А.Ньюэлл

СОЛИТОНЫ В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Книга американского специалиста, содержащая широкий обзор интересной и быстро развивающейся области науки. Автор показывает тесную связь теории солитонов с прикладными задачами физики — гидродинамикой, нелинейной оптикой, теорией волн на воде. Он делает попытку объединить некоторые математические подходы к проблеме точной решаемости, ему удается определить место теории солитонов в современной науке. Книга удачно дополнит имеющуюся на русском языке литературу по данной тематике.

Для математиков и физиков разных специальностей, для аспирантов и студентов вузов.

Содержание

От редактора перевода 5

Введение 7

Глава 1. История солитона 23

Глава 2. Вывод уравнения Кортевега-де Фриза, нелинейного уравнения Шрёдингера и других важных в математической физике канонических уравнений 50

Глава 3. Семейства солитонных уравнений и методы их решения 94

Глава 4. τ-функция, методы Хироты, свойство Пенлеве и преобразование Бэклунда для солитонных уравнений семейства Кортевега-де Фриза 159

Глава 5. Связующие звенья между чудесами солитонной математики 198

Литература 311

Предметный указатель 320

Предметный указатель

Алгебра Ли (Lie algebra)
- бесшпуровых матриц (traceless matrices ~) 244
- Гейзенберга (Heisenberg ~) 303
- Каца—Муди (Kac-Moody) 193, 199
- петель (loop ~) 302
- центральное расширение (central extension) 273
- Sl(2,*C*) 11, 216
- A^1_1 302

Безотражательные потенциалы (reflectionless potentials) 119

Бенджамина—Оно уравнение (Benjamen-Ono equation) 14

Бенджамина—Фейра неустойчивость (Benjamen-Feir instability) 75, 89

Бэклунда преобразование (Becklund transformation) 12, 36, 48, 185, 195, 201, 289, 293

Взаимодействие двухсолитонное (two soliton interaction) 121

Возмущений теория (perturbation theory) 128

Волна кноидальная (cnoidal wave) 29
- уединенная (solitary ~) 23, 57
- Стокса (Stokes ~) 25
- Ферми—Пасты—Улама (Fermi-Pasta-Ulam ~) 27

Гамильтонова структура (Hamiltonian structure) 11, 99
- - вторая (second ~ ~) 276

Гейзенберга алгебра (Heisenberg algebra) 303

Градуировка (grading) 274

Группа симметрий (symmetry group) 203
Данные рассеяния (scattering data) 38, 112, 122, 283
- - временная динамика (time dependence) 123
Дуальная алгебра (dual algebra) 216
Закон сохранения {conservation law) 34, 105, 164, 229
- - в теории возмущений 133
- Грина (Green ~) 57
Захарова—Шабата "одевание" (Zakharov-Shabat "dressing") 198, 289, 293
Иерархия АКНС (AKNS hierarchy) 11, 211, 249, 277
- КдФ (KdV ~) 94
- НУШП (DNSE ~) 11
Изинга модель (Ising model) 21, 92
Изомонодромные деформации (isomonodromic deformations) 244, 251
Изоспектральные деформации (isospectral deformations) 244
Инвариант Римана (Riemann invariant) 13, 91
Интеграл движения (motion invariant) 16, 164, 246
Каноническое преобразование (canonic transformation) 41
Коэффициент прохождения (transmission coefficient) 37
- отражения (reflection ~) 37
Лоренца модель (Lorentz model) 21
Матрица рассеяния (scattering matrix) 245
- Картона (Cartan ~) 273
Модуляционная неустойчивость (modulation instability) 77
Монодромия (monodromy) 263
Начальная задача Коши (Cauchy initial problem) 16
Нелинейная суперпозиция (nonlinear superposition) 15
Нормальная мода (normal mode) 26, 38
Пенлеве свойство (Painleve property) 19, 179
- трансцендент (~ transcendent) 20
Переменные действие—угол (action-angle variables) 16, 283
Приближение двухволновое (bidirectional approximation) 26, 57
- одноволновое (unidirectional ~) 26
Потенциал (potential) 287
Поток отраженный (reflected flow) 137
Преобразование Бэклунда (Becklund transformation) 12, 36, 48, 185, 195, 201, 289, 293
- каноническое (canonic ~) 41
- Миуры (Miura ~) 33, 35, 187
- Шлезингера (Schlesinger ~) 12, 198, 267, 271, 289
Проблема Римана—Гильберта (Riemann-Hilbert problem) 12, 198, 247, 279
Расслоение (bundle) 282
Решения автомодельные (selfsimilar solutions) 252
- конечнозонные (finite gar ~) 32, 141, 253
- рациональные (rational ~) 141
- N-солитонные (N-soliton ~) 9, 120, 141
Риманова поверхность (Riemann surface) 145, 152, 244, 249
Симметрия (symmetry) 164
Скобка Пуассона (Poisson bracket) 41, 279
Солитон (soliton) 7, 23, 28
Соотношения Рэнкина—Гюгонио (Rankin-Hugonio relations) 35
Странный аттрактор (strange attractor) 7, 17

Теория Колмогорова—Арнольда—Мозера (Kolmogorov-Arnold-Moser theory) 18
- рассеяния (scattering ~) 108
- Уизема (Whitham ~) 8, 81
Уравнение Бенджамина—Оно (Benjamen-Ono equation) 14
- Бенни—Роскеса—Дэви—Стюартсона (Benny-Roskes-Davey-Stewartson ~) 14
- Гельфанда—Левитана (Gelfand-Levitan ~) 119
- гиперболического типа (hyperbolic ~) 7
- для огибающей неустойчивой волны (unstable wave envelope ~) 74
- Захарова (Zakharov ~) 70, 79
- Кадомцева—Петвиашвили (Kadomtsev-Petviashvili ~) 14, 59, 199
- кирального поля (chiral field ~) 14
- Кортевега—де Фриза (Korteweg-de Vries ~) 8, 13, 29, 44
- Лакса (Lax ~) 42, 201, 216, 279
- логистическое (logistic ^) 17
- модифицированное Кортевега—де Фриза (modified Korteweg-de Vries ~) 14, 44
- точное интегрируемое (exactly integrable ~) 16
- Хироты (Hirota ~) 16, 229, 234, 302
- Шрёдингера нелинейное (nonlinear Schrodinger ~) 8, 13, 51, 71, 207
- Шрёдингера стационарное (stationary Schrodinger ~) 35, 94
- Эйлера (Euler ~) 24
- sin-Гордон (sin-Gordon ~) 14
Условие коммутативности (commutativity condition) 214
Форма Киллинга (Killing form) 283
Формализм Хироты (Hirota formalizm) 9, 19, 47, 168
Формулы следов (trace formulae) 114
Функционал Казимира (Kasimir functional) 136
Цепочка ангармоническая (anharmonic chain) 26
- Тоды (Toda ~) 14, 46
Энергия (energy) 27
Эргодичность (ergodicity) 17
Якоби многообразие (Jacoby manifold) 152
ad-инвариантная функция (ad-invariant function) 217, 283
τ -функция (τ-function) 9, 19, 22, 47, 159

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

На протяжении двух последних десятилетий мы были свидетелями рождения и расцвета теории солитонов. Эта теория оказала заметное влияние как на развитие физики, так и на математику. С точки зрения физика она дала богатый материал для оттачивания «нелинейной интуиции», позволила разрешить ряд парадоксов (таких как проблема Ферми — Пасты — Улама), обеспечила запасом нетривиальных точно решаемых (интегрируемых) моделей классической теории поля. Среди этих моделей оказалось много хорошо известных и чрезвычайно важных для приложений уравнений, таких как уравнение Кортевега — де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение sin-Гордона и др. — здесь несомненно присутствует элемент удачи. Для математика теория солитонов представляет собой удивительный сплав классической теории линейных дифференциальных операторов, теории функций алгебр Ли (в том числе бесконечномерных), элементов алгебраической геометрии и многих других дисциплин. Она углубила наши представления об интегрируемости бесконечномерных динамических систем, и даже в конечномерном случае позволила существенно продвинуться в классической теории уравнений Пенлеве.

В настоящее время по теории солитонов имеется обширная литература. В издательстве «Наука» в 1980 году вышла одна из первых монографий на эту тему («Теория солитонов. Метод обратной задачи», В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский). Сравнительно недавно появилась монография Л. А. Тахтаджяна и Л. Д. Фаддеева «Гамильтонов подход в теории солитонов». Много сборников статей и монографий опубликовано за рубежом. Лучшие из них переведены на русский язык и вышли в издательстве «Мир». Несмотря на большое количество публикаций и немалые тиражи изданий, книги по теории солитонов пользуются неослабевающим спросом, их попросту невозможно купить в магазинах. Однако не это обстоятельство побудило нас заняться переводом монографии профессора Ньюэлла. В настоящей книге сделана попытка

показать многообразие точек зрения на теории солитонов и по возможности увязать их друг с другом. Особую ценность представляет дополнение, присланное автором для русского издания, в котором изложен новый, чрезвычайно интересный и конструктивный взгляд на проблему интегрируемости — многообещающий побег аналитической теории нелинейных уравнений в частных производных. Автор не ставил своей целью отразить все существующие подходы и методы в теории солитонов, его книга представляет собой скорее мгновенное изображение остро развивающегося сюжета. Пригодная для первого знакомства с предметом, она представляет интерес и для профессионалов.

Алан Ньюэлл неоднократно приезжал в Советский Союз. Книга еще не была завершена, а мы уже обсуждали вопрос о ее переводе. Нам приятно выразить благодарность профессору Ньюэллу за постоянный контакт и сотрудничество при подготовке издания на русском языке. При переводе было трудно сохранить непринужденный стиль (книга во многих местах написана от первого лица), свойственный Алану Ньюэллу, человеку, впечатляющему своей активностью в науке, спорте и многом другом, но с этой задачей успешно справились переводчики (И. Р. Габитов перевел введение, главу 4, начало главы 5 и приложение, Е. И. Шульман — главы 1, 2, 3, А. Ю. Орлов — конец главы 5).

А. В. Михайлов

ВВЕДЕНИЕ

За последние двадцать лет в нелинейной физике произошла революция. Два значительных открытия, каждое из которых (любопытное совпадение) было сделано с помощью вычислительного эксперимента, радикальным образом изменили наши представления о природе нелинейности и ввели в динамику две новые теоретические конструкции. Первым из них является солитон, вторым — странный аттрактор. Накануне этих открытий понимание нелинейного поведения в системах со многими степенями свободы ограничивалось ситуациями, которые либо можно было описать системой уравнений гиперболического типа (сжимаемые течения, ударные волны), либо они являлись малыми возмущениями линейных состояний. Хотя по-прежнему существует много нелинейных процессов, таких как развитая турбулентность и процессы в квантовых системах с большими флуктуациями, о которых пока известно довольно мало, но есть также и несколько других типов нелинейного поведения, широко встречающихся в природе, которые теперь могут быть классифицированы, предсказаны и поняты. Ныне слово нелинейность, которое буквально означает «отсутствие линейности», больше не является синонимом области, лежащей за пределами доступного пониманию.

Эта книга о солитонах и о том, как они выглядят в математике и физике. Она является итогом лекций, прочитанных мною в июне 1982 г. в рамках цикла, поддержанного Национальным научным фондом через Консультативный совет по математическим наукам. При ее написании я старался ориентироваться на серьезного студента, не специалиста в данной области, принимая во внимание как стиль изложения, так и цену. Книга не является энциклопедией информации по солитонам, в которой каждое предложение прерывается либо ссылкой, либо спором по поводу приоритета. Я скорее сделал попытку изложить историю солитона так, как я хотел бы услышать ее в качестве аспиранта, с некоторыми историческими отступлениями, подробной мотивировкой, часто пытаясь установить

связь обсуждаемой темы с целостной картиной и ясным указанием направления или направлений, в которых происходит развитие изучаемого предмета. Важные идеи зачастую повторяются несколько раз, иногда в несколько отличающихся контекстах. Вследствие такой манеры изложения книга местами явно не оценивает должным образом вклада многих коллег, так много сделавших для развития этой удивительной темы. Я приношу извинения за эти опущения.

С другой стороны, книга не является простой и, исключая начальную главу, в которой повествуется об открытии солитона, не предназначена для чтения в кресле. Она требует остро заточенного карандаша и еще более острой сообразительности. В ней пять глав, цель первой я уже изложил. Вторая глава знакомит читателя с истоками и физикой уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) и нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), причем особый упор делается на их универсальность и широкую распространенность. Об этом я больше скажу во второй половине введения. В этой главе также обсуждается вывод этих уравнений как условий асимптотической разрешимости. В попытке подчеркнуть, что именно носит универсальный характер, в данной главе мы уделяем особое внимание неустойчивости Бенджамина — Фейера, или модуляционной неустойчивости огибающей, которая играет важную роль во многих физических приложениях. Она представляет собой проявление того, что монохроматическая волна зачастую неустойчива и порождает локальное поведение, подобное импульсу или солитону. В одномерном случае импульс эволюционирует до тех пор, пока не сформируется солитон огибающей. В многомерном случае эффект более впечатляющ, так что решение может стать сингулярным за конечное время; это наблюдается в нелинейной оптике (самофокусировка) и в физике плазмы (коллапс ленгмюровских волн). Последний раздел посвящен детальному обсуждению связи теории Уизема и нелинейного уравнения Шрёдингера. По виду может показаться, что последнее представляет собой простой предел малых амплитуд предыдущего. Это не так, используются намного более тонкие предельные переходы. Оказывается, что этот случай является прямым аналогом проблемы, касающейся поведения непрерывной системы вдали и в окрестности фазового перехода. Вдали от точки перехода амплитуда параметра порядка жестко привязана к градиенту фазы (как это имеет место в решениях теории Уизема), в то время как вблизи от нее амплитуда обладает независимой динамикой развития.

В третьей главе стандартным образом вводится солитонная математика. Сначала мы покажем, как выводится семейство

интегрируемых уравнений, связанное с заданной (спектральной) задачей, и как наделять уравнения гамильтоновой структурой. Хотя эта глава в основном посвящена двум простейшим семействам, КдФ и НУШ, материалы упражнений в конце разделов 3b и 3c включают более трудные темы. Читатель должен научиться уверенно обращаться с этими упражнениями; в частности, упражнение 3b (5) знакомит со схемой метода обратной задачи для эволюционных уравнений с пространственной размерностью больше единицы. Основываясь на этих разделах, я приведу метод обратной задачи и покажу, как решать начально-краевую задачу для уравнения Кортевега — де Фриза на бесконечной оси. Я также привожу пространное обсуждение того, как использовать идеи теории обратной задачи для изучения ситуаций, которые могут быть описаны возмущенным уравнением Кортевега — де Фриза. В частности, весьма подробно обсуждается задача о распространении уединенной волны в канале с медленно меняющейся глубиной и развивается общий метод расчета поля возмущенного потока, включая волну отражения. Как вы увидите, эта проблема нетривиальна, так как возмущение не только изменяет уединенную волну, но также порождает новые компоненты потока. В последнем разделе этой главы рассматриваются пути построения специальных классов решений, которые зачастую наиболее интересны в приложениях; здесь вы встретите многосолитонные решения, рациональные решения и, наконец, многофазные периодические решения. В последней части гл. 3 начинают проявляться некоторые особенности нового подхода к солитонным уравнениям, который будет представлен в гл. 5. Постоянно подчеркивается, что отыскивается решение не просто одного какого-то уравнения, а целого семейства уравнений.

В гл. 4 появляется новый герой. Им является τ-функция. В первых разделах этой главы я показываю, как она вводится в виде потенциальной функции и в качестве естественного следствия формы законов сохранения и симметрий. На этой стадии читателю должно быть абсолютно ясно, что он имеет дело с бесконечным набором коммутирующих потоков и что τ должна рассматриваться как функция времен $\{t_k\}$ всех потоков, выбранных в качестве независимых переменных. В центральных разделах для построения многосолитонных решений используется формализм Хироты и уделяется особое внимание алгебраической структуре билинейных уравнений Хироты, которые допускают N-солитонные решения для произвольного N. В частности, мы покажем, каким образом существование N-солитонного решения (для произвольного N) специального уравнения Хироты является эквивалентным существованию бесконечного

семейства уравнений Хироты возрастающей степени, к которому принадлежит специальное уравнение и которое характеризуется общей для всех уравнений семейства функцией фазового сдвига. Особо подчеркивается роль функции фазового сдвига при построении бесконечного семейства. Некоторые из этих идей абсолютно новы. После обсуждения формализма Хироты в следующем разделе я знакомлю читателя со свойством Пенлеве, которым, по-видимому, обладают все интегрируемые системы[1]). Подчеркивается связь этого важного свойства, из которого вытекает легко реализуемый тест на точную интегрируемость систем, с условием Хироты (условие, которому должен удовлетворять заданный многочлен Хироты для того, чтобы соответствующее билинейное уравнение допускало N-солитонное решение). В заключительном разделе этой главы вводятся преобразования Бэклунда, при помощи которых из простых могут быть построены значительно более сложные решения. Оказывается особо полезным представить преобразование Бэклунда в форме $\tau_{\text{стар}} = e^{\beta Y}\tau_{\text{нов}}$. Оператор Y является очень важным. Он называется *вершинным оператором.*

На протяжении первых четырех глав происходило постепенное изменение концепции. Поначалу солитонное уравнение понимали как нелинейное эволюционное уравнение, как рецепт, по которому изменяется заданная функция пространственно-подобной переменной x относительно времени-подобной переменной t. Несомненно, что принимается именно эта точка зрения, когда применяется метод обратной задачи рассеяния, в котором для эволюционного уравнения рассматривается задача Коши (задача с начальными условиями). Однако по мере прояснения чудес солитонных уравнений становится все яснее, что данное уравнение правильнее всего считать *локальным* соотношением между функцией (или функциями) бесконечного числа независимых переменных и ее различными производными по отношению к независимым переменным — соотношением, являющимся весьма специфическим из-за заложенной в нем алгебраической структуры. Благодаря локальности уравнения нет необходимости рассматривать какую-либо переменную как пространственно-подобную и поэтому специальным образом выделенную.

Новая концепция подхода к солитонным уравнениям, основанная на этих идеях, приведена в гл. 5. Это самая большая глава, посвященная материалу, который должен быть новым для всех, кроме нескольких специалистов в этой области. Я ста-

---

[1]) Обсуждению этой гипотезы посвящено множество работ. В ряде частных случаев ее удалось обосновать. Однако в последнее время становится ясно, что свойство Пенлеве не является ни необходимым, ни достаточным для интегрируемости. Контрпримеры можно найти в работе [1*]. — *Прим. ред.*

рался избежать изложения новых идей на чрезмерно математическом языке, так что я рассчитываю, что у читателя хватит выносливости, чтобы ее осилить. Я начну с пояснения роли, которую играет метод Уолквиста — Эстабрука при выявлении алгебраической структуры, присущей заданному уравнению. В случаях КдФ и НУШ оказывается, что фазовое пространство, в котором «живут» солитонные потоки, является бесконечномерной градуированной алгеброй Ли $G = \widetilde{\mathrm{sl}(2, C)}$, алгеброй петель $\sum_{\infty}^{-N} X_j \zeta^{-j}$ для $\mathrm{sl}(2, C)$. Выражение $\sum_{\infty}^{-N} X_j \zeta^{-j}$ является просто степенным рядом, в котором все коэффициенты принадлежат $\mathrm{sl}(2, C)$ и могут быть представлены в матричном виде матрицами 2×2 с нулевым следом. Физик легко увидит, что спиновые матрицы Паули можно использовать в качестве базиса в этом векторном пространстве.

Алгебру G можно разложить на две подалгебры, и на ортогональном дополнении к одной из них, которая может быть отождествлена с двойственной к другой и поэтому является многообразием Пуассона, имеются естественные гамильтоновы векторные поля или потоки. *Векторные поля являются солитонными уравнениями*, если они порождаются специальным набором (последовательностью) функций. Они являются переопределенной бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечным числом независимых переменных $\{t_k\}_0^\infty$. При желании выделить одну из независимых переменных, скажем t_1, которую мы затем назовем x, эти уравнения можно использовать для выражения бесконечного числа зависимых переменных в виде производных все более и более высокого порядка по x от первых членов этой последовательности. Оставшиеся уравнения дают тогда хорошо известную иерархию солитонных уравнений АКНС; первым нетривиальным ее членом является нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). Однако равно допустимо выбрать в качестве выделенной переменной x переменную t_2, и в этом случае бесконечное число зависимых переменных выражается как производные по x от первого и второго членов этой последовательности. Оставшиеся уравнения тогда дают новую иерархию солитонных уравнений; в этом случае они известны как иерархия НУШП (нелинейного уравнения Шрёдингера с производной). В разделах, в которых обсуждаются эти вопросы, мы также затронем связи между новой гамильтоновой структурой, которая естественным образом связана с алгеброй, и старой вариационной гамильтоновой структурой, знакомой из предыдущих глав. В конце раздела, в котором очерчены эти идеи, я приглашаю читателя попытаться (и

помогаю ему) выполнить несколько упражнений, в которых с этой точки зрения выводятся уравнения для гармонического осциллятора и конечной цепочки Тоды со свободными концами.

Оказывается также, что форма уравнений подсказывает идею ввести потенциалы, которые заменяют бесконечное число зависимых переменных. Ими являются τ-функции Хироты (для $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ существуют три из них, одна «главная», называемая τ, и две вспомогательные функции σ и ρ, хотя мы увидим, что этот триплет лучше всего воспринимать как последовательную тройку ρ, τ, σ бесконечной последовательности $\{\tau_n\}$), и, будучи выраженными через эти новые потенциалы, эволюционные уравнения являются билинейными уравнениями Хироты. В этом разделе мы также введем обобщенные потоки $F_{ik} = (\partial^2/\partial t_i \partial t_k) \ln \tau$, которые играют очень важную роль во всей теории.

В последующих разделах этой главы с чисто алгебраической точки зрения продолжаются обсуждения калибровочных преобразований, преобразований Бэклунда и Шлезингера, метода обратной задачи и проблемы Римана — Гильберта, а также другие разнообразные вопросы, объединившиеся под зонтом нашего нового подхода. Более подробное обсуждение этих вопросов откладывается до пятой главы, а сейчас я хочу обсудить с вами немного подробнее значение открытия солитона и его влияние на другие разделы физики. Однако, прежде чем это сделать, я хочу, чтобы в вашем сознании нестираемо запечатлелась одна мысль. Она состоит в том, что солитонные уравнения являются магическими исключительно по алгебраическим причинам, которые должны проявляться в структуре уравнений в виде весьма специфического отношения между функцией и ее различными производными. Не требуется никаких глобальных свойств, чтобы обеспечить особую значимость этого отношения.

Дальнейшее обсуждение. Солитон сам по себе является драматически новой концепцией в нелинейной теории. В нем наконец на классическом уровне реализуется объект, существование которого специалисты по теории поля постулировали многие годы: локальный бегущий волновой импульс, компактная когерентная структура, удивительно устойчивое решение полевого уравнения и частице-подобные свойства. Он существенно нелинеен и возникает благодаря равновесию двух сил; одна из них линейна и стремится размазать импульс, другая является нелинейной и сжимает его. До появления солитона физики часто говорили о волновых пакетах и фотонах, которые являлись решениями линейного не зависящего от времени уравнения Шрёдингера. Но такие пакеты всегда будут расплываться за время

обратно пропорциональное квадрату ширины пакета в k-пространстве. Нелинейность существенна для прекращения и уравновешивания дисперсионного расплывания. В одномерии взаимодействие дисперсии и сжатия волновых пакетов описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ)

$$2iq_t + q_{xx} + 2q^2q^* = 0, \tag{1}$$

которое описывает эволюцию огибающей $q(x, t)$ цуга волн (в системе координат, движущейся с групповой скоростью несущей волны). Оно является универсальным уравнением нелинейной физики и возникает в огромном разнообразии ситуаций: в нелинейной оптике [19], в теории волн на глубокой воде [59], при описании переноса энергии вдоль α-спиралей белков [112]. Оно не только универсально; легко предсказать условия, при которых оно возникает.

Хотя НУШ первым появилось среди солитонных уравнений [21], но родоначальником солитона стало не оно, а знаменитое уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) [12],

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Оно также универсально. Уравнение КдФ описывает, как инвариант Римана, который при отсутствии посторонних воздействий распространялся бы неискаженным вдоль прямых параллельных характеристик линейной гиперболической системы (вспомните решение Даламбера $u(x, t) = f(x-t) + g(x+t)$ линейного волнового уравнения), эволюционирует под воздействием нелинейности и дисперсии. В (2) x измеряется относительно системы отсчета, движущейся с характеристической скоростью линейной волны. В КдФ нелинейность порождает тенденцию к опрокидыванию волны и появлению сходимости в семействе характеристик и поэтому стремление к возникновению за конечное время бесконечных пространственных производных. С другой стороны, дисперсия сглаживает процесс, расщепляя все более крутой фронт в цуг импульсов или солитонов, каждый из которых, взятый отдельно, имеет следующий вид:

$$q(x, t) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta (x - x_0 - 4\eta^2 t). \tag{3}$$

Уравнение КдФ также встречается повсюду, и, как и для НУШ, можно сформулировать условия, при которых оно возникает. Это уравнение списывает эволюцию волн на мелкой воде, ионно-акустические волны, длинные волны в сдвиговых потоках (см. [120]) и множество других ситуаций, которые читатель может найти перечисленными в различных обзорах и материалах, указанных в списке литературы.

Как уравнение КдФ, так и НУШ появляются в качестве асимптотических условий разрешимости. Вкратце формулировка «асимптотическое условие разрешимости» означает условие на главный порядок аппроксимации решения более сложной системы уравнений, которое обеспечивает равномерную ограниченность последующих итераций аппроксимации. Другими универсальными уравнениями, возникающими аналогично и также допускающими солитонные решения, являются модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (мКдФ), нелинейное уравнение Шрёдингера с производной (НУШП), уравнения трехволнового взаимодействия (УТВ), уравнение Буссинеска, уравнение Кадомцева — Петвиашвили (двумерное КдФ или КП), уравнение Бенджамина — Оно (БО), уравнение для умеренно длинных волн, уравнение Бенни — Роскеса — Дэви — Стюартсона (двумерное НУШ), уравнения sin-Гордон и sh-Гордон, массивная модель Тирринга, уравнение Ландау — Лифшица, модели кирального поля Вакса — Ларкина — Намбу — Йоны Лазинио.

Что примечательно и, насколько мне известно, до сих пор не объяснено, это то, что многие уравнения, полученные как асимптотические условия разрешимости при очень общих и широко применимых предположениях, также являются солитонными уравнениями. Другими словами, почему уравнение, являющееся универсальным в физике, должно также обладать столь удивительными математическими свойствами? Я буду объяснять эти свойства более подробно как в следующих абзацах, так и на протяжении всех этих лекций, но одно из ключевых свойств солитонного уравнения состоит в том, что оно обладает бесконечным числом законов сохранения и ассоциированными симметриями. Несомненно ясно, что при построении математических моделей для физических приложений естественным образом учитываются некоторые симметрии, вроде трансляционной инвариантности, при помощи которых отбрасывается ненужное и выявляются существенные особенности изучаемого процесса. Однако почему процесс нахождения асимптотического условия разрешимости должен вводить так много симметрий, большинство из которых скрытые и не обладают легко понятной физической интерпретацией? Чтобы нагляднее подчеркнуть необычность ситуации, предположим, что вам предлагают полную шляпу уравнений и просят случайным образом выбрать одно из них. Очень маловероятно, чтобы оно оказалось полностью интегрируемым. Однако в совокупности уравнений, которые возникают в физике в качестве асимптотических условий разрешимости, пожалуй, содержится непропорциональная доля уравнений с солитонными свойствами. Может ли это быть просто совпадением?

Что мы понимаем под солитонным уравнением? Все, что я до сих пор говорил о солитоне, сводится к тому, что он представляет собой уединенный бегущий волновой импульс нелинейного дифференциального уравнения в частных производных с выраженными свойствами устойчивости и поведением, подобным частице. Я намекнул, что истинный солитон, решение уравнения с очень специфическими свойствами, — это нечто существенно большее, чем просто уединенная волна. Это действительно так. Многие уравнения допускают уединенные волны, а именно локальные бегущие волновые решения с нелинейными свойствами устойчивости. Например, если мы заменим керрову или кубическую нелинейность в (1) на насыщенную нелинейность $-iq(1+2qq^*)^{-1}$ или слагаемое $6qq_x$ в (2) на $6q^3q_x$, то по-прежнему будут существовать бегущие волновые решения, нейтрально устойчивые по отношению к малым возмущениям. Однако решения в виде уединенных волн солитонных уравнений имеют дополнительные свойства. Одно из свойств состоит в том, что две уединенные волны проходят друг через друга, не утрачивая своей индивидуальности. Например, заметим, что скорость уединенной волны (3) зависит от амплитуды. Теперь представим, что в некоторый начальный момент времени две уединенные волны далеко отстоят друг от друга, причем волна слева имеет бóльшую амплитуду и скорость. Бóльшая волна в конце концов догонит меньшую. Взаимодействие будет существенно нелинейным и будет совершенно непохожим на взаимодействие двух линейных волн, в котором результирующее решение является линейной суммой двух индивидуальных волн. Тем не менее после нелинейного взаимодействия опять появляются два импульса с бóльшим в качестве лидера, причем каждый примет в точности прежнюю форму. При этом не возникнет никакого излучения, процессом рассеяния не порождается никакой другой моды. Единственным последствием взаимодействия является фазовый сдвиг; каждый импульс будет сдвинут на некоторое расстояние от того положения, в котором он находился бы, перемещаясь беспрепятственно. Хотя данное свойство взаимодействия представляется примечательным и в действительности часто используется как тест для обнаружения солитонных уравнений, само по себе оно недостаточно. Существуют уравнения, которые допускают решения, представляющие собой нелинейную суперпозицию двух уединенных волн, но не обладающие всеми свойствами, присущими решениям солитонных уравнений. Солитонное уравнение, если оно допускает решения типа уединенных волн, должно допускать решение, представляющее собой нелинейную суперпозицию N уединенных волн при произвольном N.

Оно также является точно интегрируемым в смысле бесконечномерного обобщения полностью интегрируемой гамильтоновой системы. Мы говорим, что конечномерная ($2m$ переменных) гамильтонова система полностью интегрируема, если она допускает m интегралов движения F_i, $i = 1, \ldots, m$, которые независимы и находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона, связанной с гамильтоновой структурой, и поверхность уровня, определенная пересечением поверхностей $F_i = c_i$, является компактной и связной. Существует теорема, которая гласит, что такую систему каноническим образом можно преобразовать (тем самым сохраняя гамильтонову структуру) в набор новых координат, переменных типа действие — угол, в которых система полностью расцепляема. Переменные действия J_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ (которые являются функциями интегралов движения F_i), неизменны во времени, а угловые переменные θ_i линейно меняются во времени; т. е. $\theta_i = \omega_i t + a_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, a_i, ω_i постоянны. Как следствие, движение должно быть квазипериодическим и осуществляться на m-мерном торе, топологически эквивалентном прямому произведению m окружностей. На сегодняшний день все известные солитонные уравнения имеют гамильтоновы структуры и бесконечный набор интегралов движения, находящихся в инволюции. Существует также каноническое преобразование (метод обратной задачи или МОЗР, нелинейный аналог преобразования Фурье), которое трансформирует солитонное уравнение в бесконечную систему отдельных уравнений с переменными типа действие — угол, каждое из которых может быть проинтегрировано тривиальным образом. На этом пути можно в принципе решить начальную задачу Коши. При этом оказывается, что некоторые переменные действия являются солитонными параметрами; в этом заключается причина сохранения индивидуальных признаков солитона при рассеянии, а именно параметров, задающих его форму, скорость, амплитуду, собственную частоту и т. д. Остальные переменные действия связаны с энергией излучения каждой нелинейной моды, нелинейным аналогом континуума мод Фурье линейной системы.

Сравните это поведение с тем, которое ожидалось бы в механической системе с сильной связью между многими степенями свободы. В общем случае не следует ожидать, что такая система будет расцепляемой. Следовательно, нельзя ожидать, чтобы энергетический спектр временных рядов для какой-либо из зависимых переменных состоял из m отдельных частот, как это было, например, в случае полностью интегрируемой гамильтоновой системы с компактным гамильтонианом. Напротив, следует ожидать по крайней мере небольшого спектрального уширения, свидетельствующего о стохастичности поведения, хотя

оно не обязательно будет эргодическим. Действительно, вторым значительным открытием последнего десятилетия, упоминавшимся в первом абзаце, является осознание того, что в системах уравнений с небольшим числом степеней свободы может существовать стохастическое поведение зависимости от времени. Важна качественная природа системы уравнений, а не размерность системы. Если уравнения таковы, что решения сильно зависят от начальных условий, то малые погрешности начальных данных экспоненциально растут в фазовом потоке, и начиная с некоторого момента становится совершенно невозможно предсказать будущее состояние системы. Этот процесс может происходить даже в диссипативных системах, в которых имеет место сжатие заданного объема в фазовом потоке пространства состояний. Оказывается, что для систем обыкновенных дифференциальных уравнений размерности три или более (например, уравнения Лоренца и Реслера), для двумерных обратимых отображений (например, отображений Хенона и Икеды) или для одномерных необратимых отображений (например, логистического уравнения $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$, автомодельная структура которого в пространстве (μ, x) была открыта в новаторской работе Митчелла Фейгенбаума), движение может происходить на аттракторе нового типа (в противоположность известным типам, которые были либо фиксированной точкой, либо предельным циклом), названном странным аттрактором. Аттрактор назван странным не просто благодаря своей структуре (локально он может быть представлен как прямое произведение между R^n, $n=1, 2, 3, \ldots$, и канторовым множеством), а потому что движение на нем очень сильно зависит от начальных условий. В самом деле, разумно ожидать, что в некоторых случаях явно стохастический характер зависимости от времени системы со многими степенями свободы может быть объяснен с помощью движения точки пространства состояний на странном аттракторе, размерность которого много меньше. Экспериментальное обоснование этого предположения может быть найдено в работе [123].

Это отступление в теорию неинтегрируемых систем имело целью максимально заострить внимание на том, что для полной интегрируемости уравнение должно обладать очень специальными свойствами. Заметим, что решения интегрируемых систем не обладают большой чувствительностью к начальным условиям. Начальные погрешности растут со временем самое большее линейным образом. До появления солитонных уравнений число интегрируемых систем можно было пересчитать по пальцам одной руки. Наиболее упоминаемыми были гармонический осциллятор, движение тела в поле центральных сил, движение

жесткого тела. Действительно, единственный пример бесконечномерной точно решаемой физической задачи был вовсе не связан с ньютоновской механикой. Напротив, это была двумерная модель равновесной статистической механики — модель Изинга с взаимодействием ближайших соседей, предложенная для описания фазовых переходов. Знаменитым «силовым приемом» Онзагер вычислил статистическую сумму этой модели, применив ряд искусных и кажущихся колдовскими трюков. В том, что несомненно должно восприниматься как совершенно неожиданное развитие, обнаружилась глубокая связь между солитонными уравнениями и точно решаемыми моделями равновесной статистической механики, а также квантовой теории поля. Позже этот вопрос будет обсуждаться более подробно.

К сожалению, свойство полной интегрируемости нельзя установить непосредственно из самого уравнения[1]). Поэтому полезно поискать другие свойства, характеризующие солитонные уравнения, которые легче применить в качестве теста на интегрируемость к заданному уравнению. Также поучительно выяснить, что происходит с этими свойствами, когда солитонная природа уравнений нарушается либо добавлением новых членов, либо изменением некоторых критических коэффициентов. Ожидается, что такое возмущение породит некоторые области стохастичности в фазовом пространстве, в частности вблизи гомоклинных или гетероклинных орбит. Если возмущение мало, можно ожидать, что будет иметь место результат типа Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ) (хотя для бесконечномерных систем это до сих пор не доказано). Повторим, что в полностью интегрируемых гамильтоновых системах с ограниченным гамильтонианом движение осуществляется на инвариантном m-мерном торе, параметризуемом m значениями переменных действия. Теорема КАМ гласит, что под действием малых возмущений большинство этих торов сохраняется. Однако между этими торами существуют узкие области стохастичности. Можно задаться вопросом, каким образом проявляется эта особенность при нарушении других свойств солитонных уравнений. Более того, можно также использовать эти идеи для описания турбулентного или стохастического поведения в других моделях физики, моделях, которые, будучи невозмущенными, являются точно решаемыми, вроде модели Изинга, и которые тесно связаны с солитонными уравнениями.

---

[1]) С этим утверждением автора можно не согласиться. В настоящее время имеется строгая и последовательная теория, позволяющая не только ответить на вопрос об интегрируемости конкретного уравнения, но и описать все интегрируемые уравнения заданного вида (порядка) [2*], [3*]. — *Прим. ред.*

Среди многих специальных свойств солитонных решений, которые будут обсуждаться в этих лекциях, существуют два свойства, на которых я хочу остановиться. Первым из них является свойство Хироты, открытое Хиротой, который нашел очень полезный и важный метод вычисления многосолитонных решений. Необходимо, чтобы уравнения были записаны в билинейной форме; для уравнения (2) этот шаг (для которого не существует общего алгоритма) осуществляется с помощью представления

$$q(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau. \tag{4}$$

Функция $\tau(x, t)$ удовлетворяет квадратичному уравнению

$$\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t + \tau\tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_{xx}^2 = 0. \tag{5}$$

Для этих уравнений Хирота создал новое исчисление, в котором производные $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ заменены операторами D_t, D_x; в этих обозначениях квадратичное уравнение (5) может быть записано в виде

$$P(D_t, D_x)\tau\cdot\tau \equiv (D_tD_x + D_x^4)\tau\cdot\tau = 0; \tag{6}$$

здесь P — многочлен от своих аргументов. Из этого уравнения довольно просто определить условия (условия Хироты), которым должен удовлетворять многочлен P для того, чтобы уравнение допускало N-солитонные решения для произвольных N. Для $P(D_t, D_x) = D_xD_t + D_x^4$ (уравнение КдФ), или $P(D_t, D_x) = D_xD_t + D_x^6$ (уравнение Кортевега — Савады) условия Хироты выполняются. Для $P(D_t, D_x) = D_tD_x + D_x^3$ их нет, и могут быть найдены только решения в виде двойной уединенной волны. Одни и те же условия на P допускают родственный класс решений, бесконечную последовательность рациональных решений, для каждого из которых τ-функция является многочленом от x и t и для которых соответствующее решение q является рациональной функцией. Первыми тремя нетривиальными рациональными решениями (5) являются $\tau = x$, $\tau = x^3 + 12t$, $\tau = x^6 + 60x^3t - 720t^2$. Соответствующие решения $q(x, t)$ имеют двойной полюс с коэффициентом -2 в каждом из нулей $x = x(t)$ функции $\tau(x, t)$.

Существование этих рациональных решений эквивалентно другому свойству, которым обладают солитонные уравнения,— свойству Пенлеве. Это свойство было первоначально введено в связи с обыкновенными нелинейными уравнениями второго порядка. Целью являлась классификация всех уравнений второго порядка, свойством решений которых было то, что единственными подвижными особенностями были полюса. Это озна-

чает, что единственным типом сингулярностей, положение которых зависит от начальных данных, являются полюса.

Например, решением уравнения $dy/dx = -y^2$, $y(0) = 1/c$ служит $y(x) = 1/(x+c)$, имеющее полюс при $x = -c$. С другой стороны, точки $x = 0, \infty$ представляют собой неподвижные критические точки уравнения $2xdy/dx = y$. Пенлеве обнаружил, что существует пятьдесят типов уравнений, удовлетворяющих этому требованию, состоящих из сорока четырех приводимых к известным уравнениям и шести новых уравнений, решения которых названы трансцендентами Пенлеве. Вторым в списке шести уравнений является

$$y_{xx} = xy + 2y^3, \tag{7}$$

о котором значительно больше будет сказано в гл. 4 и 5. В данный момент важно, что (7) допускает решение вида

$$y = \frac{1}{x - x_0} + \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n, \tag{8}$$

в котором x_0 и a_3 произвольны, а все остальные a_n определяются единственным образом. Уравнение, которое определяет a_3, имеет вид $0 \cdot a_3 = 0$; нуль справа возникает в результате как раз нужного сочетания слагаемых в (7). Если бы xy было заменено на x^2y или слагаемое y^3 на y^4 (что потребовало бы, чтобы членом главного порядка являлся полюс второго порядка), то возникла бы несовместность в уравнениях на $\{a_n\}$, которая неизбежно повлекла бы необходимость введения слагаемого, пропорционального $(x - x_0)^m \ln(x - x_0)$. Тогда уравнение не имело бы свойства Пенлеве, для произвольной начальной точки x_0 более не существовало бы сингулярности в виде полюса.

Примечательно то, что все интегрируемые уравнения представляются обладающими свойствами Пенлеве, хотя эта гипотеза должна быть несколько изменена, когда она применяется к уравнениям в частных производных. Это свойство представляется в точности эквивалентным существованию бесконечной последовательности рациональных решений. Отметим в нашем примере, что если τ разложима в ряд Тейлора вблизи точки поверхности, на которой она обращается в нуль, то q разлагается в ряд по полюсам. Поэтому представляется, что выраженное в терминах τ-функции свойство Пенлеве требует, чтобы τ-функция не имела подвижных критических точек.

Это наблюдение существенно и имеет потенциально важные следствия не только в контексте эволюционных уравнений, но также и для других точно решаемых моделей. Я уже упоминал, что двумерная модель Изинга с взаимодействием ближайших

соседей представляется связанной с солитонными уравнениями. Эта связь была впервые установлена в работе Сато, Мивы и Джимбо [103], которые показали, что в скейлинговом пределе n-точечная корреляционная функция удовлетворяет системе очень специальных нелинейных деформационных уравнений, которые выражают тот факт, что сохраняется группа монодромии соответствующей линейной системы. Рассмотрим конкретный пример линейной системы порядка n

$$\zeta \frac{dW}{d\zeta} = (\zeta A + \zeta^{-1} B + C) W,$$

в которой n-точечная корреляционная функция τ содержится в коэффициентах матриц A, B, C. Данная система имеет иррегулярные сингулярности в точках $\zeta = 0, \infty$. Условие, что группа монодромии этой системы не зависит от аргументов n-точечной корреляционной функции, вынуждает последнюю удовлетворять нелинейному деформационному уравнению. Решение этого уравнения в принципе может быть построено с использованием свойства изомонодромности. Этим способом в замкнутом виде могут быть получены решения n-точечной корреляционной функции. Эта замечательная конструкция тесно смыкается с конструкцией солитонов и другими специальными типами решений солитонных уравнений. В частности, двухточечная функция (в скейлинговом пределе) удовлетворяет тому же уравнению, что однофазное автомодельное решение уравнения sh-Гордон. Кроме того, существуют наводящие на дальнейшие размышления связи между моделями Изинга и интегрируемыми системами. Например, Маккой и Ву [109] показали, что при критической температуре двухточечная корреляционная функция как функция дискретных расстояний удовлетворяет точно интегрируемой дискретной версии цепочки Тоды.

В самом деле, если оказалось возможным установить точную связь между солитонными уравнениями и другими интегрируемыми моделями, кажется естественным задаться вопросом о турбулентном или стохастическом поведении последних. Мерой или критерием потери интегрируемости этих моделей является потеря свойства Пенлеве. В самом деле, Грином и Персивалем [110] показано, как в дифференциальном уравнении, моделирующем проявление стохастического поведения, полюса накапливаются в плоскости комплексного времени вдоль естественных границ, которые сами по себе имеют интересное автомодельное поведение. Кроме того, Сегур [111] показал, что при очень специальном выборе параметров в модели Лоренца, для которой имеет место свойство Пенлеве, модель является интегрируемой.

Что тогда следует ожидать в неинтегрируемой модели статистической физики? В принципе всегда могут быть введены статистическая сумма, свободная энергия и корреляционные функции. Наиболее естественным было бы предположить, что корреляционная функция как функция своих аргументов (повторим, что она является аналогом τ-функции Хироты) не имеет свойства Пенлеве и вместо этого имеет алгебраические и существенные особенности, зависящие от данных. Поэтому функции будут вести себя вблизи сингулярностей очень нерегулярным образом; при этом небольшая неточность в знании исходных данных привела бы к катастрофической погрешности.

Подводя итог обсуждений, еще раз выделим два момента. Первый состоит в том, что алгебраические свойства решаемых моделей являются объединяющим элементом, и второй в том, что многое может дать понимание связей между солитонными уравнениями и их разрешимыми аналогами в статистической и квантовой физике.

Благодарности. Я хочу поблагодарить тех, кто прочитал и сделал полезные замечания по некоторым разделам или по всему курсу лекций: Алехандро Асевеса, Джерри Бона, Джона Грина, Эрику Джин, Дейва Маклохлина, Мартина Крускала, Боба Миуру, Тюдора Ратиу, Нормана Забуски. Неоценимыми были, зачастую острые и безжалостные, но всегда уместные, критика и советы моего большого друга Германна Флашки. Я также чрезвычайно благодарен Гейл Дискерсен, которая сумела перепечатать рукопись и сохранить при этом юмор и здравый смысл. Книга посвящается моим учителям Виктору Грэму, Дэвиду Бенни, Виллему Малкусу и Мартину Крускалу и моим детям Джейми, Шейну, Мэту и Пиппе, которые также многому меня научили.

Кроме того, я признателен математическому отделу Управления оборонных исследований и Управления научных исследований военно-воздушных сил за щедрую и вдохновляющую поддержку.

Университет шт. Аризона
Декабрь 1983 г.

ГЛАВА 1 ИСТОРИЯ СОЛИТОНА

1а. Открытие Джона Скотта Расселла. Открытие солитона, его замечательных свойств и необыкновенного богатства математических методов его описания осуществлялось в два этапа, на протяжении почти ста сорока лет. История берет свое начало с наблюдения Джоном Скоттом Расселлом «большой волны трансляции». Я позволю себе рассказать об этом событии.

«Я полагаю, что наилучшее представление об этом явлении даст описание обстоятельств моего первого знакомства с ним. Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась. Но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна в состоянии интенсивного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, то есть округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда нашел его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от одного до полутора футов. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал уединенной волной трансляции; теперь это название общепринято».

Если считать, что большого ученого отличает способность осознать, что является существенно новым, — а это действительно одно из ключевых качеств, то Расселл, без сомнения, заслуживает этого титула. С самого первого наблюдения он понял, что обнаружил новое явление, и вследствие этого большую часть своей профессиональной деятельности он посвятил экспериментальному изучению свойств большой волны.

«Это самое прекрасное и необычное явление: в первый же день я понял, что это счастливейший момент моей жизни. Никому до меня не посчастливилось наблюдать его или, во всяком случае, понять, что оно значит. Теперь оно известно как уединенная волна трансляции. Никто никогда и вообразить не мог, что существует такое явление, как уединенная волна. Когда я

описал ее сэру Джону Гершелю, он сказал: «Это просто отсеченная половина обычной волны». Но это не так, поскольку обычные волны распространяются частично выше, а частично ниже уровня поверхности, и кроме того, ее скорость отличается от скорости обычных волн. Поэтому уединенная волна — полная волна, а не половина, с той разницей, что она вся целиком располагается выше поверхности, а не частично выше и частично ниже. Такой водяной холм не может стоять на месте, а распространяется вдоль канала» [2].

Он знал, что обнаруженный им способ распространения фундаментален в том смысле, что произвольное возвышение воды распадается на основную и остаточную волны. Он знал, что ее скорость пропорциональна ее высоте, и после многочисленных экспериментов предложил закон $c^2 = g(h + \eta)$, где g, h, η — ускорение свободного падения, глубина невозмущенной жидкости и максимальная высота волны относительно невозмущенного уровня соответственно. Он знал, что волны понижения ведут себя совершенно не так, как волны повышения и не превращаются в волны, распространяющиеся без изменения формы. Он знал о взаимодействии уединенных волн, но, кажется, не заметил их солитонного характера — свойства, которое я буду вскоре обсуждать. Действительно, если бы он применил свойство обратимости во времени уравнений Эйлера и использовал тот факт, что при $t \to \pm\infty$ две волны бесконечно удалены друг от друга, он смог бы обнаружить это поистине замечательное свойство. Он знал также о странных и уникальных свойствах отражения волн малой крутизны.

Знал он также и о том, как их создавать! Недавно я имел честь принять участие в удивительно приятной и хорошо организованной конференции в Университете Хериот-Уатт, посвященной столетию со дня смерти этого большого человека. Это были прекрасные дни, наполненные оживленными разговорами и стимулирующими дискуссиями, собравшие международный коллектив ученых, представлявший самое меньшее дюжину различных дисциплин. Кульминацией этой встречи должно было стать воспроизведение наблюдения Расселла в том самом месте канала Юнион, где произошло когда-то это событие. С огорчением вынужден признать, что мы потерпели неудачу и при всех наших обширных знаниях и опыте мы не смогли быстро придумать способ создания этой волны, когда оказалось, что двигатель мощной моторной лодки, так хорошо работавший во время испытаний, за день до события отказал. А виновник торжества обычно делал это, располагая только парой лошадей, парой канатов, старой баржей и глубоким интуитивным пониманием того, как передается импульс от баржи к воде. Стоя на насыпи и наблюдая за усилиями роя молодых и ретивых уче-

ных, бегущих вдоль канала в роли больших лошадей, можно было видеть много биноклей, поднятых в молчаливом уважении.

Тем не менее, несмотря на неудачи этого дня, ни одна живая душа не сомневается в существовании большой волны, так как эксперименты Расселла повторялись при тщательно контролируемых условиях и его предсказания проверены. Однако не всегда дело обстояло таким образом. Сначала идеи Расселла встретили большую враждебность и скептицизм у крупнейших светил научного общества того времени. И Эйри, и Стокс сомневались в том, может ли волна, распространяющаяся без изменения формы, целиком располагаться выше уровня воды и ссылались на уменьшение ее амплитуды как на указание о внутренне присущей этой волне изменчивости. Расселл предположил (правильно), что это несоответствие вызвано трением. Дело в том, что Стокс в своей работе 1849 г. методом разложения синусоидальной волны по малой амплитуде «доказал», что единственной неизменяющейся волной может быть только синусоидальная в своей основе с нелинейными членами, которые приводят лишь к небольшому изменению формы (вторая и высшие гармоники) и скорости (она становится слабо зависящей от амплитуды). В действительности решение, найденное Стоксом, является другим предельным случаем более общего решения уравнений движения (кноидальной волны), соответствующим стремящемуся к нулю модулю эллиптической функции, в то время как для уединенной волны он равен единице. Впоследствии Стокс понял и признал свои ошибки. Есть некоторая ирония в том, что волна, открытая Стоксом (волна Стокса), неустойчива, если отношение глубины жидкости к длине волны близко к единице (это отношение мало для уединенной волны). На более глубокой воде почти монохроматический цуг волн типа волны Стокса распадается на отдельные волновые пакеты.

Лишь в 1870-х гг. работа Расселла была окончательно подтверждена, и ее научное значение можно измерить тем, какой величины фигуры это сделали. Буссинеск [3] (1872) и Рэлей (1876) независимо нашли решение для возвышения свободной поверхности в виде квадрата гиперболического секанса. Работа Буссинеска в действительности этим не ограничивалась и ввела много новых понятий, используемых в современной науке. В частности, он нашел сохраняющуюся плотность третьего интеграла движения — величину, которую он назвал моментом неустойчивости. Он вывел свое решение из уравнений волн на воде в приближении, носящем теперь его имя. В этом прибли-

жении еще возможны двухволновые (встречные) движения[1]), но присутствует основная идея баланса между нелинейностью и дисперсией. Осталось сказать о Кортевеге и де Фризе, которые в работе 1895 г. (они, видимо, не знали результатов работ Буссинеска и Рэлея), пытаясь ответить на возражения Эйри и Стокса, вывели уравнение *одноволнового приближения*, носящее теперь их имя. (Это исследование планировалось как диссертационная работа де Фриза.)

На этом первом этапе открытия основной упор был сделан на установление существования уединенной волны и ее устойчивости. Открытие универсальной природы солитона и других его свойств еще ждало своего часа — когда еще один эксперимент, предпринятый для исследования совершенно другой проблемы, привел к неожиданному результату.

1b. Ферми — Паста — Улам. Декорации меняются. Мы переносимся почти на шестьдесят лет вперед, в совершенно другое место. Теперь мы в Лос-Аламосе, а главные герои этих событий — Энрико Ферми, Джон Паста и Стен Улам. Их интересовал вопрос: почему твердые тела обладают конечной теплопроводностью? Моделью твердого тела служила одномерная решетка, набор точечных масс, связанных пружинами.

В 1914 г. Дебай предположил, что конечная теплопроводность решетки связана с ангармоничностью возвращающей силы пружин. Если сила линейна (закон Гука), то энергия беспрепятственно переносится независимыми фундаментальными (нормальными) модами. Эффективная теплопроводность бесконечна, для передачи тепла с одного конца решетки на другой не нужно никакого перепада температуры, и уравнения диффузии тепла не получается. Дебай полагал, что если решетка будет слабонелинейной, то нормальные моды (вычисленные для линеаризованных упругих сил) станут вследствие нелинейности взаимодействовать и тем самым ограничат перенос энергии. Суммарный эффект нелинейных взаимодействий (соударений фононов) проявился бы в конечности коэффициента переноса в уравнении диффузии. Это предположение побудило Ферми, Пасту и Улама (ФПУ) [5] предпринять численное моделирование одномерной ангармонической цепочки на компьютере Маниак I в Лос-Аламосе. Они собирались доказать, что

---

[1]) Я имею в виду уравнение (2.14) с $D = 1$, которое является двухволновым. На самом деле Буссинеск упростил правую часть, заменив F_1 на $-F_x$ и F_{xt} на $-F_{xx}$ в соответствии с одноволновым приближением. Его имя поэтому связано скорее с уравнением (2.26), которое хотя и допускает встречное движение волн, но не описывает встречные волны на воде, а не с уравнением (2.14).

гладкое начальное условие, при котором энергия содержится в низшей моде, или, возможно, в нескольких низших модах, благодаря нелинейному взаимодействию будет постепенно релаксировать к состоянию статистического равновесия. В этом состоянии энергия распределяется поровну между всеми модами колебаний. По времени же релаксации можно было бы измерить коэффициент диффузии.

Модель, использованная ФПУ для описания одномерной решетки длины L, состояла из цепочки $N-1$ одинаковых масс, связанных со своими соседями и с фиксированными концами решетки с помощью N нелинейных пружин длины h. Эти пружины при сжатии или растяжении на величину Δ создавали силу

$$F = k(\Delta + \alpha\Delta^2), \tag{1.1}$$

где k — линейная жесткость пружины и α, принятое положительным, служило мерой нелинейности. Динамика решетки при этом описывалась следующими уравнениями:

$$m(y_i)_{tt} = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(1 + \alpha(y_{i+1} - y_{i-1})), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1.2}$$

$$y_0 = y_N = 0,$$

где y_i — отклонение i-й массы от положения равновесия.

В экспериментах ФПУ энергия обычно была вначале сосредоточена в нескольких низших модах линейной задачи. В линейной задаче энергия неизменно оставалась бы в этих модах и высшие моды не могли бы возбуждаться. Благодаря нелинейности энергия перетекает от низших мод к высшим, и ФПУ ожидали, что это в конце концов приведет к равнораспределению по всем степеням свободы, имеющимся в их численной схеме. Взятая ими решетка из 64 точек (в x-пространстве) имела 64 различные собственные моды, между которыми они ожидали увидеть перераспределение энергии. Если бы их ожидания относительно эволюции энергии оправдались, это позволило бы рассматривать их расчет как модель установления теплового равновесия более сложных физических систем.

Результат был удивительным — по крайней мере он казался таковым всем, кто участвовал в этой работе или слышал о ней. Энергия не термализовалась! Вместо этого содержавшаяся вначале в наинизшей моде энергия затем распределялась по нескольким низшим модам, после чего постепенно вновь собиралась в наинизшей моде с точностью до двух процентов, и затем процесс приблизительно повторялся. ФПУ знали, что это явление не могло объясняться возвращением по Пуанкаре, время которого для системы из 64 точек огромно. Процесс более по-

ходил на поведение системы линейно связанных осцилляторов, двигающихся в фазовом пространстве по тору квазипериодическим образом. (Если есть две собственные частоты ω_1 и ω_2, и $\omega_1/\omega_2 \approx m/n$, где m, n — взаимно простые целые числа, то возвращение произойдет приблизительно через время $2\pi n/\omega_2$.) Но как это может быть? Почему нелинейность не возбуждает все фурье-гармоники? Может быть, ответ в том, что система, будучи записана в подходящих координатах, эквивалентна системе независимых гармонических осцилляторов?

Эксперимент ФПУ не привел к ожидаемому результату, но, так же как в предыдущем столетии эксперимент Майкельсона — Морли, бросил вызов основным представлениям физиков того времени. Тем не менее, так как это не было связано с вопросами, находившимися в то время на переднем крае физики (в этом отношении все времена похожи), этот результат легко мог быть отнесен, как это и произошло со многими, к разряду любопытных диковинок и забыт. Например, в 1962 г. Перринг и Скирм нашли двухсолитонное (соответствующее двухчастичному упругому столкновению) решение уравнения sin-Гордон, которое они использовали в нелинейной мезонной теории поля. Это точное решение, проявляющее нелинейный принцип суперпозиции, можно было связать с работами Бэклунда и Бьянки, которые в конце девятнадцатого столетия развили в рамках теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны общую схему построения многосолитонных решений уравнения sin-Гордон. Было ясно, что это уравнение обладает весьма специальными свойствами, однако Перринг и Скирм не пошли по этому пути.

К счастью, странный результат ФПУ был забыт не всеми. Счастливая возможность была использована двумя специалистами по прикладной математике из Принстонского университета — Мартином Крускалом и Норманом Забуски (КЗ). Они решили понять необычное явление и в процессе работы открыли солитон и прекрасный новый мир нелинейных явлений, притягивающий сейчас воображение ученых всех физических дисциплин, мир, который обогатил арсенал математической физики и дал новую жизнь многим классическим математическим структурам.

1с. Крускал, Забуски и открытие солитона. Крускрал и Забуски (КЗ) [6]—[10] рассмотрели проблему ФПУ в непрерывном пределе. Они полагали, что так как энергия содержится в наинизших модах системы и смещения соседних масс отличаются на $O(h/L)$, то можно ввести непрерывные смещения $y(x, t)$, где $y(ih, t) = y_i$. Разлагая смещения y_{i+1} и y_{i-1} в ряды

Тейлора, полагая $kh^2/m = c^2$, $2\alpha h = \varepsilon$, $h^2/12\varepsilon = \delta^2$, из (1.2) получаем

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = \varepsilon c^2 y_x y_{xx} + \varepsilon c^2 \delta^2 y_{xxxx}, \tag{1.3}$$

где члены порядка ε^2 отброшены и ε — малый параметр. Как мы увидим, сохранение второго члена в правой части (члена с четвертой производной) является решающим обстоятельством при приближении конечной разности второго порядка. Так как ФПУ решали свое уравнение с центрированной временной разностью, то в (1.3) следовало бы включить также член y_{tttt}, но с хорошей точностью $y_{tttt} = c^4 y_{xxxx}$, и это приведет только к переопределению величины δ^2. Так как численная схема должна удовлетворять условию Куранта — Фридрихса — Леви, то знак δ^2 при этом не изменится.

Как анализировать (1.3)? Ясно, что для времен и расстояний порядка единицы решение ведет себя так, как если бы оно удовлетворяло линейному уравнению. Начальный профиль распадается на компоненты, идущие вправо и влево, каждая из которых распространялась бы без возмущений, если бы не совместное действие нелинейных и дисперсионных членов в правой части (1.3). Как эволюционирует каждая из этих компонент под действием этих новых влияний? Чтобы изучить этот вопрос, КЗ стали искать решение (1.3) в виде

$$y(x, t) = f(\xi, T) + \varepsilon y^{(1)}(x, t) + \ldots, \tag{1.4}$$

где $\xi = x - ct$, $T = \varepsilon t$, и зависимость f от T описывает эволюцию профиля $f(\xi, T)$ на больших расстояниях и временах порядка $1/\varepsilon$. Уравнение для $y^{(1)}$ имеет вид

$$y^{(1)}_{tt} - c^2 y^{(1)}_{xx} = 2cf_{\xi T} + c^2 f_\xi f_{\xi\xi} + c^2\delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi}. \tag{1.5}$$

Решение $y^{(1)}$ будет линейно расти по переменной $\xi^- = x + ct$, и асимптотический ряд (1.4) станет неоднородным на больших временах, если только зависимость f от T не выбрана так, чтобы обратить правую часть (1.5) в нуль. Полагая $6q = f_\xi$, $\tau = cT/2$, получаем

$$q_\tau + 6qq_\xi + \delta^2 q_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{1.6}$$

т. е. уравнение Кортевега — де Фриза. Уединенной волне, наблюденной Расселлом, соответствует зависящее от параметра η решение в виде квадрата гиперболического секанса ($\delta^2 = 1$)

$$q = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\xi - v\tau), \tag{1.7}$$

получающееся из периодического решения (кноидальной волны) предельным переходом к бесконечному периоду.

Из вышесказанного становится ясно, почему было необходимо ввести второе приближение для центрированной конечной разности $y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$. Если $\delta^2 = 0$, то уравнение (1.6) имеет решения, становящиеся за конечное время разрывными. Например, беря начальное условие в виде $q(\xi, 0) = (1/6)\pi a \cos 2\pi\xi$, соответствующем начальным условиям $y(x, 0) = a \sin 2\pi x$, $y_t(x, 0) = 0$ (напомним, так как $y_t(x, 0) = 0$, распространяться вправо будет только половина начального профиля). Максимальный отрицательный наклон q_ξ увеличивается монотонно от $-\pi^2 a/3$ при $t = 0$ до $-\infty$ при $t = 1/(\pi^2 a\varepsilon c)$. Таким образом,

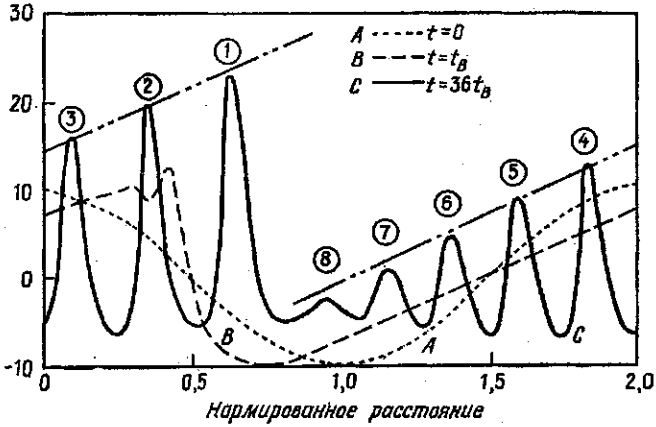

Рис. 1. Развитие во времени формы волны $q(x)$ (по [6]).

наивная непрерывная аппроксимация системы (1.2) становится непригодной. При конечных, но малых δ^2 возникает другая картина. Рис. 1, взятый из знаменитой работы Забуски и Крускала 1965 г. [6], в которой анонсируется солитон, показывает результат их численных расчетов, в которых для решения уравнения КдФ (1.6) была использована схема с центрированной разностью, сохранявшая массу и (приблизительно) энергию. Они взяли периодические граничные условия, и начальный профиль был синусоидальным. Сначала участки с отрицательными уклонами становились более крутыми, после чего член с третьей производной приводил к образованию вблизи максимумов и слева от них тонкой структуры в виде колебаний с длиной волны δ (см. рис. 1, профиль B). Со временем колебания разделялись, образуя цепочку распространяющихся вправо импульсов. При этом самый большой импульс оказывался самым правым, и каждый из них, казалось, сохранял свою индивидуальность и

имел скорость, пропорциональную его амплитуде. Каждый из этих импульсов приближенно может быть описан солитонным решением (1.7), хотя, строго говоря, это решение описывает изолированный импульс на бесконечной прямой. Вследствие периодических граничных условий солитонные импульсы последовательно возобновлялись на левой границе, и вследствие большей скорости бóльшие импульсы набегали на меньшие. И тут исследователи обнаружили удивительное явление. В то время как в ходе взаимодействия два импульса вели себя самым нелинейным образом, после него они восстанавливались в таком порядке, что больший оказывался впереди, при этом каждый из них в точности сохранял свою индивидуальность (высота, ширина и скорость). Единственным свидетельством столкновения был фазовый сдвиг: больший импульс оказывался сдвинутым вперед по отношению к положению, которое бы он занимал, если бы распространялся без столкновения, а меньший — назад. Если два импульса были почти одинаковыми, при взаимодействии импульсы, казалось, обменивались своими характеристиками, так что передний и меньший импульс становился выше и у́же, как только к нему подходил передний фронт большего импульса, который в свою очередь приобретал характеристики меньшего. Если импульсы были существенно разной амплитуды, больший адиабатически проходил сквозь меньший. Для промежуточного соотношения амплитуд взаимодействие было более сложным. Впоследствии, анализируя взаимодействие, Лакс [14] (1968) строго обосновал эти наблюдения.

Такое поведение импульсов было, в самом деле, очень необычным. Они заслуживали специального названия, и они его получили. Их назвали солитонами, чтобы подчеркнуть их частицеподобные свойства. После многократного повторения процесса прохождения сквозь решетку из остальных солитонов их прежнее относительное положение восстанавливалось, и они образовывали тонкую структуру с постоянно уменьшающимся отрицательным наклоном, пока почти полностью не восстанавливался начальный синусоидальный профиль. Этот процесс представляет собой зеркальное отражение (как во времени, так и в пространстве) первоначального распада исходного профиля. Время, через которое импульсы сливаются в начальный профиль, называется временем возвращения. Причина этого «почти возвращения» за такое короткое время состоит в том, что начальный профиль распадается на относительно небольшое число солитонов. Время возвращения можно оценить как минимальное время, за которое импульсы, двигающиеся по окружности длины L с различными постоянными скоростями, снова попадут в общую точку.

Эта картина является только аппроксимацией точного решения по двум причинам. Во-первых, как было показано в более поздних работах 1976 г., если начальный профиль аналитичен по ξ, решение (1.6) при периодических граничных условиях может быть приближенно так называемым «конечнозонным», являющимся второй логарифмической производной от Θ-функции Римана, зависящей от векторного аргумента $k_j\xi + \omega_j\tau$, $j = 1, \ldots, N$, где N — число степеней свободы. Это эквивалентно высказыванию, что для гладкого начального профиля большая часть энергии распределяется по относительно небольшому числу солитонных состояний. Для больших N ширины зон экспоненциально малы. Если $N = 1$, то конечнозонное решение становится периодической эллиптической функцией

$$q(\xi, \tau) = \beta + (\alpha - \beta)\,\mathrm{cn}^2\left\{\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,(\xi - 2(\alpha+\beta+\gamma)\tau);\ m^2\right\},$$

где $m^2 = (\alpha - \beta)/(\alpha - \gamma)$, $\alpha > \beta > \gamma$, и мы приняли $\delta^2 = 1$. В пределе бесконечного периода, $m^2 \to 1$, получаем (1.7) с $\alpha = 2\eta^2$, если мы накладываем условие $q \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Во-вторых, в то время как по ξ решение периодично (поскольку периодичен начальный профиль), по τ оно только квазипериодично, так как частоты ω_j, вообще говоря, несоизмеримы. Таким образом, время «возвращения» определяется рациональной аппроксимацией частот, соответствующих энергонесущим модам (зонам). Точность возвращения поэтому является функцией числа таких мод и выбранной точности аппроксимации их частот [1]).

В любом случае странные свойства взаимодействия солитонов вместе со свойством «почти возвращаемости» к начальному состоянию все более и более указывали на полную (в некотором смысле) интегрируемость КдФ, что должно было бы быть связано с большим количеством сохраняющихся величин. Однако исследователи были далеки от мысли о связи с теорией гамильтоновых систем, и мотивировка поисков законов сохранения пришла с другой стороны. Перед тем как описать это, я должен отметить важную и плодотворную роль численного экспериментирования в этих открытиях, как это часто подчеркивает Забуски. (Я очень рекомендую его статью [10].) Это был первый случай в истории науки, когда исследователи получили доступ к новой могучей силе — вычислительной технике.

---

[1]) Более точно было бы сказать, что время возвращения в случае общего положения определяется допускаемым отклонением конечного состояния от начального, а это допустимое отклонение в свою очередь определяет точность рационального приближения частот. — *Прим. перев.*

В самом деле, в течение немногих последних лет мы видели непрекращающиеся свидетельства того, как этот новый стиль исследования — комбинация анализа и численного эксперимента — становится все более важным в научном открытии. Странный аттрактор, новое и фундаментальное понятие теории динамических систем, играющее центральную роль в нынешних попытках понимания некоторых видов турбулентности, тоже был открыт на этом пути.

Теперь предостережение. Тот факт, что у уравнения есть решения типа уединенной волны, сохраняющие свою форму в процессе нелинейного взаимодействия, часто рассматривается и как лакмусовая бумажка на наличие солитонов, и как определение солитона. Я хочу предостеречь читателя, что это условие только необходимо. Есть уравнения (например, в (1.54) замените D_x^4 на D_x^8), допускающие двухфазные решения типа уединенных волн (и поэтому асимптотическая форма каждого такого индивидуального решения сохраняется после столкновения), но тем не менее они не обладают всеми необходимыми свойствами, чтобы их можно было отнести к солитонному классу. Надлежащее определение солитона включает его связь с определенным типом данных рассеяния задачи на собственные значения. Это мы обсудим в разд. 1е. Тем не менее численное моделирование столкновения двух уединенных волн для проверки их поведения в процессе их взаимодействия является очень полезным. Более хорошим тестом служит в добавление к проверке столкновения двух уединенных волн проверка упругости взаимодействия уединенной волны с другими частными, но локальными решениями уравнения. В случае КдФ, например, можно сталкивать уединенную волну с волной понижения.

1d. Законы сохранения и преобразование Миуры. Следующий шаг в серии открытий был сделан в результате попытки описать решение (1.6) при малом δ^2 усреднением по осцилляциям тонкой структуры решения. Эта процедура, естественно, пригодна не для всех времен и должна быть изменена, когда тонкая структура развивается в четкую солитонную цепочку, как на рис. 1(С). Тем не менее она может позволить исследовать замечательные свойства (типа обратимой ударной волны) той части решения, где q_ξ велико. Следовательно, по аналогии с газовой динамикой важно найти законы сохранения, для того чтобы можно было записать условия на скачках в областях резких изменений решения. Нужно знать четыре таких величины (число характеристических скоростей до и после скачка плюс положение самого скачка) вместо трех для обычной

газовой динамики. Два закона сохранения

$$q_t + (3q^2 + \delta^2 q_{xx})_x = 0, \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{1}{2}q^2\right)_t + \left(2q^3 + \delta^2\left(qq_{xx} - \frac{1}{2}q_x^2\right)\right)_x = 0, \tag{1.9}$$

соответствующие сохранению массы и импульса (1.8) и энергии (1.9) для волн на воде и сохранению импульса и энергии для нелинейной пружины, были уже известны. Уизем, развивший к этому времени плодотворную теорию для изучения модулированных периодических волн, нашел третий, соответствующий знаменитому моменту неустойчивости Буссинеска. Забуски и Крускал искали и нашли четвертый, и их метод поиска (нахождение уравнений для коэффициентов всех членов веса 4, 5, 6 и т. д. при условии, что вес q есть 1, а вес $\partial/\partial x$ равен 1/2) указал, что уравнения для коэффициентов на стадии 6 (как и для следующих) переопределены, и поэтому они были не очень удивлены, когда не нашли закона сохранения этого веса. Однако они сделали алгебраическую ошибку, и прошло более года, прежде чем они вновь двинулись по этому пути.

Следующий шаг вперед был сделан с привлечением Роберта Миуры, которого Крускал попросил попытаться отыскать закон сохранения веса 7. Он нашел его и быстро получил пропущенный вес 6. Вскоре были найдены восьмой и девятый, и Крускал и Миура стали вполне уверены, что их бесконечное число. Однако из Института Куранта пришел слух, что девять — это предел. (Что исследователи на самом деле открыли — это нечто, что они сочли изменением в алгебраической структуре.) Миура после этого почувствовал себя обязанным найти десятый. Он сделал это в течение двух недель каникул в Канаде летом 1966 г. (Есть также молва, что его видели примерно в это же время на горе Синай, несущего все десять.) Теперь было ясно, что есть законы сохранения любого веса. (Каждый закон сохранения имеет вид $(\partial U/\partial t) + (\partial F/\partial x) = 0$; U называется сохраняющейся плотностью, а F — соответствующим потоком. Им может быть приписан вес, получающийся сложением степени q с половиной числа операций $\delta(\partial/\partial x)$ в каждом члене в этих величинах. Например, вес q — единица, веса $3q^2$ и $\delta^2 q_{xx}$ оба равны двум, $2q^3$, $\delta^2 qq_{xx}$ и $\delta^2 q_x^2$ все имеют вес три и так далее. Вес закона сохранения определяется по весу сохраняющейся плотности.) Как их найти и к какого рода ограничениям на решения уравнения КдФ они могут привести — эти вопросы волновали исследователей. Первоначальная мотивировка поиска законов сохранения временно стала неактуальной. Внезапно появилось слишком много независимых законов сохранения, и

все условия на скачке (соотношения Рэнкина — Гюгонио), выводящиеся из этих законов, должны были быть совместными. Как часто бывает с новыми открытиями, этот вопрос уже не казался таким важным, как раньше.

К слову сказать, до сих пор так и не ясно, почему теплопроводность твердых тел конечна!

«Ключ» нашел Миура [11]. Он обнаружил, что модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (мКдФ)

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{1.10}$$

тоже имеет бесконечное число законов сохранения, и ему удалось установить соответствие между ними и соответствующими законами сохранения КдФ с помощью преобразования, носящего теперь его имя:

$$q = v^2 - iv_x. \tag{1.11}$$

Начиная с этого места, мы будем писать x, t вместо ξ, τ и примем $\delta^2 = 1$. В действительности Миура показал, что

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = \left(2v - i\frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}), \tag{1.12}$$

и поэтому если $v(x, t)$ — решение (1.10), то $q(x, t)$ — решение (1.6). Далее, так как (1.11) представляет собой уравнение Риккати, преобразование Миуры может быть линеаризовано:

$$v(x, t) = -i\varphi_x/\varphi, \tag{1.13}$$

в результате чего воз[illegible]т уравнение Шрёдингера с нулевой энергией

$$q = -\varphi_{xx}/\varphi. \tag{1.14}$$

В силу галилеевской инвариантности уравнения (1.6) ничего не изменится, если к q добавить постоянную скорость λ, после чего (1.14) принимает вид

$$\varphi_{xx} + (\lambda + q(x, t))\varphi = 0, \tag{1.15}$$

т. е. становится стационарным уравнением Шрёдингера с потенциалом $V(x) = -q(x, t)$ и энергией $E = \lambda$. (Замечание: временная переменная в нестационарном уравнении Шрёдингера *не имеет ничего общего* с временем t в уравнении КдФ.) Теперь уже в наличии имеются все составляющие, из которых должно появиться обратное преобразование рассеяния[1]). На этой стадии Гарднер и Грин объединили свои усилия.

---

[1]) В литературе на русском языке принят термин «метод обратной задачи рассеяния» (МОЗР).

Перед описанием дальнейших событий имеет смысл описать гарднеровскую модификацию преобразования Миуры, автоматически включающую λ и приведшую к идее, что бесконечное число сохраняющихся величин какого-либо уравнения может быть выведено из одной сохраняющейся величины для другого уравнения, если только их решения связаны преобразованием специального вида (вариантом преобразования Бэклунда). Гарднер положил

$$q = w + i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \tag{1.16}$$

и получил эквивалент (1.12) в виде

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = \left(1 + 2\varepsilon^2 w + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right)(w_t + 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_x + w_{xxx}). \tag{1.17}$$

После линеаризации (1.16) подстановкой

$$w + \frac{1}{2\varepsilon^2} = \frac{i}{\varepsilon} \frac{\varphi_x}{\varphi} \tag{1.18}$$

(1.16) принимает вид

$$\varphi_{xx} + \left(q + \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\varphi = 0. \tag{1.19}$$

Теперь выразим w через q и его производные в виде асимптотического ряда по ε при малых ε (мы увидим позднее, что асимптотическое разложение φ для больших λ очень существенно в теории) и найдем, что

$$w = q - i\varepsilon q_x - \varepsilon^2 (q_{xx} + q^2) + \ldots . \tag{1.20}$$

Так как $\int w dx$ постоянно во времени, если интеграл берется по бесконечной прямой и q стремится к нулю вместе со всеми своими производными при $x \to \pm\infty$, или по интервалу при периодических граничных условиях, то не зависят от времени $\int q dx$, $\int q^2 dx$, $\int (q^3 - (1/2) q_x^2)\, dx$ и т. д. Таким образом, из первого закона сохранения для уравнения $w_t + 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_x + w_{xxx} = 0$ получается бесконечное число законов сохранения для уравнения КдФ.

1е. Обратное преобразование рассеяния [12]. Получив уравнение (1.15), естественно спросить: если потенциал $-q(x, t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением КдФ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \tag{1.21}$$

то как меняются $\lambda(t)$ и $\varphi(x, t)$? Мы рассмотрим случай, когда q определено на всей вещественной прямой, $-\infty < x < \infty$, и q

обращается в нуль вместе со всеми своими производными в $\pm\infty$. Это можно сделать, подставив q из (1.15) в (1.21). Путем прямой подстановки получаем

$$\lambda_t\varphi^2+(\varphi Q_x-\varphi_x Q)_x=0, \tag{1.22}$$

где $Q=\varphi_t-\varphi_{xxx}-3(\lambda-q)\varphi_x$. Если φ квадратично интегрируема и обращается в нуль при $x\to\pm\infty$, то $\lambda_t=0$. Таким образом, дискретные собственные значения $\lambda_n<0$, $n=1, 2, \ldots, N$ уравнения (1.15) — интегралы движения. Оставшаяся часть (1.22) дает

$$\varphi_t+\varphi_{xxx}-3(\lambda-q)\varphi_x=C\varphi+D\varphi\int\frac{dx}{\varphi^2}, \tag{1.23}$$

и, так как φ обращается в нуль в $\pm\infty$, $D=0$. Мы примем такую нормировку собственных функций связанных состояний φ_n, что $\varphi_n\sim\exp\sqrt{-\lambda_n}\,x$ при $x\to-\infty$. Таким образом, $C_n=4(-\lambda_n)^{3/2}$, и если $\varphi_n\sim b_n(t)\exp(-\sqrt{-\lambda_n}\,x)$ при $x\to+\infty$, то

$$b_{nt}=8(-\lambda_n)^{3/2}b_n \tag{1.24}$$

и $b_n(t)=b_n(0)\exp(8(-\lambda_n)^{3/2}t)$. Для $\lambda=\zeta^2>0$ решение (1.15) при больших $|x|$ представляется линейной комбинацией из $e^{\pm i\zeta x}$. Мы наложим на φ граничные условия

$$\varphi\sim e^{-i\zeta x}+R(\zeta, t)e^{i\zeta x} \quad \text{при } x\to\infty, \tag{1.25a}$$

$$\sim T(\zeta, t)e^{-i\zeta x}, \quad x\to-\infty. \tag{1.25b}$$

При обычной квантовомеханической интерпретации (1.15) коэффициенты единица в (1.25a) и (подразумеваемый) нуль в (1.25b) указывают на заданное стационарное излучение, исходящее только из $x=\pm\infty$. Коэффициенты прохождения $T(\zeta, t)$ и отражения $R(\zeta, t)$ удовлетворяют, как будет показано в гл. 3, условию $|T|^2+|R|^2=1$. Спектр для $\lambda>0$ непрерывен, и мы можем считать λ константой, так что вновь справедливо (1.23) при условии $D=0$. Поскольку мы приняли нормировку φ на $+\infty$, $C=4i\zeta^3$. Подставляя (1.25a, b), получаем

$$T_t(\zeta, t)=0, \quad R_t(\zeta, t)=8i\zeta^3R(\zeta, t). \tag{1.26}$$

Это означает, что коэффициент прохождения как функция ζ является интегралом движения, а коэффициент отражения $R(\zeta, t)$ эволюционирует очень просто — от времени зависит только его фаза, причем линейно.

С начала 1950-х гг. было известно, что потенциал $-q(x)$ уравнения Шрёдингера может быть полностью восстановлен по так называемым данным рассеяния

$$S=\{(\lambda_n, b_n)_1^N;\ R(\zeta),\ \zeta \text{ вещественно}\}. \tag{1.27}$$

По S может быть вычислен также и коэффициент прохождения $T(\zeta)$. Но если известны данные рассеяния S для $q(x, 0)$ при $t=0$, то (1.24) и (1.26) позволяют нам вычислить $S(t)$ очень просто. Следовательно, $q(x, t)$ может быть найдено для любого времени t. Процедура восстановления потенциала включает решение линейного интегрального уравнения, уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко. Эта и многие другие детали будут выведены в гл. 3. А сейчас заметим, что общее решение (1.21) включает несколько компонент. Солитоны, распространяющиеся с положительной скоростью, являются физическим проявлением дискретного спектра, каждый солитон соответствует одному собственному значению. Вне области взаимодействия (при $t = \pm\infty$) каждый солитон имеет высоту, ширину и скорость, пропорциональные $-\lambda_n$, $\sqrt{-\lambda_n}$ и $-\lambda_n$ соответственно. Его положение в любой момент времени может быть вычислено с помощью b_n. Непрерывному спектру соответствует компонента решения, которая, хотя и нелинейна, имеет многие характерные черты решения линеаризованного уравнения (1.32). Амплитуда группы волн, связанной с волновым числом ζ, измеряется величиной $|R(\zeta)|$, а ее положение — величиной $\operatorname{Arg} R(\zeta)$. Вблизи $x=0$ эти два решения объединяются. Это решение включает, помимо всего прочего, автомодельное решение уравнения (1.21) и является довольно сложным, но в основном играет роль нелинейной функции Эйри (Джон Грин любит морально-религиозную трактовку двух компонент решения, в которой солитоны — это душа решения, а компонента, возникающая из непрерывного спектра — это бренная плоть. Я полагаю, что от вашей точки зрения зависит, какая из компонент заслуживает называться хорошей). Если рассматривать различные компоненты решения как нормальные моды нелинейной системы — и такое рассмотрение полезно, — то следует специально выделить солитонную часть, поскольку она является полностью новой и не имеет линейного аналога.

Итак, суть применения МОЗР состоит в следующем. Интересующее нас уравнение

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \tag{1.28}$$

переписывается как условие интегрируемости двух линейных уравнений,

$$(-L + \lambda)\varphi \equiv \varphi_{xx} + (\lambda + q(x, t))\varphi = 0 \tag{1.29}$$

и

$$\varphi_t = B\varphi = -4\varphi_{xxx} - 3q_x\varphi - 6q\varphi_x + C\varphi = \tag{1.30a}$$

$$= (q_x + C)\varphi + 4(\lambda - q/2)\varphi_x \tag{1.30b}$$

(где C определяется по выбранной для $\varphi(x, t; \zeta)$ нормировке). Затем $q(x, 0)$ отображается в данные рассеяния $S(0)$ уравнения (1.29). Эволюция $S(t)$ проста и описывается линейно. Зная $S(t)$, мы восстанавливаем $q(x, t)$. Схематически это выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} q(x,\ 0) \rightarrow \text{прямое преобразование} \rightarrow & S(0) & \\ & \Big\downarrow \begin{array}{l}\text{временная}\\ \text{эволюция}\\ \text{данных}\\ \text{рассеяния}\end{array} & \\ q(x,\ t) \leftarrow \text{обратное преобразование} \leftarrow & S(t). & \end{array} \tag{1.31}$$

Процедура полностью аналогична тому, как решается линеаризованный вариант уравнения (1.28),

$$q_t + q_{xxx} = 0, \tag{1.32}$$

с помощью преобразования Фурье. Роль прямого преобразования здесь выполняет

$$b(k,\ t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(x,\ t)\, e^{-ikx} dx, \tag{1.33}$$

и $b(k,\ 0)$ известно, если задано $q(x,\ 0)$; временная эволюция задается уравнением

$$b_t(k,\ t) = ik^3 b(k,\ t). \tag{1.34}$$

Обратным преобразованием является

$$q(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k,\ t)\, e^{ikx} dx. \tag{1.35}$$

В самом деле, мы покажем, что МОЗР в линейном пределе сводится к преобразованию Фурье.

Нам известно также, что мы можем интерпретировать и (1.28), и (1.32) как бесконечномерные гамильтоновы системы; каждую из них формально можно записать в виде

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}, \tag{1.36}$$

где $\delta/\delta q$ — вариационная производная функционала Гамильтона $H[q]$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (H[q + \varepsilon \delta q] - H[q]) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta q} \delta q dx.$$

Уравнение (1.36) аналогично выражению

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \tag{1.37}$$

справедливому для конечномерных систем. Здесь z есть $2N$-вектор (т. е. $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N$), J — антисимметричная матрица $\left(\text{например, } \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}\right)$ и ∇ — оператор градиента ($\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial p_N$). В (1.36) $q(x)$ следует рассматривать как бесконечномерный вектор, $\partial/\partial x$ — это заменяющий матрицу кососимметричный оператор и $\delta/\delta q$ — вариационная производная, заменяющая оператор градиента. Соответствующая сохраняемая потоком два-форма $\sum \delta q_i \wedge \delta p_i$ есть

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta q(x) \wedge \left(\int_{-\infty}^{x} \delta q(y)\, dy\right) dx. \tag{1.38a}$$

Интеграл $\int^{x}$ — это оператор, обратный к J, где $J = \partial/\partial x$. Функция Пуассона двух функций F и G есть

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta q}\, dx. \tag{1.38b}$$

Для (1.21) гамильтониан $H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} q_x^2 - q^3\right) dx$; для (1.32) $H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} q_x^2 dx$. Преобразование Фурье — это каноническое преобразование, связывающее старые координаты $q(x)$, $-\infty < x < \infty$ и новые $A = 2\pi|b|^2/k$, $\theta = \operatorname{Arg} b(k, t)$, в которых два-форма (1.38)

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta q\left(\int_{-\infty}^{x} \delta q dy\right) dx = \int_{0}^{\infty} \delta A(k) \wedge \delta\theta(k)\, dk \tag{1.39}$$

сохраняется[1]) (читателю следует проверить (1.39) самостоятельно); для тех, кто не знаком с обозначениями, $\delta q \wedge \delta w$ означает $\delta_1 q \delta_2 w - \delta_2 q \delta_1 w$, где δ_1 и δ_2 — независимые вариации.

---

[1]) Вопрос о перенесении скобки Гарднера на функционалы с неубывающими при $x \to \pm\infty$ плотностями решается в работе Фаддеева и Тахтаджяна [1*]. Скобки Гарднера и Фаддеева — Тахтаджяна не каноничны в $k = 0$. Каноническая скобка для КдФ построена в работе Аркадьева, Погребкова и Поливанова [2*]. Скобка Фаддеева — Тахтаджяна получается из канонической наложением связи. — *Прим. перев.*

В (1.39), так как $w_x = q$, не следует рассматривать $q(x)$ и $w(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} q(y)\,dy$ как сопряженные переменные. Скорее, следует смотреть на (1.39) как на непрерывный предел выражения $\frac{1}{2}\sum\limits_i \delta q_i \wedge \sum\limits_{j<i} \delta q_j$. С другой стороны, новые координаты A и θ являются сопряженными. Из (1.34) имеем

$$A_t = 0, \quad \theta_t = k^3, \tag{1.40}$$

что суть уравнения Гамильтона

$$A_t = -\frac{\delta H}{\delta \theta}, \quad \theta_t = \frac{\delta H}{\delta A},$$

где

$$H = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q_x^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} k^3 A^2(k)\,dk.$$

Точно так же обратное преобразование рассеяния является каноническим преобразованием, связывающим старые координаты $(q(x), -\infty < x < \infty)$ с новыми — данными рассеяния S, заданными по (1.27).

Гарднер [13] первым осознал, что уравнение КдФ может быть записано в гамильтоновом виде. Впоследствии Захаров и Фаддеев [13] показали, что это уравнение может быть интерпретировано как полностью интегрируемая гамильтонова система. Для конечномерной системы размерности $2N$ термин *полная интегрируемость* означает, что система обладает N независимыми интегралами движения $F_j(p, q)$ $(p = (p_1, \ldots, p_N)$, $q = (q_1, \ldots, q_N))$, $j = 1, \ldots, N$, которые находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона. В этом случае можно определить N переменных действия (как функции F_j) и N соответствующих угловых переменных. Для бесконечномерных систем все это выглядит более формально. По отношению к ним мы будем использовать термин «полная интегрируемость» для обозначения того факта, что можно найти бесконечное число новых координат, аналогичных переменным действие — угол, таких что первые являются интегралами движения, а вторые меняются линейно со временем. Как читатель может уже догадаться, переменные действия являются функциями бесконечного числа сохраняющихся плотностей.

Теперь следует сделать еще одно замечание о временной зависимости преобразованных переменных и о том, в каком смысле задача на бесконечной прямой для (1.28) $(q(x, t) \to 0,$

$x \to \pm\infty$ при всех t) проще, чем периодическая задача ($q(x,t) = q(x+P,t)$, x и t произвольны). В первом случае мы знаем q в двух точках интервала, а именно $x = \pm\infty$ во все моменты времени. В самом деле, данные рассеяния являются мерой того, как меняются асимптотические решения (1.29) ($\exp(\pm i\sqrt{\lambda}x)$) по мере того, как x пробегает интервал между $-\infty$ и $+\infty$. Из (1.30) можно видеть, что в $\pm\infty$ производная по времени от $\varphi(\infty, t; \zeta)$ не зависит от q, так как там q и его производные равны 0. Во второй, периодической, задаче q не известно во все моменты времени ни для одной точки интервала $[0, P]$. И вследствие этого временная зависимость данных рассеяния намного сложнее.

Оба этих случая кардинально отличаются от метода, с помощью которого линеаризуется уравнение Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$. Это уравнение может быть записано в виде условия интегрируемости уравнений $\varphi_x = u\varphi$ и $\varphi_t = (u^2 + u_x)\varphi$. Хотя и кажется, что временная эволюция $\varphi(x,t)$ зависит от знания $u(x,t)$, это в действительности не так, поскольку $(u^2 + u_x)\varphi = \varphi_{xx}$. Поэтому после подстановки $\varphi_x = u\varphi$ для φ получается линейное уравнение теплопроводности. Для уравнения КдФ на бесконечной прямой уравнение для $\varphi(x,t;\lambda)$ не линеаризуется. Вместо этого появляется свободный параметр λ, и (1.28) является условием интегрируемости для (1.29) и (1.30) для всех λ. Поэтому, не зная функцию $\varphi(x,t;\lambda)$ при всех x и t, мы знаем ее при всех t и λ в точках $x = \pm\infty$.

1f. Уравнение Лакса [14]. Несмотря на то, что временная динамика угловых переменных более сложна, но как периодический, так и быстроубывающий случай обладают тем ключевым свойством, что если $q(x,t)$ эволюционирует согласно (1.28), то спектр оператора L в (1.29), рассматриваемого как оператор в $L^2(R)$ ($R = (-\infty, \infty)$ или $[0, P]$), остается неизменным. Это свойство было элегантно сформулировано Лаксом (1968) в той же статье [14], в которой он исследовал двухсолитонное взаимодействие. Он заметил, что если оператор $L(t)$ (в данном случае — самосопряженный) и $L(0)$ имеют одинаковые спектры, то они унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор U ($UU^* = U^*U = I$, т. е. равны тождественному оператору), такой что

$$L(t)U(t) = U(t)L(0). \tag{1.41}$$

Таким образом, если $\varphi(x, 0; \lambda)$ является собственной функцией оператора $L = -(d^2/dx^2) - q(x)$ при $t = 0$ с собственным значением λ, то $\varphi(x,t;\lambda) = U(t)\varphi(x,0;\lambda)$ есть собственная функция оператора $L(t)$ с тем же собственным значением. Это видно

прямо из (1.41), поскольку $L(t)U(t)\varphi(x, 0; \lambda) = \lambda U(t)\varphi(x, 0; \lambda)$. Дифференцирование (1.41) по времени дает

$$L_t = BL - LB = [B, L], \tag{1.42}$$

где $B = U_t U^*$ — кососопряженный оператор. Уравнение (1.42) называется уравнением Лакса, а L и B — парой Лакса. Заметим, что B может быть получен из таких соображений: $\varphi_t(x, t; \lambda) = U_t\varphi(x, 0; \lambda) = U_t U^*\varphi(x, t; \lambda)$. Для КдФ из (1.30) получаем B в виде (напомним, что $\lambda\varphi_x = -\varphi_{xxx} - (q\varphi)_x$)

$$B = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(q\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}q\right) + C. \tag{1.43}$$

Оказывается, что все интегрируемые уравнения типа КдФ могут быть представлены в форме Лакса. Как показал Лакс, существует бесконечная последовательность дифференциальных по x операторов B всех нечетных порядков и поэтому бесконечное семейство потоков q_t, сохраняющих спектр L. Мы получим формулы для них в гл. 3. Читатель может прямым вычислением проверить, что (1.42) — это на самом деле (1.21).

1g. Спонтанные явления в нелинейной оптике и преобразования Бэклунда. Приблизительно тогда же, когда были достигнуты эти успехи, солитон появился в совершенно новом контексте, а именно при распространении ультракоротких (10^{-12} с) оптических импульсов в резонансных средах. В 1967 г. Макколл и Хан [15] открыли явление самоиндуцированной прозрачности — эффект, при котором передний фронт импульса вызывает инверсию заселенности атомных уровней, в то время как задний фронт возвращает заселенность в начальное состояние путем индуцированного излучения. Этот процесс реализуется, если время его осуществления мало по сравнению с временем фазовой памяти среды и импульс достаточно интенсивен, чтобы вызвать инверсию заселенности. Если мы предположим, что среда состоит из атомов с двумя невырожденными уровнями, и пренебрежем эффектами неоднородного уширения (вызванное допплеровским сдвигом несоответствие между несущей частотой входящего импульса и разностью между энергиями двух уровней), то процесс может быть описан в терминах одной полевой переменной, подчиняющейся уравнению sin-Гордон

$$u_{xt} = \sin u, \tag{1.44}$$

где x — расстояние от границы среды, t — время (растянутое) и $\partial u/\partial x$ пропорционально амплитуде огибающей электрического поля $E(x, t)$.

Это уравнение было известно в течение длительного времени. Очень давно оно исследовалось в связи с теорией поверхностей постоянной отрицательной кривизны. В частности, А. Ф. Бэклунд (см. [16]) открыл, что новое решение (или поверхность) $u_1(x, t)$ может быть получено из старого $u_0(x, t)$ преобразованием

$$u_{1x} - u_{0x} = 4i\zeta \sin \frac{u_1 + u_0}{2}, \tag{1.45a}$$

$$u_{1t} + u_{0t} = \frac{1}{i\zeta} \sin \frac{u_1 - u_0}{2}. \tag{1.45b}$$

Такие преобразования известны как преобразования Бэклунда (определение мы дадим позже в гл. 4) и позволяют очень просто конструировать многосолитонные решения. Например, возьмем $u_0 = 0$; интегрируя (1.45), получим

$$u_1 = \pm 4 \operatorname{arctg} \exp\left(-2\eta x - \frac{t}{2\eta}\right), \tag{1.46}$$

что описывает импульс u, для которого соответствующая огибающая электрического поля E равна $4\eta \operatorname{sech}(2\eta x + t/2\eta)$ и площадь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} E dx = u(\infty) - u(-\infty)$ равна 2π. Эти импульсы известны как 2π-импульсы и называются кинками (антикинками), если u увеличивается (уменьшается) на 2π при x, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$. Более сложные решения могут быть получены шаг за шагом с помощью теоремы о перестановочности, приписываемой Бьянки, которая может быть записана в виде

$$\operatorname{tg} \frac{u_3 - u_0}{4} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} \operatorname{tg} \frac{u_1 - u_2}{4}. \tag{1.47}$$

(Вывод этой формулы я оставляю читателю в качестве упражнения.) Более сложные решения известны как 0π-импульсы (u меняется на 2π на полуоси $(-\infty, 0]$ и в противоположную сторону на $[0, +\infty)$, этот импульс представляет собой суперпозицию кинка и антикинка) и как 4π-импульсы (суперпозиция двух кинков).

Так же как и уравнение Кортевега — де Фриза, уравнение sin-Гордон возникает во многих приложениях:

(1) как модель для описания дислокаций в кристаллах (в этой задаче Зегер, Донт и Кохендорфер [17] нашли 2π-импульс с помощью преобразования Бэклунда еще в 1953 г.);
(2) в теории поля (мы уже упоминали работу Перринга и Скирма [18]);

(3) как модель джозефсоновского контакта в теории сверхпроводимости (u описывает разность фаз волновых функций по разные стороны контакта).

Оно описывает также наглядную механическую модель, предложенную Скоттом, представляющую собой цепочку маятников, подвешенных к горизонтальной проволоке так, что каждый маятник может вращаться вокруг этой оси, закручивая ее. При этом $u(X, T)$ представляет собой угол поворота, измеряемый от вертикали. После замены $x=(X+T)/2$, $t=(X-T)/2$ уравнение (1.44) принимает вид

$$u_{TT}-u_{XX}+\sin u=0. \tag{1.48}$$

Кинк представляет собой закрутку проволоки на угол 2π против часовой стрелки. Антикинк имеет противоположную ориентацию.

Не хотелось бы оставить обсуждение уравнения sin-Гордон, не упомянув о важном вкладе, внесенном в этот вопрос Джорджем Лэмом. В серии из нескольких статей, подытоженных в 1971 г. в статье [20], он подверг тщательному анализу физические приложения многосолитонных и автомодельных решений уравнения sin-Гордон. Он предвидел, что уравнение sin-Гордон является близким родственником уравнения Кортевега — де Фриза. И он независимо открыл «обратный» метод его решения. Нужно отдать должное этому скромному человеку (редкая порода!), который даже удержался от соблазна перечислить свои достижения в своей собственной книге и внес в список литературы лишь одну из своих работ.

1h. Солитонный бум и результаты 1970-х. При всем том объеме знаний, который был накоплен к 1967 г., кажется довольно удивительным, что потребовалось пять лет, чтобы добавить к КдФ новое интегрируемое уравнение. Многие воспринимали результаты по интегрируемости КдФ как трюк, изощренное преобразование типа преобразования Хопфа — Коула (см. также Форсайт, т. 6, с. 100, где линеаризация уравнения Бюргерса дана в качестве упражнения). Однако в 1971 г. Захаров и Шабат [21] нашли пару Лакса для нелинейного уравнения Шрёдингера, еще одного универсального уравнения, о котором говорится в основном в гл. 2. Результат Захарова — Шабата, Потсдамская конференция 1972 г. и лекции Крускала о уравнении sin-Гордон вызвали мощную волну интереса к этим проблемам. Вадати [22] нашел постановку, в рамках которой можно проинтегрировать модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (мКдФ). Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегур (АКНС)

[23], руководствуясь несколькими ключевыми наблюдениями Крускала, решили уравнение sin-Гордон (независимо решенное Лэмом и, несколько позднее, Фаддеевым и Тахтаджяном) и вслед за этим показали, как выписывать полный набор уравнений (АКНС-иерархия), решаемых с помощью задачи Захарова — Шабата на собственные значения

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= q(x, t)\, v_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= r(x, t)\, v_1. \end{aligned} \tag{1.49}$$

К этому времени стало ясным, как обращаться с любой задачей на собственные значения и выписывать эволюционные уравнения, оставляющие неизменным ее спектр. По всему миру начался солитонный бум.

Появились результаты по более трудным задачам. Было показано (Флашка, Хенон), что цепочка Тоды (см. [24])

$$u_{n_{tt}} = e^{u_{n+1} - u_n} - e^{u_n - u_{n-1}} \tag{1.50}$$

является интегрируемой моделью. Она оказала такое же плодотворное воздействие в области нелинейных дифференциально-разностных уравнений, как и КдФ в области уравнений с частными производными.

Периодическая задача для КдФ была решена в несколько этапов несколькими авторами в течение и после 1976 г. Первым открытием было так называемое конечнозонное решение, для которого спектр периодической и антипериодической задач для оператора (1.29) с периодическим потенциалом $q(x)$ (уравнение Хилла) состоит из $(2n+1)$ простых собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$, а все остальные сдвоены (Макин и Ван Мёрбеке [25], Новиков [26], Итс и Матвеев [27], Кричевер [28]). Бесконечнозонный предел был рассмотрен Макином и Трубовицем [29]. Многие результаты оказались переоткрытием более ранних работ Бейкера, Драха, Бёрчнелла и Чонди [30]. Пары Лакса были также найдены для неодномерных уравнений. В частности, мы будем обсуждать некоторые результаты, касающиеся уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$\pm q_{yy} + (q_t + 6qq_x + q_{xxx})_x = 0 \tag{1.51}$$

(слабодвумерное уравнение Кортевега — де Фриза). Задача с начальными данными для этого уравнения очень сложна и была решена лишь недавно (Манаков [31], Абловиц, Фокаш и Сегур [32]). Был также найден инстантон — солитон автодуальных уравнений Рига — Миллса, а также конструкция k-параметрического инстантонного решения (Атья, Хитчин, Дрин-

фельд, Манин [33]). Была также показана интегрируемость нескольких других полевых уравнений, важных в нелинейной физике.

Перед тем как завершить этот раздел, я хочу рассказать об одном колоссе, В. Е. Захарове. В скольких областях внес он свой вклад — уравнение Захарова в физике плазмы, его статьи с А. Б. Шабатом, в которых впервые был дан общий метод построения пар Лакса для уравнений с более чем одним пространственным измерением, его работа по самофокусировке и его статья в сборнике, изданном Буллафом и Кодри [113] (см. ссылки на «метод одевания» — построения иерархий решений). Вы будете здесь часто встречать его имя.

1i. Чудеса солитонов и необходимость создания объединяющей точки зрения. Вместе с конструктивными методами построения решений (МОЗР, преобразования Бэклунда, метод Хироты) был открыт целый новый мир интегрируемых систем. Метод Хироты [34], который я упомянул во введении, чрезвычайно остроумен. Для уравнения КдФ он сводится к замене

$$q(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau(x, t), \tag{1.52}$$

приводящей к уравнению второго порядка для $\tau(x, t)$,

$$\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t + \tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_{xx}^2 = 0, \tag{1.53}$$

которое Хирота переписал в виде

$$(D_tD_x + D_x^4)\,\tau\cdot\tau = 0, \tag{1.54}$$

где D_x, D_t — введенные им новые дифференциальные операторы. Обозначения я объясню в гл. 4. Из (1.53), (1.54) довольно просто могут быть получены N-солитонные и рациональные решения, если взять $\tau(x, t)$ в виде суммы экспонент, фазы которых линейно зависят от x и t, а также содержат произвольные константы (которые оказываются вышеупомянутыми сдвигами фаз). Для $N > 2$ уравнения на константы являются переопределенными, но совместными. Что обеспечивает эту совместность? Уравнение $(D_xD_t + D_x^6)\,\tau\cdot\tau = 0$ имеет аналогичные свойства. Однако $(D_xD_t + D_x^8)\,\tau\cdot\tau = 0$ имеет только двухсолитонные решения.

Вначале метод Хироты рассматривался в основном как хитроумный трюк, придуманный для нахождения решений солитонных уравнений. Было даже такое рабочее определение интегрируемых уравнений: пошлите ваше уравнение Хироте; если вы его получите решенным в течение трех недель, то оно

интегрируемо. Однако недавно обнаруженные связи с квантовой теорией поля и статистической физикой показывают, что метод Хироты играет гораздо более существенную роль в теории, чем полагали раньше. Я надеюсь продемонстрировать в этих лекциях один способ, с помощью которого метод Хироты может быть связан с общей теорией. Я предполагаю также показать ясную его связь со свойством Пенлеве [35], которому должны удовлетворять интегрируемые системы. Это свойство, которое я буду обсуждать в гл. 4, состоит в том, что единственными особенностями интегрируемых систем, которые не фиксированы и могут зависеть от начальных данных, являются полюса. Это почти эквивалентно утверждению (не совсем, так как бывают неподвижные особенности с весьма неприятными свойствами), что τ-функция Хироты аналитична по всем своим переменным. И действительно, как мы покажем, для некоторых классов решений это так.

Что же тогда можно назвать общей теорией? Что это за структура, связывающая воедино все возникающие в солитонной математике чудеса? Чудеса включают: бесконечное число законов сохранения, принадлежность бесконечному семейству коммутирующих потоков (я объясню этот термин в гл. 3), гамильтонову структуру, формулировку Хироты и τ-функцию, свойство Пенлеве, связь с линейной задачей на собственные значения, обратное рассеяние, изоспектральную, изориманову поверхность, изомонодромные (последние два термина еще должны быть объяснены) деформации [36], преобразования Бэклунда.

Связующее звено, я полагаю, связано со следующим вопросом: если дано эволюционное уравнение, как можно определить, интегрируемо ли оно и обладает ли всеми этими замечательными свойствами? Первыми, кто дал достаточно разумный ответ на этот вопрос, были Уолквист и Эстабрук [37], и свою версию того, что они сделали, я опишу в гл. 5. По существу, они пытаются представить интересующее их эволюционное уравнение в виде условия интегрируемости двух линейных уравнений, содержащих неизвестную переменную и ее производные по x в качестве коэффициентов. В итоге они получают бесконечномерную алгебру, или, иными словами, незамкнутый набор коммутационных соотношений.

Наше утверждение (моими коллегами в этой работе были Германн Флашка и Тюдор Ратиу) состоит в том, что метод Уолквиста — Эстабрука указывает на то, что истинным фазовым пространством, на котором живут все потоки, является бесконечномерная алгебра Ли, которая для одномерных задач изоморфна алгебре Каца — Муди. Эта алгебра может быть

представлена как прямая сумма двух подалгебр, ортогональное дополнение к каждой из которых дуально к другой. На дуальной алгебре есть естественные динамические структуры — скобки Пуассона и гамильтоново векторное поле. Частный класс гамильтонианов порождает набор коммутирующих потоков, и каждый такой поток является вполне интегрируемым уравнением[1]). Важно подчеркнуть, что интегрируемые эволюционные уравнения всегда возникают как члены бесконечного семейства. Многие свойства из списка чудес оказываются естественными следствиями этого факта [38], и мы с двух точек зрения отвечаем на вопрос:

«Какое отношение к КдФ имеет алгебра Ли sl(2)?»

Весь этот материал будет обсуждаться в гл. 5. Наша работа служит дополнением к недавней работе групп из Киото [39] (М. и Ю. Сато, Т. Мива, М. Дзимбо, М. Касивара, Е. Дэйт) и Оксфорда [40] (Дж. Уилсон и Дж. Сегал).

---

[1]) Более правильно было бы сказать «точно решаемым уравнением». Как показано в работах [3*], [4*], [5*], точная решаемость (означающая бесконечное число законов сохранения) не эквивалентна полной интегрируемости для бесконечномерных гамильтоновых систем типа эволюционных уравнений.— *Прим. перев.*

ГЛАВА 2 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА, НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ДРУГИХ ВАЖНЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2а. Набросок того, что мы собираемся сделать. Цель этой главы — убедить вас в вездесущности и, следовательно, важности уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) и нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). Обсуждение этих уравнений займет большую часть главы, а в последнем разделе я упомяну вкратце другие канонические системы.

Уравнение КдФ появляется во всех тех ситуациях, когда в главном порядке возникает гиперболическая система первого порядка плюс малые нелинейные и дисперсионные члены. Это уравнение описывает, как каждый из инвариантов Римана (который в отсутствие нелинейности и дисперсии распространялся бы вдоль соответствующей характеристики без изменений) медленно и независимо меняется вследствие этих влияний. Мы видели пример этого в первой главе. Там механическая система описывалась в первом порядке линейным волновым уравнением, а слабые нелинейность и дисперсия возникали вследствие ангармоничности упругого потенциала и дискретности решетки соответственно. Возмущение, первоначально сосредоточенное внутри пространственного интервала первого порядка длины[1]), на временных масштабах первого порядка будет распадаться на идущие влево и вправо компоненты, как и полагается в линейном волновом уравнении. Однако на больших временах и расстояниях, обратно пропорциональных нелинейности и дисперсии, последующая эволюция каждой компоненты будет описываться двумя независимыми уравнениями КдФ. В следующем разделе мы покажем, как появляется КдФ в контексте длинных волн на воде в узком и мелком канале. Я выбрал этот пример по двум причинам. Первая — историческая, вторая состоит в том, что он дает возможность наглядно представить и интуитивно понять контекст, в котором ясно проявляется, как разного рода другие влияния портят интегрируемость КдФ. В частности, мы изучим, что будет происходить с длинными волнами в канале с медленно увеличивающейся или уменьшающейся глубиной.

---

[1]) Имеется в виду метод многих масштабов. — *Прим. перев.*

Отклик волн не будет чисто адиабатическим. Мы выведем также уравнение (или я попрошу вас вывести его в качестве упражнения), моделирующее ситуацию, когда все гребни волн не совсем параллельны линии берега или друг другу. Это уравнение называется уравнением Кадомцева — Петвиашвили (КП), или иногда двумерным уравнением КдФ. Оно также обладает замечательными свойствами. В упражнениях я попрошу вас вывести уравнения для цепочки Тоды и подумать, в каком пределе волны в этой решетке описываются уравнением КдФ. Мы также встретимся с уравнением Буссинеска, которое, так же как и уравнения КдФ и КП, обладает свойством интегрируемости, и мы обсудим, в каких ситуациях оно появляется.

Если на вас произвели впечатление разнообразные приложения, в которых возникает уравнение КдФ или родственные ему уравнения, вас, без сомнения, удивит вездесущность нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) и уравнений, тесно с ним связанных. Это есть уравнение на комплексное скалярное поле $q(x, t)$,

$$q_t = iq_{xx} \pm 2iq^2q^*, \tag{2.1}$$

$*$ означает комплексное сопряжение. Оно описывает эволюцию огибающей волнового пакета и в отличие от соответствующего линейного уравнения содержит в себе солитонное решение, воплощающее концепцию волнового пакета. Для осуществления такого решения необходимо, чтобы волновой пакет был сильно диспергирующим, почти монохроматическим и слабонелинейным. В (2.1) x — это координата в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью линейных волн, соответствующей волновому числу несущей волны, а само уравнение описывает баланс между линейной дисперсией, стремящейся размазать пакет, и фокусирующим действием кубичной нелинейности, возникающей вследствие самовоздействия волн. Мы встретимся также с модификациями этого уравнения. Нелинейность не всегда имеет простой вид q^2q^*, диктуемый типом взаимодействия $q^2e^{2i\theta}\cdot q^*e^{-i\theta}$ ($\theta = kx - \omega t$), но может также включать среднюю (неосциллирующую) компоненту $p(x, t)$ вида pq. В некоторых случаях среднее поле p алгебраически пропорционально qq^*, и тогда получается (2.1). В других случаях (2.1) дополняется другим уравнением, связывающим эволюцию среднего поля p с пространственными производными от qq^*. Вместо обширных вычислений, возникающих во многих физических ситуациях, я предлагаю читателю анализ каждой из ситуаций в простейшей нетривиальной постановке, подчеркивая те аспекты, которые отличают одну ситуацию от другой, и затем указывая читателю на соответствующие работы.

Я хочу также ввести некоторые связанные с этим уравнением понятия и показать их связь с НУШ. В частности, мы увидим, как получать НУШ предельным переходом из теории Уизема, предназначенной для описания эволюции полностью нелинейных волновых пакетов в слабо изменяющихся условиях. Этот предел не вполне тривиален и не очень известен в литературе. Мы также познакомимся с эффектами большего числа пространственных измерений. В противоречии с обычной нашей интуицией замена в (2.1) $\partial^2/\partial x^2$ на ∇^2 при знаке плюс перед нелинейностью приводит к усилению фокусирующих свойств уравнения до такой степени, что решения становятся локально неограниченными за конечное время. Это явление фокусировки широко распространено в физике и встречается в плазме в виде коллапса ленгмюровских волн и в оптике при самофокусировке. Естественно, что когда амплитуда пакета и величина, обратная его ширине, становятся очень большими, теряют применимость те предположения, в которых были выведены уравнения, и требуется новое описание. Тем не менее уравнение все же описывает начальную стадию процесса локальной самофокусировки волн.

2b. Длинные волны малой амплитуды в канале слабо меняющейся глубины. Уравнения типа КдФ [41], [42], [43]. В этом разделе мы возвращаемся к модели, с которой все началось. Мы хотим аккуратно вывести уравнения КдФ для волн на воде. Следуя статье Джонсона [44], мы включим также влияние слабо меняющейся глубины и коснемся методов решения возникающего в результате возмущенного уравнения Кортевега — де Фриза. В конце раздела сделаны некоторые замечания об уравнении Буссинеска (двухволновом) и Кадомцева — Петвиашвили (слабодвумерном КдФ).

Рассмотрим следующую ситуацию, изображенную на рис. 2. (Отношение масштабов амплитуды и длины возмущения сильно изменено так, чтобы на рисунке поместилось все необходимое.) Рассмотрим двумерное безвихревое поле скорости $\mathbf{U}(x, y, t)$ жидкости в односвязной области, ограниченной независящей от времени границей $y = -H(x)$ и свободной поверхностью $y = h_0 + N(x, t)$. Условия на концах $x = -\infty$, $+\infty$ останутся пока неопределенными, но мы будем представлять себе, что в этих точках глубина жидкости постоянна. Мы также введем потенциал скорости $\mathbf{U} = \nabla\varphi$.

Предположим также, что рассматриваемые возмущения имеют следующие свойства. Их горизонтальный размер l велик по сравнению со средней глубиной h_0: $\varepsilon = h_0^2/l^2 \ll 1$. Их амплитуда a мала по сравнению со средней глубиной h_0, так

что $a/h_0 = \mu \ll 1$. Интересующее нас явление происходит, когда эти две величины одного порядка. Кроме того, расстояния, на которых дно заметно меняется (на величину порядка единицы) больше l. Помня все это, обезразмерим зависимые и независимые переменные следующим образом:

$$x \to lx, \quad y \to h_0 y, \quad t \to \frac{l}{\sqrt{gh_0}} t,$$
$$H \to h_0 h, \quad N = a\eta, \quad \varphi \to \frac{a}{h_0} l \sqrt{gh_0}\, \varphi. \tag{2.2}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, и в соответствии с последним предположением мы полагаем, что $h_x = \varepsilon h_X$, $X = \varepsilon x$ и h_X

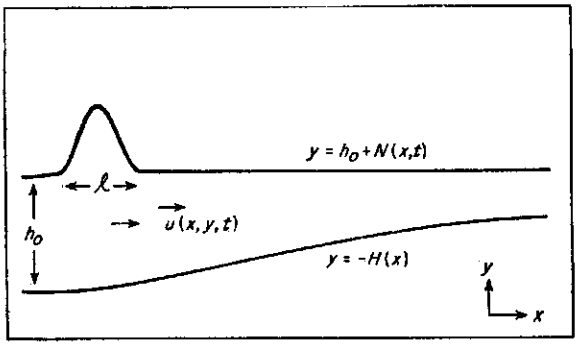

Рис. 2. Уединенные волны, распространяющиеся по каналу переменной глубины.

самое большее порядка единицы. В этих безразмерных переменных уравнение неразрывности, граничное условие на нормальную скорость при $y = -h$, условие непрерывности нормального напряжения (давления) на свободной поверхности, записанное с использованием уравнения Бернулли, и кинематическое граничное условие на свободной поверхности, состоящее в равенстве нормальной скорости жидкой частицы на поверхности нормальной скорости самой поверхности, примут следующий вид (нижние индексы обозначают частные производные):

$$\varphi_{yy} + \varepsilon\varphi_{xx} = 0, \tag{2.3}$$

$$\varphi_y = -\varepsilon^2 h_X \varphi_x, \quad y = -h, \tag{2.4}$$

$$\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\mu\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\varepsilon}\varphi_y^2 = 0, \quad y = 1 + \mu\eta, \tag{2.5}$$

$$\eta_t + \mu\varphi_x\eta_x = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_y, \quad y = 1 + \mu\eta. \tag{2.6}$$

Решение получается разложением потенциала в (2.3) в степенной ряд по y (более удобно по $(y+h)$). Используя (2.4), получаем

$$\varphi(x, y, t) = F(x, t) - \frac{\varepsilon}{2} F_{xx}(y+h)^2 + \\ + \varepsilon^2\left(\frac{1}{24} F_{xxxx}(y+h)^4 - h_X F_x (y+h)\right) + \ldots. \quad (2.7)$$

Выведем сначала уравнения мелкой воды, получающиеся при $\varepsilon \to 0$ и конечных μ. Из (2.7)

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi_y = -F_{xx}(1+\mu\eta+h) - F_x h_x,$$

где мы записали h_x вместо εh_X. Теперь рассмотрим предел $\varepsilon \to 0$ и положим $\varphi_x = u$. Для (2.5) и (2.6) получаем

$$\begin{aligned} u_t + \mu u u_x + \eta_x &= 0, \\ \eta_t + ((1+h+\mu\eta)u)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

т. е. уравнения мелкой воды. (В решеточной модели этот предел соответствует нулевому расстоянию между массами.) Хорошо известно, что для большинства начальных условий за конечное время происходит образование ударного фронта, на котором η_x и u_x становятся бесконечными за конечное время.

Однако для нас интересен предел, когда нелинейность, измеряемая μ, и дисперсия, измеряемая ε, малы и уравновешивают друг друга. Полагая $\mu = \varepsilon$ и разлагая (2.5) и (2.6) вблизи $y = 1$, получаем

$$\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi_x^2 = 0, \quad y = 1, \quad (2.9)$$

$$\eta_t + \varepsilon(\varphi_x\eta)_x = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_y, \quad y = 1, \quad (2.10)$$

где теперь

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi_y = -F_{xx}(1+h) + \frac{\varepsilon}{6}F_{xxxx}(1+h)^3 - \varepsilon F_x h_X.$$

Фундаментальная разница между этими двумя пределами состоит в том, что дисперсия, входящая в виде высших производных F, входит таким образом, что может уравновесить стремление волны обрушиться. Принимая $u = F_x$ (u — единственная горизонтальная компонента скорости в главном порядке, так как $\varphi_x = F_x - (\varepsilon/2)(y+h)^2 F_{xxx} + O(\varepsilon^2)$), мы после дифференци-

рования (2.9) по x получаем

$$u_t + \eta_x = \varepsilon\left(\frac{1}{2} D^2 u_{xxt} - u u_x\right), \tag{2.11}$$

$$\eta_t + (Du)_x = \varepsilon\left(\frac{1}{6} D^3 u_{xxx} - (u\eta)_x\right), \tag{2.12}$$

где $D = 1 + h$. (Напомним, что $\varphi_x(y=1) = u - \varepsilon(h^2/2)u_{xx} + O(\varepsilon^2)$.) Эти уравнения описывают движение жидкости с волнами, идущими как вправо, так и влево, однако, если искать решения (2.11), распространяющиеся только в одну сторону, можно в пределе получить более простое уравнение КдФ. Очень важно использовать правильные характеристики

$$\Theta_\pm = \mp t + \frac{1}{\varepsilon}\int^X \frac{dX}{D^{1/2}}, \tag{2.13}$$

где $X = \varepsilon x$. Из (2.11) и (2.12) можно получить одно уравнение для F, интегрируя (2.11) или разрешая (2.9):

$$\eta = -\varphi_t - \frac{1}{2}\varepsilon\varphi_x^2.$$

Подставляя (2.7) в (2.12), получаем

$$F_{tt} - (DF_x)_x = -2\varepsilon F_x F_{xt} - \varepsilon F_t F_{xx} + \varepsilon\frac{D^3}{3} F_{xxxx}. \tag{2.14}$$

Теперь уже нетрудно вывести уравнение, описывающее поведение F на больших расстояниях. Во-первых, положим $D = 1$. Далее, будем решать (2.14) итерациями (аналогичная процедура использовалась в разд. 1с). Положим $F = f + \varepsilon F_1 + \ldots$, где $f = f(\Theta_+ = -t + x,\ X = \varepsilon x)$. Тогда в главном порядке (2.14) будет удовлетворено, а члены порядка $O(\varepsilon)$ приведут к уравнению для F_1 (полагаем $\Theta_+ = \Theta$)

$$F_{1tt} - F_{1xx} = -4\frac{\partial^2 F_1}{\partial\Theta_-\partial\Theta} = 2f_{\Theta X} + 3f_\Theta f_{\Theta\Theta} + \frac{1}{3} f_{\Theta\Theta\Theta\Theta},$$

где $\Theta_- = t + x$. Член $2f_{\Theta X}$ возник из F_{xx} и учитывает слабую зависимость f от X. Так как правая часть этого уравнения не зависит от Θ_-, F_1 будет линейной функцией Θ_-, если только f не будет удовлетворять уравнению

$$2f_{\Theta X} + 3f_\Theta f_{\Theta\Theta} + \frac{1}{3} f_{\Theta\Theta\Theta\Theta} = 0. \tag{2.15}$$

Теперь, если D не константа, а зависит от $X = \varepsilon x$, вся процедура останется точно такой же, если только пользоваться правильными характеристическими координатами Θ_+ и Θ_-, определенными в (2.13). Я оставляю читателю в качестве упражнения

показать, что для исключения секулярного роста F_1, где $F_1 = f(\Theta_+, X) + \varepsilon F_1 + \ldots$, необходимо выполнение условия

$$q_\tau + 6qq_\Theta + q_{\Theta\Theta\Theta} = -\frac{9}{4}\frac{D_\tau}{D}q, \tag{2.16}$$

где мы написали Θ вместо Θ_+,

$$f_\Theta = \frac{2}{3}D^2 q, \tag{2.17}$$

и τ выражается через расстояние X по формуле

$$\tau = \frac{1}{6}\int^X D^{1/2}dX. \tag{2.18}$$

Мы будем называть (2.16) возмущенным уравнением КдФ, или вКдФ.

Следует сделать несколько замечаний. Во-первых, заметим, что избранная нами форма записи уравнения является эволюционной по x, а не по t для профиля $q(\tau, \Theta)$, зависящего от (отрицательного) времени с запаздыванием,

$$\Theta = -t + \frac{1}{\varepsilon}\int^X \frac{dX}{D^{1/2}}.$$

Если D постоянно, одинаково удобно использовать и t, и x как эволюционную переменную. Если, однако, среда сама зависит от x, необходимо использовать последнюю. Одна из проблем, которую мы будем позже достаточно подробно анализировать, формулируется следующим образом: если при $x = 0$ задано q как функция t, обращающаяся в нуль при $t \to \pm\infty$, найти $q(x, t)$ для всех $x \geqslant 0$.

Во-вторых, мы покажем, что для того, чтобы считать правую часть (2.16) возмущением, необходимо, чтобы D_X/D было порядка $\sigma \ll 1$. Однако, как мы помним, мы уже пренебрегли членами порядка ε^2 в уравнениях (2.11), (2.12), и поэтому мы должны потребовать

$$\varepsilon \ll \sigma \ll 1. \tag{2.19}$$

В-третьих, рассмотрим поток массы через сечение x в зависимости от времени. Из самих уравнений получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{1+\varepsilon\eta} \tilde{u}dy = -\eta_t, \tag{2.20}$$

где $\tilde{u} = \varphi_x$ — это истинная горизонтальная скорость. Таким образом, если массы при $t = +\infty$ и $-\infty$ совпадают, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-h}^{1+\varepsilon\eta} \tilde{u} dy \right) = 0, \tag{2.21}$$

и в главном порядке это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} D u dt = 0 \tag{2.22}$$

с $u = F_x$. Теперь заметим, что из (2.16) можно увидеть, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} D^{9/4} q d\Theta = 0, \tag{2.23}$$

или, возвращаясь к координатам x и t,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} D^{3/4} u dt = 0. \tag{2.24}$$

Это означает, что вКдФ не сохраняет полный поток массы через заданное сечение. Объясняется это тем, что происходит отражение части воды. Поэтому для корректного анализа влияния переменной глубины следует рассматривать также движения противоположного направления. Мы сделаем это, когда будем разбирать распространение уединенной волны в сторону берега.

В-четвертых, выведем закон Грина, известный уже около 150 лет. Представим себе линейную волну, входящую в область медленного изменения глубины. Тогда уравнение, описывающее эволюцию ее амплитуды q, дается (2.16) без двух последних членов в левой части. Результат состоит в том, что $D^{9/4}q$, $D^{3/4}u$ и $D^{1/4}\eta$ (напомним, что $\eta \sim -\varphi_t \sim D^{-1/2}\varphi_x$) зависят только от Θ и поэтому не меняются вдоль истинных характеристик.

Теперь мы можем описать, как надо работать с уравнением (2.16) и с полной двухволновой задачей (2.11), (2.12). Вообразим следующую ситуацию. Уединенная волна q_s амплитуды η_0 появляется в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, в которой начинает изменяться невозмущенная глубина. Уединенная волна будет адиабатически изменяться (т. е. будет медленно меняться ее амплитуда) так, чтобы выполнялся закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int q_s^2 d\Theta = -\frac{9}{2} \frac{D\tau}{D} \int q_s^2 d\Theta.$$

Однако при $q = q_s$ закон сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int q d\Theta = -\frac{9}{4}\frac{D_\tau}{D}\int q d\Theta$$

не будет выполняться. Поэтому мы должны добавить к идущему направо потоку «шельф» с амплитудой (относительно амплитуды уединенной волны) порядка σ, простирающийся между точкой $\Theta_+ = 0$, до которой могут дойти бесконечно малые возмущения, и самой уединенной волной, т. е. располагающийся на длине порядка σ^{-1} (в единицах ширины уединенной волны). Поэтому этот шельф переносит поток массы того же порядка, что и уединенная волна. В области, непосредственно следующей за задним фронтом солитона, его амплитуда определяется невязкой в балансе массы. Его дальнейшая эволюция из этой области происходит по закону Грина.

Этого, однако, еще недостаточно, так как мы уже видели, что закон сохранения потока массы по-прежнему не выполняется для полных (двухволновых) уравнений, допускающих встречные волны. Поэтому мы должны добавить еще одну компоненту — отраженную волну, имеющую амплитуду (относительно уединенной) порядка $\sigma\varepsilon$ и сосредоточенную на интервале с длиной, равной величине $(\sigma\varepsilon)^{-1}$, умноженной на ширину уединенной волны, так что поток массы, создаваемый ею, имеет тот же порядок, что и поток массы, вызванный двумя другими компонентами, движущимися вправо. Поле скорости этой отраженной волны задается на «правой» характеристике при $\Theta_+ = 0$ и имеет величину, определяемую различием в потоках массы, определяемых по вКдФ и по полным двухволновым уравнениям. Ее пространственное поведение определяется решением задачи Гурса: заданы u на $\Theta_+ = 0$ и $\eta = u = 0$ на $\Theta_- = 0$, нужно найти η, u, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям (2.11), (2.12) в квадранте $\Theta_+ < 0$, $\Theta_- > 0$. Оказывается, что Du и η — константы с точностью до $O(\varepsilon\sigma)^2$ вдоль отрицательных характеристик Θ_-. Закон Грина здесь неприменим, поскольку градиенты полевых переменных u, η одного порядка с градиентом невозмущенной глубины.

Исходя из этих идей (которые могут быть охарактеризованы как «разумное использование законов сохранения»), можно получить полностью самосогласованное решение исходной задачи. Любопытно сравнить потоки массы, связанные с каждой из трех компонент решения. Поток массы будем нормировать на $(8/3)\eta_0\rho\varepsilon^{1/2}h_0^2$ ($(4/3)\eta_0^2\varepsilon h_0$ — амплитуда набегающей уединенной волны, ρ — плотность, h_0, $h(x)$ и h_f — начальная, текущая и ко-

нечная невозмущенные глубины соответственно):

$$\begin{aligned} &\text{уединенная волна } \frac{h}{h_0}, \\ &\text{хвост солитона } \left(\frac{h}{h_0}\right)^{1/4} - \frac{h}{h_0}, \\ &\text{отраженная волна } \left(\frac{h_f}{h_0}\right)^{1/4} - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{1/4}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Сумма всех этих трех есть постоянная величина $(h_f/h_0)^{1/4}$, равная потоку массы вправо после того, как импульс достигнет новой невозмущенной глубины и дальнейшего отражения уже не будет. Отметим, в частности, такой интересный факт: если $h_f \ll h_0$, основная доля воды отражается. Некоторые из этих вычислений мы проделаем в гл. 3. Более детально с этими вычислениями и связанными с ними результатами можно познакомиться по работам [43, 45, 46]. Для некоторых необходимость введения отраженной волны все еще является предметом споров. Это связано с ощущением, что слабо меняющийся уклон будет в лучшем случае приводить к адиабатическому отклику волны, а отраженная волна будет экспоненциально малой. Однако существование точки, начиная с которой глубина начинает меняться, означает, что отклик не адиабатичен. Уединенная волна и амплитуда следующего за ней «хвоста» (шельфа) меняются незначительно, однако это не относится к области, занимаемой последним. Он тянется от заднего фронта солитона до точки, до которой распространились бы вышедшие из начальной точки наиболее длинные линейные волны. Это означает, что двигающийся вправо хвост имеет конечную длину и поэтому за его счет весь поток массы не может быть скомпенсирован.

Этот раздел мы закончим некоторыми пояснениями о роли точно решаемых уравнений Буссинеска [47] и Кадомцева — Петвиашвили [48]. Первое из них имеет вид

$$v_{tt} - v_{xx} = v_x v_{xx} + v_{xxxx}. \tag{2.26}$$

Мы видим, что решеточное уравнение (1.3) имеет точно такой же вид, и если мы позволим себе некоторую широту (а именно, заменим F_t на $-F_x$), то же относится к уравнению (2.14) [1]). Однако в каком смысле (2.26) дает более точное описание событий, чем два несвязанных КдФ? Ответ заключается

[1]) Заметим, что (2.14) с $D = 1$ принимает вид (2.26), только если мы ищем бегущие лишь в одну сторону решения $F(-t + x)$, полагая $F_t = -F_x$, $F_{xt} = -F_{xx}$. Именно этот вариант уравнения связывается с именем Буссинеска.

в том, что оно не является более точным, поскольку для того, чтобы правая часть в (1.3), т. е. нелинейный и дисперсионный члены, была одного порядка с левой, нужно, чтобы отброшенные нами члены ($\varepsilon^2 y_{xxxxxx}$ и нелинейные типа $\varepsilon^2 y_{xx} y_{xxxx}$) были одинаково важны. Можно поэтому задать другой вопрос: бывает ли ситуация, в которой каноническим уравнением является (2.26)? Ответ положителен. Напомню, как я уже указывал, что если в первом приближении система является гиперболической с несовпадающими характеристическими скоростями, то малые отклонения соответствующего инварианта Римана вблизи каждого характеристического направления описываются уравнением КдФ. Однако если две эти характеристические скорости близки, то эволюции вдоль них не могут рассматриваться по отдельности. Очень просто показать, что поведение на больших временах решений уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-(c-\sqrt{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+(c+\sqrt{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x}\right)u=$$
$$=\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

действительно описывается уравнением Буссинеска. В системе отсчета, движущейся с промежуточной скоростью c, эволюция поля u как функция от $X=x-ct$ и $T=\sqrt{\varepsilon}\,t$ описывается уравнением (2.26). Причина того, что нелинейный член должен быть выбран меньше дисперсионного, состоит в том, что начальная амплитуда должна увеличиться в $1/\sqrt{\varepsilon}$ раз за счет начального резонанса (в главном порядке $(\partial/\partial t+c\partial/\partial x)^2 u=0$), прежде чем вступят в игру нелинейность и дисперсия.

В качестве последнего замечания в этом разделе, посмотрим, что произойдет, если в задаче о волнах на воде или в решетке допустить слабую зависимость от другой горизонтальной координаты, которую мы будем обозначать z. Это приведет к появлению в левых частях (2.14) и (1.3) дополнительных членов, пропорциональных $-\varepsilon F_{zz}$ и $-\varepsilon c^2 y_{zz}$ соответственно. Не составляет труда показать, что соответствующее (1.6) каноническое уравнение, описывающее поведение на больших временах, теперь будет иметь вид

$$f_{zz}+\frac{2}{c}f_{\xi T}+f_\xi f_{\xi\xi}+\delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi}=0.$$

Если положить $f_\xi=6u$, $\tau=cT/2$ и принять $\delta^2=1$, то его можно записать в другом виде:

$$u_{zz}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u_\tau+6uu_\xi+u_{\xi\xi\xi}\right)=0. \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.27) известно как уравнение Кадомцева — Петвиашвили и также обладает рядом замечательных свойств.

Упражнения 2b

1. Выведите уравнение для длинных волн в решетке для случаев, когда возвращающая сила имеет вид $F = k(\Delta + \alpha\Delta^3)$. Вы обнаружите, что соответствующее уравнение — это модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (мКдФ). Исследуйте его решения, имеющие вид бегущих волн. Зависит ли их существование от знака α?

2. Оказывается, что комплексный вариант мКдФ — тоже универсальное уравнение в том смысле, что оно возникает во многих асимптотических задачах. Одна из них — это задача о низших гибридных волнах в плазме. Читателю рекомендуется обратиться к ссылкам в [118], и в частности к статье Г. Дж. Моралеса и И. Ц. Ли «Солитоноподобные структуры в плазме» в Rocky Mountain J. Math., 8, 1, 2, зима, весна 1978.

3. Покажите, что асимптотическое по пространству и времени поведение поля $u(x - ct, \sqrt{\varepsilon}\, t$ или $\sqrt{\varepsilon}\, x)$, подчиняющегося уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (c - \sqrt{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + (c + \sqrt{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \\ = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

задается уравнением Буссинеска. Можете ли вы указать какой-либо конкретный пример, который приводил бы к этому уравнению[1])? Найдите также стационарные волны в (2.26). Чем они отличаются от аналогичных решений КдФ?

4. Рассмотрите двумерную решеточную модель, в которой каждая масса связана с двумя типами соседей — правым, левым и верхним, нижним. Если упругая постоянная $k_\perp$ вертикальных пружин намного меньше постоянной k горизонтальных пружин и одного порядка с квадратичной нелинейностью α последних, то если $k_\perp \sim \alpha \sim h^2$, где h — смещения решеточных масс, то уравнение для слегка наклонных, распространяющихся вправо или влево волн в этой решетке будет уравнением Кадомцева — Петвиашвили. Будьте осторожны. Помните, что в закон Гука входит удлинение пружин, а не его вертикальные или горизонтальные составляющие. Найдите бегущие волны для этой модели. Как они связаны с бегущими волнами КдФ?

---

[1]) После того как я задал этот вопрос на лекциях ИВМС, Ц.Х.Сю нашел такой пример [49].

2c. Нелинейное уравнение Шрёдингера и другие уравнения для огибающих. Лучше всего начать с простого примера. Рассмотрим описанную в гл. 1 модель Скотта, состоящую из работающей на кручение проволоки с вертикально подвешенными к ней и очень близко друг к другу расположенными связанными маятниками, которые могут вращаться в вертикальной плоскости вокруг линии подвеса. Если $u(x, t)$ — угол поворота маятника в точке x, то его движение описывается уравнением sin-Гордон

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_p^2 \sin u = 0, \tag{2.28}$$

где сила $-\omega_p^2 \sin u$ возникает вследствие действия силы тяжести, а сила $c^2 u_{xx}$ моделирует влияние кручения. Теперь вообразим, что мы колеблем один конец цепочки маятников с очень малой амплитудой и частотой ω. Достаточно разумно предположить, что можно исследовать возникающее в результате движение, разлагая $\sin u$ в ряд Тейлора вокруг $u = 0$. Удерживая первые два члена, получаем

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_p^2 u = \frac{\omega_p^2}{6} u^3 + \ldots. \tag{2.29}$$

Линеаризованное уравнение допускает гармонические решения $u = e^{-i\omega t + ikx}$, где k вещественно, и определяется дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \tag{2.30}$$

если только $\omega > \omega_p$. При $\omega < \omega_p$ величина k является чисто мнимой, и начальные колебания экспоненциально затухают по x. Предположим, что $\omega > \omega_p$, так что вдоль струны (из маятников) распространяются настоящие волны. Теперь естественно также ожидать, что постепенно нелинейные члены будут модифицировать эти движения, так как мы знаем, что период нелинейной пружины (так же, как и период одного маятника) зависит от амплитуды. Чтобы найти эти изменения, будем искать решения (2.29) в виде

$$u = \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots), \tag{2.31}$$

где

$$u_0 = a e^{ikx - i\omega t} + a^* e^{-ikx + i\omega t}, \tag{2.32}$$

и мы считаем, что a может быть медленной функцией времени,

$$a_t = \varepsilon A_1 (a, a^*) + \varepsilon^2 A_2 (a, a^*) + \ldots. \tag{2.33}$$

Коэффициенты $A_j(a, a^*)$ выбраны таким образом, чтобы подавить секулярное поведение[1]) $u_1, u_2, \ldots$. Если бы мы пользовались обычным методом многих масштабов, нам следовало бы записывать A_1 как $\partial a/\partial T_1$, $T_1 = \varepsilon t$, A_2 — как $\partial a/\partial T_2$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ и т. д. Решая (2.29) итерациями, получаем $u_1 = 0$,

$$A_1 = 0, \qquad u_2 = -\frac{a^3}{48} e^{3i(kx-\omega t)} + (^*),$$

$$A_2 = +\frac{i}{4}\frac{\omega_p^2}{\omega} a^2 a^*,$$

в то время как

$$u_0 = a_0 \exp\left(ikx - it\left(\omega - \frac{\omega_p^2}{4\omega}\varepsilon^2 a_0 a_0^*\right)\right) + (^*) \qquad (2.34)$$

и период движения возрастает[2]). В контексте волн на воде решение, вычисляемое таким способом, называется *волной Стокса*. Читатель при желании может вычислить период колебаний маятника с максимальным отклонением $2\varepsilon|a_0|$ через эллиптический интеграл и проверить, что в результате разложения по амплитуде получится (2.34) (см. упражнение 2c(1)). Отметим, что при всех этих вычислениях пространственная структура e^{ikx} играет пассивную роль. Если ω фиксировано, то в соответствии с (2.30) фиксировано и k. Но поскольку колебания со строго фиксированной частотой создать невозможно, то спектр частот колебания будет иметь хоть и малую, но конечную ширину μ. Как учесть это в нашем описании? Один из способов — это искать решение u_0 в виде конечной суммы волн

$$u_0 = \sum_{k_j = k + \mu K_j} a_j e^{i(k_j x - \omega_j t)} + (^*), \qquad \omega_j^2 = \omega_p^2 + c^2 k_j^2. \qquad (2.35)$$

Но этот подход громоздок и приводит к системе связанных нелинейных уравнений на амплитуды a_j, что не слишком проясняет ситуацию. Другой способ, на который указывает нам (2.35), состоит в поиске решения в виде волны, амплитуда которой a является медленно меняющейся функцией x и времени, был первоначально предложен в [53]. Наиболее интересный баланс разных эффектов возникает, когда $\mu = \varepsilon$.

Повторим предыдущие вычисления, предполагая, что A_1, A_2 — функции от a_X, a_X^*, a_{XX} и т. д., от $X = \varepsilon x$, а также от

---

[1]) Секулярное поведение относится к ситуации, в которой итерации u_1 $u_2, \ldots$ алгебраически растут по быстрому времени или быстрой координате. Если это допускается, асимптотический ряд (2.31) не будет равномерно пригоден на больших временах и расстояниях.

[2]) Символ (*) обозначает комплексно сопряженное выражение. — *Прим. перев.*

a, a^*. В порядке $O(\varepsilon)$ имеем

$$u_{1tt} - c^2 u_{1xx} + \omega_p^2 u_1 = (2i\omega a_{T_1} + 2ikc^2 a_X) e^{i(kx-\omega t)} + (^*), \quad (2.36)$$

где $a_{T_1} = A_1$. Для подавления секулярного роста u_1 необходимо, чтобы

$$a_{T_1} + \frac{c^2 k}{\omega} a_X = 0, \quad (2.37)$$

т. е. чтобы a двигалось с групповой скоростью волнового пакета $\omega' = d\omega/dk$, вычисленной по (2.30). Тогда $u_1 = 0$. В порядке ε^2

$$u_{2tt} - c^2 u_{2xx} + \omega_p^2 u_2 = \frac{\omega_p^2}{6} a^3 e^{3i(kx-\omega t)} +$$
$$+ \left(2i\omega a_{T_2} - a_{T_1 T_1} + c^2 a_{XX} + \frac{1}{2}\omega_p^2 a^2 a^*\right) e^{i(kx-\omega t)} + (^*),$$

и условие отсутствия секулярного роста дает

$$a_{T_2} - \frac{i\omega''}{2} a_{\xi\xi} - \frac{i}{4}\frac{\omega_p^2}{\omega} a^2 a^* = 0. \quad (2.38)$$

Для получения (2.38) мы использовали (2.37), выразив $a_{T_1 T_1}$ через a_{XX}. Кроме того, $\xi = \varepsilon(x - \omega' t)$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ и ω'' есть дисперсия $d^2\omega/dk^2$, вычисленная по (2.30). Уравнение (2.38) есть нелинейное уравнение Шрёдингера. Заметим, что оно в качестве частного решения содержит не зависящее от x частотно-модулированное решение (2.34), *но* (и это очень существенное но) это решение неустойчиво, если произведение коэффициентов перед дисперсионным ($\omega''/2$) и нелинейным ($(1/4)\omega_p^2/\omega$) членами положительно — ситуация, которая имеет место в нашем примере. Это неустойчивость, открытая Бенджамином и Фейром [51] [1]), когда они экспериментально пытались доказать существование для волн на воде решения Стокса. Это чрезвычайно существенная неустойчивость, поскольку она вызывает превращение почти монохроматического цуга волн в серию импульсов. Я буду вскоре несколько детальнее обсуждать природу этой неустойчивости.

Пока же, однако, я хочу вернуться к причинам универсальности НУШ и показать универсальную структуру всех линейных членов в нем. Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = N(u^2, u^3, \ldots), \quad (2.39)$$

[1]) Эта неустойчивость была предсказана теоретически в кандидатской диссертации В. Е. Захарова 1966 г. Этот результат, в отличие от гамильтонового формализма для волн на воде, не получил широкой известности. — *Прим. перев.*

где Lu и $N(u^2, u^3, \ldots)$ — линейный и нелинейный операторы с постоянными коэффициентами, содержащие u и ее производные. Пусть линейная часть (2.39) допускает гармонические решения вида

$$u = ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{2.40}$$

где

$$L(-i\omega, ik) = 0 \tag{2.41}$$

есть линейное дисперсионное соотношение, определяющее ω как функцию от k, или наоборот. Так как (2.41) выполняется для всех k, мы можем получить, что

$$-i\omega' L_1 + iL_2 = 0, \tag{2.42}$$

$$-i\omega'' L_1 - \omega'^2 L_{11} + 2\omega' L_{12} - L_{22} = 0, \tag{2.43}$$

дифференцируя по k один и два раза соответственно. Теперь будем искать решения (2.39) в виде

$$u(x, t) = \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots) \tag{2.44}$$

при u_0, заданном по (2.32), с медленно меняющейся в зависимости от координаты и времени амплитудой a. Теперь заметим, что в соответствии с алгоритмом многомасштабных разложений $L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ формально принимает вид

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}, \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\right) =$$
$$= L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(L_1\frac{\partial}{\partial T_1} + L_2\frac{\partial}{\partial X}\right) +$$
$$+ \varepsilon^2\left(L_1\frac{\partial}{\partial T_2} + \frac{1}{2}L_{11}\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + L_{12}\frac{\partial^2}{\partial T_1\,\partial X} + \frac{1}{2}L_{22}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) + \ldots, \tag{2.45}$$

что мы будем записывать в виде $L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)}$. Решая (2.39) итерациями, получаем

$$L^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_0 = 0 \tag{2.46}$$

с решением

$$u_0 = a(X, T_1, T_2, \ldots)\, e^{i(kx-\omega t)} + (^*) \tag{2.47}$$

и ω и k, удовлетворяющими (2.41). В следующем порядке $O(\varepsilon)$

$$L^{(0)}u_1 = -L^{(1)}u_0 + N(u_0^2). \tag{2.48}$$

Какие здесь члены секулярные? Это те члены в правой части (2.48), которые приводят к решению u_1, алгебраически растущему по x или t. Их можно отличить по тому, что их структура

по x и t принадлежит ядру оператора $L^{(0)}$. Например, $L^{(1)}u_0$ принадлежит к такому классу, если $L^{(0)}L^{(1)}u_0 = L^{(1)}L^{(0)}u_0$. Какие члены в $N(u_0^2)$ являются секулярными? Член u_0^2 содержит вторую гармонику $a^2 \exp 2i(kx - \omega t)$ и средний член aa^*. Но поскольку дисперсия сильная, то почти для всех k справедливо $\omega(2k) \neq 2\omega(k)$, и поэтому $L^{(0)} \cdot e^{2i(kx-\omega t)} \neq 0$. Однако средний член aa^* может принадлежать ядру $L^{(0)}$. Если это так и $N(u_0^2) \neq 0$, то в решение нулевого приближения u_0 необходимо включить средний член, медленно меняющийся по x и t. В такой ситуации «волна» $e^{(0)}$ является третьей участницей триады в трехволновом резонансе (см. разд. 2f).

Чаще бывает, что $N \cdot aa^*$ в этом порядке равно нулю. Это происходит из-за того, что уравнение имеет внутренние симметрии типа галилеевой инвариантности, что делает невозможным просто добавлять средний поток. (В качестве примера такого N можно представлять себе $\partial/\partial x$.) С другой стороны, вследствие медленной зависимости огибающей от x локальные средние потоки типа $\varepsilon^2(\partial/\partial X)aa^*$ могут возникать и, если их не удалить, вызывать секулярный отклик в порядке ε^2 в u_2. Такой член не нарушает никаких глобальных законов сохранения. Он может на каком-то участке повысить среднее значение, на каком-то наоборот, так что полная «масса» системы не меняется. Я, однако, делаю акцент на возможном присутствии этого члена, так как иногда его очень легко упустить. Для учета этого эффекта от среднего мы должны включить однородное решение b в u_1 (или просто в u_0, но в порядке ε — это то же самое). Этот средний член b затем влияет на возможное секулярное поведение $e^{i(kx-\omega t)}$ в u_2 на уровне $O(\varepsilon^2)$ из-за квадратичного члена $N(u_0u_1)$. Устраняя в этом порядке секулярные члены, получаем систему связанных уравнений на огибающую a и медленно меняющееся среднее b. Иногда b можно выразить в виде величины aa^*, умноженной на константу, иногда нет. Мы встретимся с обоими этими случаями в упражнениях, и я укажу на три конкретных физических примера, где эти эффекты важны.

Сейчас давайте предположим, что среднее течение не принадлежит к ядру $L^{(0)}$, что выполняется, например, в случае, если $L = \partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2 + \omega_p^2$. Тогда единственным секулярным членом в (2.48) будет $L^{(1)}u_0$, и поэтому мы должны так выбрать зависимость a от X и T_1, чтобы $L^{(1)}u_0 = 0$, а именно

$$L_1 \frac{\partial a}{\partial T_1} + L_2 \frac{\partial a}{\partial X} = 0.$$

Однако из (2.42) $L_2 = +\omega' L_1$, и если $L_1 \neq 0$ (что мы предполагаем), то

$$a = a(X - \omega' T_1, T_2). \tag{2.49}$$

Дальше мы находим u_1, содержащее вторые гармоники и, возможно, средний член, пропорциональный aa^*. В порядке ε^2 секулярные члены, нелинейные по a и a^*, возникают из квадратичного произведения u_0u_1 и кубичного члена u_0^3. Это приводит к появлению члена, который мы запишем как $\beta L_1 a^2 a^*$. Линейные секулярные члены имеют вид $L^{(2)}u_0$, что с учетом (2.49) может быть записано как произведение $\exp i(kx-\omega t)$ на

$$L_1 \frac{\partial a}{\partial T_2} + \left(\frac{1}{2}\omega'^2 L_{11} - \omega' L_{12} + \frac{1}{2} L_{22}\right) \frac{\partial^2 a}{\partial X^2}.$$

Однако с учетом (2.43) это равно

$$L_1 \left(\frac{\partial a}{\partial T_2} - i\,\frac{\omega''}{2}\,\frac{\partial^2 a}{\partial X^2}\right),$$

и поэтому универсальный вид НУШ таков:

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} = \frac{i\omega''}{2}\,\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + i\beta a^2 a^*. \tag{2.50a}$$

При большем числе пространственных измерений я оставляю в качестве упражнения показать, что (опять предполагая среднее несекулярным)

$$\frac{\partial a}{\partial T_2} - \frac{i}{2}\sum_{r,s} \frac{\partial^2\omega}{\partial k_r\,\partial k_s}\,\frac{\partial^2 a}{\partial \xi_r\,\partial \xi_s} = i\beta a^2 a^*,$$

где $\partial^2\omega/\partial k_r \partial k_s$ — дисперсионный тензор, $\xi_r = \varepsilon(x_r - \omega_r t)$ и $\omega_r = \partial\omega/\partial k_r$ — компонента (вектора) групповой скорости в направлении x_r.

Я сейчас хочу сказать, а также подчеркну приведенным в упражнениях примером, что x и t взаимозаменяемы. Мы точно так же можем искать решение в виде $a(\varepsilon(t-k'x),\ \varepsilon^2 x)$ с $k' = \partial k/\partial\omega = 1/(\partial\omega/\partial k)$, и тогда коэффициент дисперсии будет $ik''/2$. Такая формулировка удобна, когда один или оба параметра c^2 и ω_p^2 (например, крутильная жесткость проволоки, связывающей маятники, или их длина в исходном примере) медленно меняются в зависимости от x.

Уравнение (2.50a) принадлежит к классу точно решаемых моделей. Преобразование

$$\xi = X, \quad \frac{\omega'' T_2}{2} = \tau, \quad q = \sqrt{\left|\frac{\beta}{\omega''}\right|}\, a$$

приводит его к каноническому виду

$$q_\tau + iq_{XX} + 2isq^2 q^* = 0, \tag{2.50b}$$

где $s = \operatorname{sign}(\beta/\omega'')$. Мы покажем в гл. 3, как можно вложить (2.50b) в схему обратной задачи рассеяния. Для $s = +1$ асимп-

тотическое решение начальной задачи для (2.50b) состоит из последовательности солитонов огибающей

$$q(X, \tau) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta (X + 4v\tau - X_0) \times \\ \times \exp(-2ivX - 4i(v^2 - \eta^2)\tau - i\varphi_0) \quad (2.51a)$$

и мод излучения. Для каждого солитона первоначальное поле $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = 2\sqrt{\left|\frac{\omega''}{\beta}\right|}\,\varepsilon\eta \operatorname{sech} 2\varepsilon\eta (x - \omega'(k - 2v\varepsilon)t - x_0) \times \\ \times \exp\{i(k - 2v\varepsilon)x - i\omega(k - 2v\varepsilon)t + 2i\omega''\eta^2\varepsilon^2 t\}. \quad (2.51b)$$

Это выражение показывает на основной недостаток НУШ как модели для физических задач. В то время как скорость распространения фазы колебаний зависит от амплитуды (от η), скорость амплитудного импульса (солитона огибающей) от η не зависит. Параметры солитона v, η определяются (так же, как и x_0, φ_0) начальными данными $q(x, 0)$ (они аналогичны величине $\zeta_k = i\eta_k$ для уравнения КдФ), однако, как видим, скорость в аргументе гиперболического секанса есть линейная групповая скорость с волновым числом $k - 2v\varepsilon$. Трудность состоит в том, что разложение выполнялось так, чтобы вычислить фазу с точностью до $O(\varepsilon^2)$, однако фаза гиперболического секанса имеет ε в качестве общего множителя. На самом деле было бы желательно получить выражение для фазы с точностью до ε^3, т. е. в виде

$$2\varepsilon\eta(x - \omega'(k - 2v\varepsilon)t - O(\varepsilon^2 t)).$$

Последний член будет тогда зависеть от η. Без сомнения, это все можно проделать, однако при этом мы получим другое уравнение, являющееся возмущением НУШ и уже не принадлежащее к точно решаемым. Тем не менее в некоторых обстоятельствах нужно пожертвовать математическими удобствами точной решаемости, чтобы отразить существенные физические свойства моделируемой системы. Иллюстрацией к этому служит драматическая история изучения туннелирования солитонов. Более подробно с этим вопросом можно познакомиться по [52].

Упражнения 2c

1. Показать, что период колебаний маятника с максимальной амплитудой A есть

$$T = \frac{4}{\omega_p}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}}, \quad m^2 = \sin^2\frac{A}{2}.$$

Показать, что для малых A эта формула согласуется с (2.34).

2. Вывести НУШ для следующих примеров:

(i) $u_{tt} - u_{xx} + \omega_p^2 u(1 - uu^*) = 0$, u — комплексное скалярное поле.

(ii) $u_t + u_{xxx} = -6\alpha\varepsilon u u_x$. Заметьте, что в этом примере $u = \text{const}$ удовлетворяет линейному уравнению, и $u_0 = ae^{i\theta} + (^*)$, $\theta = kx - \omega t$, $\omega = -k^3$. В порядке ε получите $a_{T_1} - 3k^2 a_X = 0$ и $u_1 = b(X, T_1, T_2) + (\alpha/k^2)\, a^2 e^{2i\theta} + (\alpha/k^2)\, a^{*2} e^{-2i\theta}$. В порядке ε^2

$$u_{2t} + u_{2xxx} = -\frac{\partial u_0}{\partial T_2} - 3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\, \partial X^2} - \frac{\partial u_1}{\partial T_1} - 3\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\, \partial X} - \\ - 6\alpha \frac{\partial}{\partial x}(u_0 u_1) - 6\alpha \frac{\partial}{\partial X} aa^*.$$

Исключите в правой части члены, пропорциональные $e^{\pm i\theta}$ и e^0, с помощью надлежащего выбора a_{T_2} и b_{T_1}. Вы получите, что $b_{T_1} = -6\alpha(aa^*)_X = (-2\alpha/k^2)(aa^*)_{T_1}$ и поэтому $b = (-2\alpha/k^2)\, aa^*$. Получите также условие $a_{T_2} + 3ika_{XX} - (6\alpha^2/k) \cdot ia^2 a^* = 0$. Обратите внимание на члены вида $a^2 e^{2i\theta} a^* e^{-i\theta}$ и $ae^{i\theta} b$, из которых возникает нелинейность в уравнении. Убедитесь в том, что, если вы не учтете вклад b, знак нелинейного члена будет противоположным, что приведет к полностью ошибочным выводам.

(iii) $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = \varepsilon\beta u_x u_{xx}$,

$$u_0 = ae^{i\theta} + a^* e^{-i\theta} + b; \quad \theta = kx - \omega t; \quad \omega^2 = c^2 k^2 + \gamma k^4,$$

$$u_1 = \frac{-i\beta}{12\gamma k} a^2 e^{2i\theta} + \frac{i\beta}{12\gamma k} a^{*2} e^{-2i\theta}, \quad a_{T_1} + \omega' a_X = 0.$$

В порядке $O(\varepsilon^2)$ устраните секулярные члены и получите, что

$$a_T + \omega' a_X - \varepsilon\left(\frac{i\omega''}{2} a_{XX} - \frac{i\beta k^2}{2\omega} ab_X + \frac{i\beta^2 k^2}{12\gamma\omega} \cdot a^2 a^*\right) = 0,$$

$$b_{TT} - c^2 b_{XX} - \beta k^2 (aa^*)_X, \quad T = \varepsilon t, \quad X = \varepsilon x.$$

Положите $b_X = \rho$ и перепишите систему в виде

$$a_T + \omega' a_X - \varepsilon\left(\frac{i\omega''}{2} a_{XX} - \frac{i\beta k^2}{2\omega} a\rho + \frac{i\beta^2 k^2}{12\gamma\omega} a^2 a^*\right) = 0,$$

$$\rho_{TT} - c^2 \rho_{XX} = \beta k^2 (aa^*)_{XX}.$$

Сравните эти уравнения с взаимодействием ленгмюровских и ионно-акустических волн в плазме, применительно к которому они называются уравнениями Захарова [58]. Правая часть в уравнении для среднего поля $b(X, T)$ возникает вследствие

так называемой пондемоторной силы. Это уравнение можно записать как

$$\rho_{TT} - c^2\rho_{XX} = \frac{\beta k^2((aa^*)_{XX} - (1/c^2)(aa^*)_{TT})}{1 - \omega'^2/c^2} + O(\varepsilon),$$

поскольку $(aa^*)_T = -\omega'(aa^*)_X + O(\varepsilon)$. Поэтому та часть среднего поля, которая индуцируется малыми градиентами огибающей быстрого поля, может быть получена в явном виде:

$$\rho = \frac{\beta k^2 aa^*}{\omega'^2 - c^2}.$$

Следует отметить возможность резонанса, когда групповая скорость быстрого поля совпадает с фазовой скоростью длинных волн, или среднего поля. Читатель может почерпнуть подробную информацию об этом резонансе в статьях Бенни (Stud. Appl. Math., **55** (1976), pp. 93 ff; **56** (1977), pp. 81—94) и Ньюэлла (SIAM J. Appl. Math., **35** (1978), pp. 650—664). Теперь можно переписать уравнение для огибающей $a(\xi = X - \omega' T,\ \tau = \varepsilon T)$,

$$a_\tau - \frac{i\omega''}{2} a_{\xi\xi} + \frac{i\beta^2 k^2}{12\gamma} \frac{\omega''}{\omega'^2 - c^2} a^2 a^* = 0.$$

И наконец, комментарий к уравнениям Захарова. Если в нашем примере мы включили бы второе пространственное измерение,

$$u_{tt} - c^2\nabla^2 u + \gamma\nabla^4 u = \varepsilon\beta\nabla u \cdot \nabla(\nabla u),$$

$\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, то мы не смогли бы так просто выразить среднее поле ρ через aa^*. Причина этого состоит в том, что в двумерном случае (см. обсуждение в разд. 2d) «уединенная волна» коллапсирует, и аргумент огибающей не является больше равномерно постоянным на характеристике групповой скорости нигде, кроме начальной стадии. По мере развития коллапса огибающей и среднего поля приближения, в которых были выведены уравнения, теряют силу и становится необходимым учесть члены, отброшенные при анализе. Тем не менее поведение решений уравнений Захарова часто рассматривают как указание на то, что происходит в реальных ситуациях.

Примеры (ii) и (iii) служат также прототипами для ряда одномерных задач теории волн на воде. Пользуясь работами [54] и [55], выведите НУШ

$$a_t + \omega' a_x - \frac{i\omega''}{2} a_{xx} + i\beta a^2 a^* = 0$$

для поверхностных гравитационных волн. В этом уравнении

$$\omega^2 = gkT, \qquad T = \operatorname{th} kh, \qquad S = \operatorname{sech} kh,$$

$$\beta = \frac{1}{2}\omega k^2 \left\{ \frac{9T^4 - 10T^2 + 9}{8T^4} - \frac{1}{gh - \omega'^2} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\omega^2}{k^2T^2} + \frac{\omega\omega' S^2}{kT^2} + \frac{ghS^4}{T^2} \right) \right\},$$

где $\eta(x, t)$, уровень свободной поверхности, есть $(a/2)e^{i(kx-\omega t)} + (*)$, g — ускорение силы тяжести и h — невозмущенная глубина. Заметим, что β меняет знак при $kh = 1.36$. Это означает, что солитоны образуются на глубокой воде ($kh > 1.36$), но этого не происходит, если глубина меньше. Случай двух пространственных переменных обсуждается у Бенни и Роскеса [56] и у Дэви и Стюартсона [57].

(iv) Следующий пример основывается на экспериментальных наблюдениях Ву, Кесляна и Рудника (препринт), указывающих на существование явления, названного ими гидродинамическими поляронами в резонаторе в виде наполненного водой желоба. Идея в общих чертах такова. Линейное дисперсионное соотношение для волн в прямоугольной кювете есть $\omega^2 = gk \times \operatorname{th} kh$, где $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Допустим, что размер кюветы L_y в направлении y мал по сравнению с ее размером L_x в направлении x. В эксперименте было $L_y = 2.54$ см и $L_x = 38$ см, глубина воды была равна 2 см, однако вода была глубокой в том смысле, что $kh \approx 3$. Компонента по оси y волнового числа низшей моды равна $k_y = \pi/L_y$. Отметим, что если частота ω источника меньше собственной частоты моды (0, 1) с $k_x = 0$, $k_y = \pi/L_y$, $\omega_{01}^2 = gk_y \operatorname{th} k_y h$, то волна не может распространяться по x, а будет захваченной у стенки кюветы со смещением свободной поверхности

$$\eta(x, y, t) \sim e^{-\left(-k_x^2\right)^{1/2}} \cos k_y y \left(Ae^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}\right),$$

где $\omega_{01}^2 > \omega^2 = g(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \operatorname{th}(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} h$ и $k_x^2 < 0$. Вышеупомянутые авторы обнаружили, что вследствие компенсации нелинейными эффектами дисперсионных, импульсы типа солитонов могут располагаться в произвольных местах канала. Они пишут об удивлении, с которым они обнаружили локализованные импульсы в случае, когда возмущение было однородным по x. Это, однако, нисколько не удивительно, и мы увидим в следующем разделе, что однородный отклик неустойчив, и неустойчивость приводит к росту солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера. Для изучения этого явления я использую мо-

дель Лэраза и Паттермана (препринт), которые заметили, что в этой задаче получается НУШ и, следовательно, решения солитонного типа возможны. Однако опять они не поняли, что эти решения неизбежны. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - c^2\nabla^2 u + \gamma\nabla^4 u = \varepsilon\nabla^2(\alpha u^2), \qquad 0 < \varepsilon \ll 1$$

с

$$u = u(x, y, t), \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$u_0 = (A(X, T)e^{-i\omega t} + (^*))\cos ky,$$

$$u_1 = B(X, T) + \left(A_2 e^{-2i\omega t} + B_2 + A_2^* e^{2i\omega t}\right)\cos 2ky,$$

где мы выбрали $k(=k_y)$ и ω такими, чтобы

$$\omega^2 = c^2k^2 + \gamma k^4 - \varepsilon^2\chi = \omega_{01}^2 - \omega^2\chi.$$

Мы так подберем зависимость от времени $A(x, T)$, где $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$,

$$A_T = f_1 + \varepsilon f_2 + \ldots$$

и $B(X, T)$, чтобы исключить секулярные добавки, пропорциональные $e^{i\theta}$ и e^0 в u_1, u_2 и u_3 соответственно. Несложное вычисление показывает, что $f_1 = 0$ (нулевая групповая скорость $(\partial\omega/\partial k_x)(0, k_y)$ в направлении слабой модуляции), и

$$A_2 = \frac{-\alpha}{6\gamma k^2}A^2, \qquad B_2 = -\frac{AA^*}{c^2 + 4\gamma k^2};$$

$$2i\omega A_T + \varepsilon\left(c^2\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - \chi A - \alpha k^2 A - \alpha k^2 A\left(2B - \frac{\alpha AA^*}{6\gamma k^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{k^2 AA^*}{c^2k^2 + 4\gamma k^4}\right)\right) + O(\varepsilon^2) = 0;$$

$$B_{TT} - c^2 B_{XX} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial X^2}AA^* + O(\varepsilon).$$

Как и в примере (iii), к правой части последнего уравнения можно добавить $(-\alpha/c^2)(\partial^2/\partial T^2)AA^*$, поскольку этот член порядка $O(\varepsilon^2)$, и получить

$$B(X, T) = -\frac{\alpha}{c^2}AA^*,$$

и если $\tau = \varepsilon T$, то

$$2i\omega A_\tau + c^2 A_{XX} + (\alpha^2 k^2\beta AA^* - \chi)A = 0$$

с

$$\beta = \frac{2}{c^2} + \frac{1}{6\gamma k^2} + \frac{1}{c^2 + 4\gamma k^2}.$$

Если γ положительно, то положительно и β. Сделаем несколько замечаний.

(a) Поскольку произведение дисперсии (в направлении модуляции x) на β положительно, асимптотическое состояние состоит из солитонов вида (2.51a).

(b) Двигаться они могут (т. е. $v \neq 0$) только при некотором специальном виде неоднородности начальных условий или при приложении внешних сил. Их скорости не зависят от их амплитуд. Их положения и амплитуды находятся из начальных условий.

(c) Параметр χ устраняется просто изменением фазы A. А теперь — предостережение. В эксперименте Ву, Кесляна и Рудника волны возбуждались непрерывно из-за диссипации, в отсутствие которой можно было бы, создав начальное возмущение самой низкой моды, предоставить его самому себе. Это означает, что в правую часть НУШ нужно добавить члены, соответствующие возбуждению и затуханию, т. е. $E = \Gamma A$. (Если устранить расстройку частоты $-\chi A$, E приобретает фазовый множитель $e^{i\Delta t}$, $\Delta = (i\chi/2\omega)\varepsilon^2$.) Отклик возмущаемой диссипативной системы может состоять просто в порождении солитонов с некоторой фиксированной амплитудой (см. [45]). Однако возможны и другие отклики, зависящие от E и Γ. Я не собираюсь обсуждать их здесь, а отсылаю интересующегося читателя к статье Бишопа, Фессера, Ломдаля и Траллинджера (Physica D, 7 (1983), p. 259), в которой изучается влияние внешней силы на бризер уравнения sin-Гордон. Бризеры малой амплитуды для этого уравнения — это солитоны НУШ.

(v) $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_p^2(\varepsilon^2 x)\, u = \varepsilon^2 \gamma u^3 \cdot \gamma$, c^2 — постоянные. Нас интересует пространственная эволюция волнового пакета. Соответствующие координаты —

$$X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x, \quad t, \quad T = \varepsilon t,$$

$$u_0 = a e^{i\theta} + (^*), \quad \theta = \int k\, dx - \omega t,$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2(X_2)}{c^2}.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = e^{i\theta}\left(-k^2 a + 2ik\varepsilon a_{X_1} + \varepsilon^2\left(2ika_{X_2} + a_{X_1X_2} + ik_{X_2} a\right)\right) + (^*).$$

В порядке ε

$$a_{T_1} + \omega' a_{X_1} = 0 \Rightarrow a = a\left(T - \frac{1}{\varepsilon}\int^{X_2} k'\, dX_2\right).$$

где $k' = 1/\omega' = dk/d\omega$. В порядке ε^2 мы получим

$$a_{X_2} + \frac{ik''}{2} a_{TT} = \frac{3i\gamma}{2kc^2} a^2 a^* - \frac{1}{2k} k_{X_2} a.$$

В качестве дополнительного упражнения преобразуйте это уравнение к каноническому виду $q_\tau - iq_{\theta\theta} = 2iq^2q^* = \Gamma(k_\tau/k)q$. Что такое Γ, τ, θ, q? Подробности см. в [52].

(vi) *Уравнение для огибающей неустойчивой волны.* Предположим, что L в (2.39) зависит от параметра R таким образом, что волновое решение $u(x_j, t) \sim e^{i(k_j x_j - \sigma t)}$, $\sigma = \omega - i\nu$ растет или затухает в зависимости от $R \gtrless R_c$. Параметры ν и ω как функции k_j и R задаются комплексным алгебраическим уравнением $L(-i\omega + \nu, k_j, R) = 0$. Критическая поверхность — это поверхность в пространстве k_j, R, соответствующая $\gamma = 0$. Критические значения k_j и R — те точки на этой поверхности, при которых R минимально. Это наименьшее значение параметра, при котором решения волнового типа растут. Используйте идеи этого раздела и покажите, что (медленно меняющаяся) огибающая $A(x_j, t)$ растущей волны подчиняется комплексному уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j,l} \left(\frac{\partial \nu}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial k_j \partial k_l} + i \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_j \partial k_l} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_l} =$$

$$= \left(\frac{\partial \nu}{\partial R} - \frac{i\,\partial \omega}{\partial R} \right) R_c \chi A - (\beta_r + i\beta_i) A^2 A^*.$$

Исходное поле запишем как $u(\mathbf{x}, t) = \varepsilon A(\mathbf{x}, t) \cdot \exp(i\mathbf{k}_c x - i\omega(R_c)t) + (*) + O(\varepsilon^2)$, $R = R_c(1 + \varepsilon^2\chi)$ и $\mathbf{k}_c$ — один из критических векторов, соответствующих $R = R_c$. (Часто вследствие симметрии исходной системы критический вектор вырожден; например, задача о конвекции между двумя бесконечными горизонтальными плоскостями имеет вращательную симметрию.) Коэффициенты в уравнении для огибающей оцениваются в точке $\mathbf{k}_c$. Замечания, аналогичные сделанным в этом разделе о необходимости учета возбуждения среднего течения малыми градиентами AA^*, верны и в этой задаче.

После того как вы прочитаете следующий раздел о неустойчивости Бенджамина — Фейра, покажите, что пространственно однородное решение (рассмотрите одномерную ситуацию)

$$A = \sqrt{\frac{R_c \chi}{\beta_r}} \exp\left(-\frac{i\beta_i R_c \chi t}{\beta_r} \right)$$

неустойчиво в смысле Бенджамина — Фейра, если

$$\beta_i \gamma_i + \beta_r \gamma_r < 0,$$

где

$$\gamma_i = \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_c, \qquad \gamma_r = \left(\frac{\partial\nu}{\partial R}\,\frac{\partial^2 R}{\partial k^2}\right)_c.$$

Подробности см. в [127].

2d. Неустойчивость Бенджамина—Фейра. Вспомним, что наше волновое поле $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = ae^{i(k_0x-\omega_0t)} + (^*), \quad \omega_0 = \omega_0(k_0),$$

где a — функция от $\xi = \varepsilon(x - \omega'_0 t)$ и $T = \varepsilon^2 t$, удовлетворяющая

$$a_T = i\frac{\omega_0''}{2}a_{\xi\xi} + i\beta a^2 a^*. \tag{2.52}$$

Запишем $a = Ae^{i\varphi}$. Естественно определить локальное волновое число k как производную по x и локальную частоту как взятую с обратным знаком производную по T от полной фазы $\theta = k_0x - \omega_0 T + \varphi(\xi, T)$:

$$k = k_0 + \varepsilon\varphi_\xi, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_0'\varphi_\xi - \varepsilon^2\varphi_T.$$

Отметим соотношение

$$k_T + \omega_x = -\omega_0'\varepsilon^2\varphi_{\xi\xi} + \varepsilon^2\varphi_{\xi T} + \varepsilon^2\omega_0'\varphi_{\xi\xi} - \varepsilon^3\varphi_{T\xi}, \tag{2.53}$$

выражающее сохранение числа волн. Запишем изменение волнового числа $\varepsilon\varphi_\xi$ как εK. Тогда мнимая часть (2.52) дает

$$\varphi_T = \frac{\omega_0''}{2}\left(\frac{A_{\xi\xi}}{A} - K^2\right) + \beta A^2,$$

и, дифференцируя по ξ, получаем

$$K_T + \omega_0'' K K_\xi = \beta\rho_\xi + \frac{\omega_0''}{2}\left(\frac{A_{\xi\xi}}{A}\right)_\xi, \tag{2.54a}$$

где $\rho = A^2$. Уравнение (2.54a) — это то же уравнение сохранения числа волн (2.53), поскольку

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_0' K + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\omega_0'' K - \beta A^2 - \frac{\omega_0''}{2}\frac{A_{\xi\xi}}{A}\right)$$

(напомним, что $\partial/\partial t = \varepsilon^2\,\partial/\partial T - \varepsilon\omega_0'\,\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial x = \varepsilon\,\partial/\partial\xi$).
С другой стороны, вещественная часть (2.52)

$$(A^2)_T + \omega_0''(A^2K)_\xi = 0 \tag{2.54b}$$

есть уравнение сохранения волнового действия.

Далее, рассмотрим монохроматическое решение

$$A = A_0, \quad \varphi = \beta A_0^2 T + \text{const}, \tag{2.55}$$

для которого

$$k = k_0, \quad \omega = \omega_0 - \beta A_0^2 \varepsilon^2.$$

Это — волна Стокса. Проверим ее линейную устойчивость, полагая $A = A_0 + \tilde{A}$, $K = \tilde{K}$, и из (2.54) получим

$$\tilde{K}_T = 2\beta A_0 \tilde{A}_\beta + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\tilde{A}_{\xi\xi\xi\xi}}{A_0},$$

$$\tilde{A}_T = -\frac{\omega_0''}{2} A_0 \tilde{K}_\xi,$$

или

$$\tilde{A}_{TT} = -\beta\omega_0'' A_0^2 \tilde{A}_{\xi\xi} - \frac{\omega_0''^2}{2} \tilde{A}_{\xi\xi\xi\xi}. \tag{2.56a}$$

Поэтому если $\tilde{A} \sim e^{ik\xi + \sigma T}$, то

$$\sigma^2 = \beta\omega_0'' A_0^2 K^2 - \frac{\omega_0''^2}{4} K^4, \tag{2.56b}$$

и поэтому если $\beta\omega_0'' > 0$, то решение (2.55) всегда неустойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям из интервала волновых чисел $0 < K^2 < 4\beta A_0^2 \omega_0''$. Максимальная скорость роста осуществляется, когда $K^2 = 2\beta A_0^2/\omega_0''$, и равна $\beta^2 A_0^2$. Читателю следует прочесть работу [59] Лэйка, Юэна, Рюнгальдье и Фергюсона, изучавших эту неустойчивость экспериментально для волн на воде. Следует прочесть также оригинальную статью Бенджамина и Фейра [51].

Причину этой неустойчивости можно понять следующим образом. Представим себе монохроматическую волну постоянной амплитуды A_0 с частотой $\omega_0 - \beta A_0^2 \varepsilon^2$, возмущенную в точке P так, что амплитуда в точке P меньше A_0. Пусть $\beta > 0$. Тогда ω в точке P больше, чем ω слева от P. Следовательно, в этой области $\omega_x > 0$ и вследствие сохранения волн $k_t < 0$. Следовательно, k уменьшается, и если $\omega_0'' > 0$, то ω_0' также уменьшается. Справа от P ω_0' возрастает. Следовательно, области слева и справа от P продолжают разделяться и амплитуда возмущения возрастает. При $\beta\omega_0'' < 0$ возмущение ограничено и со временем затухает.

Итак, что же происходит с цугом поверхностных гравитационных волн, возбуждаемым в точке S волнопродуктором с почти постоянной частотой ω? Если $k, h > 1.36$, то $\beta\omega'' > 0$ (см.

упражнение 2c(2)(ii)) и монохроматический цуг волн неустойчив. При принятой нами постановке задачи лучше всего изучать эволюцию a по $X = \varepsilon^2 x$ в зависимости от $T = \varepsilon(t - x/\omega')$. Если время действия волнопродуктора конечно, то возникающий волновой пакет разбивается на последовательность импульсов специального вида — солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера, описываемых формулой (2.51). Если же источник действует непрерывно с постоянной по времени или периодической амплитудой, то нам нужно решать такую краевую задачу с начальными данными, в которой амплитуда $a(X, T)$ периодична по T. Поэтому, поскольку профиль эволюционирует по X, можно ожидать возвращаемость того же типа, что и в уравнении КдФ. Разница состоит только в том, что здесь поле периодично по времени и квазипериодично по пространству. А именно, вначале волновой цуг разбивается на несколько изолированных импульсов, однако потом, при некотором большем значении координаты, они вновь собираются, воспроизводя начальное (как функцию времени при $x = 0$) условие. Эта возвращаемость и в самом деле наблюдалась, и я отсылаю читателя к статье Юэна и Фергюсона [60].

Если $\beta\omega'' < 0$ и мы создаем малое длинноволновое возмущение огибающей, то это возмущение будет распространяться в соответствии с уравнением КдФ. Читатель может увидеть линейную часть решеточного уравнения (1.3) в (2.56a). В качестве упражнения я попрошу вас учесть нелинейные члены и вывести соответствующее уравнение КдФ.

Неустойчивость Бенджамина — Фейра (ее иногда называют также модуляционной) широко распространена в физике и играет важную роль в разнообразных нелинейных волновых уравнениях. Попросту говоря, если дисперсия и нелинейность противодействуют друг другу, монохроматический цуг волн не хочет оставаться монохроматическим. Побочные гармоники вытягивают энергию из несущей волны с помощью резонансного механизма, что приводит к модуляции огибающей. В одномерной задаче модуляция огибающей постоянно растет вплоть до образования солитона, после чего наступает точный баланс нелинейности и дисперсии и дальнейшее искажение больше не происходит.

В двумерных задачах, если произведение β на дисперсионный тензор $\partial^2\omega/\partial k_r \partial k_s$, $r, s = 1, 2$, является положительно определенной матрицей, процесс фокусировки продолжается непрерывно, пока не образуется локально бесконечная амплитуда, что происходит за конечное время. В контексте нелинейной оптики такое нитеобразование наблюдалось, а форма этих нитей обсуждалась в работе Захарова и Сынаха [61]. Рассмотрим

$q(\mathbf{r}, t)$, подчиняющуюся уравнению

$$2iq_t + \nabla^2 q + \beta (qq^*)^\sigma q = 0,$$

у которого имеются следующие интегралы движения:

$$N(q, q^*) = \int qq^* \, d\mathbf{x},$$

$$P(q, q^*) = \int \frac{i}{2} (q\nabla q^* - q^*\nabla q) \, d\mathbf{x},$$

$$H(q, q^*) = \frac{1}{2} \int \left(|\nabla q|^2 - \frac{\beta}{\sigma+1} |q|^{2\sigma+2} \right) d\mathbf{x}.$$

Пространственная размерность задачи n, а σ измеряет степень нелинейности. Для $\sigma < 2/n$ можно доказать глобальное по времени существование решения $q(\mathbf{r}, t)$. В интересующем нас случае $n = 2$, $\sigma = 1$, так что $\sigma = 2/n$ и это значение σ критическое. В одномерной задаче критическое значение σ равно двум. Теперь, если $N(q(\mathbf{r}, 0), q^*(\mathbf{r}, 0))$ меньше N_0-критического значения, получающегося подстановкой в $N(q, q^*)$ сферически симметричного решения $q(\mathbf{r}, t) = e^{it/2} R(|\mathbf{r}|)$ с везде положительным $R(|\mathbf{r}|)$, с $R'(0) = 0$, $R(0) = \infty$ и удовлетворяющего $\nabla^2 R - R + \beta R^{2\sigma+1} = 0$, то снова $q(\mathbf{r}, t)$ существует при всех временах, если только $q(\mathbf{r}, 0)$ удовлетворяет весьма слабому условию

$$\int (|q|^2 + |\nabla q|^2) \, d\mathbf{x} < \infty.$$

Читателю для самопроверки следует доказать, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 qq^* \, d\mathbf{x} = 4H. \tag{2.57}$$

Заметим, что если $q(\mathbf{r}, 0)$ таково, что H, интеграл движения, отрицателен (H в точности равен нулю, когда $q(\mathbf{r}, t) = e^{it/2} R(|\mathbf{r}|)$), то положительная по своей природе величина $\int r^2 qq^* \, d\mathbf{r}$ становится за конечное время отрицательной. Поскольку это невозможно, мы приходим к выводу, что до этого в $q(\mathbf{r}, t)$ должна образоваться сингулярность в $|\mathbf{r}| = 0$. Это та самая сингулярность, которая обсуждается в [61]. Основной вывод таков, что вблизи времени схлопывания $t = t_0$ амплитуда $q(\mathbf{r}, t)$ при $n = 2$ имеет аксиально симметричную форму, пропорциональную $\lambda R(\lambda |\mathbf{r}|)$, где $\lambda(t) = (t - t_0)^{-2/3}$. Для того чтобы учесть разницу в плотности числа частиц между решением в начальный момент времени и решением $\lambda R(\lambda |\mathbf{r}|)$ (последнее несет в себе N_0 частиц), необходимо к этому центральному пику добавить шельф, который на больших расстояниях почти постоянен по $|\mathbf{r}|$, а потом внезапно исчезает при пока

что невычисленном значении. Эти последние замечания основаны на наблюдениях над численными экспериментами и некоторых теоретических работах. Структура схлопывающегося решения при критическом значении $\sigma = 1$ пока в точности не известна. Неизвестно также, схлопываются ли за конечное время решения уравнений Захарова в двух пространственных измерениях, т. е. уравнений

$$a_T - i\varepsilon\nabla^2 a - i\varepsilon\rho A = 0, \tag{2.58}$$

$$\rho_{TT} - c^2\nabla^2\rho = \nabla^2(AA^*), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для этих уравнений нет соотношения, эквивалентного (2.57).

И наконец, если соответствующее НУШ имеет незнакоопределенную дисперсионную матрицу, как в случае гравитационных волн на глубокой воде, где

$$a_T - ia_{xx} + ia_{yy} - 2ia^2a^* = 0,$$

то солитон, образовавшийся вдоль оси x, будет неустойчив к зависящим от y возмущениям, однако это разрушение протекает менее драматично, чем процесс, описанный в предыдущем абзаце. Причиной неустойчивости является отток энергии от основной волны к распространяющимся под углом побочным гармоникам, вступающим вместе с основной волной в четырехволновой резонанс. (См. книгу Уизема [55], в которой обсуждается предложенный Филлипсом четырехволновой резонанс.)

Замечание. Удивительно, но неустойчивость волны Стокса не была открыта, пока не были выполнены эксперименты Бенджамина и Фейра. (Читатель может также обратиться к работе М. Дж. Лайтхилла в Proc. Roy. Soc. A, **299**, pp. 28—53.) Формальный метод построения несинусоидальных периодических решений был предложен Стоксом в 1849 г. (Дж. Дж. Стокс, On the theory of oscillatory waves, Trans. Cambridge Phil. Soc., **8**, pp. 441—455), а доказательство сходимости ряда для пологих волн было дано Т. Леви-Чевита (Math. Ann., **93**, pp. 264—314) в 1925 г. Хороший обзор роли НУШ в описании неустойчивости и сравнений с экспериментами содержится в [59].

Упражнение 2d

Включите члены с квадратичной нелинейностью в (2.56а) и покажите, что

$$\tilde{A}_{TT} + \beta\omega_0'' A_0^2 \tilde{A}_{\xi\xi} = -\frac{\omega_0''^2}{4}\tilde{A}_{\xi\xi\xi\xi} + Q,$$

где

$$Q = \frac{\omega_0''}{2} A_0 (\tilde{K}\tilde{K}_\xi)_\xi - \beta\omega_0'' A_0 (\tilde{A}\tilde{A}_\xi)_\xi - \frac{1}{A_0} (\tilde{A}\tilde{A}_T)_T - \omega_0'' (\tilde{A}\tilde{K})_{\xi T}.$$

Заметьте, что если $\beta\omega_0'' < 0$ и мы рассматриваем однонаправленные решения, то

$$\tilde{A} = \tilde{A}(X = \xi - cT,\ \varepsilon T), \quad c^2 = -\beta\omega_0'' A_0^2,$$

$$\tilde{K} = -\frac{2\beta}{c} A_0 \tilde{A}, \quad Q = -2\beta\omega_0'' A_0 (\tilde{A}^2)_{XX},$$

и нелинейный вариант (2.56а) — это уравнение Буссинеска. Заметьте также, что солитоны у возникающего в результате уравнения КдФ возможны только, если $\tilde{A} < 0$. Так как такие солитоны представляют собой локальное уменьшение интенсивности монохроматической до этого волны, то они называются темными солитонами. Покажите также, что если $\beta\omega_0'' < 0$, то (2.52) имеет решения

$$a = \rho \exp\left(i\varphi + \frac{iV}{2\xi} - \frac{i(\gamma + V^2/4)\,\omega_0''}{2T}\right),$$

$$\rho^2 = \rho_0^2 - \alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha\left(\xi - \frac{V\omega_0''}{2} T\right),$$

$$\varphi_X = \frac{h}{\rho^2}, \quad h^2 = \rho_0^4 (\rho_0^2 - \alpha^2),$$

$$\gamma + \frac{V^2}{4} = 3\rho_0^2 - \alpha^2.$$

Заметьте, что когда $\alpha^2 \to \rho_0^2$, $h \to 0$, то

$$\rho \to \rho_0 \operatorname{th} \rho_0 \left(\xi - \frac{V\omega_0''}{2} T\right), \quad \varphi = \varphi_0.$$

2е. Теория Уизема [55]. В середине 1960-х годов была создана другая остроумная теория для описания распространения сильнонелинейных, почти периодических цугов волн. Эта теория существенно связана с именем Уизема, хотя некоторые идеи были независимо развиты Крускалом при его попытках понять, что происходит в районах осцилляций, появляющихся при решении задачи о решетке Ферми — Паста — Улама. Идея чрезвычайно проста. Представим себе, что у уравнения в частных производных существует 2π-периодическое бегущее волновое решение $f(\Theta, A)$, $\Theta = kX - \omega T$, A — постоянная амплитуда, возникающая как константа интегрирования. Тогда можно строить более широкий класс решений, получающихся из вышеупомяну-

того в предположении, что входящие в него константы — волновое число $\Theta_X = k$, частота $\Theta_T = -\omega$ и амплитуда A — могут быть медленно меняющимися функциями координаты X и времени T. Уравнения на k, ω и A как на функции от $x = \varepsilon X$, $t = \varepsilon T$, $0 < \varepsilon \ll 1$ получаются следующим образом.

Во-первых, поскольку ω и k получаются из потенциала (фазы Θ), имеем

$$k_t + \omega_x = 0, \tag{2.59}$$

т. е. закон сохранения волнового числа. Во-вторых, после подстановки решения в виде такого анзаца в уравнение с частными производными, получается обыкновенное дифференциальное уравнение по Θ на $f(\Theta)$. Мы знаем, что оно имеет периодическое решение вследствие нашего предположения о существовании у исходного уравнения в частных производных решений в виде периодической бегущей волны. Наложение условия периодичности с фиксированным периодом (обычно выбирается 2π) дает алгебраическую связь между ω, k и A, которая называется дисперсионным соотношением. (Очень существенна фиксация периода. Если допустить, что период является медленно меняющейся функцией, невозможно контролировать рост следующих приближений.) Поскольку эти параметры меняются медленно, то в уравнении с частными производными появляются $O(\varepsilon)$-члены, содержащие первые производные от k, ω и A по x и t. Требование, чтобы следующая итерация, удовлетворяющая линейному обыкновенному дифференциальному уравнению по Θ с коэффициентами, зависящими от f и его производных, также была 2π-периодической, дает условие разрешимости этого уравнения. Это условие является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка на k, A и ω и выражает сохранение волнового действия. Таким образом, возникает три уравнения, одно алгебраическое и два дифференциальных, на три неизвестных k, ω и A.

Далее, мы уже видели в разд. 2с, что слаболинейная огибающая несущей волны также характеризуется тремя параметрами — A, k и ω (см. уравнения (2.49)—(2.53)), связанными посредством НУШ. Являются ли эти описания эквивалентными в том смысле, что последнее возникает из теории Уизема в пределе малой амплитуды? Ответ отрицательный. То, что НУШ как слаболинейная теория не может включать себя пригодной при любых амплитудах теории Уизема, очевидно. С другой стороны, в теории Уизема амплитуда определяется алгебраически из нелинейного дисперсионного соотношения, в то время как в НУШ она живет достаточно независимой жизнью, являясь решением дифференциального уравнения в частных производных.

Почему же теория Уизема не содержит НУШ? Трудность состоит в том, что при конечной амплитуде условие разрешимости в порядке ε меняется таким образом, что ядро линейного оператора, действующего на первую итерацию решения, составляет лишь половину (оно одномерно) ядра, которое возникло бы, если бы A было мало. Это приводит к тому, что появляется только одно уравнение сохранения волнового действия, которое является уравнением на фазу волны и соответствует мнимой части НУШ, определяющей фазу φ комплексной амплитуды (огибающей). Амплитуда A уже зафиксирована дисперсионным соотношением. Что же происходит при малом A? В этом случае оказывается, что дисперсионное соотношение нужно дополнить, чтобы удовлетворить дополнительным условиям разрешимости. Дополнительные члены содержат производные от A, поэтому то, что было алгебраическим соотношением, определяющим A как функцию ω и k, теперь превращается в дифференциальное уравнение на A. Это уравнение соответствует амплитудной части НУШ. Мы сейчас приведем модификацию теории Уизема, объединяющую ее с НУШ и равномерно пригодную при малой амплитуде. Идеи, которые использую я, базируются на разложениях, использованных Абловицем и Бенни в работе по многофазной теории Уизема [62]. Как Абловиц и Бенни, так и Мей [63] указали области потенциальной неприменимости теории Уизема и идентифицировали соответствующие члены. Более того, сам Уизем показал, как включить эти дисперсионные члены более высоких порядков в технике усредненных лагранжианов (см. [55], с. 503 русск. изд.).

Интересно отметить, что точно такие же трудности возникают при макроскопическом описании систем, далеких от равновесия, описываемых посредством параметра порядка. Вдали от фазового превращения амплитуда параметра порядка определяется алгебраически модулем градиента фазы (выражение, аналогичное нелинейному дисперсионному соотношению или уравнению эйконала), в то время как вблизи критических значений бифуркационного параметра (являющегося мерой наложенного на систему внешнего воздействия — так же, как число Рэлея в задачах конвекции жидкости или как температура в магнетизме) амплитуда становится малой и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных. Это уравнение аналогично НУШ и, рассматриваемое совместно с соответствующим уравнением для фазы параметра порядка, известно как уравнение Ландау — Гинзбурга. Читатель, заинтересовавшийся этими замечаниями, может найти более подробное обсуждение в [64]. Мы же теперь проиллюстрируем эти замечания на двух конкретных примерах.

Выбор первого примера достаточно очевиден, поскольку в нем возможны решения вида $f(\Theta) = Ae^{i\Theta}$, что делает все вычисления явными. Рассмотрим комплексное скалярное поле $u(X, T)$, описываемое уравнением

$$u_{TT} - u_{XX} + \omega_p^2 (1 - \beta u u^*) u = 0. \tag{2.60}$$

Мы ищем решения вида

$$u(X, T) = f(\Theta, A) + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \tag{2.61}$$

где $f(\Theta) = Ae^{i\Theta}$ и $\Theta_X = k$, $\Theta_t = -\omega$ и A — функции от $x = \varepsilon X$ и $t = \varepsilon T$. Производные $\partial/\partial T$, $\partial/\partial X$ перепишем как $-\omega\partial/\partial\Theta + \varepsilon\partial/\partial t$, $k\partial/\partial\Theta + \varepsilon\partial/\partial x$ соответственно. Подстановка в (2.60) дает

$$\begin{aligned}&\Big\{(\omega^2 - k^2)\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} - i\varepsilon\left(2\omega\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\Theta} + \omega_t\frac{\partial}{\partial\Theta} + 2k\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\Theta} + k_x\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) + \\ &\quad + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \omega_p^2\left(1 - \beta u_0 u_0^* - \varepsilon\beta\left(u_0 u_1^* + u_0^* u_1\right) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2\beta\left(u_0 u_2^* + u_1 u_1^* + u_0^* u_2\right)\right)\Big\}, \\ &(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots) = 0.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Первый порядок в этом уравнении дает

$$(\omega^2 - k^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\Theta^2} + \omega_p^2\left(1 - \beta u_0 u_0^*\right) u_0 = 0, \tag{2.63}$$

что приводит к решению

$$u_0 = Ae^{i\nu\Theta}, \quad \nu = \frac{\omega_p^2(1 - \beta A^2)}{\omega^2 - k^2}$$

с наименьшим периодом 2π, если только $\nu = 1$, или

$$\omega^2 - k^2 = \omega_p^2(1 - \beta A^2). \tag{2.64}$$

Если бы мы позволили периоду быть произвольной функцией x и t, то при вычислении $\partial u_0/\partial x$ появились бы члены вида $i\nu_x\Theta$, возникающие в следующем порядке, и оказалось бы невозможным найти u_1 с тем же периодом, что и u_0. Это аналогично первому шагу метода ВКБ, в котором очень важно выбрать правильный масштаб быстрого времени.

Уравнение (2.64) — это дисперсионное соотношение, определяющее A как функцию от ω и k. Однако в этом месте мы не будем прямолинейны, а последуем по пути, предложенному Абловицем и Бенни [62], рассматривая (2.64) как главный порядок в разложении по амплитуде:

$$\omega^2 - k^2 - \omega_p(1 - \beta A^2) = \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \ldots. \tag{2.65}$$

Теперь (2.62) принимает вид

$$\left\{\omega_p^2(1-\beta A^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+1\right)-i\varepsilon\left(2\omega\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\Theta}+\omega_t\frac{\partial}{\partial\Theta}+\right.\right.$$
$$\left.+2k\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\Theta}+k_x\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)+(\varepsilon g^{(1)}+\varepsilon^2 g^{(2)})\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-$$
$$\left.-\varepsilon\omega_p^2\beta(u_0u_1^*+u_0^*u_1)-\varepsilon^2\omega_p^2\beta(u_0u_2^*+u_0^*u_2+u_1u_1^*)\right\}\times$$
$$\times(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\ldots)=0.$$

Члены первого порядка дают $u_0=Ae^{i\Theta}$. Следующий порядок дает

$$\omega_p^2(1-\beta A^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+1\right)-\omega_p^2\beta(u_0u_1^*+u_0^*u_1)\,u_0=$$
$$=\frac{ie^{i\Theta}}{A}((\omega A^2)_t+(kA^2)_x)+g^{(1)}Ae^{i\Theta},$$

откуда мы получаем $g^{(1)}=0$, $u_1=0$ и

$$(\omega A^2)_t+(kA^2)_x=0. \tag{2.66}$$

Условие (2.66) необходимо, поскольку иначе $u_1\sim\Theta e^{i\Theta}$; удобно выбрать $g^{(1)}=0$, после чего как следствие получаем $u_1=0$. В порядке ε^2

$$\omega_p^2(1-\beta A^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+1\right)u_2-\omega_p^2\beta(u_0u_2^*+u_0^*u_2)\,u_0=$$
$$=e^{i\Theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A+e^{i\Theta}g^{(2)}A. \tag{2.67}$$

И здесь нам потребуется некоторое искусство. Заметим, что любое решение u_2 вида $e^{i\Theta}$ уничтожает правый член в левой части (2.67). Поскольку правая часть равна произведению вещественной величины на $e^{i\Theta}$ (A и $(u_0u_2^*+u_0^*u_2)$ вещественны), то (2.67) разрешимо. Например, если правая часть равна $-Ge^{i\Theta}$, то $u_2=-(G/2)\,\omega_p^2A\beta e^{i\Theta}$ и 2π-периодична. Отметим, однако, что при $A\to 0$ асимптотический ряд (2.61) плохо упорядочен. Поэтому этот предел не является равномерным. Иначе говоря, ядро оператора, действующего на u_2, одномерно и натянуто на $e^{i\Theta}$, когда A не мало, и оно двумерно и натянуто на $1e^{i\Theta}$, $ie^{i\Theta}$, когда A мало. (Если учитывать комплексно сопряженные поля $e^{-i\Theta}$, оно четырехмерно.)

Для того чтобы выполнить предельный переход, мы будем обращаться с $1e^{i\Theta}$-членами как с секулярными и выберем $g^{(2)}$ так, чтобы обратить правую часть (2.67) в нуль. Тогда

$$\omega^2-k^2-\omega_p^2(1-\beta A^2)=\frac{\varepsilon^2}{A}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)A. \tag{2.68}$$

Эволюция ω, k и A определяется из (2.59), (2.66) и (2.68), и в этом простом случае решение $u = Ae^{i\Theta}$ является точным. Правая часть (2.68) важна только если $A = O(\varepsilon)$ и $\omega^2 - k^2 - \omega_p^2 = O(\varepsilon^2)$, при этом (2.68) будет дифференциальным уравнением на A.

Повторю: член $(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2)A$ в (2.67) не является секулярным при конечных A. Однако если иметь в виду предельный переход к малым A, полезно обращаться с ним как с секулярным и включить его в дисперсное соотношение.

Предельный переход к почти монохроматической волне малой амплитуды A осуществляется следующим образом. Пусть $A \to \varepsilon A$; выберем $\omega \simeq \omega_0$, $k \simeq k_0$, $\omega_0^2 - k_0^2 = \omega_p^2$ и запишем

$$\Theta = k_0 X - \omega_0 T + \varphi(x, t). \tag{2.69}$$

Теперь $\omega = \omega_0 - \varepsilon\varphi_t$, $k = k_0 + \varepsilon\varphi_x$, и уравнение сохранения волн имеет вид

$$((\omega_0 - \varepsilon\varphi_t) A^2)_t + ((k_0 + \varepsilon\varphi_x) A^2)_x = 0, \tag{2.70}$$

а дисперсионное соотношение

$$\varepsilon(-2\omega_0\varphi_t - 2k_0\varphi_x) + \varepsilon^2(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + \beta\omega_p^2\varepsilon^2 A^2 = \frac{\varepsilon^2}{A}(A_{tt} - A_{xx}). \tag{2.71}$$

Глядя на члены первого порядка в (2.70) и порядка ε в (2.71), убеждаемся, что A^2 и φ зависят от x и t только в комбинации $\xi = x - \omega_0' t$, $\omega_0' = k_0/\omega_0$. Пусть $\tau = \varepsilon t$, и тогда (2.71) и (2.70) превращаются соответственно в

$$\varphi_\tau = \frac{1 - \omega_0'^2}{2\omega_0}\left(\frac{A_{\xi\xi}}{A} - \varphi_\xi^2\right) + \frac{\beta\omega_p^2 A^2}{2\omega_0} \tag{2.72}$$

и

$$A_\tau = \frac{\omega_0'^2 - 1}{2\omega_0}(2A_\xi\varphi_\xi + A\varphi_{\xi\xi}) \tag{2.73}$$

или, если $a = Ae^{i\varphi}$,

$$a_\tau = \frac{i\omega_0''}{2} a_{\xi\xi} + i\beta\frac{\omega_p^2}{2\omega_0} a^2 a^*, \quad \omega_0'' = \frac{1 - \omega_0'^2}{\omega_0}. \tag{2.74}$$

В упражнении 2c(2)(i) мы видели, что (2.74) — это НУШ для (2.60). Итак, если учесть член, которым пренебрегают в теории Уизема, а именно $(\varepsilon^2/A)(A_{tt} - A_{xx})$, то мы вновь получим НУШ. Этот член соответствует первому члену в правой части (2.72).

Я хочу еще показать, что происходит, когда $f(\Theta)$ нельзя найти в явном виде. Я использую модель, которой первоначаль-

но пользовался Уизем,

$$u_{TT} - u_{XX} + F(u) = 0, \tag{2.75}$$

где F берется нечетной по u и при малых u равной $u - \gamma u^3$. Читатель может вывести НУШ в качестве упражнения. Если

$$u \simeq \varepsilon a\left(x - \omega_0' t,\ \varepsilon t\right) e^{i(k_0 X - \omega_0 T)} + (^*) + \ldots$$

с $\omega_0^2 - k_0^2 = 1$, $\omega_0' = k_0/\omega_0$ (групповая скорость), то

$$a_\tau = \frac{i\omega_0''}{2} a_{\xi\xi} + \frac{3i\gamma}{2\omega_0} a^2 a^*, \tag{2.76}$$

где $\tau = \varepsilon t - \varepsilon^2 T$ и $\xi = x - \omega_0' t = \varepsilon\left(X - \omega_0' T\right)$.

Далее, применяя теорию Уизема к (2.75), введем

$$\Theta = \frac{\theta(x, t)}{\varepsilon}, \quad x = \varepsilon X, \quad t = \varepsilon T, \tag{2.77a}$$

$$\omega^2 - k^2 = g + \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \ldots, \tag{2.77b}$$

$$u = f + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \ldots \tag{2.77c}$$

и получим

$$g \frac{d^2 f}{d\Theta^2} + F(f) = 0, \tag{2.78a}$$

$$g \frac{d^2 u^{(1)}}{d\Theta^2} + F'(f)\, u^{(1)} = R_1, \tag{2.78b}$$

$$g \frac{d^2 u^{(2)}}{d\Theta^2} + F'(f)\, u^{(2)} = R_2, \tag{2.78c}$$

где

$$R_1 = -g^{(1)} \frac{\partial^2 f}{\partial\Theta^2} + 2\omega \frac{\partial^2 f}{\partial\Theta\, \partial t} + 2k \frac{\partial^2 f}{\partial\Theta\, \partial x} + (\omega_t + k_x) \frac{\partial f}{\partial\Theta}$$

и

$$R_2 = -g^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial\Theta^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\Theta\, \partial t} + 2k \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\Theta\, \partial x} + (\omega_t + k_x) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\Theta} - \\ - \frac{F''(f)}{2} u^{(1)2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f.$$

Умножая (2.78a) на $f_\Theta (df/d\Theta)$ и интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2} g f_\Theta^2 + V(f) = E, \quad V' = F, \tag{2.79}$$

откуда

$$\sqrt{\frac{g}{2}} \int_{f_-}^{f} \frac{df}{\sqrt{E - V(f)}} = \Theta, \quad V(f_-) = E. \tag{2.80}$$

Без потери общности примем f нечетным по Θ. Дисперсионное соотношение тогда примет вид

$$\sqrt{\frac{g}{2}} \int_{f_-}^{f_+} \frac{df}{\sqrt{E - V(f)}} = \pi, \qquad V(f_+) = E \tag{2.81}$$

и определяет E как функцию g или наоборот.

Следующей нашей задачей будет получение условий на R_1 и R_2, обеспечивающих 2π-периодичность $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ по Θ. Рассмотрим

$$g \frac{d^2 v}{d\Theta^2} + F'(f)\, v = R \tag{2.82}$$

и перепишем это в виде системы

$$\frac{dV}{d\Theta} = EV + \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}, \tag{2.83}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v \\ v_\Theta \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F\frac{1}{g} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

Матрица E 2π-периодична, и нам следует применить теорию Флоке. В частности, если U, вектор-строка, является решением уравнения

$$\frac{dU}{d\Theta} = -UE, \tag{2.85}$$

то для 2π-периодичности V необходимо (доказательство получается просто умножением (2.83) на строку U и последующим интегрированием)

$$\int_0^{2\pi} U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} d\Theta = 0. \tag{2.86}$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица решений уравнения $dV/d\Theta = EV$, тогда $\Phi(\Theta + 2\pi)$ — тоже фундаментальная матрица (она удовлетворяет уравнению), и существует не зависящая от Θ матрица $M = e^{2\pi R}$, называемая матрицей монодромии, такая что $\Phi(\Theta + 2\pi) = \Phi(\Theta) M$. Собственные значения M называются множителями Флоке. Если единица является двукратным собственным значением, то по крайней мере один из соответствующих собственных векторов дает 2π-периодическое решение однородной системы (2.83), а строки обратной матрицы $\Phi^{-1}(\Theta)$ удовлетворяют (2.85).

В нашем случае $\Phi(\Theta)$ можно построить явно. Заметим, что $v_1 = f_\Theta$ и $v_2 = f_g + \Theta f_\Theta/2g$ (индексы обозначают частные производные) удовлетворяют однородному варианту (2.82). Здесь

$$\Phi(\Theta) = \begin{pmatrix} f_\Theta & f_g + \frac{1}{2g}\Theta f_\Theta \\ f_{\Theta\Theta} & f_{g\Theta} + \frac{1}{2g} f_\Theta + \frac{1}{2g}\Theta f_{\Theta\Theta} \end{pmatrix},$$

$$\det \Phi(\Theta) = \frac{1}{g} E_g \text{ (продифференцируйте (2.79))}$$

и

$$\Phi^{-1}(\Theta) = \frac{g}{E_g}\begin{pmatrix} f_{g\Theta} + \frac{1}{2g} f_\Theta + \frac{1}{2g}\Theta f_{\Theta\Theta} & -f_g - \frac{1}{2g}\Theta f_\Theta \\ -f_{\Theta\Theta} & f_\Theta \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица M имеет единицу двукратным собственным значением и равна

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi}{g} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимое условие (2.86) 2π-периодичности V таково:

$$\int_0^{2\pi} f_\Theta \cdot R\, d\Theta = 0. \tag{2.87}$$

Теперь решим (2.83) вариацией постоянных:

$$v(\Theta) = \left(c_1 - \frac{1}{E_g}\int_0^\Theta \left(f_g + \frac{1}{2g}\Theta f_\Theta\right) \cdot R\, d\Theta\right) v_1(\Theta) + \\ + \left(c_2 + \frac{1}{E_g}\int_0^\Theta f_\Theta \cdot R\, d\Theta\right) v_2(\Theta). \tag{2.88}$$

Налагая условие 2π-периодичности $v(\Theta)$, получаем

$$c_2 = \frac{g}{\pi E_g}\int_0^{2\pi} \left(f_g + \frac{1}{2g}\Theta f_\Theta\right) R\, d\Theta. \tag{2.89}$$

Следовательно, при таком выборе c_2 асимптотический ряд (2.77c) остается хорошо упорядоченным (это означает, что отношения соседних членов остаются порядка ε при всех значениях параметров) и условие (2.87) является как необходимым,

так и достаточным. Применяя это к (2.78b), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega\int_0^{2\pi} f_\Theta^2\,d\Theta+\frac{\partial}{\partial x}k\int_0^{2\pi} f_\Theta^2\,d\Theta, \tag{2.90}$$

условие сохранения волнового действия, аналогичное (2.66). Поскольку $f(\Theta)$ нечетна, член с $g^{(1)}$ равен нулю.

Что происходит, когда параметр E в f становится малым? Несложное вычисление показывает, что в пределе малой амплитуды

$$f(\Theta)=A\sin\Theta+\frac{1}{32}\gamma A^3\sin 3\Theta+\ \ldots, \tag{2.91a}$$

$$g=1-\frac{3}{4}\gamma A^2+\ \ldots, \tag{2.91b}$$

$$E=\frac{1}{2}A^2+\ \ldots. \tag{2.91c}$$

Теперь обратимся к c_2 и, в частности, вычислим его величину в случае, когда в качестве R в R_2 взят член $-(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2)f$. Мы заметим, что $f_g+\Theta f_\Theta/2g\simeq A_g\sin\Theta$ порядка A^{-1}, поскольку $g_{A^2}=O(1)$. Так же и $E_g=E_{A^2}\cdot(A^2)_g=$ $=-\frac{2}{3}\gamma+\ \ldots$. Поэтому c_2 порядка $1/A$ и такого же порядка получающееся решение $u^{(2)}$. Это означает, что предельный переход к $A=O(\varepsilon)$ в (2.77c) не является равномерным.

Для того чтобы все-таки уловить как-нибудь поведение в этом случае, мы не будем использовать c_2 для условия 2π-периодичности $v(\Theta)$, а лучше используем $g^{(2)}$. Мы потребуем

$$\int\left(f_g+\frac{\Theta f_\Theta}{2g}\right)\left(-g^{(2)}f_{\Theta\Theta}-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f\right)d\Theta=0$$

(член $u^{(1)}$ не вносит вклада сравнимой величины) и получим, используя (2.91), что

$$g^{(2)}=+\frac{1}{A}(A_{tt}-A_{xx}). \tag{2.92}$$

Теперь дисперсионное соотношение

$$\omega^2-k^2=1-\frac{3}{4}\gamma A^2+\frac{\varepsilon^2}{A}(A_{tt}-A_{xx})+\ \ldots \tag{2.93}$$

имеет в точности тот же вид, что и в (2.68), и предельный переход к НУШ получается из (2.90) и (2.93) точно так же, как и раньше.

Хотя теория Уизема не содержит всего НУШ, она содержит достаточно для проявления неустойчивости Бенджамина —

Фейра. При A^2, определяемом дисперсионным соотношением, уравнения (2.59) и (2.66) представляют собой систему первого порядка с k и ω в качестве неизвестных. Если эта система эллиптична, задача Коши для нее некорректна в том смысле, что любое возмущение растет экспоненциально и быстрее всего растут самые короткие волны. Если мы запишем Θ как θ/ε и разрешим (2.59), полагая $k=\theta_x$, $\omega=-\theta_t$, то из (2.66) получим $(-\theta_t A^2)_t+(\theta_x A^2)_x=0$, где A^2 зависит от x и t посредством комбинации $l=\theta_t^2-\theta_x^2$. Имеем

$$\theta_{tt}\left(-A^2-2\theta_t^2\frac{dA^2}{dl}\right)+2\theta_{xt}\theta_x\theta_t\frac{dA^2}{dl}+\theta_{xx}\left(A^2-2\theta_x^2\frac{dA^2}{dl}\right)=0. \tag{2.94}$$

Система эллиптична и неустойчива, если

$$A^2\left(A^2+2l\frac{dA^2}{dl}\right)<0, \tag{2.95}$$

где

$$A^2=-\frac{1}{\beta}\left(\frac{\omega^2-k^2}{\omega_p^2}-1\right).$$

Для малых A это осуществляется, когда $\beta>0$ или $\beta\omega_0''>0$, поскольку $\omega_0''=(\omega_0^2-k_0^2)/\omega_0^3$ всегда положительно. Поскольку теория Уизема не включает члена $A_{\xi\xi\xi\xi}$, входящего в (2.56), она не способна указать наиболее быстро растущие побочные гармоники несущей волны, а также не предсказывает конечную область неустойчивых волновых чисел. С другой стороны, однако, ее сильная сторона в том, что она не ограничивается малыми амплитудами.

Мы закончим этот раздел вопросом о физических следствиях нелинейного дисперсионного соотношения. В частности, нас будет интересовать, могут ли нелинейные волны туннелировать. Представим себе, что мы создали цуг волн с амплитудой A и частотой ω в среде, в которой ω_p медленно меняется. Тогда $k(x)$ определяется из

$$k^2=\omega^2-\omega_p^2(1-\beta A^2).$$

Предположим вначале, что $\omega^2>\omega_p^2$, но что ω_p^2 растет (маятники в модели Скотта становятся короче). Линейные волны не могут распространяться дальше точки, в которой $\omega_p=\omega$. Однако если $\beta>0$, то точка, в которой $\omega_p^2(1-A^2)=\omega^2$, расположена дальше, чем каустика линейных волн. Означает ли это, что нелинейные цуги волн могут без потерь туннелировать через барьеры, непрозрачные для линейных волн? Ответ одновременно и положительный, и отрицательный. Он отрицателен, поскольку

только что мы показали, по крайней мере в слабо нелинейном пределе, что монохроматический нелинейный цуг волн неустойчив, если $\beta > 0$. Однако он распадается на импульсы — солитоны НУШ, которые действительно могут туннелировать без потерь. Дальнейшие детали читатель может найти в [52].

При больших амплитудах (2.95) принимает вид $3A^2 - 2/\beta < 0$. Поэтому, хотя $\beta > 0$, для волн достаточно большой амплитуды устойчивость восстанавливается.

Остается много интересных вопросов в случае гиперболичности уравнений Уизема, но в то же время уже сделано несколько прекрасных работ. Смотрите книгу Уизема [55], прекрасную и изящную статью Флашки, Фореста и Маклохлина [65] (они обнаружили, что инварианты Римана — это просто спектр периодической задачи КдФ) и интригующую работу Лакса и Ливермора [66]. Принципиальными среди этих вопросов являются вопросы поведения этих систем на больших временах. Возникают ли разрывы? Если возникают, то что они означают? Как включать новые фазы? (В работе Лакса и Ливермора предполагается, что плоскость (x, t) разбивается на области, в каждой из которых осуществляется одно-, двух- или многофазный поток.) Какие еще могут быть типы поведения на больших временах? Мой аспирант Кришна [67] численно проинтегрировал уравнения Уизема для широкого класса начальных условий, при которых огибающая быстрых колебаний стремится к нулю на бесконечности, и в этих условиях применим метод обратной задачи рассеяния. Он получил, что в случае однофазного решения характеристики, принадлежащие двум или трем семействам, превращаются в параллельные прямые по мере увеличения времени. При этом уравнения становятся не гиперболическими, а скорее параболическими. Линии в плоскости (x, t), вдоль которых образуются параллельные характеристики, соответствуют скоростям уединенных волн, получающихся при решении начальной задачи.

Упражнение 2е

Полагая $A \to 2\varepsilon A$, решите подправленные уравнения Уизема

$$\omega^2 - k^2 = 1 - 3\gamma A^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2\frac{A_{tt} - A_{xx}}{A},$$

$$k_t + \omega_x = 0, \quad (\omega A^2)_t + (kA^2)_x = 0$$

итерациями, полагая $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$, $k = k_0 + \varepsilon K$. Покажите, что ω_0, k_0 должны быть константами (в противном случае образуются скачки), $\omega_0^2 = k_0^2 + 1$, $\omega_1 = k_0K/\omega_0$ и как A^2, так и K являются функциями от $\xi = x - (k_0/\omega_0)t$ и $\tau = \varepsilon t$. Вводя $K = \varphi_\xi$,

получаем

$$\varphi_\tau = \frac{\omega_0''}{2}\left(-K^2 + \frac{A_{\xi\xi}}{A}\right) + \frac{3\gamma}{2\omega_0} A^2,$$
$$(A^2)_\tau + \omega_0''(A^2)_\xi = 0,$$

что вместе эквивалентно НУШ для $a = Ae^{i\varphi}$.

2f. Другие канонические уравнения. Есть много других важных в физике уравнений, проявляющих солитонные свойства. Список ссылок содержит много обзорных статей, специальных изданий, труды конференций, и читатель при желании может заняться поисками интересующего его уравнения. Тем не менее есть еще два уравнения, заслуживающие особого упоминания из-за их распространенности.

Одно из них — это уравнение sin-Гордон. Оно встречается в нелинейной оптике (в модели распространения импульсов в резонансной среде), в физике конденсированных сред в магнетизме, где оно моделирует волны зарядовой плотности в периодическом потенциале подложки и спиновые волны в жидком гелии-3. В сверхпроводимости оно описывает динамику джозефсоновских контактов, в статистической механике оно возникает при описании критической области в моделях типа модели Изинга. Причиной такой вездесущности является то, что многие системы оказываются эквивалентны динамической системе с лагранжианом, состоящим из кинетической энергии $\frac{1}{2}\int \varphi_t^2\,dx$ и потенциальной, состоящей из двух частей — упругой энергии, которую в непрерывном пределе можно описать членом

$$\frac{1}{2}c^2\int \varphi_x^2\,dx,$$

и потенциала, создаваемого некоей наложенной решеткой. Часто наилучшим приближением для этого потенциала является

$$\omega_p^2\int (1-\cos\varphi)\,dx.$$

Нетрудно видеть, что из этого лагранжиана получается уравнение Эйлера вида

$$\varphi_{tt} - c^2\varphi_{xx} + \omega_p^2 \sin\varphi = 0. \tag{2.96}$$

Обсуждение и перечень задач, в которых появляется уравнение (2.96), можно найти в [68], [69], [19], [71].

Второе из упомянутых уравнений — это не одно уравнение, а система, описывающая резонансное взаимодействие трех волн.

Эту систему можно записать в виде [53]

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} + \mathbf{c}_j \cdot \nabla A_j = \theta_{jkl} A_k^* A_l^*, \tag{2.97}$$

где (j, k, l) — циклические перестановки $(1, 2, 3)$, $A_j(x, t)$ — медленно меняющаяся огибающая волнового пакета с основной гармоникой $e^{i(k_j x - \omega_j t)}$, $\omega_j = \omega(k_j)$, $\mathbf{c}_j$ — линейная групповая скорость $\nabla\omega_j$. Левая часть получается из тех простых соображений, что в порядке ε (здесь ε — спектральная ширина пакета с основным волновым числом k) огибающая $a(X, T_1)$, входящая в НУШ, удовлетворяет $a_{T_1} + \omega' a_X = 0$. Правая часть возникает из квадратично нелинейных членов, которые в слабонелинейной системе соответствуют наиболее сильному взаимодействию с резонансными соотношениями

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3) = 0. \tag{2.98}$$

В терминах дуализма волн и частиц (2.98) описывает сохранение импульса и энергии в трехчастичных столкновениях.

Структура (2.97) такова, что нас не должна удивлять та важная роль, которую эта система играет в тех областях физики, в которых доминируют волновые процессы. По существу она описывает перераспределение энергии по спектру вследствие нелинейных резонансных взаимодействий. Она появляется в физике плазмы, в волнах в атмосфере и океане. (Иногда линейное дисперсионное соотношение $\omega(\mathbf{k})$ не допускает (2.98) ни для каких триад волновых векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$. В этих случаях перераспределение энергии осуществляется в следующем порядке за счет четырехчастичных процессов, как, например, для поверхностных гравитационных волн.)

Наилучшим подробным обзором по (2.97) и ее свойствам интегрируемости (при определенном выборе θ_{jkl} она точно решаема) является статья Каупа, Римана и Берса [72]. (По поводу ее решения см. [74].)

ГЛАВА 3 СЕМЕЙСТВА СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

3a. Введение. В этой главе мы коснемся четырех тем. В разделах 3b, c используются традиционные и несколько скучные методы идентификации семейств нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных. В разделах 3d, e, f мы довольно глубоко обсудим метод обратной задачи рассеяния, используемый при решении начальной задачи на интервале $-\infty < x < \infty$ для членов КдФ-иерархии. В разд. 3g мы займемся методами возмущений и весьма подробно разберем задачу о распространении уединенной волны по каналу уменьшающейся глубины. У этой задачи много нетривиальных свойств, и, как оказалось, справиться с ней довольно трудно. Наконец, в разд. 3h мы обсудим методы построения многосолитонных, рациональных и многофазных периодических решений солитонных уравнений.

3b. КдФ-иерархия. Первая цель этого раздела — продемонстрировать, как получаются семейства солитонных уравнений. Вторая — показать, в каком смысле каждый из потоков гамильтонов. Третья — ввести некоторые важные асимптотические разложения, коэффициенты которых — интегралы движения, пропорциональные гамильтонианам.

Для вывода семейств уравнений мы используем следующий алгоритм:

(i) выберем задачу на собственные значения (по x), коэффициенты которой зависят от другой переменной t;

(ii) выберем общий вид изменения собственных функций при эволюции коэффициентов по t;

(iii) запишем условие разрешимости этих двух уравнений и определим, какие эволюционные уравнения совместимы с этим условием.

Мы проиллюстрируем всю процедуру на семействе уравнения КдФ. Как мы уже видели в гл. 1, соответствующая задача на собственные значения — это уравнение Шрёдингера

$$v_{xx} + (\lambda + q(x, t))v = 0, \tag{3.1}$$

которое может быть записано также в виде системы первого порядка:

$$\begin{aligned} &v_{1x} + i\zeta v_1 = q(x, t)\, v_2, \\ &v_{2x} - i\zeta v_2 = -v_1, \quad v_2 = v, \quad \lambda = \zeta^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Запишем зависимость v от t в виде

$$v_t = A(\lambda;\ q,\ q_x,\ \ldots)\, v - B(\lambda;\ q,\ q_x,\ \ldots)\, v_x. \tag{3.3}$$

Зависимость от высших производных v учитывается посредством зависимости A и B от λ. Дифференцируя перекрестно (3.1) и (3.3), вычитая и приравнивая нулю коэффициенты при v и v_x, получаем

$$A = \frac{1}{2} B_x + \text{const}, \tag{3.4}$$

$$q_t = -\frac{1}{2} MB - 2\lambda NB, \tag{3.5}$$

где

$$M = D^3 + 4qD + 2q_x, \quad N = D = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Теперь мы переходим ко второй половине части (iii) алгоритма. Вспомним, что наша цель — найти такие функции $B(\lambda;\ q,\ q_x,\ q_{xx},\ \ldots)$, что условие разрешимости (3.1) и (3.3), а именно (3.5), представляет собой эволюционное уравнение вида

$$q_t = q_t(q,\ q_x,\ q_{xx},\ \ldots).$$

Достаточно простым классом таких функций B является класс полиномов

$$B = B_0\lambda^n + \ldots + B_n, \tag{3.7}$$

поскольку из (3.5) $B_{0x} = 0$, и посредством сравнения соседних степеней λ каждое B_{k+1} можно выразить явно через его ближайшего левого соседа B_k. Без потери общности мы можем принять $B_0 = -1$ и найти

$$NB_{k+1} = -\frac{1}{4} MB_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.8}$$

Тогда при λ^0 получаем

$$q_t = -\frac{1}{2} MB_n = 2NB_{n+1}, \tag{3.9}$$

где мы определили B_{n+1} равенством

$$NB_{n+1} = -\frac{1}{4} MB_n. \tag{3.10}$$

Мы можем записать

$$M = -4NL, \tag{3.11}$$

где

$$L = -\frac{1}{4}D^2 - q + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} dx q_x \tag{3.12}$$

— нелокальный оператор.

Проделаем некоторые вычисления. Заметим, что $B_{n+1} = LB_n + \text{const}$. Про константу пока забудем. Тогда

$$\begin{aligned} B_0 &= -1, \\ B_1 &= LB_0 = \frac{1}{2}q, \\ B_2 &= \frac{1}{2}Lq = -\frac{1}{8}(q_{xx} + 3q^2), \\ B_3 &= \frac{1}{2}L^2 q = \frac{1}{32}(q_{xxxx} + 5q_x^2 + 10qq_{xx} + 10q^3), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где мы предположили, что q вместе со всеми производными обращается в нуль в точке $x = \infty$. В результате получаем уравнения

$$q_{t_1} = q_x, \tag{3.14}$$

$$q_{t_3} = -\frac{1}{4}(q_{xx} + 3q^3)_x, \tag{3.15}$$

$$q_{t_5} = \frac{1}{16}(q_{xxxx} + 5q_x^2 + 10qq_{xx} + 10q^3)_x, \tag{3.16}$$

где мы приписали $(2n+1)$-му потоку с линейным дисперсионным соотношением $\omega(k) = -2(k/2)^{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, временну́ю координату t_{2n+1}. Константы в B_k с $k < n$ просто добавляют к n-му потоку члены, пропорциональные k-м потокам. Полагая все эти константы нулями, мы получим то, что называется «чистым» семейством. Константа же в (3.4) имеет совершенно другую природу. Выбирая ее, мы можем надлежащим образом нормировать собственную функцию $v(x, t; \zeta)$. Мы сделаем это в разд. 3с.

Каждый поток имеет гамильтонову структуру. Сейчас я перехожу к наиболее важному результату, а именно к гамильтоновости каждого из потоков семейства. В разд. 3f будет доказано, что справедлива формула

$$2B_{n+1} = L^n q = \frac{\delta H_{2n+1}}{\delta q}, \tag{3.17}$$

где вариационная производная по q определяется как

$$\sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{\partial\tilde{H}(q^{(n)})}{\partial q^{(n)}},$$

то есть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H[q+\varepsilon\eta]-H[q]}{\varepsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta H}{\delta q}\eta\,dx, \tag{3.18}$$

где

$$\begin{gathered} q^{(n)}=D^{n}q, \quad D=d/dx, \\ H[q]=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}(q,\ q_x,\ q_{xx},\ \ldots)\,dx. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Например,

$$H_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}q^2\,dx, \quad H_3=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}(q_x^2-2q^3)\,dx,$$

и их вариационные производные суть q и $-\frac{1}{4}(q_{xx}+3q^2)$ соответственно. Таким образом, поток с $n=0$, соответствующий просто переносу начального профиля, может быть записан в виде

$$q_{t_1}=q_x=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_1}{\delta q}; \tag{3.20}$$

поток КдФ, $n=1$, можно записать как

$$q_{t_3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_3}{\delta q}, \tag{3.21}$$

а $(2n+1)$-й поток семейства — как

$$q_{t_{2n+1}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta q}=N\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta q}. \tag{3.22}$$

Или, используя (3.11), получим

$$q_{t_{2n+1}}=M\left(-\frac{1}{4}\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta q}\right), \tag{3.23}$$

поскольку $\delta H_{2n+1}/\delta q=2B_{n+1}=2LB_n$, а $2NLB_n=-(1/2)MB_n=$ $=-(1/4)M(\delta H_{2n-1}/\delta q)$. Отметим, что каждый поток имеет вид

$$q_t=J\nabla H, \tag{3.24}$$

где J — кососимметричный оператор, ∇ — градиент, а H — функционал Гамильтона.

Замечательно, что каждый из функционалов H_{2n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, порождающих соответствующий поток, является интегралом движения для всех остальных потоков, и эти интегралы коммутируют друг с другом относительно естественной скобки Пуассона (Гарднер [13]):

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta G}{\delta q} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta q} dx. \tag{3.25}$$

Естественность этой скобки состоит в том, что если мы рассматриваем развитие q под действием потока с временем t_{2k+1}, то скорость изменения $I[q]$ функционала от q,

$$I[q] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(q, q_x, q_{xx}, \ldots) dx,$$

определяется из равенства

$$\frac{dI}{dt_{2k+1}} = \{H_{2k+1}, I\}. \tag{3.26}$$

Все это означает, что q можно рассматривать как функцию бесконечного числа независимых переменных x, t_{2k+1}, $k = 0, 1, \ldots$, и $(\partial/\partial t_{2j+1})(\partial q/\partial t_{2k+1}) = (\partial/\partial t_{2k+1})(\partial q/\partial t_{2j+1})$. Представление о том, что решения солитонных уравнений — это функции бесконечного числа переменных, очень важно. Вследствие свойства коммутативности можно начать с $q(x, 0)$, сдвинуться на t_{2k+1} в силу $(\text{КдФ})_{2k+1}$, а потом на t_{2j+1} в силу $(\text{КдФ})_{2j+1}$, и результат будет такой же, если осуществлять сдвиги в обратном порядке.

Заметьте, что каждый поток имеет две гамильтоновы структуры. Выражение для $q_{t_{2n+1}}$ можно получить, используя в качестве функционала Гамильтона H_{2n+1} и N в качестве оператора Пуассона, а можно — используя H_{2n-1} и M. Такая дуальная структура существует во всех интегрируемых моделях, и она позволяет рекуррентным образом идентифицировать все интегрируемые потоки в семействе точно так, как мы это уже делали, используя (3.10). Если даны две независимые симплектические структуры M, N и гамильтониан H_1, генерирующий поток, определяемый NH_1, то следующий поток возникает из $-\frac{1}{4}MH_1$ (КдФ). Мы записываем это в виде NH_3, затем строим следующий поток $-\frac{1}{4}MH_3$ и т. д.

Теперь я покажу, как получаются эти функционалы, но отложу до разд. 3f доказательство того, что они интегралы дви-

жения. Замечу только, что если поток рассматривается при периодических граничных условиях по x, то интеграл в (3.25) берется по периоду.

Асимптотическое разложение для $v(x, \zeta)$ *при* $\zeta \to \infty$. Алгоритм построения интегралов движения состоит в следующем. Положим для собственной функции $v(x, t; \zeta)$ задачи (3.1) $v = e^{i\zeta x + \Phi}$, где

$$-2i\zeta\Phi_x = q + \Phi_{xx} + \Phi_x^2, \tag{3.27}$$

и будем искать ее асимптотическое разложение при $\zeta \to \infty$. Итерациями получаем для Φ_x:

$$\Phi_x = \sum_1^\infty \frac{1}{(2i\zeta)^n} R_n,$$

откуда получаем $R_1 = -q$ и рекуррентное соотношение

$$R_{n+1} = -R_{nx} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k R_{n-k}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.28}$$

Первые пять членов имеют вид $R_1 = -q$, $R_2 = q_x$, $R_3 = -q_{xx} - q^2$, $R_4 = q_{xxx} + 4qq_x$, $R_5 = -(q_{xx} + 3q^2)_{xx} + q_x^2 - 2q^3$. В частности, по причинам, указанным в разделах 3e, f, нас будут интересовать величины

$$ve^{-i\zeta x} \sim 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_\infty^x q(y)\, dy \tag{3.29a}$$

и

$$\lim_{x \to -\infty} \left(v_2 - \frac{1}{2i\zeta} v_1\right) e^{-i\zeta x} \sim -\sum_1^\infty \frac{1}{(2i\zeta)^n} \int_{-\infty}^\infty R_n\, dx. \tag{3.29b}$$

Первая позволяет получить $q(x)$ из $v(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$, а вторая оказывается интегралом движения (движения по всем временам t_{2n+1}). Вспомним, что $v_2 = v$, $v_1 = -v_x + i\zeta v$ (см. (3.2)). В качестве упражнения я попрошу вас связать этот результат с тем, который получается из преобразования Миуры — Гарднера (разд. 1d). Мы покажем, что

$$H_{2n+1} = \frac{4i}{(2i)^{2n+3}} \int_{-\infty}^\infty R_{2n+3}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.30}$$

Отметим, что R_1 *не* является членом этого семейства и что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{2n}\,dx = 0$, $n = 1, \ldots$. Действительно, функционал $-\frac{1}{2}H_{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q\,dx$ имеет нулевую скобку Пуассона с любым другим функционалом (положите $F = H_{-1}$ в (3.25)). Такой функционал называется функционалом Казимира.

Упражнения 3b

1. Пользуясь определением (3.25), покажите, что эта скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$.

2. Вспомните, что в (1.18) мы определяли $w + 3/\varepsilon^2 = (6i/\varepsilon)v_x/v$ и получали $v_{xx} + (q + 1/4\varepsilon^2)v = 0$. Отождествите ζ с $-1/2\varepsilon$ и покажите, что $w = -12i\zeta((v_x/v) - i\zeta) = -12i\zeta\Phi_x$. Поэтому *сохраняющиеся плотности* уравнения КдФ, введенные в гл. 1, имеют вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_n\,dx$ и пропорциональны гамильтонианам. Другие члены иерархии КдФ приводит нас к тем же сохраняющимся величинам.

3. На первый взгляд это упражнение может показаться бессмысленным. Но поверьте мне на слово, смысл есть. Мы вернемся к используемым в нем идеям в гл. 4. Положите

$$q(x, t_3, \ldots) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau(x, t_3, t_5, \ldots)$$

и покажите, что с точностью до $O(1/\zeta^5)$

$$e^{\Phi} = \exp\left(\ln\tau\left(x - \frac{1}{i\zeta}, t_3 - \frac{1}{3i\zeta^3}, t_5 - \frac{1}{3i\zeta^5}, \ldots\right) - \right.$$
$$\left. - \ln\tau(x, t_3, t_5, \ldots)\right)$$

и что асимптотически

$$v(x, \mathbf{t}) \sim e^{i\zeta x + i\zeta^3 t_3 + i\zeta^5 t_5}\,\frac{\tau(x - 1/i\zeta, t_3 - 1/3\zeta^3, \ldots)}{\tau(x, t_3, t_5, \ldots)}.$$

Указание: нужно записать

$$\int\limits_{-\infty}^{x} R_3\,dx \text{ как } -\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{x}(q_{xx} + 3q^2) - \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{2}{3}q_{xx}$$

и воспользоваться тем, что

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} q_{t_3} = 2\frac{\partial}{\partial t_3}\ln\tau.$$

4. Покажите, что из (3.1), (3.3) с $A=\frac{1}{2}B_x$, $B=-\lambda+\frac{1}{2}q$ получается

$$v_t = -v_{xxx} - \frac{3}{2}qv_x - \frac{3}{4}q_x v.$$

5. Произведите следующие формальные выкладки. Пусть

$$L = D + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \ldots,$$

где $D=\partial/\partial x$ и D^{-1} — формальный интегральный оператор $\int^x dx$. Определим $B_n=(L^n)_+$, что обозначает дифференциальную часть L^n. Например, $(L)_+=D$, $(L^2)_+=D^2+2a_1$, $(L^3)_+=D^3+3a_1D+3Da_1+3a_2$. Рассмотрим иерархию уравнений

$$v_{x_n} = B_n v, \qquad n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots.$$

Условие их разрешимости есть

$$(B_n)_{x_m} - (B_m)_{x_n} + [B_n,\ B_m] = 0. \tag{A}$$

Случай (i). Предположим, что коэффициенты a_1, a_2 не зависят от x_2, и в таком случае можно положить $v\to e^{\lambda x_2}\cdot v$ и заменить $v_{x_2}=B_2v$ на $\lambda v=B_2v$. Покажите, что тогда (A) дает $a_2=-(1/2)a_{1x}$ и

$$(2a_1)_{x_3} - \frac{3}{2}(2a_1)(2a_1)_x - \frac{1}{4}(2a_1)_{xxx} = 0.$$

Заметьте, что если мы обозначим $x_3=-t$, то $v_{x_3}=B_3v$ в точности является формой уравнения $v_t=Bv$ в последнем упражнении.

Случай (ii). Пусть a_1, a_2 не зависят от x_3. Тогда

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_{1x} + \frac{1}{2}\int^x a_{1x_2} + C, \quad -\frac{3}{2}a_{1x_1x_2} - \frac{1}{2}a_{1xxxx} - 6(a_1a_{1x})_x = 0.$$

Положим $a_1=\frac{1}{2}(q-c^2/2)$ и придем к уравнению Буссинеска (2.26)

$$q_{x_2x_2} - c^2 q_{xx} = -\frac{1}{3}q_{xxxx} - 2(qq_x)_x.$$

Случай (iii). Наконец, пусть a_1, a_2 зависят от x, x_2 и x_3. Теперь вы должны получить

$$2a_{1x_3} - \frac{1}{2} a_{1xxx} - 6(a_1 a_{1x})_x - \frac{3}{2} a_{1x_2x_2} = 0,$$

что после надлежащих преобразований превращается в уравнение КП (2.27).

Замечание 1. Система $v_{x_n} = B_n v$, $n = 2, 3, \ldots$ порождает иерархию уравнений КП. Интересующийся читатель может найти обсуждение алгебраической структуры τ-функции этого семейства в [39].

Замечание 2. Для случая КдФ (i) начальная краевая задача решается в основном исходя из задачи на собственные значения $\lambda v = B_2 v$, и уравнение $v_{x_3} = B_3 v$ используется для определения зависимости данных рассеяния от x_3. В случае уравнения Буссинеска (ii) задача на собственные значения $\lambda v = B_3 v$ имеет третий порядок. Эволюция данных рассеяния этой задачи по x_2 находится из $v_{x_2} = B_2 v$. В случае (iii) все оказывается совсем не так просто. В этом случае вообще нет задачи на собственные значения! Вместо этого нужно решать двумерную задачу рассеяния $v_{x_2} = v_{xx} + q(x, x_2; x_3) v$. Читатель может обратиться к трудам Киевской конференции 1983 г. [124], в особенности к работам Абловица, Фокаша и Захарова, Манакова, в которых имеются необходимые ссылки.

3c. АКНС-иерархия и ее свойства [23]. Сейчас мы начнем с другой задачи на собственные значения, обобщающей задачу, введенную Захаровым и Шабатом [21] при изучении НУШ:

$$V_x = PV = \begin{pmatrix} -i\zeta & q(x, t) \\ r(x, t) & i\zeta \end{pmatrix} V, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Какие эволюционные системы уравнений могут быть решены с использованием (3.31)? Если q и r зависят от t, то пусть

$$V_t = QV, \quad Q = \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Условие разрешимости (3.31) и (3.32) имеет вид

$$P_t - Q_x + [P, Q] = 0, \tag{3.33}$$

где $[P, Q]$ — это матричный коммутатор $PQ - QP$. Записывая (3.33) поэлементно, получаем

$$h_x = qf - re, \quad e_x + 2i\zeta e = q_t - 2hq, \\ f_x - 2i\zeta f = r_t + 2hr. \tag{3.34}$$

Мы будем искать Q в виде полинома степени n (и обозначать такое Q как $Q^{(n)}$, а соответствующее время — как t_n). Для удобства вычислений введем матрицы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры sl(2)[1])

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H. \tag{3.36}$$

Здесь эта алгебра просто удобна нам для вычислений, но в гл. 5 мы увидим, что она играет центральную роль во всей теории.

Мы ищем решения (3.33) в виде

$$Q^{(n)} = -iH\zeta^n + Q_1\zeta^{n-1} + \ldots + Q_n, \tag{3.37}$$

где $P = Q^{(1)} = -iH\zeta + qE + rF$, $Q_k = h_kH + e_kE + f_kF$. Компоненты e_k и f_k перед E и F в Q_k определяются из членов при ζ^{n-k+1}, а диагональная компонента h_k находится из членов при ζ^{n-k}. Приведем несколько первичных матриц. Имеем

$$Q_0 = -iH,$$
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},$$
$$Q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}qr & \frac{i}{2}q_x \\ -\frac{i}{2}r_x & \frac{i}{2}qr \end{pmatrix},$$
$$Q_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(qr_x - q_xr) & -\frac{1}{4}(q_{xx} - 2q^2r) \\ -\frac{1}{4}(r_{xx} - 2qr^2) & \frac{1}{4}(qr_x - q_xr) \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Уравнение

$$P_{t_n} - Q_{nx} + \left[\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, Q_n\right] = 0 \tag{3.39}$$

---

[1]) Эти матрицы называются базисом Вейля алгебры sl(2). — *Прим. перев.*

является эволюционным относительно q и r. Потоки, соответствующие $n=0, 1, 2, 3$, имеют вид

$$q_{t_0}=-2iq, \quad r_{t_0}=2ir \tag{3.40a}$$

с

$$Q^{(0)}=-iH; \tag{3.40b}$$

$$q_{t_1}=q_x, \quad r_{t_1}=r_x \tag{3.41a}$$

с

$$Q^{(1)}=-iH\zeta+qE+rF; \tag{3.41b}$$

$$q_{t_2}=\frac{i}{2}(q_{xx}-2q^2r), \quad r_{t_2}=-\frac{i}{2}(r_{xx}-2qr^2) \tag{3.42a}$$

с

$$Q^{(2)}=-iH\zeta^2+\zeta(qE+rF)-\frac{iqr}{2}H+\frac{i}{2}q_xE-\frac{i}{2}r_xF; \tag{3.42b}$$

$$q_{t_3}=-\frac{1}{4}(q_{xxx}-6qrq_x), \quad r_{t_3}=-\frac{1}{4}(r_{xxx}-6qrr_x) \tag{3.43a}$$

с

$$Q^{(3)}=-iH\zeta^3+\zeta^2(qE+rF)+\zeta\left(-\frac{iqr}{2}H+\frac{i}{2}q_xE-\frac{i}{2}r_xF\right)-$$
$$-\frac{1}{4}(qr_x-q_xr)H-\frac{1}{4}(q_{xx}-2q^2r)E-\frac{1}{4}(r_{xx}-2qr^2)F. \tag{3.43b}$$

Нулевой поток (t_0) соответствует такому преобразованию координат, при котором остается неизменным qr; следующий (t_1) поток — это перенос; второй (t_2), с самосогласованной редукцией $r=\pm q^*$, — это НУШ, третий (t_3), с самосогласованной редукцией $r=\pm q$, — это мКдФ. Отметим, что $Q^{(k)}$ для всех потоков t_k с $k\leqslant n$ конгруэнтны в том смысле, что $Q^{(k+1)}=\zeta Q^{(k)}+Q_{k+1}$, $k=0, 1, \ldots, (n-1)$.

Справедливы следующие результаты, которые, однако, в таком формализме доказать непросто.

(i) Все уравнения $P_{t_n}=Q_x^{(n)}+[Q^{(n)}, P]$ коммутируют, т. е. $P_{t_nt_m}=P_{t_mt_n}$.

(ii) Все эти уравнения гамильтоновы. Существуют некие функционалы $\{F_n\}_0^\infty$, такие что

$$q_{t_n}=\frac{\delta F_n}{\delta r}, \quad r_{t_n}=-\frac{\delta F_n}{\delta q}; \tag{3.44}$$

например, для $n=2$, $F_2=-(i/2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(q_xr_x+q^2r^2)\,dx$.

(iii) Все F_n являются интегралами от неких полиномов $\tilde{F}_n$ от q, r и их производных по x; $\tilde{F}_n$ удовлетворяют соотношениям вида

$$\frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial t_j} = \frac{\partial G_{nj}}{\partial x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.45}$$

которые называются *законами сохранения*. $\tilde{F}_n$ называется *сохраняющейся плотностью*, а G_{nj} — *потоком*. Все F_n, как и для иерархии КдФ, обычно находятся асимптотическим по ζ разложением нескольких функционалов. В гл. 5 я получу для G_{nj} выражения, локальные по q, r и их производным.

Сейчас я хочу сделать несколько замечаний. Во-первых, все эти результаты мы получим с единой точки зрения в гл. 5. Во-вторых, для уравнений Гамильтона более общепринятой является запись $\dot{Z} = J\nabla H$, где $Z = \binom{q}{r}$ и $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В таких системах q и r являются сопряженными переменными, а сохраняющаяся два-форма имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta r \wedge \delta q\, dx$, где использовано обозначение $\delta r \wedge \delta q$ для $\delta_1 r \delta_2 q - \delta_2 r \delta_1 q$, и δ_1 и δ_2 обозначают независимые вариации. В-третьих, это особая роль переменной x в вышеприведенных формулах: например, все коэффициенты в Q_r являются производными по x. Заметьте, однако, что в Q_3 коэффициент перед E может быть записан как производная по t_2 вида $(i/2)q_{t_2}$. Кроме того, все законы сохранения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\text{сохраняющая плотность}) = \frac{\partial}{\partial x}(\text{поток}).$$

В действительности, есть много других соотношений вида

$$\frac{\partial}{\partial t_j} F_{kl} = \frac{\partial}{\partial t_k} F_{lj}.$$

Читатель может возразить, что особая роль x связана с тем, что область интегрирования, входящая в определение F_n, расположена на оси x, в то время как эволюция по всем временам локальна. Все это верно, однако вспомните, что $\delta F_n/\delta q$ — это всего лишь символ, обозначающий $\sum\limits_0^{\infty} (-d/dx)^r (\partial F/\partial q^{(r)})$, где $q^{(r)} = d^r q/dx^r$, и все возникающие при этом члены чисто локальны.

В-четвертых (и это замечание позволит нам по-новому взглянуть на вещи), должны выполняться равенства

$$Q^{(k)}_{t_j} - Q^{(j)}_{t_k} + [Q^{(k)}, Q^{(j)}] = 0, \tag{3.46}$$

являющиеся условиями совместности всех уравнений

$$V_{t_k} = Q^{(k)} V. \tag{3.47}$$

Теперь вспомним, что $Q^{(j)}$ — это полином по ζ степени j. Разделим (3.46) на ζ^j и в получившемся уравнении сделаем предельный переход $j \to \infty$. Если мы обозначим

$$Q = \lim_{j \to \infty} \frac{Q^{(j)}}{\zeta^j} = \sum_0^\infty \frac{Q_r}{\zeta^r}, \tag{3.48}$$

то из (3.46) получим $\left(\lim_{j \to \infty} \left(Q_{t_j}^{(k)}/\zeta^j\right) = 0\right.$, поскольку ζ предполагается большим)

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q]. \tag{3.49}$$

Теперь уравнения для всех потоков приобрели гораздо более алгебраическую структуру и одновременно форму Лакса (хотя здесь Q представляет собой ряд Лорана по ζ, а не дифференциальный по x оператор). Уравнение (3.49) допускает решение

$$Q = V \tilde{Q}_0 V^{-1}, \tag{3.50}$$

где V удовлетворяет (3.47), а $\tilde{Q}_0$ — произвольная постоянная матрица, не зависящая от t_k. Часто принимают такую нормировку V, в которой $\tilde{Q}_0 = -iH$. В других случаях $\tilde{Q}_0$ записывают как $Q(0)$ — значение Q при каких-то значениях x и t_k (напомним, что x и t_1 можно поменять ролями).

Упражнения 3с

1. Прямым вычислением докажите, что $q_{t_2 t_3} = q_{t_3 t_2}$.

2. Попробуйте найти для Q решение вида $Q^{(-1)} = (1/\zeta) Q_{-1}$ и получить из него уравнение sin-Гордон

$$u_{xt_{-1}} = \sin u.$$

Указание: возьмите $-q = r = u_x/2$; что произойдет, если взять $q = r = u_x/2$?

3. Заметьте, что если наложить ограничения типа $q = r$, то они согласуются лишь с некоторыми из потоков. Например, если вначале было $r = \pm q$, то все четные потоки (т. е. t_{2n}) разрушают это соотношение, а все нечетные (т. е. t_{2n+1}) сохраняют его. Противоположное происходит при $r = \pm q^*$.

4. Найдите линейные комбинации чистых потоков $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$ и $Q^{(-1)}$, приводящие к уравнениям

a) $q_t = 7q_x + 4(q_{xxx} + 6q^2 q_x)$,

b) $u_{xt} = \sin u + u_{xxxx} + \frac{3}{2} u_x^2 u_{xx}$.

То есть найдите такую комбинацию $Q=\alpha Q^{(1)}+\beta Q+\gamma Q^{(-1)}$, чтобы условие разрешимости уравнений $V_t=QV$ и (3.31) при $r=-q$ давало соответственно (a) и (b).

5. Если считать, что параметр ζ зависит от времени так, что $\zeta_t=\sum\limits_0 \alpha_r\zeta^r$, то в результате получается уравнение с зависящими от x коэффициентами. Покажите, что эволюционное уравнение, соответствующее $Q=Q^{(2)}-ix\alpha H$ (член $i\zeta_t$, здесь принятый равным $i\alpha$, α вещественно, добавляется в левую часть первого уравнения (3.34)), имеет вид

$$q_t=\frac{i}{2}(q_{xx}-2q^2r)-2i\alpha xq,$$

$$r_t=-\frac{i}{2}(r_{xx}-2qr^2)+2i\alpha xr.$$

Это позволяет нам изучать влияние градиента плотности в тех задачах, к которым применимо НУШ. Это влияние приводит к тому, что точки дискретного спектра (который был введен в гл. 1 и который мы более подробно рассмотрим в следующем разделе), бывшие до сих пор неподвижными, начинают двигаться предписанным образом. (См. [75].)[1])

6. Рассмотрите задачу на собственные значения

$$V_x=\begin{pmatrix} i\beta_1\zeta & p & q \\ \pm p^* & i\beta_2\zeta & r \\ \pm q^* & \pm r^* & i\beta_3\zeta \end{pmatrix}V, \quad \sum_{i=1}^{3}\beta_i=0$$

и покажите, как выбрать V_t так, чтобы в результате получились одномерные уравнения трехволнового взаимодействия, а именно $p_t+c_1p_x=d_1q^*r^*$ и еще два уравнения, получающиеся циклической перестановкой p, q и r.

7. По поводу общей $(n\times n)$ матричной задачи вы можете обратиться к работам [76] и [77].

---

[1]) Решаемые методом обратной задачи уравнения с переменными коэффициентами возникают в двух эквивалентных подходах: а) когда спектральный параметр зависит от координат и б) при введении в (P, Q)-пару производной по спектральному параметру. Уравнения такого типа впервые появились, по-видимому, в работах [3*] и [4*]. В общей постановке такие системы и их физические приложения изучались в серии работ [1*, 2*]. Подход б) важен в теории симметрий солитонных уравнений: если задана иерархия, порожденная некоторым P-оператором, то с помощью техники инфинитезимального одевания можно для любого входящего в нее уравнения построить бесконечную серию дифференциальных (по спектральному параметру) Q-операторов, определяющих бесконечномерную алгебру некоммутативных симметрий, содержащую данную иерархию в качестве коммутативной подалгебры [5]. См. также библиографический комментарий к гл. 5.

8. Рассмотрите задачу на собственные значения

$$V_x = \begin{pmatrix} -i\zeta^2 & \zeta q \\ \zeta r & i\zeta^2 \end{pmatrix} V$$

и покажите, как выбрать V_t так, чтобы получить нелинейное уравнение Шрёдингера с производной (НУШП) и массивную модель Тирринга.

Замечание. Мы увидим, что получающийся из этой спектральной задачи набор уравнений является родственным по отношению к иерархии АКНС. (См. [38].)

3d. Прямое преобразование для нелинейного уравнения Шрёдингера, или рассеяние на бесконечной прямой [12, 80]. По причинам, указанным в гл. 1, кажется естественным связать уравнение Шрёдингера

$$v_{xx} + (\zeta^2 + q(x, t))\, v = 0 \tag{3.51}$$

с решениями уравнения КдФ. В разд. 3b мы обнаружили, что если $q(x, t)$ эволюционирует по параметру t согласно уравнению

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \tag{3.52}$$

то $B = -4\zeta^2 + 2q$, $A = q_x + C$, C — свободная константа и

$$v_t = (q_x + C)\, v + (4\zeta^2 - 2q)\, v_x. \tag{3.53}$$

(См. (3.15) и соответствующее ему $B = B^{(1)}$. Заметьте, что мы положили $t_3 = 4t$.) «Ну и что?» — можете вы спросить. «Чем это может нам помочь?» Преобразование от $q(x, t)$ к $v(x, t; \zeta)$ не приводит к какому-то простому, легко решаемому уравнению для $v(x, t; \zeta)$. Например, оно не линеаризует КдФ, как это происходит для уравнения Бюргерса (см. упражнение 1d). К счастью, группа, сделавшая открытие (Гарднер, Грин, Крускал, Миура), была хорошо знакома с квантовой физикой, и когда возникло уравнение Шрёдингера, им показалось естественным вычислить для него *данные рассеяния*. Более того, как я уже упоминал в гл. 1, оказалось, что это преобразование от потенциала $q(x, t)$ к данным рассеяния (или их подмножеству) и есть правильное преобразование, позволяющее перевести систему с бесконечным числом связанных степеней свободы (3.52) в разрешимую систему с разделенными степенями свободы.

Основные идеи теории рассеяния. Слово «рассеяние» подразумевает наличие времени, состояния «до» и «после» и наводит на мысль о некотором распространяющемся импульсе или волне,

который частично (в одномерном случае) отражается, а частично проходит сквозь некую неоднородность, представленную потенциалом $q(x, t)$. Первое, что нужно сказать, — это что *время, на которое указывает понятие «рассеяние», и параметр t (время) в уравнении КдФ не имеют между собой ничего общего.* Первое из этих времен мы назовем τ, а второе временно зафиксируем. Рассмотрим, например, модель Скотта, состоящую из непрерывно распределенных маятников, подвешенных на торсионной проволоке, и представим себе, что при $x \to \pm\infty$ или исчезает сила тяжести, или становится бесконечной длина маятников. Тогда (2.28) можно записать как

$$u_{\tau\tau} - c^2 u_{xx} + \omega_p^2 u = 0, \tag{3.54}$$

где коэффициенты c^2 и ω_p^2 — функции x, такие что $c^2 \to c_0^2$, $\omega_p^2 \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Для простоты примем $c^2 = 1$ при всех x. Уравнение (3.54) будет описывать распространение волн по струне, погруженной в части своей длины в упругую среду. Во всяком случае, поскольку ω_p^2 не зависит от τ, можно искать решения уравнения (3.54) в виде $u(x, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x, \zeta) e^{-i\zeta\tau} d\zeta$, где $v(x, \zeta)$ удовлетворяет (3.51) с $-\omega_p^2(x) = q(x, t)$. Вообразим, что t в $q(x, t)$ представляет собой параметр, с помощью которого можно непрерывно изменять $q(x, t)$. Но я опять подчеркиваю, что когда речь идет о теории рассеяния, t считается константой.

Поскольку $q(x)$ обращается в нуль при $x \to \pm\infty$, асимптотическое поведение $v(x, \zeta)$ задается линейной комбинацией экспонент $e^{\pm i\zeta x}$ с коэффициентами, зависящими от ζ. Решения $e^{\pm i\zeta x}$ представляют собой в $u(x, \tau)$ члены, зависящие от $x \pm \tau$ и поэтому двигающиеся влево (вправо). Следовательно, если из $x = +\infty$ по направлению к потенциалу впускается импульс в виде δ-функции Дирака, то часть его отразится от потенциала, и поэтому $v(x, \zeta)$ будет иметь асимптотику на $x \to +\infty$ вида

$$v_\infty(x, \zeta) = e^{-i\zeta x} + R(\zeta) e^{i\zeta x}, \tag{3.55}$$

где $R(\zeta)$ называется *коэффициентом отражения.* Часть же импульса пройдет, и поэтому асимптотика $v(x, \zeta)$ при $x = -\infty$ имеет вид

$$v_{-\infty}(x, \zeta) = T(\zeta) e^{-i\zeta x} \tag{3.56}$$

и $T(\zeta)$ называется *коэффициентом прохождения.* Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и из простых интуитивных соображений следует (мы вкратце скажем, почему), что

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \tag{3.57}$$

В этом примере (уравнение sin-Гордон) мы выбрали $q(x) = -\omega_p^2$, т. е. величину, отрицательную всюду. Однако в квантовой физике потенциал $-q(x)$, в котором движется электрон, может местами быть и отрицательным, и у (3.51) возможны решения не волнового типа. Это так называемые связанные состояния, и они возникают при отрицательных значениях энергии $\lambda = E = \zeta^2$ с чисто мнимыми ζ. В отличие от волноподобных решений, осуществимых при всех вещественных ζ (положительных E), существует лишь дискретное и конечное число собственных значений $\zeta_k (= i\eta_k)$, которым соответствуют интегрируемые в квадрате собственные функции на интервале $(-\infty, \infty)$. В этом можно убедиться таким образом. Представим себе решение, ведущее себя при $x \to -\infty$ как $v_{-\infty}(x, \zeta) = e^{-i\zeta x}$ и экспоненциально убывающее в этой области при $\zeta = i\eta$, $\eta > 0$. В общем случае можно ожидать, что после взаимодействия с потенциалом при $x \to +\infty$ возникнут компоненты, пропорциональные $e^{-i\zeta x}$ и $e^{i\zeta x}$. В то время как вторая компонента ведет себя как $e^{-\eta x}$, $\eta > 0$ и вполне допустима, первая, очевидно, нет, поскольку она нарушает квадратичную интегрируемость. Следовательно, возможны только некие специальные значения ζ, при которых асимптотика $v(x, \zeta)$ при $x \to +\infty$ содержит только член $e^{i\zeta x}$.

Именно по этой причине изучаемые нами решения задачи (3.51) удобно нормировать следующим образом. Для вещественных ζ определим решения $\varphi(x, \zeta)$, $\psi(x, \zeta)$ так, чтобы они имели асимптотики

$$\varphi(x, \zeta) \sim e^{-i\zeta x}, \quad x \to -\infty, \tag{3.58a}$$

$$\psi(x, \zeta) \sim e^{i\zeta x}, \quad x \to +\infty. \tag{3.58b}$$

В качестве линейно независимых решений мы будем брать пары φ, $\bar{\varphi}$ и ψ, $\bar{\psi}$. Функция $\bar{\varphi}$ асимптотически ведет себя как $e^{i\zeta x}$ при $x \to -\infty$, а $\bar{\psi} \sim e^{-i\zeta x}$ при $x \to +\infty$. Для вещественных $q(x)$ и ζ верны соотношения $\bar{\varphi}(x, \zeta) = \varphi(x, -\zeta) = \varphi^*(x, \zeta)$ и $\bar{\psi}(x, \zeta) = \psi(x, -\zeta) = \psi^*(x, \zeta)$. Звездочка обозначает комплексное сопряжение. Эти два набора линейно независимых решений связаны:

$$\varphi(x, \zeta) = a(\zeta)\psi(x, -\zeta) + b(\zeta)\psi(x, \zeta); \tag{3.59}$$

из вышеприведенных условий симметрии легко увидеть, что $a^*(\zeta) = a(-\zeta)$ и $b^*(\zeta) = b(-\zeta)$. Кроме того, уравнение второго порядка (3.51) не содержит первой производной (в системе (3.2) это выражено нулевым следом матрицы коэффициентов), и поэтому вронскианы функций $(\varphi, \bar{\varphi})$ и $(\psi, \bar{\psi})$ не зависят от x. Поскольку $W(\varphi, \bar{\varphi}) = \varphi\bar{\varphi}_x - \varphi_x\bar{\varphi} = 2i\zeta$ и $W(\bar{\psi}, \psi) = 2i\zeta$, имеем (вы-

полните это вычисление!)

$$aa^* - bb^* = 1. \tag{3.60}$$

Теперь сравним (3.59) и (3.55), (3.56). Для того чтобы получить единицу перед $e^{-i\zeta x}$ при $x \to +\infty$, поделим (3.59) на $a(\zeta)$. Теперь очевидно, что

$$T(\zeta) = \frac{1}{a(\zeta)}, \quad R(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \tag{3.61}$$

и что (3.60) — это просто (3.57).

Замечание. «Линейный» предел. Сейчас самое время посмотреть, как связан коэффициент отражения $R(\zeta)$ с простым преобразованием Фурье от $q(x)$

$$\hat{q}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{-ikx} dx.$$

Для этого используем формулировку (3.2) и запишем два интегральных уравнения для $\psi_1 = -\psi_x + i\zeta\psi$ и $\psi_2 = \psi$, где $\psi(x, \zeta)$ — решение уравнения (3.1) с асимптотическим поведением (3.58b),

$$\psi_1 e^{i\zeta x} = \int_{-\infty}^{x} q(y) \psi_2 e^{i\zeta y} dy,$$

$$\psi_2 e^{-i\zeta x} = 1 - \int_{-\infty}^{x} \psi_1 e^{-i\zeta y} dy.$$

Теперь будем решать эти уравнения итерациями, находя последовательно члены со все более высокими степенями q. По существу именно эти разложения используются для доказательства утверждений (3.64), приведенных ниже. Сейчас, однако, мы будем считать q малым и сохраним только линейные по q члены. Мы получим, что $\psi_1 e^{i\zeta x}$ приблизительно равно $\int_{-\infty}^{x} q(y) e^{2i\zeta y} dy$. Однако из соотношения, обратного к (3.59),

$$\psi(x, \zeta) = a(\zeta) \varphi(x, -\zeta) - b(-\zeta) \varphi(x, \zeta), \tag{3.62}$$

мы видим, что $\psi_1 e^{i\zeta x} = (-\psi_x + i\zeta\psi) e^{i\zeta x}$ стремится к $-2i\zeta b(-\zeta)$ при $x \to -\infty$. Таким образом,

$$-2i\zeta b(-\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{2i\zeta y} dy,$$

и поэтому

$$\hat{q}(k) = -\frac{ik}{2\pi} b\left(\frac{k}{2}\right).$$

Кроме того, в этом предельном случае $a \equiv 1$, и поэтому данные рассеяния — это преобразование Фурье.

Я хочу подчеркнуть, что это вычисление — лишь пример, показывающий без излишних сложностей, что обратное преобразование рассеяния является нелинейным аналогом преобразования Фурье. В действительности то, что понимается под пределом малых q, требует большой аккуратности. Есть много потенциалов, которые, будучи малыми при всех x, тем не менее имеют связанные состояния. Например, в упражнении 3d(3) амплитуда Q может быть сколь угодно мала, и тем не менее всегда есть одно связанное состояние. В этом смысле предел $a \to 1$ при всех ζ, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, не является равномерным.

Данные рассеяния и их свойства. До сих пор мы имели дело с решениями при вещественных ζ. Оказывается, что если $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|q(x)|\,dx < \infty, \tag{3.63}$$

то справедливы следующие результаты.

(i) $\varphi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$, $\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$ и $a(\zeta)$ (определенное как $(1/2)\,i\zeta W(\varphi, \psi)$) аналитичны по ζ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. (3.64a)

(ii) $\varphi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$, $\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$ и их производные по ζ существуют и непрерывны в области $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ везде, включая $\zeta = 0$. (3.64b)

За деталями читатель может обратиться к работе Дейфта и Трубовица [80]. Математические проблемы, возникающие в обратной задаче рассеяния, сводятся к тому, чтобы охарактеризовать данные рассеяния, возникающие из потенциалов заданного класса. Первоначально Фаддеев исследовал класс $q(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,q(x)\,dx < \infty$, но Дейфт и Трубовиц указали, что для контроля над производной по ζ от $\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$ при $\zeta = 0$ необходимо несколько более сильное условие (3.63).

Далее, рассмотрим (3.29) с $v = \psi$. Вспоминая, что $\psi_1 = -\psi_x + i\zeta\psi$, и пользуясь (3.62), получаем, что величина

$(\psi + (1/2i\zeta)(\psi_x - i\zeta\psi))e^{-i\zeta x}$ стремится к $a(\zeta)$ при $x \to -\infty$. Поэтому (3.29) дает

$$\ln a(\zeta) \sim -\sum_1 \frac{1}{(2i\zeta)^n} \int_{-\infty}^{\infty} R_n dx. \tag{3.65}$$

Записывая (3.65), мы, естественно, предполагаем, что все интегралы в правой части существуют, а это гораздо более сильное условие, чем (3.63). Если бы мы располагали только (3.63), то мы могли бы только утверждать, что $a(\zeta) \to 1$ при $\zeta \to \infty$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$. Пока, однако, это все, что нам нужно. Мы знаем, что $a(\zeta)$ аналитична при $\operatorname{Im}\zeta > 0$, существует при $\operatorname{Im}\zeta = 0$ и стремится к единице при $\zeta \to \infty$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$. Поэтому $a(\zeta)$ может иметь лишь конечное число нулей, N, в области $\operatorname{Im}\zeta > 0$, поскольку в противоположном случае она имела бы точку сгущения нулей и из соображений аналитичности должна была бы быть тождественным нулем. (Если точкой сгущения служит $\zeta = 0$, то требуются более тонкие аргументы.) Из (3.59) мы видим, что $a(\zeta)$ пропорционально вронскиану решений $\varphi(x, \zeta)$, $\psi(x, \zeta)$

$$a(\zeta) = \frac{W(\varphi, \psi)}{2i\zeta} = \frac{1}{2i\zeta}(\varphi\psi_x - \varphi_x\psi),$$

а поэтому в каждом нуле ζ_k, $k = 1, \ldots, N$ функции $a(\zeta_k) = 0$

$$\varphi(x, \zeta_k) = b_k\psi(x, \zeta_k), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{3.66}$$

Заметьте, что $a(\zeta)$ может иметь полюс при $\zeta = 0$. И это действительно, как правило, осуществляется. Исключения бывают при $|R(0)| < 1$. Читатель может подумать на эту тему после того, как сделает упражнения (ii), (iii), (iv) и (v) в конце этого раздела.

Набор величин

$$S = \left\{R(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)},\ (\zeta_k,\ b_k/a'_k)_{k=1}^N\right\} \tag{3.67}$$

называется *данными рассеяния* $\left(a'_k = \partial a/\partial\zeta\big|_{\zeta_k}\right)$. По нему можно восстановить $a(\zeta)$ следующим образом. Функция

$$f(\zeta) = \prod_1^N \frac{\zeta + i\eta_k}{\zeta - i\eta_k} a(\zeta)$$

аналитична при $\operatorname{Im}\zeta > 0$, стремится к 1 при $\zeta = \infty$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, и поэтому по теореме Коши

$$\ln f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\xi)}{\xi + \zeta} d\xi, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0.$$

Заменяя $\xi \to -\xi$ в последнем уравнении, замечая, что при вещественных ξ $f(\xi)f(-\xi) = a(\xi)a(-\xi) = |a(\xi)|^2$, и складывая оба уравнения, получаем

$$\ln a(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{\zeta - i\eta_k}{\zeta + i\eta_k} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |R|^2)}{\xi - \zeta} d\xi,$$

откуда уже тривиально следует, что

$$\ln a(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{\zeta - i\eta_k}{\zeta + i\eta_k} - \frac{\zeta}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |R|^2)}{\xi^2 - \zeta^2} d\xi. \tag{3.68}$$

(Легко видеть, что возможный простой полюс $a(\zeta)$ при $\zeta = 0$ не влияет на результат.) Асимптотическое разложение обеих частей (3.68) при $\zeta \to \infty$ дает

$$H_{2n-1} = \frac{4i}{(2i)^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{2n+1} dx = \frac{8i^{2n+2}}{2n+1} \sum_{k=1}^{N} \eta_k^{2n+1} -$$

$$- \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\infty} \xi^{2n} \ln(1 - |R|^2) d\xi. \tag{3.69}$$

Уравнения (3.69) — это *формулы следов*, определяющие функционалы Гамильтона H_{2n-1}, $n = 1, 2, \ldots$ (формула справедлива и при $n = 0$, однако H_{-1} не является разумным гамильтонианом)[1]) как функции от собственных значений $\{\eta_k\}_{k=1}^{N}$ и модуля коэффициента отражения $|R(\zeta)|$, ζ вещественно и положительно. Они поэтому выражают константы движения в старых переменных $(q, q_x, q_{xx}, \ldots)$ как функции констант движения в новых переменных (данных рассеяния) и, в частности, показывают, как отображаются гамильтонианы при переходе от $q(x, t)$ к $S(t)$.

---

[1]) H_{-1} приводит к потоку $q_t = 0$.

Имеет смысл выписать в явном виде несколько первых равенств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q\,dx = 4\sum_{1}^{N}\eta_k + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\ln(1-|R|^2)\,d\xi, \tag{3.70a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,dx = \frac{16}{3}\sum_{1}^{N}\eta_k^3 - \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\infty}\xi^2\ln(1-|R|^2)\,d\xi, \tag{3.70b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(q_x^2-2q^3)\,dx = \frac{64}{5}\sum_{1}^{N}\eta_k^5 - \frac{32}{\pi}\int_{0}^{\infty}\xi^4\ln(1-|R|^2)\,d\xi. \tag{3.70c}$$

Стоит проверить эти формулы в случае, когда $q(x)$ — односолитонный безотражательный потенциал. Под безотражательностью мы понимаем тождественное равенство $R(\zeta)$ нулю. При этом нетривиальные данные рассеяния — это просто связанные состояния $\{\zeta_k = i\eta_k,\ b_k\}_1^N$. В частности, при $N=1$ $q(x) = 2\eta\,\mathrm{sech}^2\,\eta(x-\bar{x})$, где $\eta_1=\eta$, $b_1 = e^{2\eta\bar{x}}$. Отметим, что при $N>1$ энергия N-солитонного состояния просто равна сумме энергий входящих в решение солитонных компонент. Это неудивительно, поскольку энергия сохраняется, и в пределе больших времен N-солитонное состояние представляет собой линейную сумму N отдельных солитонов (см. (3.108)). Полезно отметить также, что из (3.70a) следует, что масса, содержащаяся в солитонах, $\sum_1^N 4\eta_k$, всегда больше действительно содержащейся в решении $q(x)$ массы $\int_{-\infty}^{\infty} q\,dx$, поскольку $0<|R|^2<1$. Поэтому вклад непрерывного спектра в массу всегда отрицателен. Этот результат имеет важные ответвления при рассмотрении возмущений уравнения КдФ. Сейчас же самое время детально разобрать несколько примеров.

Упражнения 3d

1. Рассмотрите (a) $v_x = u(x,t)v$ и (b) $v_t = (u^2+u_x)v$. Убедитесь, что условие интегрируемости — это уравнение Бюргерса (c) $u_t = 2uu_x + u_{xx}$. Однако, дифференцируя (a), убеждаемся, что (b) превращается в $v_t = v_{xx}$, т. е. в уравнение теплопроводности. Поэтому (c) может быть точно решено с помощью отображения (a).

2. Рассмотрите $q(x) = Q_0\delta(x)$ и покажите, что $a(\zeta) = (Q_0+2i\zeta)/2i\zeta$, $R(\zeta) = -Q_0/(Q_0+2i\zeta)$. Есть одно связанное состояние при $\zeta = iQ/2$, и, кроме того, $R(0)=-1$. В действи-

тельности для всех потенциалов, кроме безотражательных (для которых $R(\zeta)\equiv 0$), $R(0)=-1$. Проверьте выполнение (3.60). Вычислите $\varphi(x, \zeta)$, $\psi(x, \zeta)$ и найдите b_k.

3. Возьмите $q(x)=Q$ при $0<x<L$ и $q=0$ при остальных x. Покажите, что

$$\begin{aligned} a(\zeta) &= e^{i\zeta L}\left(\cos\sqrt{\zeta^2+Q}\,L-\frac{i(2\zeta^2+Q)}{2\zeta\sqrt{\zeta^2+Q}}\sin\sqrt{\zeta^2+Q}\,L\right), \\ b(\zeta) &= e^{-i\zeta L}\frac{iQ}{2\zeta\sqrt{\zeta^2+Q}}\sin\sqrt{\zeta^2+Q}\,L. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Почему $a(\zeta)$ аналитично при $\operatorname{Im}\zeta>0$? Отметьте, что $R(\zeta)\to -1$ при $\zeta\to 0$.

Чтобы найти нули $a(\zeta)$, положите $\zeta=i\sqrt{Q}\cos\theta$ и получите $a(\zeta)=\sin(2\theta+\alpha\sin\theta)/\sin 2\theta$, где $\alpha=\sqrt{Q}L$. Исследуйте зависимость нулей $a(\zeta)$ от α по поведению точек пересечения графиков $y=a\sin\theta$ и $y=n\pi-2\theta$, $n=1, 2, \ldots$ при $0<\theta<\pi/2$.

Замечание. Отметьте, что в этом случае $a(\zeta)$, $b(\zeta)/a(\zeta)$ и все собственные функции $\varphi(x, \zeta)$, $\psi(x, \zeta)$ аналитичны везде, кроме $\zeta=0, \infty$. Это свойство выполняется для всех $q(x)$ с компактным носителем.

4. Рассмотрите $q(x)=2\eta^2\operatorname{sech}^2\eta(x-\bar{x})$ и покажите, что преобразованием $\operatorname{th}\eta(x-\bar{x})=t$ уравнение (3.51) может быть превращено в присоединенное уравнение Лежандра. Покажите, что $R(\zeta)\equiv 0$. Получите в явном виде $a(\zeta)$, собственные функции и собственные значения (есть только одно $\zeta_1=i\eta$) и нормировочную константу b_1 и покажите, что

$$q(x)=-4i(b_1/a_1')\eta_1\psi^2(x, \zeta_1).$$

5. Рассмотрите $q(x)=A\operatorname{sech}^2 x$ и покажите, что (3.51) может быть решено в гипергеометрических функциях и что коэффициенты отражения и прохождения даются Г-функциями с аргументами, зависящими от ζ и A. Покажите, что в частном случае $A=n(n+1)$, n — положительное целое, выполняется $R(\zeta)\equiv 0$ и возникает в чистом виде n-солитонное решение. Заметьте, что когда $A\approx n(n+1)$, то $R(0)=-1$, в то время как при $A=n(n+1)$ $R(\zeta)\equiv 0$. (Детали читатели могут найти в книге Лэма [69].)

3е. Обратное преобразование. Основная наша цель в этом разделе — показать, как восстанавливать потенциал $q(x)$ по данным рассеяния S. Конечным результатом будет знаменитое уравнение Гельфанда — Левитана [81], хотя попутно мы получим уравнение, более удобное для нахождения безотражатель-

ных (чисто солитонных) потенциалов. Мы рассмотрим в деталях двухсолитонный потенциал и объясним, что понимается под сдвигом фаз.

Первая и наиболее утомительная часть анализа — это восстановление фундаментальной матрицы решений

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(x, \zeta) & \psi(x, \zeta) \\ \varphi_x(x, \zeta) & \psi_x(x, \zeta) \end{pmatrix}. \tag{3.72}$$

Если известна Φ и, в частности, ее элементы, то можно получить, что она удовлетворяет уравнению Шрёдингера, и из этого извлечь потенциал $q(x)$. Наиболее удобный, но не единственный способ сделать последний шаг состоит в том, чтобы выделить $q(x)$, производя асимптотическое разложение для $\psi(x)e^{-i\zeta x}$, определенное в (3.29а). Получаем

$$\begin{gathered} q(x) = \lim_{\zeta\to\infty} -2i\zeta \frac{d}{dx}(\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x} - 1), \\ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.73}$$

Аналогичный анализ, основанный на (3.29), показывает, что функции $\varphi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$, $\varphi(x, -\zeta)e^{-i\zeta x}$, $\psi(x, -\zeta)e^{i\zeta x}$ все стремятся к единице в полуплоскостях, в которых они аналитичны ($\operatorname{Im}\zeta \gtrless 0$).

Мы хотим найти $\varphi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$ (или $\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$), которая, как мы уже знаем, аналитична в верхней полуплоскости с асимптотическим поведением $\varphi e^{i\zeta x} \to 1$ при $\zeta \to \infty$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Мы также знаем, что $\psi(x, -\zeta)e^{i\zeta x}$ аналитична при $\operatorname{Im}\zeta < 0$ и на вещественной оси ζ, $\zeta = \xi$, уравнение (3.59) определяет скачок между $(\varphi/a)e^{i\zeta x}$, имеющей лишь конечное число полюсов при $\operatorname{Im}\zeta > 0$, и $\psi(x, -\zeta)e^{i\zeta x}$. Этот скачок, $R(\zeta)\psi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$, должен быть непрерывной функцией. Это — классическая задача Римана — Гильберта, решение которой строится следующим образом.

При $\operatorname{Im}\zeta > 0$ рассмотрим интеграл вдоль вещественной оси ξ:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \xi)e^{i\xi x}d\zeta}{a(\xi)(\xi + \zeta)}, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0. \tag{3.74}$$

Вычислим I двумя способами. Во-первых, мы воспользуемся тем фактом, что $\varphi(x, \zeta)e^{i\zeta x}$ и $a(\zeta)$ аналитичны при $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, и деформируем контур интегрирования в окружность $|\xi| = R$, $R \to \infty$, $0 < \operatorname{Arg}\xi < \pi$. Получим

$$I = \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k \psi_k e^{i\zeta_k x}}{\zeta + \zeta_k} - \frac{1}{2}. \tag{3.75}$$

Первый член в (3.75) представляет собой вклад от нулей функции $a(\zeta)$, которые просты и расположены в точках ζ_k, в которых $\varphi_k = b_k\psi_k$ (ψ_k обозначает $\psi(x, \zeta_k)$). Мы определяем γ_k как $b_k(a'_k)^{-1}$, где $a'_k = da/d\zeta|_{\zeta_k}$. Второй член происходит от интеграла по полуокружности на ∞, относительно которого мы знаем, что подынтегральное выражение стремится к ξ^{-1}.

Теперь оценим I, используя (3.59):

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x, -\xi)e^{i\xi x}d\zeta}{\xi+\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\frac{\psi(x, \xi)e^{i\xi x}d\zeta}{\xi+\zeta}. \quad (3.76)$$

Из свойств аналитичности подынтегрального выражения в первом интеграле получаем

$$I = -\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta X} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int R(\xi)\frac{\psi(x, \xi)e^{i\zeta x}d\zeta}{\xi+\zeta}. \quad (3.77)$$

Теперь мы получаем из (3.75) и (3.77) замкнутое интегральное уравнение на $\psi(x, \zeta)$

$$\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x} = 1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k\psi_k e^{i\zeta_k x}}{\zeta+\zeta_k} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\frac{\psi(x, \xi)e^{i\xi x}}{\xi+\zeta}d\xi. \quad (3.78)$$

Отметим, что необходимые для решения (3.78) данные — это в точности $S = (R(\xi),\ \xi$ вещественно, $(\zeta_k, \gamma_k)_1^N)$. Для завершения решения (3.78) и доказательства существования и единственности решения иногда удобно взять преобразование Фурье от (3.74) и ввести «временну́ю» переменную, которую мы в разд. 3d назвали τ. Мы сделаем подстановку

$$\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x} = 1 + \int_{x}^{\infty}K(x, s)e^{i\zeta(s-x)}ds, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0. \quad (3.79)$$

Несложно показать, что такое $K(x, s)$, не зависящее от ζ, существует [12]. Асимптотическое разложение (3.79) дает

$$\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x} = 1 - \frac{1}{i\zeta}K(x, x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

и сравнение с (3.73) приводит к

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x). \quad (3.80)$$

Подставим (3.79) в (3.78), умножим на e и проинтегрируем по ζ от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль контура, расположенного чуть выше

вещественной оси. Тогда, пользуясь формулами

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta(s-\tau)} = 2\pi\delta(s-\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{e^{i\zeta(x-\tau)}}{\zeta+\zeta_k} = -2\pi i e^{-i\zeta_k(x-\tau)} H(\tau-x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{e^{i\zeta(x-\tau)}}{\zeta+\xi} = -2\pi i e^{-i\xi(x-\tau)} H(\tau-x),$$

где $H(y)$ — функция Хевисайда, мы получим

$$K(x, \tau) + B(x+\tau) + \int_{x}^{\infty} K(x, s) B(s+\tau)\, ds = 0, \quad \tau > x, \tag{3.81}$$

где

$$B(z) = -i \sum_{k=1}^{N} \gamma_k e^{i\zeta_k z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) e^{i\xi z}\, d\xi. \tag{3.82}$$

Уравнение (3.81)—это уравнение Гельфанда — Левитана. Это фредгольмово уравнение, из которого находится $K(x, \tau)$ как функция от $\tau > x$ по $B(x+\tau)$. После этого $q(x)$ находится из (3.80). Иногда удобнее записывать (3.82) в более компактной форме

$$B(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C} R(\xi) e^{i\xi z}\, d\xi, \tag{3.83}$$

где контур C идет из $\xi = -\infty$ в $\xi = +\infty$ над полюсами $R(\xi)$. Эта формула верна только тогда, когда $R(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость.

Класс безотражательных потенциалов. Класс безотражательных потенциалов $q(x)$ возникает, когда коэффициент отражения $R(\zeta)$ тождественно равен нулю. В этом случае проще работать непосредственно с (3.78):

$$\psi(x, \zeta) e^{-i\zeta x} = 1 - \sum_{1}^{N} \frac{\gamma_k \psi_k e^{i\zeta_k x}}{\zeta+\zeta_k}. \tag{3.84}$$

Заметим, что из (3.71) при $\zeta_k = i\eta_k$ получается

$$q(x) = 2i\frac{d}{dx}\sum_1^N \gamma_k \psi_k e^{-\eta x}. \tag{3.85}$$

Положим в (3.84) $\zeta = \zeta_j = i\eta_j$ и получим систему N линейных уравнений относительно ψ_k,

$$\sum_{k=1}^N \left(\delta_{jk} + \frac{\gamma_k e - (\eta_k + \eta_j)x}{i(\eta_k + \eta_j)}\right)\psi_k = e^{-\eta_j x}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

из которой можно найти прямым вычислением $\psi(x, \zeta)e^{-i\zeta x}$ и $q(x)$. Пользуясь свойствами b_k и $a(\zeta)$, легко показать, что γ_k является чисто мнимым и что

$$\gamma_k = 2i\eta_k e^{2\eta_k \bar{x}_k}. \tag{3.86}$$

Односолитонное решение с $\zeta_1 = i\eta$ (каждое дискретное собственное значение приводит к возникновению одного солитона)

$$\begin{gathered}
\psi e^{-i\zeta x} = 1 - \frac{i\zeta \operatorname{sech}\eta(x-\bar{x})e^{-\eta(x-\bar{x})}}{\zeta + i\eta}, \\
\zeta e^{i\zeta x} = 1 - \frac{i\eta \operatorname{sech}\eta(x-\bar{x})e^{-\eta(x-\bar{x})}}{\xi + i\eta}, \\
a'(\xi_1) = \frac{1}{2i\eta}, \qquad b_1 = e^{2\eta\bar{x}}, \\
\psi(x, \zeta_1) = \frac{e^{-\eta\bar{x}}}{1 - e^{-2\eta(x-\bar{x})}}, \\
\varphi(x, \zeta_1) = b_1\psi(x, \zeta_1) = e^{2\eta\bar{x}}\frac{e^{-\eta x}}{1 + e^{-2\eta(x-\bar{x})}}, \\
q(x) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2\eta(x - \bar{x}).
\end{gathered} \tag{3.87}$$

В частности, параметр b_1, отношение $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в точке ζ_1, равен $e^{2\eta\bar{x}}$ и поэтому определяет положение солитона. В следующем разделе мы получим, как он зависит от времени t.

Кроме того, можно показать, что потенциал $q(x)$, соответствующий N-солитонному решению, может быть записан в виде второй производной по x от логарифма функции, которую мы будем называть $\tau(x)$ (это не то τ, которое входит в уравнение Гельфанда — Левитана) и которая имеет вид

$$\tau = \sum_{\mu_j = 0, 1} \exp\left\{\sum_{j=1}^N \mu_j H_j + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} A_{ij}\mu_i\mu_j\right\}, \tag{3.88}$$

где

$$H_j = -2\eta_j (x - \bar{x}_j), \quad e^{A_{ij}} = \left(\frac{\eta_i - \eta_j}{\eta_i + \eta_j}\right)^2 \tag{3.89}$$

и первая сумма берется по всем $\mu_j = 0$ или 1. Читатель может при $N = 2$ проверить, что

$$\tau = 1 + e^{-2\eta_1 (x - \bar{x}_1)} + e^{-2\eta_2 (x - \bar{x}_2)} + e^{-2\eta_1 (x - \bar{x}_1) - 2\eta_2 (x - \bar{x}_2) + A_{12}}. \tag{3.90}$$

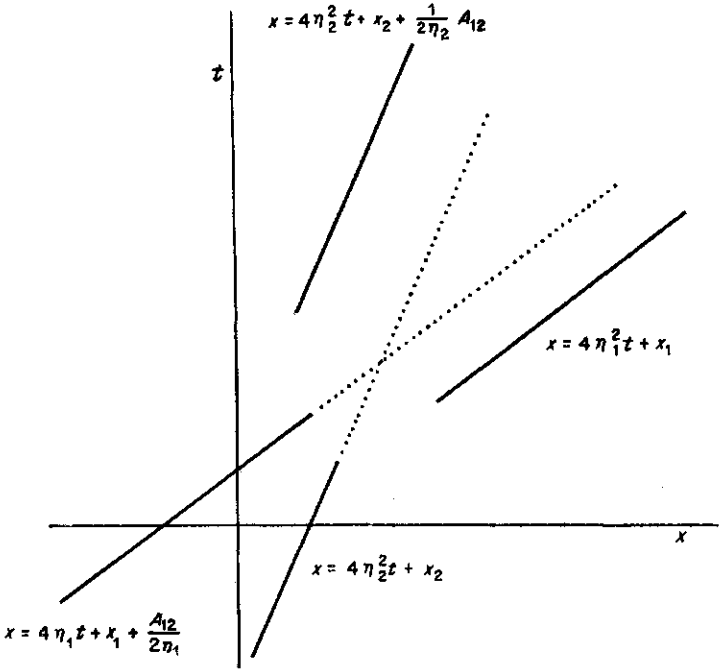

Рис. 3. Двухсолитонное взаимодействие.

Двухсолитонное взаимодействие. Давайте забежим вперед и воспользуемся тем, что если $q(x, t)$ эволюционирует согласно КдФ, то $\bar{x}_j = 4\eta_j^2 t + \bar{x}_j^{(0)}$, и исследуем двухсолитонное взаимодействие. Предположим, что $\eta_1 > \eta_2$ и рассмотрим окрестность $x \simeq \bar{x}_2$. Поскольку $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 4(\eta_1^2 - \eta_2^2)t$, второй и четвертый члены в (3.90) экспоненциально малы при $t \to -\infty$ и поэтому вблизи $x = \bar{x}_2$

$$\tau \simeq 1 + e^{-2\eta_2 (x - \bar{x}_2)}$$

и

$$q(x) = 2\eta_2 \operatorname{sech}^2 \eta_2 (x - \bar{x}_2).$$

С другой стороны, при $x \simeq \bar{x}_1$ доминируют третий и четвертый члены, и

$$\tau \simeq e^{-2\eta_2(x-\bar{x}_2)}\left(1 + e^{-\eta_1(x-\bar{x}_1)+A_{12}}\right).$$

Соответствующее $q(x)$ равно

$$q(x) = 2\eta_1 \operatorname{sech}^2 \eta_1 \left(x - \bar{x}_1 - \frac{1}{2\eta_1} A_{12}\right).$$

Аналогично при $t \to +\infty$ вблизи $x = \bar{x}_1$

$$q(x) = 2\eta_1 \operatorname{sech}^2 \eta_1 (x - \bar{x}_1),$$

а вблизи $x = \bar{x}_2$

$$q(x) = 2\eta_2 \operatorname{sech}^2 \eta_2 \left(x - \bar{x}_2 - \frac{1}{2\eta_2} A_{12}\right).$$

Поэтому меньший солитон η_2, который при больших отрицательных временах располагается справа от солитона η_1, испытывает сдвиг фазы на $(1/2\pi_2)A_{12}$, т. е. на отрицательную величину. Больший солитон η_1 сдвигается вперед на положительную величину $-A_{12}/2\eta_1$.

И наконец, из (3.88) читатель должен заметить, что если есть N солитонов $\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_N$, то при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ полный сдвиг фазы, испытываемый каждым солитоном, складывается из попарных сдвигов.

Справедливо также утверждение (и в гл. 4 я объясню почему), что функция, выражающая сдвиги фаз

$$A_{12} = 2 \ln \left| \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right|,$$

одна и та же для каждого уравнения, входящего в иерархию КдФ. Можете ли вы сейчас сообразить, почему это верно?

3f. Временная динамика данных рассеяния и влияние малых вариаций потенциалов. В этой части я в первую очередь хочу продемонстрировать вам, как меняются во времени данные рассеяния, если $q(x, t_{2k+1})$ изменяется в силу любого из уравнений (3.9). Мы начнем со случая, когда $q(x, t)$ удовлетворяет (3.52). Потом я хочу вывести формулы, позволяющие вычислить инфинитезимальные вариации данных рассеяния, порождаемые инфинитезимальными вариациями δq потенциала. Инфинитезимальное изменение потенциала может быть произвольным и не должно удовлетворять какому-либо из уравнений (3.9). Эти формулы важны для:

(i) построения теории возмущений в случае, когда $q(x, t)$ изменяется согласно уравнению типа $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = \varepsilon F(q, q_x, \ldots)$, $0 < \varepsilon \ll 1$;

(ii) доказательства (3.17), устанавливающего связь между потоками $L^n q$ и вариационными производными от H_{2n+1};

(iii) выражения q и δq через базис из квадратов собственных функций по аналогии с преобразованием Фурье.

Временная динамика данных рассеяния. Используя (3.53), легко вычислить зависимость данных рассеяния от времени. Первая задача состоит в выборе константы C таким способом, чтобы нормировка собственных функций оказалась совместимой с определениями функций $\varphi(x, t; \zeta)$ и $\psi(x, t; \zeta)$. Вспомним, что по определению (3.58) $\varphi(x, t; \zeta) \sim e^{-i\zeta x}$ при $x \to -\infty$ при всех t, и для этого необходимо выбрать $C = 4i\zeta^3$. Аналогично для $\psi(x, t; \zeta)$ следует выбрать $C = -4i\zeta^3$. Следовательно,

$$\varphi_t = (q_x + 4i\zeta^3)\varphi + (4\zeta^2 - 2q)\varphi_x, \tag{3.91}$$

$$\psi_t = (q_x - 4i\zeta^3)\psi + (4\zeta^2 - 2q)\psi_x. \tag{3.92}$$

Для нахождения производных по t от $a(\zeta, t)$, $b(\zeta, t)$ используем прямо формулу (3.59) или ее асимптотический вид при $x \to +\infty$. Дифференцируя по t левую часть (3.59), получаем

$$(q_x + 4i\zeta^3)(a\psi(x, -\zeta) + b\psi(x, \zeta)) + \\ + (4\zeta^2 - 2q)(a\psi_x(x, -\zeta) + b\psi_x(x, \zeta)),$$

а дифференцируя правую —

$$a_t\psi(x, -\zeta) + b_t\psi(x, \zeta) + a(q_x + 4i\zeta^3)\psi(x, -\zeta) + \\ + a(4\zeta^2 - 2q)\psi_x(x, -\zeta) + b(q_x - 4i\zeta^3)\psi(x, \zeta) + b(4\zeta^2 - 2q)\psi_x(x, \zeta).$$

Приравнивание двух этих выражений дает

$$a_t = 0, \qquad b_t = 8i\zeta^3 b. \tag{3.93a}$$

Аналогичные вычисления для (3.66) дают

$$b_{kt} = 8i\zeta^3 b_k = 8\eta_k^3 b_k. \tag{3.93b}$$

Заметим, что (3.93a) и (3.93b) совместимы в том смысле, что если потенциал $q(x, t)$ таков, что $b(\zeta, t)$ допускает аналитическое продолжение в $\zeta = \zeta_k$, то (3.93a) там совпадает с (3.93b). С другой стороны, подстановка в (3.91) асимптотического вида $\varphi(x, t, \zeta)$, т. е. $a(\zeta, t)e^{-i\zeta x} + b(\zeta, t)e^{i\zeta x}$, также дает (3.93a).

Существенное замечание, которое необходимо сделать, состоит в том, что хотя эволюция φ и ψ зависит от неизвестной величины $q(x, t)$ и всех ее производных по x, данные рассеяния включают только относительное поведение собственных функций в точках $x = \pm\infty$, в которых известна $q(x, t)$ вместе со всеми ее производными (они все равны нулю). С другой стороны, если

бы мы решали периодическую задачу на интервале $0 \leqslant x \leqslant L$, то у нас бы не было в распоряжении такой точки, в которой $q(x, t)$ известна в любой момент времени, и это делает эволюцию новых координат в этой задаче гораздо более сложной.

Постоянство $a(\zeta)$ играет центральную роль в теории. Во-первых, оно означает неизменность во времени дискретных собственных значений $\zeta_k = i\eta_k$, $k = 1, \ldots, N$. Во-вторых, из (3.65) и (3.69) мы видим, что гамильтонианы H_{2n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, и масса $\int_{-\infty}^{\infty} q dx$ являются интегралами движения. Это справедливо для любого потока из семейства КдФ. Единственное, чем отличается $(\text{КдФ})_3$ от $(\text{КдФ})_{2n+1}$, — это, в соответствии с (3.9) (напомним, что t, входящее в (3.9), в 4 раза больше, чем t в (3.52), (3. 53)), то, что в первом случае

$$b_{t_3} = 2i\zeta^3 b, \tag{3.94}$$

в то время как во втором

$$b_{t_{2n+1}} = 2i\zeta^{2n+1} b. \tag{3.95}$$

Таким образом, хотя в физическом пространстве трудно увидеть разницу между потоками с $n = 1, 2, 3, \ldots$ (сравните (3.15) и (3.16)), в пространстве данных рассеяния их различие тривиально и сводится просто к разным степеням ζ и ζ_k в фазах $b(\zeta, t)$ и $b_k(t)$. По этой причине легко рассматривать линейные комбинации этих потоков. Например,

$$q_t = \alpha q_{t_3} + \beta q_{t_5} + \gamma q_{t_7} + \ldots$$

дает $a_t = 0$, и

$$b_t = 2i(\alpha\zeta^3 + \beta\zeta^5 + \gamma\zeta^7 + \ldots) b,$$
$$b_{k_t} = 2i(\alpha\zeta_k^3 + \beta\zeta_k^5 + \gamma\zeta_k^7 + \ldots) b_k.$$

Одним из следствий этого является формула, определяющая многосолитонное решение (3.88) сразу для всех потоков. Достаточно использовать подходящую фазовую скорость в $\bar{x}_k$. Вспомним, что $b_k = e^{2\eta_k \bar{x}_k} = e^{-2i\zeta_k \bar{x}_k}$. Многосолитонная формула для $q(x, t_3, t_5, \ldots)$ как функции чистых потоков (3.9) задается (3.88), (3.89) с

$$H_j = 2i(\zeta_j x + \zeta_j^3 t_3 + \zeta_j^5 t_5 + \ldots). \tag{3.96}$$

Влияние инфинитезимальных вариаций потенциала. Следующая наша задача состоит в определении инфинитезимальных вариаций данных рассеяния, возникающих вследствие инфинитезимального изменения потенциала $q(x)$. Как мы увидим, эти

формулы важны с самых разных точек зрения. Если q подвергается изменению $q \to q + \delta q$, то при вещественных (фиксированных) ζ вариация $\psi(x, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(\delta\psi)_{xx} + (\zeta^2 + q)\,\delta\psi = -\,\delta q \psi. \tag{3.97}$$

Мы знаем два линейно независимых решения однородного уравнения $\psi(x, \zeta)$ и $\psi(x, -\zeta)$ и поэтому можем решить (3.97) вариацией постоянных. Получаем

$$\delta\psi = \frac{1}{2i\zeta}\,\psi(x, -\zeta) \int\limits_{+\infty}^{x} \delta q(y)\,\psi^2(y, \zeta)\,dy -$$

$$- \frac{1}{2i\zeta}\,\psi(x, \zeta) \int\limits_{+\infty}^{x} \delta q(y)\,\psi(y, \zeta)\,\psi(y, -\zeta)\,dy.$$

Устремляя $x \to -\infty$, получаем

$$\delta a = \frac{1}{2i\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta q(x)\,\psi(x, \zeta)\,\varphi(x, \zeta)\,dx, \tag{3.98a}$$

$$\delta b^* = \frac{1}{2i\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta q(x)\,\psi(x, \zeta)\,\varphi(x, -\zeta)\,dx. \tag{3.98b}$$

Из (3.98) находим

$$\delta\left(\frac{b^*}{a}\right) = \frac{1}{2i\zeta a^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta q \psi^2\,dx. \tag{3.99}$$

Получить формулы для $\delta\zeta_k$ и $\delta\gamma_k$ проще всего, допуская существование аналитического продолжения в $\zeta = \zeta_k$. Даже если оно неприменимо, полученные формулы будут верными, так как не могут зависеть от того, является ли носитель q компактным или нет. Маленькая трудность состоит в том, что для вещественных ζ $b^*(\zeta) = \beta(-\zeta)$. Для комплексных ζ продолжение $b(\zeta)$ в $\zeta = \zeta_k$ должно удовлетворять $b(\zeta_k)\,b(-\zeta_k) = -1$, поскольку $a(\zeta_k) = 0$. Поэтому продолжение b^* в $\zeta = \zeta_k$ есть $-1/b_k$. Я оставляю читателям в качестве упражнения показать, что

$$\delta\zeta_k = \frac{-\gamma_k}{2i\zeta_k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta q \psi_k^2\,dx, \tag{3.100}$$

$$\delta\beta_k + \left(\frac{a_k''}{a_k'} + \frac{1}{\zeta_k}\right)\beta_k\,\delta\zeta_k = \frac{-\gamma_k}{2i\zeta_k a_k'^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta q \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\zeta}\right)_k dx, \tag{3.101}$$

где $\beta_k = -1/b_k a'_k$ и a'_k, a''_k, $(\partial\psi^2/\partial\zeta)_k$ — это первая и вторая производные от $a(\zeta)$ в точке ζ_k и первая производная ψ^2 по ζ в ζ_k. Формула (3.100) известна в квантовой механике и выражает изменение энергетического уровня как функцию вариации потенциала.

Теперь мы используем (3.98а) для доказательства (3.17). Нетрудно показать, что для L, определенного в (3.12), выполняется

$$(L-\zeta^2)\left(\frac{\varphi\psi}{a(\zeta)}-1\right)=\frac{1}{2}q. \tag{3.102}$$

Решая итерациями, получаем

$$\frac{\varphi\psi}{a(\zeta)}\sim 1-\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{\zeta^{2n+2}}L^n q.$$

Поэтому, пользуясь (3.98а), находим

$$\frac{\delta \ln a}{\delta q}=\frac{1}{2i\zeta}\frac{\varphi\psi}{a(\zeta)}\sim\frac{1}{2i\zeta}\left(1-\frac{1}{2}\sum_0^\infty\frac{1}{\zeta^{2n+2}}L^n q\right). \tag{3.103}$$

Теперь сравним (3.103) с (3.65) и (3.69). Получаем

$$L^n q=\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta q}. \tag{3.104}$$

Это есть (3.17), и это очень важная формула, позволяющая нам все потоки записывать в гамильтоновой форме.

В следующем разделе мы займемся задачей о том, что происходит при возмущении интегрируемой системы, и для этого нам придется существенно использовать материал настоящего раздела. Но сначала я хочу отметить другую особенность. Как мы показали в разд. 3d, в пределе малых q $(ik/2\pi)p(k/2)$ — это просто $\hat{q}$, преобразование Фурье от q. Этот факт и то, что вариации данных рассеяния определяются по (3.99), (3.100) и (3.101) как внутреннее произведение между δq и квадратами собственных функций или их производных, наводит на мысль о возможности обращения этих соотношений и определении δq как функции от $\delta(b^*/a)$, $\delta\zeta_k$, $\delta\beta_k$. Это и в самом деле возможно. Детали читатель может найти в [75]. Ответ таков:

$$\delta q(x,t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(b^*/a)\frac{\partial\varphi^2(x,\xi)}{\partial x}d\xi+$$
$$+2i\sum_{k=1}^{N}\delta\beta_k\frac{\partial\varphi^2(x,\zeta_k)}{\partial x}+2i\sum_{k=1}^{N}\beta_k\delta\zeta_k\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi^2(x,\zeta)}{\partial x}\right)_{\zeta_k}. \tag{3.105}$$

Набор производных по x от квадратов собственных функций

$$\left\{\frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(x, \xi),\ \xi \text{ вещественно},\ \frac{\partial\varphi^2(x, \zeta_k)}{\partial x},\ \frac{\partial^2\varphi^2(x, \zeta_k)}{\partial x\,\partial\zeta},\ k=1, \ldots, N\right\} \tag{3.106}$$

образует базис в классе функций (3.63). Вам следует с помощью (3.99)—(3.101) проверить, что если изменение δq осуществляется согласно временной динамике какого-либо уравнения из семейства КдФ, то

$$\begin{gathered}\delta\left(\frac{b^*}{a}\right) = -2i\zeta^{2n+1}\frac{b^*}{a}, \quad \delta\zeta_k = 0,\\ \delta\beta_k = -2i\zeta_k^{2n+1}\beta_k, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial t}.\end{gathered} \tag{3.107}$$

Чтобы убедиться в этом, скажем, при $n=1$, замените в (3.99) δq на $-\frac{1}{4}(q_{xx}+3q^2)_x$, проинтегрируйте по частям и используйте для вычисления интеграла уравнение, которому удовлетворяет $(\psi^2)_x$.

В заключение укажем на возможность записи $q(x)$ в виде

$$q(x) = \frac{2}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta R(\zeta)\,\psi^2(x, \zeta)\,d\zeta - 4\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\zeta_k\psi^2(x, \zeta_k). \tag{3.108}$$

Уравнение (3.108) легко получается из

$$\frac{2}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta R(\zeta)\,\psi^2(x, \zeta)\,d\zeta = \frac{2}{i\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\left(\frac{\psi(x, \zeta)\,\varphi(x, \zeta)}{a(\zeta)} - 1\right)d\zeta, \tag{3.109}$$

где P обозначает интеграл в смысле главного значения, вычислением правой части деформацией контура в полукруг $|\zeta| = \infty$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Из (3.27) имеем $\varphi\psi a^{-1} - 1 \sim q/2\zeta^2 + \ldots$ при $|\zeta| \to \infty$.

Замечание. Из этих результатов видно, что интегрируемые потоки лежат на бесконечном семействе поверхностей

$$|R(\xi)| = \text{const}, \quad \zeta_k = \text{const}. \tag{3.110}$$

По аналогии с конечномерными гамильтоновыми системами можно представлять себе пересечение этих поверхностей уровня (3.110) как бесконечномерный тор. Возмущения общего вида, выводящие систему из класса интегрируемых — как, например, влияние переменной глубины (см. следующий раздел) — могут приводить к изменениям траекторий как вдоль, так и перпендикулярно поверхности этого тора. Из (3.105) мы видим, что изме-

нения, не выводящие за пределы тора, образуют некоторое пространство, натянутое на векторы $\partial\varphi^2/\partial x$, в то время как нормальные к тору вариации натянуты на производные этих величин по ζ.

3g. Теория возмущений. Уединенные волны в канале медленно меняющейся глубины. В разд. 2b мы получили (2.16)

$$q_\tau + 6qq_\theta + q_{\theta\theta\theta} = -\frac{9}{4}\frac{D_\tau}{D}q \tag{3.111}$$

в качестве модели для описания длинных волн, распространяющихся вправо по каналу переменной глубины. Если относительное изменение глубины D_τ/D мало по сравнению с длиной рассматриваемых волн, то зависящий от τ параметр $\Gamma = (9/4)D_\tau/D$ мал, скажем, порядка σ, где $0 < \varepsilon \ll \sigma \ll 1$. Может показаться, что такую на вид несложную задачу можно решить в лоб, используя стандартную технику теории возмущений. Однако это не так. Потребовалось около десяти лет, чтобы прояснить большинство трудностей, связанных с уравнением (3.111), и его связь с полной двухволновой задачей о волнах на воде. А некоторые вопросы до сих пор остаются открытыми. Поэтому это прекрасный пример для иллюстрации различных подходов к решению возмущенных солитонных уравнений. Результаты, которые я намереваюсь обсудить, получены в серии статей с моим коллегой Дэвидом Каупом [45] и позже с моим студентом Колленом Кникербокером [43]. Карпман с коллегами [46] независимо получили многие из этих результатов почти одновременно с нами.

Задача, которую мы рассмотрим, такова: вообразим уединенную волну

$$q(\theta, \tau) = 2\eta_0^2 \operatorname{sech}^2 \eta_0 (\theta - 4\eta_0^2\tau - \theta_0), \tag{3.112}$$

входящую в область меняющейся глубины при $\theta = \tau = 0$. (Напомним связь новых координат q, θ, τ со старыми:

$$\theta = -t + \frac{1}{\varepsilon}\int^x \frac{dX}{D^{1/2}}, \quad \tau = \frac{1}{6}\int^X D^{1/2}(X)\,dX, \quad X = \varepsilon x;$$

возвышение N пропорционально D^2q, где $D(X)$ — безразмерная глубина.) Наша цель — описать дальнейшую эволюцию. Для этого есть много способов, одни в чем-то лучше других, но нет единственно верного. В пунктах (i) и (ii) ниже мы опишем как прямой метод возмущений, так и связанный с обратной задачей, и укажем их преимущества и недостатки. Метод, разбираемый в п. (iii), который я называю методом разумного использования

законов сохранения, я считаю весьма удобным, если уже есть некоторое понимание того, чего следует ожидать, — понимание, приобретаемое посредством метода (ii). В п. (iv) я вкратце опишу, как пользоваться (iii) для преодоления несоответствия между постоянным потоком массы $M = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) U(x, t)\, dt$ в полных двухволновых уравнениях и величиной, сохраняющейся в одноволновом приближении, $w \sim \int_{-\infty}^{\infty} D^{3/4}(x) U_+(x, t)\, dt$. В упражнениях есть несколько примеров, на которых вы можете себя проверить.

(i) *Прямой метод.* Самое простое, что приходит в голову, — это искать решение (3.111) в виде

$$q(\theta, \tau) = q^{(0)} + \sigma q^{(1)} + \ldots, \tag{3.113}$$

где предполагается, что $q^{(0)}$ имеет вид солитона (3.112) с той разницей, что η, параметр амплитуды, является медленно меняющейся функцией τ ($\eta = \eta(T)$, $T = \sigma\tau$), а соответствующая фазовая скорость равна

$$\bar{\theta}_\tau = 4\eta^2 + O(\sigma). \tag{3.114}$$

Исходя из этого, естественно использовать систему координат, движущуюся вместе с солитоном ($\xi = \theta - \bar{\theta}$, $s = \tau$), в которой уравнение для $q^{(1)}$ имеет вид

$$q_s^{(1)} - 4\eta^2 q_\xi^{(1)} + q_{\xi\xi\xi}^{(1)} + 6q_\xi^{(0)} q^{(1)} + 6q^{(0)} q_\xi^{(1)} = -\Gamma/\sigma q^{(0)} - q_T^{(0)}. \tag{3.115}$$

Как видим, при $q^{(0)}(\theta, \tau)$ общего вида решить (3.115) довольно трудно, поскольку неясно, как можно разделить переменные (метод (ii) автоматически приводит к такому разделению). Однако в данном случае, когда $q^{(0)}$ зависит только от ξ, решение возможно. Если мы ищем $q^{(1)}$, зависящее только от ξ, но не от s, тогда условие разделимости (3.115) сводится к требованию ортогональности правой части решению сопряженного уравнения $L^A V = -V_{\xi\xi\xi} + 4\eta^2 V_\xi - 6q^{(0)} V_\xi = 0$, убывающего при $\xi \to \pm\infty$. Единственным кандидатом является само $q^{(0)}$. Поэтому мы потребуем, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} q^{(0)2}\, d\theta = -\frac{2\Gamma}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} q^{(0)2}\, d\theta, \tag{3.116a}$$

откуда

$$\eta_\tau = -\frac{2}{3}\Gamma\eta. \tag{3.116b}$$

Если не требовать (3.116а) и допустить зависимость $q^{(1)}$ от s, то тогда оно будет линейно расти по s, и на больших расстояниях порядка $s=\tau=O(1/\sigma)$ будет нарушаться равномерность асимптотического разложения (3.113).

Теперь найдем $q^{(1)}$:

$$q^{(1)}=\frac{\Gamma}{6\eta}\{-1+\operatorname{th}\eta\xi+\operatorname{sech}^2\eta\xi(3-3\eta\xi\operatorname{th}\eta\xi+2\eta\xi-$$
$$-2\eta^2\xi^2\operatorname{th}\eta\xi)\}+\frac{\Gamma}{2}(1-\operatorname{th}\eta\xi)\operatorname{sech}^2\eta\xi.$$

Отметим, что $q^{(1)}\to 0$ при $\xi\to+\infty$, однако в хвосте уединенной волны, $\xi\to-\infty$,

$$q^{(1)}=-\frac{\Gamma}{3\eta}, \tag{3.117}$$

т. е. равно *ненулевой* (почти) константе. Увы! Ряд (3.113) сходится неравномерно в хвосте уединенной волны. Этот факт был впервые открыт и подтвержден численными расчетами Лейбовичем и Рэнделлом [82].

Однако впереди еще худшее. Проверим точный закон сохранения,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty}q(\theta)\,d\theta=-\Gamma\int_{-\infty}^{\infty}q(\theta)\,d\theta, \tag{3.118}$$

что представляет собой запись закона сохранения потока массы $m=\int D^{9/4}q\,d\theta$ для движущегося вправо потока. (Я буду пользоваться строчным m, чтобы отличить его от истинного потока массы M в полной двухволновой задаче, допускающей движения как вправо, так и влево.) Если q близко к $q^{(0)}$, то левая часть (3.118) равна $(\partial/\partial\tau)(4\eta)=4\eta\left(-\frac{2}{3}\Gamma\right)$, в то время как правая часть равна $-\Gamma(4\eta)$. Поэтому (пусть $\Gamma<0$, D уменьшается) из дополнительной массы жидкости, накопляемой в области меняющейся глубины, только 2/3 идет на рост уединенной волны. Куда девается остальное?

В то время как трудности, связанные с (3.117), были замечены при использовании прямого метода, только что описанная трудность оказалась незамеченной.

(ii) *Использование обратной задачи рассеяния.* Как преодолеть две эти трудности? В 1976 г. Дэвид Кауп и я вновь обратились к этой задаче с точки зрения теории рассеяния. Идея состояла в том, что в этой задаче естественнее всего изучать эф-

фекты возмущения, преобразовав возмущенные уравнения к переменным действие — угол или нормальным модам точно решаемой системы. Кауп [73] еще раньше показал, как выписывать эти уравнения для возмущенного НУШ. В этом подходе мы прямо приходим к (3.99), (3.100) и (3.101). Вспомним, что если δq или q_t эволюционирует в соответствии с любым уравнением из КдФ-иерархии, например $(\text{КдФ})_3$, как в (3.52), то все интегралы вычисляются и соответственно дают $8i\zeta^3 b^*/a$, 0 и $8i\zeta_k^3 b^*/a$. Для вычисления эффекта от возмущения $-\Gamma q$ используем для q главный порядок — односолитонное решение — и вычислим соответствующие квадраты собственных функций. Для чисто односолитонного решения мы знаем из (3.110), что ($\zeta_1 = i\eta$) $q = -4\gamma_1\zeta_1\psi^2(x, \zeta_1)$, и поэтому (3.100) приобретает вид $\zeta_{1\tau} = i\eta_\tau = -(2/3)i\Gamma\eta$, что в точности дает (3.116b). Когда мы использовали (3.99) для вычисления возмущений непрерывного спектра (напомним, что при $\tau = 0$ $b^*/a = 0$), мы получили, что сингулярный вклад в окрестности $\zeta = 0$ приводит к появлению нового поля q_c, которое для малых расстояний имеет вид

$$q_c(\theta, \tau) = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma}{3\eta}, & 0 < \theta < \bar{\theta}, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{3.119}$$

Таким образом, образуется шельф, располагающийся между текущим положением солитона $\bar{\theta}$ и $\theta = 0$. В исходных координатах он находится между уединенной волной и местом, до которого может распространяться наиболее длинная волна, выходящая из точки начала изменения глубины. Он в точности имеет величину той части $q^{(1)}$, а именно (3.117), которая не убывает при $\xi \to -\infty$. Это тот шельф, который обнаружили Лейбович и Рэнделл, однако они не осознали, в каком смысле он имеет конечную протяженность. Хотя шельф медленно меняется по амплитуде, его протяженность меняется со скоростью порядка единицы. Это означает, что отклик решения на медленное изменение глубины *не является* чисто адиабатическим! И именно этот факт позволил нам удовлетворить условию сохранения потока массы в локальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty} q\, d\theta = -\frac{9}{4}\frac{D_\tau}{D}\int_{-\infty}^{\infty} q\, d\theta. \tag{3.120}$$

Поскольку q_c мало и меняется медленно, из (3.111) мы ожидаем, что $\partial q_c/\partial\tau = -\frac{9}{4}(D_\tau/D)\, q_c$, т. е. просто закон Грина: постоянство $D^{9/4} q_c$ вдоль правых характеристик $\theta = -t +$

$+\int dx/D^{1/2}$. Следовательно, левая часть (3.120) равна $\left(\text{введем } \Gamma=\frac{9}{4}D_x/D\right)$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty} q_s\,d\theta+\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\theta} q_c\,d\theta=4\eta\left(-\frac{2\Gamma}{3}\right)+\frac{\partial\bar\theta}{\partial\tau}q_c(\bar\theta)+\int_0^{\theta}\frac{\partial q_c}{\partial\tau}d\theta=$$

$$=4\eta\left(-\frac{2\Gamma}{3}\right)+4\eta^2\left(-\frac{\Gamma}{3\eta}\right)-\Gamma\int_0^{\infty} q_c\,d\theta=$$

$$=-\Gamma\int_{-\infty}^{\infty} q_s\,d\theta-\Gamma\int_0^{\theta} q_c\,d\theta,$$

т. е. правой части. Отметим решающую роль второго члена $-(4/3)\eta\Gamma$, возникающего вследствие неадиабатичности потока (область, занимаемая q_c, $0<\theta<\bar\theta$, меняется *не* медленно). И действительно, по локальному дефициту потока массы можно вычислить начальную амплитуду шельфа («начальная» означает амплитуду после его возникновения непосредственно за уединенной волной); таким образом, вместо того чтобы проверять формулу (3.120), мы можем воспользоваться ею для нахождения $q_c(\bar\theta)$.

Метод обратной задачи силен с теоретической точки зрения тем, что он переводит возмущенное уравнение в правильные координаты. В сущности он разрешает основную трудность прямого метода — как разделить переменные в (3.115). Базис, по которому следует разлагать $q^{(1)}$ — это (3.105). *В этом базисе* (3.115) *автоматически разделяется* вне зависимости от степени сложности $q^{(0)}(\theta,\tau)$!! Более того, формулы, получающиеся для зависимости от времени коэффициентов разложения $q^{(1)}$ по этому базису, а именно порождаемые возмущением вариаций b^*/a, ζ_k и β_k, — это в точности те же формулы, которые получаются разложением (3.99)—(3.101) в ряд теории возмущений с $\delta=\partial/\partial\tau$, $q_\tau=(q_\tau)_I+(q_\tau)_p$ ($(q_\tau)_I$ — это «интегрируемая часть» (3.111), а $(q_\tau)_p$ — это часть, связанная с возмущением). Квадраты собственных функций аппроксимируются односолитонными выражениями.

Этот метод, однако, слаб в практическом аспекте. Ясно, что на больших расстояниях порождаются новые компоненты потока (которые порядка $O(\sigma)$, однако несут $O(1)$ потока массы). Поэтому приближение односолитонными собственными функциями неприменимо на больших временах. Причина состоит в сингулярности поправок к собственным функциям при $\zeta=0$. Тем

не менее в (3.100) можно пользоваться таким приближением на больших временах. Однако, несмотря на эти слабости, подход, основанный на обратной задаче, дает ключ к разрешению острых и принципиальных вопросов, связанных с балансом потока массы, и уже только по этой причине заслуживает высокой оценки. Сейчас я опишу подход, объединяющий преимущества подходов (i) и (ii) и позволяющий успешно рассматривать развитие шельфа солитона на больших расстояниях порядка $O(\sigma^{-1})$.

(iii) *Разумное использование законов сохранения.* Если знать все то, что мы знаем, то это, оказывается, лучший метод. Мы знаем, что законы сохранения точны. Используя закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,d\theta = -2\Gamma\int_{-\infty}^{\infty} q^2\,d\theta, \tag{3.121}$$

а в действительности любой из остальных, мы, заменяя q на медленно меняющуюся одиночную солитонную волну, приходим к (3.116b). Причина правильности этой операции в том, что другие компоненты потока порядка $O(\sigma)$ по амплитуде и не больше $O(\sigma^{-1})$ по длине. Поэтому единственная сохраняющаяся плотность, в которую они дают вклад порядка единицы, — это поток массы. Поправки к энергии и к высшим сохраняющимся величинам не превосходят $O(\sigma)$. Все законы сохранения, начиная с энергии и выше, дают одно и то же поведение η, а именно (3.116b). Теперь мы уже знаем, что меняющаяся уединенная волна не может (вспомним, что $\Gamma = (9/4)D_\tau/D < 0$) нести достаточную массу воды, чтобы удовлетворялся закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty} q\,d\theta = -\Gamma\int_{-\infty}^{\infty} q\,d\theta \tag{3.122}$$

потока массы, и непосредственно за уединенной волной образуется шельф амплитуды $q_c = -\Gamma/3\eta$. Мы можем вывести это следующим образом. Предположим, что $q(\theta, \tau)$ состоит из уединенной волны $q_s(\theta, \tau)$ с η, медленно меняющимся в соответствии с (3.116b), и из компоненты $q_c(\theta, \tau)$, располагающейся между $\theta = 0$ и $\theta = \bar{\theta}$, т. е. текущим положением уединенной волны. Поскольку q_c медленно меняется по θ и мало по амплитуде, его эволюция по τ определяется законом Грина, который при $\Gamma = (9/4)D_\tau/D$ дает, что $\partial q_c/\partial\tau = -\Gamma q_c$ и что $D^{9/4}q_c$ зависит только от θ и поэтому постоянно вдоль идущих вправо характеристик. Теперь используем (3.122): $(\partial/\partial\tau)4\eta + q_c(\bar{\theta})\bar{\theta}_\tau = -\Gamma(4\eta)$, и поэтому $q_c(\bar{\theta}) = -\Gamma/3\eta$. Чтобы получить $q_c(\theta, \tau)$

везде, посмотрим на рис. 4. Мы знаем, что $D^{9/4}q_c(\theta, \tau)$ постоянно вдоль траектории $\theta = \text{const}$. Поэтому проследуем вдоль идущей вправо характеристики, проходящей через θ и τ, обратно вплоть до ее пересечения с траекторией солитона. В этой точке мы знаем q_c и, следовательно,

$$q_c(\theta, \tau) = \frac{D^{9/4}(\tau_s)}{D^{9/4}(\tau)} q_c(\tau_s),$$

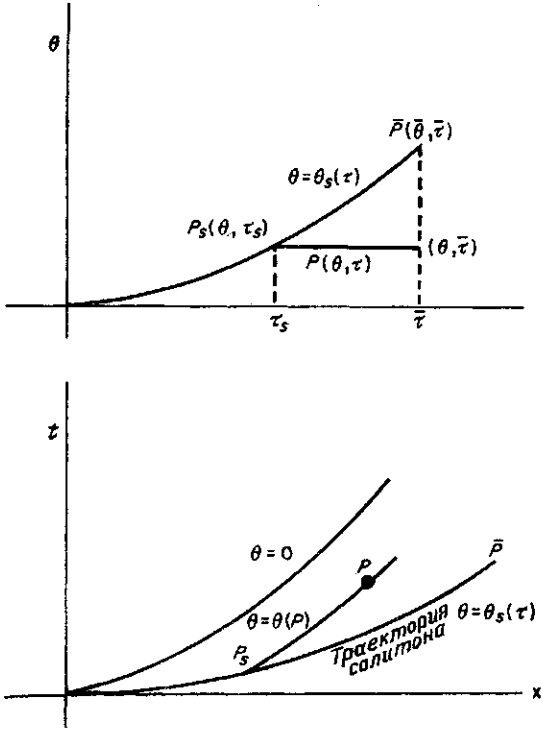

Рис. 4. Движущийся вправо шлейф.

где q_c задается как функция θ интегрированием и обращением формулы траектории солитона

$$\theta_\tau = 4\eta^2.$$

Для конкретности рассмотрим пример. Пусть $-(9/4)D_\tau/D = \sigma$, т. е. постоянно. Тогда

$$\eta = \eta_0 e^{2/3\sigma\tau}.$$

Траектория солитона имеет вид

$$\theta_s = \frac{3\eta_0^2}{\sigma}\left(e^{4/3\sigma\tau_s} - 1\right).$$

Далее, мы знаем, что на траектории $P_s(\theta_s, \tau_s)$

$$q_c(\tau_s) = \frac{\sigma}{3\eta(\tau_s)} = \frac{\sigma}{3\eta_0} e^{-2/3\sigma\tau_s}.$$

Мы знаем также, что

$$q_c(\theta, \tau) = e^{\sigma(\tau-\tau_s)} q_c(\tau_s) = \frac{\sigma}{3\eta_0} e^{\sigma\tau} e^{-5/3\sigma\tau_s},$$

что после обращения формулы траектории солитона дает

$$q_c(\theta, \tau) = \frac{\sigma}{3\eta_0} e^{\sigma\tau}\left(1 + \frac{\sigma\theta}{3\eta_0^2}\right)^{-5/4}.$$

Вычислим теперь поток массы, связанный с шельфом,

$$m_c = D^{9/4}(\tau)\int_0^{\bar\theta} q(\theta, \tau)\, d\theta.$$

Используя закон Грина, а именно, что вдоль характеристики $\theta = \text{const}$,

$$D^{9/4}(\tau)\, q(\theta, \tau) = D^{9/4}(\tau_s)\, q_c(\theta = \theta_s, \tau_s),$$

мы можем записать это в виде интеграла по τ_s, переменной вдоль траектории солитона, от $\tau_s = 0$, т. е. точки, начиная с которой глубина меняется, и до $\tau_s = \bar\tau$ т. е. текущего положения уединенной волны:

$$m_c = \int_0^{\bar\tau} D^{9/4}(\tau_s)\, q_c(\theta_s, \tau_s)\frac{d\theta_s}{d\tau_s}\, d\tau_s =$$

$$= \int_0^{\bar\tau} D^{9/4}(\tau_s)\left(-\frac{3D_\tau(\tau_s)}{4\eta(\tau_s)\, D(\tau_s)}\right) 4\eta^2(\tau_s)\, d\tau_s =$$

$$= -3\eta_0 \int_0^{\bar\tau} D^{-1/4}(\tau_s)\, D_\tau(\tau_s)\, d\tau_s,$$

и так как $\eta D^{3/2} = \eta_0 D_0^{3/2} = \eta_0$ (поскольку $D_0 = 1$), то $m_c = 4\eta_0 - 4\eta_0 D^{3/4}(\bar\tau)$. Однако поток массы, связанный с уединенной волной, есть

$$m_s = D^{9/4}(\tau)\cdot 4\eta(\tau) = 4\eta_0 D^{3/4}(\bar\tau).$$

Поэтому полный поток массы, связанный с идущей вправо компонентой потока,

$$m = m_s + m_c = \int_{-\infty}^{\infty} D^{9/4}(\tau)\, q(\theta, \tau)\, d\theta = 4\eta_0,$$

действительно постоянен, как и требуется в соответствии с уравнением (3.111).

Прежде чем разобраться с несоответствием между потоком массы в уравнении КдФ, описывающем только распространяющиеся вправо волны, и потоком в полных уравнениях, посмотрим, как выразить шельф через данные рассеяния. Вспомним первую из формул следов (3.70) для массы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q\, d\theta = 4 \sum_{1}^{N} \eta_k + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - |R|^2)\, d\zeta.$$

Из (3.111) получаем, что $\int_{-\infty}^{\infty} q\, d\theta$ в точности совпадает с $4\eta_0 (1/D)^{9/4}$. Солитонная компонента решения q_s, с которой мы связываем солитон η_1, имеет массу $4\eta_1 = 4\eta_0 (1/D)^{3/2}$. Если $1 > D$, глубина уменьшается; тогда, поскольку вклад непрерывного спектра $(2/\pi) \int_{0}^{\infty} \ln(1 - |R|^2)\, d\zeta$ всегда отрицателен, q_c должно быть разложимо на солитоны для осуществления баланса в (3.70), поскольку $1/D^{9/4} > 1/D^{3/2}$. Шельф, имеющий в этом случае положительную амплитуду порядка σ и длину порядка σ^{-1}, будет разлагаться на большое число солитонов, представленных в спектре набором точек $\zeta_k = i\eta_k$, $k = 2, \ldots, N$, плотно расположенных на отрезке мнимой оси между $\zeta = 0$ и $\zeta = O(i\sigma)$. (Подумайте об упражнении 3d(3) с $Q = \sigma$, $L = 1/\sigma$.) Постепенно, за время $(1/\sigma)\ln(1/\sigma)$, солитоны, составляющие шельф, отделяются друг от друга.

Я думаю, что такие сложности при анализе безобидного на вид возмущения могут вызвать удивление. Хотя этот вопрос для меня полностью не ясен, частичная причина — в принципиально различном влиянии возмущения на «сохраняющуюся величину» $\int q\, dx$, т. е. функционал Казимира, возникающий вследствие вырожденности скобки Пуассона (3.25), и на все остальные интегралы движения $\int q^2\, dx$, $\int \left(\frac{1}{2} q_x^2 - q^3\right) dx, \ldots$.

(iv) *Отраженный поток* [43]. Сейчас мы займемся отысканием поля отраженного потока $\eta_-(x, t)$ и $u_-(x, t)$, порожденного взаимодействием распространяющейся вправо компоненты $\eta_+(x, t)$ и $u_+(x, t)$ с изменением глубины. Мы воспользуемся той же стратегией, что и раньше. Сначала вычислим u_- на идущей вправо характеристике $\theta_+ = 0$, для чего рассмотрим рис. 5.

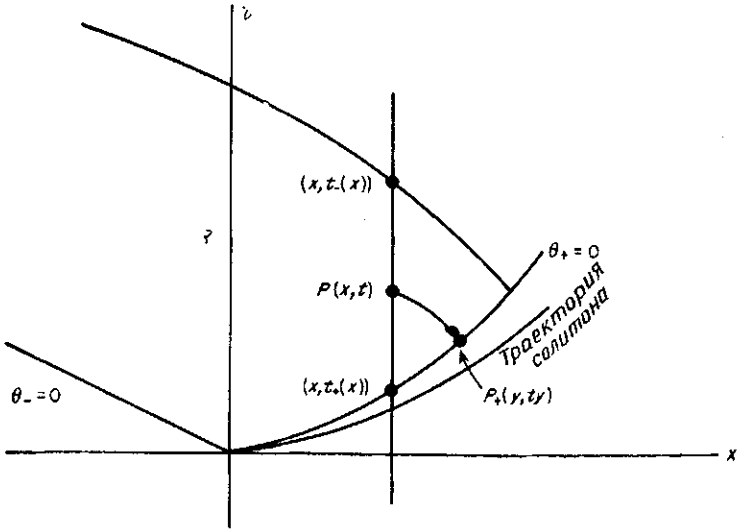

Рис. 5. Отраженный поток.

Зафиксируем x, $0 < x < \bar{x}$, где $\bar{x}$ — текущее положение солитона. Поскольку амплитуда отраженного потока оказывается порядка $O(\sigma\varepsilon)$, в этом вычислении мы можем пренебречь различием между реальной траекторией солитона и $\theta_+ = 0$. Кроме того, $\eta_-(x, t)$ и $u_-(x, t)$ удовлетворяют линейным уравнениям

$$\eta_{-t} + (Du_-)_x = 0, \tag{3.123a}$$

$$u_{-t} + \eta_{-x} = 0 \tag{3.123b}$$

(см. (2.11), (2.12)) в треугольной области плоскости (x, t), изображенной на рис. 5. Пусть $t_+(x)$ — точка пересечения вертикальной линии $x = \text{const}$ и кривой $\theta_+ = 0$, а $t_-(x)$ — точка пересечения этой прямой с характеристикой, идущей влево и проходящей через текущее положение солитона $(\bar{x}, \bar{t})$. Тогда,

поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} D(x)\,u(x,\,t)\,dt$ не зависит от x в главном порядке по ε, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{t_+(x)}^{t_-(x)} D(x)\,u_-(x,\,t)\,dt+\frac{\partial}{\partial x}D^{1/4}(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} D^{3/4}(x)\,u_+(x,\,t)\,dt=0. \tag{3.124}$$

Второй член в этом уравнении равен

$$\frac{1}{4}D_xD^{-3/4}m,$$

где $m=(8/3)\eta_0$, поток массы идущего вправо потока, и не зависит от x. Уравнение (3.124) означает, что (вспомним: $dt_+/dx=1/\sqrt{D}$, $dt_-/dx=-1/\sqrt{D}$)

$$-D^{1/2}(x)\,u_-(x,\,t_-)-D^{1/2}(x)\,u_-(x,\,t_+)+\eta_-(x,\,t_-)+\eta_-(x,\,t_+)=$$
$$=-\frac{2}{3}\eta_0D_xD^{-3/4}-\eta_-(x,\,t_-)-\eta_-(x,\,t_+)=-\frac{2}{3}\eta_0D_xD^{-3/4},$$

где мы заменили $(Du_-)_x$ с помощью (3.123a). Вычитая и добавляя $D^{1/2}(x)\,u_-(x,\,t_+)$, имеем

$$D(x)\,u_-(x,\,t_+)=\frac{1}{3}D^{-1/4}D_x\eta_0-\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\eta_-+\sqrt{D}\,u_-\right)_{t_-}+$$
$$+\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\eta_-+\sqrt{D}\,u_-\right)_{t_+}. \tag{3.125}$$

Теперь мы можем выбрать x произвольно близким к $\bar{x}$, и тогда $t_+\to t_-\to\bar{t}$. В этом случае (3.125) дает нам двоякую информацию. Во-первых, непосредственно за идущей вправо компонентой

$$D(\bar{x})\,u_-(\bar{x},\,\bar{t})=\frac{1}{3}\eta_0D^{-1/4}D_x \tag{3.126a}$$

и, во-вторых,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta_-+\sqrt{D}\,u_-\right)=0. \tag{3.126b}$$

Поскольку те же рассуждения применимы вне зависимости от расположения идущей вправо компоненты вдоль характеристики $\theta_+=0$, мы получаем, что $u_-(x,\,t)$ на $\theta_+=0$ определяется по (3.126a) и что (3.126b) верно во всей треугольной области на рис. 5. Небольшое вычисление с помощью (3.123) и (3.126b) показывает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sqrt{D}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\eta_-\\ Du_-\end{pmatrix}=0, \tag{3.127}$$

что означает, что как η_-, так и Du_- постоянны вдоль характеристик θ_-.

Эти факты проверялись численно при решении (3.123) как задачи Гурса: заданы u_-, $\eta_- = 0$ на $\theta_- = 0$, и при u_-, заданном из (3.126а) на $\theta_+ = 0$, находятся η_-, u_-.

Поэтому закон Грина не выполняется для отраженных волн. Причина состоит в том, что закон Грина следует из соображений геометрической оптики, для справедливости которых требуется медленное изменение характеристик среды по сравнению с горизонтальными градиентами в волне. Здесь же как $(1/u_-)\partial u_-/\partial x$, так и D_x/D имеют одинаковый порядок малости $O(\sigma\varepsilon)$. Из (3.123а) ясно также, что амплитуда отраженной волны порядка $O(\sigma\varepsilon)$. Однако, поскольку ее длина $\sim O(\sigma\varepsilon)^{-1}$, она переносит поток массы порядка единицы, и мы сейчас его вычислим.

Пусть $x = x_f$ — это точка, в которой глубина снова становится постоянной D_f. Тогда полный поток массы через произвольное сечение x должен быть равен потоку массы, переносимому движущейся вправо компонентой через сечение в точке x_f, поскольку правее ее уже нет отражения.

Мы уже получили, что поток, переносимый правонаправленной компонентой, равен

$$\frac{8}{3}\eta_0 D^{1/4}(x).$$

Теперь мы получаем, что поток массы, связанный с отраженной волной, равен

$$\frac{8}{3}\eta_0\left(D_f^{1/4} - D^{1/4}(x)\right).$$

Рассмотрим выражение

$$\int\limits_{t_+(x)}^{t_f} D(x)\, u_-(x, t)\, dt$$

и запишем его как интеграл вдоль пути $\theta_+ = 0$ от $x = x$ до $x = x_f$, пользуясь постоянством Du_- вдоль характеристик θ_-. Отметим, что t-координата точки $P(x, t)$ на рис. 5 и x-компонента $P_+(y, t_y)$ точки, в которой пересекаются идущая влево через точку P характеристика $t + \int^x D^{-1/2}(s)\, ds = t_y + \int^y D^{-1/2}(s)\, ds$

с кривой $\theta_+ = 0$, $t_y = \int^y D^{-1/2}(s)\,ds$, связаны соотношением

$$t + \int^x D^{-1/2}(s)\,ds = 2\int^y D^{-1/2}(s)\,ds.$$

Поэтому

$$\int_x^{x_f} \left(\frac{\eta_0}{3} D^{-1/4}(y)\, D_y(y)\right) \frac{2}{D^{1/2}(y)}\, dy =$$

$$= \int_x^{x_f} \frac{2\eta_0}{3} D^{3/4}(y)\, D_y\, dy = \frac{8\eta_0}{3}\left(D_f^{1/4} - D^{1/4}\right),$$

что и требовалось.

Читателю следует обратить внимание на постоянство полного потока массы через сечение x, который равен

$$\frac{8}{3}\eta_0 D_f^{1/4}.$$

Это означает, что при малом D_f бóльшая часть воды отражается и лишь очень небольшая распространяется до берега.

Упражнения 3g

1. В нижеприведенных примерах найдите, как изменяется параметр η, а также форму шельфа при условии, что $q(x, 0) = 2\eta_0^2 \operatorname{sech}^2 \eta_0 x$:

(a) $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = \sigma q_{xx}, \quad 0 < \sigma \ll 1$

(b) $q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = \sigma q, \quad 0 < \sigma \ll 1.$

Ответы.

(a)
$$\eta = \eta_0\left(1 + \frac{16\eta_0^2\sigma t}{15}\right)^{-1/2},$$
$$q_c = \frac{8\eta_0\sigma}{15}\exp\left(\frac{-2\sigma x}{15}\right), \quad 0 < x < \bar{x},$$
$$\bar{x}_t = 4\eta^2.$$

(b)
$$\eta = \eta_0 e^{2\sigma t}$$
$$q_c = \frac{\pi\sigma e^{2\sigma t}}{\eta_0^2 + 4\sigma x}, \quad 0 < x < \bar{x},$$
$$\bar{x}_t = \eta^2.$$

2. Используйте законы сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int qq^* dx, \quad \frac{\partial}{\partial t}\int (qq_x^* - q^* q_x)\, dx$$

и найдите, как меняются параметры η, ξ солитона НУШ

$$q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta (x - \bar{x}) \exp(-2i\xi x - 2i\bar{\sigma}),$$

удовлетворяющего уравнению

$$q_t = iq_{xx} + 2iq^2 q^* - \Gamma q - Ee^{i\omega_0 t}, \quad \Gamma,\ E \ll 1.$$

Покажите, что $(\xi\eta)_t = -\Gamma(\xi\eta)$. Предположите, что $\xi = 0$. Покажите тогда, что

$$\eta_t = -2\Gamma\eta + \frac{1}{2}\pi E \sin(\omega_0 t + 2\bar{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_t = -2\eta^2.$$

Проанализируйте эти уравнения и покажите, как фаза уединенной волны привязывается к вынуждающей частоте ω_0. Подробности можно найти в [45].

3h. Многосолитонные, рациональные и конечнозонные решения [25—29], [83—85].

Что мы собираемся делать. Первой нашей задачей будет получение многосолитонных решений для КдФ-иерархии новым и поучительным способом. Подход этот поучителен тем, что он демонстрирует единую структуру собственных функций $\psi(x, t_{2k+1}; \zeta)$, связанных с многосолитонным решением. В подходящей нормировке они имеют вид произведения многочлена по ζ^{-1} на простую экспоненту, и при выводе формулы для решения непосредственно используется эта структура. Затем аналогичным способом вводятся рациональные решения, что проясняет их связь с многосолитонными, предельным случаем которых они являются. В обоих случаях $q(x, t_{2k+1})$ задается формулой

$$q(x, t_{2k+1}) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\tau,$$

где τ — это определитель матрицы $N \times N$, после раскрытия принимающий вид (3.88). В пределе рационального решения τ является полиномом.

Вторая и бóльшая часть этого раздела посвящена выводу конечнозонных, или иначе многофазных, квазипериодических решений. Это значит, что $q(x, t_{2k+1})$ является периодической функцией N фаз θ_i, $i = 1, \ldots, N$, каждая из которых линейна по x и t_{2k+1}, $\theta_i = \sum_{\text{нечетн. } j} c_{ij} t_j$, $t_1 = x$. Поскольку c_{ij} не обязательно

соизмеримы, q лишь квазипериодично по t_{2k+1} и x. Однозонное решение уравнения КдФ $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$ имеет вид

$$q(x, t) = \\ = \beta + (\alpha - \beta)\,\mathrm{cn}^2\left\{\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,(x - 2(\alpha+\beta+\gamma)t - x_0);\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\right\}.$$

Я разбил вычисления, связанные с подобными решениями, на три этапа. Сначала я покажу связь N-зонного решения с не зависящей от t_{2k+1}, $k = 0, \ldots, N$, римановой поверхностью

$$R\colon\ y^2 = -\prod_{j=0}^{2N}(\lambda - \lambda_j).$$

Потом я введу новые координаты μ_j, $j = 1, \ldots, N$, лежащие в фиксированных интервалах $(\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j})$, $j = 1, \ldots, N$. Их зависимость от t_{2k+1}, $k = 0, \ldots, N$, определяемая формулой (3.167), получается из простого и красивого вычисления. На первый взгляд эти уравнения не кажутся проще первоначальных, из которых они были выведены. Однако на третьем этапе я покажу, как осуществить отображение из римановой поверхности, на которой лежат μ_j, в новое многообразие, называемое многообразием Якоби, так чтобы новые, соответствующие μ_j, координаты на многообразии Якоби изменились линейно по всем временам. Решение для $q(x, t_{2k+1})$ имеет вид

$$c + 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Theta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N),$$

где c — константа, Θ — это Θ-функция Римана, а $\theta_j = \sum_{\text{нечетн. } j} c_{ij}t_j$, и константы c, c_{ij} могут быть определены. Отметим, что решение снова имеет вид $2(d^2/dx^2)\ln\tau$. Здесь $\tau = \Theta e^{(c/4)x^2}$.

Многосолитонные и рациональные решения. Если вы снова посмотрите на (3.84), вы заметите, что собственная функция $\psi(x, t, \zeta)$ как функция ζ имеет вид мероморфной функции с полюсами в точках $\zeta = -\zeta_k = -i\eta_k$, $k = 1, \ldots, N$. Можно перенормировать $\psi(x, t, \zeta)$, умножая (3.84) на $\zeta^{-N}\prod_1^N(\zeta + i\eta_k)$, после чего получится произведение $e^{i\zeta x}$ на многочлен степени N по ζ^{-1}. Так как перенормировка не затрагивает x и t, то ψ попрежнему удовлетворяет (3.1) и (3.92).

Исходя из этих наводящих соображений, давайте искать многосолитонные решения сразу для всего семейства КдФ (3.9)

(первые три уравнения приведены в (3.14)—(3.16)), отыскивая решения уравнения (3.1) и семейства уравнений (3.3),

$$v_{t_k} = \frac{1}{2} B_x^{(k)} v - B^{(k)} v_x, \tag{3.128}$$

где

$$B^{(k)} = -\lambda^k + B_1 \lambda^{k-1} + \ldots + B_k, \tag{3.129}$$

в виде[1])

$$v(x, t_3, t_5, \ldots) = e^{H(\zeta)} \left(1 + \frac{C_1}{i\zeta} + \ldots + \frac{C_N}{(i\zeta)^N}\right) \tag{3.130}$$

с

$$H = i\zeta x + i\zeta^3 t_3 + \ldots + i\zeta^{2n+1} t_{2n+1} + \ldots . \tag{3.131}$$

Перенос $q_{t_1} = q_x$ сюда не включен; он может быть вновь введен подстановкой $x + t_1$ вместо x. Совместность (3.1) и (3.128) гарантирует, что $q(x, t_3, t_5, \ldots)$ как функция $t_3, t_5, \ldots$ удовлетворяет уравнениям семейства КдФ. Подстановка (3.130) в (3.1) и сравнение коэффициентов при различных степенях ζ^{-1} дает нам соотношение между $C_1, C_2, \ldots, C_N$, с одной стороны, и q и его производными по x — с другой. В самом деле, $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_N$ — это первые N членов асимптотического разложения для $v(x, \zeta)$, получающиеся из (3.27). Вот первые два:

$$q = -2C_{1x}, \qquad C_2 = C_1^2 + \frac{q}{4}. \tag{3.132}$$

Тот факт, что $C_{N+r} = 0$, $r \geqslant 1$, означает, что возникающие в результате этой процедуры решения $q(x, t_3, \ldots)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Позже мы вернемся к этому вопросу в настоящем разделе.

Поскольку $v(\mathbf{x}, \zeta)$ ($\mathbf{x} = (x, t_3, \ldots)$) удовлетворяет (3.1), то же можно сказать и о линейно независимом решении $v(\mathbf{x}, -\zeta)$. Если мы возьмем $v(\mathbf{x}, \zeta)$ пропорциональным $\psi(x, \zeta)$, определенным в разд. d, то $v(\mathbf{x}, -\zeta)$ примет вид асимптотического разложения для $\varphi(x, \zeta)$. Мы знаем, что в точках дискретного спектра $\zeta = i\eta_k$, $k = 1, \ldots, N$, φ пропорционально ψ. Определим поэтому функции $C_1, \ldots, C_N$ из условия, чтобы в несовпадающих точках $\zeta = i\eta_k$, $\eta_k > 0$, $k = 1, \ldots, N$, выполнялось

$$v(\mathbf{x}, i\eta_k) = e^{-2\eta_k \bar{x}_k} v(\mathbf{x}, -i\eta_k), \tag{3.133}$$

где $e^{-2\eta_k \bar{x}_k}$ — коэффициент пропорциональности. Тогда (3.133) превращается в систему N уравнений для N неизвестных,

[1]) Такую собственную функцию часто называют формальной функцией Бейкера—Ахиезера. — *Прим. перев.*

которая легко может быть решена. В результате получим

$$q = -2C_{1x} = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N). \tag{3.134}$$

В этой формуле при нечетных

$$W = \det\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta_1 & -\eta_1\operatorname{sh}\theta_1 & \eta_1^2\operatorname{ch}\theta_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \operatorname{ch}\theta_N & -\eta_N\operatorname{sh}\theta_N & \ldots & \end{pmatrix}. \tag{3.135}$$

При четных N первый столбец состоит из $\operatorname{sh}\theta_j$, в остальных столбцах поочередно стоят то $\operatorname{ch}\theta_j$, то $\operatorname{sh}\theta_j$. Фаза θ_j линейна по всем независимым переменным и равна (H определено в (3.131))

$$\theta_j = H(i\eta_j) + \eta_j\bar{x}_j = \eta_j(x - \bar{x}_j) + \eta_j^3 t_3 - \eta_j^5 t_5 + \ldots.$$

Читатель может теперь легко вычислить несколько первых решений. Для $N = 1$ (3.133) имеет вид

$$e^{\theta_1}\left(1 - \frac{C_1}{\eta_1}\right) = e^{-\theta_1}\left(1 + \frac{C_1}{\eta_1}\right),$$

откуда $C_1 = \eta_1\operatorname{th}\theta_1$, $q = -2C_{1x} = 2\eta_1^2\operatorname{sech}^2\theta_1$, т. е. представляет собой односолитонное решение.

Теперь произведем действия в обратном порядке. Рассмотрим $v(\mathbf{x}, \zeta)$, $v(\mathbf{x}, -\zeta)$, заданные в (3.130), и потребуем, чтобы выполнялось (3.133). Тогда из всего предыдущего следует, что такое $v(\mathbf{x}, \zeta)$ единственно ($C_1, \ldots, C_N$ определяются однозначно). Таким образом, существует одна и только одна функция $v(\mathbf{x}, \zeta)$, удовлетворяющая (3.130) и (3.133). Я теперь утверждаю, что полученная таким образом функция $v(\mathbf{x}, \zeta)$ удовлетворяет (3.1) и (3.128). Проверим это прямым вычислением:

$$v_{xx} + \zeta^2 v = 2i\zeta e^H\left(\frac{C_{1x}}{i\zeta} + \frac{C_{2x}}{(i\zeta)^2} + \ldots + \frac{C_{Nx}}{(i\zeta)^N}\right) + \\ + e^H\left(\frac{C_{1xx}}{i\zeta} + \ldots + \frac{C_{Nxx}}{(i\zeta)^N}\right).$$

Поэтому функция $w(\mathbf{x})$, которую мы определим как

$$w(\mathbf{x}, \zeta) = v_{xx} + (\zeta^2 - 2C_{1x})v = \\ = e^H\left(\frac{d_1}{i\zeta} + \ldots + \frac{d_N}{(i\zeta)^N}\right),$$

где $d_j = C_{jxx} + 2C_{j+1x}$, $j = 1, \ldots, N$, $d_N = C_{Nxx}$, имеет вид многочлена по ζ^{-1} степени N. Однако все d_j, $j = 1, \ldots, N$, должны

равняться нулю, поскольку иначе можно было бы добавить $w(\mathbf{x}, \zeta)$ к $v(\mathbf{x}, \zeta)$ и сумма $v(\mathbf{x}, \zeta)+w(\mathbf{x}, \zeta)$ удовлетворяла бы (3.130) и (3.133). Однако $v(\mathbf{x}, \zeta)$ единственно и, следовательно, $w(\mathbf{x}, \zeta)\equiv 0$. Таким образом, $v(\mathbf{x}, \zeta)$ удовлетворяет (3.1) с $q = -2C_{1x}$. В качестве упражнения покажите с помощью аналогичных рассуждений, что

$$v_{t_3} - \frac{q_x}{4} v - \left(\zeta^2 - \frac{q}{2}\right) v_x = 0.$$

Обратите серьезное внимание на эти рассуждения. Аргументы такого рода, использующие единственность функций, вновь и вновь возникают в стройной теории, созданной И. М. Кричевером для нахождения конечнозонных решений семейства КдФ.

Рациональные решения возникают как специальный предельный случай многосолитонных. Следует устремить все ζ_k к нулю согласованным образом, и коэффициент пропорциональности в (3.133) становится равным $(-1)^N$. Причина этого станет вам ясной, если вы проведете эти вычисления. Возьмем $N=1$ и применим (3.133),

$$e^{H(\zeta_1)}\left(1+\frac{C_1}{i\zeta_1}\right) = e^{2\zeta_1\bar{x}_1} e^{H(-\zeta_1)}\left(1-\frac{C_1}{i\zeta_1}\right).$$

Теперь разложим вблизи $\zeta_1=0$. Для баланса членов порядка ζ_1^{-1} необходимо, чтобы $\exp(2i\zeta_1\bar{x}_1)\to -1$. Это соответствует сдвигу фазы $\bar{x}_1=\pi/2\zeta_1$. Переходя к пределу $\zeta_1\to 0$, мы получаем $C_1x+1=0$ или $C_1=-1/x=-(d/dx)\ln x$. Следовательно,

$$q = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{2}{x^2}. \tag{3.136a}$$

Читателю предлагается проверить, что для $N=2$

$$q = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(x^3+3t). \tag{3.136b}$$

Предельный переход утомителен, но несложен. N-фазное рациональное решение определяется формулой

$$q = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\tau_N, \tag{3.137}$$

где τ_N проще всего получается последовательным применением преобразования Бэклунда (4.107).

Конечнозонные решения и их связь с фиксированной римановой поверхностью. Мы теперь переходим к *конечнозонным решениям*, специальным предельным случаем которых являются многосолитонные решения. Название же возникло в теории

уравнения (3.1) с периодическими граничными условиями. Если задано периодическое по x $q(x)$ с интервалом периодичности $[0, P]$, то известно, что спектр (набор таких $\zeta^2=\lambda$, при которых по крайней мере одна из собственных функций задачи (3.1) периодична или антипериодична) состоит из дискретного набора $\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\lambda_3\leqslant\lambda_4\ldots<\lambda_{2n-1}\leqslant\lambda_{2n}\ldots$ ($\lambda_0, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_7, \lambda_8, \ldots$ соответствуют периодическим собственным функциям, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5, \lambda_6, \ldots$ — антипериодическим). Зоны $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, которые могут иметь и нулевую длину, называются зонами *неустойчивости*, поскольку в этих областях соответствующие блоховские собственные функции, определяемые условиями

$$\psi_\pm(x, \zeta)=1, \quad x=x_0, \quad 0\leqslant x_0\leqslant P, \quad x_0 \text{ фиксировано},$$
$$\psi_\pm(x+P, \zeta)=\rho\psi_\pm(x, \zeta),$$

экспоненциально растут по x (т. е. ρ, зависящее от ζ, по абсолютной величине больше единицы). Если потенциал $q(x)$ таков, что лишь конечное число зон неустойчивости имеет ненулевую длину, то он называется N-зонным. Поскольку каждый поток из семейства КдФ сохраняет спектр, $q(x, t_3, t_5, \ldots)$ остается N-зонным потенциалом при всех значениях $t_3, t_5, \ldots$ и, как мы увидим, является периодическим по всем временным переменным решением. Общее решение периодической задачи возникает как предел N-зонного с $N\to\infty$. Читатель может получить дополнительную информацию в [29].

Класс решений, исследуемый нами в этом разделе, возникает при ослаблении требования периодичности $q(x, t_3, \ldots)$ по x с фиксированным периодом P. Возникающее в результате N-зонное решение будет квазипериодическим по x и по всем временам $t_3, \ldots, t_{2N+1}$. Начнем мы с того, что перепишем уравнения (3.1) и (3.128) системы в виде

$$V_x=\begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ -1 & i\zeta \end{pmatrix} V=Q^{(1)}V, \tag{3.138}$$

$$V_{t_3}=\begin{pmatrix} -i\zeta^3+\frac{iq\zeta}{2}-\frac{q_x}{4} & \zeta^2q+\frac{iq_x\zeta}{2}-\frac{q_{xx}+2q^2}{4} \\ -\zeta^2+\frac{q}{2} & i\zeta^3-\frac{iq\zeta}{2}+\frac{q_x}{4} \end{pmatrix} V=Q^{(3)}V, \tag{3.139}$$

и в общем случае

$$V_{t_{2N+1}}=Q^{(2N+1)}V. \tag{3.140}$$

Предположим, что нам нужно найти решение для

$$q_{t_3}=-\frac{1}{4}(q_{xxx}+6qq_x), \tag{3.141}$$

т. е. условия совместности (3.138) и (3.139) в виде $q(X=x-ct_3)$. Пусть $X=x-ct_3$, $T=t_3$, тогда (3.138), (3.139) принимают вид

$$V_X=Q^{(1)}V, \quad V_T=\left(Q^{(3)}+cQ^{(1)}\right)V. \tag{3.142}$$

Однако матрица коэффициентов зависит только от X, и можно решить уравнение по T, разделяя переменные, $V=Ue^{yT}$, после чего (3.142) дает

$$U_X=Q^{(1)}U, \tag{3.143}$$

$$yU=\left(Q^{(3)}+cQ^{(1)}\right)U=QU. \tag{3.144}$$

Условие совместности (3.143), (3.144) имеет лаксов вид

$$Q_X=\left[Q^{(1)}, Q\right] \tag{3.145}$$

или, после раскрытия,

$$q_{XXX}+6qq_X-4cq_X=0 \tag{3.146}$$

и допускает решения

$$Q(X, \zeta)=U(X, \zeta)Q(X_0, \zeta)U^{-1}(X, \zeta), \tag{3.147}$$

где связь U с $Q^{(1)}$ определяется в (3.143). Следовательно, характеристический многочлен для Q не зависит от X и

$$R(y, \zeta)=\det(Q-yI)=0 \tag{3.148}$$

является алгебраической кривой с постоянными по X коэффициентами. В нашем случае (3.148) имеет вид

$$y^2=h^2+ef, \quad Q=\begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix},$$

$$R(y, \zeta)=-\lambda^3-2c\lambda^2+\lambda\left(\frac{q_{XX}+3q^2}{4}-cq-c^2\right)+$$

$$+\left(\frac{q_X^2}{16}+\left(\frac{q}{2}-c\right)\left(-\frac{q_{XX}+2q^2}{4}+cq\right)\right),$$

где $\lambda=\zeta^2$. Но из (3.146)

$$-\frac{q_{XX}+3q^2}{4}+cq=E_1$$

и

$$-\frac{q_X^2}{16}-\frac{q^3}{8}+\frac{cq^2}{4}-\frac{qE_1}{2}=E_2,$$

откуда

$$y^2=-\lambda^3-2c\lambda^2-(E_1+c^2)\lambda+(E_2+cE_1). \tag{3.149}$$

Уравнение (3.149) определяет риманову поверхность первого рода (топологически эквивалентную тору или бублику), которая не зависит от X.

Обратно, добавим к (3.138), (3.139) связь $yV=(Q^{(3)}+cQ^{(1)})V$, тогда q зависит от x и t_3 только в комбинации $X=x-ct_3$ и выполняется (3.146). Посмотрим на это с более общей точки зрения и добавим к списку (3.138)—(3.140) связь

$$yV=QV, \qquad Q=\begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix} \tag{3.150}$$

с

$$Q=\sum_0^N u_{2r+1}Q^{(2r+1)}, \quad Q^{(2r-1)}=\begin{pmatrix} h_r & e_r \\ f_r & -h_r \end{pmatrix}, \tag{3.151}$$

где u_{2r+1} — константы. Дифференцируя (3.150) и пользуясь (3.138) и тем, что

$$Q^{(1)}_{t_{2j+1}}-Q^{(2j+1)}_x+[Q^{(1)}, Q^{(2j+1)}]=0, \tag{3.152}$$

убеждаемся, что

$$\sum_0^N u_{2r+1}Q^{(1)}_{t_{2r+1}}=0,$$

или

$$\sum_0^N u_{2r+1}q_{t_{2r+1}}=0. \tag{3.153}$$

Можно смотреть на (3.153) двояко. С одной стороны, как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка по x, t_3, t_5, ..., t_{2N+1}, оно означает, что q является функцией от N фаз, образованных из соотношений

$$\frac{dx}{u_1}=\frac{dt_3}{u_3}=\ldots=\frac{dt_{2N+1}}{u_{2N+1}}, \tag{3.154}$$

линейных по x, t_3, ..., t_{2N+1}. Однако мы можем смотреть на (3.153) как на нелинейное автономное обыкновенное дифференциальное уравнение по x порядка $2N+1$; заменим $q_{t_{2r+1}}$ на

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{2r+1}}{\delta q}=\frac{\partial}{\partial x}L^r q, \tag{3.155}$$

где оператор L определен в (3.12). Поэтому N-зонное решение $q(x, t_3, \ldots, t_{2N+1})$ со связанными согласно (3.154) независимыми переменными принимает вид автономного обыкновенного диф-

ференциального уравнения на q как функцию x:

$$\sum_0^N u_{2r+1} L^r q = \text{const}. \tag{3.156}$$

Уравнение (3.156) известно как уравнение *Лакса — Новикова*. Поскольку все потоки коммутируют и совместны с (3.156), уравнение (3.156) описывает форму N-зонного решения для всех времен $t_1, t_3, t_5, \ldots, t_{2N-1}$. Мы вскоре увидим, что эти времена параметризуют его решения. Более того, связанный с временем t_{2m+1}, $m \geqslant N$, поток

$$q_{t_{2m+1}} = \frac{\partial}{\partial x} L^m q \tag{3.157}$$

может быть записан как линейная комбинация потоков $q_{t_{2r+1}}$, $r = 0, \ldots, N-1$ $(t_1 = x)$ с помощью (3.156). Поэтому N-зонные решения — это решения не только для первых N членов семейства КдФ, но и для всей КдФ-иерархии.

Новые координаты и их зависимость от времени. Как же нам получить эти решения? В методе обратной задачи мы отправлялись от уравнения по x (3.138) и получали из него данные рассеяния, эволюция которых во времени находилась из (3.139), (3.140). В периодической по x задаче мы можем пойти по этому же пути, хотя я уже упоминал, что найти временну́ю динамику этим способом затруднительно, поскольку у нас нет точки ∞ $(x = \pm\infty)$, в которой было бы известно q в любой момент времени. Однако при исследовании N-зонного решения с ослабленным требованием периодичности по x (квазипериодичность) удобно начинать не с (3.138), а с алгебраической системы уравнений (3.150). Мы немедленно получаем условие существования нетривиальных решений V:

$$y^2 = \det Q = h^2 + ef = -\prod_0^{2N} (\lambda - \lambda_j). \tag{3.158}$$

Уравнение (3.158), характеристический многочлен для Q, является алгебраической кривой в (y, λ) и определяет гиперэллиптическую риманову поверхность рода N. Определитель матрицы Q — это многочлен по λ степени $2N+1$. Легко проверить, что старший коэффициент равен -1, и мы предположим, что его корни λ_j, $j = 0, \ldots, 2N$, вещественны. Риманова поверхность R играет ту же роль для конечнозонных решений, что и спектр для начальной задачи. Первым и важнейшим ее свойством является ее независимость от $x, t_1, t_3, \ldots$, т. е. она — интеграл движения. Чтобы убедиться в этом, продифференцируем (3.150)

по любому из времен и получим

$$Q_{t_{2r+1}} = [Q^{(2r+1)}, Q] \tag{3.159}$$

с решением

$$Q = VQ_0V^{-1}, \tag{3.160}$$

где Q_0 не зависит от x и $t_1, t_3, t_5, \ldots$. Поэтому характеристический многочлен Q действительно является интегралом движения. Как следствие, корни $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2N}$ многочлена $\det Q$ — также интегралы движения, и для q, периодического по x, представляют собой простой спектр задачи (3.1) для периодических и антипериодических граничных условий.

Далее введем новые переменные μ_j, $j = 1, \ldots, N$, являющиеся корнями $f(\lambda)$, (2, 1)-элемента Q (см. (3.150)). (В нашем примере (3.144) $N = 1$, $f = -\lambda + q/2 - c$ и есть только одно μ, равное $q/2 - c$.) Для выяснения свойств этих переменных нужны некоторые вычисления. Если мы переведем (3.159) в три уравнения для h_k, e_k, f_k, вспомнив, что

$$Q^{(2k-1)} = \begin{pmatrix} h_k & e_k \\ f_k & -h_k \end{pmatrix},$$

то для полиномов h, e, f получим

$$\begin{aligned} h_x &= qf + e, \\ e_x + 2i\zeta e &= -2hq, \\ f_x - 2i\zeta f &= -2h, \end{aligned} \tag{3.161}$$

и для h_{t_k}, e_{t_k}, f_{t_k} получаются уравнения, из которых нам нужно только первое:

$$h_{t_{2k-1}} = e_k f - f_k e. \tag{3.162}$$

Теперь несложные вычисления показывают, что из (3.161) следует

$$y^2 = h^2 + ef = -\frac{1}{2} ff_{xx} + \frac{1}{4} f_x^2 - (\lambda + q) f^2, \tag{3.163}$$

и поскольку f всегда вещественно, $y^2(\mu_j) = \frac{1}{2} f_x^2 (\lambda = \mu_j) > 0$. Следовательно, корни f лежат между λ_{2k-1} и λ_{2k}, $k = 1, \ldots, N$, и мы перенумеруем их так, чтобы $\lambda_{2k-1} \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_{2k}$, $k = 1, \ldots, N$,

$$f(\lambda) = -\prod_1^N (\lambda - \mu_j). \tag{3.164}$$

Теперь, сравнивая коэффициенты при λ^{2N}, получим из (3.162), (3.163), (3.164)

$$q = -\sum_{0}^{2N} \lambda_j + 2\sum_{1}^{N} \mu_j. \tag{3.165}$$

Проверим это для $N=1$: $\mu = q/2 - c$ и $q(x) = -\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + q(x) - 2c$; но мы видели, что сумма корней равна $-2c$, и поэтому выполняется (3.165).

Все μ_j содержатся внутри интервалов $(\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j})$ и движутся при изменении $x, t_3, \ldots, t_{2N+1}$. Сейчас мы найдем эту зависимость. Поскольку $h^2 + ef$ постоянно, то

$$2hh_{t_{2k-1}} + ef_{t_{2k-1}} + e_{t_{2k-1}}f = 0. \tag{3.166}$$

При $\lambda = \mu_j$, используя (3.162), получим из (3.166)

$$2h(\mu_j)(-ef_k(\mu_j)) + ef_{t_{2k-1}}(\mu_j) = 0.$$

Вспоминая (3.164), имеем

$$f_{t_{2k-1}}(\mu_j) = -\mu_{jt_{2k-1}} \prod_{l \neq j} (\mu_l - \mu_l),$$

и из (3.158)

$$h(\mu_j) = \left(\prod_{l=0}^{2N} (\lambda_l - \mu_j)\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\mu_{jt_{2k-1}} = \mp 2 \frac{\left(\prod_{0}^{2N} (\lambda_l - \mu_j)\right)^{1/2}}{\prod_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)} f_k(\mu_j), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{3.167}$$

и мы получаем зависимость μ_j от $t_1 = x, t_3, \ldots, t_{2N-1}$. В частности, для $k=1$ $(t_1 = x)$

$$\mu_{jx} = \mp \frac{\left(\prod_{0}^{2N} (\lambda_l - \mu_j)\right)^{1/2} (-1)}{\prod_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)}. \tag{3.168}$$

Для $k=2$, т. е. для потока КдФ,

$$\mu_{jt_3} = \mp \frac{\left(\prod_{0}^{2N} (\lambda_l - \mu_j)\right)^{1/2}}{\prod_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)} \left(\frac{q}{2} - \mu_j\right), \tag{3.169}$$

и q следует выразить через λ_i и μ_i с помощью (3.165).

Отображение Абеля из римановой поверхности в многообразие Якоби. На первый взгляд уравнения (3.167) выглядят ужасно. Тем не менее мы собираемся показать, что после некоторых манипуляций в них начнут проявляться порядок и структура. Вначале я напомню, что при равном единице u_{2N+1}

$$f = u_1 f_1 + u_3 f_2 + \ldots + u_{2N-1} f_N + f_{N+1}, \tag{3.170}$$

где

$$f_k = \lambda^{k-1} L^{(0)}(-1) + \lambda^{k-2} L^1(-1) + \ldots + \lambda^0 L^{k-1}(-1). \tag{3.171}$$

В (3.171) L — это оператор (3.12), а $L^0(-1) = -1L(-1) = q/2$. Отметим, что $f_2 = q/2 - \lambda$. Как это можно увидеть? Заметим, что если записать t-уравнения (3.3) в виде системы с $v_2 = v$,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{t_{2k-1}} = \begin{pmatrix} h_k & e_k \\ f_k & -h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

то тогда $f_k = B^{(k)} = B_0 \lambda^{k-1} + \ldots + B_{k-1}$, где B_r определены в (3.13). Кроме того, поскольку

$$f(\lambda) = -\prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j), \tag{3.172}$$

то сравнивая коэффициенты при различных степенях λ, получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= L(-1) + u_{2N-1} L(-1), \\ -S_2 &= L^2(-1) + u_{2N-1} L^1(-1) + u_{2N-3} L^0(-1), \\ &\vdots \\ (-1)^{N-1} S_N &= L^N(-1) + u_{2N-1} L^{N-1}(-1) + \ldots + u_1 L^0(-1), \end{aligned} \tag{3.173}$$

где $\{S_r\}_{r=1}^N$ — симметрические многочлены от корней μ_k:

$$S_1 = \sum \mu_k, \quad S_2 = \sum_{k \neq l} \mu_k \mu_l, \quad \ldots, \quad S_N = \mu_1 \ldots \mu_N. \tag{3.174}$$

И наконец, удобно определить последовательность $\{A_r\}_1^\infty$ соотношением

$$\left(1 - \frac{u_{2N-1}}{\lambda} + \frac{u_{2N-3}}{\lambda^2} + \ldots + (-1)^N \frac{u_1}{\lambda^N}\right)^{-1} = \sum_0 \frac{A_r}{\lambda^r}. \tag{3.175}$$

Вот первые несколько:

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, \quad A_1 = u_{2N-1}, \quad A_2 = -u_{2N-3} + u_{2N-1}^2, \\ &A_3 = u_{2N-5} - 2u_{2N-1} u_{2N-3} + u_{2N-1}^3, \end{aligned} \tag{3.176}$$

При этих определениях можно обратить (3.173) и получить

$$\begin{aligned} &L(-1)=S_1+A_1,\\ &-L^2(-1)=S_2+A_1S_1+A_2,\\ &L^3(-1)=S_3+A_1S_2+A_2S_1+A_3,\\ &\qquad\vdots\\ &(-1)^{N-1}L^N(-1)=S_N+A_1S_{N-1}+\ldots+A_N. \end{aligned} \tag{3.177}$$

Отметим, что первое уравнение (3.177) совпадает с (3.165): $\frac{1}{2}A_1=\frac{1}{2}u_{2N-1}=-\sum\limits_0^{2N}\lambda_j$, поскольку λ_j — это корни h^2+ef.

Теперь исследуем (3.167) и запишем это уравнение так:

$$\frac{d\mu_j}{y(\mu_j)}=\frac{2f_k(\mu_j)}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)}\,dt_{2k-1}. \tag{3.178}$$

Введем для точки гиперэллиптической римановой поверхности R

$$y^2(\lambda)=\prod_0^{2N}(\lambda_l-\lambda)$$

координаты $(y,\ \lambda)$. Далее образуем N линейно независимых голоморфных дифференциалов над R

$$\omega_s(\lambda)=\frac{\lambda^s\,d\lambda}{y(\lambda)},\quad s=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{3.179}$$

Из (3.178) получаем

$$\begin{aligned} d\varphi_s&=\sum_{j=1}^N\omega_s(\mu_j)=\sum_{j=1}^N\frac{\mu_j^s\,d\mu_j}{y(\mu_j)}=\sum_{j=1}^N\frac{\mu_j^s\sum\limits_1^N\mu_{lt_{2k-1}}dt_{2k-1}}{y(\mu_j)}=\\ &=2\sum_{k=1}^N dt_{2k-1}\sum_{j=1}^N\frac{\mu_j^sf_k(\mu_j)}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)}=\\ &=2\sum_{k=1}^N dt_{2k-1}\sum_{j=1}^N\frac{\mu_j^s\left(\mu_j^{k-1}L^0(-1)+\mu\right.}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)}\frac{\left.(-1)+\ldots+L^{k-1}(-1)\right)}{}, \end{aligned}$$

$$s=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{3.180}$$

Мы получили замечательный результат: величины

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^s f_k(\mu_j)}{\prod\limits_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)} \tag{3.181}$$

не зависят от x, t_3, ..., t_{2r-1}, ... Поэтому можно легко проинтегрировать (3.180), поскольку $\int d\varphi_s = \varphi_s$, $\int dt_{2k-1} = t_{2k-1}$.

Для доказательства нам нужно воспользоваться тем, что

$$I_s = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^s}{\prod\limits_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)} = \delta_{s,N-1} \text{ для } s \leqslant N-1 \tag{3.182}$$

и что оставшиеся члены последовательности I_N, I_{N+1}, ..., I_{2N-1} удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} I_N &= S_1 I_{N-1}, \\ I_{N+1} &= S_1 I_N - S_2 I_{N-1}, \\ I_{N+2} &= S_1 I_{N+1} - S_2 I_N + S_3 I_{N-1}, \\ &\vdots \\ I_{2N-1} &= S_1 I_{2N-2} - S_2 I_{2N-3} + \ldots + (-1)^{N-1} S_N I_{N-1}. \end{aligned} \tag{3.183}$$

Доказательство этого я оставляю читателю в качестве упражнения, а (3.182) доказывается рассмотрением

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^s\, dz}{\prod\limits_{l=1}^{N} (z - \mu_l)},$$

где C — бесконечноудаленная окружность.

Доказательство же (3.183) получается вычитанием соответствующих кратных $z^p \prod\limits_{1}^{N} (z - \mu_k)$, $p = 0, \ldots, r$ из числителя z^{N+r} для обеспечения сходимости интеграла при $|z| \to \infty$.

Показать справедливость (3.181) проще всего, вычисляя несколько первых выражений. Для $k = 1$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^s (-1)}{\prod\limits_{l \neq j} (\mu_j - \mu_l)} = -\delta_{s,N-1} \qquad \text{из (3.128);}$$

для $k=2$, пользуясь (3.183), (3.182) и первым из уравнений (3.177), получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^{s+1}(-1)+L(-1)\mu_j^s}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)} = \begin{cases} 0, & s\leqslant N-3, \\ -1, & s=N-2, \\ A_1, & s=N-1. \end{cases} \tag{3.184}$$

Для $k=3$, заменяя $L(-1)$, $L^2(-1)$ из (3.177),

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^{s+2}(-1)+L(-1)\mu_j^{s+1}+L^2(-1)\mu_j^s}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)} = \begin{cases} 0, & s\leqslant N-4, \\ -1, & s=N-3, \\ A_1, & s=N-2, \\ -A_2, & s=N-1, \end{cases} \tag{3.185}$$

поскольку и $-I_{N+1}+S_1I_N-S_2I_{N-1}$, и I_N-S_1 равны нулю вследствие (3.183). Теперь картина ясна, и по индукции легко показать, что (строки $s=0, \ldots, N-1$, столбцы $k=1, \ldots, N$)

$$M_{sk}=\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^s f_k(\mu_j)}{\prod\limits_{l\neq j}(\mu_j-\mu_l)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \\ 0 & 0 & & A_1 \\ & & & -A_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & -1 & & \vdots \\ -1 & A_1 & & A_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{3.186}$$

Теперь вернемся к (3.180) и проинтегрируем, поскольку теперь переменные разделяются. Из правой части получаем

$$2t_{2k-1}M_{sk}, \quad s=0, \ldots, N-1, \quad k=1, \ldots, N, \quad t_1=x.$$

Левую часть, а именно $\sum\limits_{j=1}^{N} \omega_s(\mu_j)$, проинтегрируем от фиксированной точки на римановой поверхности $p_0(y(\mu_0), \mu_0)$ до $p_j(y(\mu_j), \mu_j)$:

$$\varphi_s(p_1, \ldots, p_N)=\sum_{j=1}^{N}\int_{p_0}^{p_j} \omega_s(\mu_j)=2\sum_{k=1}^{N} t_{2k-1}M_{sk}. \tag{3.187}$$

Фазы $\varphi_s(p_1, \ldots, p_N)$ — это просто линейные комбинации $x, t_3, \ldots, t_{2N-1}$.

Однако подождите! Интегралы в левой части (3.187) неоднозначно определены, поскольку не зафиксированы пути интегрирования. Рассмотрим рис. 6 с контурами $\{a_j\}_1^N$, $\{b_j\}_1^N$. Контур a_r окружает разрез между точками ветвления λ_{2r-1}, λ_{2r}. Контур

же b_s приходит из $-\infty$ к разрезу $(\lambda_{2r-1}, \lambda_{2r})$, там переходит на другой лист и возвращается обратно. Поэтому левые части определены с точностью до сумм вида

$$\sum_1^N n_k \int_{a_k} \omega_s(\mu_j) + \sum_1^N m_k \int_{b_k} \omega_s(\mu_j).$$

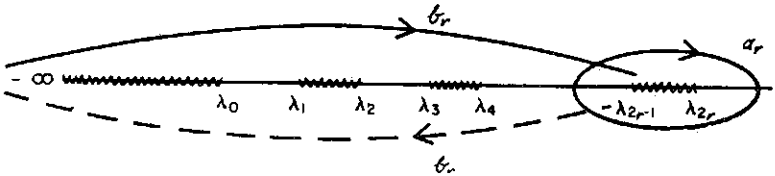

Рис. 6. Контуры $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ на λ-плоскости.

Удобно следующим образом нормировать замкнутые интегралы по циклам a_k: положим

$$U_r = \sum_0^{N-1} C_{rs}\omega_s$$

и выберем C_{ms} так, чтобы

$$\int_{a_n} U_m = \delta_{nm}.$$

Теперь определим фазы θ_r:

$$\theta_r(p_1, \ldots, p_N) = \sum_{j=1}^N \int_{p_0}^{p_j} U_r(\mu_j),$$

и из (3.187) получаем

$$\theta_r = \sum_0^{N-1} C_{rs}\varphi_s = 2\sum_{k=1}^N t_{2k-1}N_{rk}, \qquad (3.188)$$
$$C = (C_{rs}),$$

где N — это произведение CM. Перепишем (3.188) как $\boldsymbol{\theta} = 2N\mathbf{t}$, где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ и $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_{2N-1})$. Теперь, когда мы проинтегрировали уравнения, нам осталось вычислить всевозможные симметрические многочлены от μ_j, определяющие q, Lq, ..., $L^N q$, которыми мы интересуемся. Вопрос состоит в следующем: заданы

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$$

и требуется определить $p_1, p_2, \ldots, p_N$ [1]) и, в частности,

$$\sum_1^N \mu_j = \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} \sum_0^{2N} \lambda_j.$$

Для ответа на этот вопрос нам следует обратиться к свойствам отображения, носящего имя Абеля,

$$(p_1, \ldots, p_N) \to (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N), \tag{3.189}$$

и к его обращению. Поскольку любая перестановка набора $(1, \ldots, N)$ в любой части (3.189) дает те же θ_j, отображение осуществляется из $R \times R \times \ldots \times R/P_N$, т. е. из прямого произведения N идентичных римановых поверхностей, профакторизованных по модулю P_N (группы перестановок N символов), в C^N, т. е. в N-мерное комплексное пространство. Поскольку правая часть зависит от путей интегрирования, к θ_r можно добавить любую линейную комбинацию $\sum_{i=1}^N \left(n_i \int_{a_i} U_r + m_i \int_{b_i} U_r \right)$, где n_i, m_i — целые. Назовем

$$\int_{b_l} U_r = B_{rl} \tag{3.190}$$

и примем без доказательства, что (B_{ri}) — симметричная матрица и ее мнимая часть положительно определена [85]. Вспомним нормировку $\int_{a_l} U_r = \delta_{ri}$. Поэтому возникающая в результате точка в C^N определена с точностью до целочисленной линейной комбинации из $2N$ векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{1N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{NN} \end{pmatrix}.$$

Эти $2N$ векторов порождают решетку Λ в $C^N \simeq R^{2N}$. Например, при $N = 1$ комплексная плоскость покрывается решеткой из параллелограммов периодов, как известно из теории эллиптических функций. Таким образом, $(p_1, \ldots, p_N)$ определена внутри N-мерного параллелограмма периодов, внутри которого лежит точка $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$, и не меняется при ее замене на конгруэнтную

[1]) Эта задача называется задачей обращения Якоби. — *Прим. перев.*

точку в другом параллелограмме периодов. Следовательно, симметрические многочлены от p_j периодичны по всем θ_k, и удобно отождествить противоположные грани параллелограммов периодов. Теперь мы видим, что точка $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ живет на N-мерном торе, называемом *многообразием Якоби* кривой (3.148).

Конечнозонное решение для семейства КдФ поэтому эквивалентно линейному потоку на многообразии Якоби. Решение $q(x, t_3, \ldots)$ выражается через риманову Θ-функцию

$$q(x, t_3, \ldots) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) + c, \qquad (3.191)$$

где

$$\Theta(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \sum_{\nu_j,\ \nu_k \in Z}^{\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{N} 2\pi i \nu_k \theta_k + i\pi \sum_{k,\ j=1}^{N} B_{kj}\nu_k\nu_j\right); \qquad (3.192)$$

здесь Z — множество целых чисел, а c — сложная константа [85]. Отметим тесную связь N-зонных решений с N-солитонными. Отметим также, что τ-функция, определяемая по $q = 2(\partial^2/\partial x^2)\ln\tau$, о которой я уже вкратце говорил и которая будет наиболее важной функцией в оставшейся части этих лекций, для конечнозонных потенциалов равна произведению Θ-функции на $e^{(c/4)x^2}$.

ГЛАВА 4 τ-ФУНКЦИЯ, МЕТОД ХИРОТЫ, СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ СЕМЕЙСТВА КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

4a. Введение. До сих пор мы придерживались той точки зрения, что класс задач, которые мы пытаемся решать, это начально-краевые задачи. А именно, во всех уравнениях мы считали x пространственной координатой, а в качестве граничных условий рассматривали периодичность или убывание на бесконечности. Такой подход выделяет в качестве первоочередной задачи, а фактически делает необходимым изучение аналитической природы функций, с которыми мы имели дело. Например, мы обнаружили, что если $q(x, 0)$ убывает достаточно быстро при $x \to \pm\infty$ и удовлетворяет некоторому интегральному условию, то данные рассеяния обладают определенными аналитическими свойствами. Но в действительности уравнения, которые мы изучаем, являются «магическими» из-за своих локальных свойств; например, тот факт, что уравнение КдФ имеет многосолитонные и рациональные многополюсные решения, никак не связан с граничными условиями и является просто следствием весьма специфического равновесия, которое имеет место между различными членами уравнения. Изменение этого равновесия добавлением членов q или qq_{xx} нарушает магические свойства уравнения. Изменение граничного условия на бесконечности может сделать уравнение более сложным с точки зрения решения начально-краевой задачи, но не разрушает его свойства локальной интегрируемости.

Поэтому в данной главе мы стараемся сосредоточиться на тех методах, которые зависят скорее от локальных, чем от глобальных свойств уравнений. Центральной фигурой в списке действующих лиц служит τ-функция, готовая теперь предъявить свои права и потребовать, чтобы весь свет был направлен на нее. Она является вездесущей и возникает почти в каждой сцене, зачастую независимо от наших первоначальных намерений. Ей, по-видимому, откуда-то известно, насколько она важна.

4b. τ-функция. Эта многоликая функция была впервые открыта Хиротой как средство порождения солитонных решений, и его метод мы будем обсуждать в следующем разделе. Однако

ее подлинная значимость (и центральная роль в теории солитонов) не была понята до появления работы группы из Университета в Киото, включающей М. Сато, Миву, Дзимбо, Касиверу, Дейта, Ю. Сато [39], и я полагаю, следует честно признаться, что даже сейчас значение этой функции не понято до конца. Как сам дьявол, она многократно появляется в различных масках. Иногда она является простым многочленом (рациональные решения уравнения КдФ), иногда — конечной суммой экспонент (многосолитонное решение). В других случаях она становится более сложной, скажем, Θ-функцией Римана (умноженной на безобидный коэффициент) или корреляционной функцией. Звучит интригующе, не правда ли?

Сначала мы познакомимся с ней как с *потенциальной функцией*, вторая логарифмическая производная которой позволяет вычислить все сохраняющиеся плотности и потоки. Рассмотрим семейство потоков КдФ

$$q_{t_{2n+1}} = \frac{\partial}{\partial x} L^n q = 2 \frac{\partial}{\partial x} B_{n+1}. \tag{4.1}$$

Для удобства мы введем

$$w = \int^x q\,dx. \tag{4.2}$$

Тогда (4.1) имеет вид

$$w_{t_{2n+1}} = L^n q = 2B_{n+1}. \tag{4.3}$$

Следовательно, функцию $w(x, t_3, \ldots)$ можно рассматривать как потенциальную функцию для бесконечной последовательности $\{L^n q = 2B_{n+1}\}_0^\infty$. Сейчас известно, что производные всех этих функций относительно различных времен, а именно $(\partial/\partial t_{2m+1}) L^n q$, могут быть записаны как производные по x или t_1 от локальных величин. Поэтому естественно использовать потенциальную функцию $\tau(t_1, t_3, \ldots)$, определенную формулой

$$w = 2 \frac{\partial}{\partial t_1} \ln \tau(t_1, t_2, t_3, \ldots), \tag{4.4}$$

вместо самой w. Тем самым вы видите, что

$$\frac{\partial}{\partial t_{2m+1}} L^n q = \frac{\partial}{\partial t_1} 2 \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_{2m+1} \partial t_{2n+1}}$$

и, таким образом, все производные по времени последовательности $\{L^n q\}$ заданы одним уравнением в форме закона сохранения по отношению к выделенной переменной x. Заметим, однако, что выражение для потока, соответствующее скорости изменения плотности $L^n q$ в потоке $(\text{КдФ})_3$, наиболее удобно задать в виде

производной относительной времени t_{2n+1}, соответствующему потоку $(n+1)$ в иерархии КдФ. Этим подчеркивается тот факт, что когда ищутся решения интегрируемого уравнения, полезно понимать, что в действительности ищутся общие решения для всей иерархии потоков данного семейства.

Впервые в литературе я приведу формулу *тензора потока*

$$F_{2m+1,\,2n+1}=2\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_{2m+1}\partial t_{2n+1}}. \tag{4.5}$$

Заметим, в частности, что

$$L^n q=2\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_1 \partial t_{2n+1}}. \tag{4.6}$$

Для того чтобы вывести эту формулу, мы сначала выпишем общее уравнение для всех B_n. Так как

$$v_{t_{2n+1}}=\frac{1}{2}B_x^{(n)}v-B^{(n)}v_x, \tag{4.7a}$$

$$v_{t_{2m+1}}=\frac{1}{2}B_x^{(m)}v-B^{(m)}v_x, \tag{4.7b}$$

где

$$B^{(n)}=\lambda^n\sum_0^n\frac{B_r}{\lambda^r},$$

нетрудно показать, что

$$B^{(n)}_{t_{2m+1}}-B^{(m)}_{t_{2n+1}}+B^{(m)}B_x^{(n)}-B_x^{(m)}B^{(n)}=0. \tag{4.8}$$

Теперь определим

$$B=\lim_{n\to\infty}\frac{B^{(n)}}{\lambda^n},$$

разделим (4.8) на λ^n и перейдем к пределу $\lambda\to\infty$, считая $|\lambda|>1$. Тогда

$$B_{t_{2m+1}}=B_x^{(m)}B-B^{(m)}B_x. \tag{4.9}$$

Записывая (4.7) в виде системы для вектора $V=(v_1,\ v_2)^T$, $v_2=v$, $v_1=-v_{2x}+i\zeta v_2$, мы имеем $(\lambda=\zeta^2)$

$$V_{t_{2n+1}}=Q^{(2n+1)}V, \tag{4.10a}$$

где

$$Q^{(2n+1)}=\left(i\zeta B^{(n)}-\frac{B_x^{(n)}}{2}\right)H+\left(i\zeta B_x^{(n)}-\frac{B_{xx}^{(n)}}{2}-qB^{(n)}\right)E+B^{(n)}F, \tag{4.10b}$$

а H, E, F являются базисом

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\mathrm{sl}(2, C)$. Легко показать, что для

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{Q^{(2n+1)}}{\zeta^{2n+1}} = \sum_0^\infty \frac{Q_r}{\zeta^r} \tag{4.11}$$

уравнение (4.9) принимает лаксову форму с обычным матричным коммутатором

$$Q_{t_{2n+1}} = [Q^{(2n+1)}, Q]. \tag{4.12}$$

Приравнивая компоненты λ^{-m-1} в (4.9), мы находим

$$\frac{\partial B_{m+1}}{\partial t_{2n+1}} = B_{0x}B_{m+n+1} + \ldots + B_{nx}B_{m+1} - B_0 B_{m+n+1x} - \ldots - B_n B_{m+1x}. \tag{4.13}$$

В качестве примера (довольно трудного) я предлагаю показать, что правая часть этого выражения может быть записана как половина производной по x от

$$F_{2m+1,\,2n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\sum_{s=0}^{2m+1} sQ_{2m+1-s}Q_{2n+1+s} + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{2n+1} sQ_{2m+1+s}Q_{2n+1-s}\right\}, \tag{4.14}$$

где $\mathrm{Tr}(Q_iQ_j)$ — след произведения матриц и Q_j определена формулой (4.11). Ясно, что выражение (4.14) симметрично относительно замены m на n и наоборот. Простая перестановка индексов дает нам закон сохранения для каждого тензора потока:

$$\frac{\partial}{\partial t_{2k+1}} F_{2m+1,\,2n+1} = \frac{\partial}{\partial t_{2m+1}} F_{2n+1,\,2k+1} = \frac{\partial}{\partial t_{2n+1}} F_{2k+1,\,2m+1}.$$

Зная τ как функцию времен $x = t_1, t_3, t_5, t_{2n+1}, \ldots$, мы знаем все о решениях каждого члена семейства КдФ. В некотором смысле функция τ действует как потенциал, из которого могут быть получены все компоненты и все градиенты бесконечномерного вектора B относительно всех времен. Она также имеет вторую интерпретацию, которую мы будем обсуждать, когда перейдем к преобразованиям Бэклунда. Однако для того, чтобы расчистить путь, очень полезны следующие результаты,

которые собственные функции $v(x, t_3, \ldots)$ ставят в соответствие с функцией τ.

Результат, который я сейчас приведу, является формальным, потому что он использует (3.29a), т. е. асимптотическое разложение $v(x, t_3, \ldots, \zeta)$ в окрестности $\zeta = \infty$. (В зависимости от природы существенной особенности на ∞ формальное разложение (3.29a) может не являться равномерным во всей окрестности $\zeta = \infty$; однако для специальных классов решений, включая многосолитонные решения, формальное разложение (3.29a) является рядом Лорана для $\zeta = \infty$.) Зависимость асимптотического разложения от времен $t_3, t_5, \ldots$ обеспечивается заменой экспоненты $-i\zeta x$ в (3.29) на $-i \sum_0^\infty \zeta^{2k+1} t_{2k+1}$. Мы находим

$$v(x, t_3, \ldots) \sim \exp\left(i \sum \zeta^{2k+1} t_{2n+1}\right) e^{\Phi}, \tag{4.15a}$$

где

$$\Phi_x \sim \sum_1^\infty \frac{R_n}{(2i\zeta)^n}. \tag{4.15b}$$

(Для многосолитонных решений (4.15b) имеет место во всех секторах $\zeta = \infty$ и, значит, является рядом Лорана. Поэтому в (4.15) можно заменять асимптотический символ на знак равенства.) Запишем интегралы трех первых слагаемых (4.15b) в терминах функции τ:

$$\begin{aligned}
\Phi \sim \Phi_0 - \frac{\int q\,dx}{2i\zeta} - \frac{1}{4\zeta^2} q + \frac{1}{8i\zeta^3} \int (q_{xx} + q^2)\,dx + \ldots \\
= \Phi_0 - \frac{1}{i\zeta} \frac{\partial}{\partial t_1} \ln \tau - \frac{1}{2\zeta^2} \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_1^2} + \frac{1}{24 i\zeta^3} \times \\
\times \int (q_{xx} + 3q^2)\,dx + \frac{1}{12 i\zeta^3} q_x + \ldots = \Phi_0 - \frac{1}{i\zeta} \frac{\partial}{\partial t_1} \ln \tau - \\
- \frac{1}{2\zeta^2} \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_1^2} + \frac{1}{6i\zeta^3} \frac{\partial^3 \ln \tau}{\partial t_1^3} - \frac{1}{3i\zeta^3} \frac{\partial \ln \tau}{\partial t_3} \ldots,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где мы использовали тот факт, что

$$q_{xx} + 3q^2 = -4 \int^x q_{t_x} dx = -8 \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_1 \partial t_3}.$$

Продолжение этого процесса (см. для доказательства работу Флашки [86]) дает

$$\Phi - \Phi_0 \sim \ln \tau \left(t_{2k+1} - \frac{1}{i(2k+1)\zeta^{2k+1}}\right) - \ln \tau(t_{2k+1}).$$

Поэтому

$$v(x, t_3, \ldots; \zeta) \sim \exp\left(i \sum_0 \zeta^{2k+1} t_{2k+1}\right) \cdot \frac{\tau\left(t_{2k+1} - 1/i(2k+1)\zeta^{2k+1}\right)}{\tau(t_{2k+1})}. \tag{4.17}$$

Мы введем оператор

$$X(\zeta) = \exp\left(i \sum \zeta^{2k+1} t_{2k+1}\right) \exp\left(\sum \frac{-1}{i(2k+1)\zeta^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}\right). \tag{4.18a}$$

Операторы этого типа имеют тесное отношение к объектам, называемым в литературе вершинными операторами [101], [102]. Теперь мы видим, что

$$v(x, t_3, \ldots; \zeta) \sim \frac{1}{\tau} X(\zeta) \cdot \tau \tag{4.18b}$$

дает нам (формально) соотношение между функцией, которая порождает решения семейства КдФ, и собственными функциями $v(x, t_3 \ldots; \zeta)$. Эта частная формула будет использоваться, когда мы введем в разд. 4f преобразование Бэклунда.

4c. Симметрии, законы сохранения и интегралы движения. Рассмотрим частицу единичной массы с координатным вектором (q_1, q_2) и вектором импульса (p_1, p_2), движущуюся в плоскости под действием консервативного поля центральных сил. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V\left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right), \tag{4.19}$$

и движение задается формулой

$$\dot{z} = J\nabla H, \tag{4.20}$$

где $z = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, ∇ — градиент по этим четырем переменным и $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$; здесь I — единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Далее, интуитивно ясно, что мы могли бы выбрать для описания движения в любой системе отсчета, которая представляет собой поворот координат z в плоскости на угол θ,

$$z' = Rz,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

и где θ, которая определяет величину угла вращения, является произвольной. Поскольку как гамильтониан H, так и уравнения

движения инвариантны относительно действия группы вращений (это означает, что $H'(z'(z))=H(z)$ и $z'=J\nabla' H'$), то инфинитезимальное изменение $\partial z'/\partial\theta$, вычисленное при $\theta=0$, удовлетворяет линеаризованному уравнению (4.20). Читатель может проверить это сам. Для малых θ $q_1'=q_1+\theta q_2$, $\partial/\partial p_1'=\partial/\partial p_1+$ $+\theta(\partial/\partial p_2)$, и поэтому $\dot q_1'=\partial H'/\partial p_1'$ принимает вид $(\dot q_1+\theta\dot q_2)=$ $=((\partial/\partial p_1)+\theta(\partial/\partial p_2))H$ (напоминаем, что $H'(z')=H(z)$), что действительно имеет место.

Поэтому можно видеть, что свойство инвариантности гамильтониана и уравнений движения относительно действия группы вращения может быть выражено посредством того, что частная производная решения $\partial z/\partial\theta|_{\theta=0}$, вычисленная при $\theta=0$, является решением линеаризованного уравнения. Как мы уже подчеркнули, линеаризация может быть осуществлена относительно любого решения исходных уравнений (4.20).

Группу преобразований, под действием которых гамильтониан и уравнения движения не изменяются, мы назовем *симметрией* системы. Как мы упоминали, необходимое и достаточное условие того, чтобы действие непрерывной группы было симметрией, состоит в том, что ее инфинитезимальное действие, измеряемое здесь выражением $\delta(z)=\partial z/\partial\theta|_{\theta=0}$, является решением линеаризованных уравнений движения. О самой функции $\sigma(z)$ мы также будем говорить как о симметрии.

Симметрии очень полезны. В гамильтоновых системах каждая симметрия связана с интегралом движения (теорема Нётер), благодаря чему размерность системы может быть уменьшена на два. В упомянутом примере интеграл движения, связанный с группой вращения, является моментом количества движения. Угловая переменная, соответствующая моменту количества движения (одна из двух переменных действия в (4.19), другая сам H), может быть также исключена (она становится циклической или несущественной в гамильтоновом формализме) путем соответствующего выбора координат. Поэтому, фиксируя момент количества движения h, можно найти редуцированное уравнение размерности два. Действительно, в этом случае, используя полярные координаты $r=(q_1^2+q_2^2)^{1/2}$, получаем уравнение

$$\ddot r-\frac{h^3}{r^3}+\frac{\partial V}{\partial r}=0,$$

из которого с помощью анализа на фазовой плоскости легко описывается орбитальное движение частицы. Для некоторых потенциалов V движение $r(t)$ может быть точно вычислено в терминах известных функций.

Идея о том, что симметрия может быть использована для уменьшения размерности механической системы, была известна давно [87]. Однако в большинстве классических примеров симметрии были довольно очевидными и имели простые геометрические интерпретации (движение инвариантно относительно сдвига или вращения). Такими же представляются соответствующие законы сохранения, которые имеют соответственно простую физическую интерпретацию сохранения импульса или момента количества движения. Однако в солитонных уравнениях дело обстоит не так просто. Я уже обратил ваше внимание на то, что после первых двух законов сохранения уравнения КдФ (которые соответствуют сохранению массы (или импульса) и энергии) бесконечная серия, следующая за ними, не имеет физической интерпретации. Ее не имеют и соответствующие симметрии. По этой причине они называются скрытыми (подразумевается: неочевидными) симметриями. В начале гл. 5 мы увидим, что они связаны с действием некоторых бесконечномерных групп Ли. В случае семейства КдФ группа симметрии является группой Каца — Муди, соответствующей градуированной алгебре Ли $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, алгебре петель для $\mathrm{sl}(2, C)$. Позже в гл. 5 мы также обсудим метод редукции для этих случаев и покажем, используя обобщенный Марсденом и Вейнстейном [88] классический метод редукции, что семейства уравнений, заданные формулами (3.9) и (3.49), являются редукциями значительно более простых потоков на многообразии большей размерности.

Теперь давайте определим и идентифицируем симметрии и соответствующие законы сохранения семейства КдФ. На основании предыдущего примера мы назовем функцию $v(\mathbf{u})$, означающую $v(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, симметрией скалярного уравнения

$$u_t = Q(\mathbf{u}), \tag{4.21}$$

если $u + \varepsilon v(\mathbf{u})$ также удовлетворяет (4.21) для всех решений u этого уравнения при произвольно малом ε. Это означает, что $v(\mathbf{u})$ должно удовлетворять линеаризованному варианту уравнения (4.21), имеющему вид

$$v_t = Q'(\mathbf{u})[\mathbf{v}]. \tag{4.22}$$

Правая часть (4.22) обозначает пространственную производную (Фреше) от Q в точке $\mathbf{u}$ по направлению $\mathbf{v}$, т. е. $Q_u v + Q_{u_x} v_x + \ldots$, и определяется как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (Q(u + \varepsilon v(\mathbf{u})) - Q(u)).$$

Отметим, что левая часть (4.22) также может быть записана в виде $v'(\mathbf{u})\,[\mathbf{Q}]$, так как

$$v_t = v_u u_t + v_{u_x} u_{xt} + \ldots = v_u Q + v_{u_x} Q_x + \ldots .$$

Мы имеем много кандидатов в качестве симметрий для типичного представителя семейства КдФ (3.9)

$$q_{t_{2k+1}} = 2NB_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x} L^k q, \tag{4.23}$$

так как мы знаем, что все потоки (4.23) коммутируют, и поэтому q можно считать функцией бесконечного числа независимых переменных $x = t_1, t_3, \ldots, t_{2k+1}, \ldots$. Таким образом, мы можем дифференцировать (4.23) по t_{2j+1} и приходим к тому, что $\partial q/\partial t_{2j+1}$ удовлетворяет линеаризованному уравнению. Следовательно, симметриями всех без исключения членов семейства КдФ являются $\sigma_{2j+1} = \partial q/\partial t_{2j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Уравнение (4.23) также может быть один раз проинтегрировано и дает

$$\frac{\partial w}{\partial t_{2k+1}} = L^k q.$$

С каждой симметрией σ_{2j+1} связан локальный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t_{2k+1}} \cdot \frac{\partial w}{\partial t_{2j+1}} = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_{2k+1} \partial t_{2j+1}},$$

причем интегралами движения (когда x рассматривается как выделенная переменная) являются выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial t_{2j+1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} L^j q dx.$$

Читатель может проверить, что они являются интегралами движения; случай $j = 0$ представляет полную массу (или импульс), $j = 1$ — энергию, $j = 2$ пропорционален первой скрытой симметрии H_3, т. е. гамильтониану, генерирующему уравнение КдФ. (Однако следует указать, что функционал H_3 очень полезен при доказательстве устойчивости уединенных волн (см. [126]). Буссинеск назвал его моментом устойчивости.)

Существуют также другие симметрии. Они связаны с преобразованиями Бэклунда, которые я буду обсуждать в разд. 4f. Пока что рассмотрим следующую идею. Пусть $q(x, t_1, t_3, \ldots; \eta, x_0)$ является односолитонным решением семейства КдФ (3.9), $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$q = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta \left(x - x_0 + t_1 + \sum_1^{\infty} (-1)^k \eta^{2k} t_{2k+1} \right).$$

Так как оно является решением для всех значений параметров амплитуды η и местоположения x_0, то $\partial q/\partial\eta$ и $\partial q/\partial x_0$ являются решениями семейства линеаризованных уравнений КдФ и поэтому также являются симметриями. В частности, они являются решениями уравнений, линеаризованных вблизи тождественного состояния (либо $\eta = 0$, либо $x_0 = \infty$). Преобразованием Бэклунда является преобразование, которое порождает новые и более богатые решения (в том смысле, что преобразование может добавить дополнительные компоненты к данным рассеяния, которых прежде не было) из старых решений семейства КдФ. Они также могут быть построены непрерывным способом, начиная с тождественного состояния. Это означает, например, что мы можем добавить решение с произвольно малыми значениями параметра амплитуды η или при сколь угодно больших расстояниях так, что параметр $b = \exp(2\eta x_0)$ будет настолько малым, насколько мы захотим.

Поэтому в дополнение к симметриям, связанным с потоками (трансляция временных координат), существуют непрерывные симметрии, связанные с преобразованиями, которые преобразуют один тип решения в другой непрерывным образом. В последнем разделе этой главы, разд. 4g, я покажу, каким образом оба набора симметрий комбинируются в виде алгебры Каца — Муди, связанной с алгеброй петель алгебры $\mathrm{sl}(2, C)$.

4d. Рассказ о преобразованиях Хироты [34], [89]. Я вновь напомню, что в гл. 1 я кратко упомянул об остроумном методе Хироты для нахождения многосолитонных решений семейства КдФ. Основываясь как на форме, которую имеет N-солитонное решение, так и на аналогичном преобразовании для уравнения Бюргерса, Хирота связал с решением $q(x, t_3)$ уравнения КдФ функцию $\tau(x, t_3)$, определенную формулой

$$q(x, t_3) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau. \tag{4.24}$$

Как мы видели в разд. 4a, этот выбор является очень естественным в том смысле, что полный тензор потока семейства КдФ может быть выражен через одну скалярную функцию.

Теперь мы изложим формализм Хироты. Удобно определить

$$q = w_x. \tag{4.25}$$

Тогда уравнение КдФ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \tag{4.26}$$

после однократного интегрирования принимает вид

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0. \tag{4.27}$$

Константа интегрирования выбирается равной нулю в соответствии со свойством интересующего нас класса решений. (Для того чтобы устранить дробные коэффициенты в последующих вычислениях, я произведу масштабное преобразование (3.9) $t_{2n+1} \to 2^{2n} t_{2n+1}$.) Теперь вычислим следующие величины:

$$\frac{1}{2} w = \frac{\tau_x}{\tau},$$

$$\frac{1}{2} q = \frac{\tau\tau_{xx} - \tau_x^2}{\tau^2} = \frac{\tau_{xx}}{\tau} - \frac{\tau_x^2}{\tau^2},$$

$$\frac{1}{2} q_x = \frac{\tau_{xxx}}{\tau} - \frac{3\tau_x\tau_{xx}}{\tau^2} + 2\frac{\tau_x^3}{\tau^3},$$

$$\frac{1}{2} q_{xx} = \frac{\tau_{xxxx}}{\tau} - \frac{4\tau_x\tau_{xxx}}{\tau^2} - \frac{3\tau_{xx}^2}{\tau^2} + \frac{12\tau_x^2\tau_{xx}}{\tau^3} - 6\frac{\tau_x^4}{\tau^4},$$

$$\frac{3}{2} q^2 = 6\frac{\tau_{xx}^2}{\tau^2} - 12\frac{\tau_x^2\tau_{xx}}{\tau^3} + 6\frac{\tau_x^4}{\tau^4}.$$

Заметим, что если сложить две последние величины, что в точности дает комбинацию линейного дисперсионного члена и квадратичной нелинейности, входящей в (4.27), то исчезают все отношения, содержащие кубические члены или члены более высокого порядка и их производные, после чего мы находим

$$\frac{1}{2}(w_{xxx} + 3w_x^2) = \frac{1}{2} q_{xx} + \frac{3}{2} q^2 = \frac{\tau_{xxxx}}{\tau} - 4\frac{\tau_x\tau_{xxx}}{\tau^2} + 3\frac{\tau_{xx}^2}{\tau^2}.$$

Поэтому уравнение КдФ для новой переменной τ принимает вид

$$\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t + \tau\tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_{xx}^2 = 0. \qquad (4.28)$$

Первая интересная особенность этого уравнения состоит в том, что оно квадратично по τ. Заметим, что решение $\tau \equiv 1$ соответствует нулевому полю q. Далее пусть

$$\tau = 1 + e^{\theta(x,t)}, \qquad (4.29)$$

где функция $\theta(x, t) = kx + \omega t + \theta_0$ линейна по x и t. Форма (4.29) является точным решением, если взять $\omega = -k^3$; коэффициент при вторых гармониках $e^{2\theta}$ автоматически обращается в нуль. Попробуем испытать анзац

$$\tau = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2},$$

где $\theta_j = k_j x - k_j^3 t + \theta_{0j}$. Он не является решением, поскольку, хотя и обращаются в нуль коэффициенты при $e^{2\theta_1}$ и $e^{2\theta_2}$, но коэффициент при $e^{\theta_1+\theta_2}$ остается. Уберем его, добавив в анзац этот член, умноженный на постоянную, выбираемую так, чтобы

исключить коэффициент при $e^{\theta_1+\theta_2}$, который возникает по двум причинам: в результате квадратичной комбинации e^{θ_1} и e^{θ_2}, а также 1 и $e^{\theta_1+\theta_2}$. Коэффициенты при $e^{2\theta_2+\theta_1}$, $e^{\theta_1+2\theta_2}$ и $e^{2\theta_1+2\theta_2}$ чудесным образом обращаются в нуль. Причину этого мы скоро увидим. Поэтому представление

$$\tau(x, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_2+A_{12}} \tag{4.30}$$

дает решение для (4.26), если

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \tag{4.31}$$

В разд. 3d мы уже обсуждали природу решений (4.29) и (4.30) и интерпретировали $A_{12}(k_1, k_2)$ как функцию фазового сдвига. Здесь $k_j = -2\eta_j$. В частности, решение (4.30) может быть понято как нелинейная суперпозиция двух решений с амплитудами $\frac{1}{2}k_1^2$ и $\frac{1}{2}k_2^2$. Если $k_1^2 > k_2^2$, то при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ первый импульс догоняет второй, взаимодействует с ним и проходит сквозь второй импульс, аналогично тому, как обсуждалось в гл. 3. После взаимодействия больший импульс сдвигается вперед на расстояние $-A_{12}/|k_1|$ относительно положения, в котором он находился бы, двигаясь беспрепятственно, меньший смещается на расстояние $-A_{12}/|k_2|$ назад. Напоминаем, что $A_{12} < 0$.

Если уравнение записать в квадратичном виде, то всегда существует двухсолитонное решение. Однако это не так для трехсолитонных решений, для которых

$$\tau = 1 + \sum_{j=1}^{3} e^{\theta_j} + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant 3} e^{\theta_j+\theta_k+A_{jk}} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+A_{23}A_{31}+A_{12}}. \tag{4.32}$$

В этом случае для того, чтобы сократились коэффициенты при $e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$, коэффициенты в исходном квадратичном уравнении (4.28) должны быть подобраны абсолютно точно. Заметим также, что коэффициенты при $e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$ представляют собой экспоненту от функции фазового сдвига двухсолитонного взаимодействия. Это свойство сохраняется в общем случае, и N-фазным солитонным решением для КдФ является

$$\tau = \sum_{\mu_j=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j\theta_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_{ij}\mu_i\mu_j\right). \tag{4.33}$$

Рассмотрим случай $k_1^2 > k_2^2 > \ldots > k_n^2$. При изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ больший солитон приобретет фазовый сдвиг, состоящий из суммы фазовых сдвигов, возникающих при прохождении им через каждый солитон.

Сейчас я покажу вам, как строить эти решения. Но вначале я скажу о том, что N-солитонное решение каждого из членов семейства КдФ имеет в точности ту же форму. Единственным отличием является

$$\theta_j(x, t_3, t_5, \ldots) - \theta_{j0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k_j^{2n+1} t_{2n+1}. \tag{4.34}$$

(Я снова хочу подчеркнуть, что t_{2n+1} в (4.34) равны произведению 2^{-2n} на t_{2n+1}, которые определены в разд. 3b. Это изменение внесено с тем, чтобы исключить множители 1, 2^{-2}, 2^{-4}, ..., 2^{-n} в (3.14), (3.15), (3.16), (3.22), возникающие в интегральных членах аналогичного (4.28) уравнения для потока $(\text{КдФ})_{2n+1}$.)

Заслуживает внимания, что не только (4.33) с θ_j, определенными формулой (4.34), т. е. N-солитонное решение для всех потоков семейства КдФ, но и функция фазового сдвига $A_{ij}(k_i, k_j)$, и сам результирующий сдвиг

$$\delta_i = \sum_{N \geqslant j > i} -\frac{1}{|k_i|} A_{ij} + \sum_{i > j \geqslant 1} \frac{1}{|k_i|} A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.35}$$

одни и те же для всех уравнений семейства. Это обстоятельство менее интересно, после того как понято, что оно является прямым следствием коммутативности потоков и что $q(x, t_3, t_5, t_7, \ldots)$ является общим решением. Для того чтобы увидеть это, представим, что мы начинаем с двухсолитонного решения $q(x, 0, 0, \ldots)$ семейства КдФ. Исследуем эволюцию двумя способами. Вначале выберем заданную форму в качестве начального условия для $(\text{КдФ})_3$ и рассмотрим эволюцию по времени t_3 до тех пор, пока не осуществится взаимодействие. Затем в качестве начального условия возьмем $q(x, t_3, 0, \ldots)$ и предоставим достаточное время t_7 в потоке $(\text{КдФ})_7$. Так как скорость для $(\text{КдФ})_7$ также положительна, дальнейшего взаимодействия не происходит. Далее обратим процесс. Результирующая форма $q(x, t_3, 0, t_7, 0, \ldots)$ должна быть той же, и поэтому одинаковыми должны быть фазовые сдвиги, связанные с потоками t_3 и t_7.

Впоследствии мы будем часто пользоваться этим свойством, но вначале я хочу познакомить вас с новым методом, изобретенным Хиротой, и покажу, как строить N-солитонные решения. Хирота заметил, что слагаемые в (4.28) были очень похожи на формулу Лейбница для дифференцирования произведения. За исключением знаков, (4.28) до некоторой степени похожа на

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \tau^2 + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tau^2.$$

Хирота изобрел новый оператор D_x, определенный на упорядоченной паре функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$ следующим образом:

$$D_x\sigma\cdot\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sigma(x+\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)=\sigma_x\tau-\sigma\tau_x. \qquad (4.36)$$

Это определение можно распространить на функции $\sigma(x_1, x_2, \ldots)$, $\tau(x_1, x_2, \ldots)$ бесконечного числа переменных и на операторы более высокого порядка

$$D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\ldots D_{x_n}^{\alpha_n}\sigma\cdot\tau=\prod_{r=1}^{n}\lim_{\varepsilon_r\to 0}\frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial\varepsilon_r^{\alpha_r}}\sigma(x_r+\varepsilon_r)\tau(x_r-\varepsilon_r). \qquad (4.37)$$

Например,

$$D_xD_t\tau\cdot\tau=2(\varepsilon\varepsilon_{xt}-\tau_x\tau_t),$$
$$D_x^4D\tau\cdot\tau=2(\tau\tau_{xxxx}-4\tau_x\tau_{xxx}+3\tau_{xx}^2).$$

В этих обозначениях уравнение КдФ (4.28) принимает очень компактный вид

$$(D_xD_t+D_x^4)\tau\cdot\tau=0. \qquad (4.38)$$

Также упрощается вычисление многосолитонных решений. Для того чтобы увидеть это, посмотрим, как операторы D_x, D_t действуют на экспоненты. Легко показать, что

$$D_x^m e^{k_1x}\cdot e^{k_2x}=(k_1-k_2)^m e^{(k_1+k_2)x}. \qquad (4.39)$$

Для многочлена общего вида

$$P(D_x, D_t)e^{k_1x+\omega_1t}\cdot e^{k_2x+\omega_2t}=P(k_1-k_2, \omega_1-\omega_2)e^{(k_1+k_2)x+(\omega_1+\omega_2)t}. \qquad (4.40)$$

В общем случае, если мы возьмем

$$\theta_i=\sum_0^\infty(-1)^n k_i^{2n+1}t_{2n+1}, \qquad (4.41)$$

то

$$P(D_{t_1}, \ldots, D_{t_{2r+1}})e^{\theta_i}\cdot e^{\theta_j}=$$
$$=P\left(k_i-k_j, \ldots, (-1)^r\left(k_i^{2r+1}-k_j^{2r+1}\right), \ldots\right)e^{\theta_i+\theta_j}. \qquad (4.42)$$

Из этих формул можно видеть, почему коэффициенты при $e^{2\theta_1}$, $e^{2\theta_1+\theta_2}$, $e^{\theta_1+2\theta_2}$, полученные при рассмотрении двухсолитонных решений, автоматически обратились в нуль. Сначала отметим, что в случае класса уравнений, с которым мы будем иметь дело,

$$P(-D_{t_1}-D_{t_2}, \ldots)=P(D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots), \qquad (4.43)$$
$$P(0, 0, \ldots)=0 \qquad (4.44)$$

и

$$P(\mathbf{k}) \equiv P(k, -k^3, k^5, \ldots) = 0. \tag{4.45}$$

Последнее уравнение (4.45) выражает тот факт, что дисперсионное соотношение для солитонного решения

$$\tau = 1 + e^{\theta}, \ \theta = kx + \omega_3 t_3 + \omega_5 t_5 + \ldots$$

выполняется при $\omega_{2r+1} = (-1)^r k^{2r+1}$. Более того, оно дает однопараметрическое семейство поверхностей, на которых алгебраические функции $x_1 x_3 + x_1^4$ или в общем случае $P(x_1, x_3, \ldots)$, очевидным образом связанные с уравнениями Хироты (4.38), обращаются в нуль.

Вычислим функцию фазового сдвига $A_{12}(k_1, k_2)$ общего уравнения

$$P(D_{t_1}, D_{t_3}, \ldots)\tau \cdot \tau = 0, \tag{4.46}$$

выраженного в представлении Хироты. P — многочлен от своих аргументов. Возьмем

$$\tau(t_1, t_3, t_5, \ldots) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1 + \theta_2 + A_{12}}, \tag{4.47}$$

где $\theta_j = \sum (-1)^r k_j^{2r+1} t_{2r+1}$. Коэффициенты при e^0, $e^{2\theta_1}$, $e^{2\theta_2}$ и $e^{2\theta_1 + 2\theta_2}$ представляют собой $P(0)$ и поэтому равны нулю. Коэффициент при таком слагаемом, как $e^{2\theta_1 + \theta_2}$, возникающий при умножении $e^{\theta_1 + \theta_2}$ на e^{θ_1}, это

$$P(k_1 + k_2 - k_2, -k_1^3 + k_2^3 - k_2^3, \ldots) = P(k_1, -k_1^3, \ldots),$$

который также равен нулю. Единственным не равным нулю слагаемым является $e^{\theta_1 + \theta_2}$, которое имеет коэффициент

$$P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + e^{A_{12}} P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2),$$

где по определению

$$P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = P(k_1 - k_2, -k_1^3 + k_2^3, \ldots, (-1)^r (k_1^{2r+1} - k_2^{2r+1}), \ldots). \tag{4.48}$$

Таким образом, в общем случае

$$e^{A_{12}} = -\frac{P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}. \tag{4.49}$$

Так как для уравнения $(\text{КдФ})_3$ (4.38) многочлен $P(x_1, x_3, x_5, \ldots)$ есть $x_1 x_3 + x_1^4$, то

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \tag{4.50}$$

Кроме того, мы имеем мощный результат, состоящий в том, что поскольку фазовый сдвиг каждого члена семейства КдФ один

и тот же, то члены данного семейства характеризуются всей совокупностью многочленов $P(D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots)$, обладающих в дополнение к (4.43)—(4.45) свойством

$$(k_1 - k_2)^2 P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + (k_1 + k_2)^2 P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = 0. \qquad (4.51)$$

Для того чтобы представить это утверждение в должном контексте, давайте проанализируем сделанное. Мы нашли, что введением преобразования (4.24) уравнение КдФ можно записать в представлении Хироты

$$P(D_{t_1}, D_{t_3}, \ldots)\tau \cdot \tau = 0, \qquad (4.52)$$

где $P(x_1, x_3, \ldots) = x_1 x_3 + x_1^4$. Далее я сформулировал утверждение, что оно обладает N-солитонным решением для произвольного N. Естественным образом возникают следующие вопросы:

(i) Приводит ли каждый четный многочлен $P(x_1, x_3, \ldots)$ к появлению N-солитонных решений при $N > 2$? На основании последних расчетов нам известно, что для любого четного P можно всегда найти двухсолитонное решение. Но как обстоит дело для $N > 2$? Ответ отрицателен. Многочлен P должен будет удовлетворять жестким ограничениям.

(ii) Можно ли в удобной форме охарактеризовать эти ограничения и посредством этого выписать все многочлены $P(x_1, x_3, \ldots)$, которые допускают N-солитонные решения? Мы будем называть их *многочленами Хироты*. Ответ положителен. Мы можем задать более конкретный вопрос.

(iii) Задан многочлен P, скажем $x_1 x_3 + x_1^4$. Можем ли мы (a) определить, имеет ли он N-солитонные решения для произвольного N, (b) найти в представлении Хироты все другие члены семейства и (c) найти все другие многочлены Хироты, совместные с заданным, и определить, сколько их существует? Ответами, по-видимому, являются ДА, ДА и ДА. Я покажу, как подойти к доказательству, но, однако, я пока не придал ему строгость или полноту. Я должен объяснить более подробно, что означает вопрос (c). Если τ такова, что удовлетворяет

$$(D_{t_1} D_{t_3} + D_{t_1}^4)\tau \cdot \tau = 0,$$

то удовлетворяет ли она другому уравнению с весом 6? Заметим, что многочлены Хироты однородны в том смысле, что если $D_{t_{2k+1}}$ мы поставим в соответствие вес $2k+1$ и будем складывать веса в произведениях, то каждый член в уравнении Хироты имеет один и тот же вес. Например, вес, связанный с (4.38), равен 4. Суть вопроса состоит в следующем. Дано, что τ удовлетворяет (4.38); каким образом «применить» оператор D_x^2 к этой функции? Простым умножением это сделать нельзя.

Четвертый вопрос, который приводит нас к выяснению связи всех различных подходов, ставится следующим образом:

(iv) Существует ли алгебраический способ объяснения специального вида многочленов Хироты? Я надеюсь, что это так. Что я хотел бы иметь, так это ответ на вопрос (iv), который данные ограничения ставит в соответствие алгебрам, связанным с sl(2). Причина этого заключается в моей вере (читатель увидит предпосылки этому в гл. 5) в то, что данное свойство является «общим знаменателем» всех «методов» анализа солитонных уравнений, введенных в данной главе.

Вернемся теперь к вопросам (i), (ii) и (iii). Предположим, что P удовлетворяет (4.43)—(4.45), и будем искать трехсолитонное решение для (4.51) в следующем виде:

$$\tau = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_2+\theta_3+A_{23}} + e^{\theta_3+\theta_1+A_{31}} + e^{\theta_1+\theta_2+A_{12}} + \\ + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+A_{12}A_{31}+A_{23}}.$$

Используя свойства (4.43)—(4.45) и (4.50), убеждаемся, что все слагаемые, исключая $e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$, имеют нулевые коэффициенты. Коэффициент при $e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$ строится из четырех квадратичных взаимодействий и имеет вид

$$p_{123}e^{A_{23}}P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + e^{A_{12}+A_{13}+A_{23}}P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3),$$

где p_{123} — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3 и

$$P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) = P(k_1 + k_2 + k_3,\ -k_1^3 - k_2^3 - k_3^3,\ k_1^5 + k_2^5 + k_3^5, \ldots).$$

Это выражение также может быть переписано (с использованием (4.50)) в виде

$$p_{123}P(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)P(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1)P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \\ + P(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)P(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1)P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \quad (4.53)$$

Поэтому условием того, что (4.52) имеет трехсолитонное решение, является равенство нулю выражения (4.53). Далее, аналогичным путем можно показать, что условием существования N-солитонных решений уравнения (4.52) является условие

$$\sum_{\mu_j=-1,1} P\left(\sum_1^N \mu_l \mathbf{k}_l\right) \prod_{j>i} P(\mu_j \mathbf{k}_j - \mu_i \mathbf{k}_i)\mu_i\mu_j = 0. \quad (4.54)$$

Мы назовем его условием Хироты. Будем говорить, что уравнение, приводимое к представлению Хироты с многочленом P, удовлетворяющим (4.54) (и некоторым дополнительным свойствам, подобным (4.23)—(4.25)), обладает *H-свойством*. В частных случаях, таких как $(\text{КдФ})_3$, где $P = x_1x_3 + x_1^4$, можно показать, что (4.54) имеет место. Доказательство обычно проводится

по индукции. Однако мне представляется ясным, что это условие весьма неуклюже, неудобно и трудно доказывается в общем случае, поэтому полезно иметь альтернативный подход.

Я утверждаю, не имея пока завершенного доказательства, следующее. Рассмотрим многочлен $P_L(x_1, x_3, \ldots)$ с заданным весом и вычислим для него функцию фазового сдвига

$$e^{A_{12}} = -\frac{P_L(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{P_L(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}. \tag{4.55}$$

Затем вычислим все многочлены P_M, которые обладают тем же фазовым сдвигом. Зачастую их больше одного для каждого веса. Если существует по крайней мере один такой многочлен для бесконечного ряда весов, то справедливы три следующих утверждения:

(i) P_L является многочленом Хироты, т. е. для произвольного N обладает N-солитонным решением (удовлетворяющим (5.54)).

(ii) Каждый P_M порождает уравнение Хироты $P_M\tau\cdot\tau = 0$ в семействе P_L.

(iii) Каждое уравнение $P_M\tau\cdot\tau = 0$, содержащееся в списке, является многочленом Хироты (т. е. удовлетворяет (4.54) и поэтому обладает N-солитонным решением для произвольного N).

Проиллюстрируем эти утверждения на некоторых конкретных примерах. В качестве P_4 выберем $x_1x_3 + x_1^4$. Тогда предположим, что P_6 имеет следующий вид (из (4.43) следует, что допустимы только четные значения весов):

$$P_6 = x_1x_5 + ax_3^2 + bx_1^3x_3 + cx_1^6.$$

Ясно, что (4.43) и (4.44) удовлетворяются. То же верно для (4.45), если

$$1 + a - b + c = 0. \tag{4.56}$$

Теперь потребуем, чтобы

$$(k_1 + k_2)^2 P_6(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + (k_1 - k_2) P_6(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = 0$$

имело место для всех k_1, k_2. Левую часть можно записать в виде

$$2(k_1 + k_2)^2 (k_1 - k_2)^2 \{k_1^4 + k_1^2k_2^2 + k_2^4 +$$
$$+ a(k_1^4 + 3k_1^2k_2^2 + k_2^4) - b(k_1^4 + k_2^4) + c(k_1^4 + 6k_1^2k_2^2 + k_2^4)\}.$$

Поэтому дополнительно к (4.56) мы должны выбрать

$$a = -2c - 1/3. \tag{4.57}$$

Следовательно, поскольку c произвольно,

$$P_6 = x_1x_5 + x_1^6 + \frac{5}{3}(x_1^3x_3 + x_3^2) + (c + 1)(x_1^6 - 2x_3^2 - x_1^3x_3) \tag{4.58}$$

представляет собой однопараметрическое семейство многочленов Хироты с весовым значением 6, базисными многочленами которого служат

$$P_6^{(1)}(x_1, x_3, x_5, \ldots) = x_1x_5 - x_1^6 + \frac{3}{5}(x_1^3x_3 + x_3^2), \tag{4.59a}$$

$$P_6^{(1)}(x_1, x_3, x_5) = x_1^6 - 2x_3^2 - x_1^3x_3. \tag{4.59b}$$

Представлением Хироты для $(\text{КдФ})_5$ является

$$P_6^{(1)}(D_{t_1}, D_{t_3}, D_{t_5})\tau\cdot\tau = 0, \tag{4.60}$$

и (4.59b) представляет собой уравнение, найденное «применением» $D_{t_1}^2$ к

$$P_4(D_1, D_{t_3})\tau\cdot\tau = 0.$$

Отметим, как важно располагать в задаче тремя временами. $(\text{КдФ})_5$ не может быть выражено в представлении Хироты только в терминах t_1 и t_5!

Я предоставляю читателю убедиться в том, что

$$P_8^{(1)} = x_1x_7 - \frac{1}{3}x_3x_5 + \frac{2}{3}x_1^3x_5, \tag{4.61a}$$

$$P_8^{(2)} = x_1^8 + 4x_1^3x_5 + 5x_3x_5, \tag{4.61b}$$

$$P_8^{(3)} = -x_3x_5 + x_3x_1^5, \tag{4.61c}$$

$$P_8^{(4)} = -x_1^3x_5 + x_3^2x_1^2, \tag{4.61d}$$

где $P_8^{(r)}\tau\cdot\tau = 0$, $r = 1, 2, 3, 4$. $P_8^{(1)}\tau\cdot\tau = 0$ является представлением Хироты для $(\text{КдФ})_7$. $P_8^{(r)}$, $r = 2, 3, 4$, являются тем, что возникает в результате „применения“ $D_{t_1}^2$, $D_{t_1}^4$ и $D_{t_1}^2$ к соответствующим комбинациям (4,59a, b) и $(D_{t_1}D_{t_3} + D_{t_1}^4)\tau\cdot\tau = 0$.

Повторяя этот процесс, нетрудно видеть, что для каждого весового значения P_{2M}, $M > 2$, существует несколько многочленов Хироты. Я укажу вам лучший способ интерпретации этого по сравнению с просто «применением $D_{t_1}^2$ к (4.37)», когда мы вновь будем обсуждать этот вопрос в гл. 5. Я также предложу идею подсчета числа многочленов для каждого весового значения.

В качестве упражнения предлагаю читателю вычислить последовательности, представляемые многочленами

$$P = x_1x_5 - x_1^6, \tag{4.62a}$$

$$P = x_1x_7 + x_1^8. \tag{4.62b}$$

P из (4.62a) порождает серию Котеры — Савады [104] и обладает нетривиальными многочленами при бесконечном наборе

весовых значений, который не включает всех четных номеров. Можете ли вы определить, что они из себя представляют? С другой стороны, (4.62b) не обладает бесконечным набором многочленов с одной и той же функцией фазового сдвига. Более того, похоже, что у него их вообще нет. Поэтому оно имеет только двухсолитонное решение.

Также открытыми остаются следующие вопросы:

(i) Можно ли охарактеризовать свойства, необходимые для выражения уравнения в представлении Хироты? Коль скоро уравнение представлено в этом виде, известно, что оно обладает двухсолитонным решением. Имеет ли оно N-солитонное решение при произвольном N, зависит от того, можно ли найти бесконечную серию P_M, удовлетворяющую условию

$$P_L(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)P_M(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)-P_L(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)P_M(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)=0,$$

где P_L — заданный многочлен. Эта формула весьма содержательна, поскольку она выражает то, что оказывается условием коммутируемости многочленов и естественным образом приводит к определению скобок Пуассона на многообразии многочленов.

(ii) Предположим, что можно найти лишь конечное число таких P_M. Возможно ли это или, если найден один P_M, то их должно существовать бесконечное число? Если последнее неверно, то значит ли это, что при условии существования M многочленов P_M существуют N-солитонные решения вплоть до $N\leqslant N(M)$?

4е. Свойство Пенлеве[1])

(i) *Классический случай.* Рассмотрим систему фуксовых дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dz}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{z-a_j}V, \tag{4.63}$$

где V есть m-мерный вектор, а A_j являются постоянными $(m\times m)$-матрицами. В общем случае фундаментальным решением уравнения (4.63) является многозначная функция комплексной переменной z. Действительно, если мы обойдем регулярную особенность в точке a_j, то после обхода $\Phi=\Phi(a_j+(z-a_j)e^{2\pi i})$, причем фундаментальная матрица решений (4.63) не равна $\Phi(z)$; вместо этого ее столбцы являются линей-

[1]) Смотрите на с. 197 историческое замечание об основополагающей работе С. Ковалевской.

ной комбинацией столбцов $\Phi(z)$. Матрица M_j, связывающая $\Phi(z)$ и $\Phi(a_j+(z-a_j)e^{2\pi i})$,

$$\Phi(a_j+(z-a_j)e^{2\pi i})=\Phi(z)M_j, \tag{4.64}$$

называется матрицей монодромии. Можно поставить следующий вопрос. Как можно представить A_j в виде функции положения полюсов a_r так, чтобы группа (легко видеть, что они образуют группу) матриц монодромии не изменялась? Общий ответ на этот вопрос был дан Шлезингером [90]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial a_r}=\frac{[A_r, A_j]}{a_j-a_r}, \quad \sum_1^n \frac{\partial A_j}{\partial a_j}=0. \tag{4.65}$$

Для $m=2$ линейным уравнением является система 2×2, ее регулярные особенности могут быть локализованы в фиксированных точках $z=0$, 1, ∞ и одна точка $z=s$ подвижна. Вообще говоря, существуют двенадцать подгоночных параметров — элементов матриц A_j, $j=1$, 2, 3, но все они могут быть выражены в терминах одной функции $y(s)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y''+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{y-s}\right)y'-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-s}\right)y'^2-$$
$$-2\frac{y(y-1)(y-s)}{s^2(s-1)^2}\left(\alpha-\beta\frac{s}{y^2}+\gamma\frac{s-1}{(y-1)^2}-\delta\frac{y(y-1)}{(y-s)^2}\right)=0. \tag{4.66}$$

Уравнение (4.66) является наиболее общим уравнением второго порядка вида

$$y''=R(y, y', s), \tag{4.67}$$

где R — рациональная функция по y, y', аналитичная по s, которая имеет следующее свойство.

Свойство Пенлеве. Положение любой алгебраической, логарифмической или существенной особенности решений уравнения не зависит от начальных условий. Это означает, что от произвольных констант интегрирования может зависеть только положение полюсов.

Уравнения второго порядка вида (4.67) с такими свойствами (условия на R и свойства Пенлеве) были изучены с исчерпывающей подробностью Пенлеве и Гамбье [91]. Существуют пятьдесят канонических типов уравнений, которые включают такие уравнения, как $y''=y$, разрешаемых в эллиптических функциях и имеющих вид

$$y''=2y^3+cy-\nu, \tag{4.68}$$

и шесть типов уравнений, решения которых не могут быть выражены (исключая специальные предельные случаи) в терминах известных специальных функций. Эти шесть уравнений названы уравнениями Пенлеве и их решения — трансцендентами Пенлеве. Читатель может найти список этих уравнений в работе Айнса [92]. Два уравнения, которые появляются в этих лекциях, это второе,

$$q_{xx} = xq + 2q^3 - \nu, \tag{4.69}$$

и третье (после преобразования $z = e^u$),

$$(xu_x)_x = -\operatorname{sh} u, \tag{4.70}$$

уравнения Пенлеве.

Далее, какое отношение все это имеет к полностью интегрируемым дифференциальным уравнениям в частных производных или, в более общей форме, к полностью разрешимым физическим моделям? Удивителен следующий факт: обнаружено, что нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые возникают очень естественным образом в этих точно решаемых моделях, обладают свойством Пенлеве. Не верится, чтобы этот факт был случайностью. Вероятнее, что существуют глубокие внутренние связи между точно решаемыми моделями и свойством Пенлеве. В следующем разделе я дополнительно прокомментирую эту идею.

(ii) *Гипотеза* АРС (Абловиц, Рамани, Сегур). В 1977 г. Абловиц и Сегур [93], [35] отметили, что после того как была установлена точная разрешимость уравнений

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \tag{4.71}$$

$$v_t - 6v^2 v_{xx} + v_{xxx} = 0 \tag{4.72}$$

(при определенных граничных условиях), можно также решить нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные наложением различных свойств симметрии на эти уравнения. Например, галилеева инвариантность означает, что (4.71) имеет решения вида $q(x, t) = f(X = x - ct)$, удовлетворяющие уравнению

$$-cf_X + 6ff_X + f_{XXX} = 0.$$

Масштабная инвариантность означает, что если $q(x, t)$ удовлетворяет (4.71), то то же имеет место для $\beta^2 q(\beta x, \beta^3 t)$ и, если $v(x, t)$ удовлетворяет (4.72), то это верно и для $\beta v(\beta x, \beta^3 t)$. Полагая

$$v(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} f\left(X = \frac{x}{(3t)^{1/3}}\right),$$

после однократного интегрирования мы получаем

$$f_{XX} = Xf + 2f^3 - \nu, \tag{4.73}$$

т. е. второе уравнение Пенлеве (4.69). В качестве упражнения я попрошу читателя показать, что при помощи подходящего преобразования (подсказка: взгляните на преобразования Миуры) решения уравнения (4.71) вида $q(x, t) = (1/(3t)^{2/3}) g(x/(3t)^{1/3})$ удовлетворяют (4.73) при $\nu = 0$.

Абловиц и Сегур указали, что однопараметрическое семейство решений (4.73) при $\nu = 0$, убывающих экспоненциально при $x \to \infty$ и алгебраически при $x \to -\infty$, может быть найдено непосредственным применением метода обратной задачи. Основание для этих ограничений состоит в том, что метод обратной задачи требует, чтобы решения $q(x, t)$ стремились к нулю на обеих бесконечностях. В разд. 5f (iii) я расскажу, как искать общее решение начальной задачи для уравнения (4.73).

Далее, зная специфические свойства решений уравнения Пенлеве и заметив, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, выводимые из известных полностью интегрируемых уравнений, обладают этим свойством, Абловиц и Сегур, к которым на этом этапе присоединился Рамани [35], высказали предположение, что это верно всегда: а именно, все обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные из полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, обладают свойством Пенлеве. В некоторых случаях может понадобиться некоторая изобретательность при выборе зависимой переменной (см. (4.70)). Большим преимуществом этой идеи является то, что она дает простой и конструктивный тест на интегрируемость.

Проиллюстрируем это на примере (4.73) с $\nu = 0$. Предположим, что X_0 является полюсной сингулярностью функции $f(X)$. Теперь мы должны построить ряд Лорана для f в окрестности X_0

$$f(X) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (X - X_0)^n. \tag{4.74}$$

Легко показать, что для того, чтобы (4.74) удовлетворяло уравнению (4.73), N должно быть единицей. Подстановка (4.74) в (4.73) дает систему нелинейных алгебраических уравнений

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = a_{n-1} + X_0 a_n + \\ + 2 \sum_{j,k,l=-1} a_j a_k a_l, \quad j + k + l = n, \tag{4.75}$$

для $n \geqslant 3 (a_n = 0,\ n < -1)$, к решению которой мы переходим методом итераций, выражая a_{n+2} через коэффициенты более низ-

кого порядка. Это можно сделать только в том случае, если существует совместность при значениях $n=-3$, $n=1$, что необходимо, поскольку в каждом случае мы получим коэффициенты a_{n+2} равными нулю, если не будут выполнены условия

$$a_{-1}^2=1, \tag{4.76}$$

$$a_0+X_0a_1+6a_{-1}a_1^2=0. \tag{4.77}$$

Мы находим, что для $n=-2, -1, 0$

$$a_0=0, \quad a_1=-\frac{X_0a_{-1}}{6}, \quad a_2=-\frac{a_{-1}}{4}; \tag{4.78}$$

(4.76) и (4.77) при этом удовлетворяются выбором $a_{-1}=\pm 1$. После этого все a_n определены однозначно, и нетрудно показать, что полученный в результате ряд сходится для достаточно малых значений $X-X_0\neq 0$. Данное семейство решений имеет два свободных параметра X_0 и a_3, что и следовало ожидать, поскольку уравнение имело второй порядок. Если бы условие совместности (4.77) не было выполнено, то в локальное разложение для $f(X)$ следовало включить слагаемое $\ln(X-X_0)$, которое означало бы, что X_0 является точкой ветвления решения. Если бы это имело место, положение точки ветвления зависело бы от начальных условий и уравнение не имело бы свойства Пенлеве.

Большим преимуществом гипотезы АРС является простота в применении. Ее недостаток состоит в том, что для тестирования на интегрируемость необходимо проверить *все* обыкновенные дифференциальные уравнения, связанные с симметриями дифференциального уравнения в частных производных. Было бы лучше, если бы существовала возможность непосредственно изучать и тестировать само исходное уравнение. Проделаем это для (4.71), используя разложение

$$q(x, t)=\frac{a_{-2}}{(x-x_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(x-x_0)}+a_0+a_1(x-x_0)+\ldots, \tag{4.79}$$

где x_0 и все коэффициенты могут быть функциями от t. Подстановкой в (4.71) мы находим уравнение

$$n(n-1)(u-2)a_n+6\sum_{\substack{-2\\ r+s=n-2}}^{\infty} ra_ra_s+$$
$$+a_{n-3,t}-(n-2)a_{n-2}x_{0t}=0, \quad n\geqslant -2, \tag{4.80}$$

которое решаем для a_n, выражая его через a_{n-r}. Для $n=-2$, -1, 0, 1 мы находим $a_{-2}=-2$, $a_{-1}=0$, $a_0=(1/6)x_{0t}$, $a_1=0$. При $n=2$ коэффициент a_2 равен нулю, но тем же является сумма других слагаемых в уравнении. Следовательно, $a_2(t)$ — про-

извольная функция. Для $n=3$ находим $a_3=\frac{1}{36}x_{0tt}$. Если $n=4$, вновь равен нулю коэффициент при a_4, но уравнение при этом имеет вид

$$24a_4+6(2a_0a_2+2a_{-2}a_4)+a_{1t}-2a_2x_{0t}=0$$

и удовлетворяется тождественно. Все последующие a_n определяются однозначно. Поэтому $q(x, t)$ имеет локальное решение, которое может быть записано в виде ряда Лорана с тремя произвольными функциями от t, $x_0(t)$, $a_2(t)$, $a_4(t)$. Этот подход был развит Вейссом, Табором и Карнивейлем [96] и модифицирован Крускалом. Я отсылаю читателя к их работе. В сущности, гипотеза АРС была модифицирована так, что теперь она означает существование локального разложения функции $q(x, t)$ в ряд Лорана в окрестности тех поверхностей в (x, t)-пространстве, на которых она имеет полюсное поведение.

То, что я хотел здесь сделать, — это привлечь ваше внимание к связи этих результатов с результатами последнего раздела, поскольку я верю в существование непосредственного соответствия между свойством Хироты и свойством Пенлеве заданного уравнения. В обоих случаях для того, чтобы соответствующее свойство имело место, должно происходить нечто магическое. В первом из них должна существовать возможность, во-первых, записать заданное уравнение в представлении Хироты и, во-вторых, показать, что полученный многочлен принадлежит классу, допускающему N-солитонные решения при произвольном N. Это означает, что его коэффициенты, унаследованные из исходных уравнений, должны быть связаны друг с другом специальными соотношениями. Это также именно то, что должно иметь место, когда применяется тест Пенлеве. Коэффициенты должны быть в точности такими, чтобы ряд (4.74) (или (4.79)) был рядом Лорана.

Но на самом деле связь более глубока, чем это простое наблюдение. Заметим, что

$$q(x, t)=-2\frac{\tau_x^2}{\tau^2}+2\frac{\tau_{xx}}{\tau}, \tag{4.81}$$

и поэтому полюс второго порядка функции $q(x, t)$ является простым нулем вездесущей τ-функции $\tau(x, t_3, t_5, \ldots)$. Далее, мы знаем, что (4.71) обладает бесконечной серией рациональных решений (см. разд. 3h), соответствующей бесконечному ряду многосолитонных решений, и требование, предъявляемое к P для существования того и другого, одно и то же, а именно условие Хироты (4.54). Рациональные решения определяются выражением τ в виде конечной полиномиальной функции $x=t_1$, t_3,

t_5, ... заданного веса (x, x^3+12t_3, ...). Условия, при которых можно получить последовательность конечных полиномиальных решений, являются в точности условиями Хироты. Теперь взглянем на это с точки зрения свойства Пенлеве. Если τ может быть выражена как конечный многочлен x, t_3, ..., то ясно, что она допускает представление в виде ряда Тейлора в окрестности точек, лежащих на поверхности $\tau=0$. Но если τ имеет разложение в виде ряда Тейлора вблизи поверхности, где она обращается в нуль, то соответствующая $q(x, t_3, \ldots)$ обладает локальным разложением в ряд Лорана вблизи своих полюсов.

Предположение, что τ-функция является аналитической по каждому из своих аргументов, все еще подлежит доказательству. Одной из трудностей является то, что это верно лишь для определенных классов решений. Прежде всего необходимо найти удобный способ исключения всех точек, где τ и, следовательно, q имеют алгебраические, логарифмические или существенные особенности. Разумеется, этот набор точек фиксирован и не зависит от начальных условий.

Однако я убежден, что тест Пенлеве содержит больше информации, чем просто ответ «да» или «нет» на вопрос об интегрируемости уравнений. Хотя работа до сих пор носит предварительный характер, существуют все указания на то, что точно так же, как в случае многочленов Хироты, свойство Пенлеве обусловлено внутренней алгебраической структурой, лежащей в их основе. Другими словами, мое предположение состоит в том, что некоторая версия теста Пенлеве приводит к той же самой алгебраической структуре (в случае КдФ- и АКНС-иерархий это будет бесконечномерная алгебра петель, связанная с $\mathrm{sl}(2)$), которая возникла бы при использовании метода Уолквиста — Эстабрука, обсуждаемого в первой части гл. 5.

Однако по-прежнему существует много досаждающих вопросов. Крускал постоянно подвергал сомнению необходимость устранения логарифмической и других особенностей. В самом деле, кто стал бы отрицать, что уравнение $dy/dx=(y-\alpha)\times\times(y-\beta)(y-\gamma)\ldots$ является интегрируемым (так ли это?) и тем не менее x как функция y имеет логарифмические особенности. Более того, число контрпримеров предположению, что полностью интегрируемые дифференциальные уравнения имеют свойство Пенлеве (на что указывалось в последней серии статей), растет, и самая последняя весть из Парижа (где работает группа Рамани) состоит в том, что тест Пенлеве умер! Хотя это вне всякого сомнения, является преувеличением, тем не менее ясно, что необходимы некоторые изменения. Крускал сделал предположение, что тест Пенлеве — слишком сильное утверждение, и он считает, что необходим более тонкий тест, в котором

анализируется поведение уравнения вблизи слияния полюсов (т. е. «наихудшее» сингулярное поведение уравнения). Его идея нова, и я не буду пытаться здесь описывать ее до тех пор, пока она не будет опубликована. Идея имеет по крайней мере две привлекательные черты. Первая состоит в том, что она содержит исходный тест Пенлеве в случае, когда он применим. Однако более важно то, что она ведет в сердце природы интегрируемости (что такое полностью интегрируемая система?) и непосредственно связана с тонкими свойствами, отличающими эргодические и интегрируемые потоки на компактных многообразиях. (Например, $x' = \alpha$, $y' = \beta$ представляет собой интегрируемый поток на торе $0 < x, y < 1$ (на котором склеиваются противоположные границы) только в том случае, если отношение α и β рационально. Почему? Причина в том, что на торе интеграл движения $C = \beta x - \alpha y$ ведет себя очень нерегулярно и в действительности неизмерим, если α/β иррационально.)

4i. Преобразование Бэклунда. Центральная и постоянно повторяющаяся тема метода обратной задачи рассеяния состоит в том, что рассматриваемые нелинейные уравнения возникают как условия интегрируемости переопределенных линейных систем. Мы показали, каким образом уравнение КдФ и все члены его семейства представляют условия интегрируемости линейных уравнений вида

$$v_{xx} + (\zeta^2 + q(x, t_3, \ldots))\, v = 0 \tag{4.82}$$

и

$$v_{t_{2k+1}} = \left(\frac{1}{2} B_x^{(k)} + c\right) v - B^{(k)} v_x. \tag{4.83}$$

Запишем пару уравнений для уравнения КдФ ($4t = t_3$)

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \tag{4.84}$$

в виде системы

$$V_x = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ -1 & i\zeta \end{pmatrix} V \tag{4.85}$$

и

$$V_t = \begin{pmatrix} -4i\zeta^3 + 2iq\zeta - q_x & 4\zeta^2 q + 2iq_x\zeta - q_{xx} - 2q^2 \\ -4\zeta^2 + 2q & 4i\zeta^3 - 2iq\zeta - q_x \end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

где $V = (v_1 = -v_x + i\zeta v,\ v_2 = v)^T$. Потерпите, пока я выполню следующие небольшие вычисления. Определим

$$\gamma = \frac{v_1}{v_2} \tag{4.87}$$

и найдем

$$\gamma_x = -2i\zeta\gamma + q + \gamma^2, \tag{4.88a}$$

$$\gamma_t = (-8i\zeta^3 + 4iq\zeta - 2q_x)\gamma + \\ + (4\zeta^2 q + 2iq_x\zeta - q_{xx} - 2q^2) - (2q - 4\zeta^2)\gamma^2. \tag{4.88b}$$

Условием интегрируемости этих уравнений Риккати также является (4.84). Далее положим

$$q = -u_x, \quad \tilde{q} = -\tilde{u}_x,$$

откуда $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t - 3u_x^2 + u_{xxx} = 0 \tag{4.89}$$

(мы положили константу интегрирования равной нулю) или (в зависимости от того, какое t мы взяли в иерархии КдФ) соответствующему члену данного семейства, проинтегрированному один раз по x. Определим $\tilde{u}$ формулой

$$\gamma - i\zeta = \frac{\tilde{u} - u}{2}. \tag{4.90}$$

Утверждается, что если $u(x, t)$ удовлетворяет (4.89) (или для других t другим членам семейства КдФ), то (x, t) также удовлетворяет (4.89) (или соответственно другим членам указанного семейства). Сейчас мы докажем это. Однако сначала рассмотрим дальнейшие следствия этих утверждений. Подставляя (4.90) в (4.88), найдем

$$\frac{\tilde{u}_x + u}{2} = \left(\frac{\tilde{u} - u}{2}\right)^2 + \zeta^2 \tag{4.91a}$$

и

$$\frac{\tilde{u}_t + u_t}{2} = 2q_x\left(\frac{u - \tilde{u}}{2}\right) - 2q\left(\frac{\tilde{u} - u}{2}\right)^2 + q^2 - 2\zeta^2\tilde{q}. \tag{4.91b}$$

Уравнения (4.91) представляют однопараметрический (с параметром ζ^2) набор соотношений

$$R_j(u, u_{xx}, u_t;\ \tilde{u}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_{xx}, \tilde{u}_t;\ \zeta^2) = 0, \tag{4.92}$$

включающих $\tilde{u}$, u и их частные производные. Соотношений здесь меньше, чем переменных. Далее, нам известно, что $u(x, t)$ удовлетворяет (4.89). Я предлагаю читателю прямыми вычислениями показать, что $\tilde{u}(x, t)$ тоже удовлетворяет (4.89). Существует также другое доказательство, которое позволяет глубже проникнуть в тесные связи между уравнениями (4.91) и (4.85), (4.86), (4.88). Используя (4.91a), мы можем показать, что (4.91)

можно также записать в виде соотношения

$$\frac{\tilde{u}_t + u_t}{2} = 2\tilde{q}_x\left(\frac{\tilde{u}-u}{2}\right) - 2\tilde{q}\left(\frac{\tilde{u}-u}{2}\right)^2 + \tilde{q}^2 - 2\zeta^2 q, \quad (4.91c)$$

которое есть просто (4.91b), где переставлены местами u и $\tilde{u}$. Поэтому уравнения (4.91a, c) можно записать как (4.88a, b), где произведены замены $\gamma \to -\gamma$, $\zeta \to -\zeta$ и вместо q стоит $\tilde{q}$. Но перемена знака γ и ζ не нарушает условий разрешимости, и поэтому $\tilde{q}(x, t)$ удовлетворяет (4.84) и $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет (4.89).

Мы назовем набор соотношений, подобных (4.91), преобразованием Бэклунда. Оно позволяет построить сложные решения из более простых. Например, если мы возьмем $u = 0$ и решим полученную пару уравнений первого порядка (4.90) по x и t, мы найдем $\tilde{u}(x, t) = -2\eta \operatorname{th} \eta(x - 4\pi^2 t - x_0)$, $\zeta = i\eta$. Для более общего $u(x, t)$ труднее решить уравнение для $\tilde{u}$, поэтому существуют значительно лучшие способы построения решений из старых, чем прямое решение (4.91). Я вкратце покажу вам, как это делается.

Однако сейчас я хочу вернуться к понятию преобразования Бэклунда. В литературе этот термин существует длительное время. Очень трудно найти его ясное определение. Определение, которое я приведу, было дано Ханно Рундом [95] и сейчас является общепринятым. Пусть $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных

$$E(u) = 0 \quad (4.93a)$$

и

$$D(\tilde{u}) = 0 \quad (4.93b)$$

соответственно. Тогда набор соотношений

$$R_j((u), (\tilde{u}), (\zeta)) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad (4.94)$$

где (u) и $(\tilde{u})$ обозначают наборы, необязательно одинаковой длины, состоящие из u, $\tilde{u}$ и их различных частных производных, называется преобразованием Бэклунда, если эти соотношения гарантируют следующий факт: $\tilde{u}$ удовлетворяет (4.93b) всякий раз, когда u удовлетворяет (4.93a), и наоборот. Если u и $\tilde{u}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, то перед этим термином ставится приставка «авто». Набор соотношений (4.91) является автопреобразованием Бэклунда, связывающим решения соответствующих членов семейства КдФ. Первая половина этих соотношений (4.91a) связывает решения всех членов каждого семейства. Преобразование Миуры

$$q(x, t) = v^2(x, t) - iv_x(x, t) \quad (4.95)$$

связывает решения каждого члена семейства КдФ с каждым членом семейства модифицированного КдФ, первым нетривиальным уравнением которого является

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \tag{4.96}$$

Из уравнения (1.12) гл. 1 (уравнение, которому удовлетворяет каждый член соответствующих семейств, см. [96]) мы знаем, что если $v(x, t)$ удовлетворяет (4.96), то $q(x, t)$, заданная соотношением (4.95), удовлетворяет (4.84). С другой стороны, $q(x, t)$, которая удовлетворяет (4.84), может привести к $v(x, t)$, не обязательно удовлетворяющей (4.96). Действительно, решение (1.12) дает

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = A \exp\left(-2i \int^x q\, dy\right),$$

и поэтому мы не можем само (4.95) назвать преобразованием Бэклунда, если не дополним набор соотношений (в данном случае добавлением одного соотношения) другим соотношением (таким, как само уравнение (4.96)), гарантирующим, что $v(x, t)$ будет удовлетворять модифицированному уравнению КдФ.

Должно быть ясно, что если мы желаем сохранить центральное понятие о том, что q является функцией бесконечного числа независимых переменных, то преобразование Бэклунда, которое взаимоувязывает решения целого семейства, обязательно должно быть бесконечным рядом соотношений, включающих все производные по времени. Можно формально вывести их точно тем же способом, как мы получили (4.91b). Более быстрый и элегантный путь представлен в разд. 5g, где мы определяем преобразование Бэклунда в терминах действий над τ-функцией. Вспомним, что

$$\gamma - i\zeta = \frac{v_1}{v_2} - i\zeta = -\frac{v_x}{v}, \tag{4.97}$$

и так как обе функции $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяют (4.89), то мы можем записать

$$u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x} \ln \tau, \quad \tilde{u}(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{\tau}. \tag{4.98}$$

Поэтому уравнение (4.90), которое определяет $\tilde{u}$, это просто

$$\tilde{\tau} = \tau v. \tag{4.99}$$

Необходимо иметь возможность обратить формулу; а именно, пусть

$$\tau = \tilde{\tau}\tilde{v}(x, \zeta), \tag{4.100}$$

где $\tilde{v}$ — решение уравнения (4.82), в котором q заменено на $\tilde{q}$. Но из (4.91а) мы можем записать

$$\tilde{q} = -q - 2\frac{v_x^2}{v^2} - 2\zeta^2, \tag{4.101}$$

и поэтому $1/v$ удовлетворяет

$$\left(\frac{1}{v}\right)_{xx} + (\tilde{q} + \zeta^2)\frac{1}{v} = 0.$$

Важно подчеркнуть, что ζ в (4.97)—(4.101) является конкретным значением параметра, характеризующим солитон, на который решение $\tilde{q}$ богаче, чем решение q. Поэтому мы его обозначим ζ_1. В качестве примера я оставлю читателю показать, что если $v(x, \zeta_1) = v_1(x)$ удовлетворяет (4.82) с $\zeta = \zeta_1$ и $q = q$, $v(x, \zeta)$ удовлетворяет (4.82), то

$$\tilde{v}(x, \zeta) = v_x(x, \zeta) - \frac{v_{1x}}{v_1} v(x, \zeta) \tag{4.102}$$

удовлетворяет (4.82) с учетом замены q на $\tilde{q}$ (заданным формулами (4.90) и (4.92) или (4.101)). Этот результат принадлежит Фаддееву [96]. Скомбинируем эти результаты с результатами разд. 3d и определим, что делает преобразование Бэклунда с данными рассеяния. Я буду придерживаться работы Флашки и Маклохлина [96].

Пусть потенциал $q(x)$ обладает данными рассеяния

$$S[q] = \{R(\zeta), \zeta(\operatorname{Im}\zeta = 0); (\zeta_j = i\eta_j, \gamma_j)_{j=2}^N\}.$$

Для того чтобы $\tilde{v}(x, \zeta)$ не имела полюсов в нуле $v_1(x)$, мы должны потребовать, чтобы ζ_1^2 лежала слева от спектра, связанного с $q(x)$, в этом случае $v_1(x)$ не имеет нуля на $(-\infty, \infty)$. Возьмем (полагая $A \neq 0$)

$$v_1(x) = A\psi(x, \zeta_1) + B\varphi(x, \zeta_1).$$

Повторяем, что поскольку ζ_1 не принадлежит спектру, связанному с q, $\varphi(x, \zeta_1)$ и $\psi(x, \zeta_1)$ линейно независимы. Далее выберем $v(x, \zeta)$ таким образом, что $\tilde{v}(x, \zeta) = \tilde{\psi}(x, \zeta)$, т. е. $\tilde{v}(x, \zeta) \sim e^{i\zeta x}$ при $x \to \infty$ для вещественных ζ. В качестве простого упражнения предлагаю показать, что $v(x, \zeta) = (i\zeta - \eta_1)^{-1}\psi(x, \zeta)$, если $B \neq 0$, и равна $(i\zeta + \eta_1)^{-1}\psi(x, \zeta)$, если $B = 0$. Если $B \neq 0$, то при $x \to -\infty$

$$\psi(x, \zeta) \to \frac{\zeta - i\eta_1}{\zeta + i\eta_1} a(\zeta) e^{i\zeta x} + (-\zeta) e^{-i\zeta x},$$

что при сравнении с (3.62) означает, что (напомним: $R(\zeta)=$ $=b(\zeta)/a(\zeta)$)

$$\tilde{a}(\zeta)=\frac{\zeta-i\eta_1}{\zeta+i\eta_1}a(\zeta),\quad \tilde{b}(-\zeta)=-b(-\zeta),\quad R(\zeta)=\frac{\zeta+i\eta_1}{\zeta-i\eta_1}R(\zeta), \tag{4.103}$$

и связанным состояниям отвечает $\zeta_j=i\eta_j$ при $j=1,\ldots,N$, где $\tilde{\gamma}_j=(\eta_1+\eta_j)/(\eta_1-\eta_j)\gamma_j$ (просто взят вычет $R(\zeta)$ в точке $\zeta=$ $=i\eta_j$), $j=2,\ldots,N$ и γ_1 зависит от A и B. Аналогично, если $B=0$,

$$\tilde{\psi}(x,\zeta)\to a(\zeta)e^{-i\zeta x}+\frac{\zeta+i\eta_1}{\zeta-i\eta_1}b(-\zeta)e^{-i\zeta x},$$

что означает

$$\tilde{a}(\zeta)=a(\zeta),\quad \tilde{R}(\zeta)=\frac{\zeta-i\eta_1}{\zeta+i\eta_1}R(\zeta),\quad \tilde{\gamma}_j=\frac{\eta_1-\eta_j}{\eta_1+\eta_j}\gamma_j. \tag{4.104}$$

При этом новых связанных состояний не добавилось.

Заметим, что поскольку (4.103) добавляет в спектр связанное состояние $\zeta_1=i\eta_1$, оно также изменяет коэффициент отражения на фазовый множитель. Для того чтобы $\tilde{q}$ имело те же данные рассеяния, что и q, исключая добавление одного связанного состояния, нужно сначала применить преобразование Бэклунда (4.104) (где $B=0$) и затем преобразование Бэклунда (4.103). Результирующее преобразование дает $\tilde{q}$ с данными рассеяния

$$S[\tilde{q}]=\{R(\zeta),\ \zeta(\operatorname{Im}\zeta=0);\ (\zeta_j=i\eta_j,\ \gamma_j)_{j=1}^N\},$$

где γ_1 зависит от выбора A и B в (4.103). Заметим, однако, что, если начать с безотражательного потенциала $R(\zeta)$, не потребуется никакого фазового сдвига, обусловленного преобразованием Бэклунда, добавляющим солитон.

Далее взглянем на то, как преобразование Бэклунда воздействует на τ-функцию. Поскольку мы широко пользовались соотношениями (4.15) и (4.18), т. е. формальным результатом, который реально применим только для солитонных и рациональных решений (в этом случае асимптотическое разложение в точке $\zeta=\infty$ является разложением Лорана), мы ограничимся безотражательными потенциалами. Я оставляю читателю попытку расширить область применимости формул. Для того чтобы записать (4.99) в виде

$$\tilde{\tau}=\tau v(x,\zeta)=\tau(A\psi(x,\zeta)+B\psi(x,-\zeta)), \tag{4.105}$$

сначала воспользуемся (4.18), где $v(x,\zeta)$ записана в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений

$\psi(x, \zeta)$, $\psi(x, -\zeta)$, связь которых (формальная или асимптотическая) с τ-функций дана формулой (4.18), а именно:

$$\psi(x, \zeta) = \frac{X(\zeta)\tau}{\tau}, \qquad \psi(x, -\zeta) = \frac{X(-\zeta)\tau}{\tau}, \tag{4.106}$$

где из (4.18) следует

$$X(\zeta) = \exp\left(i \sum \zeta^{2k+1} t_{2k+1}\right) \exp\left(\sum \frac{-1}{i(2k+1)\zeta^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}\right).$$

Так как мы решили в большей части этой главы работать с $2^{2k} t_{2k+1}$, а не с t_{2k+1} (вспомните, что это исключило множитель $1/2^{2k}$ перед правой частью потока t_{2k+1} (3.14)), запишем

$$X(\zeta) = \exp\left(i \sum \zeta (2\zeta)^{2k} t_{2k+1}\right) \exp\left(\sum \frac{-1}{i\zeta(2k+1)(2\zeta)^{2k}} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}\right).$$

Используя (4.106), формулу (4.105) можно представить в виде

$$\tau_{\text{нов.}} = (AX(\zeta) + BX(-\zeta))\,\tau_{\text{стар.}}. \tag{4.107}$$

Рассмотрим несколько примеров, чтобы показать, как все это работает на практике. Сначала возьмем $\tau_0 = 1$. Следовательно,

$$\tau_1 = Ae^{\theta} + Be^{-\theta}, \tag{4.108}$$

где

$$\theta = \sum_0^{\infty} i\zeta (2\zeta)^{2k} t_{2k+1}, \quad t_1 = x. \tag{4.109}$$

Выберем $A = \alpha e^{-i\zeta x_0}$, $B = \alpha e^{i\zeta x_0}$. Пусть $\zeta = i\eta$ и $-i\zeta x_0 = \theta_0$; назовем

$$\tau_1 = 2\alpha \operatorname{ch}(\theta - \theta_0)$$

односолитонным решением. Далее,

$$\tau_2 = (A_2 X(\zeta_2) + B_2 X(-\zeta_2))(A_1 X(\zeta_1) + B_1 X(-\zeta_1)).$$

В качестве несложного упражнения покажите, что

$$X(\zeta) X(\zeta') = \left|\frac{\zeta - \zeta'}{\zeta + \zeta'}\right|^{1/2} e^{\theta + \theta'}. \tag{4.110}$$

Таким образом, используя очевидное обозначение

$$\tau_2 = A_1 A_2 \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}\right|^{1/2} e^{\theta_1 + \theta_2} + A_2 B_1 \left|\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}\right|^{1/2} e^{\theta_2 - \theta_1} +$$
$$+ A_1 B_2 \left|\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}\right|^{1/2} e^{\theta_1 - \theta_2} + B_1 B_2 \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}\right|^{1/2} e^{-\theta_1 - \theta_2},$$

которое после выбора единичных коэффициентов при первых трех слагаемых и деления на $e^{\theta_1 + \theta_2}$ принимает вид ($\zeta_j = i\eta_j$,

$j=1, 2$) двухсолитонного решения

$$\tau_2 = e^{\theta_1+\theta_2}\left(1+e^{-2\theta_1}+e^{-2\theta_2}+\left|\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right|^2 e^{-2\theta_1-2\theta_2}\right).$$

Напомним, что экспоненциальный множитель, стоящий спереди, в котором показатель экспоненты линеен по t_{2k+1}, $k=0, 1, \ldots$, не дает вклада в поле $q(x, t_3, t_5, \ldots)$. Этот процесс может быть повторен.

Прежде чем завершить этот раздел о преобразованиях Бэклунда, я хочу рассмотреть еще одно вычисление, приводящее к формуле для преобразований Бэклунда членов иерархии АКНС при $r=-q$. Напомним (см. (3.36b)), что соответствующей этому случаю задачей на собственные значения является

$$\begin{aligned} v_{1x}+i\zeta v_1 &= qv_2, \\ v_{2x}-i\zeta v_2 &= -qv_1. \end{aligned} \tag{4.111}$$

Следовательно, γ, определенная как v_2/v_1, удовлетворяет

$$\gamma_x = 2i\zeta\gamma - q(1+\gamma^2). \tag{4.112}$$

Если мы примем

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{u+\tilde{u}}{4}, \tag{4.113}$$

где $q=-(1/2)u_x$, $\tilde{q}=-(1/2)\tilde{u}_x$, то (4.112) принимает вид

$$\tilde{u}_x - u_x = 4i\zeta\sin\frac{u+\tilde{u}}{2}. \tag{4.114}$$

Соответствующие соотношения между $\tilde{u}_{t_{2k+1}}$ и $u_{t_{2k+1}}$ могут быть найдены простым преобразованием соответствующих уравнений, описывающих зависимость v_1, v_2 от времени, к виду Риккати. Легко показать, что если $q(x, t_{2k+1})=-(1/2)u_x(x, t_{2k+1})$ (k может также быть отрицательным, $k=-1$ приводит к уравнению sin-Гордон, см. [97]) удовлетворяет потоку t_{2k+1} в иерархии АКНС, где $r=-q$ (заметим, что в этом многообразии решений допускаются только нечетные потоки), то этому потоку удовлетворяет также $\tilde{q}(x, t_{2k+1})=-(1/2)\tilde{u}_x(x, t_{2k+1})$. Поэтому (4.114) и соответствующие соотношения являются преобразованием Бэклунда.

Я привожу эти вычисления ввиду очевидных связей метода их вывода с преобразованием Бэклунда для иерархии КдФ. Однако в гл. 5 мы опять возьмемся за эти же вопросы с другой и более общей точки зрения, преимущество которой состоит в том, что полный набор соотношений, соответствующих (4.114), и формул, ставящих в соответствие $u_{t_{2k+1}}$ и $\tilde{u}_{t_{2k+1}}$, задается одним выражением. Более того, выбор преобразования (4.113) пре-

вращается в очевидное следствие. Затруднение, связанное с (4.113), состоит в том, что в то время как для решения уравнения Риккати естественно подставить tg (следствие отношения $\gamma_x : 2\gamma : 1+\gamma^2$), заранее неясно, почему введенная таким способом $\tilde{u}$ будет удовлетворять тому же уравнению, что и u. Это становится понятным лишь потом, при анализе симметрии (4.114) и соответствующих временных соотношений.

4g. Появление алгебры Каца — Муди. В этой главе мы видим, что τ-функция, $\tau(t_1, t_3, t_5, \ldots, t_{2k+1}, \ldots)$, содержит всю необходимую информацию о пространстве решений для семейства КдФ. Она меняется одним из двух способов. В первом случае она может изменяться из-за потоков, когда независимые переменные $\{t_{2k+1}\}_0^\infty$ эволюционируют, а функциональная форма τ остается прежней. Например, двухсолитонное решение (4.47)

$$\tau = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_2+A_{12}},$$

$$\theta_j = \sum_0^\infty (-1)^k \eta_j^{2k+1} t_{2k+1}, \quad e^{A_{12}} = \left(\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^2$$

эволюционирует под действием потоков, но по-прежнему остается двухсолитонным решением. Во втором случае, как мы только что выяснили в предыдущем разделе, τ-функция может изменить свой функциональный вид под действием преобразования Бэклунда, в то время как последовательность независимых переменных $\{t_{2k+1}\}_0^\infty$ сохраняется неизменной. Каждое изменение является действием группы, и в каждом случае новая τ также удовлетворяет всем уравнениям семейства КдФ, т. е. или бесконечной последовательности квадратичных уравнений Хироты, или последовательности

$$q_{t_{2k+1}} = \frac{\partial}{\partial x} L^k q, \quad L^k q = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_{2k+1}} \ln \tau. \tag{4.115}$$

Поэтому пространство решений семейства КдФ отображается совместным действием потоков и преобразований Бэклунда. Инфинитезимальные симметрии формируют бесконечномерную градуированную алгебру Ли (алгебру Каца — Муди), изоморфную центральному расширению алгебры петель $\mathrm{sl}(2, C)$; последняя обозначается как $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Этот подход развит в работе Дейта, Дзимбо и Мивы [39]. Данная точка зрения противоположна подходу, развитому в гл. 5, в котором часть $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ используется как фазовое пространство. Переход от последней картины, в которой решения представляются кривыми в алгебре Ли, к предыдущей, в которой решения являются точками в простран-

стве представлений, т. е. $\tau(t_1, t_3, \ldots)$, все еще не разработан логически в рамках теории групп Ли, однако я попытаюсь объединить эти две точки зрения посредством некоторых наводящих на размышления формул в разд. 5j.

Сейчас мы вернемся к задаче нахождения и представления инфинитезимальных симметрий, соответствующих потокам и преобразованиям Бэклунда. Сначала заметим, что действие потоков на $\tau(t_1, t_3, \ldots)$ есть просто действие трансляции аргументов и может быть представлено формулой

$$\exp\left(\sum_0^\infty a_{2k+1}\frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}\right)\tau(t_1, \ldots, t_{2k+1}\ldots) = \\ = \tau(t_1 + a_1, \ldots, t_{2k+1} + a_{2k+1}) \tag{4.116}$$

при произвольных значениях $a_1, \ldots, a_{2k+1}$. Инфинитезимали действий этой группы представляются последовательностью $\{\partial/\partial t_{2k+1}\}_0^\infty$. Заметим также, что поскольку все интересующие нас величины

$$L^k q = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_{2k+1}}\ln\tau \tag{4.117}$$

являются вторыми логарифмическими производными от τ-функции, то можно умножить τ на экспоненту, аргумент которой линеен по $\{t_{2k+1}\}_0^\infty$, т. е. на $\exp\sum_0^\infty b_{2k+1}t_{2k+1}$ при произвольных $b_1, \ldots, b_{2k+1}$. Инфинитезимали этого класса симметрий представлены посредством $\{t_{2k+1}\}_0^\infty$. Для набора элементов $\{\partial/\partial t_{2k+1}\}_0^\infty$ и $\{t_{2k+1}\}_0^\infty$ генерируют алгебру Гейзенберга

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}, t_{2j+1}\right] = \delta_{kj}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}, \frac{\partial}{\partial t_{2j+1}}\right] = 0, \quad [t_{2k+1}, t_{2j+1}] = 0. \tag{4.118}$$

Еще раз напомню читателю, что эта алгебра является следствием симметрий, возникающих из потоков и того факта, что существует класс эквивалентности τ-функций, причем все функции одного класса соответствуют одному и тому же решению q семейства КдФ. Сейчас полезно перейти на язык метода обратной задачи рассеяния. Мы знаем, что тип решения характеризуется «начальными» данными рассеяния

$$S(0) = \left\{R(\xi, 0),\ \operatorname{Im}\xi = 0;\ \left(\zeta_j = i\eta_j,\ b_j(0) = e^{2\eta_j\bar{x}_j}\right)_1^N\right\}. \tag{4.119}$$

Потоки линейно во времени изменяют данные рассеяния, меняя только фазу коэффициента отражения и координаты местона-

хождения $\bar{x}_j$ солитонов. Изменение задается формулой

$$S(\mathbf{t}) = \left\{ R(\xi, 0) \exp\left(2i \sum_0^\infty \xi^{2k+1} t_{2k+1}\right), \quad \operatorname{Im} \xi = 0; \right.$$
$$\left. \left(\zeta_j = i\eta_j, \; b_j(\mathbf{t}) = b_j(0) \exp\left(2i \sum_0^\infty \zeta_j^{2k+1} t_{2k+1}\right)\right)_1^N \right\}. \tag{4.120}$$

(*Отступление.* Мы уже указали на то, что метод обратной задачи представляет собой каноническое преобразование, которое старым координатам $q(x)$ сопоставляет новые переменные типа действие — угол (см. [13], [70], [75]):

$$\mathbf{p} = \left\{ p_j = -2\eta_j^2, \; p(\xi) = -\frac{2\xi}{\pi} \ln(1 - |R|^2) \right\},$$
$$\mathbf{q} = \{ q_j = \ln b_j, \; q(\xi) = \operatorname{Arg} b(\xi) \}; \tag{4.121}$$

соответствующие скобки Пуассона также образуют алгебру Гейзенберга

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{p(\xi), q(\xi')\} = \delta(\xi - \xi');$$

все остальные скобки равны нулю. Я до сих пор не знаю способа идентификации при помощи теории Ли этих двух гейзенберговских алгебр, а также не знаю, является ли на самом деле одна из них проявлением другой.)

Потоки сохраняют тип решения. С другой стороны, преобразования Бэклунда изменяют тип решения в том смысле, что они добавляют новые компоненты к данным рассеяния. Например, начиная с вакуумного состояния

$$S = \{ R(\xi, 0) \equiv 0, \; \operatorname{Im} \xi = 0; \; N = 0 \},$$

можно построить односолитонное состояние

$$S = \left\{ R(\xi, 0) \equiv 0, \; \operatorname{Im} \xi = 0; \; \zeta_1 = i\eta, \right.$$
$$\left. b_1 = \exp\left(2\eta x_0 + \sum_0^\infty (-1)^{k+1} \eta^{2k+1} t_{2k+1}\right) \right\},$$

применяя преобразование Бэклунда

$$\tau_{\text{нов}} = (AX(\zeta) + BX(-\zeta))\, \tau_{\text{стар}}, \tag{4.122}$$

где $\tau_{\text{стар}} = 1$ и $X(\zeta)$ — оператор, задаваемый (4.18). В принципе можно построить все решения из вакуумного состояния преобразованиями Бэклунда, но в действительности анализировать можно только многосолитонные решения. Группа из Киото предпочитает считать многосолитонные решения плотным множеством в пространстве всех решений, но они не поясняют, в каком

смысле следует понимать это. Однако в целях продолжения нашего обсуждения примем эту точку зрения. Для многосолитонных решений можно переписать (4.122) в виде

$$\tau_{\text{нов}} = (1 + \beta Y(\zeta))\, \tau_{\text{стар}}, \tag{4.123}$$

где $\beta = B/A = e^{-2\eta X_0}$ описывает начальное положение солитона, который мы собираемся добавить, а

$$Y(\zeta) = \exp\left(-2i \sum_0^\infty \zeta^{2k+1} t_{2k+1}\right) \exp\left(\sum_0^\infty \frac{2}{i(2k+1)\zeta^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial t_{2k+1}}\right). \tag{4.124}$$

Соотношение (4.123) справедливо, так как всегда можно выделить из τ экспоненциальный множитель, аргумент которого линеен по времени. Читателю следует доказать, что

$$Y(\zeta)\, Y(\zeta')\, 1 = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{\zeta + \zeta'}\right)^2 \exp\left(-2i \sum_0^\infty (\zeta^{2k+1} + \zeta'^{2k+1})\, t_{2k+1}\right). \tag{4.125}$$

Заметим, в частности, что $Y^2(\zeta)\, 1 = 0$, и поэтому можно записать (4.123) в виде

$$\tau_{\text{нов}} = \exp(\beta Y(\zeta))\, \tau_{\text{стар}}. \tag{4.126}$$

Инфинитезимальное действие (при $x_0 \to \infty$ β становится меньше и меньше) задано *вершинным оператором* $Y(\zeta)$. Формально $Y(\zeta)$ может быть представлен как бесконечный ряд Лорана

$$Y(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_{2k+1} \zeta^{2k+1}.$$

Поскольку операторы $Y(\zeta)$, $Y(\zeta')$ не коммутируют, когда $\zeta + \zeta' = 0$ (из-за того, что множитель $(\zeta + \zeta')^2$ входит в знаменатель (4.125)), коэффициенты Y_{2k+1} удовлетворяют нетривиальному набору коммутационных соотношений [39].

Важным обстоятельством является следующее. Леповски и Уилсон [102] показали, что эти соотношения совместно с алгеброй Гейзенберга (4.118) изоморфны бесконечномерной градуированной алгебре Ли (алгебре Каца — Муди) $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C) \oplus Z$, обозначаемой $A_1^{(1)}$, т. е. центральному расширению лагебры петель для $\mathrm{sl}(2, C)$. Каждый член в $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ является произведением градуирующего параметра λ, умноженного на элемент из $\mathrm{sl}(2, C)$, который может быть записан в матричном представлении как $hH + eE + fF$ с базисными векторами

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому мы имеем один ответ на вопрос: «Какое отношение имеет $\mathrm{sl}(2, C)$ к КдФ?» Решения солитонных уравнений семейства КдФ образуют орбиту (набор всех $\tau(t_1, t_3, \ldots)$) вектора с наибольшим весом (соответствующего $\tau = 1$) в базисном представлении $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C) \oplus Z$. Алгебра действует на решения как алгебра симметрий. Альтернативная точка зрения, в которой алгебра используется как фазовое пространство, и связи между этими двумя точками зрения приведены в гл. 5.

Историческое замечание. При анализе уравнений движения волчка общего вида Ковалевская обнаружила, что в двух частных случаях (волчки Эйлера и Лагранжа), для которых была известна интегрируемость, решения содержали эллиптические Θ-функции и не имели сингулярностей, кроме полюсов, для конечных комплексных значений времени. Она заинтересовалась, может ли это свойство (которое мы сейчас называем свойством Пенлеве) иметь место для волчка общего вида. Выяснилось, что ответ отрицателен, но во время своих исследований Ковалевская открыла новые типы соотношений параметров (между моментами инерции и т. д.), для которых данное свойство имеет место и уравнения волчка интегрируемы. Поэтому Ковалевская была первой, кто использовал свойство Пенлеве. Читателю следует ознакомиться с работами С. Ковалевской, Acta. Math., 12 (1889), pp. 177ff; 14 (1890), pp. 81ff. Смотрите также статью Х. Иосиды в работе, цитированной в [39].

ГЛАВА 5 СВЯЗУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ МЕЖДУ ЧУДЕСАМИ СОЛИТОННОЙ МАТЕМАТИКИ

5а. Обзор. В этой главе мы изучаем математическую структуру солитонных уравнений и пытаемся развить подход, из которого большинство (если не все) чудес солитонной математики возникают как естественные следствия. Как минимум мы хотим увидеть некоторую общую нить, связывающую их воедино. Эти чудеса включают в себя:

1. Бесконечное число локальных законов сохранения и симметрий; принадлежность бесконечному семейству коммутирующих потоков; гамильтонову структуру (иногда структуры).

2. Эквивалентную формулировку нелинейных уравнений в билинейной форме (уравнения Хироты); τ-функцию, которая, рассматриваемая как функция бесконечного числа независимых переменных, содержит богатую информацию о многообразии решений; свойство Пенлеве.

3. Связь с линейной задачей на собственные значения; обратную задачу рассеяния; изоспектральную, изориманову поверхность и изомонодромные деформации; задачу Римана — Гильберта.

4. Преобразования Бэклунда и Шлезингера; вершинные операторы.

5. Идеи Уолквиста — Эстабрука и наличие богатой алгебраической структуры; «что общего у $sl(2, C)$ с НУШ и КдФ?»; понятие редукции и связь со схемой «одевания» Захарова — Шабата.

Ключевые моменты нашего нового подхода состоят в том, что соответствующее фазовое пространство, в котором «живут» (одномерные по пространству) солитонные уравнения, является алгеброй Каца — Муди (бесконечномерная, градуированная алгебра Ли), и в том, что каждую зависимую переменную важно считать функцией бесконечного числа независимых переменных (времен потоков t_k), из которых ни одна не выделяется среди других. Одну из переменных важно выделять только в том случае, когда зависимым переменным мы приписываем некоторое глобальное поведение в виде функций одной из независимых переменных. Это имеет место например, если мы хотим решить

интересующее нас уравнение с начальными условиями. Результаты, описанные в этой главе, получены совместно с моими коллегами Германом Флашкой и Тюдором Ратиу из Аризонского университета и опубликованы (или скоро появятся) в серии статей в журнале Physica D [38].

Желательно также понять удивительные связи между солитонной математикой и нелинейными интегрируемыми уравнениями в частных производных с другими точно решаемыми моделями статистической физики, такими как модель взаимодействия ближайших соседей Изинга. В настоящих лекциях я сошлюсь на эти последние достижения [103], но не буду развивать их подробно. Ничего не будет сказано и об иерархиях солитонных уравнений с пространственной размерностью, большей чем единица, но интересующемуся читателю следует знать о работе [39]; в этой работе группа из Киото обсуждает иерархию уравнений КП (Кадомцев — Петвиашвили). (См. также упражнение 3b(5).)

План главы таков. В разд. 5b мы покажем, как, отправляясь от уравнения или от системы уравнений, можно выяснить, является ли оно интегрируемым, и если да, то как можно найти алгебраическую структуру фазового пространства решений. Используемый метод является вариантом метода Уолквиста — Эстабрука, который следует его основным идеям, но стремится избежать терминологии дифференциальной геометрии. В частности, мы покажем, что алгебраическая структура иерархии АКНС является изоморфной подалгебре алгебры $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, а именно алгебре петель $\sum_{-\infty}^{\infty} X_{-j}\zeta^j$, $X_{-j} \in \mathrm{sl}(2, C)$, ассоциированной с $\mathrm{sl}(2, C)$. Как указывают многие вычислительные результаты, похоже, что более подходящей может быть расширенная алгебра Каца — Муди $\hat{A}_1^{(1)}$, состоящая из $A_1^{(1)}(\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C) \oplus Z)$ с добавлением дифференциального члена. Однако с использованием $\hat{A}_1^{(1)}$ связаны некоторые трудности, которые я буду обсуждать в разд. 5l.

Идеи Уолквиста — Эстабрука обосновывают выбор фазового пространства. После того как установлено и осознано, что фазовое пространство является прямой суммой двух алгебр K, N, в которых ортогональное дополнение $K^{\perp}$ одной из них является двойственным (N^*) другой по отношению к соответствующим образом определенному внутреннему произведению, существует естественный путь для определения скобок Пуассона и гамильтоновых векторных полей на $K^{\perp} = N^*$. Если последние порождаются функциями специального класса, так называемыми ad-инвариантными функциями Φ_k, сразу же возникает бесконечное

семейство коммутирующих потоков в лаксовой форме $Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q]$, где Q является общим элементом в фазовом пространстве (двойственном к одной из подалгебр), и $Q^{(k)} = \pi_N \nabla \Phi_k$, где ∇ является градиентом и π_N — проекцией в подалгебру N. Все свойства коммутируемости являются автоматическими следствиями очень общих теорем. Этот материал содержится в разд. 5c. Раздел включает также обсуждение того, как соотносятся потоки и гамильтоновы структуры, введенные описанным выше способом, с потоками и гамильтоновыми структурами, которые возникают, если x является выделенной переменной, как, например, в случае, когда мы начинаем с известной задачи на собственные значения $V_x = PV$, где P — многочлен по ζ. Напомним читателю (разд. 3c), что если P является многочленом первой степени (посредством калибровочного преобразования, см. разд. 5g, можно всегда свести задачу к виду (3.31)), то результатом является иерархия АКНС; если его степень равна двум, то получается иерархия НУШП [78].

В конце разд. 5c я приведу несколько упражнений, в которых примеры гамильтоновых векторных полей на двойственных подалгебрах даны в иных контекстах. Первые два примера приводят к уравнениям для простого гармонического осциллятора и цепочке Тоды со свободными концами. Третий пример показывает, как включить семейства КдФ и мКдФ в структуру алгебр Ли. Непосредственным следствием является преобразование Миуры, сопоставляющее решения двух семейств.

В разд. 5d мы воспользуемся преимуществом специального вида лаксовых уравнений и непосредственно выпишем все законы сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{сохраняющаяся плотность}) = \frac{\partial}{\partial x}(\text{поток}),$$

где x и t — два любых члена бесконечного набора переменных $\{t_k\}$; более того, мы можем привести явное выражение для всех сохраняющихся плотностей и потоков. Эти формулы являются новыми.

На этом этапе можно действовать в любом из двух следующих направлений; каждое из них связано с чудесами, приведенными выше под номерами (2) и (3).

Первое: заметим, что законы сохранения обладают структурой, отражающей тот факт, что роторы трех бесконечномерных векторов равны нулю. Это неизбежно приводит к мысли о введении *потенциалов*, которые являются набором τ-функций Хироты, состоящим для $\mathrm{sl}(2, C)$ из триплета $\{\tau, \bar{\ }, \rho\}$. Если уравнения движения переписаны с этими потенциалами в качестве

зависимых переменных, то возникают *билинейные уравнения Хироты*. Как мы уже упоминали в гл. 4, условия наличия многосолитонных решений эквивалентны условиям, обеспечивающим свойство Пенлеве.

Второе: заметим, что уравнения Лакса можно решить формально путем введения вспомогательной матрицы V, $Q=VQ_0V^{-1}$, где Q_0 является константой при всех временах. Матрица V удовлетворяет уравнениям $V_{t_k}=Q^{(k)}V$, являющимся последовательностью вспомогательных уравнений, условия интегрируемости которых во всех иерархиях связаны с $\mathrm{sl}(2, C)$. Любое из этих уравнений может быть выбрано в качестве «задачи на собственные значения» введением глобальных ограничений на поведение зависимых переменных Q как функций одной независимой переменной. Например, можно потребовать, чтобы матричные элементы Q, не равные константе, стремились к нулю при стремлении выделенной независимой переменной к $\pm\infty$. Поэтому все остальные независимые переменные играют роли, подобные времени, и их можно трактовать в рамках формализма начальной задачи. Например, в иерархии АКНС t_1 и является выделенной переменной; в иерархии НУШП, к которой принадлежат нелинейное уравнение Шрёдингера с производной и массивная модель Тирринга, выделенной переменной является t_2. С ограничениями на выделенную переменную связано определенное аналитическое поведение подходящим образом нормированной матрицы V, рассматриваемой как функция ζ, градуирующего параметра в алгебраической структуре Каца — Муди. В частности, может быть введено понятие изоспектральных потоков. Эта идея совместно с обсуждением изоримановой поверхности и изомонодромных потоков изложена в разд. 5f.

Связь между этим вторым направлением и функциями Хироты снова устанавливается в разд. 5e, когда, как и в гл. 4 для уравнений КдФ, мы изучаем формальное асимптотическое поведение матрицы V по ζ. Оказывается, что асимптотические ряды, которые вначале выражены в терминах элементов Q, могут быть переписаны в терминах потенциалов и дают формальные соотношения между V и $\{\tau, \sigma, \rho\}$ с помощью подходящим образом определенных «вершинных» операторов.

В разд. 5g мы вводим преобразования Бэклунда. Наш подход является очень общим. Мы просто задаем вопрос: какие преобразования V сохраняют неизменной форму уравнения Лакса $Q_{t_k}=[Q^{(k)}, Q]$? Полученные калибровочные преобразования

$$V_{\text{нов.}}=RV_{\text{стар.}}S,$$

в которых основную роль играет R, индуцируют преобразование Бэклунда для Q; действительно, соотношение между новой и старой Q имеет очень простую форму. Она является алгебраической:

$$Q_{\text{нов.}} = RQ_{\text{стар.}}R^{-1}.$$

Обсуждается несколько примеров и вводится два типа преобразований Бэклунда. С первым читатель, возможно, знаком; это тот тип, который добавляет солитоны. Подобно временным потокам, такие преобразования Бэклунда являются непрерывными симметриями; а именно, новые солитоны могут быть построены непрерывной деформацией старых. Второй тип, называемый преобразованием Бэклунда — Шлезингера, представляет собой нечто новое. Он сконструирован так, чтобы изменить монодромию фундаментальной матрицы решения в точке $\zeta = \infty$, и при последовательном применении принимает вид разностного уравнения. Это преобразование соответствует дискретной симметрии семейства уравнений и добавляет новую целочисленную переменную n к списку независимых переменных. Мы увидим, каким образом (как функции от n и t_1) зависимые переменные иерархии АКНС удовлетворяют дифференциально-разностному уравнению цепочки Тоды.

Кроме того, преобразования Бэклунда, которые добавляют солитоны, могут быть переписаны в терминах «вершинных» операторов, действующих на τ-функции $\{\tau, \sigma, \rho\}$. Оказывается, что вспомогательные τ-функции ρ и σ могут быть получены применением преобразований Бэклунда — Шлезингера к основной τ-функции τ. В действительности повторное применение преобразования Бэклунда — Шлезингера дает последовательность τ-функций $\tau(n, t_1, t_2, t_3, \ldots)$ для семейства цепочки Тоды; а именно, $\tau(45, t_1)$ является зависимостью от времени t_1 для τ-функции цепочки Тоды (по соседствующим парам которой могут быть вычислены смещения) в 45-м узле цепочки.

В разд. 5h мы введем понятие градуировки. Основная идея состоит в том, что существует несколько способов разложения заданной алгебры G на две подалгебры K и N. Каждое из независимых разложений приводит к разным наборам потоков. Различные разложения можно найти при помощи процедуры, названной *градуировкой*, при помощи которой всем базисным векторам ставятся в соответствие веса (согласованные со всеми коммутационными соотношениями) и производится выбор градуирующего параметра. В случае $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ базисными векторами являются H, E, F, определенные в (5.40) и эквивалентные спиновым матрицам Паули, градуирующий параметр — это ζ, об-

щим элементом служит $X=\sum_{-\infty}^{\infty} X_{-j}\zeta^j$, $X_{-j}=h_{-j}H+e_{-j}E+f_{-j}F$. Число независимых градуировок связано с числом независимых автоморфизмов конечного порядка исходной алгебры. Для $\tilde{sl}(2, C)$, элементы которой мы разложили в элементы двух подалгебр K и N со степенями меньше нуля и больше или равной нулю соответственно, существуют две градуировки. Первая, называемая однородной градуировкой, приводит к появлению потоков АКНС, вторая, называемая главной градуировкой, — к семействам КдФ и мКдФ.

В разд. 5i мы вводим вторую гамильтонову структуру, возникающую при изменении определения понятия внутреннего произведения на алгебре. Оказывается, что такая структура более удобна в разд. 5j, в котором мы покажем способ представления уравнений Лакса $Q_{t_k}=[Q^{(k)}, Q]$ в виде редукции существенно более простого потока в фазовом пространстве большей размерности. Редукция достигается использованием симметрий, которыми обладает система уравнений. Идея, лежащая в основе этого, не нова. Давно известно, что если m-мерная гамильтонова система имеет $n \leqslant m$ интегралов движения, находящихся в инволюции (эквивалентных в силу теоремы Нётер n симметриям), то размерность фазового пространства может быть снижена от $2m$ до $2(m-n)$. Если $m=n$, говорят, что система полностью интегрируема. В разд. 4c я показал, каким образом двумерную систему, описывающую движение прикрепленной к пружине массы на плоскости, можно свести к одномерной системе (описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка) с помощью закона сохранения момента количества движения, который соответствует вращательной симметрии, присущей задаче. Для уравнений Кортевега — де Фриза и нелинейного уравнения Шрёдингера некоторые из бесконечного числа интегралов движения допускают простую физическую интерпретацию, подобно закону сохранения массы, импульса, энергии, числа частиц, плотности тока и т. д., но большинство такой интерпретации не имеет. По этой причине они названы скрытыми. Однако, как только мы идентифицируем алгебру Ли G, которой принадлежат решения уравнений, их сущность становится известной. Если $\bar{G}$ — соответствующая группа Ли и $\bar{K}$, $\bar{N}$ — подгруппы, соответствующие подалгебрам K, N, то верно следующее. Большое симплектическое многообразие, на котором потоки являются простыми (так же как для переменных действие — угол, половина переменных константы, другая половина меняется линейно со временем), — это $T^*\bar{G}$, кокасательное расслоение $\bar{G}$. Группой симметрии, с помощью которой мы редуцируем фа-

зовое пространство $T^*\bar{G}$, является $\bar{K}$ (абстрактный аналог классической теоремы редукции, доказанный Марсденом и Вейнстейном [88]), за которым следует (тривиальная) редукция по $\bar{N}$. Редуцированным фазовым пространством является N^*, и именно на нем «живут» решения Q уравнений Лакса $Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q]$.

Более того, процесс редукции в принципе дает нам способ решить уравнения Лакса. Ключевой шаг состоит в том, что элемент g из $\bar{G}$ разлагается в произведение $k^{-1}n$, где левый и правый множители принадлежат $\bar{K}$ и $\bar{N}$ соответственно. Этот шаг алгебраически эквивалентен задаче Римана — Гильберта. Это разложение дает нам еще одну прекрасную возможность определить τ-функцию. Она возникает как бесконечномерный определитель (мы напомним, что вначале она появилась в качестве потенциала; см. разд. 4b, 5d). Все это делается в разд. 5j. В конце этого раздела мы демонстрируем, каким образом формальное решение уравнений Лакса также приводит к алгоритму преобразования решения одного типа в другое и, в частности, как из вакуумного состояния строятся многосолитонные решения. Этот алгоритм оказывается полным аналогом схемы «одевания», предложенной Захаровым и Шабатом. Одновременно мы обсудим также отображение фазового пространства совместным действием потоков и преобразований Бэклунда, являющихся непрерывными симметриями семейства уравнений, а также преобразований Бэклунда — Шлезингера, представляющих дискретные симметрии. В случае главной градуировки, порождающей семейства КдФ и мКдФ, при которой у солитонных уравнений существует лишь одна τ-функция, преобразований Бэклунда — Шлезингера нет. В этом случае, как мы обсуждали в разд. 4g, можно проследить соответствие между появлением алгебры Каца — Муди в качестве фазового пространства, с одной стороны, и в качестве алгебры симметрий — с другой. Для однородной градуировки, в которой присутствуют дискретные симметрии, полного соответствия достичь значительно труднее. В разд. 5k мы присоединяем к потокам $Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q]$, $k \geqslant 0$, потоки, соответствующие отрицательным значениям времен t_k, $k < 0$.

Наиболее знакомые примеры представлены уравнениями sin-Гордон и массивной моделью Тирринга. Этот материал является новым.

Наконец, в разд. 5l мы обсудим изменения, необходимые, когда в качестве фазового пространства выбирается расширение алгебры петель. Дополнительными элементами являются производная и центр. На полезность включения внешних элементов существует много указаний; например, при их использовании не-

которые формулы становятся значительно осмысленнее. Имеется, однако, существенное затруднение. В то время как сами уравнения Лакса, видимо, по-прежнему имеют место, понятие ad-инвариантной функции, столь важное в разд. 5c, утеряно. В новой алгебре такие функции могут даже не существовать. Во всяком случае, мы не смогли выявить ни одной. Другое разочаровывающее свойство существующей теории состоит в том, что она до сих пор не дала возможности определить τ-функцию с помощью алгебры Ли. Мы не имеем даже никаких идей относительно пространства, в котором она существует. Она появилась вполне естественным путем как потенциал и как определитель матрицы коэффициентов бесконечного набора линейных уравнений; ее также можно формально определить через вспомогательную функцию V, с помощью которой решаются уравнения Лакса, и через ее производную по ζ (которая соответствует действию производной в расширенной алгебре). Но это скорее вычислительные реалии, чем необходимые конструкции алгебры Ли, и очевидна необходимость более глубокого понимания этого замечательного объекта.

В качестве заключительного замечания этого обзора я включил диаграмму, приведенную на рис. 7, в которой сделана попытка дать наглядную картину взаимоотношений различных солитонных чудес.

5b. Подход Уолквиста — Эстабрука[1] [37], [77], [97].

(i) *Введение.* Целью этого раздела будет ответ на вопрос: является ли данное уравнение интегрируемым, и если да, то каково естественное представление, в котором интегрируемость почти очевидна? При ответе на этот вопрос принимаются во внимание два ведущих принципа, приобретенные на основании десятилетнего опыта. Первый состоит в том, что солитонные уравнения возникают как условия интегрируемости линейных систем. Второй заключается в том, что каждое солитонное уравнение принадлежит бесконечному семейству коммутирующих потоков. Поэтому сначала мы должны попытаться написать нелинейное уравнение как условие интегрируемости пары линейных систем $V_x = PV$, $V_t = QV$ с помощью подходящего выбора P и Q. Этот шаг приведет к выражениям для зависимости P и Q от зависимой переменной нелинейного уравнения и их производных, а также к бесконечному набору коммутационных соотношений. Дальнейшие ограничения на P и Q возникают из требования коммутируе-

[1]) Раздел 5b довольно длинен; при первом прочтении можно ознакомиться с выводами и перейти к следующим разделам. Прочтите также комментарии в замечании на с. 309.

мости бесконечной последовательности возможных Q. Это второе требование прямо приводит к выбору алгебры Каца — Муди в качестве фазового пространства. В случае иерархии АКНС ока-

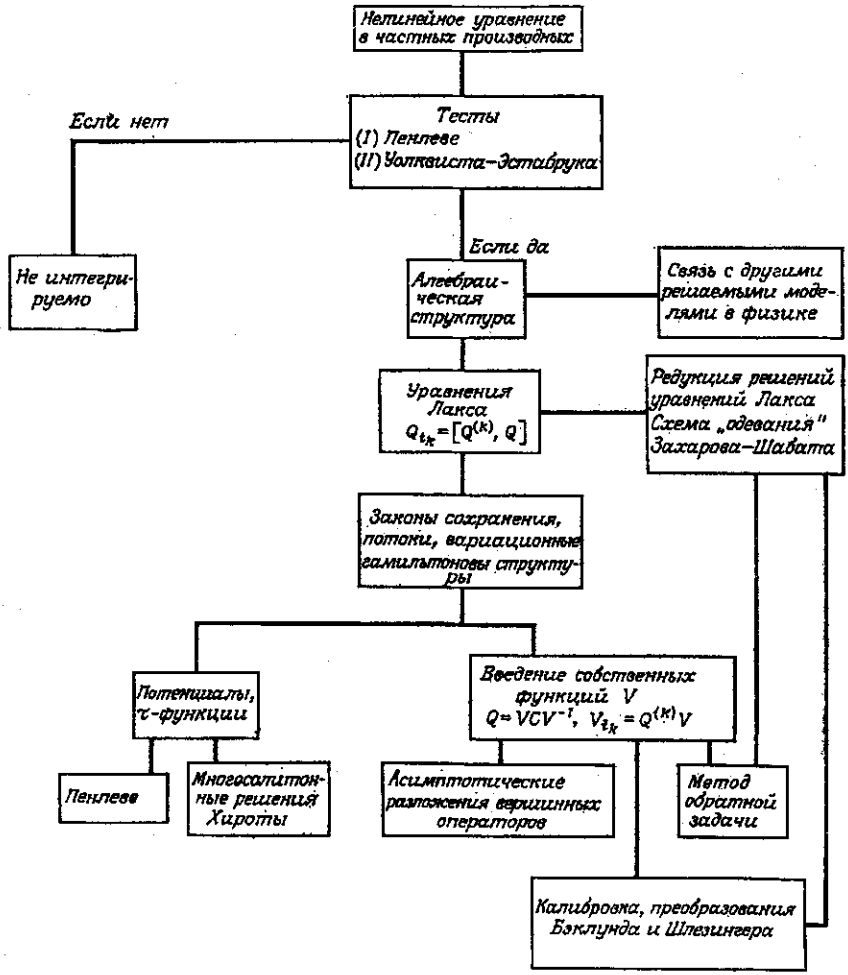

Рис. 7.

зывается, что матрицы коэффициентов являются элементами $sl(2, C)$ бесконечномерной алгебры петель, в которой каждый базисный вектор может быть выписан как произведение одного

из базисных векторов

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

из $\mathrm{sl}(2)$ и комплекснозначного параметра ζ, возведенного в целую степень. Полная алгебра Каца — Муди $\widetilde{\mathrm{sl}}(2)=\widetilde{\mathrm{sl}}(2)+\mathbb{C}Z+\mathbb{C}D$ содержит центр и производную, роль которой будет обсуждаться в разд. 51.

Насколько нам известно, здесь впервые бесконечная алгебра, построенная методом Уолквиста — Эстабрука, получила интерпретацию в рамках подхода Каца — Муди.

(ii) *Нелинейное уравнение Шрёдингера.* Рассмотрим первую пару нетривиальных уравнений иерархии АКНС

$$\begin{aligned} q_t &= i/2\,(q_{xx}-2q^2r),\\ r_t &= -\,i/2\,(r_{xx}-2qr^2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Попытаемся написать эти уравнения как условие интегрируемости

$$P_t-Q_x+[P,\,Q]=0 \tag{5.2}$$

пары линейных уравнений

$$V_x=PV, \tag{5.3}$$

$$V_t=QV. \tag{5.4}$$

Здесь под P и Q мы понимаем матрицы произвольного порядка, коэффициенты которых зависят от q, r и их производных. Мы можем взять (5.3), (5.4) в нелинейном виде $V_x=F(V)$, $V_t=G(V)$, в этом случае коммутатор в (5.2) был бы общей скобкой Ли, но до сих пор во всех случаях более удобно было брать линейное представление соответствующей алгебры.

Мы начнем с простейшего предположения, что P зависит только от q и r. Если это так, то она должна зависеть от этих переменных линейным образом, как показывают следующие соображения. Если $P=P(q,\,r)$, из (5.1) мы имеем $P_t=(i/2)P_q(q_{xx}-2q^2r)-(i/2)P_r(r_{xx}-2qr^2)$, где индексы обозначают частные производные. Для того чтобы скомпенсировать эти слагаемые в (5.2), матрица Q должна зависеть от q_x, r_x, q, r, причем $Q_x=Q_qq_x+Q_rr_x+Q_{q_x}q_{xx}+Q_{r_x}r_{xx}$. Компенсация членов с q_{xx}, r_{xx} приводит к уравнениям $Q_{q_x}=(i/2)P_q$, $Q_{r_x}=-(i/2)P_r$, которые после интегрирования дают $Q=(i/2)P_qq_x-(i/2)P_rr_x+\tilde{Q}(q,\,r)$. Тогда $Q_x=(i/2)P_qq_{xx}-(i/2)P_rr_{xx}+(i/2)P_{qq}q_x^2-(i/2)P_{rr}r_x^2$ плюс члены, которые могут быть

лишь линейными по q_x, r_x. Поскольку коммутатор содержит члены, самое большее пропорциональные q_x, r_x, мы должны иметь равенство $P_{qq} = P_{rr} = 0$, которое означает, что $P(q, r)$ может иметь вид $-iH + qE + rF + qrG$. Однако, как может быть легко проверено, G коммутирует со всеми другими элементами (так как коэффициенты при q^2r_x, r^2q_x и $rq_x - qr_x$ должны обратиться в нуль) и поэтому принадлежит центру. По этой причине она не дает никакого вклада в коммутатор уравнения (5.2) и является просто проявлением закона сохранения $P_t = Q_x$ (уравнение (5.2) без коммутатора), который в данном случае имеет вид $(qr)_t G = (i/2)(rq_x - r_x q)_x G$. Так как эта информация уже содержится в уравнениях, мы будем без потери общности просто опускать этот элемент.

По этой причине принимаем

$$P = -iH + qE + rF, \tag{5.5}$$

и с учетом (5.1) уравнение (5.2) преобразуется в

$$Q_x = [Q, P] = \frac{i}{2}(q_{xx} - 2q^2r)E - \frac{i}{2}(r_{xx} - 2qr^2)F. \tag{5.6}$$

Теперь решим уравнение (5.6) относительно Q; сначала запишем $Q = (i/2)q_xE - (i/2)r_xF + \bar{Q}(q, r)$. Затем, собирая полные производные по x из коммутатора, определим $\bar{Q} = qE_1 + rF_1 - (i/2)qrH_0 - i\tilde{H}_2$, где H_0, E_1, F_1 заданы формулами

$$[E, F] = H_0, \quad [H, E] = 2E_1, \quad [H, F] = -2F_1 \tag{5.7}$$

и $-i\tilde{H}_2$ — это просто постоянная матрица — константа интегрирования. Поэтому выполняется равенство

$$Q = -i\tilde{H}_2 + qE_1 + rF_1 + \frac{i}{2}q_xE - \frac{i}{2}r_xF - \frac{i}{2}qrH_0, \tag{5.8}$$

обеспечивающее соотношение

$$[\bar{Q}, P] = -iq^2rE + iqr^2F. \tag{5.9}$$

Приравнивая коэффициенты при q^2r, qr^2, q^2, r^2, qr, q, r, 1, мы находим, что

$$q^2r: \quad [H_0, E] = 2E, \tag{5.10a}$$

$$qr^2: \quad [H_0, F] = -2F, \tag{5.10b}$$

$$q^2: \quad [E, E_1] = 0, \tag{5.10c}$$

$$r^2: \quad [F, F_1] = 0, \tag{5.10d}$$

$$qr: \quad (1/2)[H_0, H] + [E, F_1] - [E_1, F] = 0, \tag{5.10e}$$

$$q: \quad [\tilde{H}_2, E] = [H, E_1], \tag{5.10f}$$

$$r: \quad [\tilde{H}_2, F] = [H, F_1], \tag{5.10g}$$

$$1: \quad [\tilde{H}_2, H] = 0. \tag{5.10h}$$

Здесь необходимы некоторые замечания.

1. Набор коммутационных соотношений не замкнут. Их перечень будет приведен в табл. 2.

2. Набор (5.10) содержит замкнутую подалгебру sl(2) H_0, E, F (см. (5.7) и (5.10a, b)).

3. Поясним, в каком смысле солитонные уравнения содержат взаимную компенсацию нелинейности (представленную здесь слагаемыми q^2r, qr^2) и дисперсии (q_{xx}, r_{xx}). Уравнения (5.10a, b) возникли как следствие взаимной компенсации $[-(i/2)qrH_0, qE + rF]$ и $-iq^2rE + iqr^2F$. Однако последний член возникает непосредственно из нелинейности в уравнении, в то время как предыдущий является результатом интегрирования произведения интегралов линейных членов $q_{xx}E$ и $r_{xx}F$ с $qE + rF$. Если бы нелинейными членами были q^3r^2 и q^2r^3, никакой баланс не был бы возможен и единственно возможной парой P, Q была бы тривиальная пара $P \sim qrG$, $Q \sim (rq_x - r_xq)G$, выражающая существование (единственного) закона сохранения. В этом заключается одно из реальных преимуществ метода Уолквиста — Эстабрука. Несолитонные уравнения быстро демонстрируют свои несообразности!

4. Согласно тождеству Якоби, из (5.10e) следует

$$[H, H_0] = 0 \tag{5.10i}$$

и

$$[E, F_1] = [E_1, F], \tag{5.10j}$$

и мы определяем

$$[E, F_1] = H_1. \tag{5.10k}$$

5. Последние три уравнения (5.10f, g, h) определяют $\tilde{H}_2$, произвольную константу интегрирования; они не дают никакой информации о том, что мы должны рассматривать в качестве базисных элементов H, E, F, с помощью которых порождаются все остальные элементы. Например, $[H_1, E] = 2E_1$ и, как мы увидим при составлении таблицы для (5.10), $[H, E_1] = 2E_2$ и так далее. Однако $\tilde{H}_2$ можно использовать для искусственного замыкания коммутационных соотношений. Положив $\tilde{H}_2 = \zeta H$, где ζ — произвольная константа, удовлетворим соотношению (5.10h). Тогда $[\tilde{H}_2, E] = \zeta[H, E] = 2E_1$, и (5.10f), (5.10g) дают $[H, E_1] = 2\zeta E_1$ и $[H, F_1] = -2\zeta F_1$ соответственно. Мы получаем табл. 1.

Таблица 1

	H_0	E	F	H	H_1	E_1	F_1	
H_0	0	$2E$	$-2F$	0	0	$2E_1$	$-2F_1$	
E		0	H_0	$-2E_1$	$-2E_1$	0	H_1	
F			0	$2F_1$	$2F_1$	$-H_1$	0	
H				0	0	$2\zeta E_1$	$-2\zeta F_1$	
H_1					0	$2\zeta E_1$	$-2\zeta F_1$	
E_1						0	ζH_1	
F_1							0	

Эта алгебра допускает хорошо известное представление

$$H=H_1=\zeta H_0,\quad E_1=\zeta E,\quad F_1=\zeta F,$$
$$H_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Искусственное замыкание является средством, с помощью которого Уолквист и Эстабрук в контексте уравнения Кортевега — де Фриза пришли к выражению для P и Q, и именно в этом направлении действовали последующие авторы [97]. Теперь мы вновь займемся исследованием таблицы, не делая никаких предположений о замыкании. В табл. 2 числа в правых углах клеток означают: 1 — по определению; 2 — непосредственный вывод из (5.10); 3 — следствие (5.10) и тождеств Якоби.

В качестве упражнения по применению тождества Якоби я предлагаю читателю завершить заполнение таблицы. Заметим, что если элементы

$$[H,\ H_j]=2X_j,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots, \tag{5.12}$$

равны нулю, то элементы H_p, E_q, F_r подчиняются соотношениям

$$[H_p,\ E_q]=2E_{p+q},\quad [H_p,\ F_r]=-2H_{p+r},\quad [E_q,\ F_r]=H_{q+r},$$
$$[H_p,\ H_q]=[E_p,\ E_q]=[F_q,\ F_r]=0 \tag{5.13}$$

(в табл. 2 индекс 1 мы связываем с H). Алгебра, определенная соотношениями (5.13), является тем, что мы называем $\widetilde{\mathrm{sl}}(2)$, а именно каждый член может быть представлен как произведение элементов $H_p=\zeta^p\overline{H}$, $E_q=\zeta^q\overline{E}$, $F_r=\zeta^r\overline{F}$, где $\overline{H}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$ — ба-

Таблица 2

	H_0	E	F	H	H_1	E_1	F_1	H_2	E_2	F_2	$\widetilde{H}_2$
H_0		2 $2E$	2 $-2F$	2 0	3 0	3 $2E_1$	3 $-2F_1$	3 0	3 $2E_2$	3 $-2F_2$	3 $-4X_1$
E			1 H_0	1 $-2E_1$	3 $-2E_1$	2 0	1 H_1	3 $-2E_2$ $-2[EX_1]$	3 0	1 H_2	2 $-2E_2$
F				1 $2F_1$	3 $2F_1$	2 $-H_1$	2 0	3 $2F_2$ $+2[F_2X_1]$	3 $-H_2$ $-2X_1$	0	2 $2F_2$
H					3 $2X_1$	1 $2E_2$	1 $-2F_2$	$2X_2$	1 $2E_3$	1 $-2F_3$	2 0
H_1						3 $2E_2$ $+[EX_1]$	3 $-2F_2$ $-[FX_1]$		3 $2E_3$ $+[E_1X_1]$	3 $-2F_3$ $-[F_1X_1]$	
E_1							3 H_2 $+X_1$				
F_1											
H_2											
E_2											
F_2											
$\widetilde{H}_2$											

зис sl(2). Однако непосредственно из нелинейного уравнения Шрёдингера само по себе не следует, что $X_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Ясно, что такой выбор совместим с (5.13), однако не является обязательным. Причина того, что $X_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, связана со вторым определяющим принципом, а именно требованием, чтобы уравнение (5.1) принадлежало бесконечному набору коммутирующих потоков. Однако, прежде чем наложить это условие, мы будем исследовать алгебру, генерируемую n-м уравнением иерархии АКНС.

(iii) *n-я пара уравнений иерархии АКНС.* Можно записать n-ю пару уравнений иерархии АКНС в виде

$$\begin{aligned} q_{t_n} &= b_{nx} - 2a_n q, \\ r_{t_n} &= c_{nx} - 2a_n r, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где a_n, b_n и c_n определены итеративным образом из

$$-2ib_{s+1}=b_{sx}-2a_sq, \tag{5.15a}$$

$$2ic_{s+1}=c_{sx}+2a_sr, \tag{5.15b}$$

$$a_{sx}=rb_s-qc_s, \quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{5.15c}$$

$$a_0=-i, \quad b_0=c_0=0. \tag{5.15d}$$

Константа интегрирования для a_s выбрана нулем. Мы предположим и затем проверим, что

1. qb_s, rc_s, qc_s, qa_s, ra_s и a_s функционально независимы; $rb_s=qc_s+a_{sx}$.

2. qb_s и rc_s не являются полными производными по x, исключая $s=2$; в этом случае

$$qb_2=\left(\frac{iq^2}{4}\right)_x, \qquad rc_2=\left(-\frac{ir^2}{4}\right)_x.$$

Мы хотим выбрать P, $Q^{(n)}$ так, чтобы (5.14) являлось условием интегрируемости

$$Q_x^{(n)}+[Q^{(n)},\ P]=P_{t_n} \tag{5.16}$$

пары уравнений

$$V_x=PV, \qquad V_{t_n}=Q^{(n)}V. \tag{5.17}$$

Опять же можно обосновать выбор

$$P=-iH+qE+rF, \tag{5.18}$$

откуда (5.16) представимо в виде

$$Q_x^{(n)}+[Q^{(n)},\ P]=(b_{nx}-2a_nq)E+(c_{nx}+2a_nr)F. \tag{5.19}$$

Непосредственно проверяется, что мы можем записать

$$Q^{(n)}=-a_nH_0+b_nE+r_nF+Q^{(n-1)}, \tag{5.20}$$

где

$$Q_x^{(n-1)}+[Q^{(n-1)},\ P]=(b_{n-1x}-2a_{n-1}q)E_1+(c_{n-1x}+2a_{n-1}r)F_1. \tag{5.21}$$

Для того чтобы из (5.20) получить (5.21), мы должны определить

$$[E,\ F]=H_0, \quad [H,\ E]=2E_1, \quad [H,\ F]=-2F_1; \tag{5.22}$$

заметим, что $[b_nE+c_nF,\ qE+rF]=-a_{nx}H_0$, и используем (5.15a, b) с $s=n-1$. Кроме того, функциональная независимость a_nq, a_nr налагает условие

$$[H_0,\ E]=2E, \quad [H_0,\ F]=-2F. \tag{5.23}$$

Далее, уравнение (5.21) представляет собой попросту уравнение (5.20) в других обозначениях, поэтому можно повторить процесс и получить

$$Q^{(n)} = \sum_{s=n}^{3} Q_s + Q^{(2)}, \tag{5.24}$$

где

$$Q_s = -a_s H_{n-s} + b_s E_{n-s} + c_s F_{n-s} \tag{5.25}$$

и

$$Q_x^{(2)} + [Q^{(2)}, P] = (b_{2x} - 2a_2 q) E_{n-2} + (c_{2x} + 2a_2 r) F_{n-2} \tag{5.26}$$

со следующими наложенными соотношениями. По определению

$$[H, E_{n-s}] = 2E_{n-s+1}, \quad [H, F_{n-s}] = -2F_{n-s+1}, \quad [E, F_{n-s}] = H_{n-2}, \tag{5.27}$$

в то время как коэффициенты при $a_{n-s}q$, $a_{n-s}r$, a_{n-s}, qb_{n-s}, rc_{n-s} дают для $s = n, \ldots, 3$

$$\begin{gathered}[H_{n-s}, E] = 2E_{n-s}, \quad [H_{n-s}, F] = -2F_{n-s}, \\ [H, H_{n-s}] = [E, E_{n-s}] = [F, F_{n-s}] = 0.\end{gathered} \tag{5.28}$$

Из этого факта, что $rb_{n-s} - qc_{n-s} = a_{n-sx}$, мы находим

$$[E_{n-s}, F] = [E, F_{n-s}] = H_{n-s}. \tag{5.29}$$

Используя тождества Якоби, определяем, что при всех $p + q \leqslant n - 3$

$$[H_p, E_q] = 2E_{p+q}, \quad [H_p, F_q] = -2F_{p+q}, \quad [E_p, F_q] = H_{p+q}; \tag{5.30a}$$

все остальные скобки этого порядка — нули. Причина, по которой мы не можем продолжить таблицу, состоит в том, что при $s = 2$ мы сталкиваемся с аномальным поведением, описанным в предположении 2. Решая (5.26), находим

$$\begin{aligned}Q^{(2)} = b_2 E_{n-2} + c_2 F_{n-2} - a_2 H_{n-2} + \frac{iq^2}{4}[E, E_{n-2}] - \\ - \frac{ir^2}{4}[F, F_{n-2}] + b_1 E_{n-1} + c_1 F_{n-1} - i\tilde{H}_n,\end{aligned} \tag{5.30b}$$

где на новые элементы наложены следующие ограничения:

$$q^3: \quad [E, [E, E_{n-2}]] = 0, \tag{5.31a}$$

$$r^3: \quad [F, [F, F_{n-2}]] = 0, \tag{5.31b}$$

$$q^2 r: \quad [H_{n-2}, E] = 2E_{n-2} - (1/2)[F, [E, E_{n-2}]], \tag{5.31c}$$

$$qr^2: \quad [H_{n-2}, F] = -2F_{n-2} + (1/2)[E, [F, F_{n-2}]], \tag{5.31d}$$

$$q^2: \quad [E, E_{n-1}] + (1/4)[H, [E, E_{n-2}]] = 0, \tag{5.31e}$$

$$r^2: \quad [F, F_{n-1}] - (1/4)[H, [F, F_{n-2}]] = 0, \tag{5.31f}$$

$$qr: \quad -(1/2)[H, H_{n-2}] + [E, F_{n-1}] - [E_{n-1}, F] = 0, \tag{5.31g}$$

$$q: \quad [\tilde{H}_n, E] = [H, E_{n-1}], \tag{5.31h}$$

$$r: \quad [\tilde{H}_n, F] = [H, F_{n-1}], \tag{5.31i}$$

$$1: \quad [\tilde{H}_n, H] = 0. \tag{5.31j}$$

Заметим, что если $n=2$, $E_{n-2}=E_0=E$, $F_{n-2}=F_0=F$ и (5.31) сводится к (5.10). Так же как в случае $n=2$, тождество Якоби приводит к тому, что $[H, H_{n-2}]=0$ и $[E, F_{n-1}]=[E_r, F_s]=[E_{n-1}, H_{n-1}]$, $r+s=n-1$. Точно так же, как при $n=2$, мы можем бесконечно расширять эту алгебру, определяя новые элементы согласно правилу

$$[H, E_r]=2E_{r+1}, \quad [H, F_r]=-2F_{r+1}, \quad [E, F_r]=H_{r+1}, \quad r \geqslant n-1.$$

Полученная алгебра бесконечномерна и содержит в себе $\tilde{\mathrm{sl}}(2)$, но по-прежнему оставляет неопределенными элементы

$$[H, H_j], \quad j \geqslant n-1, \quad [E, E_{n-2}], \quad [F, F_{n-2}]. \tag{5.32}$$

(iv) *Наложение условия коммутативности.* Мы видели, как любая пара уравнений иерархии АКНС, взятая изолированно, порождает, после бесконечного расширения, бесконечную алгебру, содержащую $\tilde{\mathrm{sl}}(2)$ в качестве совместного решения, но оставляющую неопределенными коммутаторы (5.32). Легко заметить, что это вырождение устраняется требованием взаимной коммутируемости потоков. Если мы потребуем, чтобы q, r являлись решениями первых двух пар уравнений в иерархии АКНС, то дополнительно к (5.16) при $n=2$, 3 мы должны получить

$$Q^{(2)}_{t_3} - Q^{(3)}_{t_2} + [Q^{(2)}, Q^{(3)}] = 0. \tag{5.33}$$

Эти условия означают, что элементы H_p, E_q, F_r удовлетворяют таблице коммутаторов, *общей* для $n=2$, 3; а именно, мы находим, что $[E, E_1]=[F, F_1]=0$ (условие, необходимое при $n=2$, но не для $n=3$) и $[H, H_1]=0$ (наложенное при $n=3$, но не для $n=2$). Поэтому таблицей $n=2$, 3 является $\tilde{\mathrm{sl}}(2)$, за исключением того, что $[H, H_j]$ при $j \geqslant 2$ неопределен. Далее, требуя, чтобы коммутировали $n=2$, 3, 4, находим, что $[E, E_2]$, $[F, F_2]$, неопределенные таблицей $n=4$, сейчас, так же как $[H, H_2]$, должны быть равны нулю. В общем случае условие коммутируемости потоков имеет вид

$$Q^{(j)}_{t_k} - Q^{(k)}_{t_j} + [Q^{(j)}, Q^{(k)}] = 0. \tag{5.34}$$

Продолжая процесс, на n-м шаге мы находим, что включение n-го уравнения иерархии АКНС в семейство коммутирующих потоков обращает в нуль коммутатор $[H, H_{n-2}]$, оставшийся неопределенным таблицей, общей для $r=2, \ldots, n-1$. Коммутаторы $[E, E_{n-2}]$, $[F, F_{n-2}]$, также оставшиеся неопределенными при $r=n$, сейчас равны нулю в силу того, что они нулевые для расширенных таблиц с $r=2, \ldots, n-1$. Сейчас ясно, что в пределе $n \to \infty$ элементы H, H_p, E_q, F_r удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}[H_p, E_q]=2E_{p+q}, \quad [H_p, F_r]=-2F_{p+r}, \\ [E_q, F_r]=H_{q+r}, \quad [H_p, H_q]=[E_p, E_q]=[F_p, F_q]=0.\end{gathered} \tag{5.35}$$

Коммутаторы элемента H являются теми же, что и для H_1.

(v) *Выводы.* Мы увидели, как два ведущих принципа (т. е. что солитонные уравнения представляют условия интегрируемости системы линейных уравнений и что каждое из них принадлежит бесконечному семейству коммутирующих потоков) приводят нас к заключению, что естественным фазовым пространством, в котором «живут» уравнения, является алгебра Каца — Муди. Действительно, (5.34) представляет собой естественную конструкцию для выражения уравнений. В следующем разделе мы увидим, каким образом эти уравнения могут быть представлены в лаксовой форме

$$Q_{t_k}=[Q^{(k)}, Q] \tag{5.36}$$

посредством анализа эволюции $Q=\lim\limits_{j\to\infty} \zeta^{-j}Q^{(j)}$ (где ζ — градуирующий параметр).

На данном этапе также должно стать ясно, что можно ослабить требование линейности вспомогательных уравнений $V_{t_j}=Q^{(j)}V$. Линейность является просто следствием того факта, что мы всегда можем найти линейное представление алгебры $\widetilde{\mathrm{sl}}(2)$. В данном случае оно имеет вид

$$H_p=\zeta^p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad E_q=\zeta^q\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad F_r=\zeta^r\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

Мы могли бы использовать иное представление, например $\zeta^p(\gamma^2(d/d\gamma), \gamma(d/d\gamma), d/d\gamma)$, и найти вместо линейных систем (2×2) $V_{t_j}=Q^{(j)}V$ последовательность уравнений Риккати для $\gamma=v_1/v_2$, где $V=\binom{v_1}{v_2}$.

В заключение отметим, что, хотя целью этого раздела являлось понимание структуры бесконечно расширенных алгебр, порождаемых иерархией АКНС, на практике более удобно сконструировать искусственное замыкание. Однако следует созна-

вать, что, сделав это, необходимо проводить различие между элементами $\zeta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ в том смысле, что мы рассматриваем их как линейно независимые. Только в том случае, когда фазовое пространство рассматривается как бесконечная вереница таких элементов (формальный степенной ряд $Q = \sum_{r=0}^{\infty} \zeta^{-r}(h_r H + e_r E + f_r F)$), коммутатор $[Q^{(k)}, Q]$ (5.36) имеет естественную интерпретацию как гамильтоново векторное поле.

Упражнение 5b

Испытаем метод на уравнении

$$q_t + 6q^p q_x + q_{xxx} = 0.$$

Положим $P = qX_1 + X_2$ (покажите, что если $P = P(q)$, то $P_{qq} = 0$) и решим (5.2) относительно Q,

$$Q = -q_{xx}X_1 + q_x[X_1, X_2] - \frac{6}{p+1} q^{p+1} X_1 + \\ + \frac{q^2}{2}[X_1, X_3] + q[X_2, X_3] + \bar{X}.$$

(Подсказка: сначала решите для $Q = -q_{xx}X_1 + R(q, q_x)$ и продолжите $R = q_x[X_1, X_2] + S(q)$ и т. д.) Из (5.2) мы находим, приравнивая члены при одинаковых степенях q, что $X_3 = 0$, если $p \neq 0$, 1 или 2. В этом случае X_1 и X_2 пропорциональны, и запись уравнения как условия разрешимости (5.3), (5.4) просто отражает тот факт, что оно имеет очевидный закон сохранения. С другой стороны, если $p = 1$, 2, то возникает нетривиальная алгебра. В том случае, когда $p = 2$, мы можем решить коммутационные соотношения, выбирая

$$\bar{X} = -4i\zeta^3 H, \quad X_1 = E - F, \quad H_2 = -iH\zeta.$$

Каковы возможные решения при $p = 1$?

5c. Уравнения Лакса, связанные с $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Материал этого раздела воспроизводит текст статьи II в нашей серии статей, посвященных алгебрам Каца — Муди и солитонным уравнениям. В предыдущих разделах мы видели, каким образом естественное фазовое пространство системы АКНС связано с бесконечномерной алгеброй Ли $G = \widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ формальных рядов

$$X = \sum_{-\infty}^{M} X_{-j}\zeta^j, \quad M \text{ произвольно, но ограничено,} \tag{5.38}$$

где каждый элемент X_{-j} принадлежит $\mathrm{sl}(2, C)$.

Алгеброй Ли является *векторное пространство*, снабженное *коммутатором*; в нашем случае им является

$$[X, Y] = \sum_i \sum_{k+j=i} [X_{-j}, Y_{-k}]\zeta^i. \tag{5.39}$$

Для вычислений полезно представлять каждый X_{-j} выраженным в виде (комплексной) линейной комбинации $h_{-j}H + e_{-j}E + f_{-j}F$ базисных элементов H, E, F, имеющих матричное представление

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.40}$$

где $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$ и все остальные коммутаторы равны нулю. На G мы определим невырожденную симметричную билинейную форму (форму Киллинга или внутреннее произведение)

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{Tr}(X\,Y)_0 = \sum_{j+k=0} \operatorname{Tr} X_{-j}Y_{-k}, \tag{5.41}$$

и при помощи этой операции G можно отождествить с ее дуальной алгеброй G^*.

В формуле (5.41) $\operatorname{Tr}(X_{-j}Y_{-k})$ можно взять в виде следа произведения матричных представлений X_{-j} и Y_{-k}. (По-другому его можно определить как след матриц, представляющих присоединенные действия этих двух величин. Эти два определения приводят к результатам, которые пропорциональны, но не равны.) Необходимо также проверить формулу «объема параллелепипеда» $\langle X, [Y, Z]\rangle = \langle Y, [Z, X]\rangle = \langle Z, [X, Y]\rangle$.

Мы можем определить *градиент* комплекснозначной функции $f(X)$, определенной на $G^* = G$, следующим образом. Пусть $\delta X \in T_X G$ является элементом касательного к G пространства в точке X. Тогда производная по направлению

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(X + \varepsilon\delta X)\,|_{\varepsilon=0}$$

функции f в точке X в направлении δX является линейным функционалом на δX, который может быть записан в виде

$$\langle \nabla f(X), \delta X\rangle. \tag{5.42}$$

$\nabla f(X)$ мы назовем *градиентом* $f(X)$ в X. В качестве примера покажите, что $\nabla e_j = F_{-j}$, $\nabla f_j = E_{-j}$, $\nabla h_j = (1/2)H_{-j}$, где $F_{-j} = F\zeta^j$, $E_j = E\zeta^j$ и $H_{-j} = H\zeta^j$.

Введем понятие *ad-инвариантной* функции $f(X)$, обладающей свойством

$$[\nabla f(X), X] = 0 \tag{5.43}$$

для всех $X \in G$. Это уравнение выражает следующую идею. Если g является элементом группы Ли, связанной с G, то присоединенное действие g на X, gXg^{-1}, которое осуществляет отображение в новый элемент G, оставляет неизменным значение f. Функция с таким свойством называется *ad-инвариантной*. Это свойство может быть выражено в виде следующего условия: для всех $Y \in G$

$$0 = \frac{d}{dt} f(e^{tY} X e^{-tY})|_{t=0} = \langle \nabla f, [Y, X] \rangle.$$

С использованием формулы объема параллелепипеда она означает, что $\langle [\nabla f, X], Y \rangle = 0$, и невырожденность внутреннего произведения приводит к (5.43). Далее, рассмотрим

$$K = \left\{ \sum_{-\infty}^{-1} X_{-j} \zeta^j \right\}, \quad N = \left\{ \sum_{0}^{M} X_{-j} \zeta^j \right\}, \tag{5.44}$$

прямой суммой которых является G. Множество N^*, дуальное к N относительно внутреннего произведения (5.41) (минимальный набор всех элементов, внутреннее произведение которых с любым членом из N равно нулю), также является ортогональным дополнением $K^\perp$ к K (набор всех элементов, внутреннее произведение которых с любым элементом из K равно нулю):

$$K^\perp = N^* = \left\{ \sum_{-\infty}^{0} X_{-j} \zeta^j \right\}.$$

Оно будет нашим фазовым пространством, элемент которого я буду записывать в виде

$$Q = \sum_{0}^{\infty} (h_r H_r + e_r E_r + f_r F_r), \tag{5.45}$$

где $H_r = \zeta^{-r} H$, $E_r = \zeta^{-r} E$ и $F_r = \zeta^{-r} F$.

Далее, на $K^\perp$, рассматриваемом как дуальное к N, существуют естественные скобки Пуассона. Для двух функций $f(Q)$, $g(Q)$ на $K^\perp$ они определяются формулой

$$\{f, g\}(Q) = -\langle [\pi_N \nabla f, \pi_N \nabla g], Q \rangle, \tag{5.46}$$

где π_N — проекция $\nabla f(Q)$ на N. Читателю следует проверить, что справедливы два свойства: антикоммутативность, т. е. $\{f, g\} = -\{g, f\}$, и тождество Якоби, $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$. Кроме того, каждой функции $f(Q)$, $Q \in K^\perp$ соответствует *гамильтоново векторное поле*

$$x_f = -\pi_{K^\perp} [\pi_N \nabla f(Q), Q]. \tag{5.47}$$

Это означает, что производная любой функции $g(Q)$ для Q в направлении x_f задается выражением $\{f, g\}(Q)$.

Поэтому для каждой функции $f(Q)$ существует поток или векторное поле. Еще одной компонентой, которая необходима для того, чтобы сделать систему полностью интегрируемой, является набор функций $\{f_j\}$, приводящих к коммутируемым векторным полям: $\{f_j, f_k\} = 0$. Поэтому каждая функция из набора $\{f_j\}$ сохраняется вдоль векторного поля, связанного с любой из них.

Кандидатами в этот класс являются функции, которые ad-инвариантны. Теорема Адлера — Константа — Симеса гласит, что если $f(X)$ и $g(X)$ ad-инвариантные функции, то

(i) $\{f, g\} = 0$ на $K^{\perp}$;

(ii) векторные поля x_f, x_g коммутируют.

Иерархия АКНС возникает с помощью этой теории из простейших ad-инвариантных функций

$$-\Phi_k(Q) = \frac{1}{2}\langle S^k Q, Q\rangle, \quad j = 0, \ldots, \infty, \tag{5.48}$$

где S^k является сдвигом

$$S^k : \sum X_{-j}\zeta^j \to \sum X_{-j}\zeta^{j+k},$$

т. е. умножением на ζ^k. Чтобы увидеть это, заметим, что для $X \in G$

$$\nabla\Phi_k(X) = -S^k X; \tag{5.49}$$

при этом ясно, что

$$[\nabla\Phi_k(X), X] = 0. \tag{5.50}$$

Далее, заметим, что для $Q \in K^{\perp}$

$$Q_{t_k} = -\pi_{K^{\perp}}[\pi_N \nabla\Phi_k(Q), Q] = \pi_{K^{\perp}}[\pi_K \nabla\Phi_k(Q), Q]; \tag{5.51}$$

из (5.50)

$$Q_{t_k} = [\pi_K \nabla\Phi_k(Q), Q].$$

Так как $[\pi_K \nabla\Phi, Q] \in K^{\perp}$, то

$$Q_{t_k} = -[\pi_N \nabla\Phi_k(Q), Q] = [Q^{(k)}, Q], \tag{5.52}$$

где

$$Q^{(k)} = \pi_N S^k Q = \zeta^k\left(Q_0 + \ldots + \frac{Q_k}{\zeta^k}\right), \tag{5.53a}$$

причем

$$Q_r = h_r H + e_r E + f_r F. \tag{5.53b}$$

Это в точности потоки (3.49) в иерархии АКНС. Свойство ad-инвариантности f_k было важным при устранении оператора проектирования $(\pi_{K\perp})$ из коммутатора.

Подчеркнем следующие моменты:

(i) Заранее не существует выделенного t_k, которое необходимо было бы назвать x. В предыдущем анализе t_1 играла особую роль; она является независимой переменной в задаче на собственные значения. Когда этот выбор сделан, возникает иерархия АКНС. Но если в качестве спектральной переменной x выбрана t_2, в результате получается другая иерархия.

Частным случаем этой «новой» иерархии, связанной с t_2, является то, что иногда называют иерархией НУШП; она включает нелинейное уравнение Шрёдингера с производной. С другой стороны, которую я буду обсуждать в разд. 5k, она содержит массивную модель Тирринга точно так же, как иерархия АКНС содержит уравнение sin-Гордон. Но на самом деле она вовсе не является действительно новой иерархией; уравнение (5.52), записанное в покомпонентной форме (5.55), не изменяется. Обе эти иерархии являются частью большой иерархии, связанной с $\tilde{\mathrm{sl}}(2, C)$: перефразируя Редьярда Киплинга,

Система АКНС
И вся иерархия НУШП
Как сестры родные близки

(ii). Несмотря на то что выбор $\tilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ был обусловлен записью интересующего нас уравнения в виде условия интегрируемости, после того как задана G и ее разложение на две подалгебры K и N, потоки возникают естественным образом без ссылок на какую-либо концепцию вроде изоспектральной деформации. Все те или иные «изо» вытекают как естественные следствия наложения дополнительной структуры аналитического характера. *До сих пор все осуществлялось чисто алгебраическим путем.*

(iii). При построении иерархии АКНС различные Q_k были выражены в терминах q, r (здесь e_1, f_1) и их производных по x. Формула (5.52) представляет собой просто систему уравнений для бесконечного набора переменных $\{h_r, e_r, f_r\}$ как функций бесконечного числа времен $\{t_1, t_2, \ldots\}$.

(iv). То, что все потоки иерархии АКНС коммутируют, тривиальным образом следует из общей теории.

Читателю следует самому проверить следующие факты:

(a) $\Phi_k(Q)$ являются коэффициентами при ζ^{-k} в рядах $-(1/2)\operatorname{Tr} Q^2 = (h^2 + ef)$, где $h, e, f = \sum_0^\infty (h_r, e_r, f_r)\zeta^{-r}$.

(b) Скобками Пуассона для h_r, e_r, f_q являются

$$\{h_r, e_s\} = e_{r+s}, \quad \{h_r, f_s\} = -f_{r+s}, \quad \{e_r, f_s\} = 2h_{r+s}; \tag{5.54}$$

остальные скобки равны нулю.

(c) Уравнения для h_r, e_p, f_q могут быть получены либо из (5.54), либо из (5.52) и имеют вид

$$\begin{aligned} e_{j,t_k} &= 2 \sum_{0}^{\min(j-1,\, k)} (h_r e_{j+k-r} - e_r h_{j+k-r}), \\ f_{j,t_k} &= -2 \sum_{0}^{\min(j-1,\, k)} (h_r f_{j+k-r} - f_r h_{j+k-r}), \\ h_{j,t_k} &= \sum_{0}^{\min(j-1,\, k)} (e_r f_{j+k-r} - f_r e_{j+k-r}). \end{aligned} \tag{5.55}$$

Отсюда немедленно следует, что h_0, e_0, f_0, h_1 не зависят от всех t_k. Выберем $h_0 = -i$, $e_0 = f_0 = h_1 = 0$ в качестве определения канонических уравнений. Заметим также, что $h^2 + ef$ не зависит от t_k и в соответствии с нашим выбором h_0, e_0, f_0 можно выбрать эту константу равной -1. Отсюда h_k определяются как линейные комбинации произведений e и f. Читателю также следует показать, что все $Q_k = h_k H + e_k E + f_k F$ могут быть записаны как функции от $e_1(q)$ и $f_1(r)$ и их производных по x. Например, $e_{1,t_1} = -2ie_2$, $e_{2,t_1} = -2ie_3 - 2h_2 e_1$, $h_2 = -(i/2)\, e_1 f_1$, откуда $e_2 = (i/2)\, e_{1,t_1}$, $e_3 = -(1/4)\,(e_{1,t_1 t_1} - 2e_1^2 f_1)$. Заметим также, что уравнения (3.42a) (обобщающие НУШ) представляют собой просто $e_{1,t_2} = -2ie_3$ и $f_{1,t_2} = -2if_3$. Более того, мы можем также записать все Q_k, $k \geqslant 3$, как функции от e_1, f_1, e_2, f_2 и их производных по t_2. В качестве следующего упражнения читателю следует записать уравнения для e_1, f_1, e_2, f_2 в виде уравнений в частных производных по t_2 и t_4. Можете ли вы найти согласованную редукцию ($e_2 = f_2 = 0$, $f_1 = \pm e_1^*$), которая дает НУШ с производной

$$u_{t_4} = iu_{t_2 t_2} \pm (u^2 u^*)_{t_2}?$$

(Подсказка: вам необходимо совершить преобразование вида

$$e_1 \sim u \exp\left(i\alpha \int uu^*\, dt_2\right).)$$

(d) Связь между подходом алгебр Ли и вариационной гамильтоновой структурой.

После того как выбрана x, скажем t_1, можно рассмотреть фазовое пространство, являющееся дифференциальной алгеброй, состоящей из многочленов от $e_1 = q$, $f_1 = r$ и их производ-

ных по x произвольного порядка совместно с символом $\partial/\partial x$, который трансформирует q в q_x, q_x в q_{xx} и т. д. Оно является фазовым пространством, которое наиболее часто изучалось ([40], [106]) и допускает следующий гамильтонов подход. Рассмотрим

$$H_k[q, r] = \frac{4}{k+1} \int h_{k+2}(q, r, q_x, r_x, \ldots)\, dx \tag{5.56a}$$

и вариационный градиент Фреше

$$\nabla H_k = \frac{\delta H_k}{\delta q}, \ \frac{\delta H_k}{\delta r},$$

где

$$\frac{\delta H_k}{\delta q} = \frac{4}{k+1} \sum_0^\infty (-1)^s \frac{\partial^s}{\partial x^s} \frac{\partial h_{k+2}}{\partial q^{(s)}} \tag{5.56b}$$

и $\delta H_k/\delta r$ определяется аналогично. Символом $q^{(s)}$ обозначается $\partial^s q/\partial x^s$. В $\delta H_k/\delta q$ читатель узнает частную вариационную производную, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} H_k[q + \varepsilon \delta q, r] = \int \frac{\delta H_k}{\delta q} \delta q\, dx.$$

Потоки (5.52) могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_k} = J \nabla H_k, \tag{5.56c}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для доказательства этого см. [75]. Скобки Пуассона двух функций $F[q, r]$, $G[q, r]$ имеют вид

$$\{F, G\} = \int J \nabla F \cdot \nabla G\, dx, \tag{5.56d}$$

где ∇ — вариационный градиент. Доказательство того, что H_k, определенные формулой (5.56a), находятся в инволюции под действием этих скобок, также приведено в [70], [75]. В разд. 5d я расскажу о том, что является гамильтонианом и сопряженными переменными, если в качестве особой переменной x выбрана t_j, $j > 1$.

Сейчас я хочу подчеркнуть два момента. Первый состоит в том, что солитонные потоки, порождаемые в подходе посредством алгебр Ли с помощью ad-инвариантных функций Φ_k, являются особенными, если также потребовать, чтобы имела смысл интерпретация с точки зрения дифференциальной алгебры. Основанием этому является то, что если x должна быть

особой в том смысле, что все величины, подобные e_1, f_1 и т. д., мы можем понимать как функции независимой переменной x, то на $K^\perp$ допустимы только такие векторные поля (соответствующие выбору других независимых переменных t_k, $t_k \neq x$), которые коммутируют с $x = t_1$. Поэтому если мы хотим свободы в выборе любого t_j в качестве выделенной x, то в $K^\perp$ мы должны выбрать только те векторные поля, которые коммутируют с векторным полем x_{Φ_j}, генерируемым гамильтонианом Φ_j. В [39] нами доказана теорема, гласящая, что единственными векторными полями, удовлетворяющими этому условию, являются векторные поля, порождаемые при помощи выбора в качестве гамильтониана линейной комбинации Φ_k.

Второй момент состоит в том, что в рамках подхода алгебр Ли величины гамильтонианов Φ_k (которые для набора канонических уравнений мы выбрали равными $\Phi_0 = 1$, $\Phi_k = 0$, $k \geqslant 1$) не имеют значения. С другой стороны, в подходе дифференциальной алгебры значения гамильтонианов H_k важны. Они являются интегралами сохраняющихся плотностей, интегралы движения которых могут быть непосредственно сопоставлены данным рассеяния (параметры для непрерывного спектра и солитонов) при помощи формулы следа (см. (3.70), (3.71), (3.72) и [75]).

Упражнения и примеры. Сейчас мы обсудим три примера, используя алгебраический подход. Первым является гармонический осциллятор, вторым — конечная цепочка Тоды и третьим — новый способ разложения $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, при котором семейства КдФ и мКдФ возникают естественным образом без привлечения требования $f_1 = -1$ или $f_1 = \pm e_1$. В разд. 5h я покажу, как при рассмотрении альтернативных градуировок $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ это новое разложение появляется естественным образом.

Упражнения 5c

1. Возьмите $G = \mathrm{sl}(2, C)$, $X = hH + eE + fF$, $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}\, XY$. Найдите такое разложение $G = K + N$, что Q, произвольный элемент пространства $K^\perp$, имеет вид $hH + eE$. Единственная (с точностью до умножения на число) ad-инвариантная функция Φ — это $-(h^2 + ef)$; при этом $-\nabla\Phi(X) = hH + eE + fF$. Покажите, что гамильтоново векторное поле на $K^\perp$ запишется так:

$$\dot{Q} = -\pi_{K^\perp}[\pi_N \nabla\Phi, Q] = -[\pi_N \nabla\Phi, Q],$$

откуда следует

$$\dot{h} = 0, \qquad \dot{e} = 2he.$$

Для мнимых h и комплексных e это есть уравнение гармонического осциллятора.

2. Рассмотрите алгебру Ли бесшпуровых $n \times n$-матриц

$$X \cong \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & d_1 & & & \\ c_1 & b_2 & a_2 & \cdot & & \\ e_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

с обычным матричным коммутатором; $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(XY)$. Возьмите разложение

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & d_1 & & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & \cdot & d_2 & \\ -d_1 & -a_2 & \cdot & & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ & & & & \cdot & \\ & & & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & & & & & \\ c_1+a_1 & b_2 & & & & \\ d_1+e_1 & c_2+a_2 & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & c_{n-1}+a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \qquad K \qquad + \qquad N,$$

где K — кососимметричная, а N нижнетреугольная матрица. X также может быть разложено в $K^{\perp} + N^{\perp}$, где $K^{\perp}$ — множество симметричных матриц

$$Q = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & d_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdot & & \\ d_1 & a_2 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ & & & \cdot & & \\ & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},$$

а $N^{\perp}$ состоит из строго нижнетреугольных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ c_1 - a_1 & & & & & \\ e_1 - d_1 & c_2 - a_2 & & & & \\ & & \cdot & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \\ & & & & c_{n-1} - a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

K и N (в отличие от $K^{\perp}$) суть подалгебры.

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \ldots) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} X^2$$

— ad-инвариантная функция с градиентом $\nabla\Phi(X) = X$. Гамильтоново векторное поле на $K^{\perp}$ задается так:

$$\dot{Q} = -\pi_{K^{\perp}}[\pi_N \nabla\Phi(Q), Q] = \pi_{K^{\perp}}[\pi_K \nabla\Phi(Q), Q] = [\pi_K \nabla\Phi(Q), Q].$$

Поэтому уравнение движения есть $\dot{Q} = [B, Q]$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & d_1 & & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & & & \\ -d_1 & & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ & & & & \cdot & \\ & & & -a_{n-1} & & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если мы ограничимся трехдиагональными матрицами X (т. е. если $d = e = \ldots = 0$), то матрица Q симметрична и трехдиагональна. Далее, $B = \pi_K \nabla\Phi(Q)$ и коммутатор $[B, Q]$ также трехдиагональны. Следовательно, гамильтонов поток, порожденный Φ, сохраняет трехдиагональную структуру Q. Следовательно, мы можем сделать согласованную редукцию к трехдиагональной форме и получить более простой набор уравнений. В компонентах они записываются так:

$$\dot{b}_r = 2a_r^2 - 2a_{r-1}^2, \quad r = 1, \ldots, n, \quad a_0 = a_n = 0,$$
$$\dot{a}_r = a_r(b_{r+1} - b_r), \quad r = 1, \ldots, n-1.$$

Положим

$$a_r = \frac{1}{2} \exp \frac{1}{2}(u_r - u_{r+1}), \quad b_r = -\frac{1}{2}\dot{u}_r.$$

Тогда уравнения превратятся в

$$\ddot{u}_r = e^{u_{r-1} - u_r} - e^{u_r - u_{r+1}}, \quad r = 1, \ldots, n, \quad u_0 = -\infty, \quad u_{n+1} = \infty.$$

Эти уравнения описывают конечную цепочку Тоды (см. упражнение 2b(iv) в гл. 2), у которой нулевая и $(n+1)$-я частицы удалены на разные бесконечности. Решение этой системы дано Мозером в [98], а Констант [99] описал весьма подробно ее алгебраическую структуру.

3. Рассмотрите другое разложение алгебры $\mathrm{sl}(2, C)$, $G = K + N$, где

$$N = \sum_{1}^{M} X_{-j}\lambda^j + e_0 E + h_0 H,$$

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} (h_j H + e_j E + f_j F) \cdot \lambda^{-j} + f_0 F$$

с внутренним произведением[1]), определенным с помощью (5.41). Тогда произвольный элемент Q в пространстве $K^{\perp}$ имеет вид

$$Q = h_0 H + f_0 F + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j H + e_j E + f_j E)\lambda^{-j}.$$

Для набора ad-инвариантных функций

$$\Phi_k = -(h^2 + ef)_k,$$

где h, e, f — ряды (векторы с бесконечным числом компонент), а индекс относится к члену при λ^{-k}, мы положим величины $\Phi_1 = 1$, $\Phi_k = 0$, $k \neq 1$. Это означает, что мы взяли $h_0 = 0$, $f_0 = 1$, $e_1 = 1$. Выбор этот аналогичен сделанному ранее в этом разделе выбору $h_0 = -i$, $e_0 = f_0 = 0$. Величины

$$Q^{(k)} = -\pi_N \nabla \Phi_k(Q)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
&k = 1, \quad -\lambda F + h_1 H + E, \\
&k = 2, \quad -\lambda^2 F + \lambda(h_1 H + E + f_1 F) + h_2 H + e_2 E, \\
&\vdots \\
&k = k, \quad -\lambda^k F + \lambda^{k-1}(h_1 H + E + f_1 F) + \ldots \\
&\qquad\qquad + \lambda^{k-r}(h_r H + e_r E + f_r F) + \ldots + h_k H + e_k E.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Покажите, что уравнения

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q] \tag{5.58a}$$

---

[1]) Мы увидим в разд. 5h, что это разложение совершенно естественно и соответствует главной градуировке $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$.

имеют вид

$$h_{j,t_k}=e_{j+k}+\sum_{r=1}^{(j-1,\,k)}(e_r f_{j+k-r}-f_r e_{j+k-r})+e_j f_k, \tag{5.58b}$$

$$e_{j,t_k}=2\sum_{r=1}^{(j-1,\,k)}(h_r e_{j+k-r}-e_r h_{j+k-r}), \tag{5.58c}$$

$$f_{j,t_k}=-2h_{j+k}-2\sum_{r=1}^{(j-1,\,k)}(h_r f_{j+k-r}-f_r h_{j+k-r})-2h_j f_k, \tag{5.58d}$$

где обозначение $(j-1,\ k)$ означает, что суммировать можно либо до $j-1$, либо до k.

Я прошу вас убедиться (а в некоторых случаях доказать) в следующем.

(i) Последовательность e_j порождается потенциалом, поскольку

$$\frac{\partial e_{j+1}}{\partial t_k}=\frac{\partial e_{k+1}}{\partial t_j}.$$

Предвидя то, что получится, я запишу

$$e_j=-\frac{\partial}{\partial t_{j-1}}\frac{\partial \ln\tau}{\partial t_1},\qquad j=2,\ \ldots$$

(ii) $e_2=\frac{1}{2}h_{1,t_1}+\frac{1}{2}h_1^2,\ f_1=\frac{1}{2}h_{1,t_1}-\frac{1}{2}h_1^2.$

Перед доказательством взгляните на первое соотношение. Оно вам знакомо?

Доказательство. Из (5.58b, d)

$$h_{1,t_k}=e_{k+1}+e_1 f_k,\quad f_{1,t_k}=-2h_{k+1}-2h_1 f_k,$$

что дает нам

$$2h_1 h_{1,t_k}+e_1 f_{1,t_k}=2h_1 e_{k+1}-2e_1 h_{k+1}.$$

Небольшое вычисление показывает, что

$$h_{1,t_k t_1}=2h_1 e_{k+1}-2e_1 h_{k+1}+e_1 f_{1,t_k},$$

и, если это вычесть из предыдущего равенства, получится

$$2h_1 h_{1,t_k}-h_{1,t_k t_1}=-2e_1 f_{1,t_k}=-2f_{1,t_k},\quad \text{так как}\quad e_1=1.$$

Следовательно, $f_1=\frac{1}{2}h_{1,t_k}-\frac{1}{2}h_1^2$, и из $e_{k+1}=h_{1,t_k}-f_k$ получим $e_2=\frac{1}{2}h_{1,t_1}+\frac{1}{2}h_1^2$.

(iii) h_1 как функция t_1, t_2 удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза

$$h_{1,t_2}=e_3+f_2=h_{2,t_1}=\left(-\frac{1}{4}h_{1,t_1t_1}+\frac{1}{2}h_1^3\right)_{t_1},$$

так как

$$h_2=-\frac{1}{2}f_{1,t_1}-h_1f_1=-\frac{1}{4}h_{1,t_1t_1}-\frac{1}{2}h_1^3.$$

(iv). *Следствие.* Как функция t_1, t_2, величина e_2 удовлетворяет уравнению КдФ, причем $e_2=\frac{1}{2}h_{1,t_1}+\frac{1}{2}h_1^2$ есть преобразование Миуры.

(v). Я оставляю вам для доказательства соотношение

$$e_{j,t_k}=e_1e_{k+j-1x}+\ldots+e_ke_{jx}-e_{1x}e_{k+j-1}-\ldots-e_{kx}e_j.$$

Смотрите (4.13)!

(vi) $Ne_{j+1}=-\frac{1}{4}Me_j=NLe_j$, где L, M и N определены (3,6), (3.12). Это значит, что

$$e=\sum_{j=1}\frac{e_j}{\lambda^j}=\sum_{j=1}\frac{L^je_1}{\lambda^j},\quad e_1=1.$$

Таким образом, $e_j=-B_{j-1}$ $\left(\text{напомним, что } B_0=-1,\ B_1=q/2,\ldots\right.$ $\left.\ldots,\ B_{r+1}=\frac{1}{2}L^rq\right)$, и отсюда, а также из (4.6) мы видим, что потенциал τ, введенный посредством $e_j=-(\partial/\partial t_{j-1})(\partial/\partial t_1)\ln\tau$, и в самом деле есть τ-функция семейства КдФ.

(vii) Заметим, что решением (5.58a) является $Q=VCV^{-1}$, C — постоянная матрица, а V удовлетворяет

$$V_{t_k}=Q^{(k)}V. \tag{5.59}$$

Получив $Q^{(k)}$ с помощью (5.57), мы найдем для $V=(v_1,v_2)^T$

$$v_{1x}=h_1v_1+e_1v_2,\quad e_1=1,\quad v_{2x}=-\lambda v_1-h_1v_2$$

и

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}_{t_k}=\begin{pmatrix}h^{(k)} & e^{(k)}\\ f^{(k)} & -h^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},$$

где

$$h^{(k)}=\lambda^k\sum_0^k\frac{h_j}{\lambda^j},\quad e^{(k)}=\lambda^k\sum_1^k\frac{e_j}{\lambda^j},\quad f^{(k)}=\lambda^k\sum_0^{k-1}\frac{f_j}{\lambda^j}.$$

Отметим, что как v_1, так и v_2 удовлетворяют уравнению Шрёдингера с потенциалами $q=-2e_2=-h_{1x}-h_1^2$ и $h_{1x}-h_1^2$ соответственно. Перепишем эти уравнения для переменных

$$v=v_1, \quad v_x=v_2+h_1v_1$$

и получим

$$\begin{pmatrix} v \\ v_x \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda+h_{1x}+h_1^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v_x \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} v \\ v_x \end{pmatrix}_{t_k} = \begin{pmatrix} h^{(k)}-h_1e^{(k)} & e^{(k)} \\ f^{(k)}+2h_1h^{(k)}+h_{1,t_k}-h_1^2e^{(k)} & h_1e^{(k)}-h^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v_x \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что $h^{(k)}-h_1e^{(k)}=-\frac{1}{2}e_x^{(k)}$ и что эти уравнения суть в точности матричная форма (3.3).

5d. Законы сохранения, токи, потенциалы и уравнения Хироты. Далее как немедленное следствие (5.55) получим

$$\frac{\partial h_{j+1}}{\partial t_k}=\frac{\partial h_{k+1}}{\partial t_j}, \quad \frac{\partial e_{j+1}}{\partial t_k}=\frac{\partial e_{k+1}}{\partial t_j}, \quad \frac{\partial f_{j+1}}{\partial t_k}=\frac{\partial f_{k+1}}{\partial t_j}. \tag{5.60}$$

Это означает, что ряды h, e, f могут быть записаны с помощью трех потенциалов. В частности, из самих уравнений и из соотношений

$$e_{1,t_k}=-2ie_{k+1}, \quad f_{1,t_k}=2if_{k+1}$$

мы знаем, что e_1 и f_1 выступают в роли потенциалов для всех компонент соответствующих векторов. Еще мы знаем из предыдущих вычислений, что величины $\int h_k\,dx$ являются сохраняющимися плотностями, поэтому h_{j+1} оказываются не только производными по t_j от потенциала, но и производными по t_1. Поэтому мы определим новый потенциал $\tau(t_1, t_2, \ldots)$ с помощью

$$h_{k+1}=\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\frac{i}{2}\frac{\partial \ln\tau}{\partial t_1}\right). \tag{5.61}$$

То, что теперь нам хочется показать — это, конечно, что

$$F_{jk}=\frac{\partial^2 \ln\tau}{\partial t_j\,\partial t_k} \tag{5.62}$$

есть локальная функция от (h_r, e_p, f_q). Уместно назвать F_{jk} *тензором тока.* В работе [38] мы получили явное выражение для

этой величины. Оно таково:

$$F_{jk}=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[\sum_{r=0}^{j}(j-r)\,Q_rQ_{k+j-r}\right]+\frac{1}{2}\left[\sum_{r=0}^{k}(r-k)\,Q_rQ_{k+j-r}\right]=$$
$$=\left\langle\zeta\frac{d}{d\zeta}Q^{(j)},\ \zeta^kQ\right\rangle_0. \tag{5.63}$$

Основная идея доказательства — использовать (5.55), чтобы переписать

$$\frac{\partial h_{j+1}}{\partial t_k}=\sum_1^k(e_rf_{k+j+1-r}-f_re_{j+k+1-r})$$

как производную по t_1. Заметьте, например, что

$$f_{k+j+1-r}=-(i/2)\,(f_{k+j-r,\,t_1}-2h_{k+j-r}f_1).$$

Два выражения в (5.63) эквивалентны, если нормировать ряды h, e, f таким образом, что $h^2+ef=-1$. В противном случае они отличаются на величину, зависящую от гамильтониана $\Phi_k(Q)$. Чтобы сохранить симметрию, я определю F_{jk} как симметризованную сумму, но во всех вычислениях мы будем считать, что $h^2+ef=-1$, и поэтому мы сможем вычислить тензор тока, используя лишь одно из этих выражений.

Впервые в литературе мы действительно получили выражения для токов всех сохраняющихся величин по отношению ко всем потокам:

$$\frac{\partial h_{j+1}}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{i}{2}F_{jk}. \tag{5.64}$$

Интересно отметить, что токи естественнее всего выражаются с помощью производных по *всем* временам от единственной функции $\ln\tau(t_1,\ t_2,\ \ldots)$. Иными словами, ток для сохраняющейся плотности h_4 (интеграл которой является гамильтонианом для НУШ) по отношению к t_2 — потоку НУШ — наилучшим образом выражается через производные второго порядка по t_2 и по t_3 — времени для совершенно другого потока, а не через производные по t_2 и x; а именно, $(\partial/\partial t_2)h_4=(\partial/\partial t_1)\,i/2\cdot\partial^2\ln\tau/\partial t_2\partial t_3$. Конечно, можно также выразить $\partial^2\ln\tau/\partial t_2\partial t_3$ через e_1, f_1 и их производные по t_1, но эти выражения не имеют естественной структуры и крайне громоздки.

Далее предположим, что мы выбрали другое t_k (скажем, t_2) в качестве выделенной координаты x. Это было бы уместным, например, при изучении нелинейного уравнения Шрёдингера с

производной. В этом случае законы сохранения суть

$$\frac{\partial}{\partial t_j} F_{k2} = \frac{\partial}{\partial t_2} F_{jk},$$

F_{k2} — сохраняющиеся плотности, а соответствующие гамильтонианы пропорциональны $\int F_{k2}\, dt_2$. В тех случаях, когда в качестве выделенной координаты x мы берем время t_j (и тогда e_{j+r}, f_{j+r}, $r > 0$, мы выражаем через $e_1, e_2, \ldots, e_j, f_1, \ldots, f_j$ и их производные по $x = t_j$), сохраняющиеся плотности суть F_{kj}, а гамильтонианы — это

$$H_k^{(j)} = \frac{2i}{k+1} \int F_{k+1j}\, dt_j.$$

Здесь я упомяну без доказательства (интересующийся читатель может найти его в [38]), что сопряженными переменными являются в этом случае не (e_1, f_j), (e_2, f_{j-1}), $\ldots$, (e_j, f_1), а $(\tilde{e}_1, \tilde{f}_j)$, $\ldots$, $(\tilde{e}_j, \tilde{f}_1)$, где $\tilde{e}_r$, $\tilde{f}_r$ — коэффициенты перед ζ^{-r} в формальных рядах разложений $e/\sqrt{i-h}$ и $f/\sqrt{i-h}$ вблизи $\zeta = \infty$. Для $j = 1$ и 2 сопряженными переменными являются (e_1, f_1) и (e_1, f_2), (e_2, f_1) соответственно, но при больших j они другие.

Наконец, оказывается, что удобнее использовать σ и ρ, определенные соответственно как τe_1 и τf_1, в качестве скалярных потенциалов для рядов e и f.

Мы видим, как можно заменить тройной бесконечный ряд уравнений (5.55) тремя скалярными уравнениями на потенциалы τ, σ и ρ. Естественно задать вопрос: каким уравнениям они удовлетворяют? Это можно вычислить непосредственно. Из (5.55) имеем

$$-2ie_{k+1} = \frac{\partial e_1}{\partial t_k} = \frac{\partial e_k}{\partial t_1} + 2h_k e_1,$$

что означает

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) = \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_{k-1}}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) + ie_1 \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_1\, \partial t_{k-1}}.$$

Получаем

$$\sigma_k \tau - \sigma \tau_k = \frac{i}{2}(\sigma_{1k-1}\tau - \sigma_1 \tau_{k-1} - \sigma_{k-1}\tau_1 + \sigma \tau_{1k-1}), \qquad (5.65)$$

где индекс j обозначает частную производную по t_j. Теперь вернемся к формулам (4.36), (4.37) разд. 4c, где определяются операторы Хироты. Уравнение (5.65) — это просто

$$\left(D_{t_k} - \frac{i}{2} D_{t_1} D_{t_{k-1}}\right) \sigma \cdot \tau = 0. \qquad (5.66)$$

Аналогично

$$\left(D_{t_k} - \frac{i}{2} D_{t_1} D_{t_{k-1}}\right) \rho \cdot \tau = 0. \tag{5.67}$$

Третье уравнение получается, если заметить, что

$$h_2 = \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau = -\frac{i}{2} e_1 f_1$$

переходит в

$$D_{t_1}^2 \tau \cdot \tau = -2\sigma\rho. \tag{5.68}$$

Из этих уравнений легко вычислить многосолитонные решения. Для этого удобно произвести замену независимых переменных

$$2it_k \to t_k$$

(заметим, что новое время чисто мнимое), после чего уравнения Хироты принимают вид

$$\left(D_{t_k} - D_{t_1} D_{t_{k-1}}\right) \sigma \cdot \tau = 0, \tag{5.69a}$$

$$\left(D_{t_k} - D_{t_1} D_{t_{k-1}}\right) \rho \cdot \tau = 0, \tag{5.69b}$$

$$D_{t_1}^2 \tau \cdot \tau = \frac{1}{2} \sigma\rho. \tag{5.69c}$$

Ищем решения в форме

$$\tau,\ \sigma,\ \rho = \sum_{\mu_r,\ \nu_s = 0,\ 1} D_{\tau,\ \sigma,\ \rho}(\mu, \nu) \exp\left(\sum_1^N \mu_r H_r + \sum_1^N \nu_r \bar{H}_r + \right.$$
$$\left. + \sum_{1 \leqslant r < s \leqslant N} A_{rs} \mu_r x_s + \sum_{1 \leqslant r < s \leqslant N} \bar{A}_{rs} \nu_r \nu_s + \sum_{r,\ s=1} B_{rs} \mu_r \nu_s\right),$$

где

$$H_r = \sum \zeta_r^k t_k, \quad \bar{H}_r = -\sum \bar{\zeta}_r^k t_k,$$

$$D_\tau = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum \mu_r = \sum \nu_r, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$D_\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum \mu_r = \sum \nu_r + 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$D_\sigma = \begin{cases} -1, & \text{если } \sum \mu_r + 1 = \sum \nu_r, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$e^{B_{rs}} = -\frac{1}{4(\zeta_r - \bar{\zeta}_s)^2}, \quad e^{A_{rs}} = -4(\zeta_r - \zeta_s)^2, \quad e^{\bar{A}_{rs}} = -4(\bar{\zeta}_r - \bar{\zeta}_s)^2. \tag{5.70}$$

Для e_1, f_1 общего вида $\bar{\zeta}_k$ не связана с ζ_k. Однако если $f_1 = -e_1^*$, то $\bar{\zeta}_k = \zeta_k^*$, где ζ_k^* — это величина, комплексно сопряженная с ζ_k.

Каждое из уравнений Хироты (5.69) записываются в форме

$$P(D_{t_k}) f \cdot g = 0, \tag{5.71}$$

где P таково, что

$$P(0) = 0, \tag{5.72a}$$

$$P(\zeta^k) = 0. \tag{5.72b}$$

При выводе (5.70) широко используется правило

$$P\left(D_{t_j}\right) \exp\left(\sum a_1^{(k)} t_k\right) \cdot \exp\left(\sum a_2^{(k)} t_k\right) =$$
$$= P\left(a_1^{(j)} - a_2^{(j)}\right) \exp\left(\sum \left(a_1^{(k)} + a_2^{(k)}\right) t_k\right). \tag{5.73}$$

Как и раньше, сдвиги фазы A_{rs}, $\tilde{A}_{rs}$ и B_{rs} одинаковы для каждого члена иерархии $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Поэтому, как и в гл. 4, мы можем определить все многочлены в этой иерархии, как только заданы все сдвиги фазы. На каждом уровне (уровень — это сумма индексов в уравнениях Хироты, например, уравнение (5.69a) принадлежит уровню k) существует много (попробуйте вычислить, сколько именно) уравнений Хироты, которые совместны друг с другом.

Упражнение 5d

Вычислить односолитонное решение, когда

$$f_1 = -e_1^*;$$

$$N = 1, \quad \bar{\zeta}_1 = \zeta_1^* = \xi - i\eta;$$

$$H_1 = 2i \sum \zeta_1^k t_k, \quad \bar{H}_1 = -2i \sum \zeta_1^{*k} t_k;$$

$$\tau = 1 + \exp(H_1 + \bar{H}_1 + B_{11}), \quad \sigma = -\exp \bar{H}_1, \quad \exp\left(-\frac{B_{11}}{2}\right) = -4\eta;$$

$$q(t_k) = \frac{\sigma}{\tau} = 2\eta \exp\left(\frac{\bar{H}_1 - H_1}{2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{H_1 + \bar{H}_1 + B_{11}}{2}\right);$$

$$\frac{1}{2}(H_1 + \bar{H}_1 + B_{11}) = i \sum \left(\zeta_1^k - \zeta_1^{*k}\right) t_k + B_{11}/2;$$

$$\frac{1}{2}(\bar{H}_1 - H_1) = -i \sum \left(\zeta_1^k + \zeta_1^{*k}\right) t_k.$$

5e. Задача на собственные значения, асимптотическое разложение и вершинные операторы. Цель этого раздела — ввести

собственную функцию $V(t_k;\ \zeta)$ и получить некоторые ее свойства:

(i) ее асимптотическое разложение вблизи $\zeta=\infty$;

(ii) то, что фазовое пространство $Q(t_k)$ является орбитой, проходящей через элемент $-iH$;

(iii) разложение для $\zeta\partial V/\partial\zeta$;

(iv) связь между V и уравнениями Хироты.

Введение $V(t_k;\ \zeta)$. Мы вывели иерархию $\widetilde{\mathrm{sl}}(2,\ C)$, не вводя вспомогательных переменных. Как они появляются в общей картине? Ответ очень прост. Уравнение в форме Лакса

$$Q_{t_k}=[Q^{(k)},\ Q] \tag{5.74}$$

тут же позволяет искать решение в виде

$$Q=V\tilde{Q}_0V^{-1}. \tag{5.75}$$

Подставляя это в (5.74), убеждаемся в том, что $\tilde{Q}_0$ не зависит от всех t_k и что

$$V_{t_k}=Q^{(k)}V. \tag{5.76}$$

Конечно, верно и обратное: как мы показывали в разд. 3c, (5.74) — это условие интегрируемости уравнений (5.76). Хотя (5.75) не решает (5.74) в явном виде, сама форма записи в таком виде полезна. Она наводит на мысль, что потоки (5.74) являются редукциями более простых потоков на большем многообразии. Подробно мы обсудим эту идею в разд. 5j.

Асимптотическое разложение V *вблизи* $\zeta=\infty$. Так же как в случае иерархии КдФ, полезно поискать формальное асимптотическое разложение для $V(t_1,\ t_2,\ \ldots;\ \zeta)$

$$V\sim\left(I-\frac{i}{2}\sum_1^\infty\frac{b_rE-c_rF}{\zeta^r}\right)\exp\left(\left(-i\sum\zeta^kt_k+\psi\right)H+\varphi\right), \tag{5.77}$$

где ψ и φ — ряды по обратным степеням ζ. Имеют место следующие результаты:

$$e_r=b_r+\frac{i}{2}\sum_{\substack{m+n=r\\ m\neq 0}}h_mb_n, \tag{5.78a}$$

$$f_r=c_r+\frac{i}{2}\sum_{\substack{m+n=r\\ m\neq 0}}h_mc_n. \tag{5.78b}$$

Они записываются в компактной форме

$$2ie = b(i - h), \tag{5.79a}$$

$$2if = c(i - h), \tag{5.79b}$$

где ($h_0 = -i$, $h_1 = 0$)

$$h = \sum_0^\infty \frac{h_r}{\zeta^r}, \quad e = \sum_1^\infty \frac{e_r}{\zeta^r}, \quad f = \sum_1^\infty \frac{f_r}{\zeta^r},$$
$$b = \sum_1^\infty \frac{b_r}{\zeta^r}, \quad c = \sum_1^\infty \frac{c_r}{\zeta^r}. \tag{5.80}$$

В качестве упражнения я оставляю показать, что

$$b(t_k, \zeta) = \frac{1}{\zeta} e_1\left(t_k + \frac{i}{2k\zeta^k}\right) \equiv \frac{1}{\zeta} e_{1+}, \tag{5.81a}$$

$$c(t_k, \zeta) = \frac{1}{\zeta} f_1\left(t_k - \frac{i}{2k\zeta^k}\right) \equiv \frac{1}{\zeta} f_{1-}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.81b}$$

Выполнено следующее:

$$\varphi + \psi = \ln \tau_- - \ln \tau, \tag{5.82a}$$

$$\varphi - \psi = \ln \tau_+ - \ln \tau, \tag{5.82b}$$

где

$$\tau_+ = \tau\left(t_k + \frac{i}{2k\zeta^k}\right), \quad \tau_- = \tau\left(t_k - \frac{i}{2k\zeta^k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.83}$$

Можно показать, что

$$e^{2\varphi} = \frac{\tau_+\tau_-}{\tau^2} = \frac{i - h}{2i} = \left(1 - \frac{bc}{4}\right)^{-1}. \tag{5.84}$$

Мы вводим операторы

$$X_+(\zeta) = \exp\left(i \sum \zeta^k t_k\right) \exp\left(\sum \frac{i}{2k\zeta^k} \frac{\partial}{\partial t_k}\right), \tag{5.85a}$$

$$X_-(\zeta) = \exp\left(-i \sum \zeta^k t_k\right) \exp\left(-\sum \frac{i}{2k\zeta^k} \frac{\partial}{\partial t_k}\right). \tag{5.85b}$$

Замечание. Мы можем назвать эти операторы «вершинными» операторами по аналогии с похожими операторами $Y(\zeta)$, введенными в (4.124) в связи с τ-функцией семейства КдФ. В том контексте, однако, когда оператор X (или линейная комбинация $X(\zeta)$ и $X(-\zeta)$) применялся к τ или когда экспонента от $Y(\zeta)$ применялась к τ, получалась другая τ-функция. Хотя использовать $X_+(\zeta)$, $X_-(\zeta)$ в вычислениях, чтобы получать мно-

госолитонные решения (мы делаем это в разд. 5g) — весьма простая процедура, трудно описать пространство функций, на котором естественно действуют операторы $X_+(\zeta)$ и $X_-(\zeta)$.

Будем обозначать части этих операторов без множителей $\exp\left(\pm i \sum \zeta^k t_k\right)$ посредством $\tilde{X}_+(\zeta)$ и $\tilde{X}_-(\zeta)$ соответственно. Теперь, используя эти результаты, получим

$$V \sim \left(I - \frac{i}{2\zeta} e_{1+} E + \frac{i}{2\zeta} f_{1-} F\right)\left(\frac{I+H}{2}\frac{X_-\tau}{\tau} + \frac{I-H}{2}\frac{X_+\tau}{\tau}\right).$$

Но

$$e_1 + X_+\tau = X_+ e_1 \tau = X_+\sigma \quad \text{и} \quad f_{1-}X_-\tau = X_- f_1 \tau = X_-\rho.$$

Поэтому

$$V \sim \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} X_-\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma \\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_+\tau \end{pmatrix}. \tag{5.86a}$$

Определитель этой матрицы равен единице, потому что из (5.84)

$$\det V = \frac{1}{\tau^2}\left(\tau_+\tau_- - \frac{1}{4\zeta^2}\sigma_+\rho_-\right) = \frac{\tau_+\tau_-}{\tau^2}\left(1 - \frac{bc}{4}\right) = 1.$$

Поэтому обратная матрица такова:

$$V^{-1} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} X_+\tau & \frac{i}{2\zeta}X_+\sigma \\ -\frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_-\tau \end{pmatrix}. \tag{5.86b}$$

Нужно прокомментировать, как были получены эти результаты. Во-первых, нужно подставить анзац (5.77) в (5.76) и приравнять коэффициенты при ζ^r, $-\infty < r < k$. Для $r \geqslant 0$ (5.78) получается довольно легко. В дополнение следует доказать, что это также верно при $r < 0$, при этом появляются производные от ψ и φ. Для этого следует использовать уравнения, которым удовлетворяют h_r, e_r и f_r. Выражения (5.78) должны быть, конечно, независимы от того, какое из уравнений (какое время t_k) мы используем. Пригодятся два уравнения

$$h_r = -\frac{i}{4}\sum_{m+n=r} e_m c_n + f_m b_n \tag{5.87a}$$

или

$$h = -i - \frac{i}{4}(ec + fb)$$

и

$$\sum_{m+n=r}(e_m c_n - f_m b_n) = 0, \tag{5.87b}$$

которое записывается в виде

$$ec = fb.$$

Q принадлежит орбите, проходящей через $-iH$. Затем мы показываем, что типичный элемент фазового пространства Q лежит на орбите, проходящей через $-iH$.

Мы хотим показать, что

$$\hat{V}(-iH)\hat{V}^{-1} = Q, \tag{5.88a}$$

или, что то же самое

$$Q\hat{V} = \hat{V}(-iH), \tag{5.88b}$$

где

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}b \\ \frac{i}{2}c & 1 \end{pmatrix} e^{\psi H + \varphi} \tag{5.89a}$$

является левым множителем V в асимптотическом разложении вблизи $\zeta = \infty$, т. е. формально

$$V = \hat{V}\exp\left(-i\sum \zeta^k t_k H\right). \tag{5.89b}$$

Так как правые множители в (5.89a, b) коммутируют с H, нужно показать, что

$$\begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}b \\ \frac{i}{2}c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2}b \\ \frac{i}{2}c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}.$$

Это следует из (5.79), (5.87).

Выпишем уравнение, которому удовлетворяет $\hat{V}$. Из (5.76) и (5.89b) получаем

$$\hat{V}_{t_k} = Q^{(k)}\hat{V} + \hat{V}(iH\zeta^k). \tag{5.89c}$$

С этим уравнением мы снова встретимся в разд. 5j.

Я также отмечу, что если в качестве выделенной координаты x брать t_j, то фазовым пространством будет алгебра многочленов от $e_1, e_2, \ldots, e_j, f_1, \ldots, f_j$ и их производных произвольного порядка по $x = t_j$. Набор $\{e_1, \ldots, e_j, f_1, \ldots, f_j\}$, если его рассматривать как функцию $x = t_j$, порождает фазовое пространство. А так как эти функции в точности есть элементы, содержащиеся в $Q^{(j)} = h^{(j)}H + e^{(j)}E + f^{(j)}F$, где $h^{(j)} = \zeta^j \sum_0^j h_r\zeta^{-r}$ (и аналогично определены $e^{(j)}$, $f^{(j)}$), то $Q^{(j)}$ можно считать фа-

зовым пространством. Из (5.89c) типичный элемент этого фазового пространства тогда запишется так:

$$Q^{(j)} = \hat{V}\left(-iH\zeta^j - \partial_{t_j}\right)\hat{V}^{-1} + \hat{V}_{t_j}\hat{V}^{-1}. \tag{5.89d}$$

Замечание. Слово *орбита* употреблено здесь сознательно, и в нем заложен определенный смысл. Если всякий элемент X фазового пространства, которое является алгеброй G^*, двойственной к алгебре G, может быть получен коприсоединенным действием $X = gX_0g^{-1}$ (в матричном представлении) элемента g группы $\bar{G}$ на элемент X_0 пространства G^*, то тогда мы знаем, что фазовое пространство является симплектическим многообразием с невырожденной 2-формой. Например, если мы возьмем $x = t_1$ в качестве выделенной координаты, а в качестве фазового пространства возьмем пространство пар $e_1(x, t_k)$, $f_1(x, t_k)$, то фазовое пространство — это симплектическое многообразие с 2-формой $\int_{-\infty}^{\infty} \delta e_1 \wedge \delta f_1\, dx$ (см [75]). При выборе $x = t_j$ фазовое пространство состоит из пар сопряженных функций $(\tilde{e}_1, \tilde{f}_j), \ldots, (\tilde{e}_j, \tilde{f}_1)$, определенных в разд. 5d, а 2-формой является

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta\tilde{e}_1 \wedge \delta\tilde{f}_j + \ldots + \delta\tilde{e}_j \wedge \delta\tilde{f}_1)\, dt_j.$$

Можно трактовать (5.89d) как утверждение, что фазовое пространство — это орбита коприсоединенного действия, проходящая через элемент $-iH\zeta^j - \partial/\partial t_j$ (А. Рейман; частное сообщение).

Упражнение 5e (*важное*)

Рассмотрите уравнения Лакса (5.58a) из упражнения 5c(3). Они также решаются с помощью $V(t_k, \lambda)$, если положить

$$\lambda Q = VCV^{-1}, \tag{5.90a}$$

где C не зависит от t_k, а V удовлетворяет

$$V_{t_k} = Q^{(k)}V. \tag{5.90b}$$

$Q^{(k)}$ заданы в (5.57). C в (5.90a) — это $(-iH\zeta)$, если взять

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v(t_k, -\zeta) & \frac{-i}{\zeta}\, v(t_k, \zeta) \\ v_x(t_k, -\zeta) & \frac{-i}{\zeta}\, v_x(t_k, \zeta) \end{pmatrix}, \tag{5.90c}$$

где $\zeta^2=\lambda$, $v(t_k, \zeta)$ — это v, удовлетворяющее (3.1), (3.9) (в разд. 3b время, обозначаемое как t_k в (5.58a) и выше, обозначалось t_{2k-1}), с асимптотическим разложением, заданным в упражнении 3b(iii)

$$v(t_k, \zeta) \sim \exp\left(i\zeta \sum_1^\infty \lambda^{k-1} t_k\right) \tau\left(x - \frac{1}{i\zeta}, t_2 - \frac{1}{3i\zeta^3} \ldots\right). \quad (5.90d)$$

$\tau(t_1, t_2, \ldots)$ — это τ-функция семейства КдФ. Читатель может проверить (5.90a) в вакуумном случае, когда $q=0$. Теперь (5.90b) можно записать как

$$V = \hat{V} \exp\left(-i \sum_1^\infty \zeta^{2k-1} t_k H\right), \quad (5.90e)$$

где

$$\hat{V}_{t_k} = Q^{(k)}\hat{V} + \hat{V}(iH\zeta^{2k-1}), \quad (5.90f)$$

или, разрешая относительно $Q^{(k)}$,

$$Q^{(k)} = \hat{V}(-iH\zeta^{2k-1})\hat{V}^{-1} + \hat{V}_{t_k}\hat{V}^{-1}. \quad (5.90д)$$

Читатель должен также заметить, что если взять

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}\begin{pmatrix} 1 & -i/\zeta \\ -i\zeta & 1 \end{pmatrix},$$

то уравнения (5.90f, g) для $\hat{U}$ будут отличаться лишь заменой $-iH\zeta^{2k-1}$ на $X\lambda^k$, где $X=-F+E/\lambda$.

Дальнейшее замечание. Формулы (5.88a) и (5.90a) важны, ибо оказывается, что с их помощью устанавливается связь между двумя ролями, которые играет в нашем изложении алгебра Каца — Муди $A_1^{(1)}$. Читатель помнит, что в разд. 4g мы обсуждали, каким образом алгебра $A_1^{(1)}$ выступает в роли симметрий и как решения $\tau(t_1, t_3, \ldots)$ солитонных уравнений семейства КдФ образуют орбиту, проходящую через вектор старшего веса ($\tau=1$) в некотором базисном представлении $A_1^{(1)}$, орбиту, определяемую квадратичными уравнениями Хироты. С другой стороны, в настоящей главе эта алгебра является фазовым пространством. В разд. 5j мы увидим, что формулы (5.88a), (5.90a) естественно возникают как коприсоединенное действие «группы» Каца — Муди на специальный элемент ε (который есть либо $-iH$, либо $X=-F+(E/\zeta)$). В последующем подразделе

мы также увидим, как (5.88a) содержит уравнения Хироты.

Выражение для $\zeta(\partial V/\partial\zeta)$. В разд. 51 мы объясним, почему оператор $D=\zeta(\partial/\partial\zeta)$ является важным элементом теории в целом. Поэтому стоит вычислить

$$(DV)V^{-1}=\left(\sum k\zeta^k t_k-\frac{1}{4\zeta^k}\frac{\partial}{\partial t_k}-\frac{1}{2\zeta^k}\frac{\partial\ln\tau}{\partial t_k}\right)Q+\frac{i}{2}(eE-fF). \tag{5.91a}$$

Из (5.91a) попробуйте показать, что

$$\langle\hat{V}^{-1}D\hat{V},\ -i\zeta^j H\rangle_0=\frac{\partial\ln\tau}{\partial t_j}. \tag{5.91b}$$

Член $-i\zeta^j H$ — это $\nabla\Phi_j(-iH)$, градиент гамильтониана Φ_j, вычисленный в точке $-iH$. Уравнение (5.91b) является той формулой, с помощью которой исследователи из Киото определяют τ-функцию [39]. При доказательстве (5.91) мы используем следующие факты:

$$\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}f\left(t_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)=\left(\sum_1^\infty\frac{-i}{2\zeta^j}\frac{\partial}{\partial t_j}\right)f\left(t_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right),$$

$$Db=-e_+=-e\left(t_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right),$$

$$Dc=-f_-=-f\left(t_k-\frac{i}{2k\zeta^k}\right),$$

$$1+\frac{bc}{4}=-\frac{2h}{i-h},$$

а также (5.79) и (5.84).

Связь с теорией Хироты. Давайте попробуем взглянуть по-другому на формулу (5.89) и запишем ее в виде

$$\begin{pmatrix} h & e\\ f & -h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_-\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma\\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_+\tau\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} X_-\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma\\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_+\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},$$

что приводит к четырем соотношениям:

$$(i+h)X_-\tau = -\frac{i}{2\zeta}eX_-\rho, \tag{5.92a}$$

$$\frac{1}{2}(1+ih)X_+\sigma = \zeta eX_+\tau, \tag{5.92b}$$

$$\frac{1}{2}(1+ih)X_-\rho = \zeta eX_-\tau, \tag{5.92c}$$

$$(i+h)X_+\tau = -\frac{i}{2\zeta}fX_+\sigma. \tag{5.92d}$$

Давайте снова докажем (5.92b) способом, помогающим научиться обращаться с вершинными операторами. Коль скоро $\sigma = e_1\tau$, то также верно $\widetilde{X}_+\sigma = \widetilde{X}_+e_1\tau = \widetilde{X}_+e_1\widetilde{X}_+\tau$. В силу очевидного свойства оператора сдвига это равно $\zeta b\widetilde{X}_+\tau = (2ie\zeta/(i-h))\widetilde{X}_+\tau$. Умножение на $\exp(i\sum\zeta^k t_k)$ дает $(1/2)(1+ih)X_+\sigma = \zeta eX_+\tau$, что есть (5.92b). Но эти уравнения также являются уравнениями Хироты. Разложите (5.92b), используя

$$\frac{1}{2}(1+ih) = 1 - \frac{1}{4}\sum\frac{1}{\zeta^k}\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_{k-1}}\ln\tau,$$

$$\zeta e = e_1 + \frac{i}{2}\sum_2\frac{1}{\zeta^{k-1}}\frac{\partial e_1}{\partial t_{k-1}} = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{i}{2}\sum_2\frac{1}{\zeta^{k-1}}\frac{\sigma_{k-1}\tau - \sigma\tau_{k-1}}{\tau^2}$$

и

$$\widetilde{X}_+\sigma = \sigma + \frac{i}{2\zeta}\sigma_1 + \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{i}{4}\sigma_2 - \frac{1}{8}\sigma_{11}\right) + \\ + \frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{i}{6}\sigma_3 - \frac{1}{8}\sigma_{12} - \frac{i}{48}\sigma_{111}\right) + \ldots.$$

Напоминаем читателю, что нижние индексы у τ, σ, ρ обозначают частные производные. Коэффициент при ζ^{-2} есть

$$\left(D_{t_2} - \frac{i}{2}D_{t_1}^2\right)\sigma\cdot\tau = 0.$$

Коэффициент при ζ^{-3} включает уравнения

$$\left(D_{t_3} - \frac{i}{2}D_{t_1}D_{t_2}\right)\sigma\cdot\tau = 0$$

и

$$\left(D_{t_3} + \frac{1}{4}D_{t_1}^3\right)\sigma\cdot\tau = 0.$$

Равенства при степенях более высокого порядка, по-видимому, дают все остальные уравнения

$$P(D_{t_k})\sigma\cdot\tau = 0$$

иерархии Хироты. Я не имею доказательства этого факта.

Другой более мощный способ вывода всех уравнений Хироты состоит в использовании тождества

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V(\mathbf{x}+\mathbf{y};\ \zeta)\,V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y};\ \zeta)\,d\zeta = I, \tag{5.93}$$

где контур C — это круг вблизи $\zeta=\infty$, ориентированный против часовой стрелки, и $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$, $(x_j=t_j)$. Подобная форма записи была предложена Дейтом, Дзимбо, Касиварой, Мивой [39] для членов иерархии КП. Я нахожу их доказательство слишком сложным для понимания. Лучший способ рассмотрения (5.93) — обратиться к соображениям аналитичности и считать, что (5.93) выражает полноту собственных состояний для $V_x=Q^{(1)}V$. Для обсуждения этого свойства читателю следует просмотреть третью работу из указанных в литературе под номером [23], приложение 6.

В любом случае (5.93) говорит нам, что ζ^{-1}-компонента $V(\mathbf{x}+\mathbf{y};\ \zeta)\,V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y};\ \zeta)$ есть единица. Используя (5.86), (5.87), получаем

$$V(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\frac{1}{\tau^+}\begin{pmatrix} X_-^+\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+^+\sigma \\ \frac{i}{2\zeta}X_-^+\rho & X_+^+\tau \end{pmatrix},$$

$$V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\frac{1}{\tau^-}\begin{pmatrix} X_+^-\tau & \frac{i}{2\zeta}X_+^-\sigma \\ -\frac{i}{2\zeta}X_-^-\rho & X_-^-\tau \end{pmatrix},$$

где верхний индекс вершинного оператора означает, что аргумент сдвинут на плюс или минус $\mathbf{y}$, т. е.

$$X_\pm^+\tau=\exp\left(-i\zeta(x_1+y_1)-i\zeta^2(x_2+y_2)\ldots\right)\times$$
$$\times\,\tau\left(x_1+y_1-\frac{i}{2\zeta},\ x_2+y_2-\frac{i}{4\zeta^2},\ \ldots\right).$$

Таким образом,

$$\tau^+\tau^-V(\mathbf{x}+\mathbf{y};\ \zeta)\,V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y};\ \zeta)=$$
$$=\begin{pmatrix} X_-^+\tau X_+^-\tau-\frac{1}{4\zeta^2}X_+^+\sigma X_-^-\rho & -\frac{i}{2\zeta}\left(X_+^+\sigma X_-^-\tau-X_+^-\sigma X_-^+\tau\right) \\ \frac{i}{2\zeta}\left(X_-^+\rho X_+^-\tau-X_+^+\tau X_-^-\rho\right) & X_+^+\tau X_-^-\tau-\frac{1}{4\zeta^2}X_-^+\rho X_+^-\sigma \end{pmatrix}.$$

Я предлагаю вам разложить каждый член при $1/\zeta$ в ряд Тейлора по $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots)$. Вы обнаружите, что коэффициенты при y_2; y_3, y_1^3 нетривиальны, и, приравнивая их нулю, получите уравнения Хироты.

В качестве примера я разложу матричный элемент (1, 2). Он таков:

$$\exp\left(2i\sum\zeta^k y_k\right)\sigma\left(x_k+y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)\tau\left(x_k-y_k-\frac{i}{2k\zeta^k}\right)-$$
$$-\exp\left(-2i\sum\zeta^k y_k\right)\sigma\left(x_k-y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)\tau\left(x_k+y_k-\frac{i}{2k\zeta^k}\right).$$

Мы ищем компоненту ζ^0. Второй член получается из первого заменой $y_k\to -y_k$. Поэтому все четные по y члены автоматически обращаются в нуль (y_1^2, y_1y_2, y_1y_3 и т. д.). Во-первых, несложное вычисление показывает, что

$$\sigma\left(x_k+y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)\tau\left(x_k-y_k-\frac{i}{2ky^k}\right)=$$
$$=\sigma(x_k)\tau(y_k)+\sum_k\left(y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)D_k\sigma\cdot\tau+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum\left(y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)\left(y_j+\frac{i}{2j\zeta^j}\right)D_kD_j\sigma\cdot\tau+$$
$$+\frac{1}{3!}\sum\left(y_k+\frac{i}{2k\zeta^k}\right)\left(y_j+\frac{j}{2j\zeta^j}\right)\left(y_l+\frac{i}{2l\zeta^l}\right)D_kD_jD_l\sigma\cdot\tau+$$
$$+\ldots,$$

где D_k — оператор Хироты (4.36), (4.37). Умножьте это выражение на $\exp\left(2i\sum\zeta^k y_k\right)$, возьмите компоненту ζ^0, затем замените $y_k\to -y_k$ и вычтите последнее выражение из предыдущего. Находим следующее:

$$y_1:\ D_1-D_1,$$
$$y_2:\ \frac{1}{2}D_2-\frac{i}{4}D_1^2,$$
$$y_3:\ \frac{2}{3}D_3-\frac{i}{4}D_1D_2+\frac{1}{24}D_1^3,$$
$$y_1^2:\ \frac{2}{9}D_3-\frac{3i}{9}D_1D_2-\frac{1}{9}D_1^3.$$

Приравняв нулю эти выражения, получим

$$\left(D_2-\frac{i}{2}D_1^2\right)\sigma\cdot\tau=0,$$
$$\left(D_3-\frac{i}{2}D_1D_2\right)\sigma\cdot\tau=0,$$
$$\left(D_3+\frac{1}{4}D_1^3\right)\sigma\cdot\tau=0.$$

Читатель может развить более прихотливые обозначения и получить выражения для многочленов Хироты через многочлены Шура $p_n(x_1, x_2, \ldots)$

$$e^{kx_1+k^2x_2+\cdots} = \sum_0^\infty k^n p_n(x_1, x_2, \ldots).$$

Можно также подсчитать, сколько уравнений Хироты на каждом уровне [39]. Уровню n принадлежит такое же число уравнений N_n, сколько существует разбиений целого числа n в сумму нечетных целых чисел $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, каждое $n_s \leqslant n$.

5f. Изоспектральные, сохраняющие римановы поверхности и изомонодромные деформации.

(i) *Изоспектральные деформации.* Вплоть до настоящего момента в этой главе все рассмотрение было локальным в том смысле, что в нашей интерпретации уравнения (5.52) описывали эволюцию точки Q в бесконечномерном пространстве в бесконечномерном времени $\mathbf{t}(t_1, t_2, \ldots)$.

В этом разделе мы обратимся к более традиционному подходу, в котором одна из независимых переменных выделена. Если в качестве таковой мы возьмем t_1 и обозначим $t_1 = x$, то в результате получим уравнения

$$e_{1,t_j} = e_{1,t_j}(e_1, f_1, e_{1x}, f_{1x}, \ldots), \tag{5.94a}$$

$$f_{1,t_j} = f_{1,t_j}(e_1, f_1, e_{1x}, f_{1x}, \ldots), \tag{5.94b}$$

называемые иерархией АКНС. Если же мы выберем t_2, то уравнения составят иерархию НУШП (нелинейное уравнение Шрёдингера с производной). Какую бы независимую переменную мы бы не выделили, в дальнейшем ставится задача Коши с граничными условиями на $-\infty < x < \infty$ с заданными граничными условиями $e(x, \mathbf{0})$, $f(x, \mathbf{0})$, которые устроены так, чтобы все величины, входящие в метод обратной задачи, были подходящим образом определены. Может быть также поставлена периодическая задача на конечном интервале. Рассмотрим (5.94) на $-\infty < x < \infty$ и предположим, что $e_1(x, t_j)$, $f_1(x, t_j) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Пусть V — фундаментальное матричное решение для

$$V_x = Q^{(1)}V, \tag{5.95}$$

и так как e_1, $f_1 \to 0$ при $x \to \pm\infty$, мы можем нормировать V таким образом, чтобы

$$V \to V_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta x} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$$

при $x \to -\infty$. Так выбранное V мы обозначим Φ со столбцами $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ и $-\bar{\varphi} = (-\bar{\varphi}_1, -\bar{\varphi}_2)$.[1]) Эта нормировка приводит к изменению временной эволюции:

$$\Phi_{t_j} = Q^{(j)}\Phi - \Phi\left(V_0^{-1}Q_0^{(j)}V_0\right), \quad j \geqslant 2, \tag{5.96}$$

где $Q_0^{(j)}$ — это асимптотика $Q^{(j)}$ при $x \to \pm\infty$. Легко показать, что дополнительный член в правой части не изменит условий интегрируемости. При перекрестном дифференцировании (5.96) и (5.95) или же двух разных уравнений из (5.96) последние члены в (5.96) автоматически обращаются в нуль.

Далее, если Ψ является фундаментальным матричным решением (5.95), таким что $\Psi \to V_0$ при $x \to +\infty$, то тогда Φ и Ψ связаны постоянной (по x) матрицей

$$A(\zeta, t_j) = \begin{pmatrix} a(\zeta, t_j) & -\bar{b}(\zeta, t_j) \\ b(\zeta, t_j) & \bar{a}(\zeta, t_j) \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \tag{5.97a}$$

равной $\Psi^{-1}\Phi$. При $x \to +\infty$

$$\Phi \to V_0 A(\zeta, t_j). \tag{5.97b}$$

Мы называем $A(\zeta, t_j)$ *матрицей рассеяния.*

Здесь и далее я буду использовать обозначения из работы [23], и читателю следует заглянуть в нее, если ему интересны подробности. Строго говоря, матрица, называемая матрицей рассеяния, связывает состояния $\varphi(x, \zeta)$ (т. е. первый столбец Φ) и $\psi(x, \zeta)$ (второй столбец Ψ) с состояниями $-\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, т. е. соответственно со вторым и первым столбцами Φ и Ψ. Причина состоит в том, что первое состояние относится к испускаемому, а второе — к приходящему излучению. В качестве упражнения покажите, что

$$(\bar{\psi}, -\bar{\varphi}) = (\varphi, \psi)S, \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{\bar{b}}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{1}{\bar{a}} \end{pmatrix}.$$

Временна́я зависимость $A(\zeta, t_j)$ находится с помощью подстановки (5.97b) в (5.96):

$$A_{t_j} = \left[V_0^{-1}Q_0^{(j)}V_0, A\right]. \tag{5.98}$$

В этих иерархиях мы считаем, что

$$V_0^{-1}Q_0^{(j)}V_0 = -i\zeta^j H.$$

---

[1]) $\bar{\varphi}_1$ не обозначает функции, комплексно сопряженной к φ_1.

В частности, (5.98) имеет лаксов вид, и *диагональные элементы* $a(\zeta)$ *и* $\bar{a}(\zeta)$ *матрицы* A *суть интегралы движения.* Далее можно показать, что при заданном интеграле $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|e_1|, |f_1|)\,dx < \infty$ величины

$$a(\zeta) = W(\varphi, \psi), \quad \bar{a}(\zeta) = W(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$$

можно аналитически продолжить соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости ζ. Но если $\operatorname{Im}\zeta > 0$, то $\varphi\left(\sim\binom{1}{0}e^{-i\zeta x}\right)$ и $\psi\left(\sim\binom{0}{1}e^{i\zeta x}\right)$ являются единственными решениями, затухающими в $-\infty$ и в $+\infty$ соответственно. Значит, если ζ_j таково, что $\varphi(x, \zeta_j) \to 0$ в $x = +\infty$, то

$$\varphi(x, \zeta_j) = q_j\psi(x, \zeta_j)$$

и $a(\zeta_j) = 0$. Аналогично, нули $\bar{\zeta}_j$ функции $\bar{a}(\zeta)$, $\operatorname{Im}\bar{\zeta}_j < 0$, порождают связанные состояния $\bar{\varphi}(x, \bar{\zeta}_j)$ и $\bar{\psi}(x, \bar{\zeta}_j)$; $\bar{\varphi}(x, \zeta_j) = \bar{b}_j\bar{\psi}(x, \xi_j)$.

Поэтому *спектр* уравнения (5.95) сохраняется под действием любого потока этой иерархии. Как и в изученном ранее случае КдФ, собственные значения ζ_j, ζ_j связаны с солитонной частью решения. Я также отмечу факт, который много раз использовался при построении солитонных решений (как в разд. 3h или в следующем разделе о преобразованиях Бэклунда). Он состоит в том, что для собственных значений ζ_j столбцы (φ, ψ) фундаментального матричного решения пропорциональны.

В тех случаях, когда $f_1 = -e_1^*$, $f_1 = -e_1$ ($r = -q^*$, $-q$ в [23]), имеется некоторое упрощение. В частности, в первом случае $\bar{\zeta}_j = \zeta_j^*$, а в последнем $\bar{\zeta}_j = -\zeta_j$. В частности, если $f_1 = -e_1$ вещественны, то собственные значения чисто мнимы ($\zeta_j = i\eta_j$) (солитоны, кинки) или появляются парами $(\zeta_j, -\zeta_j^*)$ (бризеры или бионы).

Обратная задача разрешается стандартно, и мы приведем здесь краткий обзор результатов. Подробности читатель найдет в [23]. Что мы хотим сделать — это восстановить Φ или Ψ по данным рассеяния. Зная эти функции, мы получим $Q^{(l)}$, и в частности $Q_1 = e_1E + f_1F$. Легче всего найти Q_1, вычисляя члены разложения Φ и Ψ или $1/\zeta$ вблизи $\zeta = \infty$ (см. предыдущий раздел).

Рассмотрим функцию $(\varphi(\xi)/a(\xi))e^{i\xi x}$, мероморфную при $\operatorname{Im}\xi > 0$, с асимптотикой $\binom{1}{0}$ при $\xi \to \infty$. С функцией $\psi(\xi)e^{i\xi x}$, аналитической при $\operatorname{Im}\xi < 0$ и имеющей асимптотику $\binom{1}{0}$ при

$|\xi| \to \infty$, она связана посредством $(b(\xi)/a(\xi))\psi(\xi)e^{i\xi x}$ (попросту выпишите уравнение для первого столбца $\Phi = \Psi A$) на вещественной оси. Поэтому мы хотим решить *задачу Римана — Гильберта*: найти функцию, аналитическую при всех ξ, имеющую лишь конечное число полюсов, с заданным поведением при $\xi \to \infty$ и заданным скачком на вещественной оси. Для решения этой задачи мы рассматриваем при $\operatorname{Im}\zeta < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)e^{i\xi x}}{a(\xi)(\xi-\zeta)}\,d\xi$$

и вычисляем этот интеграл дважды, сначала замыкая контур полуокружностью $\xi = \infty$, $\operatorname{Im}\xi > 0$, а затем заменяя φ на $a\bar{\psi} + b\psi$ и вычисляя первый интеграл, замыкая путь интегрирования в нижней полуплоскости. Получается

$$\bar{\psi}(\zeta, x)e^{i\zeta x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_1^N \frac{1}{\zeta-\zeta_j}\gamma_j\psi_j e^{i\zeta_j x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b\psi e^{i\xi x}}{a(\xi-\zeta)}\,d\xi,$$

где $\psi_j = \psi(\zeta_j)$, $\gamma_j = b_j(a_j')^{-1}$, $a_j' = (da/d\zeta)$ в $\zeta = \zeta_j$, $j = 1, \ldots, N$, N — число нулей функции $a(\zeta)$. Следуя аналогичному рецепту, мы можем найти линейное по $\bar{\psi}$ уравнение для $\psi(\zeta, x)e^{-i\zeta x}$ ($\operatorname{Im}\zeta > 0$). Именно тот факт, что скачки при переходе через вещественную ось ζ линейны по ψ и $\bar{\psi}$, и позволяет линеаризовать обратную задачу.

Если мы имеем дело с безотражательными потенциалами, то $b = \bar{b} \equiv 0$ и уравнения на ψ, $\bar{\psi}$, φ, $\bar{\varphi}$ таковы:

$$\bar{\psi}(\zeta, x)e^{i\zeta x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_1^N \frac{\gamma_j\psi_j e^{i\zeta_j x}}{\zeta-\zeta_j}, \quad \operatorname{Im}\zeta < 0, \tag{5.99a}$$

$$\psi(\zeta, x)e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \sum_1^N \frac{\bar{\gamma}_j\bar{\varphi}_j e^{-i\bar{\zeta}_j x}}{\zeta-\bar{\zeta}_j}, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \tag{5.99b}$$

$$\bar{\varphi}(\zeta, x)e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \sum_1^N \frac{\beta_j\varphi_j e^{-i\zeta_j x}}{\zeta-\zeta_j}, \quad \operatorname{Im}\zeta < 0, \tag{5.99c}$$

$$\varphi(\zeta, x)e^{i\zeta x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_1^N \frac{\bar{\beta}_j\bar{\psi}_j e^{i\bar{\zeta}_j x}}{\zeta-\bar{\zeta}_j}, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \tag{5.99d}$$

где $\beta_j = \bar{b}_j(a_j')^{-1}$, $\bar{\beta}_j = b_j(\bar{a}_j')$. Пусть $\zeta = \bar{\zeta}_k$ в (5.99a, c) и $\zeta = \zeta_k$ в (5.99b, d); тогда полученные линейные уравнения на ψ_j, $\bar{\psi}_j$

легко решаются. Определитель матрицы коэффициентов (с точностью до экспоненциального множителя с линейной по t_k фазой) есть τ-функция.

Читателю следует разобрать односолитонный случай, который соответствует паре ζ_1, $\bar{\zeta}_1$. Если $r=-q^*$, то $\bar{\zeta}_1=\zeta_1^*$, и решения таковы:

$$e_1=2\eta\,\mathrm{sech}\,\theta\exp i\varphi,\quad f_1=-e_1^*,$$

где

$$\theta=i\sum(\zeta_1^k-\zeta_1^{*k})t_k+2\eta x_0,$$
$$\varphi=-\sum(\zeta_1^k+\zeta_1^{*k})t_k+\varphi_0$$

и задающие начальное положение параметры x_0, φ_0 связаны с коэффициентами b_j, $\bar{b}_j=b_j^*$.

А теперь мне хочется, чтобы вы запомнили структуру фундаментальной матрицы решений. Заметьте, что каждый столбец $\bar{\psi}$ и ψ имеет конечное число не зависящих от x, t_k, $k=2,\ldots$ полюсов. Мы вольны переопределить фундаментальную солитонную матрицу, умножая решение $\bar{\psi}$ на $\zeta^{-N}\prod_1^N(\zeta-\zeta_j)$, и в этом случае $\psi e^{i\zeta x}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_1^n\frac{1}{\zeta^k}\mathbf{C}_k.$$

Подобным образом можно переопределить произведение $\psi e^{-i\zeta x}$, чтобы оно превратилось в многочлен степени $\bar{N}$ по обратным степеням ζ. Такая нормировка достигается умножением V справа на $\begin{pmatrix}F_1(\zeta) & 0\\ 0 & F_2(\zeta)\end{pmatrix}$.

Наоборот, как это делалось в гл. 3, можно показать, что если мы возьмем

$$V=(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)^T$$

с

$$\mathbf{u}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_1^N\frac{1}{\zeta^k}\mathbf{C}_{1k}\right)\exp\left(-i\sum\zeta^k t_k\right),$$
$$\mathbf{u}_2=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_1^{\bar{N}}\frac{1}{\zeta^k}\mathbf{C}_{2k}\right)\exp\left(i\sum\zeta^k t_k\right),\tag{5.100a}$$

$$\mathbf{u}_1(\alpha)=b\mathbf{u}_2(\alpha)\tag{5.100b}$$

для $\alpha=(\zeta_1, \ldots, \zeta_N, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_{\bar{N}})$, $b=(b_1, \ldots, b_N, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{\bar{N}})$, то столбцы матрицы V удовлетворяют соотношению

$$V_{t_j}=Q^{(j)}V. \tag{5.101}$$

Элементы матриц $Q^{(j)}$ связаны с $\mathbf{C}_{1k}$, $\mathbf{C}_{2k}$ и различными их производными. Например,

$$\mathbf{C}_{21}=\left(-\frac{i}{2}e_1, \ -\frac{i}{2}\int^x e_1 f_1\right), \quad \mathbf{C}_{11}=\left(\frac{i}{2}\int^x e_1 f_1, \ \frac{i}{2}f_1\right)$$

(см. разд. 5e). Интегрируемость (5.101) гарантирует, что e_1 и f_1 удовлетворяют иерархии АКНС.

Доказательство предположения, что из (5.100a, b) следует (5.101), вытекает из соображений единственности, которые были описаны в разд. 3h в связи с семейством КдФ. Во-первых, заметьте, что $2(N+\bar{N})$ уравнений (5.101b) единственным образом определяют $\mathbf{C}_{1k}$, $\mathbf{C}_{2k}$ как функции x, t_j, $j\geqslant 2$. Затем рассмотрите векторные величины

$$\mathbf{u}_j=(v_{j1x}+i\zeta v_{j1}-e_1 v_{j2}, \quad v_{j2x}-i\zeta v_{j2}-f_1 v_{j1})^T$$

с $\mathbf{v}_j=(v_{j1}, v_{j2})^T$, $j=1, 2$. Несложные вычисления показывают, что эти функции имеют асимптотические разложения

$$\sum_1^N \frac{1}{\zeta^k}d_k, \quad \sum_1^{\bar{N}} \frac{1}{\zeta^k}\bar{d}_k$$

и, кроме того, $\mathbf{u}_1(\alpha)=b\mathbf{u}_2(\alpha)$. Итак, вектора $\mathbf{v}_1+\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2+\mathbf{u}_2$ удовлетворяют всем условиям (5.100), (5.101). Но вектора, удовлетворяющие этим условиям, единственны (мы можем в явном виде вычислить $\mathbf{C}_{1k}$, $\mathbf{C}_{2k}$) и, следовательно, $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=0$. Поэтому вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ удовлетворяют (5.101) для $j=1$. Доказательство для других t_j аналогично.

(ii) *Деформации, сохраняющие римановы поверхности.* В разд. 3h я показал, каким образом конечнозонные решения семейства КдФ связаны с независящими от времени римановыми поверхностями, поэтому достаточно краткого напоминания. Рассматривается связь

$$\sum_1^n u_j V_{t_j}=yV, \tag{5.102}$$

добавленная к перечню (5.76). Она может быть записана как

$$\left(\sum_1^n u_j Q^{(j)}-y\right)V=0, \tag{5.103}$$

так что нетривиальное решение существует только когда

$$\det\left(\sum_1^n u_j Q^{(j)} - yI\right) = 0. \tag{5.104}$$

Уравнение (5.104) задает алгебраическую кривую (для $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ гиперэллиптическую)

$$y^2 = \det\left(\sum_1^n u_j Q^{(j)}\right). \tag{5.105}$$

Перекрестное дифференцирование (5.96) и (5.103) показывает, что $P = \sum_1^n u_j Q^{(j)}$ удовлетворяет уравнению

$$P_{t_j} = [Q^{(j)}, P], \tag{5.106}$$

которое означает, что P можно записать в виде

$$P = VP_0V^{-1}, \quad P_{0t_j} = 0. \tag{5.107}$$

Следовательно, характеристический многочлен для P равен $\det(P_0 - yI)$ и поэтому он не зависит ни от какого времени. Кроме того, из совместности (5.102) и (5.76) получим (достаточно перекрестно продифференцировать по t_k и использовать $Q^{(j)}_{t_k} + [Q^{(j)}, Q^{(k)}] = Q^{(k)}_{t_j}$)

$$\sum_{1}^{n} u_j Q^{(k)}_{t_j} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5.108}$$

Таким образом, (i) означает, что каждое $Q^{(k)}$ — это функция лишь $(n-1)$ линейных комбинаций $t_1, \ldots, t_n$, а (ii) означает, что, в частности, $Q^{(1)}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению по $t_1 = x$, потому что e_{1,t_j} и $f_{1\,t_j}$ можно записать как функции e_1, f_1 и их производных по t_1. Конечномерное многообразие решений этого уравнения левоинвариантно относительно всех потоков во всей иерархии $Q_{t_j} = [Q^{(j)}, Q]$. Это означает, что решение уравнения

$$\sum_1^n u_j Q^{(1)}_{t_j} = 0 \tag{5.109}$$

в момент времени, равный нулю, если ему позволить эволюционировать в силу любого временного потока, останется решением (5.109). Уравнение (5.109) часто называют уравнением *Лакса — Новикова*. Решения (5.109), как и их эволюция по временам, можно построить в явном виде, и мы показали один из способов сделать это в разд. 3h. Эта задача решается в абелевых

функциях. Метод построения, использующий теорию римановых поверхностей и единственность обладающих определенными свойствами функций, заданных на этих поверхностях, был дан И. М. Кричевером. Я не буду здесь объяснять его идеи и вместо этого рекомендую читателю работу [28].

(iii) *Изомонодромные деформации.* Предположим теперь, что вместо связи (5.102) связь

$$\zeta V_\zeta = \sum_1^n j t_j V_{t_j} \tag{5.110}$$

наложена на набор уравнений

$$V_{t_j} = Q^{(j)} V, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.111}$$

Условие интегрируемости теперь таково:

$$\sum_1^n j t_j Q_{t_j}^{(k)} = \zeta Q_\zeta^{(k)} - k Q^{(k)},$$

что можно переписать в виде

$$\sum_1^n j t_j P_{t_j} = \zeta P_\zeta, \tag{5.112}$$

где

$$P = \frac{Q^{(k)}}{\zeta^k} = \sum_0^k Q_r \zeta^{-r}, \quad Q_r = h_r H + e_r E + f_r F.$$

Коэффициент при $1/\zeta$ дает

$$(xQ_1)_x + \sum_2^n j t_j Q_{1,t_j} = 0, \tag{5.113}$$

что есть аналог (5.109). Это означает, что Q_1 — функция вида

$$\frac{1}{x} \bar{Q}_1 \left(\frac{x}{(2t_2)^{1/2}}, \ldots, \frac{x}{(nt_n)^{1/n}} \right) \tag{5.114}$$

с $n-1$ фазой.

Теперь поясним, почему мы выбрали связь (5.110). Идея состоит в том, что такая связь отражает масштабную инвариантность, которой обладают некоторые уравнения в этой иерархии, — в точности так же, как выбор конечнозонной связи отражает трансляционную инвариантность уравнения (может быть, вам захочется вернуться к разд. 3h). Для большей конкретности я сосредоточу внимание на иерархии мКдФ — подмножестве иерархии уравнений

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q], \tag{5.115}$$

которое получается, если положить $f_1 = e_1 = q$ и заморозить все потоки по четным временам t_{2n}.

Первые три члена последовательности суть

$$q_{t_1} = q_x, \tag{5.116}$$

$$q_{t_3} = -\frac{1}{4}(q_{xx} - 6q^2 q_x)_x, \tag{5.117}$$

$$q_{t_5} = \frac{1}{16}(q_{xxxx} - 10q^2 q_{xx} - 10qq_x^2 + 6q^5)_x; \tag{5.118}$$

они соответствуют

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ q & i\zeta \end{pmatrix}, \tag{5.119a}$$

$$Q^{(3)} = \begin{pmatrix} -i\zeta^3 - \frac{iq^2\zeta}{2} & \zeta^2 q + \frac{i\zeta q_x}{2} - \frac{1}{4}(q_{xx} - 2q^3) \\ \zeta^2 q - \frac{i\zeta q_x}{2} - \frac{1}{4}(q_{xx} - 2q^3) & i\zeta^3 + \frac{iq^2\zeta}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.119b}$$

Вычисление $Q^{(5)}$ я оставляю читателю в качестве упражнения. Заметьте, что (5.117) обладает масштабной инвариантностью, т. е. если $q(x, t)$ является решением (5.117), то $\beta q(\beta x, b^3 t_3)$ тоже является решением. Решение $\tilde{q}(x, t)$, инвариантное относительно масштабного преобразования, называется автомодельным, и это значит, что

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \beta q(\beta x, \beta^3 t_3)\,|_{\beta=1} = 0,$$

или

$$q + xq_x + 3t_3 q_{t_3} = 0, \tag{5.120}$$

что совпадает с (5.113) при $n = 3$. Итак, $q(x, t_3)$ имеет вид

$$q(x, t_3) = \frac{1}{(3t_3)^{1/3}} f\left(X = \frac{x}{(3t_3)^{1/3}}\right). \tag{5.121}$$

Удобно заменить переменные в

$$V_x = Q^{(1)}V, \qquad V_{t_3} = Q^{(3)}V \tag{5.122}$$

на переменные

$$X = \frac{x}{(3t_3)^{1/3}}, \quad T = t_3, \tag{5.123}$$

чтобы отразить структуру коэффициентов $Q^{(1)}$ и $Q^{(3)}$. Мы видим, что $V(x, t_3; \zeta)$ преобразуется при изменении масштаба как

$W(X, \xi)$, где $\xi = \zeta(3t_3)^{1/3}$, и что уравнения (5.122) превращаются в

$$W_X = \begin{pmatrix} -i\xi & f \\ f & i\xi \end{pmatrix} W, \tag{5.124}$$

$$\xi W_\xi = \begin{pmatrix} -i\xi^3 - if^2\frac{\xi}{2} - iX\xi & \xi^2 f + i\xi f_X/2 + \nu \\ \xi^2 f - i\xi f_X/2 + \nu & i\xi^3 + if^2\frac{\xi}{2} + iX\xi \end{pmatrix} W. \tag{5.125}$$

Условие интегрируемости для (5.124), (5.125) — это

$$f_{XX} = 4Xf + 2f^3 - \nu; \tag{5.126}$$

если q задано выражением (5.121), это совпадает с проинтегрированным по X уравнением (5.117), при этом ν — константа интегрирования.

Выражение (5.126), описывающее автомодельное решение уравнения (5.117), есть уравнение Пенлеве второго рода (см. [35], [36] и разд. 4е). Это нелинейное неавтономное уравнение, левоинвариантное относительно потока. Например, выберете функцию $f(x)$, удовлетворяющую (5.126). Возьмем $t_3 = 1/3$. Позвольте решению $q(x, t_3)$ вида (5.121) эволюционировать в силу (5.117) на интервале $1/3 < t_3 < t$. Тогда $q(x, t)$ при $t_3 = t$ будет иметь вид (5.121), где $f(X)$ снова является решением (5.126), только X — это теперь $x/(3t)^{1/3}$.

Мы делаем более общее утверждение: класс совместных со связью (5.110) решений имеет многофазную автомодельную структуру и удовлетворяет автономному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению по x, именно (5.113), с коэффициентами, зависящими от $x, t_2, \ldots, t_n$. Далее, многообразие решений левоинвариантно относительно потоков Q_{1, t_j}, $j = 1, \ldots, n$ в том смысле, что решение (5.113) в момент $t_2^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}$ при эволюции в силу потоков Q_{1, t_j}, $j = 2, \ldots, n$ до времен $t_2, \ldots, t_n$ снова будет удовлетворять (5.113), только $t_2^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}$ надо заменить текущими временами $t_2, \ldots, t_n$. Однако в отличие от конечнозонных решений, эти решения не являются, я это подчеркиваю, левоинвариантными относительно высших потоков Q_{1, t_j}, $j > n$, данной иерархии.

Теперь про то, как можно решить задачу Коши для (5.126) при заданных f и f_X в точке $X = X_0$. В методе обратной задачи, как вы помните, мы сконцентрировали внимание на задаче на собственные значения

$$V_x = Q^{(1)} V$$

и использовали второе уравнение (5.122), чтобы определить временну́ю эволюцию данных рассеяния. Для решения обыкновенных нелинейных автономных уравнений, связанных с конечнозонными решениями, мы сосредоточили внимание на связи

$$\left(\sum u_j Q^{(j)} - yI\right) V = 0$$

и использовали задачу на собственные значения и другие уравнения $V_{t_j} = Q^{(j)} V$ в качестве вспомогательных уравнений для определения зависимости μ от x и t_j (см. разд. 3h).

Здесь мы снова сосредоточимся на связи (5.125) и используем (5.124) в качестве вспомогательного уравнения. Уравнение (5.125) выглядит сложно, но если его рассматривать как функцию от ξ, оно в действительности очень простое, ибо все коэффициенты рациональны по ξ. Есть две особые точки, одна регулярная ($\xi = 0$), другая — нерегулярная точка третьего порядка ($\xi = \infty$). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что структура фундаментальной матрицы решений полностью определяется своим поведением вблизи особых точек. В частности, это поведение характеризуется *матрицами монодромии*, описывающими, как меняется фундаментальная матрица решений при обходе вокруг особой точки.

Около $\xi = 0$ уравнение (5.125) имеет решение вида

$$\Phi(\xi;\, X) = \hat{\Phi}(\xi;\, X) \begin{pmatrix} \xi^{-\nu} & 0 \\ 0 & \xi^{\nu} \end{pmatrix}, \tag{5.127}$$

где Φ аналитична по ξ (для полуцелых ν в решении общего вида, как правило, вдобавок появляются логарифмы). Матрица монодромии J, соответствующая $\xi = 0$, есть

$$\Phi(\xi e^{2\pi i}) = \Phi(\xi)\, J, \tag{5.128}$$

и J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\nu} & 0 \\ 2\pi J_1 e^{2\pi i\nu} & e^{2\pi i\nu} \end{pmatrix}, \tag{5.129}$$

где J_1 присутствует лишь если ν полуцелое. Для $\nu = 1/2$, $J_1 = 2(f_X + f^2 + 2X)e^{-2u}$, $u_X = f$. Заметьте, что $J_{1X} = 0$.

Вблизи $\xi = \infty$ (5.125) имеет формальное фундаментальное решение

$$\tilde{\Psi}(\xi;\, X) = \hat{\Psi}(\xi;\, X) \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 \\ 0 & e^{\theta} \end{pmatrix}, \tag{5.130}$$

где $\theta = i\xi X + i\xi^3/3$ и $\hat{\Psi} = \sum_0^\infty c_j \zeta^{-j}$ — формальный ряд Лорана.

В каждом секторе S_j, $(\pi/3)(j-1) \leqslant \operatorname{Arg}\xi \leqslant (\pi/3)j$, существует настоящее решение Ψ_j, для которого (5.130) является асимптотическим разложением в S_j. Однако при обходе вокруг ∞ мы сталкиваемся с явлением Стокса. А именно, при переходе от S_1 к S_2, когда $\operatorname{Arg}\xi = \pi/3$, аналитическое продолжение асимптотического разложения в S_1 не является более асимптотическим разложением аналитического продолжения настоящего решения. Приходится умножать настоящее решение Ψ на «матрицы Стокса» вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.131}$$

чтобы получить новое решение Ψ_2, асимптотическое разложение которого в S_2 есть (5.130). Происходит следующее: «рецессивное» решение в S_1 (т. е. решение, пропорциональное e^{θ}, которое убывает экспоненциально) становится доминантным решением в S_2, но определенное количество (a_1, множитель Стокса) рецессивного в S_1 решения следует добавить к доминантному в этой области, чтобы их комбинация была рецессивна в следующем секторе. Фундаментальные решения Ψ_j с асимптотическим разложением (5.130) в шести секторах вблизи бесконечности связаны соотношениями

$$\Psi_{j+1} = \Psi_j A_j, \tag{5.132}$$

где ненулевые недиагональные элементы в A_j (множители Стокса) чередуются от угла к углу. Детали проработаны в [36].

Набор матриц J, $A_1, \ldots, A_6$ вместе со связующей матрицей A, которая устанавливает связь между фундаментальным решением Φ, определенным образом нормированным в $\xi = 0$, и Ψ_1, $\Phi = \Psi_1 A$, задают *данные монодромии.* (Вследствие симметрий при заданном ν среди всех этих данных есть только два независимых параметра, соответствующие неизвестным f и f_X.)

Теперь мы можем сформулировать замечательный результат. Коль скоро $f(X)$ меняется согласно (5.126), все эти матрицы не зависят от X. Отсюда термин *изомондромная деформация.* Решение (5.126) можно получить так. При заданных f, f_X в $X = X_0$ вычислим данные монодромии. Затем при некотором другом X при заданных этих данных и $\theta = i\xi X + i\xi^3/3$ можно восстановить Ψ_1 и, следовательно, коэффициенты ее формального асимптотического разложения, которые зависят от $f(X)$ и $f_X(X)$. Поэтому можно найти f при всех X. Детали процедуры обращения и некоторые сведения о решении даны в [36].

Я закончу этот раздел замечанием, что оператор $\xi d/d\xi$ очень важен во всей теории в целом, а не только в связи с автомо-

дельными решениями. Некоторые замечания о его роли будут даны в следующем разделе.

5g. Калибровочные преобразования и преобразования Бэклунда. Мы начнем с теоремы, утверждающей, что под действием преобразований

$$Q^{(k)} \to RQ^{(k)}R^{-1} + R_{t_k}R^{-1} = \tilde{Q}^{(k)}, \tag{5.133}$$

$$Q \to RQR^{-1} = \tilde{Q} \tag{5.134}$$

уравнение

$$Q^{(j)}_{t_k} - Q^{(k)}_{t_j} + [Q^{(j)}, Q^{(k)}] = 0 \tag{5.135}$$

и его предел

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q] \tag{5.136}$$

сохраняют свой вид. Доказывается это непосредственно. Такой выбор преобразования мотивируется тем, что (5.135) и (5.136) суть условия интегрируемости последовательности уравнений

$$V_{t_k} = Q^{(k)}V, \tag{5.137}$$

и уравнения (5.137) сохраняют свой вид при преобразовании

$$V \to RV = W, \tag{5.138}$$

если выполняется (5.133).

Кроме того, иногда также бывает полезно нормировать V, добавляя член в правую часть (5.137):

$$V_{t_k} = Q^{(k)}V + VN^{(k)}. \tag{5.139}$$

Условие интегрируемости для (5.139) есть в точности (5.135), если ротор бесконечномерного вектора $N^{(k)}$ равен нулю, т. е.

$$N^{(k)}_{t_j} = N^{(j)}_{t_k}. \tag{5.140}$$

(Я напомню, что мы выбрали $N^{(1)} = 0$, $N^{(k)} = i\zeta^k H$ при $k \geqslant 2$, чтобы быть уверенным, что асимптотика V в $-\infty$ имеет вид

$$V_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta k} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$$

(см. разд. f(i)). Добавление нормировки $N^{(k)}$ выполняется преобразованием V

$$V \to RVS = \tilde{V} \tag{5.141}$$

и легко показать, что

$$N^{(k)} = S^{-1} S_{t_k}. \tag{5.142}$$

Условие (5.140) тогда выполняется, если

$$[N^{(k)}, N^{(l)}] = 0. \tag{5.143}$$

Обратите внимание, что преобразование (5.134) матрицы Q не включает S. Это происходит потому, что умножение V справа просто сводится к замене базиса столбцов V. Преобразование (5.141) с условием (5.143) вместе с (5.133) и (5.134) называется *калибровочным преобразованием.* Но взгляните на (5.134). Мы знаем, что если Q удовлетворяет (5.136), то и $\tilde{Q} = RQR^{-1}$ удовлетворяет этому соотношению. Но уравнение (5.134) есть просто бесконечный набор соотношений между переменными $\{h_r, e_r, f_r\}$ в Q и соответствующими переменными $\{\tilde{h}_r, \tilde{e}_r, \tilde{f}_r\}$ в $\tilde{Q}$. Следовательно, (5.134) есть автопреобразование Бэклунда между двумя произвольными членами набора интегрируемых уравнений, ассоциированных с $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$.

До сих пор мы ничего не сказали про R и S, кроме того, что они должны быть обратимыми. Как их следует выбирать? Мы уже отметили, что S не имеет существенного значения. Поэтому все зависит от того, как мы выберем R.

Во-первых, заметьте, что R обладает легко выводимым из (5.133) свойством

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \det R = (\operatorname{Tr} \tilde{Q}^{(k)} - \operatorname{Tr} Q^{(k)}) \det R = 0,$$

ибо $\operatorname{Tr} Q^{(k)}$ не зависит от t_k, а из (5.134) то же следует для $\operatorname{Tr} \tilde{Q}^{(k)}$. Поэтому $\det R$ не зависит от t_k и может быть лишь функцией ζ. Пусть α — нуль $\det R$, и предположим, что это не нуль $\det V$. Тогда $\det \tilde{V}(\alpha) = \det R(\alpha) \det V(\alpha) = 0$ и столбцы $\tilde{V}$ линейно зависимы при $\zeta = \alpha$. Теперь, вспоминая обсуждение в конце части (i) предыдущего раздела, мы видим, что это в точности условие наличия у $\tilde{V}$ связанного состояния в точке α. Мы знаем, что добавление пары связанных состояний в α, $\bar{\alpha}$ соответствует добавлению солитона. С другой стороны, если $\det R$ имеет полюс в α, то мы видим, что обратное преобразование $V = R^{-1}\tilde{V}$ создает новую фундаментальную матрицу V с дополнительным связанным состоянием, параметризуемым α.

Итак, нули $\det R$ соответствуют связанным состояниям $\tilde{V}$, не содержащимся в V. Пара связанных состояний соответствует добавлению солитона. Более сложные функциональные формы $\det R$ соответствуют добавлению более сложных решений, что выходит за рамки этих лекций. Однако есть другой простой

класс преобразований Бэклунда, соответствующих $\det R = \text{constant}$. Эти преобразования, меняющие монодромию фундаментальной матрицы решений в $\zeta = \infty$ и известные как преобразования Шлезингера [125]. Они играют центральную роль в той истории, которую я сейчас хочу рассказать.

Давайте обратимся к конкретным случаям, иллюстрируя эти идеи несколькими примерами. Непосредственная цель этого раздела — выписать формулы, выражающие новые τ-функции $\tilde{\tau}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\rho}$ через прежние τ, σ, ρ. Но, как мы увидим, лучше рассматривать каждый такой триплет в качестве трех следующих друг за другом членов бесконечной последовательности.

Первый пример хорошо известен (хотя, возможно, вы не встречались с изложенным выше подходом) и состоит в попытке добавить к решению Q один дополнительный солитон. Я вновь напомню, что вся информация о солитоне содержится в структуре фундаментальной матрицы решений. Ее столбцы становятся линейно зависимыми при значениях ζ, соответствующих солитонным параметрам. С помощью преобразования базиса, действующего на столбцы V посредством S, этот критерий можно сформулировать в вполне эквивалентной форме, если потребовать, чтобы первый столбец в RV обращался в нуль при $\zeta = \zeta_1$, а второй в сопряженной точке $\bar{\zeta}_1$. Вспомним краткое обсуждение задачи рассеяния для задачи на собственные значения Захарова — Шабата в разд. 5f. Для r и q общего вида собственные значения появляются парами, ζ, $\bar{\zeta}$ — нули соответственно $a(\zeta)$ и $\bar{a}(\zeta)$ в верхней и нижней полуплоскостях. Если $f_1 = -e_1^*$ (или $r = -q^*$), то $\bar{\zeta} = \zeta^* = \xi - i\eta$ и η и ξ — амплитуда и скорость огибающей солитона. В целях настоящего обсуждения мы возьмем $r = -q$ и в этом случае $\zeta_1 = i\eta$, $\bar{\zeta}_1 = -i\eta$. Вычисления упрощаются, и результат читателю уже знаком из разд. 4f. Положим

$$R = \begin{pmatrix} \zeta + d + a & b \\ c & \zeta + d - a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что условия того, что

$$R\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = i\eta, \qquad R\begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = -i\eta,$$

приводят к следующим значениям a, b, c, d:

$$a = i\eta - \frac{2i\eta}{1+\gamma^2}, \quad b = c = \frac{-2i\eta\gamma}{1+\gamma^2}, \quad d = 0, \tag{5.144}$$

где (вспомните обозначения, используемые в разд. 4f)

$$\gamma = \frac{V_{21}(i\eta)}{V_{11}(i\eta)} = -\frac{V_{22}(-i\eta)}{V_{12}(-i\eta)}. \tag{5.145}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку из разд. 5f мы знаем, что если $V_1(x, \zeta)$, $V_2(x, \zeta)$ — решение уравнений Захарова — Шабата, то $V_2(x, -\zeta)$, $-V_1(x, -\zeta)$ тоже являются решениями, если $r = -q$. Вычислив R, давайте используем преобразование Бэклунда (5.134) для вычисления новых рядов $\tilde{h}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ через старые h, e, f.

Несложные вычисления показывают, что если

$$R\begin{pmatrix} \zeta + a & b \\ b & \zeta - a \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{h} & \tilde{e} \\ \tilde{f} & -\tilde{h} \end{pmatrix},$$

то (5.134) можно записать как

$$\zeta \begin{pmatrix} \tilde{h} - h \\ \tilde{e} - e \\ \tilde{f} - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(h - \tilde{h}) + b(f - \tilde{e}) \\ a(\tilde{e} + e) - b(\tilde{h} + h) \\ -a(\tilde{f} + f) + b(\tilde{h} + h) \end{pmatrix}. \tag{5.146}$$

Вспомните, что $h_0 = \tilde{h}_0 = -i$, $e_0 = f_0 = \tilde{e}_0 = \tilde{f}_0 = h_1 = \tilde{h}_1 = 0$. Вычисляя коэффициенты при ζ^0, мы получим

$$\tilde{e}_1 - e_1 = 2ib = \frac{4\eta\gamma}{1 + \gamma^2}, \tag{5.147a}$$

$$\tilde{f}_1 - f_1 = -2ib = \frac{-4\eta\gamma}{1 + \gamma^2}, \tag{5.147b}$$

откуда видно, что поскольку $f_1 = -e_1$, то $\tilde{f}_1 = -\tilde{e}_1$, т. е. мы остаемся в классе решений. Пусть $e_1 = -u_x/2$, $\tilde{e}_1 = -\tilde{u}_x/2$ и $\gamma = \operatorname{tg}(u + \tilde{u})/4$, откуда из (5.147a) имеем

$$u_x - \tilde{u}_x = 4\eta \sin\frac{u + \tilde{u}}{2} \tag{5.148}$$

— определенно знакомый результат (см. разд. 4f). Коэффициенты при высших степенях ζ дают соотношения между $\tilde{h}_s$, $\tilde{e}_s$, $\tilde{f}_s$ и h_s, e_s, f_s. Вспоминая, что $e_s = (i/2)\partial e_1/\partial t_{s-1}$, мы получим все соотношения Бэклунда для потоков семейства мКдФ. В этом примере мы, конечно должны зафиксировать t_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$, ибо в противном случае мы не сохраним класс $f_1 = -e_1$. Поэтому выражения, полученные с помощью вычислений коэффициентов при нечетных степенях ζ, удовлетворяются автоматически и не дают нам новых соотношений Бэклунда.

Они играют одну важную роль. Вы можете спросить, почему я смог выбрать $\gamma = \operatorname{tg}(u + \tilde{u})/4$. Строго говоря, это совсем не

следует из того, что я рассказал. Однако, если вы взглянете на коэффициенты при ζ^{-1} в (5.146), вы обнаружите, что

$$\tilde{e}_2 - e_2 = a(\tilde{e}_1 + e_1). \tag{5.149}$$

Теперь продифференцируйте (5.147а) по x или t_1 и умножьте на $i/2$. Получится

$$\tilde{e}_2 - e_2 = i\eta \cos\varphi\varphi_x,$$

где мы воспользовались тем, что $e_2 = (i/2)\partial e_1/\partial t_1$, и положили $\gamma = \operatorname{tg}(\varphi/2)$. Теперь вспомним, что $a = -i\eta\cos\varphi$, и поэтому

$$\tilde{e}_1 + e_1 = -\varphi_x,$$

или

$$\frac{\tilde{u} + u}{2} = \varphi.$$

Поэтому введение $\gamma = \operatorname{tg}[(u + \tilde{u})/4]$ совершенно естественно. Это не фокус и не обман!

Второй пример иллюстрирует преобразование Шлезингера [86], [125]. На этот раз мы выбираем R таким образом, чтобы асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений $\tilde{V}$ имело канонический вид, заданный (5.77), но к тому же умноженный на матрицу

$$\begin{pmatrix} -2i\zeta & \\ & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix},$$

которая меняет монодромию в $\zeta = \infty$.

Сначала позвольте привести ответ и изучить его ограничения. Как найти нужное R, я расскажу после. Возьмем

$$R = \begin{pmatrix} -2i\zeta - \frac{\partial}{\partial t_1}\ln e_1 & e_1 \\ \tilde{f}_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.150}$$

Канонический вид V есть

$$V = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} X_-\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma \\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_+\tau \end{pmatrix}, \tag{5.151}$$

и, как я сказал, R была выбрана так, чтобы

$$\tilde{V} = RV = \tilde{V}_e\begin{pmatrix} -2i\zeta & \\ & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix}. \tag{5.152}$$

Здесь $\tilde{V}_c$ обозначает $\tilde{V}$, нормированную умножением на зависящее от ζ преобразование, с тем чтобы добиться канонического вида (т. е. (5.77) и (5.151) с заменой τ, σ, ρ на $\tilde{\tau}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\rho}$). Так как $\det R = -1$, то $e_1\tilde{f}_1 = 1$.

Но из (5.152) и (5.151)

$$R = \tilde{V}_c \begin{pmatrix} -2i\zeta & \\ & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix} V^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\tau\tilde{\tau}} \begin{pmatrix} -2i\zeta\tilde{\tau}_-\tau_+ + \frac{i}{8\zeta^3}\tilde{\sigma}_+\rho_- & \sigma_+\tilde{\tau}_- - \frac{1}{4\zeta^2}\tilde{\sigma}_+\tau_- \\ \tilde{\rho}_-\tau_+ - \frac{1}{4\zeta^2}\tilde{\tau}_+\rho_- & \frac{i}{2\zeta}(\sigma_+\tilde{\rho}_- - \tilde{\tau}_+\tau_- \end{pmatrix}, \tag{5.153}$$

где $\tau_+ = \tau(t_k + i/2k\zeta^k)$, $\tilde{\rho}_- = \tilde{\rho}(t_k - i/2k\zeta^k)$. Все экспоненциальные множители $e^{\mp i\sum \zeta^k t_k H}$ в X_+ и X_- сокращаются. Теперь, сравнивая (5.150) и (5.153), мы находим

$$\sigma_+\tilde{\rho}_- = \tilde{\tau}_+\tau_-, \tag{5.154}$$

$$\tilde{\rho}_-\tau_+ - \frac{1}{4\zeta^2}\tilde{\tau}_+\rho_- = \tilde{f}_1\tau\tilde{\tau} = \tilde{\rho}\tau. \tag{5.155}$$

Но $\tilde{f}_1 = e_1^{-1}$ ($\det R = -1$) означает, что

$$\tilde{\rho}\sigma = \tau\tilde{\tau}. \tag{5.156}$$

Мы находим (вспоминая, что $\tau_+\tau_- - \sigma_+\rho_-/4\zeta^2 = \tau^2$ из-за $\det V = 1$)

$$\tilde{\tau} = \sigma, \quad \tilde{\rho} = \tau \tag{5.157}$$

и, раскрывая выражение

$$\sigma_+\tilde{\tau}_- - \frac{1}{4\zeta^2}\tilde{\sigma}_+\tau_-,$$

получаем

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{2\tau}D_{t_1}^2\sigma\cdot\sigma, \tag{5.158}$$

где D_{t_1} — оператор Хироты. Записывая (5.151) в терминах e_1, f_1 и воспользовавшись тем, что $e_1f_1 = -\tau_{11}/\tau + \tau_1^2/\tau$, находим (нижние индексы — это производные по $t_1 = x$)

$$\tilde{e}_1 = -e_{1xx} + \frac{e_{1x}^2}{e_1} + e_1^2 f_1. \tag{5.159}$$

Кроме того,

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{e_1}. \tag{5.160}$$

Теперь давайте представим, что нам захотелось применить это преобразование Бэклунда — Шлезингера много раз. Пусть $(\tilde{e}_1, \tilde{f}_1) = (q_{n+1}, r_{n+1})$ и $(e_1, f_1) = (q_n, r_n)$.

Тогда последовательное применение преобразования Бэклунда, меняющего монодромию V на множитель

$$\begin{pmatrix} -2i\zeta & \\ & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix},$$

дает последовательность

$$q_{n+1} = -q_{nxx} + \frac{q_{nx}^2}{q_n} + q_n^2 r_n, \tag{5.161a}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{q_n}. \tag{5.161b}$$

Пусть $q_n = e^{u_n}$. Тогда $r_n = e^{-u_{n-1}}$ и (5.161a) есть

$$u_{nxx} = e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}. \tag{5.162}$$

Если мы обозначим $x = it$, это будут уравнения цепочки Тоды! Итак, мы имеем замечательный результат, что цепочку Тоды можно решить последовательным применением преобразований Бэклунда определенного вида к иерархии $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$.

Можно не добавлять, что уравнения Хироты для цепочки Тоды — это

$$\tau_n = \sigma_{n-1}, \quad \rho_n = \tau_{n-1}$$

и (так как $x = t_1 = it$)

$$\sigma_n = \frac{1}{2\tau_{n-1}} D_t^2 \sigma_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} = \frac{1}{2\sigma_{n-2}} D_t^2 \sigma_{n-1} \cdot \sigma_{n-1}.$$

Аналогия с цепочкой Тоды полезна потому, что она позволяет следующим образом наглядно представить действие R. Допустим, что мы считаем триплет $\{\rho, \tau, \sigma\}$ τ-функциями цепочки Тоды, связанными с положениями $n-1$, n и $n+1$, т. е. $\tau_{n-1} = \rho$, $\tau_n = \tau$, $\tau_{n+1} = \sigma$. По правилам для цепочки Тоды τ-функция в точке $n+2$ задается выражением

$$\tau_{n+2} = \frac{1}{2\tau_n} D_t^2 \tau_{n+1} \cdot \tau_{n+1}.$$

Давайте применим R. Будучи матрицей, R не действует непосредственно на скаляры. Мы будем поэтому обозначать буквой R ее эффективное действие:

$$R \cdot \rho = \tau \Leftrightarrow R \cdot \tau_{n-1} = \tau_n,$$

$$R \cdot \tau = \sigma \Leftrightarrow R \cdot \tau_n = \tau_{n+1}.$$

Применяя R к σ, получим

$$R\cdot\sigma=-\frac{1}{2\tau}D_t^2\sigma\cdot\sigma,$$

что эквивалентно

$$R\cdot\tau_{n+1}=\frac{1}{2\tau_n}D_t^2\tau_{n+1}\cdot\tau_{n+1}=\tau_{n+2}.$$

Действие R на функцию τ_{n-2}, заданную формулой $(1/2\tau_n)\times\times D_t^2\tau_{n-1}\cdot\tau_{n-1}$, состоит в сдвиге индексов на единицу и дает τ_{n-1}. Итак,

$$R\{\ldots,\tau_{n-1},\tau_n,\tau_{n+1},\ldots\}=\{\ldots,\tau_n,\tau_{n+1},\tau_{n+2},\ldots\}. \quad (5.163)$$

Поэтому лучше всего считать, что R действует не на триплет $\{\rho,\tau,\sigma\}$, а на последовательность $\{\tau_n\}_{-\infty}^{\infty}$.

Наконец, я расскажу, как вычислять матрицы R, которые изменяют монодромию в $\zeta=\infty$. Попросту возьмем

$$R=\frac{1}{2}(I+H)\sum\frac{\alpha_r}{\zeta^r}+\frac{1}{2}(I-H)\sum\frac{\delta_r}{\zeta^r}+E\sum\frac{\beta_r}{\zeta^r}+F\sum\frac{\gamma_r}{\zeta^r}, \quad (5.164)$$

где суммировать надо от 0 до ∞, и выпишем уравнения

$$RQ=\tilde{Q}R.$$

Для коэффициентов при ζ^{-n} находим

$$\sum_0^n\{\alpha_r(h_{n-r}-\tilde{h}_{n-r})+b_rf_{n-r}-c_r\tilde{e}_{n-r}\}=0, \quad (5.165a)$$

$$\sum_0^n\{\delta_r(h_{n-r}-\tilde{h}_{n-r})-c_re_{n-r}+b_r\tilde{f}_{n-r}\}=0, \quad (5.165b)$$

$$\sum_0^n\{\alpha_r(e_{n-r}-\tilde{e}_{n-r})-b_r(h_{n-r}+\tilde{h}_{n-r})\}=0, \quad (5.165c)$$

$$\sum_0^n\{\delta_r(f_{n-r}-\tilde{f}_{n-r})+c_r(h_{n-r}+\tilde{h}_{n-r})\}=0. \quad (5.165d)$$

Чтобы изменить монодромию V на множитель

$$\begin{pmatrix}-2i\zeta & 0\\ 0 & \frac{1}{2i\zeta}\end{pmatrix},$$

поищем решение, для которого $\delta_r=0$, α_r, β_r, γ_r — нули при $r\geqslant 2$ и $\beta_0=\gamma_0=0$. Теперь решим уравнения и найдем

$$\alpha_0=\text{constant}=-2i,\quad \alpha_1=2ie_2/e_1,$$

$$\beta_1=e_1,\quad \gamma_1=\tilde{f}_1.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\tilde{h}_{n-1} = h_{n-1} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_{n-2}} \ln e_1,$$

и это дает

$$\tilde{\tau} = \tau e_1 = \sigma.$$

Другие соотношения (5.157) и (5.158) также выводятся прямым вычислением. Подводя итоги, мы воспользуемся более удобными обозначениями. Если

$$V \to V_+ = R_+ V \tag{5.166}$$

с

$$R_+ = \begin{pmatrix} -2i\zeta - \frac{\partial}{\partial t_1} \ln e_1 & e_1 \\ f_{1+} = \frac{1}{e_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.167}$$

то асимптотическое разложение V_+ имеет вид

$$V_+ \sim \frac{1}{\tau_+} \begin{pmatrix} X_- \tau_+ & -\frac{i}{2\zeta} X_+ \rho_+ \\ \frac{\tau}{2\zeta} X_- \rho_+ & X_+ \tau_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i\zeta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix}, \tag{5.168}$$

где

$$\tau_+ = \sigma, \quad \rho_+ = \tau, \quad \sigma_+ = -\frac{1}{2\tau} D_{t_1}^2 \sigma \cdot \sigma. \tag{5.169a}$$

В терминах цепочки Тоды это запишется как

$$\{\ldots, \tau_{n-1}, \tau_n, \tau_{n+1}, \ldots\}_+ = \{\ldots, \tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \ldots\}. \tag{5.169b}$$

Заметьте, что последнее уравнение согласуется с (5.67), третьим уравнением в последовательности Хироты для τ, σ, ρ, потому что

$$D_{t_1}^2 \sigma \cdot \sigma = D_{t_1}^2 \tau_+ \cdot \tau_+ = -2\sigma_+ \rho_+ = -2\sigma_+ \tau.$$

Заметим также, что определитель R постоянен и равен -1.

Из (5.166) мы находим, что компоненты (u_{1+}, u_{2+}) столбца V_+ связаны с соответствующим столбцом в V (напомним, что $e_2 = i/2e_{1,t_1}$) соотношениями

$$u_{1+} = \left(-2i\zeta + 2i\frac{e_2}{e_1}\right) u_1 + e_1 u_2, \quad u_{2+} = \frac{1}{e_1} u_1. \tag{5.170}$$

Дуальное преобразование

$$V \to V_- = R_- V \tag{5.171}$$

с

$$R_- = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{f_1} \\ f_1 & 2i\zeta - 2i\frac{f^2}{f_1} \end{pmatrix} \tag{5.172}$$

изменяет монодромию V в точке $\zeta = \infty$ на множитель

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2i\zeta} & \\ & 2i\zeta \end{pmatrix},$$

то есть

$$V_- \sim \frac{1}{\tau_-}\begin{pmatrix} X_-\tau_- & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma_- \\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho_- & X_+\tau_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2i\zeta} & 0 \\ 0 & 2i\zeta \end{pmatrix} \tag{5.173}$$

и

$$\tau_- = \rho, \quad \sigma_- = \tau, \quad \rho_- = -\frac{1}{2\tau}D^2_{t_1}\rho\cdot\rho. \tag{5.174a}$$

В терминах цепочки Тоды это запишется как

$$\{\ldots, \tau_{n-1}, \tau_n, \tau_{n+1}, \ldots\}_- = \{\ldots, \tau_{n-2}, \tau_{n-1}, \tau_n, \ldots\}. \tag{5.174b}$$

Столбцы V_- связаны со столбцами V соотношениями

$$u_{1-} = \frac{1}{f_1}u_2, \quad u_{2-} = f_1u_1 + \left(2i\zeta - 2i\frac{f_2}{f_1}\right)u_2. \tag{5.175}$$

Читателю следует получить уравнения, аналогичные (5.161).

Сейчас мы намерены использовать преобразования Бэклунда — Шлезингера, чтобы выписать формулу Бэклунда для добавления солитонов. Применяя ту же стратегию, что и в первом примере, мы потребуем, чтобы $R = R_L$ было выбрано так, чтобы один из двух столбцов $V_L = R_LV$ имел нуль в $\zeta = \alpha$. Если взять

$$R_L = \begin{pmatrix} -2i\zeta + a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.176}$$

с a, b, c, d, независящими от ζ, то это означает, что

$$(-2i\alpha + a)u_1 + bu_2 = 0, \quad cu_1 + du_2 = 0. \tag{5.177}$$

Из преобразования Бэклунда

$$RQ = \tilde{Q}R,$$

которое в компонентах записывается в виде

$$-2i\zeta(\tilde{h}-h)=bf-\tilde{e}c, \tag{5.178a}$$

$$(-2i\zeta+a)e=b(h+\tilde{h})+\tilde{e}d, \tag{5.178b}$$

$$(-2i\zeta+a)\tilde{f}=c(h+\tilde{h})+fd, \tag{5.178c}$$

$$ce=\tilde{f}b-d(\tilde{h}-h), \tag{5.178d}$$

мы получаем, вычисляя коэффициенты при степенях ζ,

$$\begin{aligned}
\zeta^0:\quad & e_1=b,\\
& \tilde{f}_1=c,\\
& -2i(\tilde{h}_2-h_2)=e_1f_1-\tilde{e}_1\tilde{f}_1,\\
\zeta^{-1}:\quad & -2ie_2+ae_1=\tilde{e}_1d,\\
& -2i\tilde{f}_2+a\tilde{f}_1=f_1d,\\
& \tilde{e}_1f_1=\tilde{f}_1e_1.
\end{aligned} \tag{5.179}$$

Из (5.177), (5.179) имеем

$$\tilde{f}_1=-d\frac{u_2}{u_1},$$

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{d}\left(-2ie_2+2ae_1-e_1^2\frac{u_2}{u_1}\right)$$

и

$$-2i(\tilde{h}_2-h_2)=e_1f_1+\frac{u_2}{u_1}\left(-2ie_2+2iae_1-e_1^2\frac{u_2}{u_1}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln u_1,$$

что получено после несложных вычислений, использующих уравнения, которым удовлетворяют u_1 и u_2, а именно

$$u_{1x}=-i\zeta u_1+e_1u_2,\quad u_{2x}=i\zeta u_2+f_1u_1.$$

Так как $h_k=(i/2)\partial^2\ln\tau/\partial t_1\partial t_{k-1}$, то это дает нам

$$\tilde{\tau}=\tau u_1. \tag{5.180}$$

Мы также найдем

$$\tilde{\rho}=\tilde{f}_1\tilde{\tau}=-\frac{du_2}{u_1}\cdot\tau u_1=-d\tau u_2. \tag{5.181}$$

Мы вскоре покажем, что d должна быть константой; нам удобно выбрать ее равной -1. Окончательно

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}=\tilde{e}_1\tilde{\tau}&=\tau e_1\left(-2ia+2i\frac{e_2}{e_1}+e_1\frac{u_2}{u_1}\right)=\\
&=\tilde{\tau}e_1\frac{u_{1+}(\alpha)}{u_1}=\tau e_1u_{1+}(\alpha)=\sigma u_{1+}(\alpha)=\tau_+u_{1+}(\alpha).
\end{aligned} \tag{5.182}$$

Какой замечательный результат! Налицо близкое сходство между формулами (5.180) и (5.182). Разница в том, что новая σ задана в терминах старых τ, σ, ρ и u_1, u_2, которые были подвергнуты плюс-преобразованию Шлезингера. Рассматривая снова (5.181), мы найдем из (5.175)

$$\bar{\rho} = \tau u_2 = \tau \tilde{f}_1 u_{1-} = \rho u_{1-} = \tau_- u_{1-}. \tag{5.183}$$

Снова формула имеет тот же вид, что и (5.180), только она применена к (τ, σ, ρ) и (u_1, u_2), которые были подвергнуты минус-преобразованию Шлезингера.

Причина, по которой d является константой, состоит в том, что $\det \tilde{V} = -2id(\zeta - \alpha)$. Так как этот определитель к тому же является вронскианом фундаментального решения для набора уравнений $\tilde{V}_{t_k} = \tilde{Q}^{(k)}\tilde{V}$, он должен быть независим от всех времен t_k. Выбор $d = -1$ делает асимптотическое разложение для $\tilde{V}$ подобным асимптотическому разложению для V, за исключением множителя $2i(\zeta - \alpha)$ в первом столбце. Итак, в результате применения

$$R_L = \begin{pmatrix} -2i\zeta + 2i\alpha - e_1 \dfrac{u_2}{u_1}(\alpha) & e_1 \\ \dfrac{u_2}{u_1}\alpha = \tilde{f}_1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.184}$$

к V получаем V_L, при всех k удовлетворяющую $V_{Lt_k} = Q_L^{(k)} V_L$ с $Q_L^{(k)} = RQ^{(k)}R^{-1} + R_{t_k}R^{-1}$, и

$$R_L Q = Q_L R; \tag{5.185}$$

кроме того,

$$\begin{aligned} \tau_L &= \tau u_1(\alpha) \\ \rho_L &= \tau u_2(\alpha) = \tau_- u_{1-}(\alpha), \\ \sigma_L &= \sigma u_{1+}(\alpha) = \tau_+ u_{1+}(\alpha). \end{aligned} \tag{5.186}$$

Вектор u_1 обозначает тот столбец в V, для которого соответствующий столбец в V_L равен нулю при $\zeta = \alpha$. Тогда u_2 — это другой столбец. При помощи подходящего линейного преобразования мы будем, как правило, делать так, что левый столбец в V_L будет иметь нуль; отсюда и употребление индекса L.

Теперь, поскольку после применения плюс (минус) преобразования Шлезингера $\tau_+ = \sigma$ ($\tau_- = \rho$), то мы можем обозначить $\sigma_L = \tau_{+L}$ ($\rho_L = \tau_{-L}$). Тогда естественно переписать (5.186) (обозначая $\tau = \tau_0$) так:

$$\begin{aligned} \tau_{-L} &= \tau_- u_{1-}(\alpha), \\ \tau_{0L} &= \tau_0 u_1(\alpha), \\ \tau_{+L} &= \tau_+ u_{1+}(\alpha). \end{aligned} \tag{5.187}$$

Следовательно, преобразование Бэклунда, добавляющее связанное состояние при $\zeta = \alpha$, может быть выражено в простой форме, аналогичной (4.99) для семейства КдФ, для которого задача на собственные значения является скалярной (уравнение Шрёдингера), а не матричной задачей. Главная τ-функция τ_0 преобразуется в точности, как (4.99), а вспомогательные τ-функции $\tau_-(\rho)$ и $\tau_+(\sigma)$ преобразуются подобным же образом после применения соответственно минус- и плюс-преобразований Бэклунда — Шлезингера.

Несложно выразить (5.187) через операторы X_+ и X_-, действующие на прежние τ, σ, ρ, потому что нам известно, как выражается $u(\alpha)$ через эти величины. Вспомним, что каноническая форма V задавалась в (5.86) формулой

$$V \sim \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} X_-\tau & -\frac{i}{2\zeta}X_+\sigma \\ \frac{i}{2\zeta}X_-\rho & X_+\tau \end{pmatrix}. \tag{5.188}$$

V_- и V_+ имеют асимптотический вид

$$\frac{1}{\tau_-}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2i\zeta}X_-\tau_- & X_+\sigma_- \\ -\frac{1}{4\zeta^2}X_-\rho_- & 2i\zeta X_+\tau_- \end{pmatrix} \tag{5.189a}$$

и

$$\frac{1}{\tau_+}\begin{pmatrix} -2i\zeta X_-\tau_+ & -\frac{1}{4\zeta^2}X_+\sigma_+ \\ X_-\rho_+ & \frac{1}{2i\zeta}X_+\tau_+ \end{pmatrix} \tag{5.189b}$$

соответственно. Следовательно, если в качестве (u_1, u_2) взять линейную комбинацию столбцов V в (5.188), то в качестве (u_{1-}, u_{2-}) и (u_{1+}, u_{2+}) следует взять ту же комбинацию (5.189a) и (5.189b) соответственно.

Пример: построение односолитонного решения. Применим один раз это преобразование, начиная с тривиального решения $\tau = 1$, $\sigma = \rho = 0$. Пусть (u_1, u_2) — линейная комбинация из A, умноженного на первый, и B, умноженного на второй столбец матрицы V. Тогда

$$\rho_L = \tau_{-L} = -\frac{A}{2i\alpha}X_-(\alpha)\cdot\tau_- + BX_+(\alpha)\sigma_- = BX_+(\alpha)\cdot 1 \tag{5.190a}$$

(потому что $\tau_- = \rho$ есть нуль и $\sigma_- = \tau = 1$),

$$\tau_L = \tau_{0L} = AX_-(\alpha)\cdot 1 \tag{5.190b}$$

и

$$\sigma_L = \tau_{+L} = 0. \tag{5.190c}$$

Следовательно, $\rho_L = B\exp\left(i\sum \alpha^k t_k\right)$, $\tau_L = A\exp\left(-i\sum \alpha^k t_k\right)$, $\sigma_L = 0$. Это соответствует решению

$$e_1 = 0, \quad f_1 = \frac{B}{A}\exp\left(2i\sum \alpha^k t_k\right) \tag{5.191}$$

иерархии уравнений.

Точно так же можно создать нуль определителя RV в точке $\zeta = \bar{\alpha}$, если применить

$$R_R = \begin{pmatrix} -1 & \tilde{e}_1 = \frac{u_1}{u_2}(\bar{\alpha}) \\ f_1 & 2i\zeta - 2i\bar{\alpha} - f_1\tilde{e}_1 \end{pmatrix} \tag{5.192}$$

к V. Соответствующие величины суть

$$\begin{aligned} \tau_R &= \tau_{0R} = \tau_0 u_2(\bar{\alpha}), \\ \rho_R &= \tau_{-R} = \tau_- u_{2-}(\bar{\alpha}), \\ \sigma_R &= \tau_{+R} = \tau_+ u_{2+}(\bar{\alpha}). \end{aligned} \tag{5.193}$$

Снова я напоминаю читателю, что если мы возьмем в качестве (u_1, u_2) линейную комбинацию столбцов канонической матрицы V, заданной (5.188), то в качестве u_- и u_+ следует взять ту же линейную комбинацию столбцов (5.189).

Теперь применим (5.193), где исходные τ_-, τ_0, $\tau_+(\rho, \zeta, \sigma)$ заданы (5.190). Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} &X_+(\zeta)\cdot X_+(\zeta')f(t_k) = \\ &= \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{1/2}\exp\left(i\sum(\zeta^k + \zeta'^k)t_k\right) f\left(t_k + \frac{i}{2k\zeta^k} + \frac{i}{2k\zeta'^k}\right), \\ &X_+(\zeta)\cdot X_-(\zeta')f(t_k) = \\ &= \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{1/2}\exp\left(i\sum(\zeta^k - \zeta'^k)t_k\right) f\left(t_k + \frac{i}{2k\zeta^k} - \frac{i}{2k\zeta'^k}\right), \end{aligned} \tag{5.194}$$

где мы использовали тождество

$$\exp\left(\pm\sum_1^\infty \frac{\zeta'^k}{2k\zeta^k}\right) = \left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{\mp 1/2}. \tag{5.195}$$

Мы возьмем в качестве u_2 в (5.193) следующую линейную комбинацию: C, умноженное на первый, плюс D, умноженное на

второй столбец матрицы V. Находим (мы опускаем индекс R у τ, σ, ρ):

$$\tau = \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{1/2} DA \exp\left(-i \sum (\alpha^k - \bar{\alpha}^k) t_k\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{i}{2\bar{\alpha}} \frac{CB}{DA} \exp\left(2i \sum (\alpha^k - \bar{\alpha}^k) t_k\right)\right),$$
$$\sigma = \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{1/2} CA \exp\left(-i \sum (\alpha^k - \bar{\alpha}^k) t_k\right) \exp\left(-2i \sum \bar{\alpha}^k t_k\right),$$
$$\rho = \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{1/2} 2i\bar{\alpha} BD \exp\left(-i \sum (\alpha^k - \bar{\alpha}^k) t_k\right) \exp\left(2i \sum \alpha^k t_k\right). \tag{5.196}$$

Это односолитонное решение иерархии АКНС. Если мы рассмотрим специальный случай $r = -q^*$, то $\bar{\alpha} = \alpha^*$, и при выборе

$$\frac{C}{D} = 2\alpha^* e^{2\eta x_0} e^{i\varphi}, \quad \frac{B}{A} = -ie^{2\eta x_0} e^{-i\varphi}$$

уравнения таковы:

$$e_1 = -2\eta \operatorname{sech}\left(i \sum (\alpha^k - \alpha^{*k}) t_k + 2\eta x_0\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-i \sum (\alpha_k + \alpha_k^*) t_k + i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right\},$$
$$f_1 = 2\eta \operatorname{sech}\left(i \sum (\alpha^k - \alpha^{*k}) t_k + 2\eta x_0\right) \times$$
$$\times \exp\left\{i \sum (\alpha_k + \alpha_k^*) t_k - i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}. \tag{5.197}$$

Читателю следует также проверить, что формулы (5.196) эквивалентны формулам, которые получаются из метода Хироты (5.70). Они не совпадают в точности, но отличаются лишь экспоненциальными множителями с линейной по t_k фазой, которые не играют роли ни при вычислении отношений σ/τ, ни при вычислении вторых логарифмических производных.

Заметьте, что в точности, как в случае КдФ (см. разд. 4f), сдвиги фазы появляются в виде множителей при последовательном применении вершинных операторов.

Итак, в результате калибровочное преобразование

$$V \to R_R(\bar{\alpha}_{\bar{N}}) \ldots R_R(\bar{\alpha}_1) R_L(\alpha_N) \ldots R_L(\alpha_1) V$$

добавляет к решению иерархии АКНС связанное состояние $(N, \bar{N})$, которое при $\bar{N} = N$ является N-солитонным состоянием.

В качестве заключительного замечания в этом разделе исследуем действие повторных преобразований Бэклунда — Шлезингера на точное решение в виде связанного состояния $(N, \bar{N})$. Предположим, мы нормировали решение V так, что оно записывается в форме (5.100а).

В частности, ζ^{-1} во второй компоненте вектора $\mathbf{V}_2$ и в первой компоненте вектора $\mathbf{V}_1$ равны соответственно $(i/2)f_1$ и $-(i/2)e_1$, где последние как функции от x имеют форму решения, отвечающего связанному состоянию $(N, \bar{N})$. Применим R_+, плюс-преобразование Шлезингера. Но из определения плюс-преобразования Шлезингера мы знаем, что его действие состоит в изменении монодромии V в точке $\zeta = \infty$ на множитель

$$\begin{pmatrix} -2i\zeta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2i\zeta} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что новое V имеет вид $(-2i\zeta\mathbf{V}_1, (1/2i\zeta)\mathbf{V}_2)$, где $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ заданы (5.100а) с векторами $\mathbf{C}_{1k}$, $\mathbf{C}_{2k}$, заданными точно теми же выражениями, как и прежде, где ряды e, f, h заменены новыми рядами $\tilde{e}$, $\tilde{f}$, $\tilde{h}$, полученными после преобразования Шлезингера. Читатель может проверить, например, что происходит с вектором

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2\zeta}\int^x e_1 f_1 + \ldots + \frac{T_1}{\zeta^N} \\ \frac{i}{2\zeta} f_1 + \ldots + \frac{T_2}{\zeta^N} \end{pmatrix}$$

при умножении на

$$R_+ = \begin{pmatrix} -2i\zeta - \frac{\partial}{\partial t_1}\ln e_1 & e_1 \\ \frac{1}{e_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$R_+\mathbf{V}_1 = -2i\zeta\begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2\zeta}\int^x e_1 f_1 - \frac{i}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial t_1}\ln e_1 + \ldots + \frac{T_1'}{\zeta^{N+1}} \\ \frac{i}{2\zeta}\frac{1}{e_1} + \ldots + \frac{T_2'}{\zeta^{N+1}} \end{pmatrix}.$$

Вспомните, что $\tilde{f}_1 = 1/e_1$, и проверьте, что

$$\frac{i}{2\zeta}\int^x e_1 f_1 - \frac{i}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial t_1}\ln e_1 = \frac{i}{2\zeta}\int^x \tilde{e}_1\tilde{f}_1 +$$
$$+\frac{1}{\zeta}\int(\tilde{h}_2 - h_2)\,dx - \frac{i}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial t_1}\ln e_1 = \frac{i}{2\zeta}\int^x \tilde{e}_1\tilde{f}_1,$$

используя $\tilde{h}_2 - h_2 = (i/2)(\partial^2/\partial t_1^2)\ln e_1$ (см. непронумерованное уравнение после (5.165)). С другой стороны,

$$R_+\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix} -\frac{i}{2\zeta}\tilde{e}_1 + \ldots + \frac{S_1}{\zeta^{\bar{N}-1}} \\ 1 + \ldots + \frac{S_2}{\zeta^{\bar{N}-1}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому новая матрица V соответствует решению $\tilde{e}_1$, $\tilde{f}_1$, относящемуся к связанному состоянию $(N+1, \bar{N}-1)$. После $\bar{N}$ применений R_+ второй столбец новой V имеет второй столбец $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, что означает, что новое e_1, которое мы называем $q_{\bar{N}}$ (первое e_1 — это q, второе $\tilde{e}_1 = q_1$ и так далее), есть нуль. Но из (5.161) мы знаем, что последовательное применение $\bar{N}$ преобразований R_+ дает решение для цепочки Тоды между точкой, помеченной нулем, и точкой, которую мы называем $\bar{N}$.

Следовательно, если q — это решение, отвечающее связанному состоянию $(N, \bar{N})$ иерархии АКНС, то движение помеченной нулем точки в цепочке задается пространственной формой решения q. Далее, точка, помеченная $\bar{N}$, будет иметь решение $q_{\bar{N}} = 0$, которое означает, что $u_{\bar{N}}$, определенное с помощью $\exp u_{\bar{N}} = q_{\bar{N}}$, равно $-\infty$. Поэтому последовательное применение плюс-преобразования Шлезингера к связанному состоянию $(N, \bar{N})$ дает последовательность q_r, $0 \leqslant r \leqslant \bar{N}$, $q_0 = q$, причем форма последнего решения как функция x описывает движение во времени точек с номерами от нуля до $\bar{N}$ в конечной цепочке Тоды со свободными концами.

Набор дифференциально-разностных уравнений, ассоциированных с $\mathrm{sl}(n+1, C)$-потоком посредством преобразования Шлезингера, еще не вычислен.

Мы опять вернемся к теме преобразований Бэклунда в конце разд. 5j. Там я покажу, как они соотносятся со схемой «одевания» Захарова — Шабата и с методом редукции.

5h. Замечание о градуировке. В общем случае алгебра Каца — Муди $A_1^{(1)}$ может быть определена заданием шести порож-

дающих элементов p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1 (для алгебры, ассоциированной с $\widetilde{\mathrm{sl}}(n+1, C)$, нам бы потребовалось $3(n+1)$ таких элементов) и их коммутаторов следующим образом:

$$\begin{aligned}
[q_i, r_j] &= \delta_{ij} p_j, \\
[p_i, p_j] &= 0, \\
[p_i, q_j] &= A_{ij} q_j, \\
[p_i, r_j] &= -A_{ij} r_j, \\
\mathrm{ad}_{q_i}^{1-A_{ij}} q_j &= \mathrm{ad}_{r_i}^{1-A_{ij}} r_j = 0,
\end{aligned} \tag{5.198}$$

где A_{ij} — это элементы обобщенной матрицы Картана $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ алгебры $A_1^{(1)}$, по повторяющимся индексам нет суммирования. Выражение $\mathrm{ad}_{q_i}^{1-A_{ij}} q_j$ означает $[q_i, [q_i, \ldots, [q_i, q_j]]]$, где коммутатор применяется $1-A_{ij}$ раз (в нашем случае три раза), т. е. $[q_i, [q_i, [q_i, q_j]]] = 0$, $i \neq j$. Например, рассмотрим отождествление

$$\begin{array}{cccccc}
p_0 & p_1 & q_0 & q_1 & r_0 & r_1 \\
-H+Z & H & F\zeta & E & E\zeta^{-1} & F.
\end{array} \tag{5.199}$$

Правила коммутирования (5.198) согласованы с правилами, установленными для $X_j = h_j F_j + e_j E_j + f_j F_j$ при $H_j = \zeta^{-j} H$, $E_j = \zeta^{-j} E$, $F_j = \zeta^{-j} F$. Заметьте, что элемент $p_0 + p_1 = Z$ коммутирует со всеми другими; он называется центром. Обратите внимание, как порождаются новые элементы; H_1 или ζH получается с помощью $[q_1, q_0]$; F_2 или $\zeta^{-2} F$ с помощью $-\frac{1}{2}[[q_1, q_0], q_0]$ и так далее. Читатель может проверить, что последнее условие из (5.198) удовлетворено.

Когда центр Z добавлен к базису петель $\{H_j, E_j, F_j\}_{-\infty}^{\infty}$, новый набор называется *центральным расширением* алгебры петель $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$.

Каждому порождающему элементу мы хотим приписать вес W так, чтобы это согласовывалось с правилами коммутации (5.198). Например, мы могли бы сделать это следующим способом:

$$\begin{array}{cccccc}
p_0 & p_1 & q_0 & q_1 & r_0 & r_1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array} \tag{5.200a}$$

Приняв правило, что вес коммутатора есть сумма весов входящих в него элементов, мы замечаем, что приписывание весов — действительно непротиворечивая процедура; например, $W([q_1, r_1]) = 0 = W(p_1)$. Сравнивая отождествление (5.199) с

(5.200a), получаем выражение для эквивалентного приписывания весов в случае нашего базиса:

$$\begin{array}{cccc} H & E & F & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{5.200b}$$

Заметьте, что каждое из слагаемых

$$h_j H_j + e_j E_j + f_j F_j$$

имеет равный вес. Это называется однородной градуировкой.

Но есть другие возможности. Рассмотрим приписывание весов

$$\begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 & r_0 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \tag{5.201a}$$

которое может быть достигнуто тем же отождествлением (5.199)

$$\begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 & r_0 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -H+Z & H & F\zeta & E & E\zeta^{-1} & F \end{array} \tag{5.201b}$$

Но теперь мы приписываем веса

$$W(H)=0, \quad W(E)=1, \quad W(F)=-1, \quad W(\zeta)=2 \tag{5.201c}$$

H, E, F и градуирующему параметру ζ.

Как связаны две градуировки? Рассмотрим отображение, действующее на элемент общего вида $X(\zeta)=\sum_{\infty}^{-\infty}(h_j H + e_j E + f_j F)\zeta^{-j}$ алгебры $\tilde{\mathrm{sl}}(2, C)$,

$$X(\zeta) \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} X(\lambda^2) \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \tag{5.202a}$$

в котором мы отождествляем коэффициенты при h_j, e_j, f_j:

$$H\zeta^{-j} \to H\lambda^{-2j}, \tag{5.202b}$$

$$E\zeta^{-j} \to E\lambda^{-2j+1}, \tag{5.202c}$$

$$F\zeta^{-j} \to F\lambda^{-2j-1}. \tag{5.202d}$$

Используем это отождествление, чтобы приписать новые веса H, E, F, ζ в левой части при условии, что в правой части веса таковы: $W(H)=W(E)=W(F)=0$, $W(\lambda)=1$. Ясно, что веса должны совпадать с (5.201c). И не удивительно, что существует изоморфизм между двумя элементами $\tilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, даже несмотря

на то, что базисные векторы и градуирующий параметр имеют другие веса.

Но как это отличие может повлиять на динамику? Дело в том, что разные градуировки порождают различные разложения алгебры. В первой градуировке члены h_0H, e_0E, f_0F все имеют один вес, именно нуль, и поэтому приписаны к N. Они также принадлежали пространству $N^* = K^\perp$, которое было фазовым пространством. Во второй градуировке члены e_0E и f_0F принадлежат разным подалгебрам, первый имеет вес единица и принадлежит N, в то время как последний имеет вес —1 и поэтому приписан к K. Теперь вспомним, что это в точности разложение, использованное в третьем примере в конце разд. 5c, а именно:

$$N = \sum_{-1}^{-M} (h_jH + e_jE + f_jF)\zeta^{-j} + h_0H + e_0E, \quad M \text{ произвольно},$$

$$K = \sum_{1}^{\infty} (h_jH + e_jE + f_jF)\zeta^{-j} + f_0F.$$

Заметим, что все члены в N имеют веса, большие или равные нулю; члены в K имеют веса, меньшие или равные —1. Элемент общего вида, принадлежащий фазовому пространству $K^\perp$,

$$Q = h_0H + f_0F + \sum_{1}^{\infty} (h_jH + e_jE + f_jF)\zeta^{-j},$$

может быть записан в более подходящей форме

$$Q = X_1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_jZ_{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(-f_j + e_{j+1})X_{2j+1} + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(f_j + e_{j+1})Y_{2j+1}. \tag{5.203}$$

В (5.203)

$$Z_{2j} = H\zeta^{-j},$$
$$X_{2j+1} = \left(-F + \frac{E}{\zeta}\right)\zeta^{-j},$$
$$Y_{2j+1} = \left(F + \frac{E}{\zeta}\right)\zeta^{-j},$$

а нижние индексы обозначают обратные веса каждого члена. Читатель также вспомнит, что в разд. 5c(iii) мы брали $h_0 = 0$, $-f_0 = e_1 = 1$, и этот выбор был согласован с введением временных потоков.

В то время как первая градуировка естественно приводит к семейству нелинейных уравнений Шрёдингера (НУШ), вторая градуировка столь же естественно приводит к семействам КдФ и мКдФ. Я сознательно употребляю слово «естественно». Семейство НУШ, конечно, содержит в себе семейства КдФ и мКдФ, но, чтобы их выделить, надо налагать ограничения на фазовое пространство ($f_1 = -1$ для КдФ или $f_1 = \pm e_1$ для мКдФ). Во второй градуировке эти уравнения появляются без наложения каких-либо связей. Единственная наложенная нами связь (которая выглядит несколько произвольно) — это выбор $h_0 = 0$, аналогичный выбору $h_0 = -i$, $e_0 = f_0 = 0$ в уравнениях, связанных с первой градуировкой. Этот сравнительно небольшой произвол может быть устранен, если использовать фазовое пространство $\varepsilon + K^{\perp}$ вместо $K^{\perp}$, где ε — отмеченный элемент, выбранный (с некоторыми ограничениями) в двойственном к K пространстве K^*. В разделах 5i, 5j мы еще встретимся с этой идеей.

В качестве заключительного замечания к этому разделу мы упомянем, что все независимые способы градуировки алгебры петель $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ определяются автоморфизмами $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ конечного порядка. Автоморфизм σ конечного порядка есть отображение на алгебре, сохраняющее скобку Ли, т. е. $[\sigma(X), \sigma(Y)] = \sigma([X, Y])$, $X, Y \in \widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, такое что σ^m равняется единице при некотором целом m. Все такие отображения суть преобразования подобия $\sigma(X) = aXa^{-1}$ для некоторого a в $\mathrm{sl}(2, C)$, $a^m = I$. Для $\mathrm{sl}(2, C)$ заметьте, что при $a = H$ σ действует как линейное преобразование на пространстве H, E, F и разбивает его на два подпространства $\sigma(H) = H$, $\sigma(E, F) = (-E, -F)$. Заметьте, что в (5.203) элементы H и E, F появляются как соответственно четные и нечетные степени взвешивания.

5i. Вторая гамильтонова структура. Я начну с напоминания читателю, что гамильтонова структура, введенная в начале разд. 5c, и вариационная гамильтонова структура, введенная в разд. 3b и с помощью (5.56), (5.57) в конце разд. 5c, совершенно различны. Вспомните вариационную гамильтонову структуру, введенную в разд. 3b для иерархии КдФ, а именно

$$q_{t_{2n+1}} = N \frac{\delta H_{2n+1}}{\delta q} = -\frac{1}{4} M \frac{\delta H_{2n-1}}{\delta q}, \tag{5.204}$$

где N и M задаются (3.6). Две симплектические структуры N и M локальны (хотя также вырождены) в том смысле, что применение любой из них к элементу фазового пространства (т. е. к элементу дифференциальной алгебры, содержащей q и все

производные q по x) не выводит за пределы этого фазового пространства. С другой стороны, вариационная гамильтонова структура для иерархии АКНС, оказывается, не допускает введения двух локальных структур. В разд. 5d мы показали, что ($q = e_1$, $r = f_1$)

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} = -2iL^n \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix}, \tag{5.205}$$

и в [75] было показано, что это может быть записано как $J \nabla H_n$, где

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta q}, \frac{\delta}{\delta r}\right), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и H_n является интегралом движения, пропорциональным коэффициенту при ζ^{-n} в асимптотическом разложении $\ln a(\zeta)$ вблизи $\zeta = \infty$ (см. разд. 5f(i)). Оператор L был выписан в разд. 5d, и хотя (5.205) можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} = JL\nabla H_{n-1} = JL^2\nabla H_{n-2} \quad \text{и т. д.},$$

но симплектические операторы JL, JL^2 и т. д. более не являются локальными, они выводят нас за пределы исходного фазового пространства, которое вариационной гамильтоновой структуры состоит из q, r и производных всех порядков по x.

Поэтому интересно, что гамильтоново описание, связанное с алгебраическим подходом разд. 5c, вполне естественно позволяет ввести две локальные структуры. Вторую структуру мы получим, если определим форму Киллинга или внутреннее произведение $\langle X, Y\rangle$ на G как коэффициент при ζ^{-1}, а не при ζ^0, в выражении для следа произведения XY. Эту форму мы будем обозначать $\langle X, Y\rangle_{-1}$. Если мы теперь чуточку подумаем, то поймем, что $K^\perp = K$ (и так же $N^\perp = N$). Как и раньше, существует естественная гамильтонова структура на $K^\perp$, которая переносится также на $K^\perp + \varepsilon$, где ε — фиксированный элемент G. Мы выбираем элемент ε таким образом, чтобы он содержался в ортогональном дополнении как к $[K, K]$, так и к $[N, N]$. Он несомненно принадлежит к последнему, поскольку написав $\varepsilon + K^\perp$, мы уже указываем, что ε не принадлежит $K^\perp$. Поэтому он должен принадлежать $N^\perp$ и ортогональному дополнению к $[N, N]$. Это может быть, только если $\varepsilon = X\zeta^0$, так как $[K, K]$ содержит лишь члены ζ^p, $p \leqslant -2$, а $[N, N]$ содержит лишь члены ζ^p, $p \geqslant 0$; (новое) внутреннее произведение ε с тем и другим равно нулю.

Если ε удовлетворяет этому условию и если Φ — это ad-инвариантная функция на G, то гамильтоново векторное поле задается с помощью

$$x_\Phi(X+\varepsilon)=[\pi_K\nabla\Phi(X+\varepsilon),\ X+\varepsilon]. \tag{5.206}$$

Более того, если Φ и Ψ — две ad-инвариантные функции на G, то они находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона на $K^\perp+\varepsilon$. Для наших целей мы берем

$$\varepsilon=-iH^-;\quad \Phi_k=-\frac{1}{2}\langle S^kX,\ X\rangle_0=-\frac{1}{2}\langle S^{k-1}X,\ X\rangle_{-1}, \tag{5.207}$$

где индексы 0 и —1 обозначают, какое внутреннее произведение мы выбираем. Тогда Φ_{k+1} — это гамильтониан, порождающий поток вдоль t_k. Тогда для $P\in K^\perp=K$ потоки задаются с помощью

$$\begin{aligned}P_{t_k}&=-[\pi_K\nabla\Phi_{k+1}(\varepsilon+P),\ \varepsilon+P]=\\&=[\pi_NS^k(\varepsilon+P),\ \varepsilon+P]=[Q^{(k)},\ \varepsilon+P].\end{aligned} \tag{5.208}$$

Это в точности те же уравнения Лакса, что и (5.52), если $\varepsilon+P=Q$.

Основные различия между двумя подходами, связанными с двумя гамильтоновыми структурами, таковы: (i) гамильтонианы сдвинуты; (ii) элемент ζ^0, который постоянен вследствие характера действия потоков в первом подходе, фиксирован раз и навсегда во втором. В нашей первой градуировке $\varepsilon=-iH$, тогда как во второй градуировке, введенной в разд. 5h, $\varepsilon=-F+E/\zeta$. Выбор второй гамильтоновой структуры позволяет избежать того, что выглядит как довольно произвольный выбор, вроде $e_0=f_0=0$ в разд. 5c и $h_0=0$ в разд. 5h. Тем не менее хочу подчеркнуть, что между этими двумя структурами нет существенной разницы, нет также значительных преимуществ использования одной структуры вместо другой.

В следующем разделе, в котором мы обсудим процедуру редукции, мы пользуемся первой структурой, где $K^\perp=N^*\left(X+\sum_0^\infty X_j\zeta^j\right)$, $K^*=N^\perp\left(X=\sum_1^\infty X_j\zeta^j\right)$ и элемент ε, принадлежащий K^*, есть $-iH\zeta$. Характерным элементом нашего фазового пространства теперь будет использованная ранее матрица Q, умноженная на ζ:

$$-iH\zeta+Q_1+\frac{Q_2}{\zeta}+\ \dots\ =Q\zeta,$$

где Q, Q_1, Q_2 и т. д. в точности такие, как раньше.

5j. Метод обратной задачи и задача Римана — Гильберта, алгебраический подход. Я надеюсь, что к настоящему моменту вы уже убедились, что особые свойства, которыми наделены интегрируемые системы, являются по своему характеру алгебраическими. Поэтому уместно спросить, существует ли алгебраическая аналогия метода обратной задачи или задачи Римана — Гильберта. Она существует. Основная идея в том, что уравнение Лакса (5.52) является редукцией более простого потока на большем многообразии, причем редукция осуществляется при помощи интегралов движения более простого потока и соответствующих им симметрий с целью получить меньшее фазовое пространство. За меньшее фазовое пространство приходится платить тем, что простой поток уже не выглядит столь простым.

В разд. 4c я отмечал, что каждой симметрии гамильтоновой системы отвечает интеграл движения (теорема Нётер) и наоборот[1]). Хорошо известные симметрии, вроде инвариантности гамильтониана относительно трансляций или вращений, приводят к законам сохранения импульса и момента количества движения. Группа симметрий соответствует векторам импульса и момента количества движения, компоненты которых являются интегралами движения и которые находятся в инволюции друг с другом относительно скобки Пуассона на динамическом многообразии. Теорема такова: если существует n независимых симметрий и, следовательно, n интегралов движения в инволюции, то $2n$ из $2m$ переменных фазового пространства можно исключить. Если $n=m$, то фазовое пространство редуцируется до одной точки и движение полностью интегрируемо. Такая система называется *полностью интегрируемой.* Эта классическая теорема была исследована в более общей постановке Марсденом и Вейнстейном [88], а процесс исключения переменных с помощью симметрий назван редукцией. Грубо говоря, метод состоит из нескольких шагов. Чтобы получить более полное представление, читателю следует почитать книги Абрахама и Марсдена [84], В. И. Арнольда [105] и новую книгу Марсдена, Ратью, Вейнстейна, Шмидта и Спенсера.

Пусть нам дано симплектическое многообразие P с группой симметрий $\bar{G}$, действующей на P каноническими преобразованиями, т. е. действие $\bar{G}$ сохраняет 2-форму ω на P. Пусть G — алгебра Ли группы $\bar{G}$, а G^* — пространство, двойственное к G.

---

[1]) Речь идет о симметриях, сохраняющих гамильтониан. Если же понимать симметрию как уравнение, коммутирующее с исходным, то соответствующих интегралов движения может и не существовать. Примером может служить преобразование подобия. — *Прим. перев.*

Тогда *отображение моментов* J, приписанное к точке многообразия P, принимает значение в G^*; а именно, J есть вектор, принадлежащий G^*, перечисляющий все интегралы движения. Набор уровней $J^{-1}(\mu)$, т. е. набор точек p в P, для которых $J(p) = \mu$, является многообразием и инвариантен относительно коприсоединенного действия подгруппы изотропии $\bar{G}_\mu$ группы $\bar{G}$; а именно, $\bar{G}_\mu$ — это набор $g \in \bar{G}$, такой что (в матричном представлении) $g\mu g^{-1} = \mu$. Тогда теорема Марсдена — Вейнстейна утверждает, что факторпространство $P_\mu = J^{-1}(\mu)/\bar{G}_\mu$ — это симплектическое многообразие со своей симплектической формой ω_μ, индуцированной ω. P_μ — это редуцированное фазовое пространство. Кроме того, если Φ — функция Гамильтона на P, инвариантная относительно действия $\bar{G}$, то она индуцирует гамильтониан Φ_μ на P_μ. Если F_t — поток гамильтонова векторного поля, соответствующего Φ, то из-за Ad*-эквивариантности J (Ad*-эквивариантность означает, что $J(g \cdot p) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} J(p) = g\mu g^{-1}$, где $g \cdot p$ обозначает действие $\bar{G}$ на P) набор уровней $J^{-1}(\mu)$ инвариантен относительно F_t и F_t индуцирует поток F_t^μ симплектических диффеоморфизмов на редуцированном многообразии P_μ. Вторая часть теоремы Марсдена — Вейнстейна утверждает, что F_t^μ является потоком гамильтонова векторного поля, соответствующего Φ_μ.

Мы будем использовать также второй тип редукции, пуассонову редукцию. Если задано симплектическое многообразие P с канонической группой симметрий $\bar{G}$, то фактормногообразие $P/\bar{G}$ имеет естественную скобку Пуассона, индуцированную скобкой Пуассона на P. Более того, гамильтоновы векторные поля, соответствующие Φ на P и $\hat{\Phi}$ на $P/\bar{G}$, $\hat{\Phi}([p]) = \Phi(p)$ ($[p]$ — это класс $p \in P$ на $P/\bar{G}$), связаны проектирующим отображением $P \to P/\bar{G}$, которое, если оно каноническое, сохраняет скобки Пуассона.

В нашем случае мы берем в качестве исходного многообразия $T^*\bar{G}$, кокасательное расслоение группы $\bar{G}$, т. е. группы Ли алгебры петель $G = \widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. (Под этим я имею в виду, что каждый элемент $\bar{G}$ является экспонентой $\exp t\xi$ некоторого элемента ξ в алгебре. Последующие рассмотрения, связанные с преобразованиями Бэклунда — Шлезингера из разд. 5g и обсуждаемые в резюме этого раздела, наводят на мысль расширить группу $\bar{G}$, включив в нее некоторые дискретные симметрии в дополнение к непрерывным, наподобие включения отражения при построении $O(3)$ из $so(3)$. Но настоящее определение удовлетворит наши насущные цели.) Многообразие $T^*\bar{G}$ является, естественно, симплектическим и состоит из базы $\bar{G}$, над каждой точкой g которой висит слой, т. е. пространство, двойственное

к касательному пространству в точке g. На языке классической механики, $\bar{G}$ — это набор координат q, касательное пространство в точке g — это набор скоростей $\dot{q}$, а слой — это пространство импульсов p. Всякий элемент g группы $\bar{G}$ может быть единственным образом разложен в произведение (аналог задачи Римана — Гильберта)

$$g = k^{-1} n, \tag{5.209}$$

где k и n — экспоненты от элементов, принадлежащих подалгебрам K и N соответственно. Запись левого множителя в виде обратного выбрана из соображений удобства. Группой симметрий, с помощью которой мы осуществляем редукцию Марсдена — Вейнстейна на фазовом пространстве $T^*\bar{G}$, будет $\bar{K}$ — подгруппа, соответствующая K. Редуцированным многообразием будет $\bar{N} \times (\varepsilon + N^*)$, где ε — это единственный отмеченный элемент в K^*, который вскоре будет указан. Тогда тривиальное применение пуассоновой редукции с помощью $\bar{N}$ редуцирует наше многообразие до $\varepsilon + N^*$, фазового пространства разд. 5с. Временные потоки в $\varepsilon + N^*$, порождаемые определенными в (5.48) гамильтонианами Φ_j, могут быть «проинтегрированы» и дают

$$Q(t_j) = k(t_j)(-iH)k^{-1}(t_j), \tag{5.210}$$

где K^{-1} — левый множитель в разложении элемента $g(t_j)$. Мы увидим, что $g(t_j)$ очень просто эволюционируют во временах,

$$g(t_j) = \exp\left(-i \sum \zeta^j t_j H\right) g_0, \tag{5.211}$$

где $g_0 = k^{-1}(0)$ и $Q(0) = k(0)(-iH)k^{-1}(0)$.

Мы проделаем эту процедуру за пять шагов. Во-первых, мы тривиализуем расслоение $T^*\bar{G}$, представив его как $\bar{G} \times G^*$, и посредством этого наделим его координатами. Во-вторых, мы возьмем наши исходные гамильтонианы Φ_j из разд. 5с, которые Ad^*-инвариантны на G^*, и расширим их определение на все расслоение $T^*\bar{G}$. Мы затем используем естественную симплектическую структуру на $T^*\bar{G}$, чтобы определить поток, порожденный Φ_j. Поток на $T^*\bar{G}$ будет очень походить на поток, действующий в силу (5.98) на матрицу рассеяния. В-третьих, мы найдем поток на редуцированном многообразии $\bar{N} \times (\varepsilon + N^*)$ ($\bar{N}$ — это подгруппа $\bar{G}$, ассоциированная с подалгеброй N, а N^* двойственно к N) с канонической симплектической структурой. Тогда пуассонова редукция к $\varepsilon + N^*$ тривиальна. Типичный элемент второй компоненты в $\bar{N} \times (\varepsilon + N^*)$, который есть матрица Q (см. (5.45)), помноженная на ζ, будет эволюционировать согласно (5.210) и удовлетворять уравнению Лакса (5.52). В-четвертых, мы отождествим $k(t_j)$ из (5.210), обратную степень левого мно-

жителя элемента $g(t_j)$, с матрицей $\hat{V}(t_j)$, определенной в разд. 5е.

Наконец, на пятом шаге мы обсудим, как решить уравнение Лакса (5.52) алгебраически. Наиболее важный шаг, как мы увидим, — это разложение группового элемента g в $k^{-1}n$. Это разложение и есть алгебраическая аналогия задачи Римана — Гильберта, которая, как вы помните, явилась главным шагом при построении фундаментальной матрицы решений Φ из данных рассеяния в разд. 5f(i). Найдя k, мы получим решение уравнений Лакса. Из-за того что эти шаги требуют введения целого ряда новых математических идей и обозначений, я попытаюсь обсудить результаты на языке, уже знакомом читателям этой книги. Читателя, который заинтересуется дальнейшим изучением деталей, я отсылаю к четвертой статье из нашей серии «Алгебра Каца — Муди и солитонные уравнения» [38].

Я хочу отметить, что замечание о том, что потоки АКНС являются редукциями более простых потоков на больших многообразиях, не является введенной нами новинкой. Я сошлюсь на статьи Реймана и Семенова-Тян-Шанского [106]; эти идеи также весьма близки к идеям, которые использовали Костант, Каждан, Стернберг [100], Мозер [107] в связи с цепочкой Тоды, системами Калоджеро и Мозера — Сюзерленда; они также тесно связаны со схемой одевания Захарова — Шабата [108]. Мы (Флашка, Ратью и автор) впервые включили в общую картину потоки, которые соответствуют отрицательным временам t_k, $k<0$ (потоки уравнения sin-Гордон). Я буду это обсуждать в следующем разделе. А сейчас я хочу поподробнее разработать шаги от первого до пятого.

Шаг 1. Мы осуществляем (правую) тривиализацию расслоения $T^*\bar{G}$, отождествляя его с $\bar{G}\times G^*$, где G^* — пространство, двойственное к алгебре Ли $G=T_e\bar{G}$, т. е. к пространству, касательному к $\bar{G}$ в единице этой группы. Отождествление производится следующим образом. Берем кривую $e^{t\xi}$, $\xi\in G$, проходящую через единицу группы $\bar{G}$, и берем ее касательный вектор $(d/dt)e^{t\xi}|_{t=0}$ в этой точке. Перенесём касательный вектор с помощью правого действия g и назовем этот элемент $T_eR_g\xi$. В матричном представлении, когда $\xi\in \mathrm{sl}(2, C)$ и определитель g равняется единице, $T_eR_g\xi$ — это просто ξg. Затем мы задаем для элементов $\mu_g\in T^*\bar{G}$, лежащих в слое над g, координаты (g, μ), $\mu\in G^*$, где

$$\langle\mu, \xi\rangle=\langle\mu_g, T_eR_g\xi\rangle, \tag{5.212}$$

а $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — это спаривание между G и G^*. Правая часть может быть записана как $\langle T^*R_g\mu_g, \xi\rangle$, откуда $\mu=T^*R_g\mu_g$; т. е. μ явля-

ется элементом G^*, слоя в единице, который под действием правого переноса с помощью g переносит (e, μ) в μ_g.

Шаг 2. Пусть $\Phi(\mu)$ — Ad^*-инвариантная функция на G^*, т. е. $\Phi(g^{-1}\mu g) = \Phi(\mu)$. Как вы помните, в разд. 5с мы очень скоро отождествили G^* с G, ибо на самом G можно было ввести внутреннее произведение. В этом случае $\Phi(X)$ была Ad^*-инвариантной на G функцией, если $\Phi(e^{tY}Xe^{-tY}) = \Phi(X)$ для всех $X, Y \in G$ и вещественных t. Это условие выражалось как $[\nabla\Phi(X), X] = 0$. Здесь такое же обозначение расшифровывается так: Φ — это Ad^*-инвариантная функция на G^*, если $\Phi(e^{-tY}Xe^{tY}) = \Phi(X)$ для всех $X \in G^*$, $Y \in G$. Мы расширяем $\Phi(\mu)$ на $T^*\bar{G}$ следующим образом:

$$\bar{\Phi}(\mu_g) = \Phi(\mu). \tag{5.213}$$

Теперь можно работать с потоком, заданным на $T^*\bar{G}$; детали даны в [38, IV]. Это просто прямолинейное движение

$$\dot{\mu} = 0, \tag{5.214a}$$

$$\dot{g} = T_e R_g \frac{\delta\Phi}{\delta\mu}, \tag{5.214b}$$

которое в матричных обозначениях записывается в виде

$$\dot{g} = \frac{\delta\Phi}{\delta\mu} g. \tag{5.214c}$$

Здесь $\delta\Phi/\delta\mu$, элемент из G, — это градиент Φ по μ, т. е. $D\Phi(\mu) = \langle\delta\Phi/\delta\mu, \mu\rangle$, где $D\Phi(\mu)$ — производная Фреше Φ по μ. Интегрируя (5.214), получим

$$\mu = \mu_0, \tag{5.215a}$$

$$g = \exp\left(t\frac{\delta\Phi}{\delta\mu_0}\right) g_0. \tag{5.215b}$$

Обратите внимание на связь с временным потоком для переменных действие — угол. Переменные действия (новые импульсы) есть интегралы движения, тогда как аргументы новых координат, угловые переменные, меняются линейно по времени. Это в точности подобно поведению данных рассеяния в (5.98). Без потери общности можно взять $-iH\zeta$ в качестве матричного представления для μ_0. Далее, если $\Phi(\mu)$ — это Φ_{j-1}, т. е. ζ^{-j+1}-компонента в разложении $-(h^2 + ef)$, то это Ad^*-инвариантная функция, и по отношению к форме Киллинга $\langle\cdot, \cdot\rangle_0$

$$\frac{\delta\Phi_{j-1}}{\delta\mu_0} = -i\zeta^j H. \tag{5.216}$$

Далее, как функция всех времен

$$g = \exp\left(-i \sum \zeta^j t_j H\right) g_0. \tag{5.217}$$

Шаг 3. Теперь доведем до конца симплектическую редукцию расслоения $T^*\bar{G}$ с помощью $\bar{K}$ и элемента ε, принадлежащего $K^* = K^\perp$. Оказывается, более удобно использовать первую гамильтонову структуру и выделенный элемент ε, равный $-iH\zeta$. Я не буду проделывать все вычисления подробно, а просто вкратце изложу результаты. Для более подробного обсуждения читателю следует обратиться к [38, IV].

Как уже было упомянуто, мы тривиализовали $T^*\bar{G}$, взяв его в виде $\bar{G} \times G^*$. Пусть φ — отображение, которое приписывает координаты $(g, \mu = T_e^* R_g \mu_g)$ элементу μ_g в $T^*\bar{G}$. $\bar{K}$ — это группа симметрий, с помощью которой мы будем редуцировать $T^*\bar{G}$. $\bar{K}$ действует слева на $T^*\bar{G}$, и в тривиализации для $k \in \bar{K}$

$$(k, g, \mu) \to \left(kg, \operatorname{Ad}^*_{k^{-1}} \mu\right), \tag{5.218}$$

что в матричном представлении есть $(kg, k\mu k^{-1})$. *Отображение моментов* для левого действия $\bar{K}$ на $T^*\bar{G}$

$$J\colon T^*\bar{G} \to k^*$$

записывается в координатах в виде

$$\mu_g \to \mu|_K, \tag{5.219}$$

где $\mu|_K$ означает, что $\mu = T_e^* R_g \mu_g$ должно лежать в K^* и поэтому должно быть ограничено на K. Если мы отождествим G^* с G, K^* с $N^\perp$, то это означает, что внутреннее произведение $\mu|_K$ с любым элементом N есть нуль. При тривиализации отображение моментов есть

$$\tilde{J} = J \cdot \varphi^{-1} : (g, \mu) \to \mu|_K. \tag{5.220}$$

Теперь введем набор уровней $J^{-1}(\varepsilon)$ для элемента ε, принадлежащего $K^* = N^\perp$.

$$\tilde{J}^{-1}(\varepsilon) = \{(g, \mu) \mid \mu|_K = \varepsilon\},$$

что из-за отождествления G^* и G можно записать как

$$\tilde{J}^{-1}(\varepsilon) = \bar{G} \times \{\varepsilon + \nu\}, \tag{5.221}$$

где ν — это любой элемент $K^\perp$.

Затем мы определим подгруппу изотропий $\bar{K}_\varepsilon$ элемента ε. Можно показать, что это есть $\bar{K}$. Важно, что ε выбран так, что

$\varepsilon|_{[K,K]}=0$. Тогда в $\tilde{J}^{-1}(\varepsilon)/\bar{K}_\varepsilon$ всякий элемент $(g=K^{-1}n,\ \varepsilon+\nu)$ набора уровней $J^{-1}(\varepsilon)$ эквивалентен при действии $\bar{K}$ элементу, у которого первая координата лежит в $\bar{N}$, т. е.

$$(k^{-1}n,\ \varepsilon+\nu)\sim(n,\ \lambda).$$

Я уже говорил, что удобно писать g как $k^{-1}n$. Но что такое λ? Чтобы отделить k^{-1} от $k^{-1}n$ в первом элементе, естественно подействовать k на $(k^{-1}n,\ \varepsilon+\nu)$. Но мы уже знаем, что действие это таково:

$$k(k^{-1}n,\ \varepsilon+\nu)=\left(n,\ \mathrm{Ad}^*_{k^{-1}}(\varepsilon+\nu)\right). \tag{5.222}$$

Нетрудно показать, что $\mathrm{Ad}^*_{k^{-1}}(\varepsilon+\nu)$ также принадлежит $\varepsilon+N^*$. В матричных обозначениях это $k(\varepsilon+\nu)k^{-1}$; ясно, что как k, так и k^{-1} могут быть записаны в виде рядов по степеням ζ^{-j}, начиная с единицы при $j=0$, и так как $\varepsilon+\nu$ принадлежит $\varepsilon+N^*$, то $k(\varepsilon+\nu)k^{-1}$ тоже принадлежит $\varepsilon+N^*$.

Последняя (пуассонова) редукция, осуществляемая с помощью правого действия $\bar{N}$, попросту убирает групповой элемент n из $\bar{N}\times(\varepsilon+N^*)$. Из-за того, что действие $\bar{K}$ коммутирует с действием $\bar{N}$ (они действуют с разных сторон) и $\bar{N}$ оставляет $J^{-1}(\varepsilon)$ неизменным, то эта редукция тривиальна. Следовательно, элемент общего вида в редуцированном фазовом пространстве $\varepsilon+N^*=\varepsilon+K^\perp$ задается формулой $k(\varepsilon+\nu)k^{-1}$.

Временные потоки k и $\varepsilon+\nu$ задаются (5.215а) и (5.217); а именно, $k^{-1}(t_j)$ — это левый множитель элемента $\exp\left(-i\sum t_j\zeta^j H\right)g_0$, а $\varepsilon+\nu$ — интеграл движения, выбранный нами в виде $\varepsilon=-iH\zeta$. Следовательно, движение точки μ, которую мы обозначали $\zeta Q(t_j)$, в редуцированном фазовом пространстве $\varepsilon+N^*$ будет (после выбрасывания множителя ζ) таким:

$$Q(t_j)=k(t_j)(-iH)k^{-1}(t_j). \tag{5.223}$$

Шаг 4. Сейчас полезно отождествить элемент $k(t_j)$ с элементами, которые нам уже встречались. После несложных вычислений перепишем (5.223) в виде

$$Q_{t_j}=\left[k_{t_j}k^{-1},\ Q\right]. \tag{5.224}$$

Но из (5.217)

$$g_{t_j}=-i\zeta^j Hg=-k^{-1}k_{t_j}k^{-1}n+kn_{t_j},$$

что записывается также в виде

$$\zeta^j k(-iH)k^{-1}=-k_{t_j}k^{-1}+n_{t_j}n^{-1} \tag{5.225}$$

Каждый член в (5.225) — это элемент G. Возьмем проекцию на N и найдем

$$n_{t_j} n^{-1} = \prod_N \zeta^j k(-iH) k^{-1} = \prod_N \zeta^j Q(t_j) = Q^{(j)} \tag{5.226a}$$

в согласии с (3.48) и (5.52). Следовательно,

$$k_{t_j} = Q^{(j)} k + k(iH\zeta^j). \tag{5.226b}$$

Теперь вспомним собственную функцию V из разд. 5е. Чтобы вычислить ее асимптотическое разложение, мы записали ее как $\hat{V} \exp(-i \sum \zeta^j t_j H)$, где $\hat{V}$ удовлетворяет (5.226b). Фактически (см. (5.88)) $Q = V(-iH) V^{-1} = \hat{V}(-iH) \hat{V}^{-1}$, потому что экспоненциальный множитель в V коммутирует с H. Поэтому элемент k — это просто $\hat{V}$, т. е. левый множитель V, записанный в виде асимптотического разложения вблизи $\zeta = \infty$. Затем посмотрим на соотношение (5.224). Это

$$Q_{t_j} = [Q^{(j)}, Q] \tag{5.227}$$

— уравнение Лакса (5.52) для семейства $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Итак, временны́е потоки элемента ζQ, принадлежащего $\varepsilon + N^*$, полученные как редукции линейных потоков на T^*G, те же самые, что и определенные с помощью гамильтоновых векторных полей в разд. 5с.

Шаг 5. Как нам «решить» (5.227)? При заданном $Q(0)$ вычислим матрицу $k(0)$, которая определяется с помощью

$$\mathrm{Ad}^*_{k^{-1}(0)}(-iH) = Q(0), \tag{5.228}$$

т. е. $k(0)(-iH)k^{-1}(0) = Q(0)$. Именно тот факт, что мы всегда можем найти такую $k(0)$, для которой матрица $\zeta Q(0)$ будет подобна $-iH\zeta$, и позволяет нам взять $\varepsilon = -iH\zeta$ без потери общности. Мы можем также взять $n(0) = 1$; определенная таким образом матрица $k(0)$ не будет единственной, так как она может быть умножена справа на любой множитель, коммутирующий с H. Но это не важно. Мы можем взять любую $k(0)$ в этом классе эквивалентности, так как коммутирующий с H правый множитель матрицы $k(0)$ превращается в левый множитель матрицы $k^{-1}(0)$ и поэтому коммутирует также с временно́й зависимостью g (см. (5.229) ниже). Поэтому этот множитель попросту включается в правый постоянный множитель при $k(t_j)$, и поэтому он не вносит вклада в $Q(t_j)$ при вычислении с по-

мощью (5.223). Читатель мог уже заметить, что матрица $k(t_j)$, которую мы определяли как

$$\hat{V}(t_j)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2}b \\ \frac{i}{2}c & 1 \end{pmatrix} e^{\psi H+\varphi},$$

уже имеет правый множитель, коммутирующий с H. При вычислении $Q=\hat{V}(-iH)\hat{V}^{-1}$ этот множитель, содержащий нелокальные члены, исчезает. Вспомним, что эти нелокальные члены выражаются через логарифмические производные от τ и поэтому являются интегралами от h_r, e_r, f_r — координат в фазовом пространстве.

Решение (5.227) — это (5.223), где k — величина, обратная левому множителю в

$$g=\exp\left(i\sum \zeta^j t_j H\right) k^{-1}(0), \tag{5.229}$$

которая может быть вычислена. Факторизация — это не всегда простая задача, и у меня нет доказательства, что это может быть сделано. Переписывая (5.209) как

$$kg=n$$

и беря затем проекцию на $\bar{K}$, получаем

$$\prod_{\bar{K}} kg=0. \tag{5.230}$$

Эти уравнения эквивалентны (5.99). Для N-солитонного решения уравнения (5.229) — это система неоднородных линейных уравнений порядка $2N$. Оказывается, что матрицей коэффициентов для нее служит N-солитонная τ-функция, τ из (5.70). В случае общего решения система линейных уравнений имеет бесконечный порядок, и определитель матрицы коэффициентов, который и есть τ-функция, тоже бесконечного порядка.

Поэтому у нас есть второй способ ввести и определить τ-функцию. Вспомните, что впервые мы ввели ее в разд. 5d как *потенциал*. Здесь это определитель бесконечного порядка, порожденный решением задачи Римана — Гильберта. Напомним (см. разд. 5g), что вспомогательные τ-функции σ, ρ могут быть построены из τ с помощью преобразований Бэклунда — Шлезингера.

Позвольте показать, как выполняется (5.230) в случае простого примера. Этот пример соответствует простейшему виду связанного состояния $(N, \bar{N})$, описанному в разд. 5g, а именно

$N=1$, $\bar{N}=0$. Тогда из (5.99a, b) (я нормирую собственные функции так: $\bar{\psi}\sim\binom{1}{0}e^{-i\theta}$, $\psi\sim\binom{0}{1}e^{i\theta}$, $x\to+\infty$, $\theta=\sum\zeta^i t_i$)

$$\bar{\psi}(\zeta, t_j)e^{i\theta}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{\gamma}{\zeta-\zeta_1}\psi_1 e^{i\theta_1},$$

$$\psi(\zeta, t_j)e^{-i\theta}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\quad \theta_1=\sum\zeta_1^j t_j,$$

откуда $\psi_1=\binom{0}{1}e^{i\theta_1}$. Итак,

$$k=V\exp\left(i\sum\zeta^j t_j H\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\gamma e^{2i\theta_1}}{\zeta-\zeta_1} & 1\end{pmatrix}.$$

Можно найти $f_1(t_j)$, вспоминая, что первый член асимптотического разложения матричного элемента (2, 1) в k есть $if_1/2\zeta$, где

$$f_1(t_j)=-2i\gamma e^{2i\theta_1}.$$

Заметим, что $f_{1,t_j}=-2i\gamma\left(2i\zeta_1^j\right)e^{2i\theta_1}=(-i/2)^{j-1}f_{1,t_1\ldots t_1}$, где $f_{1,t_1\ldots t_1}$ обозначает производную порядка j от f_1 по $t_1=x$; e_1, а потому и e, суть тождественные нули. Таковы уравнения Лакса в этом случае.

Давайте проверим, что проекция kg на $\bar{K}$ равна нулю. Рассмотрим

$$kg=k(t_j)e^{-i\theta H}k^{-1}(0)=\begin{pmatrix}e^{-i\theta} & 0\\ \gamma e^{i\theta}\dfrac{e^{2i(\theta_1-\theta)}-1}{\zeta-\zeta_1} & e^{i\theta}\end{pmatrix}.$$

Вы заметите, что полюс в ζ_1 можно удалить и что kg разлагается в ряд Тейлора около ζ_1. Поэтому kg принадлежит $\bar{N}$. Далее, давайте проверим также

$$Q=k(t_j)(-iH)^{-1}k(t_j)=\begin{pmatrix}-i & 0\\ \dfrac{-2i\gamma}{\zeta-\zeta_1}e^{2i\theta_1} & i\end{pmatrix}=-iH+\frac{f_1}{\zeta-\zeta_1}F.$$

Но мы знаем, что

$$f=\sum_1^\infty\frac{f_j}{\zeta^j}=\frac{1}{\zeta}f_1-\frac{i}{2}\sum_1^\infty\frac{f_{1,t_j}}{\zeta^{j+1}},$$

и так как $f_{1,t_j}=2i\zeta_1^j f_1$ то,

$$f=\frac{1}{\zeta-\zeta_1}f_1.$$

Так как $e \equiv 0$, то $h^2 = -1$, или $h = -i$. Итак, (5.223) есть

$$Q = -iH + OE + fF.$$

Еще о преобразованиях Бэклунда; схема «одевания» [108] *Захарова — Шабата.* Полезно заметить, что вид (5.223) весьма напоминает (5.134)

$$\tilde{Q} = RQR^{-1}$$

для преобразований Бэклунда. Также (5.226b) в точности совпадает с (5.133), если вместо k написать R. Действительно, чтобы добавить одно связанное состояние в точке $\zeta = \zeta_1$ к вакууму

$$Q(t_j) = -iH, \qquad V(t_j, \zeta) = e^{-i\theta H}$$

с $\theta = \sum_1^\infty \zeta^j t_j$, мы используем (5.184):

$$R_L = \begin{pmatrix} -2i(\zeta - \zeta_1) & e_1 = 0 \\ f_1 = -2i\gamma e^{2i\theta_1} & -1 \end{pmatrix},$$

что можно нормировать и получить

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma e^{2i\theta_1}}{\zeta - \zeta_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерпретация $(\zeta - \zeta_1)^{-1}$ как $\sum_0^\infty (\zeta_1^j/\zeta^{j+1})$ означает, что такое R в точности имеет форму $I + \sum_1^\infty R_j \zeta^{-j}$. Поэтому R можно записать как экспоненту от элемента $\sum_1^\infty X_j \zeta^{-j}$ подалгебры K и, следовательно, R принадлежит $\bar{K}$. Читателю следует сравнить это со структурой R, используемой в преобразовании Бэклунда — Шлезингера и не имеющей этой формы.

Принципиальное различие между (5.223) и (5.134) состоит, конечно, в том, что первое соотношение говорит нам, как начальное состояние $Q(0)$,

$$Q(0) = k(0)(-iH)k^{-1}(0), \tag{5.231}$$

эволюционирует под действием набора потоков $\{t_k\}_1^\infty$, тогда как последнее связывает два разных типа решений при фиксированном наборе значений t_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тем не менее они тесно связаны, и я сейчас покажу с помощью (5.231) и (5.223), что мы можем описать преобразование Бэклунда на языке метода редукций.

Давайте начнем, например, с вакуумного состояния (для него мы используем индекс 0)

$$Q_0(0) = -iH, \quad V_0(0, \zeta) = I,$$

которое эволюционирует под действием потоков как

$$Q(t_j) = -iH, \quad V(t_j, \zeta) = e^{-i\theta H}.$$

С другой стороны, если мы начнем с начального состояния

$$Q_1(t_j) = -iH - \frac{2i\gamma}{\zeta - \zeta_1} F,$$

то его временная эволюция описывается формулой

$$Q_1(t_j) = -iH - \frac{2i\gamma e^{2i\theta_1}}{\zeta - \zeta_1} F,$$

где $\theta_1 = \sum_1^\infty \zeta_1^j t_j$. Соответствующая собственная матрица V_1 есть

$$V_1 = \hat{V}(t_j) e^{-i\theta H} = k(t_j) e^{-i\theta H},$$

где $k(t_j)$ — это величина, обратная левому множителю в разложении элемента

$$e^{-i\theta H} k^{-1}(0),$$

который я обозначаю

$$\left(e^{-i\theta H} k^{-1}(0)\right)_-.$$

Заметьте, что это также равно

$$\left(e^{-i\theta H} k^{-1}(0) e^{i\theta H}\right)_-,$$

потому что $e^{i\theta H}$ принадлежит $\bar{N}$, а любой элемент $\bar{N}$ можно умножить справа под знаком нижнего индекса минус, т. е. $(k^{-1}nn')_- = (k^{-1}n)_- = k^{-1}$.

Эти наблюдения подсказывают алгоритм получения новых решений из вакуумного состояния. Возьмем элемент $k^{-1}(0)$, принадлежащий $\bar{R}$, который, как я упоминал, связывает два типа решений в момент времени нуль (здесь это одно связанное состояние и вакуум). Образуем произведение

$$\left(e^{-i\theta H} k^{-1}(0) e^{i\theta H}\right)$$

и обратим его левый множитель

$$\left\{\left(e^{-i\theta H} k^{-1}(0) e^{i\theta H}\right)_-\right\}^{-1}.$$

Тогда собственная матрица

$$V_1 = \left\{\left(e^{-i\theta H} k^{-1}(0)\, e^{i\theta H}\right)_-\right\}^{-1} e^{-i\theta H}$$

соответствует решению $Q(t_j)$ с одним связанным состоянием. Это в точности алгоритм одевания Захарова — Шабата [108].

Что получится, если мы применим этот алгоритм снова? Я попрошу вас показать в упражнении в конце этого раздела, что

$$\left\{\left(V_1 k_2^{-1}(0)\, V_1^{-1}\right)_-\right\}^{-1} V_1 = \left\{\left(e^{-i\theta H} k_2^{-1}(0)\, k_1^{-1}(0)\, e^{i\theta H}\right)_-\right\}^{-1} e^{-i\theta H},$$

а это указывает, что данное действие обладает групповым свойством [40], [106].

Резюме. В заключение этого раздела я хочу сделать несколько важных наблюдений. Во-первых, я напоминаю читателю, что характерный элемент $Q(t_j)$ фазового пространства задан с помощью (5.223):

$$Q(t_j) = k(t_j)(-iH)\, k^{-1}(t_j),$$

где $k(t_j)$ вычисляется как $\left(\exp(-i\theta H)\, k^{-1}(0)\right)_-^{-1}$. Элемент $k^{-1}(0)$ определяет тип решения, т. е. будет ли это решение односолитонным, двухсолитонным, связанным состоянием (1, 0) и т. п. Можно считать $k^{-1}(0)$ аналогом данных рассеяния в нулевой момент времени. Коль скоро тип решения определен, поток всей последовательности времен $\{t_k\}_0^\infty$ отображает его на некоторое подмножество фазового пространства. В следующем разделе мы увидим, что оператор потока $\partial/\partial t_k$ можно связать с элементами $-iH\zeta^k$, $k \geqslant 0$, алгебры $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Эти элементы вместе с элементами $-iH\zeta^k$, $k < 0$, образуют подалгебру Гейзенберга в $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C) + Z$, т. е. в алгебре петель $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, пополненной центральным элементом.

С другой стороны, переход от одного типа решений к другому (при фиксированных значениях t_k) осуществляется преобразованием Бэклунда. Сейчас мы подошли к очень важному вопросу. Для подхода этого раздела пригодны лишь такие преобразования Бэклунда (5.134), в которых

$$R = I + \sum_1^\infty \frac{1}{\zeta^j} C_j.$$

Причина в том, что для того, чтобы R совпадало с k, оно должно записываться с помощью экспоненты от элемента $\sum_1^\infty D_j \zeta^{-j}$.

Преобразования Бэклунда, относящиеся к этому классу R, включают преобразования, добавляющие связанные состояния и солитоны, но не включают преобразования Бэклунда — Шлезингера. Эти последние относятся к дискретным симметриям, и соответствующий элемент группы g не может быть просто представлен как $k^{-1}n$, но должен включать в матричном представлении средний элемент, являющийся диагональной матрицей.

Поэтому многое нужно еще сделать. Во-первых, следует понять, как расширить группу $\bar{G}$, чтобы включить в нее дискретные симметрии. Во-вторых, хотелось бы иметь теорию, подобную теории семейства КдФ, которая обсуждалась в разд. 4g. Здесь аналогией (5.223) является (5.90)

$$Q = kXk^{-1}, \quad k = \hat{U}, \tag{5.232}$$

где $X = -F + E/\lambda$ и $\hat{U}$ задано в (5.90). Фазовое пространство целиком покрывается с помощью присоединенного действия потоков и преобразований Бэклунда. Дискретных симметрий нет. Не составит большого труда установить прямое соответствие между формулой (5.232) и соответствующим поведением τ-функции $\tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ под действием потоков и под действием преобразований Бэклунда (см. упражнение 5j(2)).

В нашей ситуации фазовое пространство разделено на дискретные части, каждая из которых помечена монодромными свойствами V в точке $\zeta = \infty$. В каждой части потоки и преобразования Бэклунда, добавляющие солитоны и связанные состояния, действуют как непрерывные симметрии. Чтобы перейти от одной части фазового пространства к другой, требуется преобразование Бэклунда — Шлезингера. Теперь вспомним из (5.169b) и (5.174b), что действие преобразования Бэклунда — Шлезингера можно трактовать как сдвиг бесконечной в обе стороны последовательности

$$\{\ldots, \tau_{n-1}, \tau_n, \tau_{n+1}, \ldots\},$$

соответствующей состоянию цепочки Тоды при любых заданных значениях времен t_k. Введенные ранее потенциалы ρ, τ, σ могут быть любой тройкой стоящих друг за другом членов этой последовательности, и этот триплет будет удовлетворять семейству уравнений Хироты и соответствовать решению иерархии АКНС. Похоже, что аналог τ-функции семейства КдФ — это не одна функция или триплет, но бесконечная последовательность.

Если это действительно так, то τ-функцию нужно считать не просто функцией бесконечного числа непрерывных времен, но также функцией целого числа n. Потоки меняют непрерывные времена. Преобразования Бэклунда меняют характер τ, пере-

водят вакуумное состояние в односолитонное и т. д., но сохраняют неизменными n и $\{t_k\}_0^\infty$. Преобразования Бэклунда — Шлезингера меняют дискретную переменную. Какая группа связана с этими действиями и как инфинитезимальные действия связаны с алгеброй Каца — Муди? Как выбор градуировки указывает на необходимость дискретных симметрий? В главной градуировке в $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, которая давала нам (упражнение 5c(3)) семейство КдФ, была лишь одна τ-функция и не было дискретных симметрий. В однородной градуировке был бесконечный набор дискретных симметрий и $\tau = \tau(n, t_k)$ как функция n и t_1 удовлетворяла уравнениям цепочки Тоды. Алгебра петель, связанная с $\widetilde{\mathrm{sl}}(r, C)$, $r > 2$, может иметь более чем один набор дискретных симметрий, в зависимости от градуировки. Каким дифференциально-разностным уравнениям они удовлетворяют? Например, если бы τ зависела от двух дискретных переменных m, n, то должны ли «решеточные» уравнения, которым удовлетворяет $\tau(m, n, t_k)$, иметь какое-нибудь отношение к статистической механике?

Идея, что важно позволить τ-функции зависеть от дискретных переменных, восходит к работе Дзимбо и Мивы [125]. Читателю, который хочет узнать о последующем развитии, следует посмотреть том 2 новой шпрингеровской серии, где опубликованы доклады конференции Research Institute of Mathematical Sciences (RIMS), проведенной в Калифорнийском университете в Бэркли. Название этой конференции «Вершинные операторы в математике и в физике».

Упражнения 5j

1. Покажите, что последовательное применение «одевания» Захарова — Шабата является групповой процедурой.

Ответ. Пусть $V_1 = \{(V_0 g V_0^{-1})_-\}^{-1} V_0$; рассмотрите

$$V_2 = \{(V_1 h V_1^{-1})_-\} V_1 =$$
$$= \{(V_0 g V_0^{-1})_-^{-1} V_0 h V_0^{-1} (V_0 g V_0^{-1})_-\}_-^{-1} (V_0 g V_0^{-1})_-^{-1} V_0.$$

Первый множитель слева в фигурной скобке уже принадлежит K и поэтому может быть слева отброшен; после взятия обратной степени он оказывается справа и сокращается с $(V_0 g V_0^{-1})_-^{-1}$. Тогда мы имеем

$$V_2 = \{V_0 h V_0^{-1} (V_0 g V_0^{-1})_-\}_-^{-1} V_0.$$

Но из-за $(k^{-1}n)_- = (k^{-1}nn')_-$ мы можем умножить под вторым индексом минус на $(V_0 g V_0^{-1})_+$. Поэтому

$$\{V_0 h V_0^{-1}(V_0 g V_0^{-1})_-\}_-^{-1} = (V_0 h g V_0^{-1})_-^{-1}.$$

2. Вспомним, что в (5.90) мы выражали элемент фазового пространства $Q = \lim\limits_{k\to\infty} Q^{(k)}/\lambda^k$ с матрицей $Q^{(k)}$, заданной в (5.57) в упражнении 5c(3), как

$$\lambda Q = \hat{V}(-iH\zeta)\hat{V}^{-1} = \hat{U}X\lambda\hat{U}^{-1}. \tag{5.233}$$

В частности, заметим, что в главной градуировке разд. 5h, которая порождает разложение, использованное в упражнении 5c(3), матрица $X\lambda$ принадлежит K^*, а $\hat{U}$, которая имеет асимптотическое разложение I + члены веса (-1) или меньше, является экспонентой от элемента K. Матрица $\hat{U}$ может быть выражена в терминах τ-функции КдФ:

$$\hat{U} = \frac{1}{2\tau}\begin{pmatrix} \tau_+ + \tau_- & \frac{i}{\zeta}(\tau_- - \tau_+) \\ -i\zeta(\tau_- - \tau_+) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_+ + \tau_-) & \tau_+ + \tau_- + \frac{i}{\zeta}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_- - \tau_+) \end{pmatrix},$$

где $\tau_\pm = \tau(t_k \pm i/(2k-1)\zeta^{2k-1})$, $k = 1, 2 \ldots$. Теперь интерпретируем уравнение (5.233) (которое естественно возникает, когда мы рассматриваем алгебру как фазовое пространство, а потоки как кривые в этом пространстве) в качестве уравнения, из которого мы узнаем, что происходит с τ-функцией. Во-первых, по аналогии с последним подразделом разд. 5e покажите, что (5.233) содержит уравнения Хироты для семейства КдФ. Во-вторых, используя (5.233) и объясненную ранее схему одевания Захарова — Шабата, покажите, что формула добавления одного солитона к вакуумному состоянию может быть записана как $\tau \to \exp\beta Y(\zeta)\cdot\tau$, где $\beta = \exp(-2\eta x_0)$, $\zeta = i\eta$ и $Y(\zeta)$ — это вершинный оператор (4.124).

5k. Потоки уравнения sin-Гордон. В разд. 5c мы ввели уравнение Лакса для положительных временных (t_k, $k \geqslant 0$) потоков (5.52)

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q],$$

где Q — это $\lim\limits_{j\to\infty}(1/\zeta^j)Q^{(j)}$, и

$$Q^{(j)} = \zeta^j\left(Q_0 + \frac{Q_1}{\zeta} + \ldots + \frac{Q_j}{\zeta^j}\right).$$

Эти уравнения Лакса есть условия интегрируемости для

$$V_{t_k} = Q^{(k)}V, \quad k \geqslant 0. \tag{5.234}$$

Но известно [23], что потоки уравнения sin-Гордон получаются, если включить в (5.233) новые уравнения, соответствующие $k < 0$. Например, при $k = -1$

$$Q^{(-1)} = \frac{1}{\zeta} Q_{-1},$$

и совместность уравнений (5.234) при $k = 1$ и при $k = -1$ дает

$$Q^{(1)}_{t_{-1}} - Q^{(-1)}_x + [Q^{(1)}, Q^{(-1)}] = 0.$$

Приравнивание коэффициентов при степенях ζ дает

$$Q_{0t_{-1}} = 0, \quad Q_{1,t_{-1}} = -[Q_0, Q_{-1}], \quad Q_{-1x} = [Q_1, Q_{-1}]. \tag{5.235}$$

Несложные вычисления показывают, что это уравнение sin-Гордон. Пусть $Q_0 = -iH$, $Q_1 = qE + rF$, $Q_{-1} = h_{-1}H + e_{-1}E + f_{-1}F$. Находим

$$q_{t_{-1}} = 2ie_{-1}, \tag{5.236a}$$

$$r_{t_{-1}} = -2if_{-1}, \tag{5.236b}$$

$$h_{-1x} = qf_{-1} - re_{-1}, \tag{5.236c}$$

$$e_{-1x} = -2qh_{-1}, \tag{5.236d}$$

$$f_{-1x} = 2rh_{-1}. \tag{5.236e}$$

Теперь посмотрим на уравнения, которым удовлетворяют квадратичные произведения:

$$h = -i(\bar{\psi}_1\psi_2 + \psi_1\bar{\psi}_2), \quad e = 2i\psi_1\bar{\psi}_1, \quad f = -2i\psi_2\bar{\psi}_2, \tag{5.237}$$

где ψ и $\bar{\psi}$ — векторные решения (5.234), определенные в разд. 5f(i), с тем отличием, что при $x \to +\infty$ они нормированы на асимптотику

$$\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(i \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta^j t_j\right), \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-i \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta^j t_j\right). \end{aligned} \tag{5.238}$$

Находим

$$\begin{aligned} h_x &= qf - re, \\ e_x + 2i\zeta e &= -2qh, \\ f_x - 2i\zeta f &= 2rh. \end{aligned} \tag{5.239}$$

Заметьте, что если разлагать (5.239) вблизи $\zeta=\infty$,

$$h=\sum\frac{h_r}{\zeta^r},\quad e=\sum\frac{e_r}{\zeta^r},\quad f=\sum\frac{f_r}{\zeta^r},\tag{5.240}$$

то в точности получим h, e, f в

$$Q=\sum_0^\infty\frac{h_rH+e_rE+f_rF}{\zeta^r}.$$

Теперь разложим около $\zeta=0$. Отметим, что первые члены удовлетворяют в точности тем же уравнениям, что и h_{-1}, e_{-1}, f_{-1}. Поэтому (5.236a, b) суть

$$q_{t_{-1}}=-4\psi_1\bar\psi_1\big|_{\zeta=0},\quad r_{t_{-1}}=-4\psi_2\bar\psi_2\big|_{\zeta=0}.\tag{5.241}$$

Для простоты возьмем $q=r=(u_x/2)$. Тогда $\psi_1=\operatorname{sh}(u/2)$, $\psi_2=\operatorname{ch}(u/2)$, $\bar\psi_1=\operatorname{ch}(u/2)$, $\bar\psi_2=\operatorname{sh}(u/2)$ (где требуется, чтобы $u\to0$ при $x\to\pm\infty$), откуда (5.241) — это просто уравнение sh-Гордон

$$u_{xt_{-1}}=-4\operatorname{sh}u.\tag{5.242}$$

Аналогично, если мы возьмем $q=-r=-u_x/2$, мы обнаружим, что (5.241) дает уравнение sin-Гордон. В этом случае мы можем позволить u быть любым числом, кратным π, при $x\to\pm\infty$. Мы можем продолжить. Нетрудно показать, что если взять

$$V_{t_{-2}}=Q^{(-2)}V=\left(\frac{1}{\zeta^2}Q_{-1}+\frac{1}{\zeta}Q_{-2}\right)V,\tag{5.243}$$

то тогда

$$q_{t_{-2}}=2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi_1\bar\psi_1\Big|_{\zeta=0},\quad r_{t_{-2}}=2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi_2\bar\psi_2\big|_{\zeta=0}.\tag{5.244}$$

Перекрестное дифференцирование (5.243) и (5.233) с $k=1$ дает

$$Q_{0t_{-2}}=0,\tag{5.245a}$$

$$Q_{1t_{-2}}=-[Q_0,Q_{-2}],\tag{5.245b}$$

$$Q_{-1x}=[Q_1,Q_{-1}],\tag{5.245c}$$

$$Q_{-2x}=[Q_1,Q_{-2}]+[Q_0,Q_{-1}].\tag{5.245d}$$

Заметьте, что (5.245c) совпадает с третьим уравнением (5.235), и элементы h_{-2}, e_{-2}, f_{-2} матрицы $Q_{-2}=h_{-2}H+e_{-2}E+f_{-2}F$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и $\partial h/\partial\zeta$, $\partial e/\partial\zeta$, $\partial f/\partial\zeta$ в точке $\zeta=0$.

После этих вычислений выпишем уравнение Лакса

$$Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q], \tag{5.246}$$

$$Q^{(k)} = \begin{cases} \zeta^k\left(Q_0 + \frac{Q_1}{\zeta} + \ldots + \frac{Q_k}{\zeta^k}\right), & k \geqslant 0, \\ \zeta^k\left(Q_{-1} + \zeta Q_{-2} + \ldots + \zeta^{-k-1}Q_k\right), & k < 0 \end{cases} \tag{5.247}$$

и

$$Q = \lim_{j\to\infty} \frac{Q^{(j)}}{\zeta^j}. \tag{5.248}$$

Если мы возьмем $j \to +\infty$ в (5.248), мы получим знакомый элемент

$$Q = \sum_0^\infty \frac{Q_j}{\zeta^j}, \quad Q_0 = -iH, \tag{5.249}$$

т. е. элемент общего вида фазового пространства $N^* = K^\perp$ (в первой гамильтоновой структуре) или $-iH + K^\perp$ (во второй гамильтоновой структуре). С другой стороны, при $j \to -\infty$ мы имеем

$$Q = \sum_0^\infty Q_{-1-j}\zeta^j, \tag{5.250}$$

что является элементом общего вида в $K^* = N^\perp$ во второй гамильтоновой структуре.

Теперь вспомним, что уравнения Лакса формально решаются с помощью

$$Q = V(-iH)V^{-1} = \begin{pmatrix} -i(\bar\psi_1\psi_2 + \psi_1\bar\psi_2) & 2i\psi_1\bar\psi_1 \\ -2i\psi_2\bar\psi_2 & i(\psi_1\bar\psi_2 + \psi_1\bar\psi_2) \end{pmatrix}, \tag{5.251}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} \bar\psi_1 & \psi_1 \\ \bar\psi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \tag{5.252a}$$

с асимптотикой

$$V \sim \exp\left(-i\sum_{-\infty}^{\infty} \zeta^j t_j H\right) \tag{5.252b}$$

при $\zeta \to \infty$. (Обратите внимание, что суммирование в экспоненте включает отрицательные степени и времена.) Теперь относительно легко понять, что асимптотическое разложение (5.251) вблизи $\zeta = \infty$ — это в точности (5.249).

Упражнения 5k

1. Покажите, что

$$L=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}-2q\int\limits_x^\infty dyr\cdot & -2q\int\limits_x^\infty dyq\cdot \\ 2r\int\limits_x^\infty dyr\cdot & \frac{\partial}{\partial x}+2r\int\limits_x^\infty dyq\cdot \end{bmatrix}, \tag{5.253}$$

тогда для $e=2i\psi_1\bar{\psi}_1$, $f=-2i\psi_2\bar{\psi}_2$ (напоминаю, что $e_1=q$, $f_1=r$)

$$(L-\zeta)\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} e_1 \\ -f_1 \end{pmatrix}. \tag{5.254}$$

Далее, мы знаем из [23], что потоки (5.246) при $k\geqslant 0$ могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}_{t_n}=-2iL^n\begin{pmatrix} e_1 \\ -f_1 \end{pmatrix}. \tag{5.255}$$

Но из (5.254)

$$\begin{pmatrix} e \\ -f \end{pmatrix}=\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix} e_1 \\ -f_1 \end{pmatrix}+\sum_1^\infty \frac{1}{\zeta^{n+1}}L^n\begin{pmatrix} e_1 \\ -f_1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix} e_1 \\ -f_1 \end{pmatrix}+\sum_1^\infty \frac{1}{\zeta^{n+1}}\frac{i}{2}\cdot\begin{pmatrix} e_{1,t_n} \\ f_{1,t_n} \end{pmatrix}. \tag{5.256}$$

Но из (5.55) мы знаем, что $e_{1,t_n}=-2ie_{n+1}$, $f_{1,t_n}=2if_{n+1}$, и, таким образом, правые части — это в точности e и f, определенные в разд. 5c. Величина $h=-i(\psi_1\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_1\psi_2)$ задается $h^2+ef=-1$ в точном согласии с разд. 5c. Поэтому асимптотическое разложение (5.251) — это знакомое выражение $Q=\sum\limits_0^\infty Q_r\zeta^{-r}$.

Далее, разложим матрицу Q, заданную с помощью (5.251), вблизи $\zeta=0$. Мы получаем $\sum\limits_0^\infty Q_{-1-j}\zeta^j$, а частные суммы, помноженные на ζ^{-j}, — это матрицы $Q^{(-j)}$ в (5.233).

Как все это связано с тем, что мы делали в последнем разделе? Вспомним, что положительные потоки возникли при редукции простых потоков

$$\dot{\mu}=0,\quad \dot{g}=\frac{\delta\Phi}{\delta\mu}g \tag{5.257}$$

на $T^*\bar{G}$ сначала с помощью симметрий $\bar{K}$ в редукции Марсдена — Вейнстейна к $\bar{N}\times(-iH\zeta+K^{\perp})$ и затем с помощью тривиальной пуассоновой редукции к $-iH\zeta+K^{\perp}$. На редуцированном фазовом пространстве поток был задан формулой (5.210)

$$Q(t_j)=k(t_j)(-iH)k^{-1}(t_j),$$

и я показал вам, что матрица $k(t_j)$ — это левый множитель V в асимптотическом разложении V вблизи $\zeta=\infty$, т. е.

$$V\sim\hat{V}\exp\left(-i\sum_{-\infty}^{\infty}\zeta^j t_j H\right). \tag{5.258}$$

Она была также матрицей, обратной к левому множителю, при факторизации

$$g=\exp\left(-i\sum_{-\infty}^{\infty}\zeta^j t_j H\right)g_0=k^{-1}n.$$

Предположим теперь, что вместо факторизации $\bar{G}$ в виде $\bar{K}\bar{N}\,(g=k^{-1}n)$ мы факторизуем $\bar{G}$ в виде $\bar{N}\bar{K}\,(g=n^{-1}k)$. Тогда точно тем же способом, как и в разд. 5j, мы найдем, что элемент Q на редуцированном фазовом пространстве $-iH+N^{\perp}$ задается формулой

$$Q(t_j)=\mathrm{Ad}^*_{n^{-1}}(-iH)=n(-iH)n^{-1}, \tag{5.259}$$

где $n(t_j)$ — это левый множитель в разложении V вблизи $\zeta=0$. Правый множитель — это $\exp\left(-i\sum_{-\infty}^{\infty}\zeta^k t_k H\right)$; он коммутирует с $-iH$.

Поэтому потоки положительных времен t_k находятся редуцированием большого фазового пространства $T^*\bar{G}$ с помощью левого действия симметрий $\bar{K}$ (редукция Марсдена — Вейнстейна), за которым следует тривиальная пуассонова редукция в результате правого действия симметрий $\bar{N}$. Потоки отрицательных времен t_k находятся с помощью дуальной процедуры, т. е. с помощью факторизации $\bar{G}=\bar{N}\bar{K}$.

Замечание. Я хочу подчеркнуть, что при отождествлении $k(t_j)$ с $\hat{V}(t_j)$ мы имеем в виду, что в качестве $\hat{V}$ берется левый множитель в формальном асимптотическом разложении V вблизи $\zeta=\infty$, а не сама функция $\hat{V}(t_j,\zeta)=V(t_j,\zeta)\exp i\sum_{-\infty}^{\infty}\zeta^j t_j H$. Аналогично, обратный левый множитель в двойственной факторизации $n(t_j)$ отождествляется с формальным разложением $\hat{V}$ вблизи $\zeta=0$. Так как $\zeta=0$ становится нерегулярной особой

точкой при включении отрицательных потоков, то это разложение не обязательно равномерно пригодно во всех секторах окрестности точки $\zeta=0$. Если бы нам была известна полная аналитическая структура $\hat{V}$ как функции ζ, то мы могли бы связать k с n с помощью функции $\hat{V}$. Но с алгебраической точки зрения мы ее не знаем и должны считать асимптотические разложения $\hat{V}$ вблизи $\zeta=\infty$ и $\zeta=0$ не связанными между собой; k^{-1} — это просто левый множитель элемента $g=e^{-i\theta H}g_0$, если g факторизуется в виде $k^{-1}n'$, и n — это его левый множитель, если g факторизуется как $n^{-1}k'$. Я использую штрихи у правых множителей, чтобы подчеркнуть, что $n(k)$ в последней (первой) факторизации — это не правый множитель $n'(k')$ в первой (последней) факторизации. Тем не менее интерпретация k и n в терминах $\hat{V}$ как функции ζ все же полезна.

Мы теперь используем прямой метод, чтобы показать, что два набора потоков, относящихся к положительным и отрицательным временам, коммутируют между собой.

Рассмотрим разложение

$$G=K+N, \tag{5.260a}$$

$$G^*\cong G=K^{\perp}+N^{\perp}, \tag{5.260b}$$

где $Q=\sum_0^\infty Q_r\zeta^{-r}\in K^{\perp}$ и $\hat{Q}=\sum_1^\infty Q_{-r}\zeta^r\in N^{\perp}$, а внутреннее произведение выбираем в виде $\langle X, Y\rangle=\mathrm{Tr}\,(XY)_0$. Заметьте, что здесь $\hat{Q}$ есть ζ, умноженное на разложение в ряд по ζ выражения $Q=\hat{V}(-iH)\hat{V}^{-1}$ около $\zeta=0$. Далее, мы знаем, что для $k\geqslant 0$

$$Q_{t_k}=-[\pi_N\nabla\Phi_k(Q),\ Q], \tag{5.261a}$$

$$\hat{Q}_{t_k}=-[\pi_N\nabla\Phi_k(Q),\ \hat{Q}] \tag{5.261b}$$

и для $k<0$

$$Q_{t_k}=-[\pi_K\nabla\Phi_{k-1}(\hat{Q}),\ Q], \tag{5.262a}$$

$$\hat{Q}_{t_k}=-[\pi_K\nabla\Phi_{k-1}(\hat{Q}),\ \hat{Q}]. \tag{5.262b}$$

Вспомним, что

$$\nabla\Phi_k(k)=-\frac{1}{2}\langle S^kX,\ X\rangle, \tag{5.263a}$$

где $S^kX=\zeta^k\sum_{-\infty}^{\infty}X_r\zeta^r$ и

$$\nabla\Phi_k(X)=-S^kX. \tag{5.263b}$$

Как и прежде, $\Phi_k(X)$ ad-инвариантна на G, алгебре петель алгебры $\mathrm{sl}(2,\ C)$.

2. Проверьте, что если мы умножим $\hat{Q}=\sum_1^\infty Q_{-r}\zeta^r$ на ζ^{k-1} при $k<0$ и удержим лишь члены, для которых $r+k-1\leqslant\leqslant-1$, мы получим $Q^{(k)}=\zeta^k(Q_{-1}+\ldots+Q_{-k}\zeta^{-k-1})$.

Определим на $G^*\simeq G$ гамильтониан

$$\psi_k(X)=\Phi_k(\pi_{K^\perp}X) \tag{5.264a}$$

и

$$\chi_l(X)=\Phi_{l-1}(\pi_{N^\perp}X), \tag{5.264b}$$

где $X=Q+\hat{Q}$, $Q\in K^\perp$, $\hat{Q}\in N^\perp$. Тогда (5.262) можно записать как

$$X_{t_k}=-[\nabla\psi_k(X),\ X],\quad k\geqslant 0 \tag{5.265a}$$

и (5.262) может быть переписано так:

$$X_{t_l}=-[\nabla\chi_l(X),\ X],\quad l<0. \tag{5.265b}$$

Чтобы доказать (5.265a), мы хотим показать, что

$$\nabla\psi_k(X)=\pi_N\Phi_k(\pi_{K^\perp}X). \tag{5.266}$$

Доказательство. По определению

$$\langle\nabla\psi_k(X),\ X'\rangle=\frac{d}{dt}\psi_k(X+tX')\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\Phi_k(\pi_{K^\perp}X+t\pi_{K^\perp}X')\Big|_{t=0}=$$
$$=\langle\nabla\Phi_k(\pi_{K^\perp}X),\ \pi_{K^\perp}X'\rangle=\langle\pi_N\nabla\Phi_k(\pi_{K^\perp}X),\ \pi_{K^\perp}X'\rangle=$$

(так как внутреннее произведение элемента K с элементом $K^\perp$ есть нуль)

$$=\langle\pi_N\nabla\Phi_k(\pi_{K^\perp}X),\ X'\rangle,$$

так как $\pi_{K^\perp}X'=X'-\pi_{N^\perp}K'$ и внутреннее произведение элемента N и элемента $N^\perp$ есть нуль. Отсюда следует (5.266).

При помощи аналогичных вычислений можно доказать, что потоки, порождаемые гамильтонианами $\psi_k(X)$, $k\geqslant 0$ и $\chi_l(X)$, $l<0$, находятся в инволюции относительно скобки Пуассона

$$\{\psi_k,\ \chi_l\}(X)=-\langle X,\ [\nabla\psi_k(X),\ \nabla\chi_l(X)]\rangle.$$

3. (i) Докажите, что $\{\psi_k,\ \chi_l\}(X)=0$ (см. [38, VI]).

(ii) Покажите, используя (5.236), что

$$h_{-1}=\frac{i}{2}\frac{\partial^2\ln\tau}{\partial t_1\,\partial t_{-1}}.$$

Заметьте, что $e_{-1}=(i/2)e_{1,t_{-1}}$, $f_{-1}=-(i/2)f_{1,t_{-1}}$. Покажите, что, вообще говоря,

$$h_{-s}=\frac{i}{2}\frac{\partial^2\ln\tau}{\partial t_1\,\partial t_{-s}}$$

и

$$e_{-s}=\frac{i}{2}e_{1,t_{-s}},\quad f_{-s}=-\frac{i}{2}f_{1,t_{-s}}.$$

(iii) Каковы уравнения Хироты для отрицательных временных потоков?

5l. Расширение $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$ до $\hat{A}_1^{(1)}$. Позвольте сначала напомнить основные идеи этой главы. Мы берем алгебру петель $G=\left\{X=\sum_{+\infty}^{-N}X_j\zeta^{-j},\ X_j\in \mathrm{sl}(2, C)\right\}$ алгебры $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, на которой мы определяем форму Киллинга $\langle X, Y\rangle_0=\sum_{j+k=0}\mathrm{Tr}\,X_jY_k$. G разлагается на две подалгебры, $G=K+N$, и с помощью введенной на G формы Киллинга двойственное к N пространство N^* отождествляется с ортогональным дополнением $K^\perp$ к K. $K^\perp$ имеет естественную пуассонову структуру, и можно выписать гамильтоновы векторные поля, порожденные функцией Φ на $K^\perp$. Существует специальный класс функций, ad-инвариантные функции Φ_k, которые являются коэффициентами при ζ^{-k} в разложении $-(1/2)\mathrm{Tr}X^2$, играющие особую роль. Из-за свойства ad-инвариантности гамильтоновы векторные поля

$$Q_{t_k}=-\pi_{K^\perp}[\pi_N\nabla\Phi_k(Q), Q],\quad Q\in K^\perp \tag{5.267}$$

приобретают форму Лакса

$$Q_{t_k}=-[\pi_N\nabla\Phi_k(Q), Q],\quad Q\in K^\perp. \tag{5.268}$$

В разделах 5i, j мы сочли удобным расширить фазовое пространство $K^\perp$ до $\varepsilon+K^\perp$, где $\varepsilon\in K^*=N^\perp$ — это выделенный элемент в алгебре, двойственной к алгебре группы симметрии K. Пространство $\varepsilon+K^\perp$ также имеет скобку Пуассона при любом $\varepsilon\in G$, и для тех ε, которые принадлежат ортогональным дополнениям коммутаторов $[K, K]$ и $[N, N]$ (последнее очевидно вследствие того, что $\varepsilon\notin K^\perp$ и поэтому $\varepsilon\in N^\perp$), мы имеем набор коммутирующих потоков

$$(\varepsilon+Q)_{t_k}=-[\pi_N\nabla\Phi_{k-1}(\varepsilon+Q), \varepsilon+Q]. \tag{5.269}$$

Любой элемент вида $(aH+bE+cF)\zeta$ можно взять в качестве ε; в случае однородной градуировки мы выбираем $\varepsilon=-iH\zeta$. Теперь читателю следует проверить, что (5.269) в точности то же самое, что (5.268), если мы выбираем $h_0=-i$, $e_0=f_0=0$ в (5.268) и считаем, что Q в (5.269) — это $\sum_1^\infty Q_r\zeta^{r-1}$, $Q_r=h_rH+e_rE+f_rF$. Для другой градуировки, которую мы использовали

в третьем примере в разд. 5с, мы берем элемент $\varepsilon = -F\zeta + E$ (который имеет вес 1).

Почему вообще необходимо включать какие-то новые элементы в алгебру? К несчастью, в настоящее время я этого не знаю. Очевидно, однако, что теория в чем-то не завершена. Не найдено естественного способа введения τ-функции в рамках теории Ли. Более того, некоторые формулы, например (5.63) для тензора тока, по-видимому, требуют введения оператора $\zeta d/d\zeta$. Далее, так как полная интегрируемость уравнений Лакса означает, что мы с помощью канонических преобразований можем свести сильно взаимодействующую систему (5.268) к невзаимодействующим гармоническим осцилляторам, то следует ожидать появления алгебры Гейзенберга. Но не существует подалгебры $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$, которая является алгеброй Гейзенберга. Требуется дополнительный элемент — центр Z.

Рассмотрим поэтому расширенную алгебру

$$\hat{G} = G + cZ + dD, \quad D = \zeta \frac{d}{d\zeta}. \tag{5.270}$$

Нам нужно задать правила коммутирования и взятия внутреннего произведения, связанные с включением новых элементов. Они таковы ($X, Y \in G$):

$$[Z, \text{ все что угодно}] = 0, \tag{5.271a}$$

$$[D, X] = \zeta \frac{dX}{d\zeta} = \sum_{\infty}^{-N} - jX_j\zeta^{-j}, \tag{5.271b}$$

$$[X, Y] = [X, Y]^{\sim} + \langle [D, X], Y\rangle_0 Z. \tag{5.271c}$$

В (5.271c) $[X, Y]^{\sim}$ обозначает коммутатор по старым правилам $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$; например, $[H, E]^{\sim} = 2E$. Новый член — это $\langle DX, Y\rangle_0 Z$. Новое нетривиальное правило внутреннего умножения есть

$$\langle Z, D\rangle = 1; \tag{5.272}$$

оно необходимо, чтобы выполнялся закон объема параллелепипеда

$$\langle \hat{X}, [\hat{Y}, \hat{Z}]\rangle = \langle \hat{Z}, [\hat{X}, \hat{Y}]\rangle = \langle \hat{Y}, [\hat{Z}, \hat{X}]\rangle \tag{5.273}$$

для $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z} \in \hat{G}$. Проверте его, например, для $\hat{X} = D$, $\hat{Y} = \hat{Z} = Y \in G$.

Давайте рассмотрим несколько примеров. Пусть $X \in G$; вычислим $[\nabla\Phi_k(X), X]$. Опять $\nabla\Phi_k(X) = -S^k X = -\sum_{\infty}^{N} X_{-j}\zeta^{j+k}$, $X_{-j} \in \mathrm{sl}(2, C)$, но обратите внимание, что из-за дополнительных

членов, пропорциональных центру в (5.271c), коммутатор не нуль. Поэтому функции $\Phi_k(X)$ больше не являются ad-инвариантными, и мы теряем одну из отправных точек исходной теории. Тем не менее можно проверить, проследив за всеми деталями, что если

$$\hat{Q} = \sum_0^\infty (h_r H + e_r E + f_r F)\zeta^{-r} + cZ + dD,$$

то уравнения Лакса $Q_{t_k} = [Q^{(k)}, Q]^\sim$ останутся справедливыми и c и d — константы.

Далее вычислим коммутатор градиентов от Φ_{k-1}, Φ_{j-1}, т. е. гамильтонианов для потоков t_k и t_j на $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Мы вычисляем градиенты в выделенной точке $\varepsilon = -iH\zeta$ пространства K^*, т. е. $\nabla\Phi_{k-1}(-iH\zeta) = -iH\zeta^k$. Мы находим

$$[\nabla\Phi_{k-1}(-iH\zeta), \nabla\Phi_{j-1}(-iH\zeta)] = [-iH\zeta^k, -iH\zeta^j] = -2k\delta_{j+k,0}Z.$$

Поэтому последовательность $\{\nabla\Phi_{k-1}(-iH\zeta)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ порождает подалгебру Гейзенберга в $A_1^{(1)}$, и мы можем ввести представление

$$-iH\zeta^k \to \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad k > 0,$$

$$-iH\zeta^j \to 2jt_{-j}, \quad j < 0.$$

Читателю также следует проверить, что последовательность $\{\nabla\Phi_{k-1}(\varepsilon)\}$, где ε — это выделенный элемент $\varepsilon = -F\zeta + E$ в альтернативной градуировке, также порождает подалгебру Гейзенберга. Тот факт, что всем управляющая алгебра $A_1^{(1)}$ имеет подалгебру Гейзенберга, убедителен, ибо мы знаем, что алгебра скобок Пуассона между данными рассеяния — это алгебра Гейзенберга. Читатель помнит, что основная идея метода обратной задачи состоит в переходе от старых координат q, r, q_x, r_x, ... и т. д. (в нашем обсуждении мы считаем x выделенным временем) к новым координатам типа действие — угол, которые при $r = -q^*$ суть

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{\pi}\ln aa^*(\xi),\ \xi \text{ вещественно},\ 2i\zeta_k,\ 2i\zeta_k^*,\ k = 1, \ldots, N\right),$$

$$\mathbf{q} = (\ln b(\xi),\ \ln b_k,\ \ln b_k^*).$$

В [70] показано, что по отношению к скобке

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta q}\frac{\delta G}{\delta r} - \frac{\delta F}{\delta r}\frac{\delta G}{\delta q}\right) dx$$

оказывается, что $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$, и для вещественных ξ, ξ' $\{p(\xi), q(\xi')\} = \delta(\xi - \xi')$, $\{p(\xi), p(\xi')\} = 0$, $\{q(\xi), q(\xi')\} = 0$. Я еще не знаю, как отождествить эту подалгебру Гейзенберга с той, которая порождается последовательностью $\{-iH\zeta^k\}_{-\infty}^{\infty}$, но верю, что одна является проявлением другой.

В дополнение я хочу обратить ваше внимание на ряд ситуаций, когда важен элемент с производной $\zeta d/d\zeta$. Мы знаем, что при третьем определении τ-функции формула (5.91b) имеет вид

$$\langle \hat{V}^{-1} D\hat{V}, \ -i\zeta^j H\rangle_0 = \frac{\partial}{\partial t_j} \ln \tau.$$

Мы также отмечали, что формулу для тензора тока F_{jk} лучше всего записывать в виде

$$F_{jk} = \langle [D, \ \pi_N \nabla \Phi_k(Q)], \ \zeta^j Q\rangle_0,$$

где $Q = \sum_0^\infty Q_r \zeta^{-r}$, $Q_0 = -iH$ и $D = \zeta d/d\zeta$. Читатель узнает этот коэффициент как дополнительный член, пропорциональный центру Z, который появляется в коммутаторе

$$[\pi_N \nabla \Phi_k(Q), \ \zeta^j Q]$$

и который описывал бы временную эволюцию элемента $\zeta^j Q$ под действием потока t_k, если бы $\zeta^j Q$ принадлежал $K^\perp$. В общем случае, конечно, это не так. Однако на чисто формальном уровне, если записать временную зависимость для $\zeta^j Q + c_j Z + d_j D$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\zeta^j Q + c_j Z + d_j D) = [Q^{(k)}, \ \zeta^j Q]^{\sim} + F_{jk} Z. \qquad (5.274)$$

Это означало бы, что d_j является константой и что c_j — это градиент $\ln \tau$, т. е. $\partial \ln \tau / \partial t_j$. Заметьте, в частности, что в случае $j = 0$, когда формула (5.274) действительно выполняется, $\partial \ln \tau / \partial t_0 = 0$. Это оттого, что зависимость всех величин e_r, f_r от t_0 экспоненциальна; $e_1(t_0, t_1, \ldots) = e_1(t_1, \ldots) e^{-2it_0}$, $f_1(t_0, t_1, \ldots \ldots) = f_1(t_1, \ldots) e^{2it_0}$. Тогда из-за того, что h_r вычисляется из ζ^{-r}-компоненты уравнения $h^2 + ef = -1$, все функции h_r (и, следовательно, τ) не зависят от t_0.

Наконец, я хочу, чтобы вы обратили внимание, как важен оператор $\zeta d/d\zeta$ вместе с его произведениями на степени ζ для построения точно решаемых неавтономных уравнений. Эти уравнения также являются естественной иерархией для $\hat{A}_1^{(1)}$, но совершенно отличны от тех, что мы уже видели. В некоторых предельных случаях это те уравнения, которые получились бы

при поиске обладающих масштабной инвариантностью решений предыдущей иерархии. Читателю следует вспомнить обсуждение в разд. 5f(iii). Мы найдем один из простейших примеров этих новых потоков, если рассмотрим условие интегрируемости пары уравнений

$$V_x = Q^{(1)}V, \tag{5.275a}$$

$$V_t + \zeta V_\zeta = (Q^{(3)} + xQ^{(1)})V. \tag{5.275b}$$

В результате перекрестного дифференцирования получаем

$$Q_t^{(1)} + \zeta \frac{d}{d\zeta} Q^{(1)} - Q_x^{(3)} - (xQ^{(1)})_x + [Q^{(1)}, Q^{(3)}]^\sim = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]^\sim$ есть старый матричный коммутатор алгебры $\tilde{\mathrm{sl}}(2, C)$. Член $\zeta(d/d\zeta)Q^{(1)}$ сокращается с членом $1 \cdot Q_0$ из $(xQ^1)_x$, и остается

$$Q_{1t} - (xQ_1)_x - Q_x^{(3)} + [-i\zeta H + Q_1, Q^{(3)}] = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется в точности при нашем первоначальном выборе $Q^{(3)} = -iH\zeta^3 + Q_1\zeta^2 + Q_2\zeta + Q_3$, $Q_r = h_r H + e_r E + f_r F$. Приравнивая коэффициенты при ζ^0, мы получаем эволюционные уравнения

$$q_t - (xq_x) + \frac{1}{4}(q_{xxx} - 6qrq_x) = 0, \tag{5.276a}$$

$$r_t - (xr)_x + \frac{1}{4}(r_{xxx} - 6qrr_x) = 0. \tag{5.276b}$$

У этих уравнений есть несколько черт, на которые стоит обратить внимание. Во-первых, как уже упоминалось, они отражают масштабные симметрии, присущие иерархии АКНС, некоторые детали которых обсуждались в разд. 5f(iii). Легко проверить, что если бы мы написали правую часть (5.275b) в виде $3t_3Q^{(3)}$ вместо $Q^{(3)}$, то третий член в (5.276a, b) превратился бы в $-3t_3q_{t_3}$ и $-3t_3r_{t_3}$ соответственно, и из уравнений следовало бы, что q и r суть функции от $X = (x/(3t_3)^{1/3})$ и $T = xe^t$. Если мы потребуем, чтобы q и r были независимы от t, мы снова придем к автомодельным решениям того же типа, что и обсуждавшиеся в разд. 5f(iii). Вторая интересная черта — это природа законов сохранения. Без членов $(xq)_x$ и $(xr)_x$ они задаются выражениями

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1j} = \frac{\partial}{\partial t_1} F_{3j}, \quad j = 1, 2, \ldots;$$

например,

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{11} = -\frac{\partial}{\partial t} qr = \frac{\partial}{\partial x} F_{31} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4}(rq_{xx} + qr_{xx} - r_x q_x - 3q^2r^2).$$

Но что такое $-r(xq)_x - q(xr)_x$? Это просто производная от $(-xqr + \partial \ln \tau/\partial x)$ по x, и, таким образом,

$$-\frac{\partial qr}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{4}(rq_{xx} + qr_{xx} - r_x q_x - 3q^2r^2) - xqr + \frac{\partial}{\partial x}\ln\tau\right\},$$

или

$$-\frac{\partial F_{11}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{13} + xF_{11} + \frac{\partial \ln \tau}{\partial x}\right).$$

Опять появляется градиент от $\ln\tau$. Давайте исследовать дальше. Рассмотрим $F_{12} = -2ih_3 = i/2(rq_x - r_x q)$.

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial t} = \frac{\partial F_{32}}{\partial x} + \frac{i}{2}(r(xq)_{xx} + q_x(xr)_x - q(xr_{xx}) - r_x(xq)_x) =$$
$$= \frac{\partial F_{32}}{\partial x} + \frac{i}{2}(x(rq_x - r_x q)_x + 3(rq_x - r_x q)) =$$
$$= \frac{\partial F_{32}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}xF_{12} + 2\frac{\partial^2 \ln\tau}{\partial x\,\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{32} + xF_{12} + 2\frac{\partial \ln\tau}{\partial t_2}\right).$$

Но если мы собираемся вводить время t_2 и считать его независимой переменной, мы должны быть уверены, что поток t_2 коммутирует с потоком t. Чтобы обеспечить это, нам нужно прибавить член $2t_2Q^{(2)}$ к правой части (5.274), который не портит совместность (5.275a, b); он просто эквивалентен выбору $h^2 + ef = -1 + c_1\zeta^{-1} + \ldots$ при подходящем выборе c_1. Рассмотрим

$$V_x = Q^{(1)}V, \tag{5.277a}$$
$$V_{t_2} = Q^{(2)}V, \tag{5.277b}$$
$$V_t + \zeta V_\zeta = (Q^{(3)} + 2t_2Q^{(2)} + xQ^{(1)})V. \tag{5.277c}$$

Перекрестно дифференцируем (5.277a, c) и находим после несложных вычислений

$$Q_{1t} - (xQ_1)_x - 2t_2Q_{1t_2} + [Q_1, Q_3] = 0, \tag{5.278}$$

где мы использовали совместность

$$Q^{(1)}_{t_2} - Q^{(2)}_{t_1} + [Q^{(1)}, Q^{(2)}] = 0 \tag{5.279}$$

(5.277a, b). Из (5.277b, c) мы имеем

$$Q^{(2)}_t - iH\zeta^2 + Q_1\zeta - Q^{(3)}_{t_2} - 2t_2Q^{(2)}_{t_2} - 2Q^{(2)} - xQ^{(1)}_{t_2} +$$
$$+ [Q^{(2)}, Q^{(3)} + xQ^{(1)}] = 0.$$

Напомним, что $Q^{(1)}_{t_2} = Q^{(2)}_{t_1} - [Q^{(1)}, Q^{(2)}]$ и $Q^{(3)}_{t_2} + [Q^{(3)}, Q^{(2)}] = Q^{(2)}_{t_3}$. Тогда имеем

$$Q^{(2)}_t - Q_1\zeta - 2t_2Q^{(2)}_{t_2} - xQ^{(2)}_x - Q^{(2)}_{t_3} = 0.$$

Вычисляя коэффициенты при степенях ζ, получаем

$$\zeta: \quad Q_{1t} - (xQ_1)_x - 2t_2Q_{1t_2} - Q_{1t_3} = 0,$$
$$\zeta^0: \quad Q_{2t} - xQ_{2x} - 2(t_2Q_2)_{t_2} - Q_{2t_3} = 0.$$

Читателю следует проверить, что последние уравнения действительно совместны.

Подводя итоги, мы отмечаем:

(i) Включение новых базисных элементов $\zeta d/d\zeta$ и Z в фазовое пространство приводит к новому классу потоков, и эти потоки неавтономны.

(ii) Может оказаться, что в дополнение к переменным фазового пространства (h_r, e_r, f_r) следует также ввести в качестве зависимых переменных t_j и $\partial \ln \tau/\partial t_j$, $j = 1, 2, \ldots$, последнюю в качестве коэффициента при центре.

(iii) Новые потоки имеют также бесконечный набор локальных законов сохранения и симметрий, если считать $\partial \ln \tau/\partial t_j$ новыми локальными переменными. Например, так как $\partial \ln \tau/\partial t_j = -2i \int^{x=t_1} h_{j+1}\,dx$, мы можем считать новую переменную нижним пределом интегрирования. Похоже, что эти симметрии совпадают с симметриями, предложенными Ченем, Ли и Лином [122], хотя я не проверял этого. Я отмечаю, что алгебра, которой удовлетворяют эти симметрии σ_n, определяется соотношениями $[\sigma_m, \sigma_n] = (m-n)\sigma_{m+n-1}$. Обратите внимание, что это в точности алгебра Вирасоро, которой удовлетворяет последовательность $\sigma_n = -\zeta^n d/d\zeta$.

(iv) Моя гипотеза: элемент

$$\pi_N \zeta^j Q + \frac{\partial \ln \tau}{\partial t_j} Z + \left(-\zeta^j \frac{d}{d\zeta}\right)$$

играет важную роль во всей теории.

Итак, я оставляю вам множество открытых вопросов. Я надеюсь, что намеки и предложения этого раздела раздразнят вас, как и меня, и, более того, вы сделаете что-нибудь на эту тему. Желаю удачи[1]).

---

[1]) *Примечание переводчиков.* Наверно, как раз, когда писались эти строки, мы (А. О. и Е. Ш.) сделали первую работу [5*, 6*] из серии работ, посвященных некоммутативным симметриям интегрируемых систем. Далее в [7*] для неодномерных $(2+1)D$ уравнений были найдены симметрии, описываемые операторами $\xi^n(d/d\zeta)^m$ и соответствующие им L—A пары. В [8*], в частности, было анонсировано, как эти симметрии описываются в терминах $\bar\partial$-задачи и с помощью вершинного оператора. Подробности, свойства (гамильтоновость, законы сохранения) и изложение с других точек зрения (свободные фермионы, грассманианы и проч.), а также краткое изложение суперслучая см. в [9*]. Все ссылки относятся к списку дополнительной литературы к гл. 3.

Замечание. Я не хочу, чтобы после прочтения разд. 5b у читателя осталось впечатление, будто метод Уолквиста — Эстабрука дает несложный способ находить лаксово представление для интегрируемых систем. Многое зависит от способности установить зависимость P в (5.3) от координат q, q_x, q_{xx}, ... на фазовом пространстве. В самом деле, я знаю несколько примеров конечномерных интегрируемых систем, для которых известны все интегралы движения, но для которых не найдена лаксова пара. Например, я предлагаю читателю рассмотреть стационарное уравнение для потока t_5 семейства КдФ $q_{xxxx}+5q_x^2+10qq_{xx}+10q^3=0$, про которое нам известно, что оно гамильтоново с каноническими координатами

$$p_1=q_x,\quad q_1=\frac{1}{4}(q_{xx}+3q^2),\quad p_2=\frac{1}{2}q_{xxx}+qq_x,\quad q_2=q,$$

с гамильтонианом

$$H=p_1p_2+\frac{1}{4}p_1^2-2q_1^2q_2+\frac{1}{2}q_1q_2^4$$

и вторым интегралом движения

$$G=-\frac{1}{2}\left(p_2+\frac{1}{2}p_1q_2\right)^2+\frac{1}{4}q_1p_1^2-2q_1^2q_2+\frac{1}{2}q_1q_2^3$$

в инволюции. H порождает поток x, G — поток t_3. Зная уравнение и сообщенную выше информацию, можете ли вы, используя метод Уолквиста — Эстабрука, показать, что уравнение Лакса есть $Q_x=[Q^{(1)}, Q]$, т. е. условие совместности для $yV=QV$, $V_x=Q^{(1)}V$, где

$$Q^{(1)}=-i\zeta H+qE-F,$$

$$Q=\left(i\zeta B-\frac{1}{2}B_x\right)H+\left(-\frac{1}{2}B_{xx}+i\zeta B_x-qB\right)E+BF,$$

$$B=-\zeta^4+\frac{q}{2}\zeta^2-\frac{1}{8}(q_{xx}+3q^2)?$$

Другой пример (в котором я еще не знаю ответа) порождается

$$H=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+q_1^2+2q_2^3$$

со вторым интегралом движения

$$G=q_1^4+4q_1^2q_2^2-4p_1^2q_2+4p_1p_2q_1.$$

Трудность в том, что у нас нет хорошего рецепта для вычисления зависимости Q, $Q^{(1)}$ от координат, в которых задана исходная задача.

Однако я не хочу, чтобы мое замечание звучало слишком пессимистично, потому что иногда эта схема действительно работает (особенно если использовать данный метод вместе с информацией, полученной из теста Пенлеве), и тогда она имеет то крупное преимущество, что указывает координаты, в которых интегралы движения разделяются. Например, в первом приведенном выше примере возьмем

$$B = -(\zeta^2 - \mu_1)(\zeta^2 - \mu_2)$$

и найдем

$$H = -8\frac{\mu_1^5 - \mu_2^5}{\mu_1 - \mu_2} + 2(\mu_{1x}^2 - \mu_{2x}^2)(\mu_2 - \mu_1),$$

что разделяется следующим образом:

$$-\mu_1^5 - \frac{H}{8}\mu_1 \frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2)^2 \mu_{1x}^2 =$$

$$= -\mu_2^5 - \frac{H}{8}\mu_2 - \frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1)^2 \mu_{2x}^2 = \frac{G}{8},$$

а это совпадает с (3.168) и, как мы показали, интегрируется с помощью отображения Абеля.

Поэтому уместно задаться вопросом: имеет ли гамильтонова система, интегрируемая по Лиувиллю (N интегралов движения в инволюции), эквивалентную формулировку с помощью лаксовой пары, и если имеет, то как ее построить?

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Scott Russel (1844). Report on waves. Rept. Fourteenth Meeting of of the British Association for the Advancement of Science. John Murray, London, pp. 311—390.

[2] — (1865). The Modern System of Naval Architecture, 1. Day and Son, London, p. 208.

[3] J. Boussinesq (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent... — J. Math. Pures Appl., 17 (2), pp. 55—108.

[4] D. J. Korteweg and G. de Vries (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. — Phil. mag., 39, pp. 422—443.

[5] A. Fermi, J. Pasta, S. Ulam (1940, 1955). Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report, LA 1940, 1955; in: Nonlinear Wave Motion. A. C. Newell ed. Lectures in Applied Math., 15, American math. Soc., Providence, RI., 1974, pp. 143—196.

[6] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal (1965). Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. — Phys. Rev. Lett., 15, pp. 240—243.

[7] M. D. Kruskal (1965). Asymptotology in numerical computations: Progress and plans on the Fermi — Pasta — Ulam problem. — Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Large-Scale Problems in Physics, IBM Data Processing Division, White Plains, N. Y., pp. 43—62.

[8] — (1974). The Korteweg — de Vries Equation and Related evolution equations. In: Nonlinear Wave Motion. A. C. Newell, ed. Lectures in Appl. Math., 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 61—83.

[9] M. D. Kruskal, N. J. Zabusky (1963). Progress on the Fermi — Pasta — Ulam non-linear string problem, Princeton Plasma physics Lab. Annual Rept. MATT-Q-21, Princeton, NJ, pp. 301—308.

[10] N. J. Zabusky (1981). Computational synergetics and mathematical innovations. — J. Comp. Phys., 43, pp. 195—249.

[11] R. M. Miura (1968). Korteweg — de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. — J. Math. Phys., 9, pp. 1202—1204.

[12] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, K. M. Miura (1967). Method for solving the Korteweg — de Vries equation. — Phys. Rev. Lett., 19, pp. 1095—1097.
— (1974). The Korteweg — de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. — Comm. Pure Appl. Math., 27, pp. 97—133.

[13] C. S. Gardner (1971). The Korteweg — de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg — de Vries equation as a Hamiltonian system. — J. Math. Phys, 12, pp. 1548—1551.
В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев (1971). Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функц. анал. и его прилож. 5, № 4, с. 18—27.

[14] P. D. Lax (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. — Comm. Pure Appl. Math., 21, pp. 467—490.
[Имеется перевод: П. Д. Лакс. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. — Математика, 13 : 5, с. 128—150. — М.: Мир, 1969.]
[15] S. L. McCall, E. L. Hahn (1967). Self-induced transparency by pulsed coherent light. — Phys. Rev. Lett., 18, pp. 908—911.
— (1969). Self-induced transparency. — Phys. Rev., 183, pp. 457—485.
[16] L. P. Eisenhart (1909). A Treatise of the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Ginn & Co, reprinted by Dover, New York, 1960.
[17] A. Seeger, H. Donth, A. Kochendorfer (1953). Theorie der Versetzungen in eindimensionalem Atomreihen. — Z. Phys., 134, pp. 173—193.
[18] J. K. Perring, T. H. R. Skyrme (1962). A model unified theory. — Nucl. Phys., 31, pp. 550—555.
[19] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. McLaughlin (1973). The soliton: A new concept in applied science. — Proc. IEEE, 61, pp. 1443—1483.
[20] G. L. Lamb, Jr. (1971). Analytical descriptions of ultra-short optical pulse propagation in a resonant medium. — Rev. mod. Phys., 43, pp. 99—129.
[21] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971). Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде. — ЖЭТФ, 61, с. 118—134.
[22] M. Wadati (1972). The exact solution of the modified Korteweg — de Vries equation. — J. Phys. Soc. Japan, 32, pp. 1681ff.
[23] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1973). Method for solving the Sine-Gordon equation. Phys. Lett., 30, pp. 1262—1264.
— (1973) Nonlinear-evolution equations of physical significance. — Phys. Rev. Lett., 31, pp. 125—127.
— (1974).The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems. — Stud. Appl. Math., 53, pp. 249—315.
[24] H. Flaschka (1974). The Toda lattice. I. Existence of integrals. Phys. Rev. B., 9, pp. 1924—1925.
— (1974). On the Toda lattice. II. Inverse scattering solution. Progr. Theor. Phys., 51, pp. 703—716.
[25] H. P. McKean, P. van Moerbeke (1975). The spectrum of Hill's operator. — Invent. Math., 30, pp. 217ff.
[26] С. П. Новиков (1974). Периодическая задача Кортевега — де Фриза. — Функц. анализ и его приложения, 8, с. 54—66.
[27] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев (1975). Об операторах Хилла с конечным числом. — Функц. анализ и его приложения, 9, с. 69—71.
[28] I. M. Krichever, S. P. Novikov (1980). Mathematical Physics Reviews, Vol. 1, S. P. Novikov, ed., pp. 5—23. (см. также И. М. Кричевер, С. П. Новиков (1980). Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. — Успехи матем. наук, 35, с. 47—68).
[29] H. P. McKean, E. Trubowitz (1976). Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. — Comm. Pure Appl. Math., 29, pp. 143—226.
[30] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy (1922, 1928). Commutative ordinary differential operators I, II. — Proc. London Math. Soc., 21, pp. 420—440; Proc. Royal Soc. London, Ser. A, 118, pp. 557—583.
[31] S. V. Manakov (1981). The inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation and Kadomtsev — Petviashvili equation. — Physica, D, 3, pp. 420—427.
[32] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz (1983). On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev — Petviashvili equation. — Studies in Applied Mathematics, 68, pp. 1—12.

H. Segur (1981). Comments on inverse scattering for the Kadomtsev — Petviashvili equation. — Proc. La Jolla Workshop.
[33] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin (1978). Construction of instantons. — Phys. Lett., A, 65, p. 285.
[34] R. Hirota (1980). Direct methods in soliton theory. — In: Topics in Current Physics, 17, R. Bullough and P. Caudrey, eds, Springer-Verlag, New York, pp. 157—175.
[35] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur (1978). Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations. of Painlevé type. — Lett. Nuovo Cimento, 23, pp. 333—338.
— (1980). A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations p-type I, II.—J. Math. Phys., 21, pp. 715—721, 1006—1015.
[36] H. Flaschka, A. C. Newell (1980). Monodromy and spectrum preserving deformations. — Comm. Math. Phys., 76, pp. 65—116.
[37] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook (1973). Bäcklund transformation for slutions of the Korteweg — de Vries equation. — Phys. Rev. Lett., 31, pp. 1386—1390.
— (1975). Prolongation structures of nonlinear evolution equations. — J. Math. Phys., 16, pp. 1—7.
[38] H. Flaschka, A. C. Newell, T. Ratiu (1983). Kac-Moody algebras and soliton equations, II. Lax equations associated with $A_1^{(1)}$, Physica, D, 9, pp. 300—323.
— (1983). III, Stationary equations associated with $A_1^{(1)}$, Physica, D, 9, pp. 324—331; Papers I, IV to follow.
[39] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa (1983). Transformation groups for soliton equations. — Proc. RIMS Symposium on Nonlinear Integrable Systems — Classical and Quantum Theory. M. Jimbo and T. Miwa, eds., World Scientific Press.
[40] G. Segal, G. Wilson (1983). Loop groups and equations of KdV type. — Proc. Math. Inst., Oxford Univ.
[41] J. W. Miles (1981). The Korteweg — de Vries equation: A historical essay. — J. Fluid Mechanics, 106, pp. 131—147.
[42] — (1979). On the Korteweg — de Vries equation for a gradually changing channel. — J. Fluid Mech., 91, pp. 181—190.
[43] C. J. Knickerbocker, A. C. Newell (1980). Shelves and the Korteweg — de Vries equation. — J. Fluid Mech., 98, pp. 803—818.
— (1980). Internal solitary waves near a turning point. — Phys. Lett., 75A, pp. 326—330.
— (1985). Reflections from a solitary wave in a chaneel of varying depths. — J. Fluid Mech., 153, pp. 1—16.
[44] R. S. Johnson (1973). On the development of a solitary waves moving over an uneven bottom. — Proc. Camb. Phil. Soc., 83, p. 183.
[45] D. J. Kaup, A. C. Newell (1978). Solitons as particles, oscillators and in slowly changing media: a singular perturbation theory. — Proc. Roy. Soc., London, A 361, pp. 413—446.
[46] В. Н. Карпман, Е. М. Маслов (1977, 1978). Структура хвостов, образующихся при воздействии возмущений на солитоны. — ЖЭТФ, 73, с. 537, 75, с. 504.
[47] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1974). Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. — Функц. анализ и прилож. 8, с. 43—53.

[48] Б. Б. Кадомцев, В. Н. Петвиашвили (1970). Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах. — Доклады АН СССР, 192, с. 753—756.
[49] C. H. Su (1983). An evolution equation for a stratified flow having two characteristics coalesced. Preprint. Div. Appl. Math., Brown Univ., Providence, R I; Advances in Nonlinear Waves, Cambridge Univ. Press, to appear in special volume.
[50] M. Toda (1981). Theory of nonlinear lattices. — Solid State Sciences, 20. Springer — Verlag, New York.
[51] T. B. Benjamin, I. F. Feir (1967). The disintegration of wave trains on deep water. — J. Fluid Mech., 27, pp. 417—430.
[52] A. C. Newell (1977). Nonlinear tunneling. — J. Math. Phys., 19, pp. 1—26.
[53] D. J. Benney, A. C. Newell (1967). The propagation of nonlinear wave envelopes. — J. Math. and Phys. (now Stud. Appl. Math.), 46, pp. 133—139.
[54] H. Hasimoto, H. Ono (1972). Nonlinear modulation of gravity waves. — J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 805—811.
A. Davey (1972). The propagation of a weakly nonlinear wave. — J. Fluid Mech., 53, pp. 769ff.
[55] G. B. Whitham (1974). Linear and nonlinear waves. — Wiley-Interscience, New York. [Имеется перевод: Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]
[56] D. J. Benney, G. J. Roskes (1969). Wave instabilities. — Stud. Appl. Math., 48, pp. 377—385.
[57] A. Davey, K. Stewartson (1974). On three-dimensional packets of surface waves. — Proc. Roy. Soc. London A, 338, pp. 101—110.
[58] В. Е. Захаров (1972). Коллапс ленгмюровских волн. — ЖЭТФ, 62, вып. 5, с. 1745—1759.
[59] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, W. E. Ferguson (1977). Nonlinear deep water waves: theory and experiment, Part 2. — J. Fluid Mech., 83, pp. 49—74.
[60] H. C. Yuen, W. E. Ferguson (1978). Fermi — Pasta — Ulam recurrence in the two-space dimensional nonlinear Schrodinger equation. — Phys. Fluids, 21, P. 2116—2118.
[61] В. Е. Захаров, В. С. Сынах (1975). О характере особенности при самофокусировке. — ЖЭТФ, 68, вып. 3, с. 940—947.
[62] N. J. Ablowitz, D. J. Benney (1970). The evolution of multi-phase modes for nonlinear dispersive waves. — Stud. Appl. Math., 49, pp. 225—238.
[63] M. J. Ablowitz (1971). Applications of slowly varying nonlinear dispersive wave theories. — Stud. Appl. Math., 50, pp. 329—344.
[64] M. C. Cross, A. C. Newell (1984). Convection patterns in large aspect ratio systems. — Physica D, 10, pp. 299—329.
[65] H. Flaschka, G. Forest, D. W. McLaughlin (1979). Multiphase averaging and the inverse spectral solution of KdV. — Comm. Pure Appl. Math., 33, pp. 739—784.
[66] P. D. Lax, D. Levermore (1979). The zero dispersion limit for the Korteweg — de Vries equation. — Proc. Natl. Acad. Sci., 76, pp. 3602—3606.
[67] M. V. G. Krishna (1974). Ph. D. thesis, Clarkson College of Technology, Potsdam, N. Y.
[68] G. L. Lamb (1971). Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. — Rev. Mod. Phys., 43, pp. 99—124.
[69] — (1980). Elements of Soliton Theory. — John Wiley, New York.

[70] H. Flashka, A. C. Newell (1973). Integrable systems of nonlinear evolution equations. — In: Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer — Verlag, New York, pp. 355—440.
[71] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, S. E. Trullinger (1980). Solitons in condensed matter: A paradigm, Physica D, 1, pp. 1—44.
[72] D. J. Kaup, A. Rieman, A. Bers (1979). Space-time evolution of nonlinear three wave interactions I, Interaction in a homogeneous medium. — Rev. Mod. Phys., 51, pp. 275—309.
[73] D. J. Kaup (1976). A perturbation theory for inverse scattering transforms. — SIAM J. Appl. Math., 31, pp. 121—123.
[74] — (1981). The solution of the general initial value problem for the full three-dimensional three-wave resonant interaction. — Physica D, 3, P. 374—395.
[75] A. C. Newell (1980). The inverse scattering transform, in Topics in Current Physics 17, R. Bullough and P. Caudrey eds., Springer — Verlag, New York, pp. 177—242. [Имеется перевод: Солитоны. Под ред. С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.]
[76] M. J. Ablowitz, R. Haberman (1975). Resonantly coupled nonlinear evolution equations. — J. Math. Phys., 16, pp. 2301—2305.
[77] A. C. Newell (1979). The general structure of integrable evolution equations. — Proc. Roy. Soc. London A, 365, pp. 283—311.
[78] D. J. Kaup, A. C. Newell (1978). An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation. — J. Math. Phys., 19, pp. 798—801.
[79] D. J. Kaup, A. C. Newell (1977). On the Coleman correspondence and the solution of the massive Thirring model. — Lett. Nuovo Cimento, 20, pp. 325—331.
[80] P. Deift, E. Trubowitz (1979). Inverse scattering on the line. — Comm. Pure Appl. Math., 32, pp. 121—151.
[81] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан (1951). Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. — Известия АН СССР, сер. математ., с. 309—360.
[82] S. Leibovich, G. D. Randall (1973). Amplification and decay of long nonlinear waves. — J. Fluid Mech., 58, pp. 481—493.
[83] I. M. Krichever, S. P. Novikov (1981). Holomorphic bundles and nonlinear equations. — Physica D, 3, pp. 267—293.
[84] R. Abraham, J. E. Marsden (1978). Foundations of Mechanics. Benjamin-Cummings, New York.
[85] S. P. Novikov (1980). A method for solving the periodic problem for the KdV equation and its generalizations, in Topics in Current Physics 17, R. Bullough and Ph. Caudrey, eds., Springer — Verlag, New York, P. 325—338. [Имеется перевод: Солитоны. Под ред. С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.]
[86] H. Flashka (1983). Construction of conservation laws for Lax equations. Comments on a paper by G. Wilson. — Quart. J. Math. Oxford, 34, pp. 61—65.
[87] H. Goldstein (1950). Classical Mechanics. — Addison-Wesley, Reading, MA. [Имеется перевод: Г. Голдстейн. Классическая механика. — М.: Наука, 1975.]
[88] J. Marsden, A. Weinstein (1974). Reduction of symplectic manifolds with symmetry. — Rep. Math. Phys., 5, pp. 121—130.
[89] R. Hirota (1972). Exact solution of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons. — Phys. Rev. Lett., 27, pp. 1192—1194. — (1972). Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons. — J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 1459—1463.

— (1973). Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. — J. Math. Phys., 14, pp. 805—809.
— (1973). Exact N-soliton of a nonlinear lumped network equation. — J. Phys. Soc. Japan, 35, pp. 289—294.
— (1973). Exact N-soliton of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices. — J. Math. Phys., 14, pp. 810—814.
— (1973). Exact three-soliton of the two-dimensional sine-Gordon equation. — J. Phys. Soc. Japan, 35, pp. 1566.
— (1974). A new form of Bäcklund transformation and its relation to the inverse scattering problem. — Prog. Theor. Phys., 52, pp. 1498—1512.
— (1976). Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations. — In: Bäcklund Transformations, R. M. Miura ed., Lecture Notes in Mathematics 515, Springer — Verlag, New York.
— (1977). Nonlinear partial difference equations I. — J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 1429—1433.
— (1977). Nonlinear partial difference equations II. Discrete time Toda equation. — J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 2074—2078.
— (1977). Nonlinear partial difference equations III. Discrete sine-Gordon equations. — J. Phys. Soc. Japan, 43, pp. 2079—2089.
— (1978). Nonlinear partial difference equations IV. Bäcklund transformation for the discrete Toda equation. — J. Phys. Soc. Japan, 45, pp. 321—332.
— (1979). Nonlinear partial difference equations V. Nonlinear equations reducible to linear equations. — J. Phys. Soc. Japan, 46, pp. 321—219.
[90] L. Schlesinger (1912). J. Reine Angew., Math., 141, pp. 96—145.
[91] R. Garnier (1919). Sur une classe de systems differentials abéliens deduits de la théorie des équations linéares. — Rend. Cir. Mat. Palermo, 43, pp. 155—191.
[92] Э. Л. Айнс (1939). Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, ДНТВУ.
[93] M. J. Ablowitz, H. Segur (1977). Exact linearization of a Painlevé transcendent. — Phys. Rev. Lett., 38, pp. 1103—1106.
[94] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale (1983). The Painlevé property for partial differential equations. — J. Math. Phys., 24, pp. 522—526.
[95] H. Rund (1974). Variational problems and Bäcklund transformations associated with the sine-Gordon and Korteweg — de Vries equations and their extensions. — In: Bäcklund Transformations, R. M. Miure ed., Lecture Notes in Math. 515, Springer — Verlag, New York, P. 199—226.
[96] A. C. Newell (1974). The interrelation between Bäcklund transformations and the inverse scattering transform. — In: Bäcklund Transformations, R. M. Miura ed., Lecture Notes in Math. 515, Springer — Verlag, New York, pp. 227—240.
H. Flashka, D. W. McLaughlin (1974). Some comments on Bäcklund transformations. — ibid, pp. 251—295.
L. D. Faddeev (1963). The inverse problem in the quantum theory of scattering. — J. Math. Phys., 4, pp. 72—104.
[97] D. J. Kaup (1980). The Wahlquist — Estabrook method with examples of applications. — Physica D, 1, pp. 391—411.
[98] J. Moser (1975). Dynamical systems, finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system. — In: Dynamical Systems. Theory and Aplications, J. Moser ed., Lecture Notes in Physics, 38, Springer — Verlag, New York.
[99] B. Konstant (1979). The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. — Adv. Math., 34, 3, pp. 195—338.

[100] D. Kazhdan, B. Kostant and S. Steinberg, Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type, Comm. Pure Appl. Math., 31 (1978), pp. 481—507.
[101] I. B. Frenkel and V. G. Kac, Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Invent. Math., 62 (1980), pp. 23—66.
[102] J. Lepowsky and R. L. Wilson, Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ Comm. Math. Phys., 62 (1978), hh. 43—63.
[103] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato, Density matrix of an impenetrable box gas and the fifth Painlevé transcendent, Physica D, 1 (1980), pp. 80—139.
—, Holonomic quantum fields, in Lecture Notes in Physics 116, Springer — Verlag, New York, 1979; pp. 119ff.
M. Sato, T. Miwa and M. Jinbo, Aspects of holonomic quantum fields, Lecture Notes in Physics 126, Springer-Verlag, New York, 1979, pp. 429ff. [Имеется перевод: Голономные квантовые поля. Под ред. В. С. Владимирова. — М.: Мир, 1983.]
[104] K. Sawada and T. Kotera, A method for finding n-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equations, Prog. Theor. Phys., 51 (1974), pp. 1355ff.
[105] В. И. Арнольд (1974). Математические методы классической механики. — М.: Наука.
[106] A. Reyman and M. Semenov-Tian-Shansky, Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. II, Invent Math., 63 (1981), pp. 423—432.
— А. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский (1980). Алгебры токов и нелинейные уравнения. — Доклады АН СССР, 251, с. 1310—1312.
[107] J. Moser, Dynamical Systems, CIME Lectures, Bressarone, Italy, Program in Mathematics #8, Birkhauser, Boston.
[108] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1979). Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II. — Функц. анализ и его прилож., 13, вып. 3, с. 13—22.
A. V. Mikhailov, The reduction problem and the inverse scattering method, in Solitons, Topics in Current Physics 17, R. Bullough and P. Caudrey, eds., Springer — Verlag, New York, 1980, pp. 243—285.
[109] B. McCoy and T. T. Wu, preprint.
[110] J. M. Greene and I. C. Percival, Hamiltonian maps in the complex plane, Physica D, 3 (1981), pp. 530ff.
[111] H. Segur, Lectures given at the International School of Physics (Enrico Fermi), Varenna, Italy, unpublished, 1980.
[112] A. S. Davydov, The role of solitons in the energy and electron transfer in one-dimensional molecular systems, Physica D, 3 (1981), pp. 1—22.
J. M. Hyman, D. W. McLaughlin and A. C. Scott, On Davydov's alpha-helix solitons, Physica D, 3 (1981), pp. 23—44.
[113] R. Bullough and P. Caudrey, eds., Solitons, Topics in Current Physics 17, Springer — Verlag, New York, 1980. [Имеется перевод: Солитоны. Под ред. С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.]
[114] M. J. Ablowitz and H. Segur, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM Studies in Applied Mathematics 4, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1981. [Имеется перевод: М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Под ред. В. Е. Захарова. — М.: Мир, 1987.]
[115] K. Lonngren and A. C. Scott, eds., Solitons in Action, Acidemic Press, New York, 1978. [Имеется перевод: Солитоны в действии. Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, Л. А. Островского. — М.: Мир, 1981.]

[116] F. Calogero and A. Degasperis, Solitons and the Spectral Transform I, North-Holland, Amsterdam, 1982. [Имеется перевод: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. Спектральное преобразование и солитоны. Под ред. В. Е. Захарова. — М.: Мир, 1985.]
[117] W. Eckhaus and A. Van Harten, The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons: An Introduction, Mathematical Studies 50, North — Holland, Amsterdam, 1981.
[118] H. Flaschka and D. W. McLaughlin, eds., The Theory and Application of Solitons, Rocky Mountain J. Math. vol. 8, issues 1, 2, 1978.
[119] F. Calogero, ed., Nonlinear Evolution Equatfons Solvable by the Spectral Ttransform Research Notes in Mathematics 26, London, Pitman, 1978.
[120] R. Miura, The Korteweg — de Vries equation, a survey of results, SIAM Rev, 18 (1976), pp. 412—459.
[121] G. S. Emmerson, J. S. Russell, A Biography, John Murray, London, 1971.
[122] H. H. Chen, Y. C. Lee and J. E. Lin, On a new hierarchy of symmetries for the integrable nonlinear evolution equations, preprint. (См. также [5] в списке дополнительной литературы к гл. 5).
[123] H. L. Swinney and J. P. Gollub, eds., Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Topics in Applied Physics 45, Springer — Verlag, New York, 1981. [Имеется перевод: Х. Л. Суинни, Дж. П. Голлуб (ред.). Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. Н. Рабиновича. — М.: Мир, 1984.]
[124] Nonlinear and Turbulent Processes, Proceedings 2nd International Workshop, Kiev, 1983, Gordon and Breach, New York, 1984. [Имеется русскоязычное издание: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. — Киев: Наукова Думка, части I и II, 1985.]
[125] M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, Physica D, 2 (1981), pp. 407ff.
—, III, Physica D, 4 (1981), pp. 26ff.
[126] T. Brooke Benjamin, Lectures on Nonlinear Wave Motion, Lectures in Applied Mathematics 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1974, pp. 3—48.
[127] A. C. Newell, Envelope Equations, Lectures in Applied Mathematics 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974, pp. 157—163. Bifurcation and nonlinear focusing, Pattern Formation and Pattern Recognition, H. Haben, ed., Springer Series on Synergetics, Vol. 5, Springer — Verlag, New York, 1979, pp. 244—265.

Литература, добавленная при переводе

К главе 1

[1] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan (1985). Poisson structure for the KdV equation. — Lett. Math. Phys., 10, pp. 183—188.
[2] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, А. К. Поливанов (1988). Замечание о Пуассоновой структуре для уравнения КдФ. — Доклады АН СССР, 298, с. 324—328.
[3] V. E. Zakharov, E. I. Schulman (1980). Degenerative dispersion laws motion invariant and kinetic equations. — Physica D, 1, pp. 192—202;
— (1988). On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems. — Physica D, 29, pp. 283—320.

[4] В. Е. Захаров, Е. И. Шульман (1985). О матрице рассеяния и полной интегрируемости классических гамильтоновых волновых систем. — Доклады АН СССР, 238, с. 1325—1328.
[5] Е. И. Шульман (1988). О дополнительных интегралах движения классических гамильтоновых волновых систем. — ТМФ, 76, № 1.

К главе 3

[1] С. П. Буцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов (1987). Метод обратной задачи с переменным спектральным параметром. — ТМФ, 70, с. 323—341.
[2] И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов (1985). Уравнение Максвелла — Блоха и метод обратной задачи рассеяния. — ТМФ, 63, с. 11—31.
[3] В. А. Белинский, В. Е. Захаров (1978). Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений. — ЖЭТФ, 75, с. 1953—1971.
[4] F. Calogero, A. Degasperis (1978). Exact solution via the spectrum transform of a nonlinear evolution equation with linearly X-dependent coefficients. — Lett. Nuovo Cimento, 22, p. 138.
— (1978). Exact solution via the spectrum transform of a generalization with linearly X-dependent coefficients of the nonlinear Schrödinger equation. — Lett. Nuovo Cimento, 22, p. 420.
[5] А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман (1984). Дополнительные симметрии интегрируемых систем и представления конформной алгебры. — Препринт ИАиЭ № 217, с. 16.
[6] А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман (1985). Дополнительные симметрии нелинейного уравнения Шрёдингера. — ТМФ, 64, с. 323—328.
[7] А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман (1985). Дополнительные симметрии двумерных интегрируемых систем. — Препринт ИАиЭ № 277, с. 19.
[8] A. Yu. Orlow, E. I. Schulman (1986). Additional Symmetries for Integrable Equations and Conform Algebra Representations. Lett. Math. Phys., 12, pp. 171—179.
[9] A. Yu. Orlow (1988). Vertex operator, $\bar{\partial}$-problem, Variational Identities and Hamiltonian structure for $(2+1)$-Integrable Systems. — In: Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. — V. G. Bar'yactar et all, eds., vol. 1. — Singapore: World Scientific, pp. 116—134.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра *Ли* (Lie algebra)
— бесшпуровых матриц (traceless matrices ~) 244
— *Гейзенберга* (Heisenberg ~) 303
— *Каца — Муди* (Kac-Moody) 193, 199
— петель (loop ~) 302
—, центральное расширение (central extension) 273
— Sl(2, *C*) 11, 216
— $A_1^{(1)}$ 302

Безотражательные потенциалы (reflectionless potentials) 119
Бенджамина — Оно уравнение (Benjamen-Ono equation) 14
Бенджамина — Фейра неустойчивость (Benjamen-Feir instability) 75, 89
Бэклунда преобразование (Becklund transformation) 12, 36, 48, 185, 195, 201, 289, 293

Взаимодействие двухсолитонное (two soliton interaction) 121
Возмущений теория (perturbation theory) 128
Волна кноидальная (cnoidal wave) 29
— уединенная (solitary ~) 23, 57
— *Стокса* (Stokes ~) 25
— *Ферми — Пасты — Улама* (Fermi-Pasta-Ulam ~) 27

Гамильтонова структура (Hamiltonian structure) 11, 99
— —, вторая (second ~ ~) 276
Гейзенберга алгебра (Heisenberg algebra) 303
Градуировка (grading) 274
Группа симметрий (symmetry group) 203

Данные рассеяния (scattering data) 38, 112, 122, 283
— —, временная динамика (time dependence) 123
Дуальная алгебра (dual algebra) 216

Закон сохранения (conservation law) 34, 105, 164, 229
— —, в теории возмущений 133
— *Грина* (Green ~) 57
Захарова — Шабата «одевание» (Zakharov-Shabat «dressing») 198, 289, 293

Иерархия АКНС (AKNS hierarchy) 11, 211, 249, 277
— КдФ (KdV ~) 94
— НУШП (DNSE ~) 11
Изинга модель (Ising model) 21, 92
Изомонодромные деформации (isomonodromic deformations) 244, 251
Изоспектральные деформации (isospectral deformations) 244
Инвариант *Римана* (Riemann invariant) 13, 91
Интеграл движения (motion invariant) 16, 164, 246

Каноническое преобразование (canonic transformation) 41
Коэффициент прохождения (transmission coefficient) 37
— отражения (reflection ~) 37

Лоренца модель (Lorentz model) 21

Матрица рассеяния (scattering matrix) 245
— *Картана* (Cartan ~) 273
Модуляционная неустойчивость (modulation instability) 77
Монодромия (monodromy) 263

Начальная задача *Коши* (Cauchy initial problem) 16
Нелинейная суперпозиция (nonlinear superposition) 15
Нормальная мода (normal mode) 26, 38

Пенлеве свойство (Painlevé property) 19, 179
— трансцендент (~ transcendent) 20
Переменные действие — угол (action-angle variables) 16, 283
Приближение двухволновое (bidirectional approximation) 26, 57
— одноволновое (unidirectional ~) 26
Потенциал (potential) 287
Поток отраженный (reflected flow) 137
Преобразование *Бэклунда* (Becklund transformation) 12, 36, 48, 185, 195, 201, 289, 293
— каноническое (canonic ~) 41

— *Миуры* (Miura ~) 33, 35, 187
— *Шлезингера* (Schlesinger ~) 12, 198, 267, 271, 289
Проблема *Римана — Гильберта* (Riemann-Hilbert problem) 12, 198, 247, 279

Расслоение (bundle) 282
Решения автомодельные (selfsimilar solutions) 252
— конечнозонные (finite gar ~) 32, 141, 253
— рациональные (rational ~) 141
— N-солитонные (N-soliton ~) 9, 120, 141
Риманова поверхность (Riemann surface) 145, 152, 244, 249

Симметрия (symmetry) 164
Скобка *Пуассона* (Poisson bracket) 41, 279
Солитон (soliton) 7, 23, 28
Соотношения *Рэнкина — Гюгонио* (Rankin-Hugonio relations) 35
Странный аттрактор (strange attractor) 7, 17

Теория *Колмогорова — Арнольда — Мозера* (Kolmogorov-Arnold-Moser theory) 18
— рассеяния (scattering ~) 108
— *Уизема* (Whitham ~) 8, 81

Уравнение *Бенджамина — Оно* (Benjamen-Ono equation) 14
— *Бенни — Роскеса — Дэви — Стюартсона* (Benny-Roskes-Davey-Stewartson ~) 14
— *Гельфанда — Левитана* (Gelfand-Levitan ~) 119
— гиперболического типа (hyperbolic ~) 7
— для огибающей неустойчивой волны (unstable wave envelope ~) 74
— *Захарова* (Zakharov ~) 70, 79
— *Кадомцева — Петвиашвили* (Kadomtsev-Petviashvili ~) 14, 59, 199
— кирального поля (chiral field ~) 14
— *Кортевега — де Фриза* (Korteweg-de Vries ~) 8, 13, 29, 44
— *Лакса* (Lax ~) 42, 201, 216, 279
— логистическое (logistic ~) 17
— модифицированное *Кортевега — де Фриза* (modified Korteweg-de Vries ~) 14, 44
— точное интегрируемое (exactly integrable ~) 16
— *Хироты* (Hirota ~) 16, 229, 234, 302

— *Шрёдингера* нелинейное (nonlinear Schrödinger ~) 8, 13, 51, 71, 207
— *Шрёдингера* стационарное (stationary Schrödinger ~) 35, 94
— *Эйлера* (Euler ~) 24
— sin-Гордон (sin-Gordon ~) 14
Условие коммутативности (commutativity condition) 214

Форма *Киллинга* (Killing form) 283
Формализм *Хироты* (Hirota formalizm) 9, 19, 47, 168
Формулы следов (trace formulae) 114
Функционал *Казимира* (Kasimir functional) 136

Цепочка ангармоническая (anharmonic chain) 26
— *Тоды* (Toda ~) 14, 46

Энергия (energy) 27
Эргодичность (ergodicity) 17

Якоби многообразие (Jacoby manifold) 152
ad-инвариантная функция (ad-invariant function) 217, 283
τ-функция (τ-function) 9, 19, 22, 47, 159

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5

Введение 7

Глава 1. История солитона 23

Глава 2. Вывод уравнения Кортевега — де Фриза, нелинейного уравнения Шрёдингера и других важных в математической физике канонических уравнений 50

Глава 3. Семейства солитонных уравнений и методы их решения 94

Глава 4. τ-функция, методы Хироты, свойство Пенлеве и преобразование Бэклунда для солитонных уравнений семейства Кортевега — де Фриза . . . 159

Глава 5. Связующие звенья между чудесами солитонной математики 198

Литература 311

Предметный указатель 320