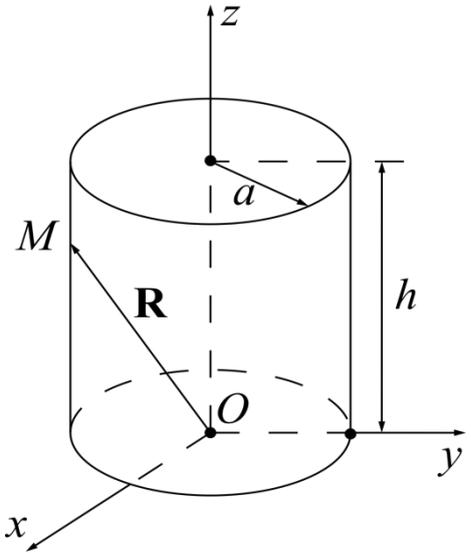


Рис. 1.3

*Указание.* Подсчитать составляющие потока через боковую поверхность и основания, а затем их сложить.

1.2.20. Подсчитать поток вектора  $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$  сквозь поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

*Указание.* Применить сферические координаты.

1.2.21. Составить выражение дивергенции вектора  $\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат.

**Решение.** Дивергенцией  $\mathbf{A}$  называют скалярную величину

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}.$$

На рис. 1.4 изображен элемент объема в цилиндрической системе координат. Объем этого элемента

$$dV = r dr d\theta dz.$$

Поток сквозь поверхность, ограничивающую этот объем,

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \frac{\partial(A_r r d\theta dz)}{\partial r} dr + \frac{\partial(A_\theta r dr dz)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial(A_z r d\theta dr)}{\partial z} dz = \\ &= r dr d\theta dz \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

1.2.22. Составить выражение дивергенции вектора  $\mathbf{A}$  в прямоугольной декартовой системе координат.

1.2.23. Составить выражение дивергенции вектора  $\mathbf{A}$  в сферической системе координат.

Указание. Выбрать элемент объема  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi$  (рис. 1.5).

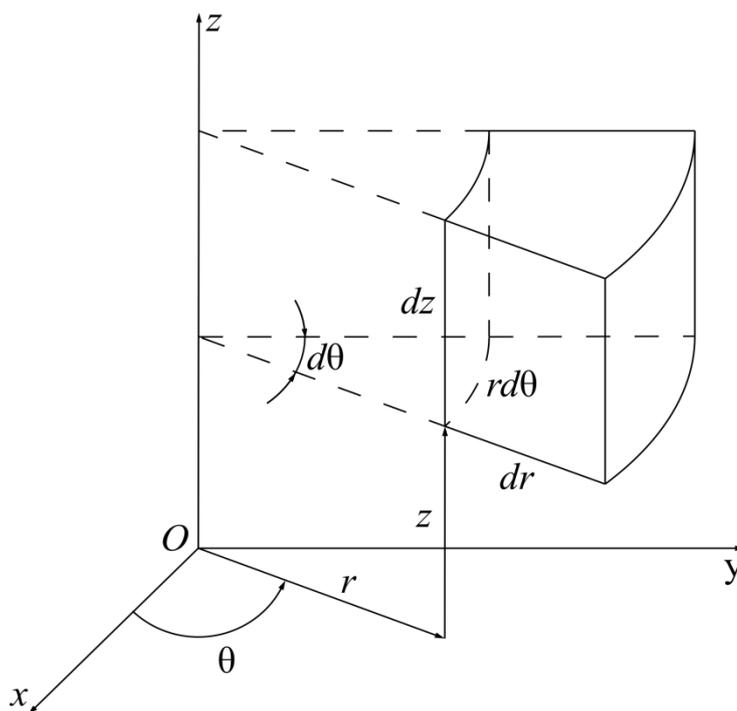


Рис. 1.4

1.2.24. Составить выражение лапласиана скаляра  $\phi$ :

а) в прямоугольной декартовой системе координат;

б) в цилиндрической системе координат;

в) в сферической системе координат.

1.2.25. Найти дивергенцию вектора  $\mathbf{K} = \mathbf{r}\phi(r)$ .

1.2.26. Даны два вектора  $\mathbf{A} = 5\mathbf{x}_0 + 10\mathbf{y}_0 + 4\mathbf{z}_0$

и  $\mathbf{B} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + xyz_0$ . Найти дивергенцию их векторного произведения.

1.2.27. Найти дивергенцию вектора  $\sigma = D_{r=a} = 3\epsilon_a E_0 \cos \theta$ , где  $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

1.2.28. Найти дивергенцию вектора

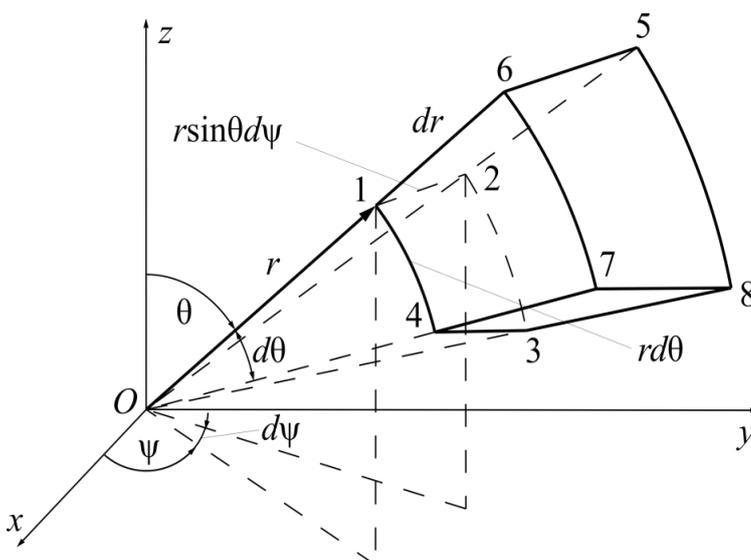


Рис. 1.5

$$\mathbf{A} = \frac{x}{R^3} \mathbf{i} + \frac{y}{R^3} \mathbf{j} + \frac{z}{R^3} \mathbf{k}, \text{ где } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.2.29. Найти дивергенцию произведения вектора  $\mathbf{D}$  на скаляр  $\varphi$ .

1.2.30. Вычислить дивергенцию векторного произведения полей  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

**Решение.** Воспользуемся оператором Гамильтона. Запишем:

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \nabla [\mathbf{A}, \mathbf{B}].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к векторному произведению можно применить обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \nabla_{\mathbf{A}} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \nabla_{\mathbf{B}} [\mathbf{A}, \mathbf{B}].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. В результате получаем:

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B}[\nabla_{\mathbf{A}} \mathbf{A}] - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{B}} \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

1.2.31. Найти дивергенцию радиус-вектора

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

1.2.32. Дивергенция вектора  $\mathbf{B}$  равна нулю во всех точках пространства. Показать, что поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

*Указание.* Применить теорему Гаусса – Остроградского.

1.2.33. Найти лапласиан скаляра

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{R} \text{ при } R \neq 0.$$

1.2.34. Подсчитать поток вектора  $\mathbf{A}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$ , которая ограничивает заданный объем. Дивергенция вектора  $\mathbf{A}$  во всех точках поля величина постоянная, равная  $\delta = \operatorname{const}$ .

*Указание.* Применить теорему Гаусса – Остроградского.

1.2.35. Подсчитать поток вектора  $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zy^2\mathbf{k}$  сквозь поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

1.2.36. Подсчитать циркуляцию вектора  $\mathbf{A} = -\frac{y}{a}\mathbf{i} + \frac{x}{a}\mathbf{j}$  по окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  (рис. 1.6).

**Решение.** Циркуляцией вектора  $\mathbf{A}$  называют скалярную величину  $C = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_L A dl \cos(\mathbf{A}, d\mathbf{l})$ .

Численное значение вектора  $\mathbf{A}$  во всех точках контура интегрирования постоянно и равно

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = 1.$$

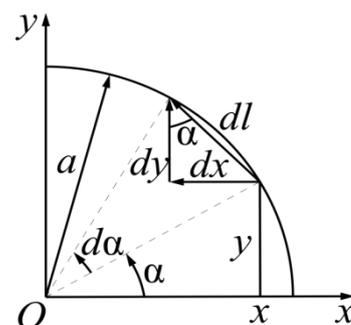


Рис. 1.6

Направление вектора  $\mathbf{A}$  совпадает с направлением касательной к окружности (контур интегрирования), поэтому  $C = \oint_L A dl \cos(\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \oint_L dl = 2\pi a$ .

1.2.37. Подсчитать циркуляцию вектора

$$\mathbf{A} = (x - 2z)\mathbf{i} + (x + 3y + z)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$$

по периметру треугольника  $abc$  с координатами вершин  $a(1,0,0)$ ;  $b(0,0,1)$ ;  $c(0,1,0)$ .

1.2.38. Составить выражение ротора вектора  $\mathbf{A}$  в сферической системе координат.

**Решение.** Ротором вектора  $\mathbf{A}$  называют новый вектор  $\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]$ , проекции которого определяются из выражения

$$|\text{rot } \mathbf{A}|_n = \text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{dC}{dS},$$

где  $n$  – положительная нормаль к площадке  $dS$ .

Для определения трех проекций ротора вектора  $\mathbf{A}$  в сферической сис-

теме координат площадки  $dS$  выбираем так, как показано на рис. 1.3. Радиальная проекция ротора

$$\text{rot}_r \mathbf{A} = \frac{dC}{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}.$$

При составлении циркуляции вектора по контуру 14321 направление обхода надо выбирать таким, чтобы положительная нормаль к площадке, ограниченной этим контуром, совпала с направлением  $r$  (против движения стрелки часов, если смотреть из контура на начало координат). Разобьем контур на участки. Пусть на участке 1–4 проекция вектора  $\mathbf{A}$  на направление перемещения равна  $A_\theta$ . Длина участка  $dl = r d\theta$ . Следовательно, часть циркуляции по этому участку будет равна  $A_\theta r d\theta$ .

По участку 4 – 3 часть циркуляции будет равна

$$\left( A_\psi + \frac{dA_\psi}{d\theta} d\theta \right) r \sin(\theta + d\theta) d\psi.$$

Полагая  $\sin(\theta + d\theta) \approx \sin \theta + \cos \theta d\theta$ , получим

$$A_\psi r \sin \theta d\psi + A_\psi r \cos \theta d\theta d\psi + \frac{\partial A_\psi}{\partial \theta} d\theta r \sin \theta d\psi + \frac{\partial A_\psi}{\partial \theta} d\theta r \cos \theta d\theta d\psi.$$

По участку 3 – 2 часть циркуляции будет равна

$$-\left( A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} d\psi \right) r d\theta;$$

по участку 2 – 1 часть циркуляции будет равна  $-A_\psi r \sin \theta d\psi$ .

Складывая части, получим величину циркуляции по всему контуру

$$dC = r^2 \sin \theta d\psi d\theta \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\psi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right) \right\}.$$

Следовательно, радиальная проекция ротора вектора  $\mathbf{A}$  будет равна

$$\text{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (A_\psi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right).$$

Меридианная проекция ротора вектора

$$\operatorname{rot}_{\theta} \mathbf{A} = \frac{dC}{r \sin \theta d\psi dr}.$$

Циркуляция вектора по контуру 12561

$$dC = A_{\psi} r \sin \theta d\psi + \left( A_r + \frac{\partial A_r}{\partial \psi} d\psi \right) dr - \left( A_{\psi} + \frac{\partial A_{\psi}}{\partial r} dr \right) (r + dr) \sin \theta d\psi - A_r dr.$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, получим проекцию ротора вектора  $\mathbf{A}$  на направление  $\theta$ :

$$\operatorname{rot}_{\theta} \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\psi})}{\partial r}.$$

Проекция ротора вектора  $\mathbf{A}$  по параллели

$$\operatorname{rot}_{\psi} \mathbf{A} = \frac{dC}{r d\theta dr}.$$

Циркуляция вектора по контуру 16741

$$dC = A_r dr + \left( A_{\theta} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \left( A_r + \frac{\partial A_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr - A_{\theta} r d\theta.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим

$$\operatorname{rot}_{\psi} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

1.2.39. Составить выражение ротора вектора  $\mathbf{A}$ : а) в прямоугольной декартовой системе координат; б) в цилиндрической системе координат.

1.2.40. Найти ротор вектора  $\mathbf{K} = \mathbf{r}\varphi(r)$ .

1.2.41. Найти ротор градиента скалярной функции  $\varphi$ .

1.2.42. Найти дивергенцию ротора вектора  $\mathbf{A}$ .

1.2.43. Найти дивергенцию векторного произведения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

1.2.44. Найти ротор вектора  $\mathbf{A} = xy\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ .

1.2.45. Найти ротор от ротора вектора  $\mathbf{A}$ .

1.2.46. Решить задачу 1.2.45, пользуясь правилом двойного векторного

произведения.

1.2.47. Найти ротор радиус-вектора  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

1.2.48. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $\mathbf{A}$ , имеющего в декартовой системе координат единственную составляющую  $A_x = 20 \sin(x/\pi)$ .

1.2.49. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $\mathbf{A}$ , имеющего в цилиндрической системе координат единственную составляющую  $A_r = 10r^{-2}$ .

1.2.50. Найти дивергенцию и ротор векторного поля

$$\mathbf{A} = 2 \cos(\pi y)\mathbf{x}_0 + \sin(\pi x)\mathbf{y}_0 + (10 \sin x \cos z)\mathbf{z}_0.$$

1.2.51. Исследовать поле вектора  $\mathbf{N}$ , который в прямоугольной системе координат задан выражением

$$\mathbf{N} = \mathbf{i}2 \sin \frac{x}{\pi}.$$

**Решение.** Для определения характера поля надо вычислить дивергенцию и ротор вектора  $\mathbf{N}$ . По условию задачи вектор имеет одну проекцию  $N_x$  и эта проекция зависит только от координаты  $x$ . Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{N} = \frac{dN_x}{dx} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{x}{\pi}.$$

Так как дивергенция вектора  $\mathbf{N}$  отлична от нуля, то поле не имеет векторного потенциала, но так как ротор вектора  $\mathbf{N}$  равен нулю, то поле имеет скалярный потенциал, который можно определить из выражения

$$\mathbf{N} = \pm \operatorname{grad} \varphi.$$

Поскольку

$$N_x = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm 2 \sin \frac{x}{\pi}; \quad N_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad N_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

скалярный потенциал зависит только от координаты  $x$ :

$$\varphi = \pm \int N_x dx + \text{const} = \mp 2\pi \cos \frac{x}{\pi} + \text{const}.$$

Для определения постоянной интегрирования надо задаться точкой нулевого потенциала. Пусть  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ , тогда  $\text{const} = 2\pi$  и, следовательно,

$$\varphi = 2\pi \left( 1 \mp \cos \frac{x}{\pi} \right).$$

1.2.52. Исследовать поле вектора  $\mathbf{M}$ , который в цилиндрической системе координат задан выражением  $\mathbf{M} = \frac{1}{r} \mathbf{1}_r$ .

Принять  $\varphi = 0$  при  $r = r_0$ .

1.2.53. Исследовать поле вектора  $\mathbf{E}$ , который в сферической системе координат задан выражением  $\mathbf{E} = \frac{25}{r^2} \mathbf{1}_r$ .

Принять  $\varphi = 0$  при  $r = \infty$ .

1.2.54. Исследовать поле вектора  $\mathbf{P}$ , который в цилиндрической системе координат задан выражением  $\mathbf{P} = \frac{10}{r^2} \mathbf{1}_\theta$ .

При решении полагать, что векторный потенциал  $\mathbf{A}$  имеет одну проекцию  $A_z$ ;  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ;  $\mathbf{A} = 0$  при  $r = \infty$ .

**Решение.** Ротор вектора  $\mathbf{P}$  будет иметь только одну проекцию

$$\text{rot}_z \mathbf{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rP_\theta)}{\partial r} = -\frac{10}{r^3}.$$

Так как ротор вектора  $\mathbf{P}$  отличен от нуля, то поле не имеет скалярного потенциала.

Дивергенция вектора  $\mathbf{P}$  равна нулю. Следовательно, поле имеет векторный потенциал, который определится из выражений

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{P}; \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Раскрыв выражения ротора и дивергенции векторного потенциала в цилиндрической системе координат, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0; \quad -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{10}{r^2},$$

откуда

$$A = A_z = -\frac{10}{r} + \text{const} = -\frac{10}{r}.$$

(постоянная равна нулю, так как по условию  $A = 0$  при  $r = \infty$ .)

1.2.55. Исследовать поле вектора  $\mathbf{B}$ , который в прямоугольной системе координат задан выражением  $\mathbf{B} = \mathbf{j}12 \sin \frac{x}{\pi}$ .

Принять  $\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}$ ;  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ;  $A = 0$  при  $x = 0$ .

1.2.56. Исследовать поле вектора  $\mathbf{F}$ , который в цилиндрической системе координат задан выражением  $\mathbf{F} = 27r\mathbf{l}_\theta$ .

Принять  $\mathbf{A} = A_z \mathbf{k}$ ;  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ;  $A = 0$  при  $r = 0$ .

1.2.57. Найти лапласиан скалярного поля  $U = r^2 \sin \theta$ .

1.2.58. Найти лапласиан вектора

$$\mathbf{A} = 2x^2 \sin y \mathbf{x}_0 + xzy \mathbf{y}_0 + (\sin^2 x \cdot \cos z) \mathbf{z}_0.$$

1.2.59. Определить лапласиан скалярного потенциала поля, рассмотренного в задаче 1.2.51.

1.2.60. Определить лапласиан скалярного потенциала поля, рассмотренного в задаче 1.2.53.

1.2.61. Определить лапласиан векторного потенциала поля, рассмотренного в задаче 1.2.54.

1.2.62. Определить лапласиан векторного потенциала поля, рассмотренного в задаче 1.2.56.

1.2.63. Задан вектор  $\mathbf{A}$ . Доказать, что

$$\int_V \text{rot } \mathbf{A} dV = \oint_S [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}],$$

где  $S$  – произвольная замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ .

1.2.64. Задана скалярная функция  $\varphi$ . Единичный вектор нормали экви-

потенциальной поверхности обозначен  $\mathbf{l}_g$ . Доказать, что

$$\int_V |\text{grad } \varphi| dV = \oint_S \varphi \mathbf{l}_g d\mathbf{S},$$

где  $S$  – произвольная замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ .

## ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### 2.1. Элементы теории и основные формулы

Классическая теория электромагнетизма базируется на уравнениях Максвелла, являющихся постулатами теории и, следовательно, не подлежащих выводу, и заключающих в себе всю совокупность установленных эмпирических сведений об электромагнитном поле. Уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Каждое из этих уравнений представляет сокращенную запись трех уравнений (скалярных), которые получаются, как только выбрана некоторая система координат и входящие в (2.1) векторы спроектированы на соответствующие орты – тогда возникают так называемые «уравнения Максвелла в координатной форме».

Расписывая дифференциальные операторы  $\operatorname{rot}$  в декартовых, цилиндрических, сферических и так далее координатах, можно получить различные формы записи уравнений (2.1).

Запишем также соотношения:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + \int_S \mathbf{j} ds, & \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds, \\ \oint_S \mathbf{D} ds &= q, & \oint_S \mathbf{B} ds &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

которые являются интегральными аналогами уравнений Максвелла (2.1) и получаются из них в результате применения теоремы Остроградского-Гаусса. Здесь  $S$  – некоторая поверхность,  $L$  – ее контур, векторные дифференциалы  $d\mathbf{l}$  и  $ds$  имеют стандартный смысл:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 ds, \quad d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau}_0 dl,$$

$\mathbf{v}_0$  и  $\boldsymbol{\tau}_0$  – единичные векторы внешней нормали и внешней касательной;  $q = \int_V \rho dv$  – полный заряд в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ . В частности, в области  $V$  может содержаться несколько отдельных заряженных областей, например точечных зарядов разных знаков.

Интегральная форма третьего уравнения Максвелла (2.2) называется *теоремой Гаусса*. Смысл ее состоит в том, что полный заряд в объеме  $V$  определяется потоком электрической индукции через его замкнутую границу  $S$ . При этом не имеет значения, как распределен заряд.

К уравнениям Максвелла следует также добавить уравнения, связывающие векторы напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с векторами соответствующих индукций, а также плотность тока  $\mathbf{j}$  с напряженностью электрического поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Совокупность (2.1), (2.3) или (2.2), (2.3) называется *системой уравнений Максвелла*. Здесь  $\varepsilon_0 = 10^7 / 4\pi c^2 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (электрическая и магнитная постоянные) – фундаментальные физические константы, связанные соотношением  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  – безразмерные величины, численно равные диэлектрической и магнитной проницаемости в абсолютной Гауссовой системе единиц (СГСЭ – для электрических и СГСМ – для магнитных величин). Отметим, что в отношении электромагнитных величин система СИ совпадает с рационализованной системой единиц МКСА, в основе которой лежат метр, кг, секунда и Ампер. Для размерностей проницаемостей справедливы соотношения:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Ф}}{\text{м}},$$

$$[\mu] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{Кл}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Равенства (2.3), устанавливающие связь индукций  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  с полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , называют *материальными уравнениями*, так как входящие в них  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_r \mu_0$  (абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости) и  $\sigma$  (удельная проводимость) характеризуют свойства сред (веществ, материалов), в которых существуют поля.

Из интегрального представления закона сохранения заряда  $I = -\frac{dq}{dt}$  следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.4)$$

которое является дифференциальной формулировкой этого закона.

В некоторых материальных средах теория Максвелла должна быть дополнена рядом новых представлений, учитывающих феноменологическое описание внутренних процессов, обусловленных микроскопической структурой вещества. При этом вводятся векторные функции

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{D} - \mathbf{D}_0, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B} - \mathbf{B}_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

первая из которых называется *поляризованностью* (электрической поляризацией), а вторая – *намагниченностью* (магнитной поляризацией). В большинстве сред векторы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , а также  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  коллинеарны, поэтому удобно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi^{\text{э}} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} &= \chi^{\text{м}} \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Безразмерные коэффициенты  $\chi^{\text{э}}$  и  $\chi^{\text{м}}$  в (2.6) называются *электрической* и *магнитной восприимчивостью* среды. Они выражают «меру отклика» среды на внешние электрическое и магнитное поле. Используя (2.5), получим:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

где

$$\varepsilon_r = 1 + \chi^{\mathfrak{E}}, \quad \mu_r = 1 + \chi^{\mathfrak{M}}. \quad (2.8)$$

В случае *однородной* среды,  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от координат, а в случае *неоднородной* среды –  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{r})$ .

По своему смыслу формулы (2.7) безразличны к направлению поля. Такие среды называются *изотропными*. Однако часто приходится рассматривать также *анизотропные* среды, свойства которых могут быть различны в разных направлениях.

При анизотропии (в смысле электрической и магнитной поляризации (намагниченности) векторы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  перестают быть коллинеарными. Материальные уравнения при анизотропии сокращают свой вид, однако  $\varepsilon$  и  $\mu$  при этом надо понимать как *тензоры*, их в этом случае называют тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Для некоторой декартовой системы координат они могут быть записаны в следующем виде:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Тензорам проницаемостей отвечают тензоры восприимчивостей  $\chi^{\mathfrak{E}}$  и  $\chi^{\mathfrak{M}}$ . Эти величины по-прежнему связаны формулами (2.8), только вместо “1” в них надо писать символ единичной матрицы 3-го порядка.

Удельная проводимость, входящая в материальное уравнение  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , в анизотропных средах также представляет собой матрицу:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

которая называется *тензором удельной проводимости* ( $\sigma_{ik}$ ).

Уравнение, связывающее плотность тока проводимости и скорость движения заряженных частиц, имеет вид:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Отнесение реальной среды к диэлектрику или проводнику определяется соотношением токов проводимости и смещения, которое зависит не только от свойств среды  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , но и от скорости изменения электрического поля  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ . В радиотехнике особый интерес представляют поля, гармонические во времени, для них простой критерий принадлежности среды к группе проводников или диэлектриков имеет вид:

$$\sigma / \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad (2.12)$$

При  $\sigma / \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \gg 1$  в формуле (2.12) среда характеризуется как проводник, при  $\sigma / \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \ll 1$  – как диэлектрик.

На границе раздела двух материальных сред с различными электродинамическими параметрами векторы поля должны удовлетворять определенным граничным условиям. Каждый из векторов (например,  $\mathbf{E}$ ) в каждой точке границы принято разлагать на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие:

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{l}_n + E_\tau \mathbf{l}_\tau,$$

где  $\mathbf{l}_n$  и  $\mathbf{l}_\tau$  – орты нормального и тангенциального направлений. При этом граничные условия могут быть сформулированы следующим образом:

- *нормальные компоненты:*

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{v}_0 = \xi, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{v}_0 = 0; \quad (2.13a)$$

- *касательные компоненты:*

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad [\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \eta, \quad (2.13b)$$

где  $\xi$  – плотность поверхностного заряда,  $\boldsymbol{\eta}$  – плотность поверхностного тока проводимости. Отсюда нетрудно вывести частные формы граничных условий, например, для электромагнитных процессов при  $\xi = 0$  или/и  $\boldsymbol{\eta} = 0$ . Можно также переформулировать все граничные условия относительно векторов напряженностей либо векторов индукций.

Электромагнитное поле является носителем энергии. Объемная плотность энергии в любой точке пространства

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}), \quad (2.14)$$

энергия в некотором объеме  $V$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2) dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dV. \quad (2.15)$$

Уравнение баланса энергии электромагнитного поля в области  $V$ :

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS = - \int_V \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV - \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV \quad (2.16)$$

выражает закон сохранения энергии.

Смысл вектора Пойнтинга  $\boldsymbol{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  состоит в том, что он выражает плотность потока энергии.

При рассмотрении электромагнитных полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , уравнения Максвелла чаще удобно записывать относительно *комплексных амплитуд полей*:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon} \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega \mu_0 \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ ,  $\mu = \mu' - i\mu''$  – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости, а в выражениях

$$\text{tg } \Delta = \varepsilon'' / \varepsilon', \quad \text{tg } \Delta^M = \mu'' / \mu', \quad (2.18)$$

$\Delta$  называется *углом электрических потерь*,  $\Delta^M$  – *углом магнитных потерь*.  $\Delta^M$  есть, очевидно, фаза запаздывания  $\mathbf{B}$  по отношению к  $\mathbf{H}$  в результате инерционности намагничивания, так же как  $\Delta = \alpha$  – фаза запаздывания  $\mathbf{D}$  по отношению к  $\mathbf{E}$  (инерционность поляризации).

## 2.2. Задачи

2.2.1. Показать, что из уравнений Максвелла следуют волновые уравнения:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

**Решение.** Выпишем систему из двух первых уравнений Максвелла (2.1) для вакуума в предположении отсутствия сторонних источников, используя материальные уравнения (2.3):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Применяя операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям второго уравнения, используя дифференциальную формулу векторного анализа  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$  и предполагая, что в интересующей нас области пространства нет зарядов ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ), и воспользовавшись первым уравнением системы, получим волновое уравнение для вектора электрического поля. Уравнение относительно вектора магнитного поля находят аналогично.

2.2.2. Между дисковыми электродами диаметром 10 см помещён материал с проводимостью 250 См/м и существует электрическое поле напряжённостью 1200 В/м. Определить ток между электродами.

2.2.3. Между дисковыми электродами диаметром 10 см существует электрическое поле напряжённостью 1200 В/м и протекает ток 20 А. Определить удельную проводимость материала между электродами.

2.2.4. В материале с проводимостью 120 См/м существует электрическое поле напряжённостью 1200 В/м. Определить плотность тока.

2.2.5. В вакууме амплитуда напряжённости электрического поля частотой 100 МГц равна 200 В/м. Найти плотность тока смещения.

2.2.6. В вакууме на частоте 100 МГц амплитуда плотности тока смещения равна 0,1 А/м<sup>2</sup>. Найти амплитуду напряжённости электрического поля.

2.2.7. В вакууме амплитуду напряжённости электрического поля равна 100 В/м, амплитуда плотности тока смещения равна 0,1 А/м<sup>2</sup>. Найти частоту поля.

2.2.8. Напряжённость электрического поля равна 100 В/м, относительная диэлектрическая проницаемость равна 9. Определить величину электрической индукции.

2.2.9. Напряжённость магнитного поля равна 100 А/м, относительная магнитная проницаемость среды равна 9. Определите величину магнитной индукции.

2.2.10. Между дисковыми электродами диаметром 10 см в вакууме амплитуда напряжённости электрического поля частотой 1500 МГц равна 1000 В/м. Найти амплитуду напряжённости магнитного поля на расстоянии 5 см от оси системы.

2.2.11. Между дисковыми электродами диаметром 10 см в вакууме амплитуда напряжённости электрического поля частотой 1000 МГц равна 1000 В/м. Найти амплитуду напряжённости магнитного поля на расстоянии 15 см от оси системы.

2.2.12. Между дисковыми электродами диаметром 20 см помещён материал с проводимостью 250 См/м и существует электрическое поле напря-

жённостью  $1200 \text{ В/м}$ . Найти напряжённость магнитного поля на расстоянии  $5 \text{ см}$  от оси системы.

2.2.13. Между дисковыми электродами диаметром  $20 \text{ см}$  помещён материал с проводимостью  $250 \text{ См/м}$  и существует электрическое поле напряжённостью  $1200 \text{ В/м}$ . Найти напряжённость магнитного поля на расстоянии  $15 \text{ см}$  от оси системы.

2.2.14. Поле вектора электрической индукции определяется соотношением  $5x\mathbf{x}_0 + 15y_0 + 5xz_0$ . Имеются ли здесь источники поля?

2.2.15. Поле вектора электрической индукции определяется соотношением  $5x_0 + 15y_0 + 5xz_0$ . Имеются ли здесь источники поля?

2.2.16. Поле вектора электрической индукции определяется соотношением  $5x\mathbf{x}_0 + 15y_0 + 5z^2\mathbf{z}_0$ . Найти объёмную плотность электрического заряда в точке  $A(1, 1, 1)$ .

2.2.17. Напряжённость электрического поля плоской волны в вакууме равна  $200 \text{ мВ/м}$ . Найти энергию поля, падающего на антенну диаметром  $1 \text{ м}$ .

2.2.18. Напряжённость электрического поля равна  $200 \text{ мВ/м}$ . Напряжённость магнитного поля равна  $100 \text{ мА/м}$ . Найти плотность потока мощности.

2.2.19. Напряжённость электрического поля равна  $200 \text{ В/м}$ . Плотность потока мощности равна  $100 \text{ Вт/м}^2$ . Найти напряжённость магнитного поля.

## ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 3.1. Основные формулы

Закон Кулона

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{l}_r, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{l}_r$  – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды  $q_1$  и  $q_2$ ;  $r$  – расстояние между зарядами.

Напряженность электрического поля точечного заряда  $q$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{l}_r. \quad (3.2)$$

Потенциал электрического поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.3)$$

Потенциал электрического поля точечного, линейного, поверхностного и объемного зарядов

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + \int_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a r} + \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a r} + \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (3.4)$$

Зависимость между напряженностью электрического поля и потенциалом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi; \quad \varphi = -\int \mathbf{E} d\mathbf{l} + \text{const}. \quad (3.5)$$

Зависимость между напряженностью электрического поля и электрическим смещением (электрической индукцией)

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость;  $\epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды;  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации;  $\chi_e$  – относительная электрическая восприимчивость.

Теорема Гаусса (в интегральной форме):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum (\pm Q). \quad (3.7)$$

Теорема Гаусса (в дифференциальной форме):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (3.8)$$

Уравнение Пуассона и Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.9)$$

Основные уравнения электростатического поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Граничные условия в электростатическом поле:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma; \quad E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0, \quad (3.11)$$

где  $D_{1n}$  и  $D_{2n}$  – нормальные к граничной поверхности, составляющие вектора электрического смещения;  $E_{1\tau}$  и  $E_{2\tau}$  – тангенциальные (касательные к граничной поверхности), составляющие вектора напряженности электрического поля;  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела.

Граничные условия на поверхности проводника, помещенного в электростатическое поле:

$$E_{\tau} = 0; \quad D = D_n = \varepsilon_a E = \sigma. \quad (3.12)$$

Энергия электрического поля

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\rho \varphi}{2} dV + \int_S \frac{\sigma \varphi}{2} dS. \quad (3.13)$$

Сила, действующая на заряд  $q$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (3.14)$$

## 3.2. Задачи

3.2.1. Заряд  $+q$  равномерно распределен по поверхности металлического шарика с радиусом  $r_0 = 0,5 \text{ см}$ . Шарик находится в воздухе, вдали от других заряженных предметов. Положим потенциал в бесконечности равным нулю. Каковы должны быть радиусы эквипотенциальных поверхностей (сфер), потенциалы которых отличаются друг от друга на 10 % величины потенциала на поверхности шарика?

**Решение.** Обратные величины радиусов эквипотенциальных поверхностей должны образовывать арифметическую прогрессию [1]:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \dots = \text{const} = d.$$

По условию задачи  $r_0 = 0,5 \text{ см}$ , откуда  $\frac{1}{r_0} = 2$ ; требуемая разность прогрессии составляет 10 % этой величины, т.е.  $d = 0,2$ .

Следовательно,  $r_1 = 0,555 \text{ см}$ ,  $r_2 = 0,625 \text{ см}$ ,  $r_3 = 0,707 \text{ см}$  и т.д.

3.2.2. В поле заряженного шарика найти радиусы эквипотенциальных поверхностей, потенциалы которых отличаются друг от друга на 10 В. Радиус шарика 0,1 см, величина его заряда  $8,89 \times 10^{-12} \text{ Кл}$ . Шарик находится в воздухе ( $\epsilon_a = \epsilon_0$ ), вдали от других заряженных предметов.

3.2.3. Начало прямоугольных декартовых координат помещено в геометрическом центре заряженного проводящего шарика с радиусом  $r_0 = 2 \text{ см}$  (рис. 3.1). Величина заряда

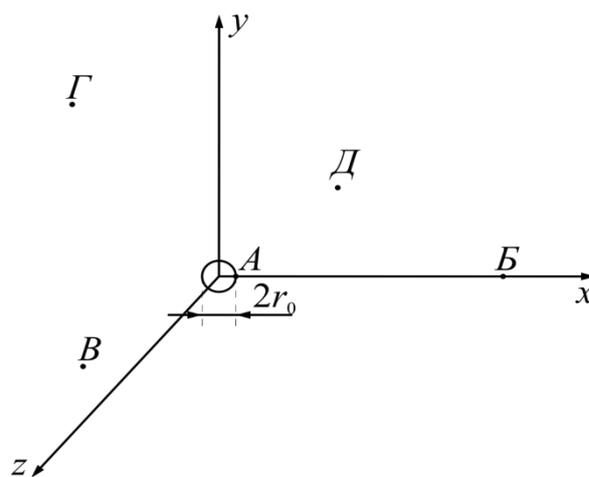


Рис. 3.1

$q = 3 \times 10^{-10} \text{ Кл}$ . Найти потенциал и напряженность электрического поля в

следующих точках (координаты  $x, y, z$  заданы в см):  $A(2;0;0)$ ,  $B(20;0;0)$ ,  $B(-14;4;8)$ ,  $\Gamma(-12;16;0)$ ,  $D(24;17;20)$ . Шарик находится в воздухе. Потенциал на поверхности шарика принят равным  $100\text{ В}$ .

3.2.4. Найти заряд шарика (рис. 3.1), если разность потенциалов точек  $B$  и  $\Gamma$  составляет  $30\text{ В}$ . Остальные условия взять из предыдущей задачи. Каковы будут в данном случае величина потенциала и напряженности электростатического поля в точках  $A$  и  $D$ ?

3.2.5. Положительный заряд  $q$  равномерно распределен по кольцевой линии радиуса  $a$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$  (рис. 3.2).

Найти потенциал и напряженность поля в точках, лежащих на оси кольца.

3.2.6. Положительный заряд  $q$  равномерно распределен на плоском круглом диске радиусом  $a$ . Диэлектрическая проницаемость диска и среды  $\epsilon = 10$ .

Найти напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и потенциала  $\phi$  точек, лежащих на оси  $z$ , нормальной к диску и проходящей через его центр. Построить кривые зависимости  $E = f_1(z)$  и

$\phi = f_2(z)$ , если  $q = 10^{-6}\text{ Кл}$ ;  $a = 10\text{ см}$ .

*Указание.* Диск разбить на элементарные кольца и применить формулы задачи 3.2.5.

3.2.7. Положительный заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиусом  $a$ .

Найти напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}$ , вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$ , потенциал  $\phi$  в точках, расположенных внутри шара. Диэлектрическая проницаемость материала шара и окружающей среды  $\epsilon$ .

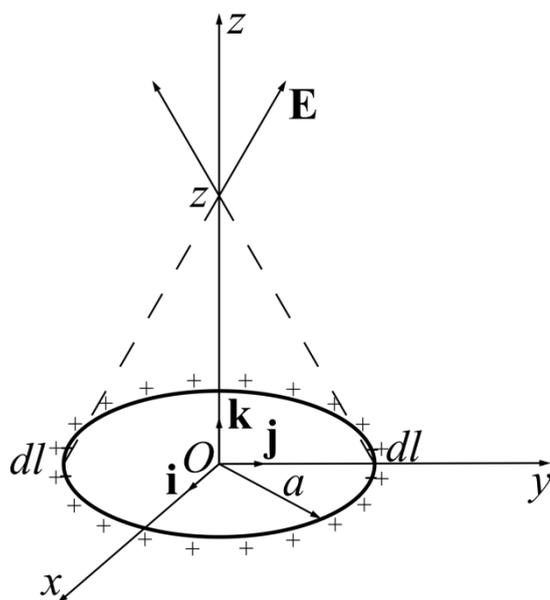


Рис. 3.2

**Решение.** Начало координат поместим в центре шара. Так как заряд распределен симметрично относительно центра шара, то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  в сферической системе координат имеют только радиальные составляющие  $E_r$  и  $D_r$ , зависящие лишь от одной координаты  $r$ . Проведем на расстоянии  $r$  от центра шара (рис. 3.3, а) сферическую поверхность  $S_1$  и применим теорему Гаусса. Так как для всех точек поверхности  $S_1$  численное значение вектора  $\mathbf{D}$  одинаково, а направление совпадает с направлением положительной нормали к поверхности  $S_1$ , то

$$\oint_{S_1} \mathbf{D}_{\text{внешн}} d\mathbf{S} = D_{\text{внешн}} 4\pi r^2 = q,$$

откуда величина вектора электрической индукции вне шара будет равна

$$\mathbf{D}_{\text{внешн}} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{1}_r.$$

Напряженность электростатического поля

$$\mathbf{E}_{\text{внешн}} = \frac{\mathbf{D}_{\text{внешн}}}{\epsilon_a} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r.$$

На основании (3.5) потенциал точек вне шара

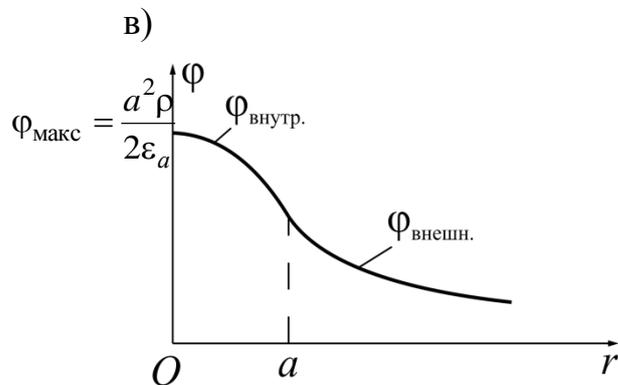
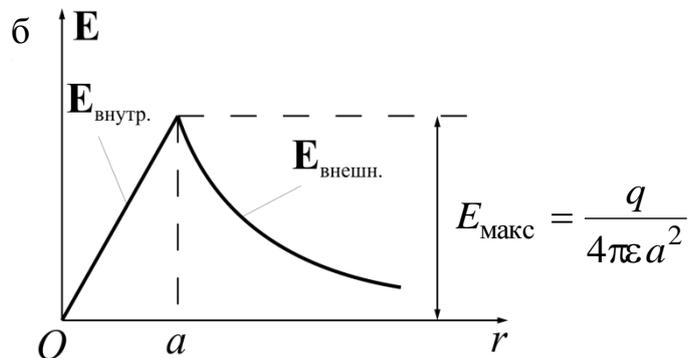
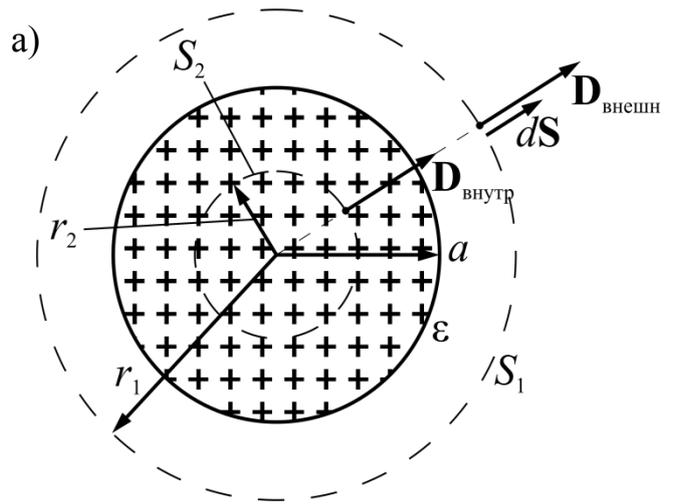


Рис. 3.3

$$\varphi = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} \mathbf{l}_r d\mathbf{l} + \text{const.}$$

Так как  $\mathbf{l}_r d\mathbf{l} = dr$ , то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + \text{const.}$$

Пусть  $\varphi = 0$  при  $r = \infty$ . Тогда постоянная интегрирования обратится в нуль, и потенциал будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Исследуем поле внутри шара ( $r < a$ ). Проведем сферическую поверхность  $S_2$  радиусом  $r < a$ . По теореме Гаусса

$$\oint_{S_2} \mathbf{D}_{\text{внут}} d\mathbf{S} = D_{\text{внут}} 4\pi r^2 = q_{\text{внут}}.$$

Обозначим объемную плотность заряда

$$\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \rho.$$

Заряд внутри поверхности  $S_2$

$$q_{\text{внут}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r^3}{a^3},$$

поэтому

$$\mathbf{D}_{\text{внут}} = \mathbf{l}_r \frac{qr}{4\pi a^2} = \mathbf{l}_r \frac{\rho r}{3};$$

$$\mathbf{E}_{\text{внут}} = \mathbf{l}_r \frac{qr}{4\pi\epsilon_a a^2} = \mathbf{l}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_a};$$

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_a} + \text{const.}$$

Так как потенциал непрерывен, то при  $r = a$  значение потенциала по внешней и внутренней областях должно быть одинаковым  $(\varphi_{\text{внеш}})_{r=a} = (\varphi_{\text{внут}})_{r=a}$

или

$$\frac{a^2 \rho}{3\epsilon_a} = -\frac{a^2 \epsilon}{6\epsilon_a} + \text{const},$$

откуда

$$\text{const} = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_a}.$$

Поэтому

$$\varphi_{\text{внут}} = \frac{\rho(3a^2 - r^2)}{6\epsilon_a}.$$

На рис. 3.3, б показана кривая зависимости напряженности поля  $\mathbf{E}$  от расстояния  $r$ . На рис. 3.3, в показана кривая зависимости потенциала от расстояния  $r$ .

3.2.8. Решить задачу 3.2.7 в предположении, что диэлектрическая проницаемость среды в области  $0 \leq r \leq a$  равна  $\epsilon_1$ , а в области  $a \leq r \leq \infty$  равна  $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ . Начертить кривую зависимости напряженности поля  $\mathbf{E}$  от расстояния  $r$ . Определить дивергенцию и ротор напряженности поля во внешней и внутренней областях.

3.2.9. а) Используя условия задачи 3.2.7, найти, на какой глубине лежат в толще диэлектрического шара точки, в которых напряженность электростатического поля и электрическое смещение имеют те же величины, что и в точках, лежащих вне шара, на расстоянии  $2a$  от центра.

б) То же, что в задаче 3.2.8. Объяснить особенности случаев, когда  $\epsilon_1 > 4\epsilon_2$ .

3.2.10. Объёмный заряд с плотностью  $\rho = 2 \text{ мкКл/м}^3$  равномерно распределен между двумя концентрическими шаровыми поверхностями. Радиус внешней поверхности  $a = 100 \text{ см}$ , внутренней  $b = 2 \text{ см}$ . Диэлектрическая проницаемость среды между шаровыми поверхностями  $\epsilon_1 = 2$ , окружающей среды —  $\epsilon_2 = 1$ .

Найти  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , и  $\varphi$  для областей: внутри поверхности меньшего радиуса,

между поверхностями и вне их. Построить кривые зависимости  $D$ ,  $E$  и  $\varphi$  от  $r$ . Принять потенциал  $\varphi = 0$  при  $r = \infty$ .

3.2.11. Объёмный заряд с плотностью  $\rho = 3 \text{ мкКл/м}^3$  равномерно распределен в области, ограниченной цилиндрической поверхностью радиусом  $a = 4 \text{ см}$ . Диэлектрическая проницаемость внутренней области  $\epsilon_1 = 4$ , внешней –  $\epsilon_2 = 1$ .

Найти  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , и  $\varphi$  внутри и вне цилиндрической поверхности. При решении полагать, что цилиндр длинный, так что влияние его концов можно пренебречь. Построить кривые зависимости  $D$ ,  $E$  и  $\varphi$  от  $r$ . Принять потенциал  $\varphi = 10 \text{ В}$  при  $r = 4 \text{ см}$ .

3.2.13. Объёмный заряд с плотностью  $\rho = 5 \text{ мкКл/м}^3$  равномерно распределен между двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Радиус внешней поверхности  $a = 10 \text{ см}$ , внутренней  $b = 5 \text{ см}$ . Диэлектрическая проницаемость среды между цилиндрическими поверхностями  $\epsilon_1 = 2$ , снаружи –  $\epsilon_2 = 1$ .

Найти  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , и  $\varphi$ . Построить кривые зависимости  $D$ ,  $E$  и  $\varphi$  от  $r$ . Принять потенциал  $\varphi = 100 \text{ В}$  при  $r = 10 \text{ см}$ .

3.2.13. Положительные заряды равномерно распределены на бесконечной плоскости (рис. 3.4). Поверхностная плотность зарядов  $\sigma$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ . Найти напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\varphi$ . Построить кривые значений  $E$  и  $\varphi$  вдоль оси, нормальной к плоскости.

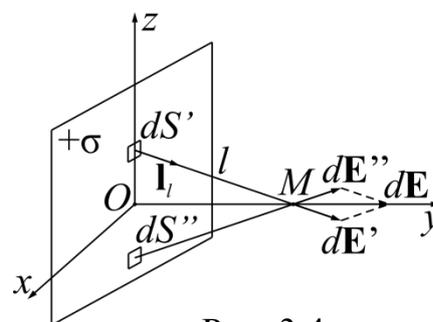


Рис. 3.4

3.2.14. Заряды противоположных знаков равномерно распределены на двух параллельных бесконечных плоскостях. Одна из них (заряженная положительно) совпадает с плоскостью  $xOz$ , другая же отстоит от первой на рас-

стоянии  $y = d$ . Поверхностная плотность зарядов  $\sigma$ ; диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$ .

Найти напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\varphi$  в пространстве между плоскостями; построить кривые  $E = f_1(r)$ ;  $\varphi = f_2(r)$ . Принять  $\varphi = 0$  при  $y = d$ .

3.2.15. Точка  $M$  находится на расстоянии  $OM = 1\text{ см}$  от бесконечной равномерно заряженной плоскости (см. рис. 3.3).

Определить в точке  $M$  напряженность электростатического поля, создаваемого зарядами, расположенными в пределах круга радиусом  $ON = 3\text{ см}$ . Плотность зарядов  $\sigma = 20\text{ мкКл/м}^2$ .

3.2.16. Подсчитать энергию электрического поля, рассмотренного в задаче 3.2.7.

3.2.17. Подсчитать энергию поля, рассмотренного в задаче 3.2.8.

3.2.18. Металлический шар радиусом  $a = 20\text{ см}$  несет на себе положительный заряд  $q = 50\text{ мкКл}$ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей шар,  $\varepsilon = 3$ . Подсчитать энергию электрического поля.

3.2.19. Определить энергию поля, рассмотренного в задаче 3.2.10.

3.2.20. Найти энергию поля, рассмотренного в задаче 3.2.11. Длину цилиндра  $l$  принять равной  $10\text{ м}$ , искажением поля у краев пренебречь.

3.2.21. Построить картину электростатического поля коаксиального кабеля, у которого радиус внутреннего цилиндрического проводника  $r_1 = 1\text{ мм}$ , внутренний радиус трубчатого проводника  $r_2 = 4\text{ мм}$ . Кабель находится под напряжением  $400\text{ В}$ . Эквипотенциальные линии провести так, чтобы потенциалы соседних линий отличались друг от друга на  $100\text{ В}$ . Линии напряженности поля (силовые линии) провести так, чтобы каждый элемент сечения кабеля, ограниченный отрезками двух соседних линий напряженности поля и двух соседних эквипотенциальных линий, по форме был как можно ближе к квадрату.

**Решение.** При правильном построении картины поля величины радиусов эквипотенциальных линий должны образовывать геометрическую прогрессию [1]. Знаменатель прогрессии определяется из следующих соображений. Поверхности проводников, имеющие радиусы  $r_1$  и  $r_2$ , являются заданной парой эквипотенциальных линий с потенциалами соответственно 0 и 400 В. По условию задачи требуется провести еще три промежуточные эквипотенциальные линии, соответствующие потенциалам в 100, 200 и 300 В. Обозначим радиусы этих линий символами  $r', r''$  и  $r'''$  (рис. 3.5). Пусть

$$\frac{r'}{r_1} = \frac{r''}{r'} = \frac{r'''}{r''} = \dots = m.$$

Общее число членов геометрической прогрессии  $n = 5$ .

Из алгебры известно соотношение между последним и первым членами геометрической прогрессии  $\frac{r_2}{r_1} = m^{n-1}$ .

Следовательно,

$$m = n-1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt[4]{4} = 1,414.$$

Вычислим искомые радиусы эквипотенциальных линий:

$$r' = 1 \cdot 1,414 = 1,414 (\text{мм}), \quad r'' = 1 \cdot 1,414^2 = 2 (\text{мм}), \quad r''' = 1 \cdot 1,414^3 = 2,828 (\text{мм}).$$

Линии напряженности поля следует проводить так, чтобы дуговой отрезок ( $a_1 - a_2$ ) в элементе картины поля, представляющий собой участок промежуточной эквипотенциальной линии, например, соответствующей потенциалу  $\varphi = 250 \text{ В}$ , равнялся отрезку ( $b_1 - b_2$ ), являющемуся разностью радиусов  $r''$  и  $r'''$  эквипотенциальных линий, соответствующих потенциалов

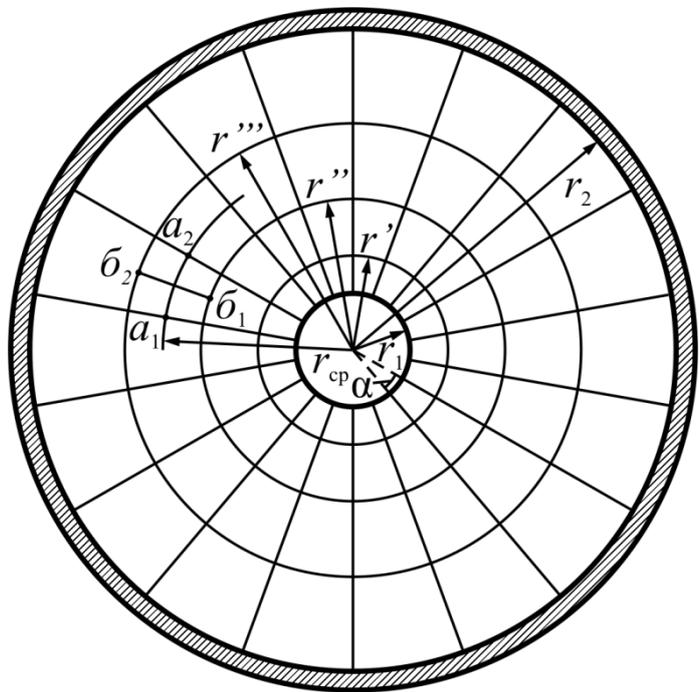


Рис. 3.5

$\varphi = 200 В$  и  $\varphi = 300 В$ .

Из рис. 3.5 видно

$$(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) = r''' - r'' = r''(m - 1); \quad (a_1 - a_2) = r_{cp} \alpha,$$

где  $r_{cp} = r'' \sqrt{m}$  – радиус промежуточной эквипотенциальной линии ( $\varphi = 250 В$ );  $\alpha$  – центральный угол между соседними линиями напряженности поля.

Приравнивая величины отрезков  $(\bar{b}_1 - \bar{b}_2)$  и  $(a_1 - a_2)$ , получаем

$$r'' \alpha \sqrt{m} = r''(m - 1); \quad \alpha = \frac{m - 1}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt[4]{2}} = 0,348 \text{ рад} \approx 20^\circ.$$

Под этим центральным углом в  $20^\circ$  должны проводиться линии напряженности электростатического поля по условию данной задачи.

3.2.23. Построить картину электростатического поля коаксиального кабеля с отношением внутреннего радиуса трубчатого проводника к радиусу внутреннего цилиндрического проводника  $r_2/r_1 = 4,75$ . Эквипотенциальные линии проводить так, чтобы разность потенциалов соседних линий составляла  $1/3$  приложенного к кабелю напряжения.

3.2.23. Определить емкость, запас электрической прочности и величину энергии электростатического поля на единицу длины коаксиального кабеля, рассмотренного в задаче 3.2.21, если он имеет полистироловую изоляцию ( $\varepsilon = 2,5$ ;  $E_{проб} = 2,5 \times 10^7 В/м$ ).

**Решение.** Используем формулы из [1, § 4-10].

Емкость кабеля на  $1 м$  длины

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 2,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln 4} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м} = 100 \text{ пФ/м}.$$

Наибольшая напряженность электростатического поля имеет место на

поверхности внутреннего проводника:

$$E_{\text{макс}} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{400}{1 \cdot 10^{-3} \ln 4} = 289000 \text{ В/м.}$$

Запас электрической прочности (при  $E_{\text{проб}} = \text{const}$ )

$$\frac{E_{\text{проб}}}{E_{\text{макс}}} = \frac{2,5 \cdot 10^7}{2,89 \cdot 10^5} = 86.$$

Энергия электростатического поля на 1 м длины кабеля

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-10} \cdot 400^2}{2} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/м.}$$

3.2.24. Найти наибольшее допустимое напряжение, которое можно приложить к кабелю, рассмотренному в задаче 3.2.21 и 3.2.23 с тем, чтобы запас электрической прочности был не ниже 5.

Чему будет равна энергия электростатического поля кабеля при этом напряжении?

3.2.25. Исследовать поле двухслойного цилиндрического конденсатора длиной  $l$  и определить его емкость. Диэлектрическая проницаемость внутреннего слоя  $\epsilon_1$ , внешнего –  $\epsilon_2$ . Радиусы цилиндрических слоев указаны на рис. 3.6. Заряд конденсатора равен  $q$ .

**Решение.** Если пренебречь влиянием краев цилиндра, то по соображениям симметрии потенциал  $\varphi$  будет функцией только одной координаты  $r$ . Поле между цилиндрами описывается уравнением Лапласа (3.9). В цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Непосредственным интегрированием находим выражение потенциала в

первом слое ( $a_1 \leq r \leq a$ )

$$\varphi_1 = A_1 \ln r + B_1.$$

Аналогично, во втором слое

( $a \leq r \leq a_2$ )

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2.$$

Напряженность электрического поля  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ .

Поскольку потенциал  $\varphi$  зависит только от координаты  $r$ , то у вектора  $\mathbf{E}$  будет только одна составляющая

$$E = E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Следовательно, в первом слое

$$E_1 = \frac{-A_1}{r}, \text{ во втором } E_2 = \frac{-A_2}{r}.$$

Чтобы найти постоянные интегрирования, используем граничные условия (3.11, 3.12):

при  $r_1 = a_1$

$$D_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E = \sigma = \frac{q}{2\pi a_1 l},$$

следовательно,

$$-\frac{A_1}{a_1} \varepsilon_1 \varepsilon_0 = \frac{q}{2\pi a_1 l},$$

откуда

$$A_1 = -\frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 l};$$

при  $r = a$

$$D_1 = D_2, \text{ или } \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2,$$

следовательно,

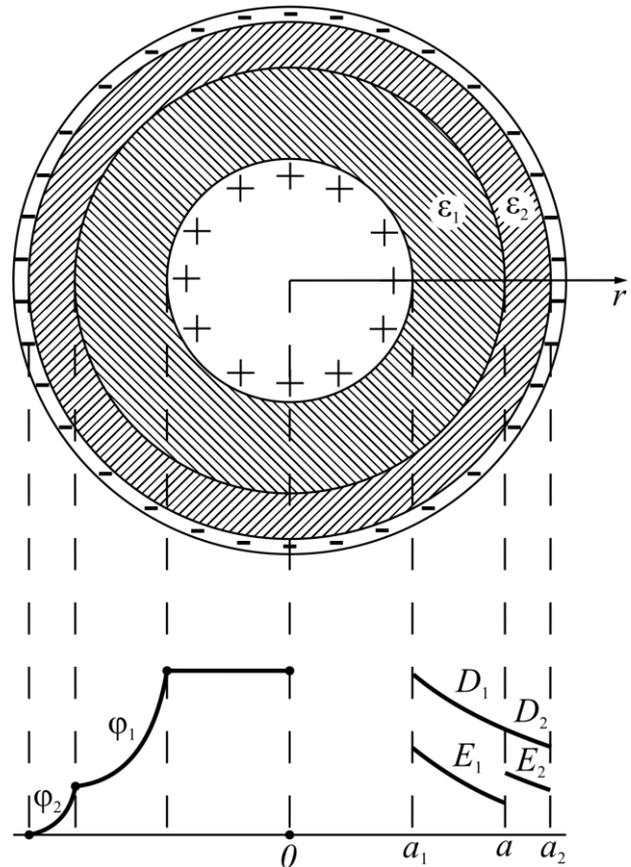


Рис. 3.6

$$-\frac{A_1}{a}\varepsilon_1 = -\frac{A_2}{a}\varepsilon_2,$$

откуда

$$A_2 = A_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l}.$$

Точку нулевого потенциала можно задать произвольно. Примем  $\varphi = 0$  при  $r = a_2$ . Тогда

$$B_2 = -A_2 \ln a_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l} \ln a_2.$$

Так как потенциал непрерывен во всех точках поля, то

$$(\varphi_1)_{r=a} = (\varphi_2)_{r=a},$$

следовательно,

$$B_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 l} \ln a + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l} \ln \frac{a_2}{a}.$$

Подставив значения постоянных, получим

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{1}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 lr};$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{1}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 lr};$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{a_2}{a} \right);$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l} \ln \frac{a_2}{r}.$$

Напряжение, приложенное к конденсатору,

$$U = \varphi_{a_1} - \varphi_{a_2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{a}{a_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{a_2}{a} \right).$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{a_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{a_2}{a}}.$$

Если бы конденсатор был однослойным  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ , то емкость была бы равна

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln \frac{a_2}{a_1}}.$$

На рис. 3.6 приведены кривые изменения  $E$ ,  $D$  и  $\varphi$  в зависимости от  $r$  при  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ . На границе двух слоев (при  $r = a$ ) напряженность претерпевает скачок, величина которого равна

$$E_2 - E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a l} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2}.$$

Вектор электрического смещения  $\mathbf{D}$  непрерывен:

$$\mathbf{D} = \frac{q}{2\pi r l} \mathbf{1}_r \quad (a_1 \leq r \leq a_2).$$

Энергия, накопленная в конденсаторе,

$$W_3 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{a_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{a_2}{a} \right).$$

3.2.26. Исследовать поле и определить емкость двухслойного сферического конденсатора, у которого радиусы внешнего и внутреннего шаров соответственно равны  $a_1$  и  $a_2$ . Внешний радиус первого слоя диэлектрика –  $a$ ; диэлектрическая проницаемость первого слоя –  $\epsilon_1$ , второго –  $\epsilon_2$ . Приложенное к конденсатору напряжение равно  $U$ . Начертить кривую зависимости  $E = f(r)$  для  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ . Принять  $\varphi = 0$  при  $r = a_2$ .

3.2.27. Исследовать поле и определить емкость плоского двухслойного

конденсатора (рис. 3.7). Площадь каждой обкладки  $S$ . Приложенное к конденсатору напряжение равно  $U$ . Принять  $\varphi = 0$  при  $x = d_1 + d_2$ . Начертить кривые зависимости  $E = f_1(x)$  и  $\varphi = f_2(x)$  для  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Краевым эффектом пренебречь.

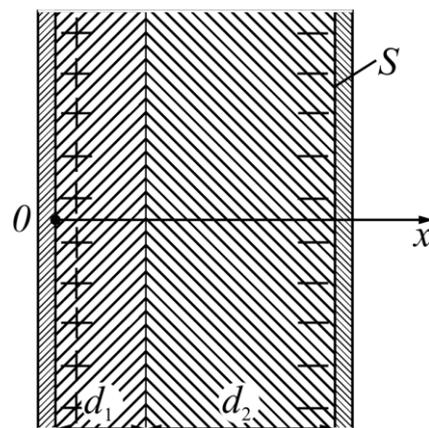


Рис. 3.7

3.2.28. Найти максимально допустимое напряжение, которое может быть приложено к конденсатору с двухслойным диэлектриком, рассмотренному в задаче 3.2.25, с тем, чтобы запас электрической прочности был не менее 10. Найти емкость конденсатора и величину запасенной в нем энергии при максимально допустимом напряжении. Эфектом краев пренебречь. Размеры конденсатора:  $a_1 = 1 \text{ мм}$ ;  $a = 0,2 \text{ см}$ ,  $a_2 = 2,72 \text{ мм}$  (см. рис. 3.6). Длина конденсатора  $l = 5 \text{ см}$ . Первый диэлектрик – пропитанная конденсаторная бумага ( $\varepsilon_1 = 3,7$ ;  $E_{1\text{проб}} = 2,5 \times 10^8 \text{ В/м}$ ); второй – керамика ( $\varepsilon_2 = 20$ ;  $E_{2\text{проб}} = 8 \times 10^6 \text{ В/м}$ ).

*Указание.* См. [1, § 4-13].

3.2.29. Как изменится решение предыдущей задачи, если диэлектрики поменять местами?

3.2.30. Решить задачи 3.2.28 и 3.2.29 применительно к сферическому конденсатору с двухслойным диэлектриком. Диэлектрики те же. Размеры конденсатора:  $a_1 = 2,72 \text{ см}$ ;  $\mu = 200$ .  $a_2 = 1 \text{ см}$ .

3.2.31. Решить задачи 3.2.28 и 3.2.29 применительно к плоскому конденсатору с двухслойным диэлектриком, имеющему размеры (см. рис.3.7):  $d_1 = 1 \text{ мм}$ ;  $d_2 = 2 \text{ мм}$ ; поверхность обкладок  $\gamma = 5 \cdot 10^4 \text{ См/м}$  диэлектрики: конденсаторная бумага ( $\varepsilon_1 = 3,7$ ;  $E_{1\text{проб}} = 2,5 \times 10^8 \text{ В/м}$ ) и кабельное масло ( $\varepsilon_2 = 2,2$ ;  $E_{2\text{проб}} = 2 \times 10^7 \text{ В/м}$ ).

3.2.33. Как изменится решение предыдущей задачи, если масло вытечет

и освободившееся пространство заполнится воздухом ( $\epsilon_{\text{возд.}} = 1$ ;

$$E_{\text{возд.проб}} = 3 \times 10^6 \text{ В/м})?$$

3.2.33. Решить задачу 3.2.7 с помощью уравнения Пуассона – Лапласа.

3.2.34. Подсчитать энергию, запасенную в конденсаторе, рассмотренном в задаче 3.2.26.

3.2.35. Определить энергию, запасенную в конденсаторе, рассмотренном в задаче 3.2.27.

3.2.36. В однородном электростатическом поле с напряженностью  $E_0 = \text{const}$  помещен металлический шар радиусом  $a$ .

Определить напряженность поля вокруг шара, если диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ .

**Решение.** Начало сферических координат поместим в центре шара. Так как шар металлический, то напряженность поля внутри шара равна нулю. Вне шара поле описывается уравнением Лапласа. Расположим экваториальную плоскость перпендикулярно направлению вектора  $\mathbf{E}_0$ . Так как

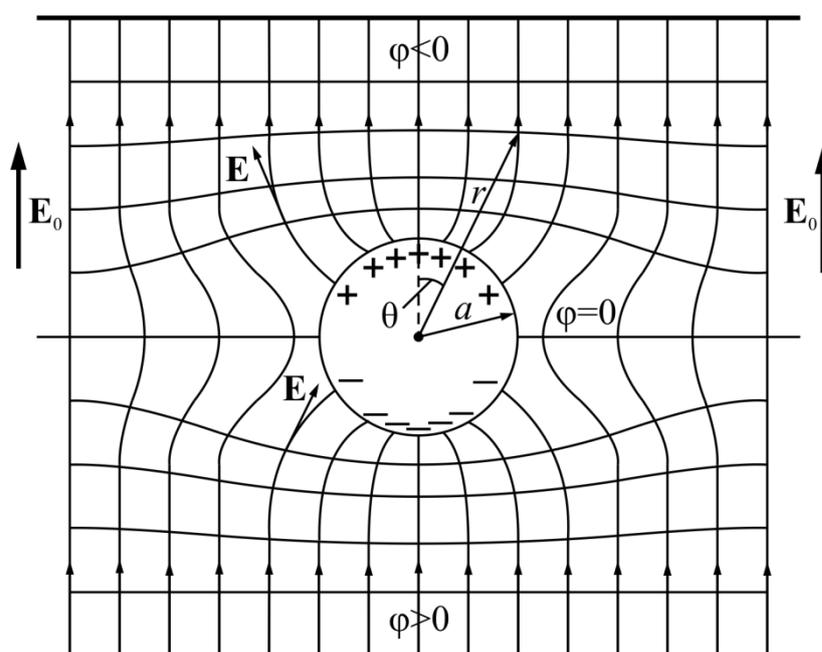


Рис. 3.8

поле симметрично, то напряженность поля и потенциал будут зависеть только от двух сферических координат  $r$  и  $\theta$  (рис. 3.8).

Уравнение Лапласа в сферической системе координат для рассматриваемой задачи примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты  $r$ , другая – только от координаты  $\theta$ :

$$\varphi = f_1(r)f_2(\theta) = f_1 f_2.$$

Чтобы определить функции  $f_1$  и  $f_2$ , подставим искомое решение в дифференциальное уравнение

$$f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{2f_2}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{f_1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} + \frac{f_1 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0.$$

Умножим обе части равенства на  $\frac{r^2}{f_1 f_2}$ , получим

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{2r}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{f_2 \sin \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}.$$

Равенство это должно быть справедливым при любых значениях  $r$  и  $\theta$ . Это возможно лишь в том случае, когда каждая из частей равна некоторой постоянной  $p^2$ , т.е.

$$-\frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{f_2 \sin \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = p^2, \quad (*)$$

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{2r}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial r} = p^2. \quad (**)$$

В рассматриваемой задаче искомое решение будет  $f_2 = \cos \theta$ , причем постоянная  $p^2$  должна быть равна 3. В этом легко убедиться подстановкой  $f_2 = \cos \theta$  в уравнение (\*).

Уравнение (\*\*) примет теперь вид

$$r^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial f_1}{\partial r} - 2f_1 = 0.$$

Для решения этого уравнения введем новую независимую переменную  $w$  так, чтобы

$$r = e^{+w}; dr = e^w dw; \frac{dw}{dr} = e^{-w}.$$

Тогда

$$\frac{df_1}{dr} = \frac{df_1}{dw} \frac{dw}{dr} = e^{-w} \frac{df_1}{dw};$$

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} = \frac{d}{dw} \left( \frac{df_1}{dr} \right) \frac{dw}{dr} = e^{-w} \left( e^{-w} \frac{d^2 f_1}{dw^2} - e^{-w} \frac{df_1}{dw} \right).$$

Подставив эти производные в решаемое уравнение, получим

$$\frac{d^2 f_1}{dw^2} + \frac{df_1}{dw} - 2f_1 = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$f_1 = A_1 e^{\alpha_1 w} + A_2 e^{\alpha_2 w}.$$

Корни характеристического уравнения

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

равны

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = 1; \alpha_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -2;$$

А для функции  $f_1$  получим следующее выражение:

$$f_1 = A_1 e^w + A_2 e^{-2w} = A_1 r + \frac{A_2}{r^2}.$$

Таким образом, искомый потенциал

$$\varphi = \left( A_1 r + \frac{A_2}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Найдем напряженность поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = E_r \mathbf{l}_r + E_\theta \mathbf{l}_\theta + E_\psi \mathbf{l}_\psi,$$

где

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\left(A_1 - \frac{2A_2}{r^3}\right)\cos\theta;$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \left(A_1 + \frac{A_2}{r^3}\right)\sin\theta;$$

$$E_\psi = 0.$$

Соответственно,

$$D_r = -\varepsilon_a\left(A_1 - \frac{2A_2}{r^3}\right)\cos\theta;$$

$$D_\theta = \varepsilon_a\left(A_1 + \frac{A_2}{r^3}\right)\sin\theta;$$

$$D_\psi = 0.$$

Для определения постоянных интегрирования учтем граничные условия.

При  $r = \infty$  влияние шара не сказывается;  $E = E_0$  и, следовательно,  $E_r = E_{0r}$  :

$$-A_1 \cos\theta = E_0 \cos\theta;$$

откуда

$$A_1 = -E_0.$$

Поверхность шара является эквипотенциальной. Поэтому при  $r = a$  для всех значений  $\theta$   $\varphi = \text{const}$ , что возможно при условии:

$$A_1 a + \frac{A_2}{a^2} = 0.$$

Следовательно,

$$A_2 = -A_1 a^3 = E_0 a^3.$$

Подставив значения постоянных интегрирования, получим:

$$\varphi = E_0\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)\cos\theta;$$

$$E_r = E_0 \left( \frac{2a^3}{r^3} + 1 \right) \cos \theta;$$

$$E_\theta = E_0 \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \sin \theta;$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}.$$

Наибольшая напряженность поля будет в точке  $r = a$ ,  $\theta = 0$ ;

$$E_{\text{макс}} = 3E_0.$$

Проекции напряженности электрического поля можно записать следующим образом:

$$E_r = E_0 \cos \theta + \frac{2p}{4\pi\epsilon_a r^3} \cos \theta = E'_r + E''_r;$$

$$E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_a r^3} \sin \theta = E'_\theta + E''_\theta,$$

где  $p = 4\pi\epsilon_a a^3 E_0$ ;  $E'_r$  и  $E'_\theta$  – проекции напряженности заданного однородного электрического поля;  $E''_r$  и  $E''_\theta$  – проекции напряженности электрического поля диполя с моментом  $p$  (расстояние между зарядами которого мало по сравнению с радиусом шара).

Таким образом, металлический незаряженный шар, внесенный в однородное электрическое поле, изменяет картину этого поля так, как изменил бы её внесенный в поле малый электрический диполь.

Найдем плотность зарядов, индуцированных на поверхности шара:

$$\sigma = D_{r=a} = 3\epsilon_a E_0 \cos \theta.$$

На одной половине шара индуцируется положительный заряд; на другой – равный ему по величине отрицательный заряд

$$|q| = \int_{\frac{S}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\epsilon_a E_0 \cos \theta 2\pi a \sin \theta a d\theta = 3\epsilon_a E_0 \pi a^2.$$

На рис. 3.8 изображена картина поля.

3.2.37. Решить задачу 3.2.36 в предположении, что шар предварительно заряжен. Величина заряда равна  $q$ .

3.2.38. В однородное электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  вносится металлический круглый цилиндр длиной  $l$  и радиусом  $a$ .

Требуется исследовать результирующее поле вокруг цилиндра в предположении, что  $\mathbf{E}_0$  нормально к оси цилиндра и что длина цилиндра настолько велика, что краевой эффект не сказывается.

*Указание.* Применить метод, использованный при решении задачи 3.2.36.

3.2.39. Решить задачу 3.2.38, считая цилиндр предварительно заряженным. Величина заряда равна  $q$ .

3.2.40. В однородное электростатическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  вносится диэлектрический шар радиусом  $a$ . Диэлектрические проницаемости: среды –  $\epsilon_2$ , шара –  $\epsilon_1$ .

Определить напряженность поля и потенциал.

*Указание.* Картина поля изображена на рис. 3.9.

3.2.41. В однородное электростатическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  вносится диэлектрический круглый бесконечно длинный цилиндр радиуса  $a$ .

Направление вектора  $\mathbf{E}_0$  нормально к оси цилиндра. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_2$ , цилиндра –  $\epsilon_1$ .

Требуется исследовать поле.

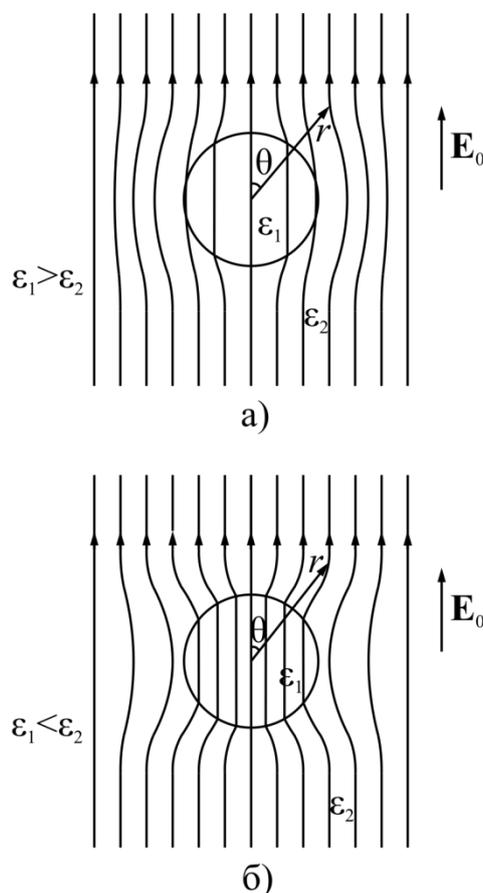


Рис. 3.9

## ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

### 4.1. Основные формулы

Электрический ток:

$$I = \int_S \delta d\mathbf{S},$$

где  $\delta$  – плотность тока проводимости.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\delta = \gamma \mathbf{E}.$$

Первое правило Кирхгофа в дифференциальной форме для постоянного тока:

$$\operatorname{div} \delta = 0.$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$\frac{dP}{dV} = \gamma E^2; P = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV.$$

Второе правило Кирхгофа в дифференциальной форме (обобщенный закон Ома):

$$\delta = \gamma (\mathbf{E}_{\text{стат}} + \mathbf{E}_{\text{стор}})$$

Граничные условия:

$$\delta_{1n} - \delta_{2n} = 0,$$

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Напряжение между двумя точками  $a$  и  $b$  (по пути интегрирования нет сторонних сил):

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

## 4.2. Задачи

4.2.1. Диэлектрик коаксиального кабеля, изображенного на рис. 4.1, а, имеет удельную проводимость  $\gamma = 5 \times 10^{-9} \text{ См/м}$ . Разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками кабеля  $U = 5000 \text{ В}$ . Радиус внутреннего проводника  $a_1 = 10 \text{ мм}$ , внутренний радиус трубы  $a = 40 \text{ мм}$ .

Найти сопротивление изоляции отрезка кабеля длиной  $l = 1 \text{ км}$ , ток утечки в том же отрезке, а также мощность тепловых потерь.

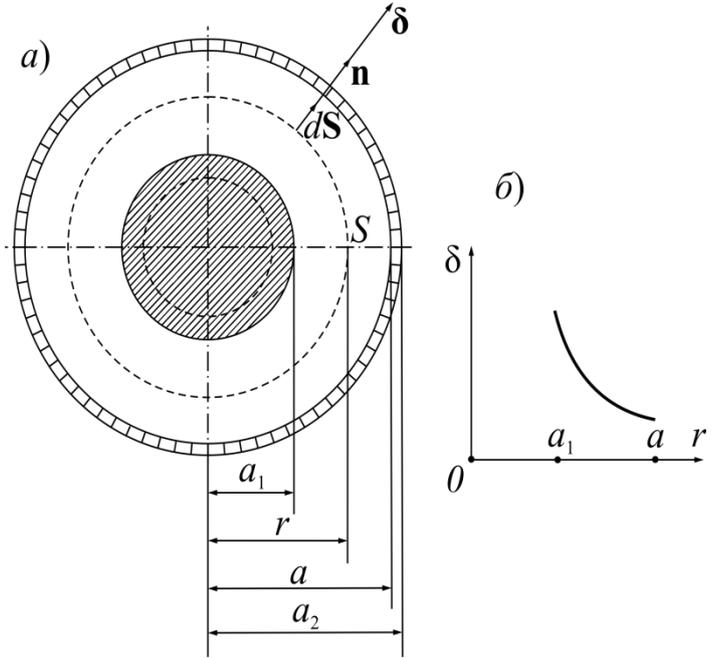


Рис. 4.1

Построить кривую зависимости плотности тока утечки в функции от расстояния  $r$  до оси.

**Решение.** Пусть потенциал внутреннего проводника кабеля выше потенциала внешнего проводника. Тогда вектор напряженности поля  $\mathbf{E}$ , а следовательно, и вектор плотности тока  $\delta = \gamma \mathbf{E}$  будут направлены по радиусам, как это показано на рис. 4.1. Проведем в диэлектрике цилиндрическую поверхность радиусом  $r$  и длиной  $l$ .

Ток, протекающий через эту поверхность,

$$I = \int_S \delta dS = 2\pi r l \delta = 2\pi r l \gamma E.$$

Напряжение между внутренним и внешним проводниками кабеля

$$U = \int_{a_1}^a E dr = \frac{I}{2\pi l \gamma} \ln \frac{a}{a_1}.$$

Сопротивление изоляции

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln \frac{a}{a_1}}{2\pi l \gamma}.$$

Подставив значения  $a$ ,  $a_1$ ,  $l$  и  $\gamma$ , получим

$$R = 44400 \text{ Ом}.$$

Ток утечки

$$I = 0,114 \text{ А}.$$

Мощность тепловых потерь

$$P = 572 \text{ Вт}.$$

Плотность тока утечки

$$\delta = \frac{I}{2\pi l r} \mathbf{1}_r = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{r} \mathbf{1}_r.$$

Кривая зависимости  $\delta = f(r)$  показана на рис. 4.1, б.

4.2.2. Отношение радиусов  $\frac{a}{a_1}$  в коаксиальном кабеле (см. рис. 4.1)

равно: 2; 5; 10; 20; 100.

Удельная проводимость изоляции кабеля  $\gamma = 10^{-13} \text{ См/м}$ .

Определить сопротивление изоляции кабеля, считая длину  $l = 1 \text{ км}$ .

4.2.3. Решить задачу 4.2.1, предполагая, что диэлектрик кабеля состоит из двух слоев: удельная проводимость внутреннего слоя  $\gamma_1 = 5 \times 10^{-8} \text{ См/м}$ , внешнего слоя  $\gamma_2 = 10^{-9} \text{ См/м}$ . Радиус границы между слоями  $b = 20 \text{ мм}$ .

4.2.4. К плоскому конденсатору, расстояние между обкладками которого  $d = 5 \text{ мм}$ , а площадь каждой из них  $S = 50 \text{ см}^2$ , подведено напряжение  $U = 500 \text{ В}$ . Удельная проводимость диэлектрика  $\gamma = 10^{-10} \text{ См/м}$ .

Найти сопротивление изоляции, ток утечки, а также определить мощность тепловых потерь.

4.2.5. Диэлектрик плоского конденсатора – двухслойный. Диэлектрическая проницаемость первого слоя  $\varepsilon_1 = 3$ , удельная проводимость  $\gamma_1 = 10^{-8}$  См/м. Для второго слоя:  $\varepsilon_2 = 6$ ,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-8}$  См/м. Толщина слоев одинакова и равна  $d_1 = 2$  см. Площадь одной обкладки  $S = 50$  см<sup>2</sup>. Напряжение, приложенное к конденсатору,  $U = 120$  В.

Найти плотность тока проводимости и потери мощности на тепло.

4.2.6. Для случая, рассмотренного в задаче 4.2.5, найти величину вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$  в каждом слое.

4.2.7. Напряженность однородного поля в среде с проводимостью  $\gamma = 10^{-2}$  См/м равна  $E = 100$  В/м. Определить плотность тока и мощность тепловых потерь в единице объема.

4.2.8. Определить напряженность электрического поля в медной шине с проводимостью  $\gamma = 57 \times 10^6$  См/м, если плотность тока равна  $\delta = 2$  А/мм<sup>2</sup>.

4.2.9. Сферический заземлитель радиуса  $a$  находится в среде с относительно небольшой проводимостью  $\gamma$  (рис. 4.2). Ток, подводимый к заземлителю, равен  $I$ . Определить сопротивление растеканию  $R_p$ . Заземлитель зарыт на глубину, во много раз большую его радиуса.

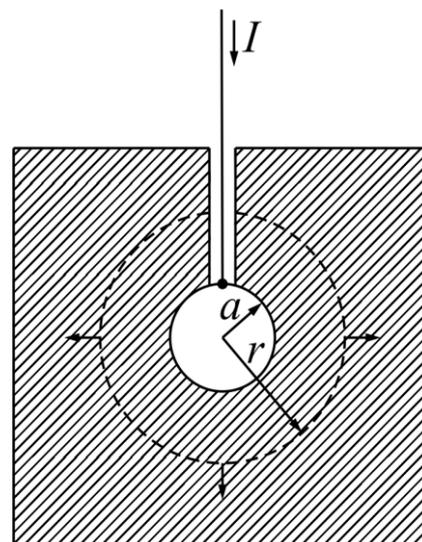


Рис. 4.2

**Решение.** По условиям симметрии ток будет равномерно растекаться во все стороны. Линии вектора плотности тока будут радиальными прямыми. На расстоянии  $r$  от центра заземлителя численное значение плотности тока

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

В той же точке напряженность электрического поля определится по закону Ома

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{\delta} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \mathbf{1}_r.$$

Соответственно, потенциал

$$\varphi = -\int \mathbf{E} d\mathbf{l} + \text{const.}$$

Напряжение между любой точкой почвы и поверхностью заземлителя определится из выражения

$$U = \varphi_a - \varphi_r = \int_a^r E dr = \frac{I}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right).$$

С увеличением расстояния  $r$  напряжение стремится к пределу

$$U_p = \frac{I}{4\pi\gamma a}.$$

Это предельное напряжение называется напряжением растекания. На расстоянии  $r = 100a$  с достаточной степенью точности можно считать  $U = U_p$ .

Отношение  $U_p$  к току называют сопротивлением растеканию

$$R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a}.$$

В случае полусферического заземлителя сопротивление растеканию будет равно

$$R_p = \frac{1}{2\pi\gamma a}.$$

4.2.10. Сферический заземлитель находится в грунте с удельной проводимостью  $\gamma = 10^{-2} \text{ См/м}$ .

Чему равно сопротивление растеканию  $R_p$ , если радиус заземлителя 5; 10; 50; 100 см?

4.2.11. Полусферический заземлитель радиуса  $a$  погружен в землю вровень с её поверхностью (рис. 4.3). Определить напряжение шага  $U_{\text{ш}}$  – на-

пряжение, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. Ток  $I$ , протекающий в землю через заземлитель, задан.

**Решение.** Пользуясь формулами, выведенными в задаче 4.2.9, можно записать выражение напряженности электрического поля в точке, удаленной от центра заземлителя на расстояние  $r$ :

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}.$$

Считая длину шага равной 0,8 м, получим

$$U_{\text{ш}} = \int_r^{r+0,8} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right).$$

Если принять потенциал  $\varphi = 0$  при  $r = \infty$ , то в остальных точках на поверхности, начиная от  $r = a$ , потенциал

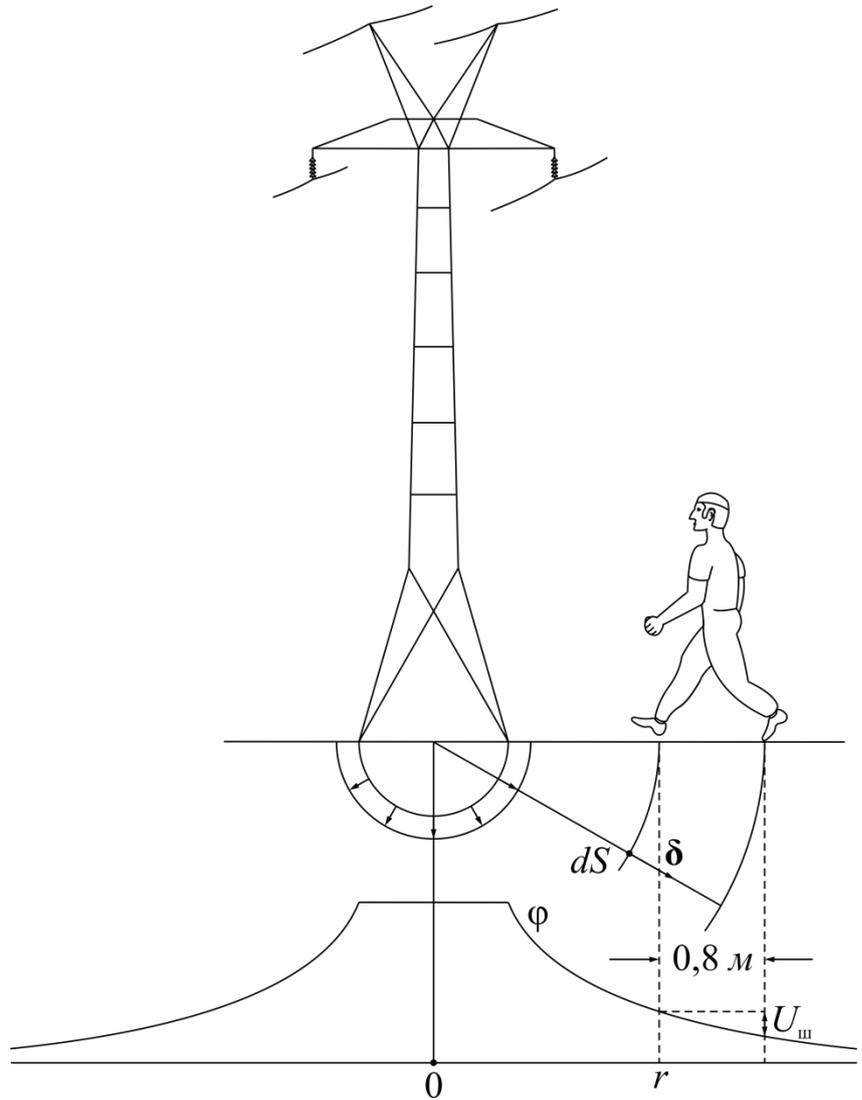


Рис. 4.3

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma r} = U_p \frac{a}{r}.$$

На рис. 4.3 показана кривая  $\varphi = f(r)$ .

4.2.13. Решить задачу 4.2.11, считая  $a = 50 \text{ см}$ ,  $\gamma = 10^{-2} \text{ См/м}$ ,  $I = 100 \text{ А}$ .

Определить сопротивление растеканию. Построить кривую  $\varphi = f(r)$ .

4.2.13. Определить сопротивление растеканию заземлителя, выполненного в виде трубы (рис. 4.4), закопанной в землю. Диаметр трубы  $d = 5$  см, длина  $l = 2$  м, удельная проводимость почвы  $\gamma = 10^{-2}$  См/м.

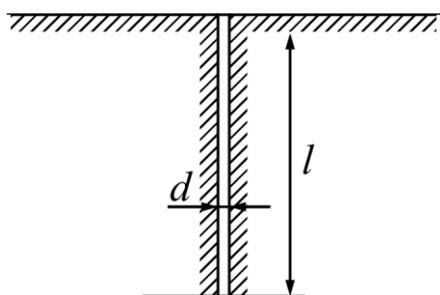


Рис. 4.4

4.2.14. Решить задачу 4.2.13. для следующих значений диаметра трубы:  $d = 20; 10; 4; 2$  см.

4.2.15. Плоский конденсатор с двухслойным несовершенным диэлектриком включается на постоянное напряжение  $U$ . Толщина слоев диэлектрика и значения их абсолютных диэлектрических проницаемостей и удельных проводимостей постоянны и равны, соответственно,  $d_1, \epsilon_{a1}, \gamma_1; d_2, \epsilon_{a2}, \gamma_2$ . Вывести общие уравнения изменения по времени напряженностей  $E_1$  и  $E_2$  электрического поля в каждом из слоев.

**Решение.** Сумма напряжений на слоях в любой момент времени равна приложенному постоянному напряжению

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \quad (*)$$

Полные токи в слоях (суммы токов проводимости и токов смещения) в любой момент времени равны друг другу

$$\gamma_1 E_1 + \epsilon_{a1} \frac{dE_1}{dt} = \gamma_2 E_2 + \epsilon_{a2} \frac{dE_2}{dt}.$$

Исключая поочередно  $E_2$  или  $E_1$ , приходим к дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} E_1 + \tau \frac{dE_1}{dt} &= E_{1k}; \\ E_2 + \tau \frac{dE_2}{dt} &= E_{2k}, \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

где  $\tau = \frac{\varepsilon_{a1}d_2 + \varepsilon_{a2}d_1}{\gamma_1d_2 + \gamma_2d_1}$  – постоянная времени;

$$E_{1k} = \frac{U}{d_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}d_2}; E_{2k} = \frac{U}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}d_1 + d_2};$$

$E_{1k}$  и  $E_{2k}$  – установившиеся значения напряженности электрического поля в слоях диэлектрика.

Интегралами уравнений (\*\*\*) являются выражения

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_{1k} &= A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}; \\ E_2 - E_{2k} &= A_2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  находятся из начального условия: заряды не могут внезапно «просочиться» в составной диэлектрик в момент включения напряжения, поскольку  $\tau > 0$ ; поэтому при  $t = 0$  имеет силу граничное условие

$$(\varepsilon_{a1}E_1)_{t=0} = (\varepsilon_{a2}E_2)_{t=0}.$$

Решая это уравнение совместно с (\*), получим

$$E_{1(t=0)} = E_{10} = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}d_2}; E_{2(t=0)} = E_{20} = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}d_1 + d_2};$$

$$A_1 = E_{10} - E_{1k}; A_2 = E_{20} - E_{2k}.$$

4.2.16. Вывести выражение для  $E_{1k}$  и  $E_{2k}$  в задаче 4.2.15, исходя из граничного условия для поля установившегося тока проводимости в составном диэлектрике.

4.2.17. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на границе между слоями диэлектрика в задаче 4.2.15 (в установившемся режиме).

*Указание.* См. [1, § 5-4].

4.2.18. Вывести выражение для «геометрической» емкости  $C_T$  конден-

сатора в задаче 4.2.15 (при  $t = 0$ ) и для емкости в установившемся режиме  $C_y$  (с учетом связанных зарядов). Поверхность каждой обкладки полагать равной  $s$ .

*Указание.* См. [1, § 5-4].

4.2.19. Вывести выражение для плотности тока проводимости, плотности тока смещения и полной плотности тока в каждом из слоев конденсатора, рассмотренного в предыдущих задачах, в момент времени  $t = 0$  и  $t = 7\tau$  (когда переходный процесс можно считать практически закончившимся,  $e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0$ ).

4.2.20. Произвести численное решение задач 4.2.17 и 4.2.18 для случаев, когда слоями составного диэлектрика являются:

1. а) пропитанная конденсаторная бумага ( $\varepsilon_1 = 3,7$ ;  $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_1 = 1 \text{ мм}$ ); б) непропитанная бумага ( $\varepsilon_2 = 2$ ;  $\gamma_2 = 10^{-8} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_2 = 2 \text{ мм}$ );
2. а) кабельное масло ( $\varepsilon_1 = 2,2$ ;  $\gamma_1 = 10^{-13} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_1 = 2 \text{ мм}$ ); б) вода ( $\varepsilon_2 = 80$ ;  $\gamma_2 = 10^{-3} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_2 = 1 \text{ мм}$ );
3. а) кабельное масло ( $\varepsilon_1 = 2,2$ ;  $\gamma_1 = 10^{-13} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_1 = 1 \text{ мм}$ ); б) конденсаторное стекло («минос») ( $\varepsilon_2 = 7,5$ ;  $\gamma_2 = 10^{-14} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$ ;  $d_2 = 2 \text{ мм}$ ).

4.2.21. Установить, чем определяется знак связанных зарядов на границе двух слоев диэлектрика составного плоского конденсатора, рассмотренного в предыдущих задачах.

## ГЛАВА 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

### 5.1. Основные формулы

Закон полного тока:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{полн}} = \int_S \delta d\mathbf{S}. \quad (5.1)$$

Закон Био – Савара:

$$d\mathbf{H} = \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{l}_r]}{4\pi r^2}. \quad (5.2)$$

Закон Ампера:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (5.3)$$

Зависимость между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля (изотропные среды):

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}, \quad (5.4)$$

где  $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость;  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость.

Интенсивность намагничивания:

$$\mathbf{J} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad (5.5)$$

где  $\chi_m$  – относительная магнитная восприимчивость.

Первое уравнение Максвелла для постоянных токов:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta = \gamma \mathbf{E}; \quad \text{div } \mu_a \mathbf{H} = 0. \quad (5.6)$$

Зависимость между напряженностью магнитного поля и векторным потенциалом:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}; \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (5.7)$$

Векторный потенциал магнитного поля:

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_a \delta dV}{4\pi r}. \quad (5.8)$$

Основные уравнения магнитного поля:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}; \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \delta. \quad (5.9)$$

Граничные условия в магнитном поле:

$$B_{1n} - B_{2n} = 0; \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta, \quad (5.10)$$

где  $\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} = \frac{dI}{dl}$  – поверхностная плотность тока.

Энергия магнитного поля:

$$W_M = \int_V \frac{HB}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (5.11)$$

Магнитный поток:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} dl. \quad (5.12)$$

Соленоидальность магнитного поля:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.13)$$

Векторный потенциал линейного тока:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (5.14)$$

## 5.2. Задачи

5.2.1. Вывести выражения для напряженности магнитного поля и векторного потенциала в коаксиальном кабеле, размеры которого даны на рис. 5.1, посредством интегрирования уравнений Пуассона – Лапласа для векторного потенциала магнитного поля.

**Решение.** Выбираем цилиндрическую систему координат (см. рис. 5.1). Так как вектор плотности тока имеет только одну проекцию, то и векторный

потенциал будет иметь только одну проекцию – на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости чертежа. Внутри центрального проводника ( $0 \leq r \leq a$ ) по уравнению Пуассона (5.9) имеем

$$\nabla^2 A_z = -\frac{\mu_{a1} I}{\pi a_1^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right),$$

где  $\mu_{a1}$  – магнитная проницаемость материала проводника.

Интегрируя, получим

$$A_1 = -\frac{\mu_{a1} I r^2}{4\pi a_1^2} + C_1 \ln r + C_2.$$

По формуле (5.7) напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_{a1}} \text{rot } \mathbf{A}_1.$$

Развернув выражение ротора в цилиндрической системе координат и учитывая, что

$$\mathbf{A}_1 = k A_{z1}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{l}_\theta \mathbf{H}_\theta,$$

получим

$$-\frac{dA_1}{dr} = \mu_{a1} H_1,$$

откуда

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi a_1^2} - \frac{C_1}{\mu_{a1} r}.$$

Так как напряженность поля  $H_1$  – конечная величина, то постоянная  $C_1$  должна равняться нулю.

Примем векторный потенциал  $A_1$  равным нулю при  $r=0$ . Тогда  $C_2=0$ , и при  $r \leq a_1$

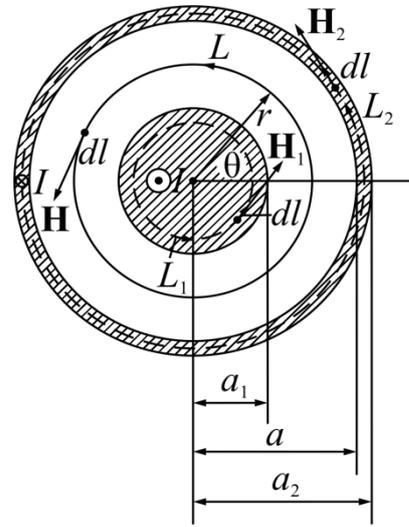


Рис. 5.1

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{l}_\theta \frac{Ir}{2\pi a_1^2} = \frac{[\delta \times \mathbf{r}]}{2},$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{k} \frac{\mu_{a1} I r^2}{4\pi a_1^2}.$$

Между проводниками ( $a_1 \leq r \leq a$ ) плотность тока равна нулю, поэтому по уравнению Лапласа

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$A = A_z = C_3 \ln r + C_4; \quad H = -\frac{C_3}{\mu_0 r}.$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия (5.10). При  $r = a_1$

$$-\frac{C_3}{\mu_0 a_1} = \frac{I}{2\pi a_1},$$

откуда

$$C_3 = -\frac{I\mu_0}{2\pi}.$$

Векторный потенциал непрерывен, поэтому при  $r = a_1$

$$C_3 \ln a_1 + C_4 = -\frac{\mu_{a1} I a_1^2}{4\pi a_1^2},$$

откуда

$$C_4 = -\frac{\mu_{a1} I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a_1.$$

Напряженность магнитного поля между проводниками кабеля и векторный потенциал будут соответственно равны

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}_\theta \frac{I}{2\pi r}; \quad \mathbf{A} = -\mathbf{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \mu_1 + 2 \ln \frac{r}{a_1} \right).$$

В толще трубы ( $a \leq r \leq a_2$ ) плотность тока постоянна и равна

$$\delta = \frac{I}{\pi(a_2^2 - a^2)}.$$

Пусть магнитная проницаемость материала трубы равна  $\mu_{a1}$ . Расчетным будет вновь уравнение Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \frac{\mu_{a1} I}{\pi(a_2^2 - a^2)}.$$

Интегрируя, получим

$$A_2 = \frac{\mu_{a1} I r^2}{4\pi(a_2^2 - a^2)} + C_5 \ln r + C_6;$$

$$H_1 = -\frac{I r}{2\pi(a_2^2 - a^2)} - \frac{C_5}{\mu_{a1} r}.$$

Постоянные  $C_5$  и  $C_6$  определяются из граничных условий. При  $r = a$ :  $H_2 = H$  и  $A_2 = A$ , откуда

$$C_5 = -\frac{\mu_{a1} I a_2^2}{2\pi(a_2^2 - a^2)};$$

$$C_6 = -\frac{\mu_{a1} I a_2^2}{4\pi(a_2^2 - a^2)} + \frac{\mu_{a1} I a_2^2}{2\pi(a_2^2 - a^2)} \ln a - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{a_1}.$$

Поэтому в толще трубы ( $a \leq r \leq a_2$ )

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}_\theta \frac{I(a_2^2 - r^2)}{2\pi r(a_2^2 - a^2)};$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{k} \frac{I\mu_{a1}}{4\pi} \left( \frac{a_2^2 - r^2}{a_2^2 - a^2} + \frac{2a_2^2}{a_2^2 - a^2} \ln \frac{r}{a} + \frac{2\mu_0}{\mu_{a1}} \ln \frac{a}{a_1} \right).$$

Вне кабеля векторный потенциал постоянен:

$$\mathbf{A}_{\text{внеш}} = -\mathbf{k} \frac{I\mu_{a1}}{2\pi} \left( \frac{a_2^2}{a_2^2 - a^2} \ln \frac{a_2}{a} + \frac{\mu_0}{\mu_{a1}} \ln \frac{a}{a_1} \right) = \text{const}.$$

Если материал проводника кабеля не ферромагнитный, то магнитная проницаемость  $\mu_{a1} = \mu_0$ .

5.2.3. Вывести выражения для напряженности магнитного поля и скалярного потенциала между проводниками коаксиального кабеля посредством интегрирования уравнения Лапласа для скалярного потенциала магнитного поля.

5.2.3. Решить задачу 5.2.1. с помощью первого уравнения Максвелла.

*Указание.* Входящие в первое уравнение Максвелла выражение ротора напряженности магнитного поля следует развернуть в цилиндрических координатах.

5.2.4. Размеры сечения коаксиального кабеля (см. рис. 5.1):  $a_1 = 5,4$  мм;  $a = 14$  мм;  $a_2 = 15$  мм; сила тока  $I = 2$  А; магнитная проницаемость материала проводника и изоляции одинакова и равна  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м. Определить напряженность магнитного поля  $H$ , магнитную индукцию  $B$  и векторный потенциал магнитного поля  $A$  в точках, находящихся на следующих расстояниях от оси кабеля:

- а) 0; 1; 3; 4; 5,4 мм – в толще центрального проводника;
- б) 5,4; 5; 8; 10; 12; и 14 мм – в изоляции;
- в) 14; 14,5 и 15 мм – в толще трубчатого проводника.

Векторный потенциал на поверхности центрального проводника в расчетах считать равным нулю.

Плотность тока по сечению проводников можно считать равномерной.

Построить кривые изменения величин  $A$  и  $B$  в зависимости от расстояния от оси кабеля.

*Указание.* Задачу решить, пользуясь законом полного тока (5.1).

5.2.5. В условиях предыдущей задачи найти магнитный поток и энергию магнитного поля: внешнего (в изоляции кабеля) и внутреннего (в толще центрального и трубчатого проводников), на погонный метр длины кабеля.

5.2.6. Построить картину магнитного поля коаксиального кабеля, рассмотренного в задаче 5.2.4. Линии магнитной индукции проводить так, чтобы

между каждой парой соседних линий заключались приблизительно равные части суммы магнитных потоков в изоляции и в толще центрального проводника; в толще трубчатого проводника достаточно провести одну промежуточную линию магнитной индукции. Линии равного скалярного магнитного потенциала в изоляции кабеля провести так, чтобы каждый элемент сечения, ограниченный отрезками соседних линий магнитной индукции и отрезками соседних линий равного скалярного потенциала, был приблизительно квадратным.

**Решение.** При решении предыдущей задачи были получены величины магнитных потоков в толще центрального проводника  $\Phi_{\text{ц}}$  и в изоляции кабеля  $\Phi_{\text{внешн}}$  (на 1 м длины кабеля);  $\Phi_{\text{ц}} = 2 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$ ;  $\Phi_{\text{внешн}} = 3,81 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$ .

Разобьем первый из этих потоков на три части, по  $0,667 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$  каждая, а второй – на шесть частей, по  $0,635 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$ . Получившимся 5%-ным расхождением в величинах частей в первом приближении можно пренебречь. (При необходимости более точного построения нужно, например, разделить  $\Phi_{\text{ц}}$  на 10 частей, а  $\Phi_{\text{внешн}}$  – на 19 частей; тогда расхождение в величинах частей было бы ничтожным – около 0,25 %).

В двумерном (плоскопараллельном) поле линии магнитной индукции являются также линиями равного векторного потенциала. Из выражения для векторного потенциала магнитного поля в толще центрального проводника (см. решение задачи 5.2.1, а также [1, § 8-2]) следует, что квадраты радиусов следующих друг за другом линий образуют арифметическую прогрессию. Центр сечения можно рассматривать как сжавшуюся в точку линию магнитной индукции наименьшего радиуса ( $r=0$ ). Линия наибольшего радиуса совпадает с поверхностью центрального проводника, т.е. имеет радиус  $a_1$  (см. рис. 5.1). При делении потока  $\Phi_{\text{ц}}$  на три части потребуются ещё две промежуточные линии с радиусами  $r'$  и  $r''$ . Составляем арифметическую

прогрессию:

$$r'^2 - 0 = r''^2 - r'^2 = a_1^2 - r''^2.$$

В ней четыре члена (включая 0); её разность  $d = r'^2$ . величины членов:

$$r'^2 = \frac{1}{3}a_1^2; r''^2 = \frac{2}{3}a_1^2, \text{ откуда}$$

$$r' = \frac{1}{\sqrt{3}}a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}5,4 = 3,12 \text{ мм};$$

$$r'' = \sqrt{\frac{2}{3}}5,4 = 4,41 \text{ мм}.$$

Итак, в толще центрального проводника следует провести окружности с радиусами 3,12 и 4,41 мм, изображающие промежуточные линии магнитной индукции.

Скалярного магнитного потенциала в областях с токами, в частности в толще центрального проводника коаксиального кабеля, не существует.

Радиусы линий магнитной индукции в изоляции между проводниками кабеля следуют в геометрической прогрессии, первый член которой равен радиусу центрального проводника  $a_1$ , а последний – внутреннему радиусу  $a$  трубчатого проводника [1, § 8-3]. Промежуточные члены этой прогрессии обозначим символами  $r'_1, r''_1, \dots$  и т.д. При требуемом разделении потока на 6 равных частей число членов геометрической прогрессии  $n = 7$ .

Знаменатель прогрессии

$$m = n-1 \sqrt{\frac{a}{a_1}} = 6 \sqrt{\frac{14}{5,4}} = 1,172.$$

Её члены:  $a_1 = 5,4 \text{ мм}; r'_1 = a_1 m = 5,4 \cdot 1,172 = 6,33 \text{ мм}; r''_1 = 6,33 \cdot 1,172 = 7,42 \text{ мм}; r'''_1 = 8,69 \text{ мм}; r^{IV}_1 = 10,20 \text{ мм}; r^V_1 = 11,97 \text{ мм}.$

Таковы величины радиусов линий магнитной индукции в изоляции кабеля, подлежащих проведению на чертеже.

Линии равного скалярного магнитного потенциала в изоляции кабеля

имеют радиальные направления. Определим центральный угол между двумя соседними линиями. Отрезок линии равного скалярного магнитного потенциала, заключенный между  $k$ -й и  $(k-1)$ -й линиями магнитной индукции,

$$r_k - r_{k-1} = a_1 m^{k-1} - a_1 m^{k-2} = a_1 m^{k-2} (m - 1).$$

В свою очередь этот отрезок должен быть равен отрезку промежуточной  $(k - 1/2)$ -й линии магнитной индукции; радиус последней

$$r_{k-\frac{1}{2}} = a_1 m^{k-\frac{3}{2}},$$

длина её отрезка, соответствующего центральному углу  $\alpha$ , составляет

$$\alpha r_{k-\frac{1}{2}} = a_1 \alpha m^{k-\frac{3}{2}}.$$

Приравнивая величины отрезков линии магнитной индукции и линии равного скалярного магнитного потенциала, находим величину центрального угла между двумя соседними линиями равного скалярного потенциала:

$$\alpha = \frac{m-1}{\sqrt{m}} = \frac{0,172}{\sqrt{1,172}} = 0,159 \text{ рад} \approx 9^\circ.$$

Магнитный поток в толще трубчатого проводника в условиях данной задачи невелик – менее 3% общего магнитного потока кабеля. Ограничимся поэтому проведением лишь одной промежуточной линии магнитной индукции. Для разделения потока в толще трубы пополам эта промежуточная линия должна соответствовать среднему значению векторного потенциала в трубе, равному среднему арифметическому от значений  $A$ , известных для внутренней и наружной поверхностей трубы ( $A_{\text{внут}} = -3,81 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$  и  $A_{\text{нар}} = -3,976 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}$ ):

$$A_{\text{ср}} = -3,893 \times 10^{-7} \text{ Вб/м}.$$

Для нахождения радиуса этой линии  $r_x$  решаем уравнение, получаю-

щееся при подстановке числовых значений величин в выражение векторного потенциала в трубчатом проводнике (см. решение задачи 5.2.1) при  $\mu_1 = \mu_0$ ,

$$A_{\text{ср}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{a_2^2 - r_x^2}{a_2^2 - a^2} + \frac{2a_2^2}{a_2^2 - a^2} \ln \frac{r_x}{a} + 2 \ln \frac{a}{a_1} \right),$$

откуда

$$\ln r_x = \ln a - \frac{1}{2} - \left( 1 - \frac{a^2}{a_2^2} \right) \left( \frac{A_{\text{ср}} 2\pi}{\mu_0 I} + \ln \frac{a}{a_1} \right) + \frac{r_x^2}{2a_2^2},$$

или

$$\ln r_x = 2,206 + \frac{r_x^2}{450}$$

(размер  $r_x$  в мм).

Откуда  $r_x = 14,35$  мм.

5.2.7. Как изменятся решения задач 5.2.4 и 5.2.5, если материалом трубчатого проводника коаксиальной линии, приведенной на рис. 5.1, будет сталь с постоянной расчетной относительной магнитной проницаемостью в данном режиме работы  $\mu = 200$ ?

5.2.8. Определить индуктивность коаксиального кабеля, имеющего длину  $l$ , радиус центрального проводника  $a_1$ , внутренний и внешний радиусы трубы соответственно  $a$  и  $a_2$  (рис. 5.2).

**Решение.** Статическая индуктивность определяется по формуле

$$L = \frac{\Psi}{I}.$$

Магнитное потокосцепление  $\Psi$  коаксиального кабеля можно рассматривать как

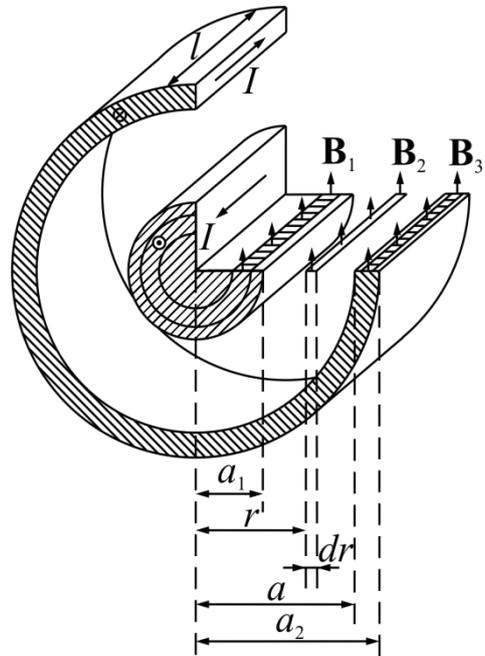


Рис. 5.2

сумму трех потокосцеплений

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_0 + \Psi_2,$$

где  $\Psi_1 = \int_0^{a_1} d\Psi_1$  – потокосцепление центрального проводника,  $\Psi_0 = \int_{a_1}^a d\Psi_0$  –

потокосцепление в пространстве между проводниками,  $\Psi_2 = \int_a^{a_2} d\Psi_2$  – пото-

косцепление внутри трубы.

Элементарный магнитный поток  $d\Phi_1$  через площадку шириной  $dr$  и длиной  $l$  (см. рис. 5.2) при  $r \leq a_1$  равен

$$d\Phi_1 = B_1 dS = \mu_{1a} H_1 l dr.$$

Подставив значение  $H_1 = \frac{Ir}{2\pi a_1^2}$ , получим

$$d\Phi_1 = \frac{\mu_{1a} I l r}{2\pi a_1^2} dr.$$

Так как во внутреннем проводнике магнитный поток  $d\Phi_1$  сцеплен только с частью тока  $I$ , которая пропорциональна отношению  $\frac{r^2}{a_1^2}$ , то маг-

нитное потокосцепление

$$\Psi_1 = \int_0^{a_1} d\Psi_1 = \int_0^{a_1} \frac{r^2}{a_1^2} d\Phi_1 = \frac{\mu_{1a} I l}{8\pi}.$$

При  $a_1 \leq r \leq a$ , т.е. в пространстве между проводниками кабеля,

$$d\Phi_0 = B_0 dS = \mu_0 H_0 l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr.$$

Так как поток  $d\Phi_0$  охватывает весь ток  $I$ , то

$$d\Psi_0 = d\Phi_0,$$

откуда

$$\Psi_0 = \int_{a_1}^a \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a}{a_1}.$$

В наружном проводнике (трубе) элементарный магнитный поток

$$d\Phi_2 = \mu_{2a} H_2 l dr.$$

Обычно  $\mu_{2a} = \mu_{1a}$ ; подставив значение  $H_2$ , получим

$$d\Phi_2 = \frac{\mu_{1a} I l (a_2^2 - r^2)}{2\pi r (a_2^2 - a^2)} dr.$$

Этот поток сцеплен с током  $I$  и частью обратного тока, равной

$$-I \frac{r^2 - a^2}{a_2^2 - a^2}.$$

Поэтому элементарное потокосцепление

$$d\Psi_2 = d\Phi_2 \left( 1 - \frac{r^2 - a^2}{a_2^2 - a^2} \right) = \frac{a_2^2 - r^2}{a_2^2 - a^2} d\Phi_2,$$

а потокосцепление

$$\Psi_2 = \int_a^{a_2} d\Psi_2 = \frac{\mu_{1a} I l}{2\pi} \left[ \frac{a_2^4}{(a_2^2 - a^2)^2} \ln \frac{a_2}{a} - \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a^2}{a_2^2 - a^2} \right].$$

Индуктивность коаксиального кабеля

$$L = \frac{\Psi_1 + \Psi_0 + \Psi_2}{I} = \frac{l\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{a}{a_1} + \frac{\mu_1 a_2^4}{(a_2^2 - a^2)^2} \ln \frac{a_2}{a} - \frac{\mu_1 a_2^2}{2(a_2^2 - a^2)} \right].$$

5.2.9. Вывести выражение индуктивности коаксиального кабеля, пользуясь формулами для векторного потенциала магнитного поля. Размеры кабеля указаны на рис. 5.2.

5.2.10. По прямому цилиндрическому стальному проводу, радиус которого  $a = 2 \text{ мм}$ , протекает постоянный ток  $I = 0,2 \text{ А}$ . Магнитная проницаемость материала провода  $\mu = 150$ . Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию внутри и вне провода. Подсчитать величину

магнитного потока внутри провода на участке длиной в 1 км. Найти внутреннее потокосцепление.

5.2.11. Почему не имеет смысла вычисление внешнего потокосцепления прямого одиночного провода с током, если обратный провод электрической цепи считается удаленным в бесконечность?

5.2.13. Вычислить индуктивность 1 км длины коаксиального кабеля (см. рис. 4.2), если  $a_1 = 1,3$  мм,  $a = 4,7$  мм,  $a_2 = 5$  мм. Магнитная проницаемость материала проводников кабеля  $\mu_1 = 1$ .

5.2.13. Определить скалярный магнитный потенциал  $\varphi_M$  однородного поля, напряженность которого  $\mathbf{H} = \mathbf{j}H_0 = \text{const}$ .

5.2.14. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  однородного магнитного поля в цилиндрических координатах, если магнитная индукция направлена параллельно оси  $z$  и равна  $B_0 = \text{const}$ . Считать, что вектор  $\mathbf{A}$  имеет только одну проекцию  $\mathbf{A} = A_\theta \mathbf{l}_\theta$ .

5.2.15. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  однородного магнитного поля в сферических координатах, если магнитная индукция направлена перпендикулярно экваториальной плоскости и равна  $B_0 = \text{const}$ . Считать, что вектор  $\mathbf{A}$  имеет только одну проекцию  $\mathbf{A} = A_\psi \mathbf{l}_\psi$ .

5.2.16. Определить векторный потенциал  $\mathbf{A}$  однородного магнитного поля в прямоугольной декартовой системе координат, если магнитная индукция направлена параллельно оси  $z$  и равна  $B_0 = \text{const}$ .

5.2.17. В однородное магнитное поле с напряженностью  $H_0 = \text{const}$  помещен круглый прямой цилиндр с радиусом  $a$  так, что ось его нормальна вектору  $H_0$  (рис. 5.3). Магнитная проницаемость материала цилиндра  $\mu_a$ , окружающей среды –  $\mu_0$ .

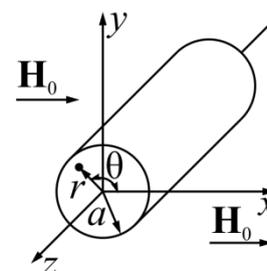


Рис. 5.3

Определить результирующее магнитное поле внутри и вне цилиндра.

Краевым эффектом пренебречь.

**Решение.** Ось  $z$  цилиндрической системы координат совместим с осью цилиндра. Пренебрегая краевым эффектом, можно считать, что векторы поля не зависят от координаты  $z$ . Задачу будем решать с помощью скалярного магнитного потенциала, удовлетворяющего уравнению

$$\nabla^2 \varphi_M = 0.$$

Для рассматриваемой задачи выражение лапласиана в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_M}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial \theta^2} = 0.$$

Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$\varphi_M = f_1(r)f_2(\theta) = f_1 f_2,$$

одна из которых зависит только от  $r$ , а другая – только от  $\theta$ .

Подставив  $\varphi_M = f_1 f_2$  в дифференциальное уравнение, получим

$$f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{f_2}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{f_1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} = 0.$$

Разделив все члены на  $f_1 f_2$  и умножив на  $r^2$ , будем иметь

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{r}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial r} = - \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2}.$$

Так как это равенство справедливо при любых значениях  $r$  и  $\theta$ , то правая и левая части должны равняться некоторой постоянной, которую обозначим через  $p^2$ ; решаемое уравнение распадается на два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 f_2}{d\theta^2} + p^2 f_2 = 0;$$

$$r^2 \frac{d^2 f_1}{dr^2} + r \frac{df_1}{dr} - p^2 f_1 = 0.$$

Решая первое уравнение получим

$$f_2 = C_1 \cos \theta r - C_2 \sin \theta r.$$

Из условий симметрии вытекает, что при переходе от  $\theta = +\theta_1$  к  $\theta = -\theta_1$  функция  $f_2$  не должна менять знака, поэтому  $C_2 = 0$ .

Так как магнитный потенциал не должен содержать функций, кратных углу  $\theta$ , то постоянная  $r$  должна равняться единице.

Следовательно,

$$f_2 = C_1 \cos \theta.$$

Решив второе уравнение, получим

$$f_1 = \frac{C_3}{r} + C_4 r.$$

Выражение скалярного магнитного потенциала для области внутри цилиндра имеет вид

$$\varphi_{M1} = f_1 f_2 = \left( K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) \cos \theta;$$

$$K_1 = C_1 C_3; \quad K_2 = C_1 C_4.$$

Для области вне цилиндра

$$\varphi_{M2} = \left( K_3 r + \frac{K_4}{r} \right) \cos \theta.$$

Напряженность магнитного поля, соответственно,  $\mathbf{H} = -\text{grad} \varphi_M$  :

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{l}_\theta H_\theta + \mathbf{l}_r H_r = \mathbf{l}_\theta \left( K_1 + \frac{K_2}{r^2} \right) \sin \theta + \mathbf{l}_r \left( -K_1 + \frac{K_2}{r^2} \right) \cos \theta;$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{l}_\theta \left( K_3 + \frac{K_4}{r^2} \right) \sin \theta + \mathbf{l}_r \left( -K_3 + \frac{K_4}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Так как напряженность магнитного поля при  $r = 0$  величина конечная, то  $K_2 = 0$ .

Так как в бесконечности влияние цилиндра не сказывается, то результирующее поле однородно; следовательно,

$$H_{2r} = H_0, \text{ или } -K_3 \cos\theta = H_0 \cos\theta,$$

откуда

$$K_3 = -H_0.$$

При  $r = a$

$$B_{1n} = B_{2n}, \text{ или } \mu\mu_0 H_{1r} = \mu_0 H_{2r}.$$

Поэтому

$$-\mu\mu_0 K_1 \cos\theta = \mu_0 \left( H_0 + \frac{K_4}{a^2} \right) \cos\theta.$$

или

$$K_1 = -\frac{1}{\mu} \left( H_0 + \frac{K_4}{a^2} \right).$$

Так как потенциал непрерывен, то при  $r = a$

$$\varphi_{M1} = \varphi_{M2}$$

или

$$K_1 a \cos\theta = \left( -H_0 a + \frac{K_4}{a} \right) \cos\theta.$$

Подставив значение  $K_1$ , получим

$$-\frac{a}{\mu} H_0 - \frac{K_4}{\mu a} = -H_0 a + \frac{K_4}{a},$$

откуда

$$K_4 = \frac{a^2(\mu - 1)}{\mu + 1} H_0.$$

Тогда

$$K_1 = -\frac{2}{\mu + 1} H_0.$$

Окончательно напряженность магнитного поля внутри цилиндра равна

$$\mathbf{H}_1 = H_0 \frac{2}{\mu + 1} (\mathbf{l}_r \cos\theta - \mathbf{l}_\theta \sin\theta).$$

Её модуль  $H_1 = H_0 \frac{2}{\mu + 1} = \text{const}$  не зависит от положения точки внутри цилиндра.

Поле внутри цилиндра будет однородным и так как  $\mu + 1 \geq 2$ , оно будет слабее внешнего поля.

Напряженность внешнего магнитного поля

$$\mathbf{H}_2 = -H_0 \left( - \left( 1 + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{l}_r \cos \theta + \left( 1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{l}_\theta \sin \theta \right).$$

Интенсивность намагничивания

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{N} \left( \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - \mathbf{H}_1 \right).$$

Магнитная индукция внутри цилиндра

$$\mathbf{B}_1 = \mu_a \mathbf{H}_1,$$

Поэтому

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{N} (\mu - 1) \mathbf{H}_1$$

или

$$J_1 = H_0 \frac{2(\mu - 1)}{(\mu + 1)}.$$

Величину  $N$  называют размагничивающим фактором. Для цилиндра, намагниченного перпендикулярно к оси,  $N = 1/2$ .

5.2.18. Решить предыдущую задачу, если  $H_0 = 2$  А/м;  $a = 5$  см;  $\mu = 200$ .

Начертить линии векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

5.2.19. Стальной шар с радиусом  $a = 10$  см помещен в однородное магнитное поле, напряженность которого  $H_0 = 1$  А/м. Магнитная проницаемость окружающей среды  $\mu = 1000$ .

Найти результирующее поле. Определить размагничивающий фактор  $N$ . Начертить картину поля.

5.2.20. Цилиндрическая труба с магнитной проницаемостью  $\mu_a = 500\mu_0$  (рис. 5.4) помещена в однородное магнитное поле с напряженностью  $H_0 = 100 \text{ А/м}$  и магнитной проницаемостью  $\mu_0$ . Размеры цилиндра указаны на рисунке.

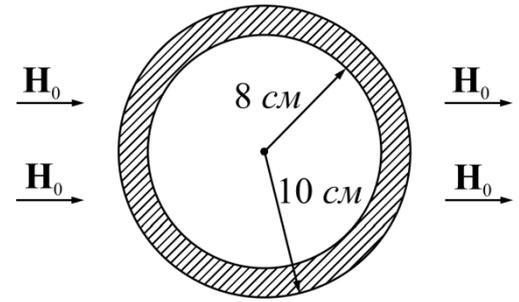


Рис. 5.4

Определить, во сколько раз напряженность магнитного поля во внутренней области меньше  $H_0$ . Трубу считать бесконечно длинной.

*Указание.* См [1, § 7-6].

5.2.21. Материал сферического экрана имеет магнитную проницаемость  $\mu = 200$ . Внешний радиус экрана  $a = 20 \text{ см}$ ; внутренний –  $b = 18 \text{ см}$ . Экран помещен в однородное магнитное поле с напряженностью  $H_0 = 100 \text{ А/м}$ .

Определить напряженность магнитного поля внутри экрана, считая, что среда вне и внутри экрана – воздух.

Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию в точках, лежащих на концах внешнего диаметра сферы, параллельно направлению  $H_0$ .

*Указание.* Использовать метод решения задачи 5.2.20 и граничные условия (4.10).

5.2.23. В тороидальном стальном сердечнике с радиусом  $R = 20 \text{ см}$  имеется воздушный зазор  $\delta = 0,5 \text{ мм}$ ; радиус сечения сердечника  $r = 0,5 \text{ см}$  (рис. 5.5). Намагничивающая обмотка имеет  $w = 500$  витков и намотана равномерно по всему сердечнику. Ток в обмотке  $I = 2 \text{ А}$ . Относительная магнитная проницаемость  $\mu = 200$ .

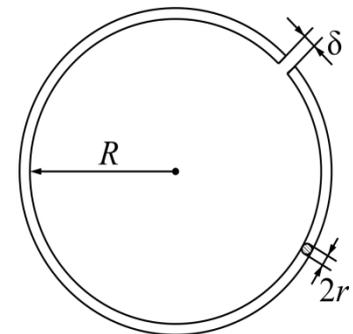


Рис. 5.5

Определить средние величины напряженности магнитного поля и маг-

нитной индукции в стали и в воздушном зазоре, а также намагниченности и напряженности размагничивающего поля в стали. Найти величину магнитной энергии в воздушном зазоре и усилие, действующее на поверхность полюса. Среднее сечение магнитного потока в воздушном зазоре приближенно считать на 10 % выше, чем в стали.

*Указание.* См. [1, §§ 7-4, 7-5].

5.2.23. Решить предыдущую задачу при воздушном зазоре: а) уменьшенном до 0,25 мм, б) увеличенном до 1 мм.

5.2.24. Вследствие увеличения тока в намагничивающей обмотке до  $I = 4$  А относительная магнитная проницаемость стали тороида, описанного в условии задачи 5.2.22, понизилась до  $\mu = 140$ . Найти, как изменились все величины магнитного поля.

5.2.25. Постоянный магнит кольцеобразной формы обеспечивает в воздушном зазоре  $l_b = 0,25$  см магнитный поток  $\Phi = 10^{-4}$  В·с. Материал – кобальтовая сталь, имеющая максимум магнитной энергии на единицу объема  $W_m = 3700$  Дж/м<sup>3</sup>. при оптимальном значении магнитной индукции  $B_m = 0,62$  Вб/м<sup>2</sup>. Определить напряженность размагничивающего поля, размагничивающий фактор, сечение и объем магнита и величину магнитной энергии в воздушном зазоре.

**Решение.** Поставим магнит в оптимальные условия работы, т.е. при индукции  $B_m = 0,62$  Вб/м<sup>2</sup>.

Напряженность (размагничивающего) поля в материале магнита

$$H_p = \frac{W_m}{B_m} = \frac{3700}{0,62} = 5960 \frac{А}{м}.$$

Размагничивающий фактор

$$N = \mu_0 \frac{H_p}{B_m} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{5960}{0,62} = 0,0121.$$

Требуемые размеры магнита:

$$\text{длина } l = \frac{l_{\text{в}}}{N} = \frac{0,2}{0,0121} = 16,55 \text{ см};$$

$$\text{сечение } S = \frac{\Phi}{B_m} = \frac{10^{-4}}{0,62} = 1,61 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,61 \text{ см}^2;$$

$$\text{объем } V = lS = 26,7 \text{ см}^3.$$

Магнитная энергия в воздушном зазоре

$$W_{\text{в}} = \frac{1}{2} W_{\text{м}} V = 0,093 \text{ Дж}.$$

5.2.26. Решить предыдущую задачу для случая, когда материалом магнита будет сплав «магнико», у которого

$$W_{\text{м}} = 19000 \text{ Дж/м}^3 \text{ при } B_m = 0,81 \text{ Вб/м}^2.$$

5.2.27. Решить задачу 5.2.26 для случая, когда материалом магнита будет хромистая сталь, у которой  $W_{\text{м}} = 850 \text{ Дж/м}^3$  при  $B_m = 0,64 \text{ Вб/м}^2$ .

5.2.28. Решить задачу 5.2.25 для воздушного зазора  $l_{\text{в}} = 0,5 \text{ см}$ .

5.2.29. По кольцевому витку с радиусом  $R = 8,5 \text{ см}$  (рис. 5.6) протекает ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найти напряженность магнитного поля и его скалярный потенциал в

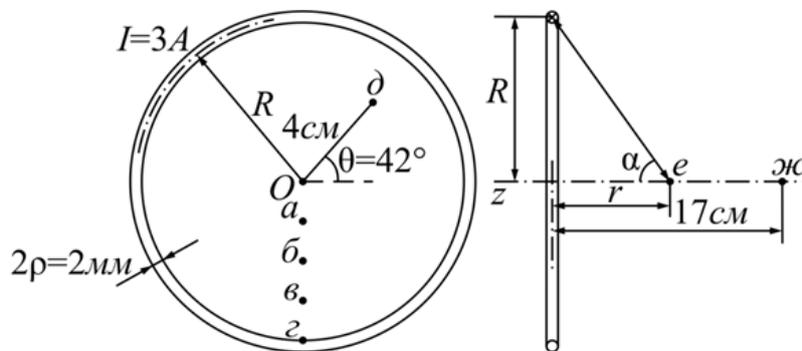


Рис. 5.6

точках е и ж, лежащих на оси витка, на расстояниях от его центра, соответственно, 8,5 и 17 см, а также в центре витка  $O$ .

Указание. См. [1, §

8-12].

5.2.30. Найти напряженность магнитного поля  $H$  и его скалярный потенциал  $\Phi_{\text{м}}$  в точках  $a$ ,  $б$ ,  $в$ ,  $г$  и  $д$ , лежащих в плоскости витка, имеющего средний радиус  $R = 8,5 \text{ см}$  и несущего ток  $I = 3 \text{ А}$  (рис. 5.6). Расстояния  $x$  от указанных точек до центра витка  $O$  соответственно равны: 2,12 см; 4,25 см; 6,38 см; 8,5 см и 4,00 см. Построить кривую  $H = f(x)$ .

5.2.31. Каков должен быть средний радиус витка  $R$ , несущего ток  $I = 3$

А для того, чтобы магнитная индукция в точке  $e$ , лежащей в воздухе на оси витка, на расстоянии  $r = 8,5$  см от центра  $O$ , составляла  $0,8 \cdot 10^{-5}$  Вб/м<sup>2</sup> (см. рис. 5.6)?

*Указание.* См. [1, § 8-12].

5.2.33. Каков должен быть средний радиус витка  $R$ , несущего ток  $I = 3$  А для того, чтобы магнитная индукция в центре витка равнялась  $0,8 \cdot 10^{-5}$  Вб/м<sup>2</sup>?

5.2.33. Найти средний радиус витка  $R$ , несущего ток  $I = 3$  А для того, чтобы магнитная индукция в точках, лежащих в плоскости витка на расстоянии  $x = 0,9 R$  от центра, была равной  $1 \cdot 10^{-4}$  Вб/м<sup>2</sup>.

**Решение.** При  $x = 0,9R$  параметр  $k = x/R = 0,9$ . Соответствующее значение эллиптического интеграла второго рода  $E(k) = 1,165$  [2, 3].

Радиус витка находится по формуле

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi R (1 - k^2)} E(k),$$

откуда

$$R = \frac{\mu_0 I E(k)}{B_z \pi (1 - k^2)} = 7,35 \times 10^{-2} \text{ м} = 7,35 \text{ см}.$$

5.2.34. Используя условия предыдущей задачи, найти магнитную индукцию в точках, лежащих в плоскости витка на расстоянии от центра  $x = 6$  см; то же, при  $x = 3$  см.

5.2.35. Рассчитать индуктивность круглого витка с радиусом  $R = 1,5$  см, изготовленного из медной проволоки, имеющей радиус  $a = 1$  мм.

**Решение.** Расчет проведем по приближенной формуле Неймана [1, § 8-12]:

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right) = 5,71 \times 10^{-8} \text{ Гн}.$$

5.2.36. Каков должен быть радиус круглого витка из медной проволоки,

радиус сечения которой  $a = 1$  мм, если индуктивность витка равна: а)  $1 \cdot 10^{-8}$  Гн; б)  $10^{-7}$  Гн; в)  $10^{-6}$  Гн.

*Указание.* Корни получающегося в процессе решения задачи уравнения вида  $R \ln R + A_1 R = A_2$  находятся путем подбора.

5.2.37. Найти напряженность магнитного поля  $H$  и скалярный магнитный потенциал  $\varphi_M$  в центре соленоида  $O$ , в точках  $m$  и  $n$ , лежащих на концах его оси и в нескольких промежуточных точках. Соленоид представлен на рис. 5.7 в разрезе. Построить кривую  $H = f(z)$ , где  $z$  – расстояние от центра вдоль оси. Размеры соленоида: длина  $l = 10$  см; средний радиус  $R = 10$  см; число витков  $w = 150$ . Ток в обмотке  $I = 1$  А. Ферромагнитного сердечника нет.

*Указание.* См. [1, § 8-13].

5.2.38. Рассчитать индуктивность соленоида, описанного в условии предыдущей задачи, и найти энергию его магнитного поля.

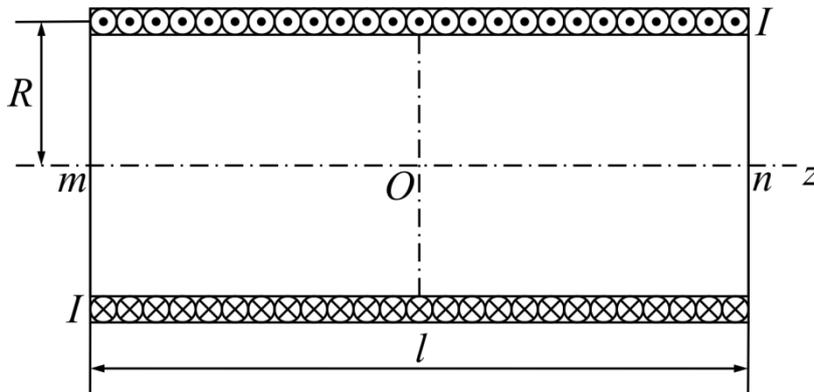


Рис. 5.7

5.2.39. Решить задачу 5.2.37 для укороченного соленоида: а)  $l = 5$  см и б)  $l = 1$  см; остальные данные – без изменений.

5.2.40. Найти длину однослойного соле-

ноида без ферромагнитного сердечника, имеющего средний радиус  $R = 1,5$  см, если на 1 см длины укладывается  $w/l = 12$  витков, а индуктивность равна  $0,1$  мГн.

*Указание.* Получающееся в процессе решения уравнение типа  $lk_L = A$  решается путем подбора, руководствуясь таблицей значений  $k_L = f(l/(2R))$  [1, § 8-13].

## ГЛАВА 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

### 6.1. Основные формулы

Уравнения Максвелла для непроводящей среды ( $\gamma = 0$ ):

$$[\nabla, \mathbf{H}] = \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (6.1)$$

$$[\nabla, \mathbf{E}] = \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (6.2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad (6.3)$$

$$\nabla \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (6.4)$$

Уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$[\nabla, \dot{\mathbf{H}}_m] = \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m; \quad (6.5)$$

$$[\nabla, \dot{\mathbf{E}}_m] = \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_m; \quad (6.6)$$

$$\nabla \dot{\mathbf{E}}_m = \text{div } \dot{\mathbf{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon_a}; \quad (6.7)$$

$$\nabla \dot{\mathbf{H}}_m = \text{div } \dot{\mathbf{H}}_m = 0. \quad (6.8)$$

Теорема Умова-Пойнтинга для диэлектрика без потерь:

$$-\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t}, \quad (6.9)$$

где  $[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{\Pi}$  – вектор Пойнтинга.

Энергия электромагнитного поля:

$$W_{\text{эм}} = W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (6.10)$$

Параметры волны:

коэффициент фазы:

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{v}; \quad (6.11)$$

длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_\phi}{f}; \quad (6.12)$$

волновое сопротивление

$$Z_c = R_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}; \quad (6.13)$$

фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda. \quad (6.14)$$

Обобщенные (запаздывающие) электродинамические потенциалы:

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_a \boldsymbol{\delta}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi r} dV; \quad (6.15)$$

$$\varphi = \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi \varepsilon_a r} dV. \quad (6.16)$$

Зависимость между векторами поля и обобщенными потенциалами:

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad (6.17)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_a} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (6.18)$$

$$\nabla \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6.19)$$

Основные уравнения электромагнитного поля, выраженные через обобщенные потенциалы:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \boldsymbol{\delta}; \quad (6.20)$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (6.21)$$

*Граничные условия* в электромагнитном поле:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0; \quad (6.22)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma; \quad (6.23)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0; \quad (6.24)$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0. \quad (6.25)$$

Рассмотрим теперь отдельно частный случай *плоской волны*, распространяющейся в однородной среде без потерь (диэлектрике). Векторы  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  однородной плоской волны удовлетворяют уравнениям Максвелла без сторонних источников. Поэтому в однородной среде без потерь  $\dot{\mathbf{E}}$  можно определить из системы уравнений Максвелла с вещественным волновым числом  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ ,  $\omega = 2\pi f$ , где  $f$  – частота колебаний:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.26)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{i\omega\mu_a} \text{rot} \dot{\mathbf{E}}. \quad (6.27)$$

Поскольку в однородной плоской волне составляющие  $\dot{\mathbf{E}}$  могут зависеть только от одной координаты  $z$ , перпендикулярной плоским волновым поверхностям, то уравнение (6.26) примет вид:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0, \quad \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0, \quad E_z = 0. \quad (6.28)$$

Дифференциальные уравнения второго порядка для  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  (6.28) имеют общие решения:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-ikz} + \dot{B}_0 e^{ikz}, \quad \dot{E}_y = \dot{C}_0 e^{-ikz} + \dot{D}_0 e^{ikz}, \quad (6.29)$$

где  $\dot{A}_0, \dot{B}_0, \dot{C}_0, \dot{D}_0$  – произвольные постоянные интегрирования, представляющие собой комплексные амплитуды вектора поля при  $z = 0$  (например,

$\dot{A}_0 = A_m e^{i\varphi_a}$ ). Подставляя (6.29) в (6.27), определим составляющие  $\dot{\mathbf{H}}$ :

$$\dot{H}_x = \frac{1}{Z_c} (-\dot{C}_0 e^{-ikz} + \dot{D}_0 e^{ikz}), \quad \dot{H}_y = \frac{1}{Z_c} (\dot{A}_0 e^{-ikz} - \dot{B}_0 e^{ikz}), \quad \dot{H}_z = 0,$$

где  $Z_c$  – характеристическое сопротивление среды, которое есть величина постоянная, зависящая от параметров среды, измеряемая в Ом и определяемая

как  $Z_c = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ .

Определим векторы  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  в области  $V$ , размеры которой малы по сравнению с расстоянием до источника  $R$ . Введем декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $Z$  которой проведена вдоль радиуса - вектора  $r_0$ , соединяющего середину вибратора  $Q$  с точкой

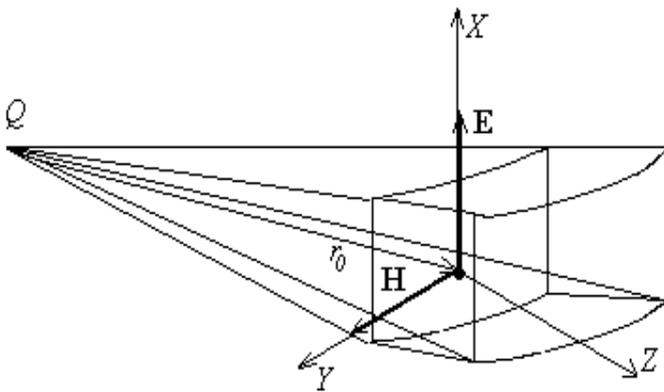


Рис. 6.1

принятой за начало координат (рис. 6.1). В пределах области  $V$  можно пренебречь изменением амплитуд векторов  $\dot{\mathbf{E}}_m$  и  $\dot{\mathbf{H}}_m$  и, кроме того, считать, что их фазы зависят только от координаты  $z$ , т.е. считать, что  $\sin \theta / r = \text{const}$ , а  $\exp(-ikr) = \exp[-ik(r_0 + z)]$ . Запишем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_0 \exp(-ikz), \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \frac{[\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{E}}_0]}{Z_c} \exp(-ikz). \quad (6.30)$$

В (6.30) учтено, что векторы  $\dot{\mathbf{E}}_m$  и  $\dot{\mathbf{H}}_m$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны (оси  $Z$ ). Ориентация векторов  $\dot{\mathbf{E}}_m$  и  $\dot{\mathbf{H}}_m$  относительно осей  $X$  и  $Y$  зависит от ориентации источника  $Q$ , создающего поле. В общем случае эти векторы могут иметь как  $x$ , так и  $y$  составляющие, связанные соотношениями:

$$\dot{E}_{xm} = Z_c \dot{H}_{ym}, \quad \dot{E}_{ym} = -Z_c \dot{H}_{xm}.$$

Поверхности равных фаз в данном случае определяются уравнением  $z = \text{const}$ , т.е. представляют собой плоскости, перпендикулярные оси  $Z$ . Электромагнитную волну, поверхности равных фаз которой представляют собой семейство параллельных плоскостей, в пределах рассматриваемой области  $V$ , называют *однородной плоской волной*.

## 6.2. Задачи

6.2.1. Проекция векторов поля, токи и заряды изменяются во времени по синусоидальному закону. Записать уравнения Максвелла в комплексной форме в развернутом виде.

6.2.3. Вывести из уравнений Максвелла волновые уравнения для однородной непроводящей среды, считая плотность объемных зарядов  $\rho = 0$ . Параметры среды:  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ ;  $\mu_a = \mu_0$ ;  $\gamma = 0$ .

**Решение.** Уравнение Максвелла в рассматриваемом случае можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{H} &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Возьмем ротор от ротора напряженности электрического поля:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{H})}{\partial t}.$$

Подставив значение  $\text{rot } \mathbf{H}$  и раскрыв выражение «ротор от ротора» (1.22), получим:

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Так как  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , то

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Полученное уравнение называется *волновым уравнением*.

Аналогично получим

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Величину  $\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0$  можно обозначить через  $1/v^2$ . Следовательно, величина

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м}}{\sqrt{\varepsilon} \text{ с}}$$

представляет собой скорость распространения электромагнитной волны в данной неограниченной среде.

6.2.3. Записать волновые уравнения, полученные в задаче 6.2.2, в комплексной форме, считая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Im}\{\dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}\}, \\ \mathbf{H} &= \text{Im}\{\dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}\}. \end{aligned}$$

6.2.4. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в неограниченном пространстве. Диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ , магнитная проницаемость  $\mu_a = \mu_0$ . Удельная проводимость  $\gamma = 0$ . Амплитуда напряженности электрического поля  $E_m = 50 \text{ мВ/м}$ . Угловая частота  $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

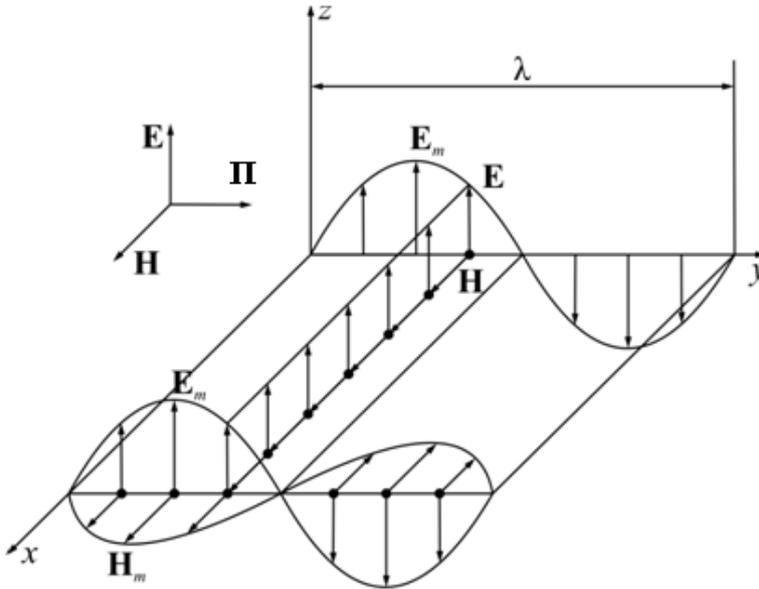
Составить уравнение волны и определить её параметры. Определить величину и направление векторов: напряженности поля  $\mathbf{H}$ , Пойнтинга  $\mathbf{P}$ , плотности тока смещения  $\mathbf{\delta}_{\text{см}}$ .

**Решение.** Расположим координатные оси так, как показано на рис. 6.2. Ось  $z$  направим параллельно вектору  $\mathbf{E}$ . Будем считать, что волна распространяется в направлении оси  $y$ . По условию волна линейно поляризована, поэтому в пространстве  $\mathbf{E}$  будем сохранять неизменное направление проек-

ции вектора  $\mathbf{E}$ :

$$E_x = 0; \quad E_y = 0;$$

$$E_z = E_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}\{\dot{E}_m e^{i\omega t}\}.$$



Для плоской волны в плоскости, нормальной к направлению распространения, вектор  $\mathbf{E}$  должен иметь одну и ту же величину. Следовательно,  $E_m$  и  $\psi$  будут функциями только одной координаты  $y$ .

Рис. 6.2

Рассмотрим второе уравнение Максвелла в комплексной форме (6.6).

Развернув выражение ротора, получим

$$\frac{\partial E_{zm}}{\partial y} = -i\omega\mu_a \dot{H}_{xm};$$

$$0 = -i\omega\mu_a \dot{H}_{ym};$$

$$0 = -i\omega\mu_a \dot{H}_{zm},$$

следовательно,

$$\dot{H}_{ym} = 0 = H_{zm};$$

$$\dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial E_{zm}}{\partial y}.$$

Вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  имеет только одну проекцию  $H_x$ , нормальную и к вектору напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , и к направлению распространения волны  $y$ .

Рассмотрим первое уравнение Максвелла (6.5). Раскрыв выражение ротора, и учитывая, что векторы поля имеют по одной проекции, получим

$$-\frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} = i\omega\epsilon_0 \dot{E}_{xm}.$$

Подставив выражение напряженности магнитного поля и заменив частные производные обычными, получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial y^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \dot{E}_m.$$

Обозначим  $\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \beta^2$ , тогда

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial y^2} + \beta^2 \dot{E}_m = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\dot{E}_m = \dot{C}_1 e^{i\beta y} + \dot{C} e^{-i\beta y},$$

где  $\dot{C}_1$  и  $\dot{C}$  – постоянные интегрирования (комплексные числа).

Так как волна распространяется в неограниченном пространстве в направлении  $+y$ , то отражений не будет, а поэтому  $\dot{C}_1 = 0$ . Следовательно,

$$\dot{E}_m = \dot{C} e^{-i\beta y}.$$

По условию амплитуда напряженности электрического поля

$$E_m = 5 \cdot 10^{-2} \frac{B}{м}.$$

Следовательно,

$$C = 5 \cdot 10^{-2} \frac{B}{м}.$$

Аргумент постоянной  $\dot{C}$  можно задать произвольно; примем его равным нулю. Тогда

$$\dot{E}_m = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i\beta y}.$$

Коэффициент фазы

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{3} м^{-1}.$$

Следовательно,

$$E_m = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i\frac{y}{3}} B/m.$$

Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{k}E_z = \mathbf{k} \cdot \text{Im}\{E_m e^{i\omega t}\} = \mathbf{k} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(10^8 t - \frac{y}{3}\right) B/m.$$

Мгновенное значение вектора плотности тока смещения

$$\mathbf{\delta}_{\text{см}} = \mathbf{k}\delta_z = \mathbf{k}\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{k}44 \cdot 10^{-6} \sin\left(10^8 t - \frac{y}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \frac{A}{M^2}.$$

Найдем величину вектора напряженности магнитного поля  $H = H_x$ .

Комплексная амплитуда

$$\dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial E_{zm}}{\partial y} = \frac{E_m}{Z_c}.$$

Волновое сопротивление в рассматриваемой задаче

$$Z_c = R_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$$

представляет собой вещественное число. Подставив числовые значения, получим величину комплексной амплитуды напряженности магнитного поля:

$$\dot{H}_m = H_{xm} = 1,33 \cdot 10^{-4} e^{-i\frac{y}{3}} A/m.$$

Мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{i}H_x = \mathbf{i}1,33 \cdot 10^{-4} \sin\left(10^8 t - \frac{y}{3}\right) \frac{A}{m}.$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{c}.$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_\phi}{f} = 18,84 \text{ м}.$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] &= i \cdot 6,65 \cdot 10^{-6} \sin^2(10^8 t - y/3) = \\ &= i \cdot 3,33 \cdot 10^{-6} \left\{ 1 - \cos 2(10^8 t - y/3) \right\} \text{ Вм/м}^2.\end{aligned}$$

Среднее значение вектора Пойнтинга:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ Вм/м}^2.$$

определяет количество энергии, которое проходит за одну секунду через  $1 \text{ м}^2$  площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны.

6.2.5. Найти мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{P}$  рассмотренных в задаче 6.2.4, в моменты:  $t = 0$ ;  $t = 10^{-8} \text{ с}$  при  $y = 1 \text{ м}$ .

6.2.6. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $y$  в неограниченном пространстве, заполненном диэлектриком, у которого  $\epsilon_a = 4\epsilon$ ;  $\mu_a = \mu_0$  и  $\gamma = 0$ . Ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{E}$ . В момент  $t = 0$  в точке  $y = 0$  напряженность электрического поля  $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$ .

Найти численное значение напряженности электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также вектора Пойнтинга  $\mathbf{P}$  в точке  $y = 300 \text{ м}$  в момент  $t = 1 \text{ мкс}$ , если частота  $f = 10^7 \text{ Гц}$ .

6.2.7. Найти длину волны  $\lambda$ , фазовую скорость  $v_\phi$ , волновое сопротивление  $Z_c$  и коэффициент фазы  $\beta$  для волны, рассмотренной в задаче 6.2.6.

6.2.8. Определить параметры плоской гармонической волны в диэлектрике, у которого  $\epsilon_a = 16\epsilon_0$ ;  $\mu_a = \mu_0$  и  $\gamma = 0$ , для частот: а)  $f = 50 \text{ Гц}$ ; б)  $f = 10^9 \text{ Гц}$ .

6.2.9. Определить коэффициент фазы  $\beta$ , фазовую скорость  $v_\phi$ , волно-

вое сопротивление  $Z_c$  и частоту  $f$  для плоской гармонической волны в воздухе и в воде для:  $\lambda = 3 \text{ см}$ ,  $\lambda = 300 \text{ м}$ ,  $\lambda = 3 \text{ км}$ , считая, что  $\epsilon_{\text{возд}} = 1$  и  $\mu_{\text{возд}} = 1$ , а  $\epsilon_{\text{воды}} = 81$ ;  $\mu_{\text{воды}} = 1$ .

6.2.10. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в неограниченном пространстве, заполненном диэлектриком, удельная проводимость которого  $\gamma = 0$ . Направление распространения  $l$  составляет с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Написать выражения комплексных амплитуд векторов напряженности электрического и магнитного полей в точке  $\mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ , если известен вектор  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$ .

6.2.11. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется по направлению оси  $y$  и при  $y = 0$  переходит из одного диэлектрика в

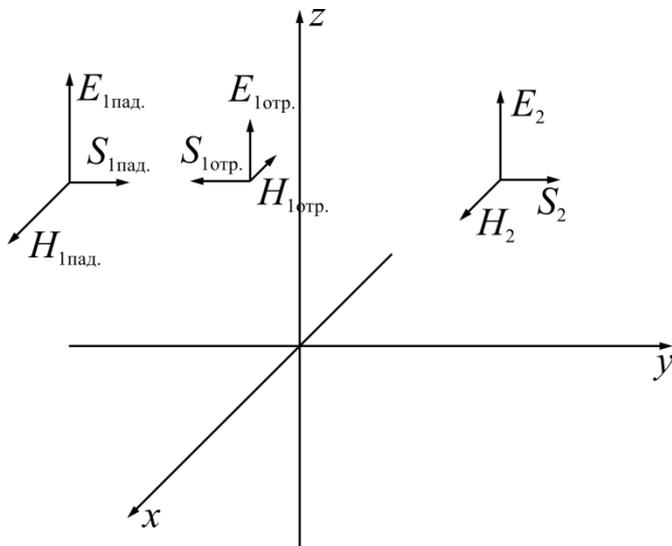


Рис. 6.3

другой ( $S_1$  и  $S_2$  – волновые поверхности электромагнитной волны в первом и во втором диэлектрике). Ось  $z$  параллельна направлению вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 6.3). Параметры среды следующие:

$$-\infty \leq y \leq 0; \epsilon_1 = 1; \mu_1 = 1; \gamma_1 = 0;$$

$$0 \leq y \leq \infty; \epsilon_2 = 4; \mu_2 = 1; \gamma_2 = 0.$$

Угловая частота  $\omega = 3 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ . Амплитуда вектора напряженности электрического поля при  $y = 0$  равна  $E_m = 1 \text{ мВ/м}$ .

Требуется найти величину векторов напряженности электрического и магнитного полей.

**Решение.** В области  $0 \leq y \leq \infty$  не будет отраженных волн, так как она не ограничена в направлении распространения. Комплексная амплитуда напряженности электрического поля в этой области

$$\dot{E}_{2m} = E_{2m} e^{-i\beta_2 y}.$$

Коэффициент фазы

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0 \mu_0} = 2 \text{ м}^{-1}.$$

По условию  $E_{2m} = 1 \text{ мВ/м} = 10^{-3} \text{ В/м}$ , поэтому  $\dot{E}_{2m} = 10^{-3} e^{-i2y} \text{ В/м}$   
 Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{k} 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^8 t - 2y) \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Волновое сопротивление среды с  $\varepsilon_2, \mu_2$ :

$$Z_{c2} = R_{c2} = \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_2}} \approx 188 \text{ Ом}.$$

Следовательно, вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{i} H_x = \mathbf{i} 5,32 \times 10^{-6} \times \\ \times \sin(3 \times 10^8 t - 2y) \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

В области  $-\infty \leq y \leq 0$  имеют место и падающие, и отраженные от поверхности раздела двух сред волны, поэтому комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного полей будут следующие:

$$\dot{E}_{1m} = \dot{C}_1 e^{-i\beta_1 y} + \dot{C}_2 e^{-i\beta_1 y}; \\ \dot{H}_{1m} = \frac{C_1}{Z_{c1}} e^{-i\beta_1 y} + \frac{C_2}{Z_{c1}} e^{-i\beta_1 y}.$$

Для определения постоянных интегрирования  $\dot{C}_1$  и  $\dot{C}_2$  надо использовать граничные условия:

при  $y = 0$

$$\dot{E}_{1m} = \dot{E}_{2m}; \dot{H}_{1m} = \dot{H}_{2m},$$

или

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = \dot{E}_m;$$

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} \dot{E}_m,$$

откуда

$$\dot{C}_1 = \dot{E}_m \frac{Z_{c2} + Z_{c1}}{2Z_{c2}};$$

$$\dot{C}_2 = \dot{E}_m \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{2Z_{c2}}.$$

Волновое сопротивление в среде с  $\varepsilon_1, \mu_1$

$$Z_{c1} = R_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом.}$$

Следовательно, коэффициент прохождения

$$\frac{Z_{c2} + Z_{c1}}{2Z_{c2}} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

коэффициент отражения

$$\frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{2Z_{c2}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Коэффициент фазы

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1 \text{ м}^{-1}.$$

Комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей равны

$$\dot{E}_{1m} = 0,75 \cdot 10^{-3} e^{-iy} + 0,25 \cdot 10^{-3} e^{-iy} \text{ В/м ,}$$

$$\dot{H}_{1m} = 1,99 \cdot 10^{-6} e^{-iy} + 0,66 \cdot 10^{-6} e^{-iy} \text{ А/м ,}$$

а соответствующие векторы в мгновенных значениях будут

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{k} \{0,75 \cdot 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^8 t - y) + 0,25 \cdot 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^8 t + y)\};$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{i} \{1,99 \cdot 10^{-6} \sin(3 \cdot 10^8 t - y) + 0,66 \cdot 10^{-6} \sin(3 \cdot 10^8 t + y)\}.$$

6.2.13. Определить коэффициенты отражения и прохождения, используя условия задачи 6.2.11 при изменении направления распространения на противоположное.

6.2.13. Пространство разделено на три области (рис. 6.4):

- 1)  $-\infty \leq y \leq -d$ ;
- 2)  $-d \leq y \leq 0$ ;
- 3)  $0 \leq y \leq \infty$ .

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в направлении оси  $y$ .

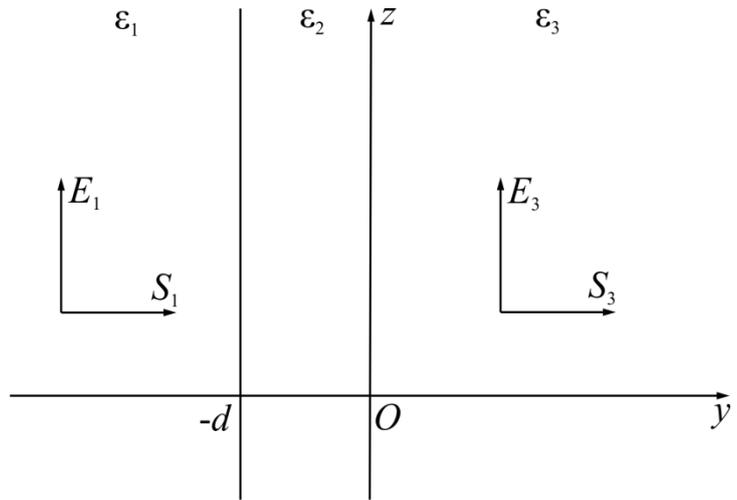


Рис. 6.4

Волна линейно поляризована  $\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}$ . Диэлектриче-

ская проницаемость среды в первой области  $\epsilon_1$ ; во второй  $\epsilon_2$ ; в третьей  $\epsilon_3$ . Магнитные проницаемости всех трёх областей одинаковы:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ . Удельная проводимость  $\gamma$  повсюду равна нулю.  $S$  – волновая поверхность электромагнитной волны в соответствующей области.

Найти минимальное значение  $d$  и соотношение между  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ , при котором в первой области не будет отраженной волны.

6.2.14. Используя условия задачи 6.2.13, найти  $\epsilon_2$  и  $d$  при  $\epsilon_1 = \epsilon_3$ .

6.2.15. Найти векторы поля в случае задачи 6.2.13, если  $\epsilon_1 = 2$ ;  $\epsilon_2 = 4$ ;  $\epsilon_3 = 8$ ;  $f = 10^8$  Гц;  $d = 37,5$  см, и при  $y = 0$ ,  $H_{3m} = 2$  мА/м.

6.2.16. Найти величину электродвижущей силы  $\mathcal{E}$ , которую наводит в контуре  $abda$  (рис. 6.5) волна, рассмотренная в задаче 6.2.4

Длина сторон контура  $da = db = 3,14$  м.

Указание. Задачу решить двумя способами:

- 1) использовать выражение напряженности электрического поля;
- 2) использовать выражение напряженности магнитного поля.

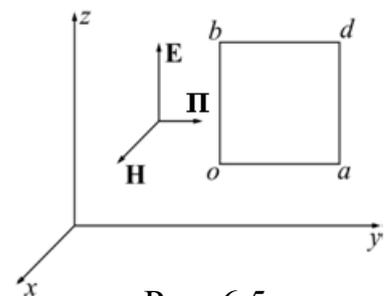


Рис. 6.5

6.2.17. Определить поле элементарного электрического излучателя, если векторный потенциал поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{k} \frac{\mu_a I_m l}{4\pi r} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

где  $I_m$  – амплитуда тока в излучателе;  $l \ll r$  – длина излучателя;  $r$  – расстояние от излучателя до точки, в которой определяется векторный потенциал;  $\lambda$  – длина волны;  $\mu_a = \mu_0$  – магнитная проницаемость среды.

Среда вокруг излучателя неограниченная, однородная; её диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ , а удельная проводимость  $\gamma = 0$ .

**Решение.** Выбираем сферическую систему координат и располагаем излучатель в её центре по вертикальной оси (рис. 6.6, а). Векторный потенциал будет иметь две проекции:

$$A_r = \frac{\mu_0 I_m l \cos\theta}{4\pi r} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right);$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 I_m l \sin\theta}{4\pi r} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

которые не зависят от координаты  $\psi$ . Комплексные амплитуды этих проекций будут, соответственно,

$$A_{rm} = \frac{\mu_0 I_m l \cos\theta}{4\pi r} e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}}; \quad A_{\theta m} = \frac{\mu_0 I_m l \sin\theta}{4\pi r} e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \pi\right)}.$$

Напряженность магнитного поля определится по формуле:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}.$$

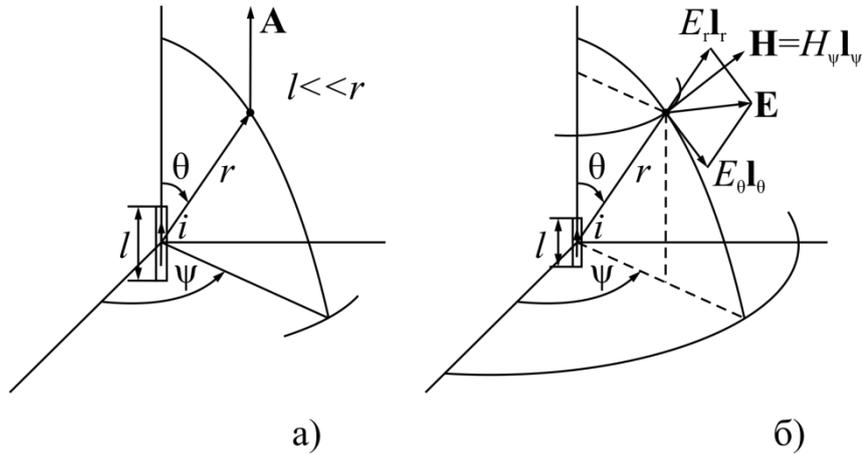


Рис. 6.6

Раскрывая выражение ротора в сферической системе координат и учитывая, что  $A_{rm}$  и  $A_{\theta m}$  не зависят от координаты  $\psi$ , получим:

$$\dot{H}_{rm} = 0; \dot{H}_{\theta m} = 0; \dot{H}_{\psi m} = \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\theta m} r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_{rm}}{\partial \theta}.$$

Следовательно, у вектора напряженности магнитного поля будет одна проекция, комплексная амплитуда которой

$$\dot{H}_{\psi m} = \frac{I_m l \pi \sin \theta}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 + i \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \right\} e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda}}.$$

На расстоянии  $r = \lambda/(2\pi)$  от излучателя действительная и мнимая составляющие выражения, стоящего в скобке, будут одинаковы.

На расстоянии  $r \ll \lambda/(2\pi)$  (так называемая ближняя зона) мнимой составляющей выражения, стоящего в скобках, можно пренебречь, а величину  $e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda}}$  считать равной единице. Тогда

$$H_{\psi m} = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

Следовательно, в ближней зоне напряженность магнитного поля определяется по закону Био-Савара так же, как и в случае постоянного во времени магнитного поля.

Мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля в ближней зоне

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}_\psi H_\psi = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \omega t.$$

Фаза напряженности магнитного поля не зависит от расстояния и совпадает с фазой тока излучателя.

При  $r \gg \lambda/(2\pi)$  (так называемая дальняя, или волновая, зона) можно пренебречь действительной составляющей выражения, стоящего в скобках, тогда

$$\dot{H}_{\psi m} = \frac{I_m l \sin \theta}{2\lambda r} e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)};$$

а мгновенное значение

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}_\psi \frac{I_m l \sin \theta}{2\lambda r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right).$$

Напряженность электрического поля определится по первому уравнению Максвелла (6.5). Раскрыв выражение ротора в сферической системе координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\dot{H}_{\psi m} \sin \theta)}{\partial \theta} &= i\omega \varepsilon_a \dot{E}_{rm}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(\dot{H}_{\psi m} r)}{\partial r} &= i\omega \varepsilon_a \dot{E}_{\theta m}; \\ 0 &= i\omega \varepsilon_a \dot{E}_{\psi m}. \end{aligned}$$

Подставив в эти выражения найденное выше значение  $\dot{H}_{\psi m}$ , получим проекцию напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{rm} &= \frac{2\pi^2 I_m l \cos \theta}{\omega \varepsilon_0 \lambda^3} e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3 + i \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 \right\}; \\ \dot{E}_{\theta m} &= \frac{2\pi^2 I_m l \sin \theta}{\omega \varepsilon_0 \lambda^3} e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3 + i \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 - \frac{\lambda}{2\pi r} \right\}; \\ \dot{E}_{\psi m} &= 0. \end{aligned}$$

В ближней зоне приближенно

$$\dot{E}_{rm} = \frac{I_m l \cos \theta}{2\pi \omega \varepsilon_0 r^3} e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\dot{E}_{\theta m} = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^3} e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

и мгновенное значение вектора напряженности электрического поля будет

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_r E_r + \mathbf{1}_\theta E_\theta = -\frac{I_m l}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^3} (\mathbf{1}_r 2\cos\theta + \mathbf{1}_\theta \sin\theta) \cos\omega t.$$

Фаза напряженности электрического поля также не зависит от  $r$ .

В этом выражении можно заметить сходство с уравнением для напряженности электростатического диполя, заряд которого

$$Q_m = \frac{I_m}{\omega}.$$

Следовательно, в ближней зоне не учитывается явление запаздывания и явление бегущей волны, так как множитель  $e^{-i\frac{\pi r}{\lambda}}$ ; принят равным единице. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю. Мощность электрического и магнитного полей реактивная, она меняется во времени по синусоидальному закону с двойной частотой, но в среднем за период равна нулю.

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изображены на рис. 6.6, б.

В волновой или дальней зоне, для которой  $r/\lambda \gg 1$ , можно считать, что

$$E_{rm} \approx 0;$$

$$\dot{E}_{\theta m} = \frac{I_m \pi l \sin \theta}{\omega\varepsilon_0 \lambda^2 r} e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)};$$

и мгновенное значение вектора напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}_\theta E_\theta = \mathbf{1}_\theta \frac{I_m Z_c l \sin \theta}{2\lambda r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

где  $Z_c = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon_0 \lambda} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$  – волновое сопротивление среды.

В волновой зоне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны, совпадают по фазе и отношение их амплитуд равно постоянной величине  $Z_c$ .

Электромагнитное поле распространяется в виде сферических волн со

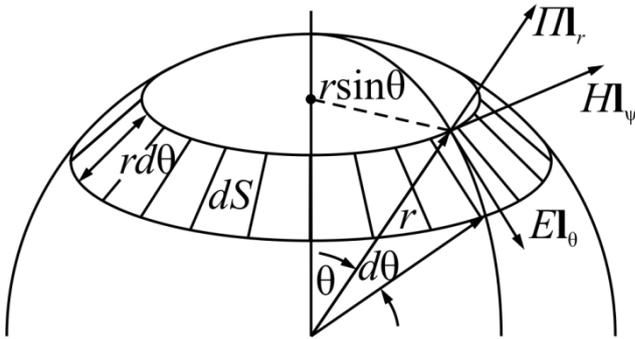


Рис. 6.7

скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$$

Амплитуды векторов поля убывают пропорционально первой степени расстояния  $r$ . Они пропорциональны также  $\sin \theta$ .

6.2.18. Определить мгновенное значение вектора Пойнтинга для поля, рассмотренного в задаче 6.2.17, в двух областях: а) в ближней зоне, б) в дальней зоне.

6.2.19. Показать, что в дальней зоне в единице объема содержится одинаковое количество энергии электрического и магнитного полей:

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

*Указание.* Использовать данные задачи 6.2.17.

6.2.20. Подсчитать поток вектора Пойнтинга сквозь сферическую поверхность радиусом  $r \gg \lambda$  для случая, рассмотренного в задаче 6.2.17. Найти сопротивление излучения.

**Решение.** Центр сферической поверхности с радиусом  $r$  поместим в начале координат (рис. 6.7). Поток вектора Пойнтинга сквозь эту поверхность равен  $\int_S E_\theta H_\psi dS = p_{\text{изл}}$  и представляет собой мгновенную мощность излучения.

Разобьем сферическую поверхность на элементарные кольцевые площадки:

$$dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

Тогда искомый поток будет равен

$$\int_0^{\pi} E_{\theta} H_{\psi} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = P_{\text{изл}}.$$

Подставив выражение проекции  $E_{\theta}$  и  $H_{\psi}$ , найденные в задаче 6.2.17, получим

$$P_{\text{изл}} = \frac{I_m^2 l^2 \pi Z_c}{2\lambda^2} \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta.$$

Так как  $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ , то

$$P_{\text{изл}} = \frac{2I_m^2 l^2 \pi Z_c}{3\lambda^2} \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right).$$

Средняя мощность излучения за период  $T$

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{изл}} dt = \frac{I_m^2 l^2 \pi Z_c}{3\lambda^2} = \frac{2I^2 l^2 \pi Z_c}{3\lambda^2}.$$

Так как волновое сопротивление воздуха

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi,$$

то средняя мощность излучения

$$P_{\text{изл}} = 80\pi^2 I^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 I^2 \left( \frac{lf}{v} \right)^2.$$

Сопротивление излучения

$$R_{\text{изл}} = \frac{P_{\text{изл}}}{I^2} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

6.2.21. Найти амплитуду векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае задачи 6.2.17, если  $I = 80 \text{ A}$ ;  $l = 100 \text{ м}$ ;  $f = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ ,  $r = 100 \text{ км}$ ,  $\theta = \pi/2$ .

6.2.23. Найти мощность и сопротивление излучения для случая, рассмотренного в задаче 6.2.21.

6.2.23. Определить амплитуду вектора  $\mathbf{H}$  в случае задачи 6.2.17, если:

$l = 5 \text{ м}; f = 10^6 \text{ Гц}; I = 2 \text{ А}; r = 50 \text{ м}; 100 \text{ м}; 1 \text{ км}; 100 \text{ км}.$

6.2.24. В магнитном излучателе в виде рамочной антенны, представляющей собой плоский круглый виток радиусом  $a$ , протекает синусоидальный ток  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi)$ . Определить векторы поля в дальней (волновой) зоне, считая, что векторный потенциал в сферической системе координат имеет одну проекцию, комплексное выражение которой имеет вид

$$\dot{A} = \dot{A}_\psi = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} I \left\{ \left( i \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right\} e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda}},$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $r$  – расстояние от точки, в которой определяются векторы поля, до центра витка ( $r \gg \lambda \gg a$ ).

Среда, окружающая антенну, – воздух ( $\varepsilon = 1; \mu = 1; \gamma = 0$ ).

Виток расположен в экваториальной плоскости; его центр лежит в начале координат.

6.2.25. Определить мощность и сопротивление излучения рамочной антенны по данным задачи 6.2.24.

6.2.26. В задаче 6.2.19 заданы:

$$l = 1 \text{ м}; I_m = 10 \text{ А}; r = 10 \text{ км}; \theta = 90^\circ; \Pi_m = 10^{-9} \text{ Вт/м}^2.$$

Определить  $\lambda, E_m, H_m$ .

6.2.27. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в идеальном диэлектрике в направлении оси  $s$ , не совпадающей с осями  $x, y$  и  $z$ .

Ось  $s$  образует с координатными осями углы  $\theta_x, \theta_y$  и  $\theta_z$ . Записать выражения комплексных амплитуд векторов поля.

**Решение.** Фаза волны в точке, лежащей на эквифазной плоскости (нормальной к оси  $s$ ), на расстоянии  $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$  от начала координат будет

$$\omega t - \beta s + \xi.$$

Так как  $s = r \cos(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \mathbf{i}_s \mathbf{r} = x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z$ , то

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{I}_E \dot{E}_m = \mathbf{I}_E E_m e^{i\xi} e^{-i\beta s} = \mathbf{I}_E E_m e^{i\xi} e^{-i\beta(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z)},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{E}_m \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}} [\mathbf{I}_s, \mathbf{I}_E].$$

6.2.28. Длина волны (задача 6.2.27) в направлении распространения  $s$  равна  $\lambda$ . Определить проекцию фазовой скорости в направлении оси  $x$ , образующей с осью  $s$  угол  $\theta_x$ .

6.2.29. Плоская, гармоническая изменяющаяся по времени, однородная электромагнитная волна встречает на своем пути плоскую неограниченную поверхность раздела двух сред. Обе среды – идеальные диэлектрики. Определить векторы поля, если волна падает на граничную поверхность под произвольным углом.

**Решение.** Энергия падающей волны частично отразится, а частично проникнет во вторую среду.

Совместим плоскость  $xOy$  с граничной, направив ось  $z$  в сторону первой среды. Пусть волна распространяется в направлении оси  $s_1$ , образующей с осью  $z$  угол  $s_1Oz = \varphi_1$ .

Напряженность поля падающей волны определяется по формулам (см. задачу 6.2.27)

$$E_{\text{пад}} = E_{1m} \sin(\omega t - \beta_1 s_1 + \xi_1);$$

$$H_{\text{пад}} = E_{1m} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} \sin(\omega t - \beta_1 s_1 + \xi_1);$$

где

$$s_1 = x \sin \varphi_1 - z \cos \varphi_1.$$

Угол  $\varphi_1$  называется углом падения.

Напряженности поля отраженной и преломленной волн запишутся аналогично

$$E_{\text{отр}} = E_{3m} \sin(\omega t - \beta_1 s_3 + \xi_3);$$

$$H_{\text{отр}} = E_{3m} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} \sin(\omega t - \beta_1 s_3 + \xi_3);$$

$$E_{\text{пр}} = E_{2m} \sin(\omega t - \beta_2 s_2 + \xi_2);$$

$$H_{\text{пр}} = E_{2m} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_0}} \sin(\omega t - \beta_2 s_2 + \xi_2);$$

где

$$s_3 = x \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3;$$

$$s_2 = x \sin \varphi_2 - z \cos \varphi_2$$

$$\angle s_3 O z = \varphi_3 - \text{угол отражения,}$$

$$\angle s_2 O(-z) = \varphi_2 - \text{угол преломления.}$$

Назовем плоскостью падения плоскость, на которой лежат оси  $s_1$  и  $z$ . Предположим, что вектор  $E_{\text{пад}}$  лежит в плоскости падения, а вектор Пойнтинга направлен по оси  $s_1$ . Векторы  $E_{\text{пад}}$  и  $H_{\text{пад}}$  взаимно перпендикулярны. Векторы  $E_{\text{отр}}$  и  $E_{\text{пр}}$  будут тоже лежать в плоскости падения.

Так как на граничной плоскости нет поверхностных токов, то граничные условия (при  $z = 0$ ) примут вид

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_{1m} \sin(\omega t - \beta_1 x \sin \varphi_1 + \xi_1) + E_{3m} \sin(\omega t - \beta_1 x \sin \varphi_3 + \xi_3) = \\ = E_{2m} \sin(\omega t - \beta_2 x \sin \varphi_2 + \xi_2) . \end{aligned}$$

Сумма синусоидальных функций равна при любых значениях  $x$  и  $r$  другой синусоидальной функции только в том случае, если временные и пространственные частоты у них одинаковы. Тогда

$$\beta_1 \sin \varphi_1 = \beta_1 \sin \varphi_3 = \beta_2 \sin \varphi_2.$$

Следовательно, угол падения равен углу отражения:

$$\varphi_1 = \varphi_3.$$

Кроме того,

$$\sin \varphi_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_1.$$

Так как

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_{1\phi}} = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \mu_0}; \beta_2 = \frac{\omega}{v_{2\phi}} = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0 \mu_0},$$

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_{1\phi}}{v_{2\phi}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \text{const.}$$

Отношение синуса угла падения и синуса угла преломления величина постоянная, равная отношению фазовых скоростей. Это *закон Снеллиуса*.

Если задана комплексная амплитуда напряженности электрического поля падающей волны  $\dot{E}_{1m}$ , то комплексные амплитуды  $\dot{E}_{2m}$  и  $\dot{E}_{3m}$  определяются из граничных условий

$$\dot{E}_{1m} \cos \varphi_1 - \dot{E}_{3m} \cos \varphi_3 = E_{2m} \cos \varphi_2;$$

$$\dot{E}_{1m} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} - \dot{E}_{3m} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} = E_{2m} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Совместное решение этих уравнений определяет

$$\dot{E}_{3m} = \frac{\text{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} \dot{E}_{1m};$$

$$\dot{E}_{2m} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \dot{E}_{1m}.$$

Полученные выражения называются *формулами Френеля*. При выводе этих формул предполагалось, что  $\mathbf{E}_{\text{пад}}$  лежит в плоскости падения (волна поляризована в плоскости падения).

6.2.30. Решить задачу 6.2.29. в предположении, что вектор  $\mathbf{E}_{\text{пад}}$  перпендикулярен к плоскости падения.

6.2.31. Решить задачу 6.2.29 и 6.2.30, предполагая, что  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$  (яв-

ление Брюстера).

6.2.33. Решить задачу 6.2.29, предполагая, что  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , а угол преломления  $\varphi_2 = \pi/2$ .

**Решение.** Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля преломленной волны  $\dot{E}_{2m}$  (так как  $s_2 = x$ ) будет равна

$$\dot{E}_{2m} = E_{2m} e^{i\xi_2 z} e^{-i\beta_2 s} = E_{2m} e^{i\xi_2 z} e^{-i\frac{\omega x}{v_2 \phi}}.$$

Следовательно, преломленная волна распространяется в направлении оси  $x$ . В этом случае комплексная амплитуда отраженной волны будет равна комплексной амплитуде падающей волны  $\dot{E}_{1m} = \dot{E}_{3m}$ .

Нормальная составляющая вектора Пойнтинга  $\Pi_z$  будет равна нулю. При установившемся режиме энергия не проходит через граничную поверхность во вторую среду. Энергии падающей и отраженной волн равны. В данном случае имеет место полное отражение.

6.2.34. Фазовая скорость волны в диэлектрике равна  $10^8$  м/с. Определить относительную диэлектрическую проницаемость среды.

6.2.35. Плоская волна частотой  $100$  МГц распространяется в вакууме по оси  $Z$ . Найти разность фаз колебаний в точках  $A$  (1, 2, 3) и  $B$  (5, 4, 5).

6.2.36. Плоская волна частотой  $200$  МГц распространяется в вакууме вдоль оси  $X$ . Найти разность фаз колебаний в точках  $A$  (1, 2, 3) и  $B$  (5, 4, 5).

6.2.37. Плоская волна частотой  $100$  МГц распространяется в диэлектрике с относительной проницаемостью равной  $2.25$  вдоль оси  $Y$ . Найти разность фаз колебаний в точках  $A$  (1, 1, 3) и  $B$  (5, 6, 5).

6.2.38. Плоская волна частотой  $200$  МГц распространяется в диэлектрике с относительной проницаемостью  $2.25$ . Определить длину волны, фазовую скорость, коэффициент фазы и расстояние, на котором фаза волны изменяется на  $1$  радиан.

6.2.39. Вектор  $\mathbf{E} = 10 \mathbf{z}_0$  В/м. Волна распространяется в воздухе вдоль

оси  $X$ . Определить величину и направление вектора напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

6.2.40. Вектор  $\mathbf{H} = 15\mathbf{z}_0$  А/м. Волна распространяется в воздухе вдоль оси  $X$ . Определите величину и направление вектора напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$ .

6.2.41. На расстоянии в 1 м фаза волны изменилась на 15 градусов. Определить длину волны и коэффициент фазы.

6.2.42. Длина волны равна 15 м. Определить коэффициент фазы и изменение фазы на пути в 20 м.

6.2.43. Частота поля 100 МГц. В диэлектрике на расстоянии 1 м фаза волны изменилась на 15 градусов. Определить длину волны и относительную диэлектрическую проницаемость среды.

6.2.44. Определить длину и фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь с относительными проницаемостями  $\epsilon = \mu = 10$ , если частота волны 10 МГц.

6.2.45. В среде с параметрами  $\epsilon = 2,25$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряжённости электрического поля 100 В/м. Определить плотность потока мощности, переносимой волной в направлении распространения.

# ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕСОВЕРШЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ И В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

## 7.1. Основные формулы

Уравнение Максвелла:

$$[\nabla, \mathbf{H}] = \text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_{\text{см}}; \quad (7.1)$$

$$[\nabla, \mathbf{E}] = \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (7.2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad (7.3)$$

$$\nabla \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{H} = 0 \text{ при } \mu_a = \text{const}. \quad (7.4)$$

Уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$[\nabla, \dot{\mathbf{H}}_m] = \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = (\gamma + i\omega\varepsilon_a) \dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\boldsymbol{\delta}}_m + \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\text{см}m}; \quad (7.5)$$

$$[\nabla, \dot{\mathbf{E}}_m] = \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m; \quad (7.6)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \text{div } \dot{\mathbf{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon_a}; \quad (7.7)$$

$$\nabla \mathbf{H} = \text{div } \dot{\mathbf{H}}_m = 0. \quad (7.8)$$

*Теорема Умова-Пойнтинга:*

$$-\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t}. \quad (7.9)$$

*Граничные условия в электромагнитном поле:*

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0; \quad (7.10)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma; \quad (7.11)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0; \quad (7.12)$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta = \delta_{\text{пов}}. \quad (7.13)$$

Зависимость между векторами поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad (7.14)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}; \quad (7.15)$$

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (7.16)$$

Параметры волны:

*коэффициент (постоянная) распространения*

$$\dot{\nu} = \alpha + i\beta = \sqrt{i\omega\mu_a(\gamma + i\omega\varepsilon_a)}; \quad (7.17)$$

*коэффициент затухания*

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon_a^2} + 1} - 1 \right)}; \quad (7.18)$$

*коэффициент фазы*

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon_a^2} + 1} + 1 \right)}; \quad (7.19)$$

*волновое (характеристическое) сопротивление*

$$Z_c = z_c e^{i\varphi_c} = \frac{i\omega\mu_a}{\dot{\nu}}, \quad (7.20)$$

*длина волны*

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_\phi}{f}; \quad (7.21)$$

*фазовая скорость*

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f; \quad (7.22)$$

*групповая скорость*

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}. \quad (7.23)$$

Параметры волны в хорошо проводящей среде:

$$\beta = \alpha = k = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}; \quad (7.24)$$

$$\nu = k + ik = \sqrt{\omega\mu_a\gamma} e^{i45^\circ}; \quad (7.25)$$

$$Z_c = z_c e^{i\varphi_c} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{i45^\circ}. \quad (7.26)$$

Эквивалентная глубина проникновения волны в массивный проводник:

$$u = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}. \quad (7.27)$$

Плоская волна описывается выражением

$$\psi = E_0 e^{-i\omega t} e^{\pm ikx},$$

где знак плюс относится к волне, распространяющейся вдоль оси  $x$  слева, минус – справа. Параметры среды, в которой распространяется волна, входят в выражение для волнового числа  $k$  следующим образом:

$$k = 2\pi \sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}} / \lambda,$$

где  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\mu}$  – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды распространения,  $\lambda = 2\pi c / \omega$  – длина волны, а  $c$  – скорость света в свободном пространстве. Далее будем полагать, что

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' \pm i\epsilon'' \quad \text{или} \quad \dot{\epsilon} = \epsilon' (1 \pm i \operatorname{tg} \delta),$$

где  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости,  $\operatorname{tg} \delta$  – тангенс угла диэлектрических потерь. Если  $\dot{\mu} = 1$ , то

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\sqrt{0,5\omega \sqrt{\epsilon'(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}}}. \quad (7.28)$$

Из выражения (7.28) видно, что длина волны в среде с комплексной проницаемостью зависит как от действительной части диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$ , так и от величины потерь  $\operatorname{tg} \delta$  в среде распространения. Коэффициент (постоянная) распространения  $\dot{\nu} = \alpha + i\beta$  связана с комплексным волновым числом как

$$i\dot{k} = \pm \alpha + i\beta \quad (7.29)$$

(действительная и мнимая части определяются, при этом, формулами (7.18), (7.19)], а выбор знака в (7.29) зависит от направления распространения вол-

ны: при распространении волны справа знак в (7.29) положителен. Таким образом, имеем

$$\psi = E_0 e^{-i\omega t} e^{-ikx} = E_0 e^{\pm\alpha x} e^{-i(\omega t + \beta x)}.$$

## 7.2. Задачи

7.2.1. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в несовершенном диэлектрике.

Исследовать поле, если известны

$$\gamma = 10^{-2} \frac{\text{См}}{\text{м}}, \quad \varepsilon = 10, \quad \mu = 1, \quad \omega = 10^8 \frac{1}{\text{с}}.$$

Амплитуда напряженности электрического поля  $E$  в точке  $x = y = z = 0$

$$E_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}.$$

**Решение.** Направим ось  $z$  параллельно вектору напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , а ось  $y$  – по направлению распространения волны. Тогда амплитуда векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будут зависеть только от координаты  $y$ .

Второе уравнение Максвелла в комплексной форме (7.6) для рассматриваемой задачи примет вид:

$$\frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} = -i\omega\mu_0 \dot{H}_{xm};$$

$$0 = -i\omega\mu_0 \dot{H}_{ym};$$

$$0 = -i\omega\mu_0 \dot{H}_{zm};$$

откуда  $H_y = H_z = 0$ . Вектор напряженности магнитного поля имеет только одну  $x$ -ю составляющую. Следовательно, векторы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, нормальной к направлению распространения  $y$ . Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y}.$$

Первое уравнение Максвелла в комплексной форме (7.5) для рассмат-

риваемой задачи примет следующий вид:

$$\frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} = (\gamma + i\omega\epsilon_a)\dot{E}_{zm}.$$

Подставив значение  $H_{xm}$ , получим

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} = i\omega\mu_0(\gamma + i\omega\epsilon_a)\dot{E}_{zm}.$$

Обозначим

$$i\omega\mu_0(\gamma + i\omega\epsilon_a) = \dot{\nu}^2.$$

Решив дифференциальное уравнение, определим напряженность электрического поля:

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{zm} = \dot{C}_1 e^{-\dot{\nu}y} + \dot{C}_2 e^{\dot{\nu}y}.$$

Если среда неограниченна, то отраженной волны не будет; следовательно, постоянная  $\dot{C}_2 = 0$ . Постоянная  $C_1$  равна амплитуде напряженности электрического поля при  $y = 0$ , т.е.  $\dot{C}_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  В/м и

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{zm} = 5 \cdot 10^{-3} e^{-\dot{\nu}y} \left( \frac{B}{M} \right).$$

Коэффициент распространения

$$\dot{\nu} = \sqrt{i\omega\mu_0(\gamma + i\omega\epsilon_a)} = 1,29e^{i65^\circ 45'} = (0,53 + i1,176) \text{ 1/м},$$

следовательно, коэффициент затухания  $\alpha = 0,53 \text{ м}^{-1}$ , а коэффициент фазы  $\beta = 1,176 \text{ м}^{-1}$ . Окончательно

$$\dot{E}_m = \mathbf{k}\dot{E}_{zm} = \mathbf{k}5 \cdot 10^{-3} e^{-0,53y} e^{-i1,176y} \text{ В/м}.$$

Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{k}E_z = \mathbf{k}5 \cdot 10^{-3} e^{-0,53y} \sin(10^8 t - 1,176y)$$

Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} = \frac{\dot{\nu}}{i\omega\mu_0} C_1 e^{-\dot{\nu}y} = \frac{C_1}{Z_c} e^{-\dot{\nu}y}.$$

Волновое сопротивление

$$Z_c = \frac{i\omega\mu_0}{\dot{\nu}} = 97,4e^{i24^\circ 45'} = 97,4e^{0,432} \text{ Ом}.$$

Подставляя числовые значения в выражение для  $\dot{\mathbf{H}}_m$ , получим

$$\dot{\mathbf{H}}_m = i 5,15 \cdot 10^{-5} e^{-0,53y} e^{-i(1,176y+0,432)} \text{ А/м.}$$

Мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{i} H_x = i 5,15 \cdot 10^{-5} e^{-0,53y} \sin(10^8 t - 1,176y - 0,432) \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Найдем фазовую скорость (7.22) и длину волны (7.21):

$$v_\phi = 8,5 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\lambda = 5,35 \text{ м.}$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] &= \mathbf{j} \left\{ 25,75 \cdot 10^{-8} e^{-1,06y} \sin(10^8 t - 1,176y) \sin(10^8 t - 1,176y - 0,432) \right\} = \\ &= \mathbf{j} \left\{ 1,175 \cdot 10^{-7} e^{-1,06y} - 1,29 \cdot 10^{-7} e^{-1,06y} \cos(2 \cdot 10^8 t - 2,35y - 0,432) \right\}, \end{aligned}$$

а его среднее значение за период

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = 1,175 \cdot 10^{-7} e^{-1,06y} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

7.2.3. По условиям задачи 7.2.1 подсчитать поток вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность  $S$ , изображенную на рис. 7.1. Размеры поверхности указаны на чертеже. Показать, что среднее значение этого потока за период равно мощности тепловых потерь в объеме, ограниченном заданной поверхностью.

7.2.3. Подсчитать в случае, рассмотренном в задаче 7.2.1, плотности токов проводимости и смещения. Найти отношение их амплитуд; сравнить фазы.

7.2.4. Определить, на каком расстоянии от начала координат амплитуда вектора напряженности электрического поля, рассмотренного в задаче 7.2.1, уменьшится до 0,01 своего первоначального значения.

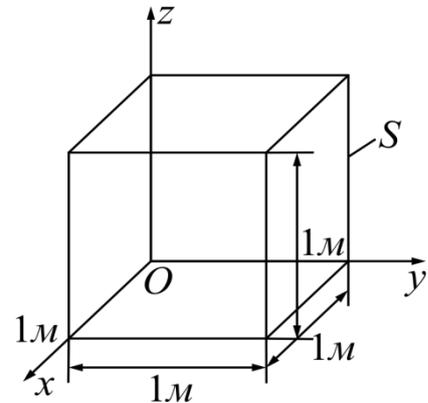


Рис. 7.1

чального значения.

7.2.5. Определить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  для среды, которая по своим свойствам приближается к идеальному диэлектрику, но  $\gamma \neq 0$ .

**Решение.** В рассматриваемом случае амплитуда плотности тока смещения значительно больше амплитуды плотности тока проводимости; следовательно,

$$\frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} \gg 1.$$

В выражении коэффициента фазы (7.19) величиной  $\gamma^2 / (\omega^2 \varepsilon_a^2)$  по сравнению с единицей можно пренебречь, тогда

$$\beta \approx \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{v}.$$

В выражении коэффициента затухания (7.18) такое приближение было бы весьма неточным. Достаточно хорошее приближение можно получить,

если  $\left( \frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2} + 1 \right)^{1/2}$  разложить в ряд (формула бинома Ньютона) и оставить два первых члена полученного ряда.

Так как

$$\left( \frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2} + 1 \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2},$$

то

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2} - 1 \right)} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = 60\pi\gamma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

7.2.6. Определить параметры волны:  $\dot{v}$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $Z_c$ ,  $v_\phi$  и  $\lambda$  для значений частоты: а)  $f = 10^5$  Гц; б)  $f = 10^8$  Гц; в)  $f = 10^{10}$  Гц, если  $\varepsilon = 81$ ;  $\mu_a = \mu_0$ ;  $\gamma = 0,1$  См/м.

7.2.7. Условно можно считать, что если отношение плотности тока смещения и плотности тока проводимости больше 100, то среда – диэлектрик, а если это отношение меньше 0,01, то среда – проводник.

Для данных задачи 7.2.6 определить, в каком из трех случаев среду можно считать: а) проводником, б) диэлектриком.

7.2.8. Для случая, рассмотренного в задаче 7.2.6, составить выражения мгновенных значений векторов поля **E** и **H**, если среда неограниченна и плоская гармоническая линейно поляризованная волна распространяется вдоль оси  $z$ . При  $t = 0$  и  $x = y = z = 0$ ,  $E_m = 5 \text{ В/м}$ . Ось  $x$  параллельна направлению **E**.

7.2.9. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в сухой почве с параметрами:  $\gamma = 0,001 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$ .

Определить коэффициент затухания  $\alpha$ ; коэффициент фазы  $\beta$ ; фазовую скорость  $v_\phi$ ; длину волны  $\lambda$ ; волновое сопротивление  $Z_c$  для значений частоты:  $f = 15 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ ;  $f = 15 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ ;  $f = 15 \cdot 10^7 \text{ Гц}$ .

Найти расстояние  $y$  вдоль направления распространения волны, на котором амплитуда волны уменьшится в  $10^6$  раз.

7.2.10. Решить задачу 7.2.9, предполагая, что волна распространяется в морской воде с параметрами:  $\gamma = 4 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ .

7.2.11. Найти отношение амплитуд плотности тока смещения и плотности тока проводимости для случаев, рассмотренных в задачах 7.2.9 и 7.2.10.

7.2.13. Определить частоту  $f_0$ , при которой амплитуда плотности тока смещения и плотности тока проводимости будут равны:

- 1) среда – медь  $\gamma = 57 \cdot 10^6 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 10$ ;
- 2) среда – морская вода  $\gamma = 4 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 80$ ;
- 3) среда – фарфор  $\gamma = 10^{-13} \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 6$ .

7.2.13. Плоская гармоническая электромагнитная волна ( $S$  – волновая поверхность) распространяется по направлению оси  $x$  и переходит из одной среды в другую. Область  $-\infty \leq x \leq 0$  – диэлектрик, у которого  $\varepsilon = 1, \mu = 1, \gamma = 0$ , а область  $0 \leq x \leq \infty$  – проводник, у которого  $\mu = 1, \gamma = 5 \cdot 10^2 \text{ См/м}$ , рис. 7.2).

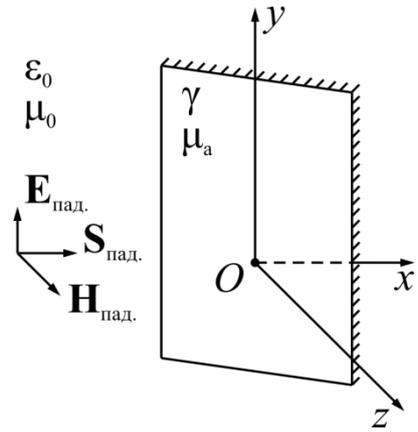


Рис. 7.2

Вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  направлен параллельно оси  $z$ ; амплитуда падающей волны напряженности электрического поля в диэлектрике  $E_{m\text{пад}} = 100 \text{ В/м}$ . Найти мгновенные значения векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в обеих областях, если угловая частота  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

Определить эквивалентную глубину проникновения волны в проводник. Подсчитать энергию, которая проходит за  $1 \text{ с}$  через  $1 \text{ м}^2$  плоскости  $x = 0$ .

7.2.14. Решить задачу 7.2.13, предполагая, что у диэлектрика  $\varepsilon = 81$ , а у проводника  $\gamma = 10^7 \text{ См/м}; \mu = 120$ .

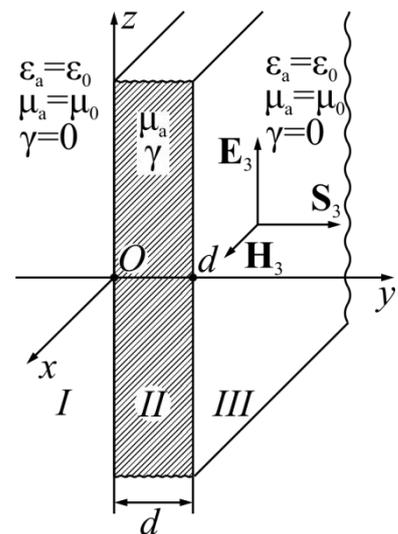


Рис. 7.3

7.2.15. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется по направлению оси  $y$  (рис. 7.3,  $S_{\text{пад}}$  – волновая поверхность). Область первая ( $-\infty \leq y \leq 0$ ) и третья ( $d \leq y \leq \infty$ ) – диэлектрик, у которого ( $-\infty \leq x \leq 0$ ),  $\varepsilon = 1, \gamma = 0$ ; вторая ( $0 \leq y \leq d$ ) – проводник, у которого магнитная проницаемость –  $\mu_a$ , удельная проводимость –  $\gamma$ . Угловая частота –  $\omega$ . При  $y = d, E_m = E_{zm} = E_0$ .

Определить мгновенное значение векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  во всех областях.

7.2.16. Решить задачу 7.2.15, если проводящий слой – сталь с удельной проводимостью  $\gamma = 10^7 \text{ См/м}$ , магнитной проницаемостью  $\mu = 100$  и толщиной  $d = 1 \text{ см}$ ,  $E_0 = 15 \text{ В/м}$ . Угловая частота  $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

Определить длину волны и её фазовую скорость в диэлектрике и проводнике. Найти значение вектора Пойнтинга при  $y = 0$  и  $y = d = 1 \text{ см}$ .

7.2.17. Решить задачу 7.2.16, предполагая, что в первой области диэлектрик – вода с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 81$ .

7.2.18. Решить задачу 7.2.15 в случае, если проводящий слой медный, толщиной  $d = 1 \text{ мм}$ , удельная проводимость меди  $\gamma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ . Угловая частота  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $E_0 = 5 \text{ мВ/м}$ . Определить длину и фазовую скорость волны в диэлектрике и проводнике. Написать мгновенные значения векторов напряженностей **E** и **H**.

7.2.19. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется по направлению  $y$  в диэлектрике с  $\epsilon = 1, \mu = 1$  и падает нормально на бесконечно простирающуюся плоскую поверхность с  $\gamma = \infty$ . Амплитуда падающей волны напряженности электрического поля  $E_m = E_{zm} = 50 \text{ В/м}$ , угловая частота  $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

Составить уравнение получающейся стоячей волны, рассчитать её параметры. Найти величину вектора напряженности магнитного поля. Определить величину вектора поверхностной плотности тока на плоскости  $y=0$  (рис. 7.4,  $S_{\text{пад}}$ ,  $S_{\text{отр}}$  – волновая поверхность).

Определить расстояние от плоской поверхности, на котором находятся узлы и пучности волн **E** и **H**.

7.2.20. Определить эквивалентную

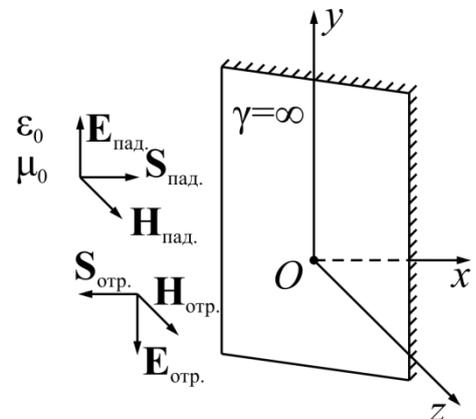


Рис. 7.4.

глубину проникновения волны как функцию от частоты  $f$  для следующих проводников: серебро, медь, алюминий.

7.2.21. По плоской медной ленте с удельной проводимостью  $\gamma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$  протекает ток  $i = 5 \sin 10^5 t$  (рис. 7.5). Ширина ленты  $2a = 50 \text{ см}$ , толщина  $2b = 1 \text{ см}$ .

Определить плотность тока  $\delta$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в точках, расположенных по оси  $x$ . Построить кривые зависимости амплитуд и начальных фаз плотности тока и напряженности магнитного поля от координаты  $x$ .

Указание. Так как  $a \gg b$ , то считать  $\mathbf{H} = \pm H_y \mathbf{j}$ . См. [1, § 13-4].

7.2.23. Решить задачу 7.2.21, считая, что угловая частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ .

7.2.23. Во сколько раз активное сопротивление 1 м ленты (задача 7.2.21) при синусоидальном токе больше активного сопротивления при постоянном токе, если: а)  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ , б)  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ ?

7.2.24. По круглому медному цилиндрическому проводнику протекает синусоидальный ток  $i = 2 \sin \omega t$ . Радиус цилиндра  $a = 1 \text{ см}$ , удельная проводимость  $\gamma = 5,6 \cdot 10^5 \text{ См/м}$ , магнитная проницаемость  $\mu = 1$ .

Определить плотность тока  $\delta$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  внутри проводника. Построить кривые зависимости амплитуд и начальных фаз  $\delta$  и  $\mathbf{H}$  в функции от расстояния  $r$  до оси цилиндра. Задачу решить для

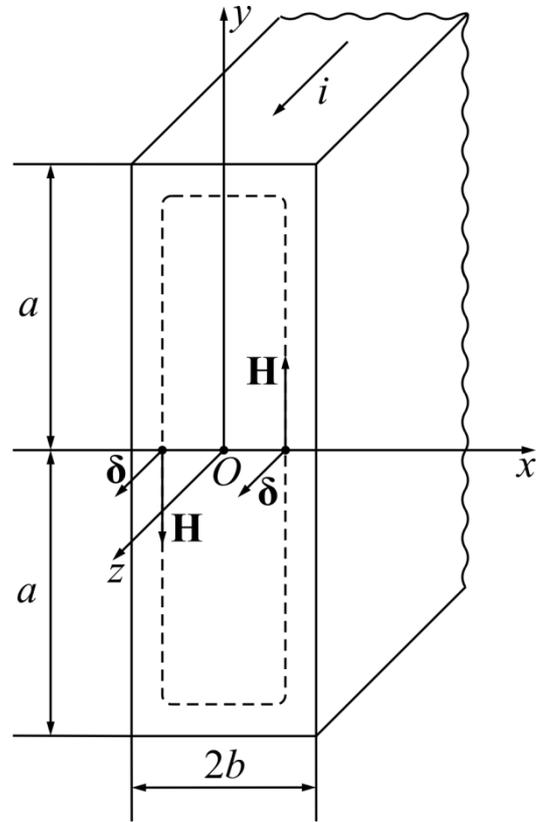


Рис. 7.5

трех значений частоты: а)  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ , б)  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ , в)  $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ . См. [1, § 13-12; 3].

7.2.25. Определить активное сопротивление и внутреннее индуктивное сопротивление 1 м проводника в задаче 7.2.24.

7.2.26. Определить диаметр стального цилиндрического провода, активное сопротивление которого при частоте  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  будет равно при той же частоте активному сопротивлению медного провода с радиусом  $a = 1 \text{ см}$ . Удельная проводимость медного провода  $\gamma_{\text{мед}} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ , стального –  $\gamma_{\text{ст}} = 5 \cdot 10^4 \text{ См/м}$ . Магнитная проницаемость стального провода  $\mu_{\text{ст}} = 150$ .

7.2.27. По круглому цилиндрическому стальному проводнику протекает синусоидальный ток  $i = 0,1 \sin 10000t$ . Радиус цилиндра  $a = 0,2 \text{ см}$ , удельная проводимость  $\gamma = 5 \cdot 10^4 \text{ См/м}$ , магнитная проницаемость  $\mu = 200$ .

Определить плотность тока  $\delta$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  внутри проводника. Построить кривые зависимости амплитуд и начальных фаз  $\delta$  и  $\mathbf{H}$  в функции от расстояния  $r$  до оси цилиндра.

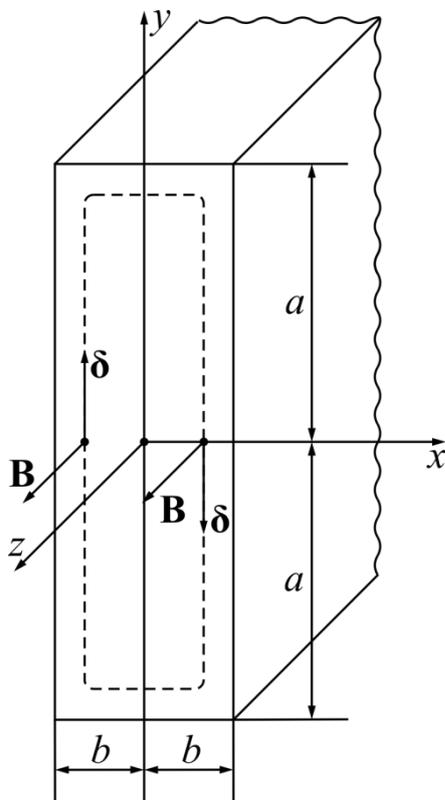


Рис. 7.6.

7.2.28. Определить активное сопротивление и внутреннее индуктивное сопротивление 1 м проводника для случая, рассмотренного в задаче 7.2.27. Построить кривые зависимостей активного сопротивления и внутреннего индуктивности от частоты ( $0 \leq \omega \leq 10^5$ ).

7.2.29. Плоская стальная лента ( $\gamma = 10^7 \text{ См/м}$ ) пронизывается синусоидальным магнитным потоком

$$\Phi = 25 \cdot 10^{-5} \sin 314 t \text{ Вб.}$$

Ширина ленты  $2a = 50 \text{ см}$ , толщина  $2b = 1 \text{ мм}$  (рис. 7.6).

Определить магнитную индукцию  $B$  и плотность вихревых токов  $\delta$  в точках, расположенных на оси  $x$ . Считать  $\mu = 1000$ .

*Указание.* Так как  $a \gg b$ , то считать  $\delta = \pm \delta_y \mathbf{j}$ . См. [1, § 13-7].

7.2.30. Определить потери на вихревые токи, отнесенные к единице объема (задача 7.2.29), с учетом неравномерного распределения магнитного потока.

7.2.31. Решить задачу 7.2.29, если угловая частота  $\omega = 5000 \text{ с}^{-1}$ .

7.2.32. При прохождении по пути длиной 30 м напряжённость поля волны уменьшилась в 2 раза. Каков коэффициент затухания этой линии?

7.2.33. При прохождении по пути длиной 10 м переносимая мощность волны уменьшилась в 2 раза. Каков коэффициент затухания этой линии?

7.2.34. На частоте 1000 МГц тангенс угла диэлектрических потерь равен 0,01. Каким он будет на частоте 2000 МГц?

7.2.35. На частоте 1000 МГц в реальном диэлектрике с относительной проницаемостью, равной 4, тангенс угла диэлектрических потерь равен 0,01. Каким будет коэффициент затухания?

7.2.36. Характеристическое сопротивление среды равно 1508 Ом, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon=1$ . Определить относительную магнитную проницаемость среды.

7.2.37. Некоторый диэлектрик на частоте 10 ГГц обладает параметрами:  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu=1$ ,  $\text{tg } \sigma_{\omega} = 10^{-4}$ . Определить длину волны, коэффициент затухания и характеристическое сопротивление такой среды.

7.2.38. Керамика титанат бария на частоте 10 ГГц имеет параметры:  $\epsilon = 144$ ,  $\mu= 1$ ,  $\text{tg } \sigma_{\omega} = 0,6$ . Определить длину волны, коэффициент затухания и характеристическое сопротивление данной среды.

7.2.39. Во сколько раз уменьшится амплитуда плоской электромагнитной волны с частотой  $2 \text{ МГц}$  при распространении в среде с параметрами  $\sigma = 10^{-8} \text{ См/м}$ ,  $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$  на пути в  $1 \text{ м}$ ?

7.2.40. Вывести формулу для определения уменьшения амплитуды поля плоской электромагнитной волны на пути, равном длине волны в среде с потерями. Во сколько раз уменьшится амплитуда поля на указанном расстоянии в среде с параметрами  $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 10^{-4} \text{ См/м}$  на частоте  $10 \text{ МГц}$ ?

7.2.41. Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в  $10^4$  раза на частотах  $50 \text{ Гц}$  и  $50 \text{ МГц}$ .

7.2.42. Определить толщину экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в  $10^4$  раза на частоте  $50 \text{ Гц}$ , если он выполнен из материала с  $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$  и  $\mu = 900$ . Сравнить полученный результат с ответом к предыдущей задаче.

7.2.43. Амплитуда напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с параметрами  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$ , в плоскости  $z = 0$  равна  $1 \text{ А/м}$ . Определить плотность потока мощности волны на расстоянии  $z$ , равном  $1 \text{ м}$  от начала координат.

7.2.44. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с параметрами  $\epsilon = 144$ ,  $\mu = 1$ ,  $\text{tg } \sigma_0 = 0,6$ , определить плотность потока мощности в плоскости  $z = 0$  на частоте  $10 \text{ ГГц}$ , если амплитуда напряженности электрического поля в этой плоскости равна  $100 \text{ В/м}$ .

7.2.45. Среднее значение вектора Пойнтинга плоской электромагнитной волны в процессе распространения уменьшается на  $10 \%$  на пути длиной  $2 \text{ м}$ . Определить коэффициент затухания волны.

## ГЛАВА 8. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 8.1. Элементы теории и основные формулы

Ориентация векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  относительно осей  $X$  и  $Y$  в плоской волне, распространяющейся вдоль оси  $Z$ , в момент  $t=0$  зависит от источника, генерирующего поле. Пусть, например, волна создается элементарным электрическим вибратором, расположенным на оси  $Z$  параллельно оси  $X$  в среде без потерь. Тогда в области, примыкающей к оси  $Z$  и удовлетворяющей условиям, при которых сферическую волну можно приближенно считать плоской, вектор  $\mathbf{E}$  будет иметь одну составляющую  $E_x$ , а вектор  $\mathbf{H}$  – только составляющую  $H_y$ .

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \mathbf{H}_y = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (8.1)$$

где  $E_0 = |\dot{\mathbf{E}}_0|$ .

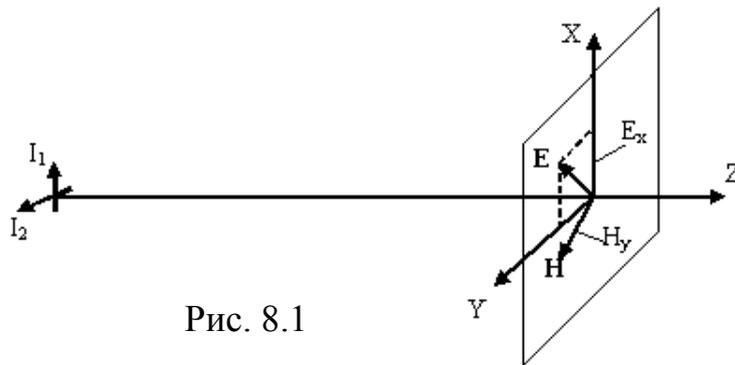


Рис. 8.1

Так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимосвязаны ( $\mathbf{H} = \frac{[\mathbf{z}_0, \mathbf{E}]}{z_c}$ ), ограничимся рассмотрением одного вектора  $\mathbf{E}$ . Из (8.1) следует, что половину периода направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением оси  $X$ , а другую половину периода – противоположно. Таким образом, в фиксированной точке пространства ( $z = \text{const}$ ) конец вектора  $\mathbf{E}$  с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, а величина вектора изменяется в интервале  $[-E_0, E_0]$ . Волны, обладающие таким свойством, принято называть

линейно поляризованными. Плоскость, проходящую через ось  $Z$  и вектор  $\mathbf{E}$ , называют *плоскостью поляризации*. В рассматриваемом примере плоскостью поляризации является плоскость  $XOZ$ .

Если источником волны является элементарный магнитный вибратор, параллельный оси  $X$ , или элементарный электрический вибратор, параллельный оси  $Y$ , то вектор  $\mathbf{E}$  имеет только составляющую  $E_y$ , а вектор  $\mathbf{H}$  – только составляющую  $H_x$ . Волна в этом случае также будет линейно поляризованной.

Предположим теперь, что волна создается двумя вибраторами, например, взаимно перпендикулярными элементарными электрическими вибраторами, расположенными на оси  $Z$ , как показано на рис. 8.1. В этом случае вектор

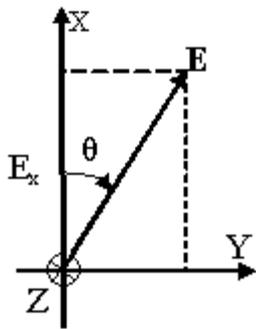


Рис. 8.2

$\mathbf{E}$  имеет две составляющие  $\mathbf{E}_x$  и  $\mathbf{E}_y$ , которые изменяются либо синфазно, либо с некоторым фазовым сдвигом в зависимости от соотношения между фазами токов вибраторов. Вектор  $\mathbf{H}$  при этом имеет также две составляющие  $\mathbf{H}_x$  и  $\mathbf{H}_y$ . Таким образом, в общем случае выражение для вектора  $\mathbf{E}$  плоской волны в среде без потерь записывается в

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_2), \quad (8.2)$$

где  $E_{xm}$  и  $E_{ym}$  – амплитуды составляющих  $E_x$  и  $E_y$  соответственно, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – фазы этих составляющих в точке  $z=0$  при  $t=0$ . Для перехода к случаю среды с отличной от нуля проводимостью нужно в (8.2) заменить  $k$  на  $\beta$  и положить  $E_{xm} = E_{xm}^0 \exp(-\alpha z)$  и  $E_{ym} = E_{ym}^0 \exp(-\alpha z)$ , где  $E_{xm}^0$  и  $E_{ym}^0$  – значения амплитуд составляющих  $E_x$  и  $E_y$  соответственно в плоскости  $z=0$ . При этом получим:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_{xm}^0 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1) + \mathbf{y}_0 E_{ym}^0 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2). \quad (8.3)$$

Формулы (8.2) и (8.3) однотипны, и для дальнейшего достаточно исследовать любую из них, например (8.3). Волну (8.3) можно рассматривать как суперпозицию двух плоских линейно поляризованных волн с взаимно перпендикулярной ориентацией векторов  $\mathbf{E}$ , распространяющихся в одном направлении (вдоль оси  $Z$ ). Характер изменения вектора  $\mathbf{E}$  волны (8.3) с течением времени в фиксированной точке пространства зависит от соотношения между начальными фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и от амплитуд  $E_{xm}^0$  и  $E_{ym}^0$ .

Угол  $\theta$  (рис. 8.2) между осью  $X$  и вектором  $\mathbf{E}$  в фиксированной точке пространства определяется соотношением:

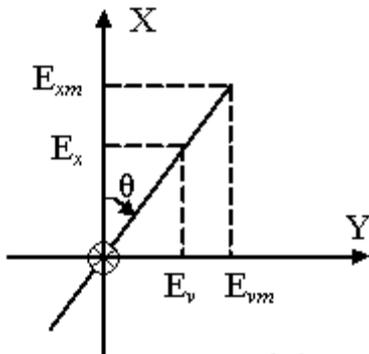


Рис. 8.3

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{ym}^0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2)}{E_{xm}^0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1)}. \quad (8.4)$$

Как следует из формулы (8.4), угол  $\theta$  зависит от соотношения между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а также от отношения  $E_{ym}^0 / E_{xm}^0$ . В общем случае угол  $\theta$  может изменяться со временем.

Предположим, что начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  совпадают. Полагая в формуле (8.4)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_{ym}^0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi)}{E_{xm}^0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi)} = \frac{E_{ym}^0}{E_{xm}^0} = \operatorname{const}.$$

Следовательно, вектор  $\mathbf{E}$ , определяемый равенством (8.3) в любой момент времени, лежит в плоскости, проходящей через ось  $Z$  и составляющей угол  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{E_{ym}^0}{E_{xm}^0}$  с плоскостью  $XOZ$  (рис. 8.3).

Аналогичное явление имеет место также в том случае, когда разность между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равна целому числу  $\pi$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi, \quad (8.5)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В фиксированной точке пространства конец вектора  $\mathbf{E}$  с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, составляющей с осью  $X$  угол  $\theta = (-1)^n \arctg(E_{xm}^0/E_{ym}^0)$ . Таким образом, волна (8.3) при выполнении условия (8.5) является линейно поляризованной. Очевидно, что поворотом осей координат  $X$  и  $Y$  относительно оси  $Z$  в этом случае можно добиться того, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  в новой системе координат имел только одну составляющую  $E_x$  или  $E_y$ .

Рассмотрим второй частный случай. Пусть амплитуды составляющих  $E_x$  и  $E_y$  равны, а начальные фазы отличаются на

$$\pi/2 \quad (E_{xm}^0 = E_{ym}^0 = E_0; \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2).$$

Тогда  $E_x = E_0 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1)$ ,  $E_y = E_0 \exp(-\alpha z) \sin(\omega t - \beta z + \varphi_1)$ .

Подставляя эти выражения в (8.4), получаем равенство  $\operatorname{tg}\theta = E_y/E_x = \operatorname{tg}(\omega t - \beta z + \varphi_1)$ , откуда следует, что

$$\theta = \omega t - \beta z + \varphi_1 + m\pi, \quad (8.6)$$

где  $m$  – целое число.

Равенство (8.6) означает, что угол  $\theta$  в фиксированной точке пространства увеличивается пропорционально частоте. Величина вектора  $\mathbf{E}$  при этом остается неизменной:  $|\mathbf{E}| = E_0$ .

Таким образом, в фиксированной точке *пространства* вектор  $\mathbf{E}$ , оставаясь неизменным по величине, вращается с угловой частотой  $\omega$  вокруг направления  $z_0$ . Конец вектора  $\mathbf{E}$  при этом описывает окружность (рис. 8.4, а). Волны такого типа называют волнами с круговой поляризацией.

Нетрудно убедиться в том, что при  $E_{xm}^0 = E_{ym}^0 = E_0$  волна будет иметь круговую поляризацию, если

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

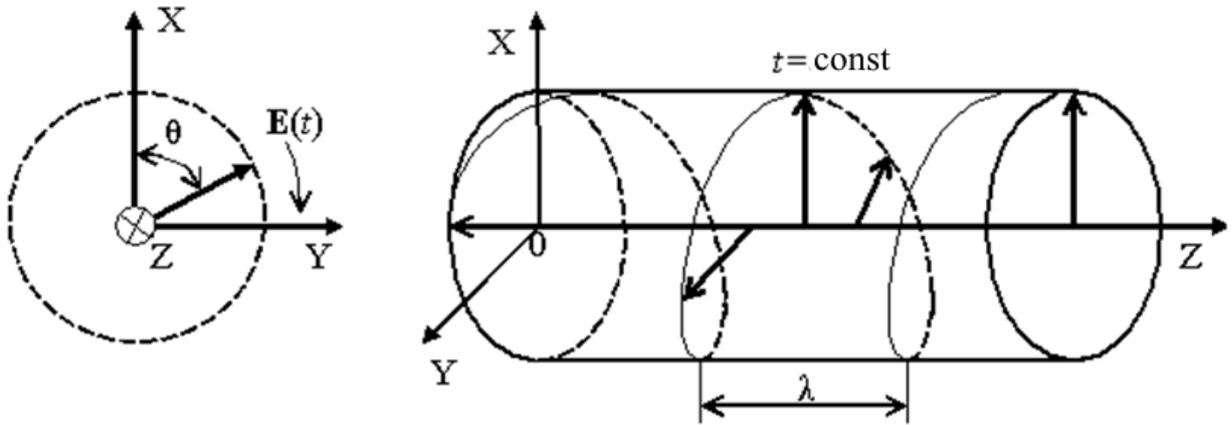


Рис. 8.4

В зависимости от направления вращения вектора  $\mathbf{E}$  различают волны с правой и левой круговой поляризацией. В случае *правой круговой поляризации* вектор  $\mathbf{E}$  вращается по часовой стрелке (если смотреть вдоль направления распространения волны), а в случае *левой круговой поляризации* – против часовой стрелки.

В рассмотренном примере  $E_{xm}^0 = E_{ym}^0 = E_0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$  волна имеет правую круговую поляризацию. Очевидно, что такая же поляризация будет и в том случае, если

$$E_{xm}^0 = E_{ym}^0 = E_0, \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1 \pm 4n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении условий

$$E_{xm}^0 = E_{ym}^0 = E_0, \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}(1 \pm 4n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

волна имеет левую круговую поляризацию.

Таким образом, вектор  $\mathbf{E}$  вращается в направлении от опережающей по фазе составляющей вектора  $\mathbf{E}$  к отстающей. На рис. 8.4 показана ориентация вектора  $\mathbf{E}$ , соответствующего различным значениям координаты  $z$  в фиксированный момент времени, для случая плоской волны с круговой поляризацией, распространяющейся в среде без потерь. Линия, соединяющая концы векторов, является винтовой линией с шагом, равным длине волны. Ее

проекция на плоскость  $XOY$  образует окружность (рис. 8.4). С течением времени изображенная на рис. 8.4 винтовая линия, определяющая ориентацию вектора  $\mathbf{E}$  в зависимости от координаты  $z$ , вращается вокруг оси  $Z$  с угловой частотой  $\omega$ . В случае среды без потерь этот процесс можно трактовать и как перемещение винтовой линии вдоль оси  $Z$  со скоростью  $V_{\Phi} = c = c_0 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , где  $c_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  – скорость света в вакууме.

В случае среды с потерями линия, соединяющая концы векторов  $\mathbf{E}$ , вычисленных в один и тот же момент времени в разных точках оси  $Z$ , представляет собой спираль, радиус которой (расстояние от оси  $Z$  до спирали) изменяется вдоль  $Z$  по закону  $\exp(-\alpha z)$ .

Из проведенного анализа следует, что любая волна круговой поляризации является суперпозицией двух линейно поляризованных волн. Всякую линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с круговой поляризацией.

Пусть вектор  $\mathbf{E}$  линейно поляризованной волны колеблется в плоскости  $XOZ$ . Комплексная амплитуда вектора  $\mathbf{E}$  в этом случае имеет вид:

$$\dot{E}_m = x_0 \dot{E}_0(z) \exp(-i\beta z),$$

где

$$\dot{E}_0(z) = E_0 \exp(-\alpha z) \exp(i\varphi), \quad \dot{E}_0 = \text{const} .$$

В результате получим:

$$\dot{E}_m = (x_0 + y_0) \cdot 0,5 \dot{E}_0(z) \exp(-i\beta z) + (x_0 - iy_0) \cdot 0,5 \dot{E}_0(z) \exp(-i\beta z) . \quad (8.7)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (8.7) описывает волну с левой, а второе – волну с правой круговой поляризацией.

В общем случае вектор  $\mathbf{E}$  определяется формулой (8.3). В фиксированной точке пространства он изменяется и по величине, и по направлению. Найдем форму линии, описываемой при этом концом вектора

Е. Введя обозначение  $\zeta = \omega t - kz$ , получим из (8.3) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_x/E_{xm} &= \cos(\zeta + \varphi_1) = \cos \zeta \cos \varphi_1 - \sin \zeta \sin \varphi_1, \\ E_y/E_{ym} &= \cos(\zeta + \varphi_2) = \cos \zeta \cos \varphi_2 - \sin \zeta \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где

$$E_{xm} = E_{xm}^0 \exp(-\alpha z), \quad E_{ym} = E_{ym}^0 \exp(-\alpha z).$$

Решая систему уравнений (8.8), имеем

$$\cos \zeta = \frac{E_x/E_{xm} \sin \varphi_2 - E_y/E_{ym} \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad \sin \zeta = \frac{E_x/E_{xm} \cos \varphi_2 - E_y/E_{ym} \cos \varphi_1}{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Возводя обе части этих уравнений в квадрат и почленно складывая получающиеся выражения, приходим к уравнению

$$\left(E_x/E_{xm}\right)^2 + \left(E_y/E_{ym}\right)^2 - 2 E_x/E_{xm} E_y/E_{ym} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1),$$

описывающему эллипс, большая ось которого повернута относительно оси X на угол  $\eta$  (рис. 8.5), определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\eta = \frac{2E_{xm}^0 E_{ym}^0}{E_{xm}^2 E_{ym}^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

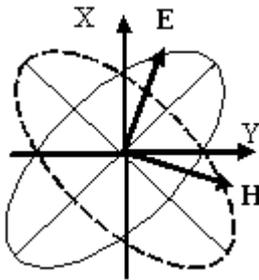


Рис. 8.5

В случае среды с потерями получается аналогичный результат. Отличие состоит лишь в том, что величины полуосей эллипса зависят от координаты  $z$  (уменьшаются с увеличением  $z$ ). Таким образом, в общем случае, т.е. при произвольных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,  $E_{xm}^0$  и  $E_{ym}^0$  в фиксированной точке пространства ( $z$ ) конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс.

Волны такого типа принято называть *эллиптически поляризованными*. Ориентация векторов  $\mathbf{E}$ , соответствующих различным значениям координаты

зв фиксированный момент времени в среде без потерь, аналогична изображенной на рис. 8.4. Отличие состоит в том, что в данном случае проекция винтовой линии, соединяющей концы векторов  $\mathbf{E}$ , на плоскость  $XOY$  образует эллипс (рис. 8.5).

## 8.2. Задачи

8.2.1. Комплексная амплитуда вектора напряжённости электрического поля равна  $\mathbf{E} = i50\mathbf{x}_0 + 50\mathbf{y}_0$ . Определить вид и параметры поляризации поля.

8.2.2. Комплексная амплитуда вектора напряжённости электрического поля равна  $\mathbf{E} = 50\mathbf{x}_0 + i50\mathbf{y}_0$ . Определить вид и параметры поляризации поля.

8.2.3. Комплексная амплитуда вектора напряжённости электрического поля равна  $\mathbf{E} = 50\mathbf{x}_0 - i50\mathbf{y}_0$ . Определить вид и параметры поляризации поля.

8.2.4. Плоская волна частотой  $1 \text{ МГц}$  имеет правую круговую поляризацию и распространяется вдоль оси  $X$ . В некоторый момент времени вектор напряжённости электрического поля  $\mathbf{E} = 5\mathbf{y}_0 \text{ В/м}$ . Какую величину и направление он будет иметь через  $0,25 \text{ мкс}$ .

8.2.5. Плоская волна частотой  $1 \text{ МГц}$  имеет правую круговую поляризацию и распространяется вдоль оси  $Z$ . В некоторый момент времени вектор напряжённости электрического поля  $\mathbf{E} = 5\mathbf{x}_0 \text{ В/м}$ . Какую величину и направление он будет иметь через  $0,75 \text{ мкс}$ .

# ГЛАВА 9. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

## 9.1. Элементы теории и основные формулы

При решении многих практически важных задач нельзя считать, что среда является однородной. На структуру поля и характер распространения волны существенно влияет граница раздела сред, обладающих разными электрическими и магнитными свойствами. Попадая на поверхность раздела сред, электромагнитная волна может частично (или полностью) отразиться либо частично (или полностью) пройти в другую среду. Кроме того, возможно и более сложное явление, называемое дифракцией волн.

Пусть линейно поляризованная плоская электромагнитная волна падает на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух однородных изотропных сред, характеризуемых параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$  соответственно. Введем прямоугольную систему координат  $(x, y, z)$  так, чтобы плоскость  $YOZ$  совпадала с поверхностью раздела, а плоскость падения – с плоскостью  $XOZ$ . Угол  $\varphi$  между направлением распространения волны и нормалью к поверхности раздела будем называть *углом падения* (рис. 9.1).

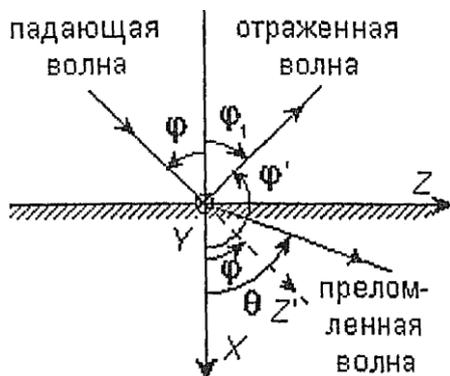


Рис. 9.1

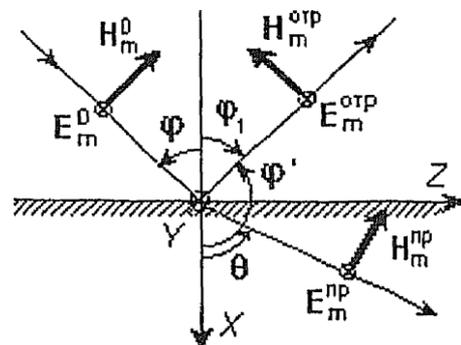


Рис. 9.2

В выбранной системе координат направляющие косинусы, определяющие направление распространения волны,

$$\cos \varphi_x = \cos \varphi, \quad \cos \varphi_y = 0, \quad \cos \varphi_z = \cos (\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi. \quad (9.1)$$

Из (9.1) следует, что фазовый множитель падающей волны имеет вид

$$\exp[-ik_1 (x \cos \varphi + z \sin \varphi)],$$

где  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ .

Предполагается, что падающая волна является нормально поляризованной. В этом случае соответствующий ей вектор напряженности электрического поля ( $\dot{\mathbf{E}}_m^0$ ) параллелен оси  $Y$ . При этом вектор напряженности магнитного поля ( $\dot{\mathbf{H}}_m^0$ ) лежит в плоскости падения (рис. 9.2).

Из физических соображений очевидно, что падающая волна может частично (или полностью) отразиться от границы раздела ( $x=0$ ) и частично (или полностью) пройти во вторую среду. Естественно предположить, что отраженная и преломленная волны будут плоскими.

Если, исходя из этого предположения, удастся найти поле, удовлетворяющее граничным условиям

$$\dot{E}_{1\tau} \Big|_{x=0} = \dot{E}_{2\tau} \Big|_{x=0} \quad \text{и} \quad \dot{H}_{1\tau} \Big|_{x=0} = \dot{H}_{2\tau} \Big|_{x=0}, \quad (9.2)$$

где  $\dot{E}_{1\tau}$ ,  $\dot{H}_{1\tau}$  и  $\dot{E}_{2\tau}$ ,  $\dot{H}_{2\tau}$  – касательные составляющие векторов  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в первой и во второй средах соответственно, то это поле будет решением рассматриваемой задачи.

Граничные условия (9.2) должны выполняться при всех значениях координаты  $z$ . Это возможно только в том случае, если зависимость векторов  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  от переменной  $z$  во всех трех волнах будет одинаковой. Поэтому необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi, \quad (9.3)$$

$$k_2 \sin \theta = k_1 \sin \varphi. \quad (9.4)$$

Так как углы  $\varphi$  и  $\varphi_1$  заключены в интервале  $[0, \pi/2]$ , то из равенства (9.3) следует *первый закон Снеллиуса*  $\varphi = \varphi_1$  ("угол падения равен углу отражения"). Из равенства (9.4) вытекает соотношение  $\sin \theta / \sin \varphi = k_1 / k_2$ , которое в случае идеальных однородных изотропных сред выражает *второй закон Снеллиуса* ("отношение синуса угла преломления к синусу угла падения равно относительному показателю преломления сред  $n_{12}$ "). Действительно, коэффициент преломления среды  $n = c_0 / c$ , где  $c_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – скорость света в вакууме, а  $c = 1 / \sqrt{\epsilon \mu}$  – скорость света (фазовая скорость волны  $V_\phi$ ) в рассматриваемой среде). Следовательно,

$$k_1 / k_2 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} / \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = V_{\phi 1} / V_{\phi 2} = (c / V_{\phi 1}) / (c / V_{\phi 2}) = n_1 / n_2 = n_{12},$$

где  $V_{\phi 1}$  и  $V_{\phi 2}$  – фазовые скорости волны в первой и второй средах соответственно.

## 9.2. Задачи

9.2.1. Плоская волна с амплитудой напряжённости электрического поля  $120 \text{ В/м}$  и частотой  $1500 \text{ МГц}$  распространяется в направлении, образующем с осями  $X$  и  $Y$  углы в  $45$  градусов. Записать аналитическое выражение для этой волны.

9.2.2. Плоская волна с амплитудой напряжённости электрического поля  $10 \text{ В/м}$  и частотой  $150 \text{ МГц}$  распространяется в направлении, образующем с осями  $X$  и  $Z$  углы в  $45$  градусов. Записать аналитическое выражение для этой волны.

9.2.3. Плоская волна распространяется в направлении, образующем с осями  $X$  и  $Y$  углы в  $60$  градусов. Какой угол будет при этом между направлением вектора Пойнтинга и осью  $Z$ ?

9.2.4. Фазовый фронт волны с амплитудой напряжённости электриче-

ского поля  $10 \text{ В/м}$  и частотой  $500 \text{ МГц}$  задан уравнением  $y = \sqrt{3}x$ . Записать аналитическое выражение для этой волны.

9.2.5. Фазовый фронт волны с амплитудой напряжённости электрического поля  $10 \text{ В/м}$  и частотой  $500 \text{ МГц}$  задан уравнением  $y = x$ . Записать аналитическое выражение для этой волны.

9.2.6. Плоская волна, распространяющаяся в воздухе, падает на диэлектрик с относительной проницаемостью  $2,25$ . При этом оказалось, что угол преломления вдвое меньше угла падения. Определить эти углы.

# ГЛАВА 10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ

## 10.1. Волны между параллельными металлическими плоскостями

### 10.1.1. Элементы теории и основные формулы

Совокупность двух параллельных проводящих бесконечных плоскостей, пространство между которыми заполнено диэлектриком, является наиболее простой линией передачи. Анализ электромагнитного поля в этой линии достаточно прост, но, в тоже время, позволяет выяснить основные особенности описания электромагнитных волн в разнообразных линиях передачи.

Полагаем, что плоскости обладают бесконечной проводимостью. Их уравнения имеют вид:  $x = 0$  и  $x = a$  (рис.10.1).

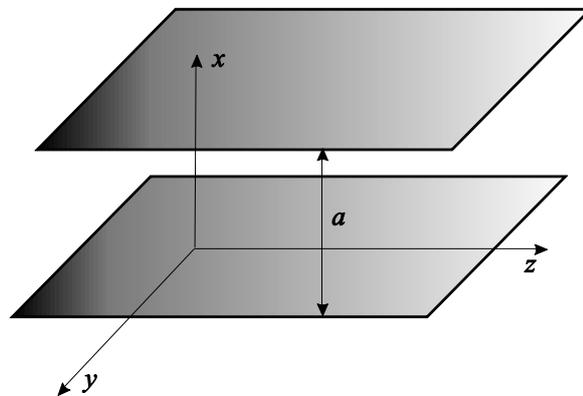


Рис. 10.1 Двухплоскостная линия передачи

Предположим, что источники поля находятся вне пределов интересующей нас области и что волны распространяются по оси  $z$ . Будем также считать, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  искомого поля не зависят от координаты  $y$  ( $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ).

Компоненты поля в линии делятся на продольные ( $\mathbf{E}_z, \mathbf{H}_z$ ), направленные вдоль оси  $z$ , и поперечные ( $\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{x}_0 + E_y \mathbf{y}_0, \mathbf{H}_\perp = H_x \mathbf{x}_0 + H_y \mathbf{y}_0$ ).

Компоненты поля волны, бегущей вдоль оси  $z$ , будем искать в виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) \cdot e^{-i\beta z}, \quad (10.1)$$

где  $\beta$  – коэффициент фазы. При этом мы допускаем, что коэффициент фазы в линии  $\beta$  может отличаться от коэффициента фазы волны в однородном пространстве  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ , где  $\varepsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость материала заполнения.

Они связаны соотношением:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2}, \quad (10.2)$$

где  $\chi$  – поперечный коэффициент фазы.

### ***T*–волна**

Для волны *T* продольные компоненты поля отсутствуют, поперечный коэффициент фазы  $\chi = 0$  и  $\beta = k$ . Поле удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} = 0.$$

Связь между магнитным и электрическим полем выражается следующим образом:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{Z_c} [\mathbf{E} \times \mathbf{z}_0],$$

где  $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$  – характеристическое сопротивление среды.

Компоненты поля *T*–волны лежат в поперечной плоскости, взаимно ортогональны, синфазны и пропорциональны по величине:

$$E_x = A \cdot e^{-ikz}, \quad H_y = \frac{A}{Z_c} \cdot e^{-ikz}.$$

Мгновенные значения компонент поля *T*–волны:

$$E_x(t) = A \cdot \cos(\omega t - kz), \quad H_y(t) = \frac{A}{Z_c} \cos(\omega t - kz).$$

Свойства и параметры *T*–волны совпадают со свойствами и параметрами плоской волны в пространстве, заполненном средой с теми же параметрами  $\varepsilon_a, \mu_a$ .

Поля *T*–волны имеют по одной компоненте. Силовые линии являются

прямыми. В картине силовых линий  $T$ -волны меняется лишь их густота при перемещении вдоль оси  $z$ .

### **$E$ -волна**

Для нахождения волн класса  $E$  необходимо решить *мембранное уравнение*:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_z + \chi^2 \mathbf{E}_z = 0. \quad (10.3)$$

Запишем (10.3) в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial x^2} + \chi^2 \mathbf{E}_z = 0. \quad (10.4)$$

Решение уравнения (10.4) для продольных компонент поля  $E$ -волны имеет вид:

$$E_z = B \sin(\chi x), \quad (10.5)$$

где  $\chi = \frac{m\pi}{a}$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots$

Поперечные компоненты поля  $E$ -волны:

$$E_x = -i \frac{\beta}{\chi} B \cos(\chi x), \quad H_y = -i \frac{\omega \varepsilon_a}{\chi} B \cos(\chi x). \quad (10.6)$$

Мгновенные значения компонент поля  $E$ -волны:

$$\begin{cases} E_z(t) = \operatorname{Re}\{B \sin(\chi x) e^{-i\beta z} e^{i\omega t}\} = B \sin(\chi x) \cos(\omega t - \beta z), \\ E_x(t) = \frac{\beta}{\chi} B \cos(\chi x) \sin(\omega t - \beta z), \\ H_y(t) = \frac{\omega \varepsilon_a}{\chi} B \cos(\chi x) \sin(\omega t - \beta z). \end{cases} \quad (10.7)$$

Для любого значения  $m$  и  $a$  можно найти такую частоту колебаний, при которой коэффициент фазы обращается в нуль. При этом коэффициент фазы:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{m\pi}{a}. \quad (10.8)$$

Частота колебаний электромагнитного поля, определенная из последнего равенства, имеет название критической частоты и обозначается  $f_{\text{кр}}^m$ . Нетрудно видеть, что у каждого типа волны  $E_m$  свое значение критической частоты. *Критическая частота* определяется по формуле:

$$f_{\text{кр}}^m = \frac{m}{2a\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (10.9)$$

Для каждой критической частоты можно рассчитать соответствующую ей критическую длину волны:

$$\lambda_{\text{кр}}^m = \frac{c}{f_{\text{кр}}^m}. \quad (10.10)$$

Выражение (10.7) волн  $E$ -класса для каждого  $m = 1, 2, 3, \dots$  описывает свой тип волны  $E_m$ .

### **$H$ -волна**

Для нахождения волн  $H$ -класса необходимо решить мембранное уравнение:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{H}_z + \chi^2 \mathbf{H}_z = 0. \quad (10.11)$$

Запишем (10.10) в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_z}{\partial x^2} + \chi^2 \mathbf{H}_z = 0. \quad (10.12)$$

Решение уравнения (10.12) для продольных компонент поля  $H$ -волны имеет вид:

$$H_z = B \sin(\chi x), \quad (10.13)$$

где  $\chi = \frac{m\pi}{a}$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots$

Поперечные компоненты поля  $H$ -волны:

$$H_x = i \frac{\beta}{\chi} B \sin(\chi x), \quad E_y = -i \frac{\omega\mu_a}{\chi} B \sin(\chi x) \quad (10.14)$$

Мгновенные значения компонент поля  $H$ -волны:

$$\begin{cases} H_z(t) = \text{Re}\{A \cos(\chi x) e^{-i\beta z} e^{i\omega t}\} = A \cos(\chi x) \cos(\omega t - \beta z), \\ H_x(t) = -\frac{\beta}{\chi} A \sin(\chi x) \sin(\omega t - \beta z), \\ H_y(t) = \frac{\omega\mu_a}{\chi} A \sin(\chi x) \sin(\omega t - \beta z). \end{cases} \quad (10.15)$$

Выражение (10.15) волн  $H$ -класса для каждого  $m = 1, 2, 3, \dots$  описывают свой тип волны  $H_m$ .

### **10.1.2. Задачи**

10.1.1. Электромагнитная  $E$ -волна распространяется в идеальном диэлектрике между двумя параллельными бесконечными сверхпроводящими плоскостями под углом  $\varphi$  к указанным поверхностям. Записать выражения для характеристического сопротивления в направлении распространения, критической длины волны и фазовой скорости.

10.1.2. Записать выражения для компонент электромагнитной волны  $H$ -типа, распространяющейся в идеальном диэлектрике между двумя параллельными, бесконечными идеально проводящими поверхностями. Записать выражения для основных характеристик этой волны.

10.1.3. Какие типы волн могут распространяться между параллельными сверхпроводящими плоскостями при частоте  $f = 6 \text{ ГГц}$  и расстоянии между пластинами в  $6 \text{ см}$ . Записать выражения для электрических и магнитных составляющих поля, а также найти основные параметры этих волн.

10.1.4. Пользуясь данными предыдущих задач, показать, что в пространстве, ограниченном двумя параллельными проводящими поверхностями, не могут распространяться волны, длиннее критических.

## **10.2. Прямоугольный металлический волновод**

### **10.2.1. Элементы теории и основные формулы**

Прямоугольный металлический волновод представляет собой металлическую трубу с размерами сечения  $a \times b$  (рис.10.1). Внутри волновод заполнен материалом с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ . На практике в подавляющем большинстве случаев внутри волновода находится просто воздух ( $\epsilon = \mu = 1$ ).

В волноводе могут существовать волны  $E$ - и  $H$ -классов. Эти классы делятся на типы волн  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$ . Каждой комбинации целых чисел  $m$  и  $n$  соответствует своя структура поля.

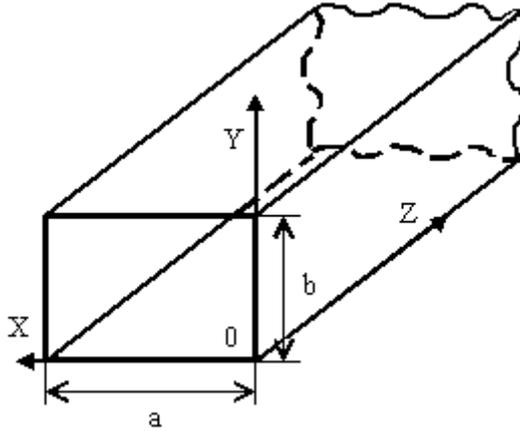


Рис.10.2. Прямоугольный металлический волновод

### **$E$ -волны**

Решение задачи для  $E$ -волн должно удовлетворять волновому уравнению для составляющей  $E_z$  и граничным условиям на стенках волновода, которые считаем идеально проводящими. Мембранное уравнение для продольной компоненты поля имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 E_z = 0. \quad (10.16)$$

Решение для продольной составляющей поля

$$E_z(x, y) = E_0 \sin(\xi x) \sin(\eta y), \quad (10.17)$$

где  $\xi_m = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\eta_n = \frac{n\pi}{b}$ ,  $m$  и  $n = 1, 2, 3 \dots$  – целые положительные числа

Найденное решение существует только при определенных значениях поперечных коэффициентов  $\xi_m$  и  $\eta_n$ . Вместе они определяют поперечный коэффициент фазы волновода  $\chi_{mn}$ . Он зависит от выбора чисел  $m$  и  $n$  и определяет критическую частоту:

$$f_{кр}^{mn} = \frac{v}{2\pi} \chi_{mn} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (10.18)$$

Каждой комбинации  $m$  и  $n$  соответствует своя структура поля  $E_z(x, y)$ , т.е. определенный тип волны, который обозначается  $E_{mn}$ . Первый индекс  $m$  определяет число полувольт в структуре  $E_z$ , укладываемых вдоль оси  $x$ , а второй  $n$  – число полувольт вдоль оси  $y$ . Чем больше значения  $m$  и  $n$ , тем выше  $f_{кр}^{mn}$ .

По условию  $f > f_{кр}^{mn}$  определяется частота, необходимая для существования волны соответствующего типа.

Поперечные составляющие поля волны  $E_{mn}$ :

$$\mathbf{E}_{\perp} = -i \frac{\beta}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} E_z = -i \frac{\beta}{\chi^2} E_0 (x_0 \xi \cos \xi x \sin \eta y + y_0 \eta \sin \xi x \cos \eta y);$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = -\frac{\omega \varepsilon_a}{\beta} [\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{z}_0] = -i \frac{k}{\chi^2 z_c} E_0 (y_0 \xi \cos \xi x \sin \eta y - x_0 \eta \sin \xi x \cos \eta y).$$

Простейшая волна  $E$ -класса с минимальными индексами  $m=1$  и  $n=1$  обозначается как  $E_{11}$ . Она имеет минимальную критическую частоту из всех  $E$ -волн.

### ***H*-волны**

Мембранное уравнение для продольной компоненты поля  $H_z$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \chi^2 H_z = 0. \quad (10.19)$$

Продольная составляющая поля  $H$ -волны:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos(\xi x) \cos(\eta y). \quad (10.20)$$

Поперечные составляющие поля волны  $H_{mn}$ :

$$\mathbf{H}_{\perp} = -i \frac{\beta}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} H_z = -i \frac{\beta}{\chi^2} H_0 (-x_0 \xi \sin \xi x \cos \eta y - y_0 \eta \cos \xi x \sin \eta y);$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\omega \mu_a}{\beta} [\mathbf{H}_{\perp} \times \mathbf{z}_0] = -i \frac{k z_c}{\chi^2 z_c} H_0 (y_0 \xi \sin \xi x \cos \eta y - x_0 \eta \cos \xi x \sin \eta y).$$

Простейшие волны этого класса с минимальными индексами:  $H_{10}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{11}$ .

Волну, обладающую в волноводе данной формы минимальной критической частотой, называют основной. Наименьшие индексы у волн  $H_{10}$  и  $H_{01}$ . Если принять  $a > b$ , то  $f_{кр}^{10} > f_{кр}^{01} > f_{кр}^{11}$  и критическая частота волны меньше, чем критические частоты волн  $H_{10}$ ,  $H_{01}$  и  $E_{11}$  и всех остальных волн с еще более сложной структурой. Поэтому волна  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе с  $a > b$  является основной, а все остальные типы волн именуют волнами высших порядков.

*Фазовая скорость* волны в свободном пространстве, заполненным таким же материалом с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} . \quad (10.21)$$

Для каждой критической частоты можно рассчитать соответствующую ей *критическую длину волны*:

$$\lambda_{кр}^{mn} = \frac{v}{f_{кр}^{mn}} . \quad (10.22)$$

*Коэффициент фазы* волны в волноводе:

$$\beta_{mn} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2} . \quad (10.23)$$

Он всегда меньше волнового числа свободного пространства

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} . \quad (10.24)$$

*Длина волны* в волноводе  $\lambda_g$  отличается от длины волны в свободном пространстве  $\lambda = \frac{v}{f}$ . Она определяется выражением:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}^{mn}}\right)^2}} . \quad (10.25)$$

*Фазовой скоростью* волны называется скорость движения поверхности равных фаз. Она определяется выражением:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2}}. \quad (10.26)$$

Мощность волны, передаваемой направляющей системой, определяется интегрированием среднего значения вектора Пойнтинга по поперечному сечению системы  $S_{\perp}$ :

$$P = \int_{S_{\perp}} \Pi dS = \int_{S_{\perp}} [\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}] dS. \quad (10.27)$$

Затухание волны в волноводе вызывается потерями в металле стенок с конечной проводимостью  $\sigma$  и потерями в диэлектрике, заполняющем волновод. Обычно определяющими являются потери в металле стенок. Коэффициент затухания  $\alpha$  волны в волноводе входит в выражения для компонент поля в виде:

$$E = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad H = H_0 \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

Для волн  $E_{mn}$  коэффициент затухания равен:

$$\alpha_{E_{mn}} = \frac{2R_s}{bZ_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2}} \cdot \frac{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}, \quad (10.28)$$

где  $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}$  – поверхностное сопротивление проводника,  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$  – характеристическое сопротивление вакуума.

Для волн  $H_{mn}$  при  $m \neq 0, n \neq 0$  коэффициент затухания равен:

$$\alpha_{H_{mn}} = \frac{2R_s}{bZ_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2}} \left[ \frac{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2 \frac{b}{a}}{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2} + \left(\frac{f_{кр}^{mn}}{f}\right)^2 \frac{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2} \right]. \quad (10.29)$$

### 10.2.2. Задачи

10.2.1. Прямоугольный металлический волновод имеет размеры  $a=30$  мм,  $b=12$  мм. Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f=9,5$  ГГц? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффи-

циент фазы для основной волны.

10.2.2. Выбрать размеры прямоугольного металлического волновода для работы с основной волной на частоте  $f=10$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы для основной волны.

10.2.3. Выбрать размеры прямоугольного металлического волновода для работы с волной  $H_{11}$  на частоте  $f=10$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.2.4. Выбрать размеры прямоугольного металлического волновода для работы с волной  $H_{20}$  на частоте  $f=5$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.2.5. Выбрать размеры прямоугольного металлического волновода для работы с волной  $E_{11}$  на частоте  $f=4,3$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.2.6. Прямоугольный металлический волновод имеет размеры  $a=30$  мм,  $b=12$  мм. Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f=15,5$  ГГц? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы для основной волны.

### 10.3. Круглый металлический волновод

#### 10.3.1. Элементы теории и основные формулы

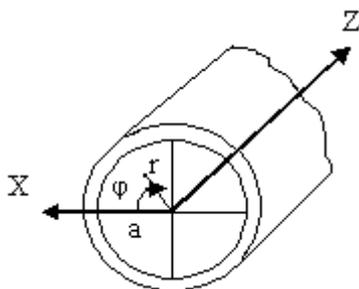


Рис. 10.3. Круглый металлический волновод

При анализе волн в круглом волноводе (рис. 10.3) считаем, что заполняющая его среда – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ , а оболочка обладает бесконечной проводимостью. В таком волноводе возможно раздельное существование  $E$ - и  $H$ -волн и невозможно существование  $T$ -волн.

При анализе естественно использовать цилиндрическую систему координат, совместив ось  $Z$  с продольной осью волновода. Для упрощения изложения вводят функцию  $w=w(r, \varphi, z) = w^0(r, \varphi) \exp(-i\beta z)$ , которая в случае  $E$ -волн равна  $E_{mz}$ , а в случае  $H$ -волн –  $H_{mz}$ . Функция  $w^0(r, \varphi)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw^0}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^0}{d\varphi^2} + \gamma_i^2 w^0 = 0, \quad (10.30)$$

где, как обычно,  $\gamma_i^2 = k^2 - \beta^2$ .

В случае  $E$ -волн поперечные составляющие векторов поля выражаются через продольные формулами:

$$E_{mv}(r, \varphi, z) = E_v^0(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \quad v = r, \varphi, z,$$

$$H_{mv}(r, \varphi, z) = H_v^0(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \quad v = r, \varphi,$$

где

$$E_z(r, \varphi) = E_{0z} J_m(\gamma_i, r) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

$$E_r(r, \varphi) = -i(\beta/\gamma_i) E_{0z} J_m(\gamma_i, r) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

$$E_\varphi(r, \varphi) = i(m/r)(\beta/\gamma_i) E_{0z} J_m(\gamma_i, r) \sin m(\varphi - \varphi_0),$$

$$H_r(r, \varphi) = (\omega\varepsilon/\beta) E_{0\varphi}(r, \varphi),$$

$$H_\varphi(r, \varphi) = (\omega\varepsilon/\beta) E_{0r}(r, \varphi),$$

$$H_z(r, \varphi) = 0,$$

$J_m(\gamma, r)$ ,  $N_m(\gamma, r)$  – функции Бесселя и Неймана,  $m$  – определяет порядок функции.

Имеется бесконечное множество значений аргумента, при которых функция Бесселя равна нулю. Эти значения называют корнями функции Бесселя. Обозначая  $n$ -й корень функции Бесселя  $m$ -го порядка через  $v_{mn}^E$ , находим  $\gamma_i = v_{mn}^E/a$ . Параметр  $\beta$  вычисляется по известной формуле.

Как видно, в круглом волноводе возможно существование  $E$ -волн различной структуры. Наименование этих волн производится в соответствии с обозначением корней уравнения. Например, корню  $v_{01}^E$  соответствует волна  $E_{01}$ , корню  $v_{12}^E$  – волна  $E_{12}$ , корню  $v_{mn}^E$  – волна  $E_{mn}$ .

Зависимость структуры поля волны от угла  $\varphi$  определяется индексом  $m$ . Поперечное сечение волновода можно условно разделить на  $m$  секторов с одинаковой структурой поля в каждом секторе: поле волны периодически по углу  $\varphi$  с периодом  $2\pi/m$ . Индекс  $m$ , таким образом, равен числу периодов структуры поля волны, укладывающихся на интервале  $[0, 2\pi]$  изменения угла  $\varphi$ . Равенство нулю индекса  $m$  означает, что структура поля волны обладает осевой симметрией (не зависит от угла  $\varphi$ ).

На распределение составляющих векторов поля вдоль радиуса в интервале  $[0, a]$  влияют оба индекса  $m$  и  $n$ . При этом  $m$  определяет порядок функции Бесселя, а  $n$  – число вариаций составляющих векторов поля при изменении  $r$  от 0 до  $a$ : при  $n=1$  составляющие векторов поля не изменяют знак (одна вариация), при  $n=2$  они один раз изменяют знак (две вариации) и т.д.

Каждому типу волны соответствует своя критическая длина волны, связанная с постоянной  $\gamma_c$  соотношением

$$\lambda_{крE_{mn}} = 2\pi a / v_{mn}^E. \quad (10.31)$$

Несколько первых корней функций Бесселя  $v_{mn}^E$  порядке их возрастания и соответствующие критические длины волн, рассчитанные по формуле (10.31), приведены в табл. 10.1. Низшим типом среди волн  $E$  в круглом волноводе является волна  $E_{01}$ .

Фазовая скорость, скорость распространения энергии, длина волны в волноводе и характеристическое сопротивление рассчитываются по известным формулам.

В случае  $H$ -волн поперечные составляющие векторов поля выражаются через  $H_{mz}$ .

$$H_{mv}(r, \varphi, z) = H_v^0(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \quad v = r, \varphi, z,$$

$$E_{mv}(r, \varphi, z) = E_v^0(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \quad v = r, \varphi,$$

Обозначая корни уравнения через  $v_{mn}^H$ , находим, что

$$\lambda_{крHmn} = 2\pi a / v_{mn}^H. \quad (10.32)$$

Таблица 10.1

|            |          |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Тип волны  | $E_{01}$ | $E_{11}$ | $E_{21}$ | $E_{02}$ | $E_{31}$ | $E_{12}$ |
| $v_{mn}^E$ | 2,405    | 3,832    | 5,135    | 5,520    | 6,379    | 7,016    |
| Тип волны  | $H_{11}$ | $H_{21}$ | $H_{01}$ | $H_{31}$ | $H_{41}$ | $H_{12}$ |
| $v_{mn}^H$ | 1,84     | 3,05     | 3,83     | 4,20     | 5,32     | 5,33     |

Как видно, в круглом волноводе возможно существование  $H$ -волн различной структуры, которые принято обозначать  $H_{mn}$ . Нумерация  $H$ -волн аналогична нумерации волн  $E_{mn}$ . Индекс  $m$  совпадает с порядком функции Бесселя, а  $n$  – с номером нуля первой производной функции Бесселя  $m$ -го порядка. Также, как и в случае  $E$ -волн, структура поля волны  $H_{mn}$  периодична по углу  $\varphi$  с периодом  $2n/m$ , т.е. индекс  $m$  равен числу периодов структуры поля волны  $H_{mn}$ , укладывающихся на интервале  $[0, 2\pi]$  изменения угла  $\varphi$ . Равенство нулю индекса  $m$  означает, что поле волны не зависит от угла  $\varphi$ . Индекс  $n$  равен числу вариаций составляющих векторов поля вдоль радиуса волновода.

Низшим типом среди не только волн  $H$ , но и всех волн в круглом волноводе является волна  $H_{11}$ . Интересно отметить, что структура поля

этой волны близка к структуре поля волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе, также имеющей наибольшую критическую длину волны.

Параметры  $H$ -волн  $\beta$ ,  $v_\phi$ ,  $v_z$  и  $\Lambda$  вычисляются по известным формулам (10.21) – (10.26).

Основной волной круглого волновода является волна  $H_{11}$ , а первым высшим типом  $-E_{01}$ . Условие одноволновости имеет вид  $2,61a < \lambda < 3,41a$ , откуда

$$\lambda/3,41 < a < \lambda/2,61.$$

Мощность, переносимая волной по круглому волноводу (мощность бегущей волны), для волны  $H_{11}$  рассчитывается по формуле:

$$P_{\text{ср}}^{H_{11}} = \frac{\pi a^2 Z_c H_{0z}^2}{4\sqrt{1-[\lambda/3,41 \cdot a]^2}} \left( \frac{2\pi a}{v_{11}^H \Lambda_{11}^H} \right)^2 J_1^2 \cdot v_{11}^H, \quad (10.33)$$

где  $\Lambda_{11}^H = \lambda/\sqrt{1-[\lambda/3,41 \cdot a]^2}$  – длина волны  $H_{11}$  в волноводе.

Коэффициент затухания  $\alpha_M$ , соответствующий волне  $H_{11}$ , вычисляется по формуле:

$$\alpha_{mH_{11}} = \frac{R_S[0,418+(\lambda/3,41 \cdot a)^2]}{a Z_c \sqrt{1-[\lambda/3,41 \cdot a]^2}}. \quad (10.34)$$

### 10.3.2. Задачи

10.3.1. Круглый металлический волновод имеет радиус  $a=50$  мм. Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f=5,5$  ГГц? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы для основной волны.

10.3.2. Выбрать диаметр круглого металлического волновода для работы с волной  $H_{11}$  на частоте  $f=10$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.3.3. Выбрать диаметр круглого металлического волновода для рабо-

ты с волной  $E_{01}$  на частоте  $f=7$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.3.4. Выбрать диаметр круглого металлического волновода для работы с волной  $H_{21}$  на частоте  $f=1$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.3.5. Выбрать диаметр круглого металлического волновода для работы с волной  $H_{01}$  на частоте  $f=2,5$  ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.3.6. Круглый металлический волновод имеет радиус  $a=30$  мм. Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f=9,5$  ГГц? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы для основной волны.

## 10.4. Коаксиальная линия

### 10.4.1. Элементы теории и основные формулы

Коаксиальная линия (рис. 10.4) является направляющей системой закрытого типа, состоящей из двух соосных проводников, изолированных друг от друга. Как обычно, будем считать, что проводники обладают бесконечно большой проводимостью, а пространство между ними заполнено идеальным диэлектриком с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . При этих предположениях в коаксиальной линии могут распространяться волны  $T$ ,  $E$  и  $H$ . Так как  $\lambda_{кр}^T = \infty$ , то во всех линиях, в которых может распространяться  $T$ -волна, эта волна является основной.

Совместим ось  $Z$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$  с осью внутреннего проводника коаксиальной линии (рис. 10.3). Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$   $T$ -волны представим в виде:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(r, \varphi, z) = \mathbf{E}^0(r, \varphi) \exp(-ikz), \quad \dot{\mathbf{H}}_m(r, \varphi, z) = \mathbf{H}^0(r, \varphi) \exp(-ikz),$$

где векторы  $\mathbf{E}^0(r, \varphi)$  и  $\mathbf{H}^0(r, \varphi)$  не имеют продольных составляющих. Для их определения достаточно решить задачу о поле постоянного тока, текущего в такой же линии. Из закона полного тока следует, что  $\mathbf{H}^0(r, \varphi) \equiv \mathbf{H}^0(r)$ , поэтому  $\mathbf{E}^0(r, \varphi) = \mathbf{E}^0(r) = \mathbf{r}_0 |Z_c| / (2\pi r)$ . В случае  $f \neq 0$  нужно полученные выражения умножить на  $\exp(-ikz)$ . В результате находим:

$$\begin{aligned} E_m(r, \varphi, z) &= r^0 \frac{I^0 Z_c}{2\pi r} \exp(-ikz) \\ H_m(r, \varphi, z) &= \varphi^0 \frac{I^0}{2\pi r} \exp(-ikz) \end{aligned} \quad (10.35)$$

Формула (10.35) справедлива в области  $R_1 \leq r \leq R_2$ , где  $R_1$  – радиус центрального проводника, а  $R_2$  – внутренний радиус внешнего проводника. Структура поля  $T$ -волны в коаксиальной линии показана на рис. 10.5. Как и у любой другой  $T$ -волны, фазовая скорость и скорость распространения энергии  $T$ -волны в коаксиальной линии равны скорости света в среде, заполняющей линию.

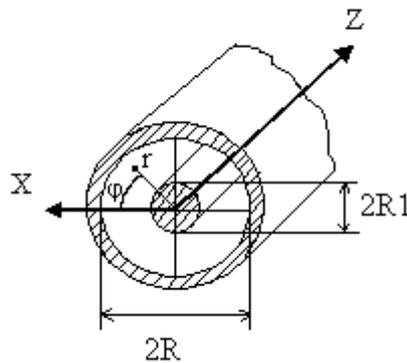


Рис. 10.4. Коаксиальная линия передачи

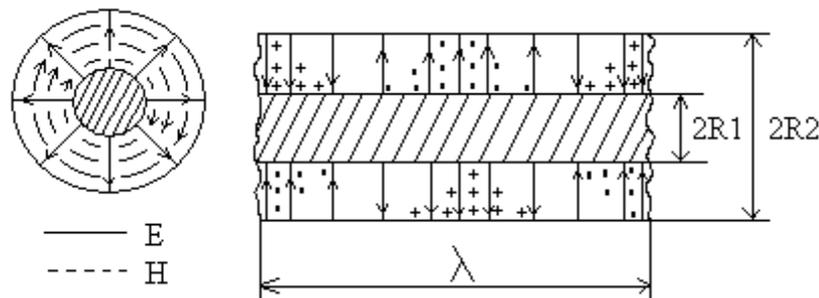


Рис.10.5. Структура поля  $T$ -волны в коаксиальной линии передачи

Так как поле в поперечном сечении линии (векторы  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$ ) у  $T$ -волны имеет потенциальный характер, можно говорить о токе и напряжении в коаксиальной линии. Комплексные амплитуды тока и разности потенциалов между центральным и внешним проводниками равны соответственно  $i_m = I^0 \exp(-ikz)$  и  $\dot{U} = \int_{R_2}^{R_1} E_{mr} dr = \frac{I^0 z_c}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \exp(-ikz)$ .

Отношение  $U_m$  к  $I_m$  в режиме бегущей волны называют *волновым сопротивлением линии*:

$$Z_B = U_m / I_m.$$

Для коаксиальной линии:

$$Z_B = U_m / I_m = \frac{z_c}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (10.36)$$

Отметим, что волновое сопротивление линии можно выразить через ее *погонную емкость*:

$$Z_B = U_m / I_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{C}}, \text{ Ом,}$$

где  $C$  – погонная емкость линии.

Первым высшим типом волны в коаксиальной линии при любом диаметре внутреннего проводника является волна  $H_{11}$ . При малых значениях  $R_1$  критическая длина волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии приближенно равна критической длине волны  $H_{11}$  в круглом волноводе, т.е.

$$\lambda_{\text{кр}H_{11}} \approx 3,41R_2. \quad (10.37)$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда  $R_1 \cong R_2$ . Критические частоты волны  $H_{11}$  в коаксиальной линии при  $R_1 \rightarrow R_2$  и волны  $H_{20}$  в прямоугольном волноводе также совпадают. Критическая длина волны  $H_{20}$  равна поперечному размеру широкой стенки прямоугольного волновода. В изогнутом волноводе можно считать  $a \cong \pi(R_1 + R_2)$ . Следовательно, при  $R_1 \rightarrow R_2$

$$\lambda_{\text{кр}H_{11}} \cong \pi(R_1 + R_2) \cong 3,41R_2(1 + R_1/R_2). \quad (10.38)$$

Можно без большой погрешности пользоваться формулой (10.38) не только при  $R_1 \approx R_2$ , но и при произвольных значениях  $R_1$  и  $R_2$ .

В коаксиальной линии одноволновый режим сохраняется при  $\lambda > \lambda_{кр H11}$  при  $\lambda > \pi(R_1 + R_2)$ .

Мощность, переносимая  $T$ -волной по коаксиальной линии,

$$P_{cp}^T = \frac{1}{2Z_c} \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^{2\pi} |\dot{E}_{mr}|^2 d\varphi = \frac{\pi E_0^2 R_1}{Z_c} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (10.39)$$

где  $E_0 = I^0 Z_c / (2\pi R_1)$  – амплитуда напряженности электрического поля на поверхности внутреннего проводника (наибольшее значение составляющей  $E_r$ ). Пользуясь формулой (10.39), нетрудно найти условие, при котором величина  $E_0^2$  будет минимальной. Для этого выразим из (10.39)  $E_0^2$  через  $P_{cp}^T$  и, считая  $P_{cp}^T$  и  $R_2$  постоянными, найдем значение  $R_1$ , соответствующее минимуму  $E_0^2$ . В результате получим соотношение  $\ln(R_2/R_1) = 0,5$ , из которого следует  $R_2 = \sqrt{eR_1}$ . При таком соотношении между радиусами проводников получается наибольшее значение предельной мощности  $P_{пред}$ , а волновое сопротивление коаксиальной линии будет равно:  $Z_B = \frac{30\sqrt{\mu r}}{\epsilon_r}$  Ом.

При воздушном заполнении линии пробой возникает при  $E_0 = 30$  кВ/см. Подставляя это значение в (10.39) и учитывая, что в рассматриваемом случае  $Z_c = 120\pi$ , а  $\ln \frac{R_2}{R_1} = 0,5$ , получаем:

$$P_{пред} = 3,75 \cdot 10^3 R_1^2 \text{ кВт},$$

где величина  $R_1$  выражена в сантиметрах.

Определим затухание, обусловленное потерями в металлических проводниках:

$$\alpha_m = \frac{R_s}{2Z_c R_2} \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (10.40)$$

### **10.4.2. Задачи**

10.4.1. В коаксиальном кабеле с диэлектрическим заполнением (относительная диэлектрическая проницаемость равна 2,25) на частоте  $f=300$  МГц распространяется  $T$ -волна. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.4.2. В коаксиальном кабеле с диэлектрическим заполнением (относительная диэлектрическая проницаемость равна 4,4) на частоте  $f=650$  МГц распространяется  $T$ -волна. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

10.4.3. В коаксиальном кабеле с диэлектрическим заполнением (относительная диэлектрическая проницаемость равна 5,8) на частоте  $f=1550$  МГц распространяется  $T$ -волна. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы.

## **10.5. Объемные резонаторы**

### **10.5.1. Элементы теории и основные формулы**

Простейшие типы объемных резонаторов представляют собой часть пространства, ограниченную со всех сторон металлической оболочкой. Сюда относятся резонаторы в виде короткозамкнутых отрезков коаксиальной линии, полых металлических волноводов и др. По аналогии с направляющими системами резонаторы этого типа называют закрытыми.

Рассмотрим, например, отрезок закрытой линии передачи, в котором возбуждена волна одного типа, конец линии, удаленный от точки питания, замкнем накоротко с помощью идеально проводящей металлической пластины, перпендикулярной продольной оси линии (режим короткого замыкания). Начало координат совместим с короткозамыкающей плоскостью, ориентируя ось  $z$  параллельно продольной оси линии. Так как коэффициент отражения от идеально проводящей плоскости для касательной к ней (т.е. перпен-

дикулярной оси  $Z$ ) составляющей вектора напряженности электрического поля равен  $-1$ , то комплексная амплитуда этой составляющей в произвольном сечении рассматриваемого отрезка определяется выражением  $E_{m\perp} = E_1^0 [\exp(i\beta z) - \exp(-i\beta z)] = 2iE_1^0 \sin(\beta z)$ , где  $E_1^0$  – вектор, связанный с комплексной амплитудой напряженности электрического поля падающей волны. При отражении от металлической плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ , возбуждения более высоких по порядку либо более низких типов волн не происходит.

Длина объемного резонатора равна целому числу полуволн колебания, распространяющегося в линии:

$$l = p \left( \frac{\Lambda}{2} \right). \quad (10.41)$$

Найдем резонансную длину волны резонатора:

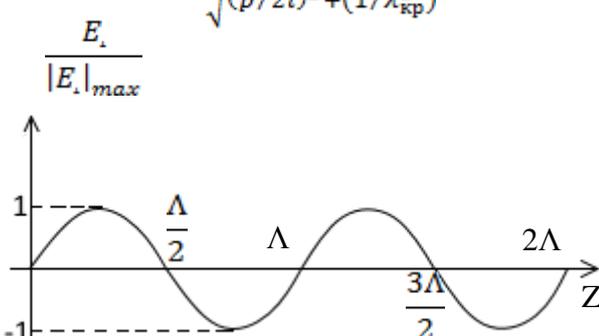
$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{\sqrt{(p/2l)^2 + (1/\lambda_{\text{кр}}^2)}}. \quad (10.42)$$


Рис. 10.6

Классификация колебаний в объемных резонаторах, представляющих собой короткозамкнутый отрезок направляющей системы, осуществляется в соответствии с типом волны, стоячая волна которого образуется в резонаторе. Чтобы различать колебания с различным числом полуволн, укладываемых вдоль оси  $Z$  резонатора, в указатель типа волны вводят дополнительный индекс  $p$ , равный числу полуволн в стоячей волне. Например, если в прямоугольном резонаторе колебание представляет собой стоячую волну,

образованную в результате полного отражения волны  $H_{10}$ , причем вдоль оси  $Z$  уложилось четыре полуволны, то такая структура поля обозначается  $H_{104}$ . Аналогичный смысл имеют обозначения  $H_{mnp}$ ,  $E_{mnp}$  и др.

Так как у  $T$ -волн критическая длина волны равна бесконечности, в этом случае

$$\lambda_{\text{ср}}^T = 2l/p, p = 1, 2, 3 \dots \quad (10.43)$$

Вывод формул (10.42) и (10.43) основан на предположении, что у волны, распространяющейся в линии передачи, обязательно существуют поперечные составляющие электрического поля, обращающиеся в нуль на короткозамыкающих пластинах. Для волн  $H_{mnp}$  и  $T$  это условие, очевидно, выполняется всегда, так как у этих волн вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. У волн  $E_{mnp}$  при  $\lambda = \lambda_{\text{ср}}^{E_{mnp}}$  поперечные составляющие вектора напряженности электрического поля равны нулю в любом сечении линии передачи. В то же время продольная составляющая напряженности электрического поля и поперечный вектор магнитного поля отличны от нуля. Поэтому при  $\lambda_0 = \lambda_{\text{ср}}^{E_{mnp}}$  короткозамыкающие пластины можно вводить в произвольные сечения линии с волной  $E_{mnp}$ , т.е. резонансная частота такого резонатора не зависит от его длины. Можно заметить, что данный результат есть частный случай (10.43), так как  $\lambda_0 = \lambda_{\text{ср}}^{E_{mnp}}$  при  $p=0$ . Следовательно, у колебаний  $E_{mnp}$   $p > 0$ , тогда как у волн  $H_{mnp}$ ,  $T$  всегда  $p > 0$ .

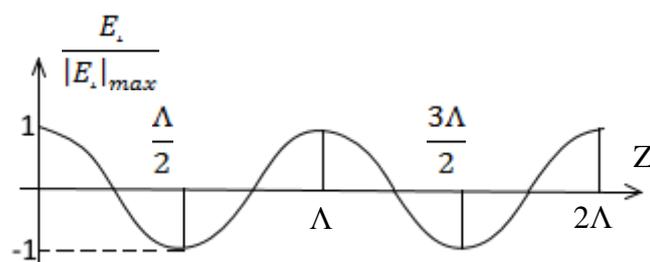


Рис. 10.7

Зависимость поперечной составляющей вектора  $\mathbf{E}$  от координаты  $z$  показана на рис.10.6. Образуя второй обрыв рассматриваемой линии на расстоянии  $l = p(\lambda/2)$ ,  $p = 1, 2, \dots$  от ее конца, получаем объемный резонатор.

Коаксиальный резонатор представляет собой отрезок коаксиальной линии, замкнутый с обоих концов проводящими пластинками. Поперечные размеры коаксиального резонатора, так же как и поперечные размеры коаксиальной линии, выбираются в соответствии с известными формулами, что обеспечивает отсутствие резонансов высших типов волн. Длина коаксиального резонатора  $l = p\lambda_{\text{ср}}/2$ .

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в объемном резонаторе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Если в какой-то момент времени, например  $t = 0$ , электрическое поле обращается в нуль, то магнитное поле в этот момент времени имеет экстремум. Через четверть периода ( $t = T/4$ ) электрическое поле достигает экстремума, а магнитное обращается в нуль.

Определим *собственную добротность* коаксиального резонатора, предполагая, что он заполнен диэлектриком без потерь. Вектор напряженности магнитного поля в резонаторе, как и в коаксиальной линии, имеет одну  $\varphi$ -ю составляющую, равную

$$\dot{H}_{m\varphi} = \frac{I^0}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\beta z)}{r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (10.44)$$

Получаем:

$$Q_0 \cong Q_{\text{мет}} = \frac{\omega_0 \mu}{R_s} \cdot \frac{l R_1 R_2 \ln(R_2/R_1)}{4 R_1 R_2 \ln(R_2/R_1) + l(R_1 + R_2)}. \quad (10.45)$$

Как показывает численный расчет по данной формуле, у коаксиальных резонаторов из меди собственная добротность на волнах до 10 см может достигать нескольких тысяч и быстро падает по мере уменьшения резонансной длины волны.

Коаксиальные резонаторы широко применяют в качестве волномеров, колебательных контуров в радиопередающих устройствах, в фильтрах и других приборах.

Прямоугольный резонатор представляет собой отрезок прямоугольного волновода, замкнутый с обоих концов проводящими пластинами (рис. 10.8).

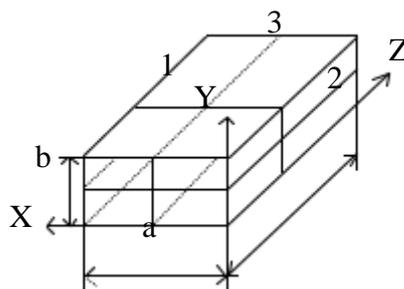


Рис. 10.8

Резонансная длина волны колебаний  $H_{mnp}$ ,  $E_{mnp}$  в таком резонаторе определяется из формулы (10.45) и принимает вид:

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (10.46)$$

У волны  $E_{mnp}$  ни индекс  $m$ , ни индекс  $n$  не может быть равен нулю, поскольку существование волн с нулевыми индексами в прямоугольном волноводе невозможно. У волн  $H_{mnp}$  только один из индексов  $m$  или  $n$  может быть нулевым. Значение индекса  $p$ , равное нулю, допустимо для волн  $E_{mnp}$  и невозможно для волн  $H_{mnp}$ . Следовательно, в формуле (10.46) независимо от типа волны только один из трех индексов  $m$ ,  $n$  или  $p$  может обращаться в нуль.

Низшее (основное) колебание имеет наибольшую резонансную длину волны. В прямоугольном резонаторе основным колебанием при  $b < a$  и  $b < l$  является  $H_{101}$ , при  $a < b$  и  $a < l$  –  $H_{011}$ , при  $l < a$  и  $l < b$  –  $E_{110}$ . Обычно наименьшим размером является  $b$ . Наиболее часто используется колебание  $H_{101}$ .

Собственная добротность резонатора с колебанием  $H_{101}$  может быть определена из формулы:

$$Q_0 \cong Q_{\text{мет}} = \frac{\omega_0 \mu}{R_s} \frac{a \cdot b \cdot l (l^2 + a^2)}{l \cdot a (l^2 + a^2) + 2b(l^2 + a^2)}. \quad (10.47)$$

Как показывает расчет, собственная добротность прямоугольного резонатора достигает десятков тысяч в сантиметровом диапазоне волн.

Цилиндрический резонатор представляет собой отрезок круглого волновода, замкнутый с обоих концов проводящими пластинами. Резонансная длина волны колебаний в цилиндрическом резонаторе для волн  $E_{mnp}$  при  $p \geq 1$  определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{v_{E_{mn}}}{\pi a}\right)^2}}, \quad (10.48)$$

для волн  $H_{mnp}$  при  $p \geq 1$  определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{v_{H_{mn}}}{\pi a}\right)^2}}, \quad (10.49)$$

где  $v_{mn}^{E,H}$  – корни функций Бесселя и их производных.

Основным колебанием в цилиндрическом резонаторе может быть либо  $E_{010}$ , либо  $H_{111}$ . У колебания  $E_{010}$  резонансная длина волны не зависит от  $l$  и равна  $\lambda_{\text{ср}} \cong 2,61a$ . У колебания  $H_{111}$  резонансная длина волны  $\lambda_{\text{ср}} \cong 3,41a$ . Таким образом, у короткого резонатора основным колебанием является  $E_{010}$ , у длинного –  $H_{111}$ . Граничное значение параметра  $l/a$  легко определяется из условия  $\lambda_{\text{ср}} \cong 2,61a$ .

Собственная добротность резонатора, заполненного диэлектриком без потерь, для каждого из этих колебаний находится по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0^{E_{010}} = \frac{\pi f_0 \mu}{R_s} \frac{a \cdot l}{l+a}, \\ Q_0^{H_{111}} = \frac{\pi f_0 \mu}{R_s} \frac{a \cdot l}{(2a-l)(\lambda_0/2l)^2 + al(v_{11}^H)^2 / [(v_{11}^H)^2 - 1]}, \\ Q_0^{H_{011}} = \frac{\pi f_0 \mu}{R_s} \frac{a \cdot l}{[(2a-l)(\lambda_0/2l)^2 + l]}. \end{array} \right. \quad (10.50)$$

Так как  $\lambda_0^{E_{010}}$  не зависит от  $l$ , то резонатор, рассчитанный на это колебание, может иметь весьма небольшие габариты.

При анализе распространения волны  $H_{011}$  в круглом волноводе показано, что при достаточно большом диаметре волновода можно добиться весьма малых потерь. Поэтому резонатор, в котором укладывается одна или несколько полуволн колебания  $H_{011}$ , должен обладать чрезвычайно высокой добротностью. Действительно, собственная добротность резонатора с волной  $H_{011}$  достигает сотен тысяч. При столь высокой добротности полоса пропускания резонатора на частоте  $10000 \text{ МГц}$  не превышает  $100 \text{ кГц}$ . Это позволяет использовать резонатор с волной  $H_{011}$  в качестве высокоточного волномера.

### 10.5.2. Задачи

10.5.1. Из коаксиального кабеля с диэлектрическим заполнением (относительная диэлектрическая проницаемость равна 5,8) с  $T$ -волной необходимо сделать закороченный с двух концов резонатор минимальной длины на частоту  $f = 650 \text{ МГц}$ . Определить длину резонатора.

10.5.2. Из коаксиального кабеля с диэлектрическим заполнением (относительная диэлектрическая проницаемость равна 2,25) с  $T$ -волной необходимо сделать закороченный с двух концов резонатор минимальной длины на частоту  $f = 1500 \text{ МГц}$ . Определить длину резонатора.

10.5.3. Выбрать размеры прямоугольного резонатора с воздушным заполнением с резонансной частотой  $f = 1 \text{ ГГц}$  и типом колебания  $H_{101}$ .

10.5.4. Выбрать размеры цилиндрического резонатора с воздушным за-

полнением с резонансной частотой  $f=4300 \text{ МГц}$  и типом колебания  $H_{111}$ .

10.5.5. Выбрать размеры прямоугольного резонатора с воздушным заполнением с резонансной частотой  $f=6,5 \text{ ГГц}$  и типом колебания  $E_{111}$ .

10.5.6. Выбрать размеры прямоугольного резонатора с воздушным заполнением с резонансной частотой  $f=4,3 \text{ ГГц}$  и типом колебания  $H_{201}$ .

10.5.7. Выбрать размеры цилиндрического резонатора с воздушным заполнением с резонансной частотой  $f=300 \text{ МГц}$  и типом колебания  $H_{011}$ .

10.5.8. Выбрать размеры цилиндрического резонатора с воздушным заполнением с резонансной частотой  $f=10 \text{ ГГц}$  и типом колебания  $H_{111}$ .

## 10.6. Затухание волн в линиях передачи

### 10.6.1. Элементы теории и основные формулы

Коэффициент ослабления  $\alpha$  волны, распространяющейся в проводнике, достаточно большая величина. Поэтому амплитуды векторов электромагнитного поля резко уменьшаются вдоль направления распространения: волна быстро затухает. Пусть амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой  $z$  равна  $E_m(z)$ , а амплитуда в точке с координатой  $(z+l)$  равна  $E_m(z+l)$ . Отношение

$$\frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = \exp(\alpha l) \quad (10.51)$$

показывает, во сколько раз уменьшилась амплитуда волны при прохождении ею расстояния  $l$ .

Затухание измеряют в неперах ( $Hn$ ) и децибелах ( $\text{дБ}$ ). Затухание в неперах определяют как натуральный логарифм отношения (10.51)  $\ln[E_m(z)/E_m(z+l)] = \alpha l$ . Затухание в децибелах определяют как двадцать десятичных логарифмов того же отношения:

$$20\lg[E_m(z)/E_m(z+l)] = \alpha l \cdot 20\lg e \cong 8,69\alpha l,$$

т.е.  $1 \text{ Нп} \approx 8,69 \text{ дБ}$ . Коэффициент  $\alpha$ , таким образом, определяет затухание волны при прохождении ею пути в один метр и измеряется в неперах на метр ( $\text{Нп/м}$ ).

Вычислим затухание волны, распространяющейся в меди, при частоте в  $1 \text{ МГц}$ . Коэффициент затухания  $\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \approx 14800 \text{ Нп/м}$ . Это означает, например, что при прохождении волной расстояния в один миллиметр ее амплитуда уменьшается в  $e^{14,8}$  раз, т.е. примерно в 2,67 миллиона раз. Приведенный пример показывает, что переменное электромагнитное поле на частотах радиотехнического диапазона практически не проникает вглубь проводника.

### 10.6.2. Задачи

10.6.1. Линия передачи имеет коэффициент затухания  $0,02 \text{ дБ/м}$ . Во сколько раз уменьшится мощность волны при прохождении по этому кабелю длиной  $35 \text{ м}$ ?

10.6.2. При прохождении по кабелю длиной  $35 \text{ м}$  мощность волны уменьшилась в 2 раза. Каков коэффициент затухания этой линии?

10.6.3. Линия передачи имеет коэффициент затухания  $0,12 \text{ дБ/м}$ . Во сколько раз уменьшится мощность волны при прохождении по этому кабелю длиной  $25 \text{ м}$ ?

10.6.4. При прохождении по кабелю длиной  $25 \text{ м}$  мощность волны уменьшилась в 1,5 раза. Каков коэффициент затухания этой линии?

## ГЛАВА 11. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

### Контрольная работа №1

#### ВАРИАНТ 1

##### Задача 1

Проверить размерность соотношения  $\mathbf{K} = IS[\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]$ , где  $\mathbf{K}$  – момент силы, действующий на виток с током  $I$ , имеющим площадь  $S$ ,  $\mathbf{v}_0$  – единичный вектор нормали к плоскости витка.

##### Задача 2

Заряд в  $1 \text{ Кл}$  движется со скоростью  $1 \times 10^4 \text{ м/с}$  в магнитном поле  $|\mathbf{B}| = 1 \text{ Тл}$  под углом  $30^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующие со стороны магнитного поля на заряд.

##### Задача 3

Плоский конденсатор (площадь пластины  $A$ ) включен в цепь переменного тока  $I = I_0 \sin \omega t$ . Полагая поле внутри конденсатора однородным, найти закон изменения электрической индукции  $D(t)$  внутри конденсатора.

##### Задача 4

Записать второе уравнение Максвелла  $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  в координатной форме в декартовых координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

##### Задача 5

Для каких сред (с точки зрения их электропроводности) справедливо уравнение Максвелла  $\text{div} \mathbf{H} = 0$ ?

##### Задача 6

Почему при интерпретации граничного условия  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = 0$  исключается возможность несовпадения проекций  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  по направлению?

#### ВАРИАНТ 2

##### Задача 1

Проверить размерность соотношения  $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$  для силы, действующей на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

**Задача 2**

Дана прямоугольная рамка с током  $I$  площадью  $S = ab$ , единичный вектор нормали к плоскости витка  $\mathbf{v}_0$ , находящаяся в магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Ось  $z$  совпадает с осью вращения рамки, ось  $y$  – с плоскостью рамки, вектор  $\mathbf{v}_0$  направлен по оси  $x$ . Основываясь на выражении для лоренцевой силы  $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , вывести соотношение для момента силы  $\mathbf{K} = [\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}]$ , где  $\boldsymbol{\mu} = IS$  – магнитный момент петли.

*Указание:* рассмотреть силы, действующие на каждую из сторон рамки и учесть связь заряда и тока.

**Задача 3**

Найти магнитное поле  $\mathbf{H}$  (величину и направление), создаваемое линейным стационарным током  $\mathbf{I}$ , направленным по прямой.

**Задача 4**

Записать первое уравнение Максвелла  $\text{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}$  в координатной форме в декартовых координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

**Задача 5**

Какого рода среду можно охарактеризовать тензором удельной проводимости вида  $\sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? Каковы пределы применимости данной модели?

**Задача 6**

Плоская граница раздела сред 1 и 2 обладает свойством экранирования, так что поле существует в среде 1, не проникая в среду 3. Показать, что

а) если среда 1 изотропна, то вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_1$  на границе направлен по нормали к ней и  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{v}_0 \xi / \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$ ;

б) вектор магнитной индукции направлен на границе касательно к ней и  $[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1] = \eta$ , где  $\eta$  – поверхностный ток проводимости.

**ВАРИАНТ 3****Задача 1**

Проверить размерность соотношения  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  для силы, действующей на заряд  $q$  со стороны электрического поля  $\mathbf{E}$ .

**Задача 2**

Найти силу, действующую на заряд в  $0,5 \text{ Кл}$ , находящийся в однородном поле  $|\mathbf{E}| = 50 \text{ В/м}$ . Показать на рисунке взаимное расположение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$ .

**Задача 3**

Найти электрическое поле  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $q$ , находящегося в однородной среде, как функцию от  $r$ . Результат проиллюстрировать рисунком.

*Указание:* использовать теорему Гаусса (3-е уравнение Максвелла в интегральной форме).

**Задача 4**

Записать первое уравнение Максвелла  $\text{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}$  в координатной форме в аксиально-симметричной системе координат при  $\partial/\partial z = 0$  (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

**Задача 5**

Какого рода среду можно охарактеризовать тензором удельной проводимости вида  $\sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$ ? Каковы пределы применимости данной модели?

**Задача 6**

Вывести формулу  $\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ , описывающую преломление электрических силовых линий на границе раздела изотропных сред при отсутствии зарядов (см. рис. 11.1).

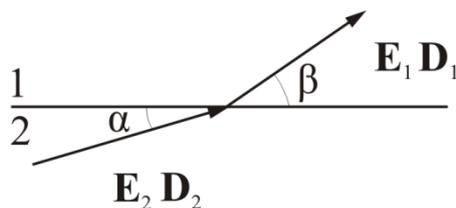


Рис. 11.1

**ВАРИАНТ 4****Задача 1**

Проверить размерность соотношения  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])$  для силы, действующей на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в электромагнитном поле с на-

пряженностью  $\mathbf{E}$  и индукцией  $\mathbf{B}$ .

### Задача 2

Заряд в  $0,1 \text{ Кл}$  движется со скоростью  $2 \times 10^4 \text{ м/с}$  в электромагнитном поле  $|\mathbf{B}| = 1 \text{ Тл}$  и  $|\mathbf{E}| = 10 \text{ В/м}$  под углом  $30^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующие со стороны поля на заряд.

### Задача 3

Плоский конденсатор (площадь пластины  $A$ ) включен в цепь переменного тока  $I = I_0 \cos \omega t$ . Полагая поле внутри конденсатора однородным, найти закон изменения электрического поля  $E(t)$  внутри конденсатора.

### Задача 4

Записать первое уравнение Максвелла  $\text{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}$  в координатной форме в сферических координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

### Задача 5

Дано уравнение непрерывности  $\text{div} \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$ . В предположении, что среда однородна, найти зависимость объемной плотности заряда от времени и объяснить физический смысл полученного результата.

### Задача 6

Вывести формулу  $\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ , описывающую преломление магнитных силовых линий на границе раздела изотропных сред при отсутствии токов (см. рис. 11.2).

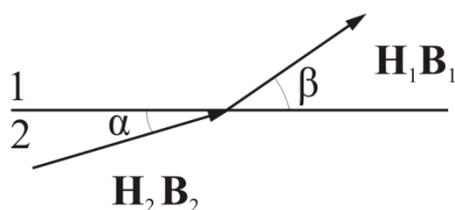


Рис. 11.2

## ВАРИАНТ 5

### Задача 1

Проверить размерность выражения для плотности тока  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

**Задача 2**

Найти силу, действующую на заряд в  $0,1 \text{ Кл}$ , находящийся в электрическом поле  $|\mathbf{E}| = 25 \text{ В/м}$ . Показать на рисунке взаимное расположение векторов напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$ .

**Задача 3**

Получить уравнение  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  из 1-го уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}$ . Какие при этом используются допущения?

**Задача 4**

Записать второе уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  в координатной форме в цилиндрических координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

**Задача 5**

Какого рода среду можно охарактеризовать тензором удельной проводимости вида  $\sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$ ?

**Задача 6**

Показать, что диэлектрическую проницаемость можно определить, составив отношение вида  $\varepsilon = E_{\perp} / E_{\parallel}$ , где  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  – значения напряженности, полученные при измерениях поля внутри щелевой полости (рис. 11.3) при одном и том же поле  $\mathbf{E}$  вне полости, однако в случае (а) вектор  $\mathbf{E}$  нормален щели, а в случае (б) – параллелен.

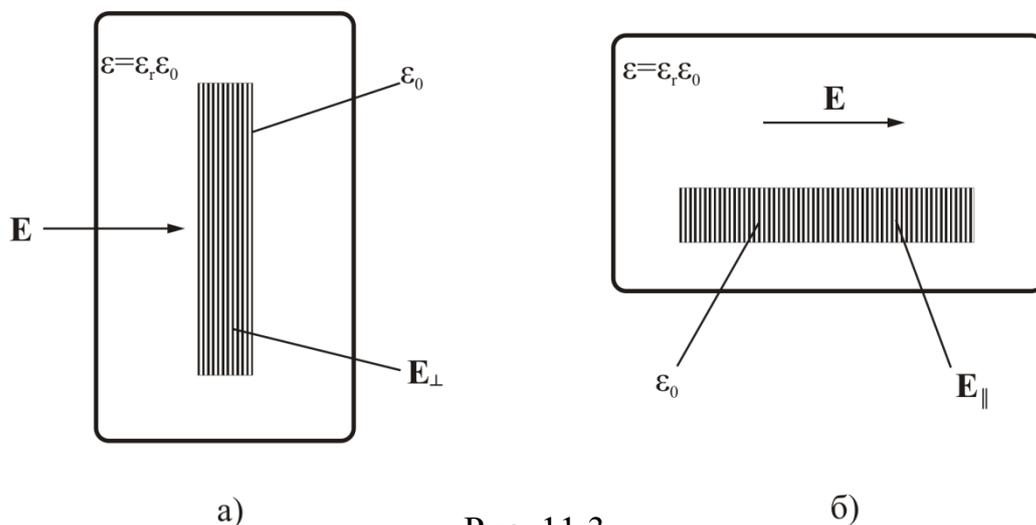


Рис. 11.3

**ВАРИАНТ 6****Задача 1**

Для изотропной среды, линейной по проводимости, справедлив закон Ома  $U = RI$ , где  $R = l/\sigma S$ ,  $l$  – длина проводника,  $S$  – его сечение. Показать, какую размерность имеет удельная электропроводность  $\sigma$ .

**Задача 2**

Заряд в  $0,1$  Кл движется со скоростью  $5 \times 10^4$  м/с в магнитном поле  $|\mathbf{B}| = 0,5$  Тл под углом  $60^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующей со стороны магнитного поля на заряд.

**Задача 3**

Получить уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  из 2-го уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Какие при этом используются допущения?

**Задача 4**

Записать второе уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  в координатной форме в сферически симметричной системе координат (нарисовать систему координат и пример ориентации векторов).

**Задача 5**

Тензор диэлектрической проницаемости монокристалла кварца (одноосная анизотропная среда) в соответствующим образом сориентированной декартовой системе координат имеет вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 4,55 & 0 & 0 \\ 0 & 4,55 & 0 \\ 0 & 0 & 4,49 \end{pmatrix}.$$

1. Справедлива ли эта запись для цилиндрической системы координат с той же осью  $z$ ?
2. При каких ориентациях вектора  $\mathbf{E}$  вектор  $\mathbf{D}$  в кристалле кварца не параллелен ему?

*Указание:* записать материальное уравнение, связывающее  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  по координатно и проанализировать полученную систему.

**Задача 6**

Исследовать преломление векторных линий  $\mathbf{j}$  в случае стационарного процесса на границе сред, отличающихся электропроводностью (результат показать на рисунке).

**ВАРИАНТ 7****Задача 1**

Проверить размерность соотношения  $\mathbf{M} = IA[\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]$ , где  $\mathbf{M}$  – момент силы, действующий на виток с током  $I$ , имеющим площадь  $A$ ,  $\mathbf{v}_0$  – единичный вектор нормали к плоскости витка.

**Задача 2**

Заряд в  $0,2$  Кл движется со скоростью  $5 \times 10^4$  м/с в электромагнитном поле  $|\mathbf{B}| = 0,1$  Тл и  $|\mathbf{E}| = 1$  В/м под углом  $60^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующие со стороны поля на заряд.

**Задача 3**

Дано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Показать, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны.

**Задача 4**

Записать третье уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  в координатной форме в декартовых координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации вектора  $\mathbf{D}$ ).

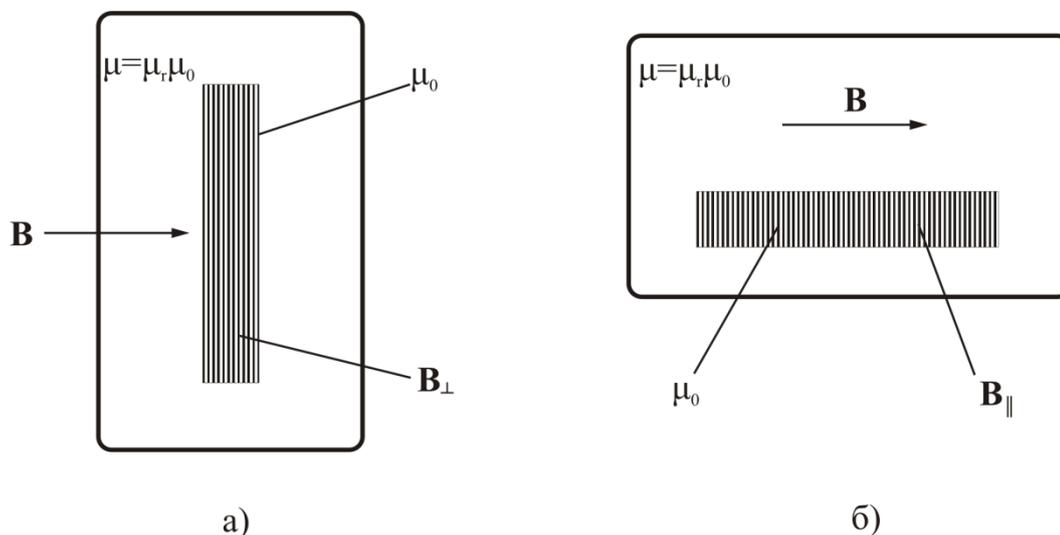


Рис. 11.4

**Задача 5**

Используя уравнение, связывающее плотность тока проводимости и скорость движения зарядов, показать, что плотность лоренцевой силы  $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , определяемая как  $\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}$ , выражается формулой  $\mathbf{f} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ .

**Задача 6**

Показать, что магнитную проницаемость можно определить, составив отношение вида  $\mu = B_{\perp}/B_{\parallel}$ , где  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  – значения индукции, полученные при измерениях поля внутри щелевой полости (рис. 11.4) при одном и том же поле  $\mathbf{B}$  вне полости, однако в случае (а) вектор  $\mathbf{B}$  нормален щели, а в случае (б) – параллелен.

**ВАРИАНТ 8****Задача 1**

Для изотропной линейной в отношении проводимости среды справедлив закон Ома  $U = RI$ , где  $R = x/\sigma s$ ,  $x$  – длина проводника,  $s$  – его сечение. Показать, какую размерность имеет удельная электропроводность  $\sigma$ .

**Задача 2**

Заряд в  $0,25$  Кл движется со скоростью  $4 \times 10^3$  м/с в магнитном поле  $|\mathbf{B}| = 0,1$  Тл под углом  $45^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующей со стороны магнитного поля на заряд.

**Задача 3**

Направление вектора  $\mathbf{H}$  некоторого электромагнитного поля постоянно. Показать, что вектор плотности обобщенного тока и вектор напряженности  $\mathbf{H}$  перпендикулярны.

**Задача 4**

Записать третье уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$  в координатной форме в цилиндрических координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации вектора  $\mathbf{D}$ ).

**Задача 5**

Можно ли использовать формулу  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , когда ток обусловлен движением зарядов обоих знаков? Дать развернутое пояснение.

**Задача 6**

Почему при интерпретации граничного условия  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$  исключается возможность несовпадения проекций  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  по направлению?

**ВАРИАНТ 9****Задача 1**

Проверить размерность уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$  где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

*Указание:* записать уравнение по координатам и проанализировать размерности.

**Задача 2**

Дана прямоугольная рамка с током  $I$  площадью  $A = ab$ , единичный вектор нормали к плоскости витка  $\mathbf{n}_0$ , находящаяся в магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Ось  $z$  совпадает с осью вращения рамки, ось  $y$  – с плоскостью рамки, вектор  $\mathbf{n}_0$  направлен по оси  $x$ . Основываясь на выражении для лоренцевой силы  $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , вывести соотношение для момента силы  $\mathbf{K} = [\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}]$ , где  $\boldsymbol{\mu} = IA$  – магнитный момент петли.

*Указание:* рассмотреть силы, действующие на каждую из сторон рамки и учесть связь заряда и тока.

**Задача 3**

Найти электрическое поле  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $q = 0,2 \text{ Кл}$ , находящегося в однородной среде, как функцию от  $r$ , и вычислить величину поля для  $r = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5 \text{ м}$ . Результат проиллюстрировать графиком  $E(r)$ . Какому закону подчиняется эта зависимость?

**Задача 4**

Записать третье уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$  в координатной форме в сферически симметричной системе координат (нарисовать систему координат и пример ориентации вектора  $\mathbf{D}$ ).

**Задача 5**

Записать по координатам (в декартовой системе) материальное уравнение, связывающее  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в анизотропной среде (в общем виде).

**Задача 6**

Исследовать преломление векторных линий  $\mathbf{j}$  в случае стационарного процесса на границе сред, отличающихся электропроводностью (результат показать на рисунке).

**ВАРИАНТ 10****Задача 1**

Проверить размерность уравнения  $\text{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}$ .

Указание: записать уравнение по координатам и проанализировать размерности.

**Задача 2**

Заряд в  $0,2 \text{ Кл}$  движется со скоростью  $1 \times 10^2 \text{ м/с}$  в электромагнитном поле  $|\mathbf{B}| = 0,1 \text{ Тл}$  и  $|\mathbf{E}| = 5 \text{ В/м}$  под углом  $45^\circ$  к линиям индукции  $\mathbf{B}$ . Найти величину и направление (указать на рисунке) силы, действующие со стороны поля на заряд.

**Задача 3**

Плоский конденсатор (площадь пластины  $S$ ) включен в цепь переменного тока  $I = I_0 \cos \omega t$ . Полагая поле внутри конденсатора однородным, найти закон изменения электрической индукции  $D(t)$  внутри конденсатора. Построить график функции  $D(t)$ .

**Задача 4**

Записать четвертое уравнение Максвелла  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  в координатной форме в декартовых координатах (нарисовать систему координат и пример ориентации вектора  $\mathbf{B}$ ).

**Задача 5**

Для каких сред (с точки зрения их электропроводности) справедливо уравнение Максвелла  $\text{div}\mathbf{E} = 0$ ? Ответ объяснить.

**Задача 6**

Вывести формулу  $\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ , описывающую преломление магнитных силовых линий на границе раздела изотропных сред при отсутствии токов (см. рис. 11.5).

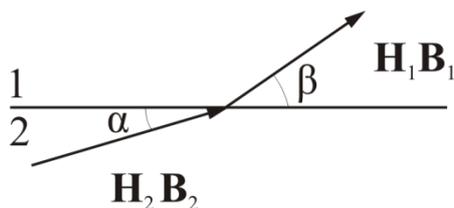


Рис. 11.5

## Контрольная работа №2

## ВАРИАНТ 1

## Задача 1

Известно, что в случае наличия сторонних сил для описания плотности тока проводимости используется одна из следующих формализаций:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{st}) \text{ и } \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{st}.$$

Показать, что данные соотношения есть форма записи закона Ома для участка цепи при действии э.д.с.

Указание: использовать тот же подход, что и для уравнения  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$  при рассмотрении темы «Электропроводность».

## Задача 2

Известно, что поле внутри равномерно заряженного шара возрастает линейно с ростом  $r$ , а вне такого шара оно убывает пропорционально  $r^{-2}$ . При этом графики зависимостей  $D(r)$  и  $E(r)$  имеют вид, показанный на рис. 11.6. Объяснить наличие разрыва в графике напряженности поля при  $r = R$ , и его отсутствие в графике электрической индукции.

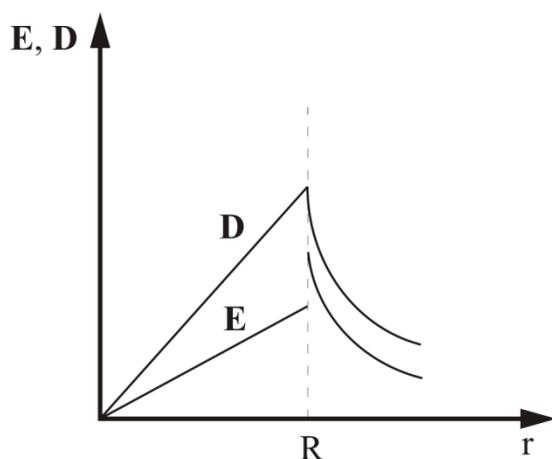


Рис. 11.6

## Задача 3

Определить собственную и взаимную энергию двух проводящих шаров, имеющих радиусы  $R_1$  и  $R_2$  и заряды  $q_1$  и  $q_2$ , при условии, что  $R_1 \ll l$  и  $R_2 \ll l$ , где  $l$  — расстояние между шарами.

## Задача 4

Выведи уравнение Лапласа для магнито-статического потенциала  $\nabla^2\psi = 0$ , пользуясь его определением  $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$  и уравнениями Максвелла для стационарного магнито-статического поля:

$\text{div } \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}.$

## Задача 5

Из закона сохранения заряда  $\text{div } \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$  вывести правило Кирхгофа для разветвления цепи. Почему этот закон является строгим?

## Задача 6

Период гармонических колебаний обозначают буквой  $T$ , длина волны  $\lambda$  есть

пространственный период гармонической волны. Какой смысл имеет отношение этих двух периодов  $\lambda/T$ ? Ответ обосновать.

## ВАРИАНТ 2

### Задача 1

Известно выражение для энергии электромагнитного поля через векторы поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dv$$

Справедливо ли оно: а) для изотропных сред, б) анизотропных сред? Ответ обосновать.

### Задача 2

Точечный заряд можно охарактеризовать плотностью  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , где подразумевается его локализация при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , а  $\delta(z)$  есть  $\delta$ -функция Дирака. Путем непосредственной подстановки этого выражения в решение уравнения Пуассона для потенциала в случае неограниченной среды вывести формулу

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

### Задача 3

Вычислить энергию равномерно заряженного ( $\rho = \text{const}$ ) диэлектрического шара.

### Задача 4

Используя известный вид решения векторного уравнения Пуассона для поля

$$\mathbf{H}: \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dv', \text{ получить соответствующую формулу, выражающую закон Био-Савара, для линейного тока.}$$

### Задача 5

Показать, что из полной системы уравнений Максвелла в комплексной форме, в частности, следует уравнение  $\text{div} \mathbf{D}_m = \dot{\rho}_m$ .

### Задача 6

Показать, что в сферической системе координат при отсутствии зависимости

от координат  $\vartheta$  и  $\alpha$  волновое уравнение  $\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u = 0$  принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

### ВАРИАНТ 3

#### Задача 1

Может ли иметь место излучение из некоторой ограниченной области  $V$ , если источники энергии (сторонние силы) отсутствуют? Обосновать свой вывод на основе анализа уравнения баланса энергии.

#### Задача 2

При какого рода неоднородности и анизотропии среды формула для электрической индукции одиночного точечного заряда

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{0q} \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

остаётся верной?

#### Задача 3

Выразить энергию системы проводников, используя представление о собственных и взаимных емкостях. Как соотносятся выражение для взаимной энергии

$$W^{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i''$$

и полученное представление?

#### Задача 4

Выведи уравнение Лапласа для магнитоэстатического потенциала  $\nabla^2 \psi = 0$ , пользуясь его определением  $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$  и уравнениями Максвелла для стационарного магнитоэстатического поля:  $\text{div } \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ .

#### Задача 5

Что можно сказать о движении энергии, если в каждой точке некоторой области: а)  $\text{Re } \dot{\mathbf{P}} = 0$ , б)  $\text{Im } \dot{\mathbf{P}} = 0$ ?

#### Задача 6

Проследить, каким образом изменяется поляризация волны в зависимости от соотношения комплексных чисел  $\dot{A}$ ,  $\dot{C}$  в формуле

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{E}}_{m2} = (x_0 \dot{A} + y_0 \dot{C}) e^{-ikz}.$$

Рассмотреть случай равных амплитуд ортогональных волновых компонент ( $A = C$ ) при монотонном изменении фазового сдвига и случай различных амплитуд.

### ВАРИАНТ 4

#### Задача 1

Известно выражение для энергии электромагнитного поля через векторы поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) dv.$$

Справедливо ли оно: а) для изотропных сред, б) анизотропных сред? Ответ обосновать.

#### Задача 2

Показать, что в случае двух бесконечных коаксиальных цилиндрических поверхностей (рис. 11.7) емкость, приходящаяся на единицу длины системы, вычисляется по формуле  $C' = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r / \ln(R_2/R_1)$ .

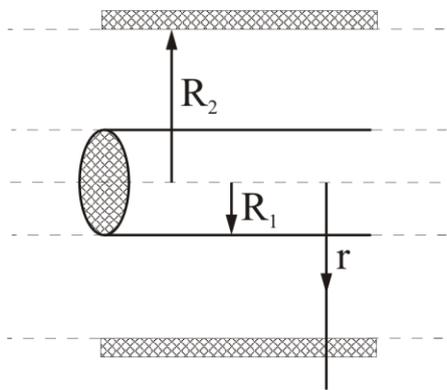


Рис. 11.7

#### Задача 3

Вычислить энергию взаимодействия двух диполей при произвольной взаимной ориентации.

#### Задача 4

Получить формулу, определяющую разность магнитостатических потенциалов:

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{H} d\mathbf{l} \text{ аналогично тому, как это было сделано в случае электростатического поля для электростатического потенциала.}$$

#### Задача 5

Рассмотреть изменение мгновенного значения вектора  $\mathbf{E}$ , если комплексная амплитуда  $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 A + \mathbf{y}_0 B$ , причем: а)  $A = B = 1$ ; б)  $A = 1, B = i$ ; в)  $A = 1 + i, B = 0$ .

**ВАРИАНТ 5****Задача 1**

Известно выражение для энергии электромагнитного поля через векторы поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dv.$$

Справедливо ли оно: а) для изотропных сред, б) анизотропных сред? Ответ обосновать.

**Задача 2**

Определить, какова взаимная энергия точечного заряда и проводящей плоскости, над которой он находится.

**Задача 3**

Пользуясь определением векторного потенциала  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  и условием «кулоновской калибровки»  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ , получить векторное уравнение Пуассона для потенциала  $\mathbf{A}$ :  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}$ .

**Задача 4**

Показать, что из полной системы уравнений Максвелла в комплексной форме, в частности, следует уравнение  $\text{div}\mathbf{D}_m = \dot{\rho}_m$ .

**Задача 5**

Период гармонических колебаний обозначают буквой  $T$ , длина волны  $\lambda$  есть пространственный период гармонической волны. Какой смысл имеет отношение этих двух периодов  $\lambda/T$ ? Ответ обосновать.

**Задача 6**

Рассмотреть наложение гармонических волн

$$u(z, t) = P \cos(\omega t - kz + \varphi) + Q \cos(\omega t + kz + \psi)$$

при  $P = -Q$ ,  $\varphi = \psi$ ;  $P = 2Q$ ,  $\varphi = \psi = 0$ ;  $P = Q$ ,  $\psi = 0$ .

**ВАРИАНТ 6****Задача 1**

Считая, что постоянное во времени электрическое поле полностью заключено внутри плоского конденсатора (рис. 11.8) и однородно, показать, что энергия поля конденсатора выражается формулой  $W = W^E = CU^2/2$ , где  $U = El$  и  $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r S/d$ .

### Задача 2

При какого рода неоднородности и анизотропии среды формула для электрической индукции одиночного точечного заряда

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{0q} \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

остаётся верной?

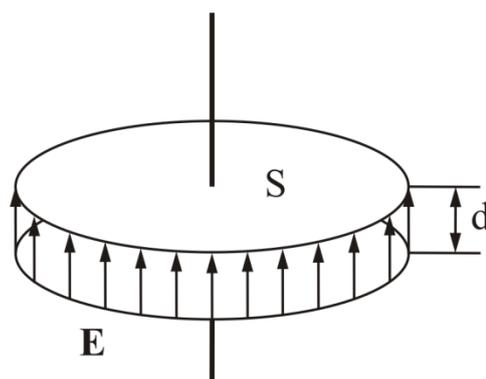


Рис. 11.8

### Задача 3

Используя известный вид решения векторного уравнения Пуассона для потенциала  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$ , получить соответствующую формулу

для линейного тока.

### Задача 4

При каком фазном соотношении напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  средний поток энергии обязательно равен нулю?

### Задача 5

Процесс, описываемый при  $z = 0$  функцией  $A \exp(-\sin^2 t)$ , распространяется вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ . Какова будет временная зависимость на расстоянии  $l$ ?

### Задача 6

Показать, что всякую волну линейной поляризации можно представить в виде наложения волн левой и правой круговой поляризации с одинаковыми амплитудами.

## Расчетно-графическая работа № 1

Какие типы волн могут распространяться между параллельными сверхпроводящими плоскостями при частоте  $f =$  (см. табл 11.1)  $\Gamma\Gamma\mu$  и расстоянии между пластинами  $a =$  (см. табл 11.1)  $см$ . Найдите основные параметры волны, а именно: фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы, критическую частоту для волны имеющую частоту, ближайшую к  $f_{кр} > 0$ . Изобразите ее структуру поля. Внутреннее заполнение – воздух.

Таблица 11.1

| № варианта | $f, ГГц$ | $a, см$ |
|------------|----------|---------|
| 1          | 10       | 1,5     |
| 2          | 30       | 30      |
| 3          | 50       | 1,2     |
| 4          | 60       | 30      |
| 5          | 80       | 2,7     |
| 6          | 90       | 30      |
| 7          | 20       | 15      |
| 8          | 50       | 3       |
| 9          | 30       | 25      |
| 10         | 80       | 6       |
| 11         | 40       | 27      |
| 12         | 100      | 9       |
| 13         | 60       | 3       |
| 14         | 20       | 1,5     |
| 15         | 90       | 6       |
| 16         | 60       | 1,2     |
| 17         | 70       | 9       |

### Расчетно–графическая работа № 2

Прямоугольный металлический волновод с воздушным заполнением имеет размеры  $a =$  (см. табл 11.2)  $мм$ ,  $b =$  (см. табл 11.2)  $мм$ . Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f =$  (см. табл 11.2)  $ГГц$ ? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы, критическую частоту для основной волны согласно задания. Изобразите структуру поля этой волны. Внутреннее заполнение – воздух.

Таблица 11.2

| № варианта | $a, мм$ | $b, мм$ | $f, ГГц$ |
|------------|---------|---------|----------|
| 1          | 20      | 12      | 10       |
| 2          | 16      | 8       | 12       |
| 3          | 10      | 6       | 14       |
| 4          | 18      | 10      | 16       |
| 5          | 22      | 10      | 18       |
| 6          | 18      | 12      | 20       |
| 7          | 14      | 7       | 22       |
| 8          | 12      | 7       | 7        |
| 9          | 16      | 16      | 6        |
| 10         | 20      | 8       | 15       |

**Расчетно–графическая работа № 3**

Выбрать размеры прямоугольного металлического волновода с воздушным заполнением для работы с волной (см. табл 11.3) на частоте  $f =$  (см. табл 11.3) ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы, критическую частоту для волны согласно варианту задания. Изобразите ее структуру поля. Внутреннее заполнение – воздух.

Таблица 11.3

| № варианта | Тип волны | $f, \text{ ГГц}$ |
|------------|-----------|------------------|
| 1          | $H_{10}$  | 22               |
| 2          | $E_{11}$  | 20               |
| 3          | $H_{11}$  | 18               |
| 4          | $E_{21}$  | 16               |
| 5          | $H_{21}$  | 14               |
| 6          | $H_{10}$  | 12               |
| 7          | $E_{11}$  | 10               |
| 8          | $H_{11}$  | 8                |
| 9          | $E_{21}$  | 7                |
| 10         | $H_{21}$  | 6                |

**Расчетно–графическая работа № 4**

Выбрать диаметр круглого металлического волновода для работы с волной (см. табл 11.4) на частоте  $f =$  (см. табл 11.4) ГГц. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы, критическую частоту для волны согласно варианту задания. Изобразите ее структуру поля. Внутреннее заполнение – воздух.

Таблица 11.4

| № варианта | Тип волны | $f, \text{ ГГц}$ |
|------------|-----------|------------------|
| 1          | $H_{01}$  | 22               |
| 2          | $E_{01}$  | 20               |
| 3          | $H_{11}$  | 18               |
| 4          | $E_{21}$  | 16               |
| 5          | $H_{21}$  | 14               |
| 6          | $H_{31}$  | 12               |
| 7          | $E_{11}$  | 10               |
| 8          | $H_{12}$  | 8                |
| 9          | $E_{02}$  | 7                |
| 10         | $E_{12}$  | 6                |

**Расчетно–графическая работа № 5**

Круглый металлический волновод имеет радиус  $a =$  (см. табл 11.5) *мм*. Определить, волны каких типов могут в нём распространяться на частоте  $f =$  (см. табл 11.5) *ГГц*? Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент фазы, критическую частоту для основной волны согласно варианту задания. Изобразите ее структуру поля. Внутреннее заполнение – воздух.

Таблица 11.5

| № варианта | $a, \text{ см}$ | $f, \text{ ГГц}$ |
|------------|-----------------|------------------|
| 1          | 20              | 10               |
| 2          | 16              | 12               |
| 3          | 10              | 14               |
| 4          | 18              | 16               |
| 5          | 22              | 18               |
| 6          | 25              | 20               |
| 7          | 14              | 22               |
| 8          | 12              | 7                |
| 9          | 24              | 30               |
| 10         | 8               | 15               |

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Говорков В.А.* Электрические и магнитные поля. М: Энергия, 1968.
2. *Белашов В.Ю.* Специальные функции и алгоритмы их вычисления. Магадан: МПУ, 1997.
3. *Белашов В.Ю.* Проектирование электротехнических устройств и систем. Аппарат специальных функций для решения проблем ЭМС. Казань: КГЭУ, 2004.
4. *Купалян С.Д.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. М: Энергия, 1970.
5. *Говорков В.А., Купалян С.Д.* Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. М: Высш. школа, 1970.
6. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М: Советское радио, 1971.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1983.
8. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978.
9. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.
10. *Федоров Н.Н.* Основы электродинамики. М.: Высшая школа, 1980.
11. *Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.
12. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. М.: Мир, 1977.
13. *Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н.* Методы расчёта электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963.
14. *Красюк Н.П., Дымович Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1974.

15. *Скачков В.А., Чони Ю.И.* Статические и стационарные поля (теория и методы расчёта). Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 1995.
16. *Петров Б.М.* Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов/ М.: Горячая Линия – Телеком, 2007.
17. *Фальковский О.И.* Техническая электродинамика: учебник. СПб.: Лань, 2009.
18. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3-х т.: учеб. пособие для студ. вузов/ И.В. Савельев. СПб.-М.-Краснодар: Лань. Т.2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика, 2008.
19. *Нефёдов Е.И.* Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: учеб. пособие для студ. вузов. М.: Академия, 2010.
20. *Замалеев И.Г.* Основы электродинамики: учеб. пособие/ Мин-во образ-я и науки РФ, Фед. агентство по образованию, КГТУ им. А.Н. Туполева. 2008.
21. *Григорьев А.Д.* Электродинамика и микроволновая техника: учебник для студ. вузов. СПб.: Лань, 2007.
22. Краткий справочник по специальным разделам математики: учеб. пособие для студ. вузов/ К. Г. Гараев и др. Под ред.: К.Г. Гараева, П.Г. Данилаева. Мин-во образ-я и науки РФ, Фед. агентство по образованию, ГОУ ВПО "КГТУ им. А.Н. Туполева", 2009.
23. *Дмитриева В.Ф.* Задачи по физике: учеб. пособие для студ. образоват. учреждений сред. и проф. образ-я. М.: Академия, 2010.
24. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн: Уч. пособие/ Баскаков С.И., Карташев В.Г., Лобов Г.Д. и др.; Под ред. С.И. Баскакова. М.: Высш. школа, 1981.
25. *Седельников Ю.Е., Скачков В.А., Щербаков Г.И.* Устройства СВЧ и антенны: Уч. пособие / Под общей редакцией Ю.Е. Седельникова. Казань: ООО «Новое знание», 2015.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| ГЛАВА 1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ .....   | 3   |
| 1.1. Основные формулы .....   | 3   |
| 1.2. Задачи .....   | 6   |
| ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....   | 20  |
| 2.1. Элементы теории и основные формулы .....   | 20  |
| 2.2. Задачи .....   | 26  |
| ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ .....  | 29  |
| 3.1. Основные формулы .....   | 29  |
| 3.2. Задачи .....   | 31  |
| ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.....                                       | 51  |
| 4.1. Основные формулы .....   | 51  |
| 4.2. Задачи .....   | 52  |
| ГЛАВА 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ.....   | 60  |
| 5.1. Основные формулы .....   | 60  |
| 5.2. Задачи .....   | 61  |
| ГЛАВА 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДИЭЛЕКТРИКЕ .....                                       | 82  |
| 6.1. Основные формулы .....   | 82  |
| 6.2. Задачи .....   | 86  |
| ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕСОВЕРШЕННОМ<br>ДИЭЛЕКТРИКЕ И В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ..... | 108 |
| 7.1. Основные формулы .....   | 108 |
| 7.2. Задачи .....   | 111 |
| ГЛАВА 8. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....   | 122 |
| 8.1. Элементы теории и основные формулы .....   | 122 |
| 8.2. Задачи .....   | 129 |
| ГЛАВА 9. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ<br>ВОЛН.....                            | 130 |
| 9.1. Элементы теории и основные формулы .....   | 130 |
| 9.2. Задачи .....   | 132 |
| ГЛАВА 10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В<br>ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ .....       | 134 |
| 10.1. Волны между параллельными металлическими плоскостями.....                           | 134 |
| 10.2. Прямоугольный металлический волновод .....  | 138 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>10.3. Круглый металлический волновод</i> .....   | 143 |
| <i>10.4. Коаксиальная линия</i> .....               | 148 |
| <i>10.5. Объемные резонаторы</i> .....              | 152 |
| <i>10.6. Затухание волн в линиях передачи</i> ..... | 159 |
| <b>ГЛАВА 11. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ</b> ..... | 161 |
| <i>Контрольная работа № 1</i> .....                 | 161 |
| <i>Контрольная работа № 2</i> .....                 | 171 |
| <i>Расчетно-графическая работа № 1</i> .....        | 176 |
| <i>Расчетно-графическая работа № 2</i> .....        | 177 |
| <i>Расчетно-графическая работа № 3</i> .....        | 178 |
| <i>Расчетно-графическая работа № 4</i> .....        | 178 |
| <b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА</b> .....               | 180 |

*Василий Юрьевич Белашов  
Людмила Юрьевна Фадеева*

Сборник задач по курсам  
«Электродинамика и распространение радиоволн», «Электромагнитные  
поля и волны», «ЭМС и помехоустойчивость информационных систем»

Редактор издательского отдела Г.Х. Яруллина  
Компьютерный набор и верстка *В.Ю.Белашова, Л.Ю. Фадеевой*

Подписано к печати 07.04.2017.  
Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная.  
Гарнитура «Times». Печать ризографическая.  
Усл. печ. 10,695 л. Печ. 11,5 л. Тираж 300 экз. Заказ № 57.

---

420111, Казань, Дзержинского, 9/1.  
Тел. сот.: +7(917)264-84-83.  
Отпечатано с готового оригинал-макета  
в редакционно-издательском центре «Школа»  
E-mail: ric-school@yandex.ru