Ю.А.Розанов

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Систематически излагается общий функциональный подход к изучению обобщенных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих многие важные теоретико-вероятностные модели с помощью обобщенных случайных функций. Изучаются граничные свойства обобщенных функций, дается характеризация всех возможных граничных условий для общего (линейного) дифференциального оператора, устанавливается разрешимость общих граничных задач, дается их точное и приближенное решение. На этой основе находятся различные характеристики случайных полей, возникающих в предлагаемой общей теоретико-вероятностной модели, изучается их вероятностное поведение (например, устанавливается марковское свойство), рассматриваются различные задачи прогнозирования, задачи идентификации и оценки параметров самой модели по статиетпческн.м данным и др. От читателя предполагается знание основ функционального анализа и теории вероятностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обратившись к классическим моделям математической физики, которые описываются разного типа дифференциальными уравнениями в частных производных, и представив себе возможность воздействия на них стохастических (случайных) возмущений, мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что возникающие при таком воздействии случайные поля не укладываются в рамки решений известных граничных задач теории дифференциальных уравнений, и здесь требуется новый подход к самой постановке стохастических граничных условий для обобщенных случайных функций, представляющих обобщенное решение соответствующих стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. С другой стороны, многие классические модели случайных полей, лежащие у истоков различных направлений общей теории случайных функций, могут быть описаны с помощью стохастических обобщенных дифференциальных уравнений, причем здесь при рассмотрении таких традиционных тем, как, например, прогнозирование и контроль, возникают новые для теории дифференциальных уравнений граничные задачи. Случайным полям, которые описываются разного типа стохастическими обобщенными дифференциальными уравнениями при всевозможных стохастических граничных условиях, и посвящена настоящая монография — в ней главным образом нашли отражение результаты моих исследований в период 1982—1987 гг. в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, а также в международном центре БиБоС (Билефельд — Бохум — Стохастика, ФРГ).

Начало этих исследований как в постановке основных вопросов, так и в части получившихся результатов было горячо поддержано А. Н. Колмогоровым, что имело для меня неоценимое значение. Я хотел бы поблагодарить С. Албеверио, В. С. Владимирова, А. К. Гущина, В. П. Михайлова, О. А. Олейник, С. Л. Соболева, Л. Хермандера за возможность представить и обсудить на их семинарах целый ряд различных вопросов, а также Е. С. Кедрову за помощь при подготовке книги к печати.

ВВЕДЕНИЕ

Основное содержание и направленность предлагаемого материала совсем кратко можно было бы охарактеризовать как граничные задачи для обобщенных стохастических уравнений в частных производных. Для более полной характеристики обратимся к некоторым примерам и наиболее простым по своей постановке вопросам.

Рассмотрим такую известную теоретико-вероятностную модель, как броуновское движение Леви, описываемое случайной функцией $\xi = \xi(t)$, $t \in R^3$, с начальным $\xi(0) = 0$, нулевым средним и приращениями со среднеквадратичным

$$E|\xi(t) - \xi(s)|^2 = |t - s|, \quad s,\ t \in R^3.$$

Хотя эта функция нигде не дифференцируема, она является обобщенным решением $u = \xi$ дифференциального уравнения

$$Lu = f \tag{1}$$

в области $T = R^3 \setminus \{0\}$ без начальной точки $t = 0$ с оператором Лапласа $L = \Delta$ и гауссовским «белым шумом» $f = \eta$ в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$. Более того, $u = \xi$ будет единственным решением в классе $u \in \mathbf{W}$ обобщенных функций $u = (x, u)$, непрерывных относительно пробных $x \in C_0^\infty(T)$ в соответствующем пространстве $X \supseteq C_0^\infty(T)$ обобщенных пробных функций для уравнения (1).

Понятно, что единственное в области T решение $u = \xi \in \mathbf{W}$ уже не будет единственным в той или иной интересующей нас области $S \subseteq T$; его можно идентифицировать, например, с помощью граничного условия Дирихле

$$u(t) = \xi(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

на границе $\Gamma = \partial S$ с данной непрерывной функцией $\xi(t)$, $t \in \Gamma$. Правая часть $f = \eta$ уравнения (1) в области S не зависит от случайного источника η вне этой области, и можно было бы думать, что при задании граничных условий (2) решение $u = \xi$ будет (по терминологии А. Н. Колмогорова *)) стохастически определенным в S, т. е. его распределение вероятностей при данных $\xi(t)$, $t \in \Gamma$, не будет зависеть от каких бы то ни было условий на поведение ξ вне области S. Однако это не так — скажем, имеются не зависящие от $\xi(t)$, $t \in \Gamma$, обобщенные граничные значения

$$(x, \xi) = (\xi, x), \tag{3}$$

определяемые по ξ вне области S с помощью пробных $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$, которые существенно влияют на условное распределение $u = \xi$ внутри S. Уточним, что в качестве обобщенных пробных $x \in X$ для рассматриваемого уравнения (1) используются обобщенные функции $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, непрерывные относительно

$$\|\varphi\|_W^2 = (\varphi, \mathscr{P}\varphi), \quad \mathscr{P} = L^*L,$$

и среди всех граничных значений (ξ, x), $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$, помимо $\xi(t) = (\xi, x)$ с дельта-функциями $x = \delta_t$ в граничных точках $t \in \Gamma$, например, имеются еще обобщенные нормальные производные (ξ, x) с обобщенными пробными вида

$$x = (\varphi, x) = \int_\Gamma \partial\varphi \, x(t) \, dt,$$

где $\partial\varphi$ — нормальные производные функций $\varphi \in C_0^\infty(T)$.

Вопрос о стохастической определенности ξ в области S при соответствующих граничных условиях является частью общей задачи о *марковском свойстве*, поставленной П. Леви **). В отношении его броуновского движения этот вопрос рассматривался Маккином ***), предло-

---

*) Kolmogoroff A. N. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ann.— 1931.— Bd. 104.— S. 415—426.

**) Levy P. A special problem of Brownian motion, and a general Theory of Gaussian random functions/Proceedings of Third Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, V. II.— Berkeley — Los Angelos: Univ. California Press, 1956. P. 133—175.

***) McKean H. P. Brownian Motion with a several — dimentional time // Теор. вероятн. и ее примен.— 1963.— Т. 8, № 4.— С. 357—378.

живиным описывать требуемые граничные условия на поведение ξ с помощью фиксации всех событий из σ-алгебры

$$\mathfrak{A}(\Gamma) = \cap \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon), \tag{4}$$

где $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$ означает σ-алгебру событий, порождаемых поведением ξ в открытой окрестности Γ^ε границы, и пересечение берется по всем окрестностям; само марковское свойство было введено как условная независимость поведения случайной функции ξ в S от ее поведения в дополнительной области $S^+ = T \setminus (S \cup \Gamma)$ при условии $\mathfrak{A}(\Gamma)$. Обратимся к функции

$$\widehat{\xi}(t) = E(\xi(t)/\mathfrak{A}(\Gamma)), \quad t \in S,$$

— она дает наилучший среднеквадратичный прогноз для $\xi(t)$ при $t \in S$ по всем данным о ξ в н е S. Оказывается, что функция $u(t) = \widehat{\xi}(t)$, $t \in S$, удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{P} u = 0 \tag{5}$$

(с $\mathscr{P} = \Delta^2$) в области S. Спрашивается, можно ли по граничным данным $\mathfrak{A}(\Gamma)$ сформировать надлежащие граничные условия для решения $u \in \mathbf{W}$ этого дифференциального уравнения (скажем, типа условий Дирихле)? Ответ положителен. Именно, сама σ-алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ порождается введенными в (3) обобщенными граничными значениями, и требуемые граничные условия можно выразить в форме

$$(x, u) = (x, \xi), \quad \operatorname{supp} x \subseteq \Gamma, \tag{6}$$

— поясним, что обобщенные функции $u = (x, u)$ из связанного с уравнениями (1), (5) функционального класса $\mathbf{W}$ определены на всех пробных $x \in X$; при этом в (6) достаточно взять лишь полную систему граничных значений, например, можно задать (6) в форме о б о б щ е н н о г о у с л о в и я Д и р и х л е для оператора $\mathscr{P} = \Delta^2$, взяв граничные значения с обобщенными пробными $x \in X$ вида

$$x = (\varphi, x) = \int_\Gamma \varphi\, x(t)\, dt, \quad \int_\Gamma \partial\varphi\, x(t)\, dt.$$

Сравнивая граничную задачу (5)—(6) с обычной задачей Дирихле, еще раз отметим, что функция $\xi = \xi(t)$, которая, согласно (6), диктует граничное поведение искомого решения, является нигде не дифференцируемой, и в том смысле, как это имеет место в соответствующем соболевском классе $u \in W = W_2^2$, нормальных производных просто не существует.

Аналогичная задаче (5)—(6) задача возникает для наилучшего прогноза

$$\widehat{\xi}(t) = E(\xi(t)/\mathfrak{B}), \quad t \in S,$$

по данным $\mathfrak{B}$ о случайном источнике η **вне** области S. Оказывается, функция $u(t) = \widehat{\xi}(t)$, $t \in S$, удовлетворяет уравнению

$$Lu = 0 \tag{7}$$

(с $L = \Delta$) в области S, и возникает вопрос, как по данным $\mathfrak{B}$ сформировать надлежащие граничные условия, которые среди всех решений в (7) выделили бы искомое $u = \widehat{\xi}$. Уточним, что данные об источнике непосредственно доступны с помощью измерений вида (g, η), $g \in \in \mathscr{L}_2(T)$ с $g(t) = 0$ в S, и здесь, оказывается, достаточно ограничиться лишь некоторой **полной системой** решений сопряженного уравнения $L^*g = 0$ ($L^* = \Delta$) в дополнительной к S области $S^+ = T \setminus (S \cup \Gamma)$, с помощью которой для соответствующей системы обобщенных граничных точек $x = L^*g \in X$ граничные условия можно задать в форме

$$(x, u) = (x, \xi) = (g, \eta). \tag{8}$$

Помимо внешнего отличия граничной задачи (7)—(8) от традиционных задач для оператора Лапласа $L = \Delta$ в пространстве $\mathscr{L}_2$, когда решение принадлежит соответствующему соболевскому классу $W = W_2^2$, а сами граничные условия формируются с помощью надлежащих линейных комбинаций $c_1 u + c_2 \partial u$ искомой функции и ее нормальной производной, в задаче (7)—(8) приходится иметь дело с необычно плохими обобщенными функциями — скажем, реализация η в правой части (8) представляет собой результат применения оператора Лапласа к нигде не дифференцируемой функции, и, как уже отмечалось, производных ∂u в прямом смысле просто не существует.

С помощью стохастического дифференциального уравнения вида (1) в области $T \subseteq R^d$ с общим (линейным) дифференциальным оператором

$$L = \sum_k a_k \partial^k$$

и «случайным источником» $f = \eta$, представленным обобщенной случайной функцией того или иного типа, можно описать многие важные теоретико-вероятностные модели, для которых возникают все вопросы, затронутые на примере (1) с $L = \Delta$. Так, для общего уравнения (1) возникает вопрос о выделении соответствующего функционального класса $u \in \mathbf{W}$, в котором решение будет единственным в области $T \subseteq R^d$; при рассмотрении этого уравнения в той или иной области $S \subseteq T$ возникает вопрос о соответствующем классе граничных условий

$$u|_\Gamma = \ldots ? \tag{9}$$

на границе $\Gamma = \partial S$, которые, будучи заданными произвольно, выделяли бы единственное в S решение, и здесь необходимо найти подход к самому определению надлежащих граничных значений обобщенных функций $u = (x, u)$, $x \in C_0^\infty(S)$. Различным аспектам такого рода вопросов, являющихся фундаментальными для теории дифференциальных уравнений в частных производных, посвящены многочисленные исследования, важное место в которых, начиная со знаменитых работ С. Л. Соболева *), занимают общие теоретико-функциональные методы — одним из наиболее обширных источников здесь может служить фундаментальная серия работ Ж.-Л. Лионса и Э. Маджениса **). К этой области относится и предлагаемый нами подход к поставленному в (9) вопросу о граничных условиях для обобщенных случайных функций ***). Он основан на введении соответствующих обобщенных пробных функций $x \in X \supseteq C_0^\infty(T)$ и предлагает в качестве класса единственности использовать пространство обобщенных функций $u \in \mathbf{W}$, определяемых условием

---

*) Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1950 (2-е изд.— М.: Наука, 1989).

**) Лионс Ж.-Л., Мадженис Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. В 3-х т.— М.: Мир, 1971.

***) Розанов Ю. А. Обобщенная задача Дирихле // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 266, № 5.— С. 1067—1069; из последующих работ см., например, Розанов Ю. А. Марковские случайные поля и граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных // Теор. вероятн. и ее примен.— 1988.— Т. 32, № 1.— С. 3—34. Другие подходы к некоторым постановкам граничных задач для случайных функций имеются, например, в работах: Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Теория случайных процессов.— Киев: Наукова думка.— 1980.— № 8.— С. 20—31; Benfatto G., Gallavotti G., Nicolo F. Elliptic equations and Gaussian processes // J. Funkt. Anal.— 1980.— V. 36.— P. 343—400.

непрерывности $u=(x, u)$ по $x \in C_0^\infty(T)$ в X, а общие граничные условия в (9) на границе $\Gamma = \partial S$ области $S \subseteq T$ задавать теми или иными граничными значениями (x, u) с помощью обобщенных пробных $x \in X$, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$. На этом пути можно охарактеризовать все возможные граничные условия, при которых имеется единственное решение уравнения (1) в S — уточним: в классе $u \in \in \mathbf{W}(S)$, который получается как сужение $\mathbf{W}$ в области $S \subseteq T$. Отметим, что в детерминированном случае предлагаемый подход можно с успехом применить ко многим задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных — скажем, в случае эллиптических уравнений он дает решение известных граничных задач в соболевских классах W; более того, используемая в нем схема легко может быть изменена применительно к различным функциональным классам, связанным с теми или иными граничными задачами.

Отметим одно важное обстоятельство, которое нужно иметь в виду при рассмотрении обобщенных случайных функций. Возможность постановки тех или иных граничных задач обобщенного дифференциального уравнения (1) существенно зависит от его правой части f, диктующей вместе с оператором L выбор соответствующего функционального класса $\mathbf{W} \ni u$. Говоря о граничных условиях на $u = \xi$ в области S, естественно считать, что их соблюдение целиком определяется поведением ξ в окрестности границы $\Gamma = \partial S$, а значит эти условия целиком определяются событиями из граничной σ-алгебры $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — см. (4). При слишком иррегулярной правой части $f = \eta$ интересующее нас решение $u = \xi$ может порождать лишь тривиальную σ-алгебру $\mathfrak{A}(\Gamma)$, и это означает, что его нельзя охарактеризовать никакими граничными условиями; для примера укажем на уравнение (1) с оператором Лапласа $L = \Delta$ и гауссовским «белым шумом» $f = \eta$ на соболевском пространстве $\mathring{W}_2^2(S)$, когда в качестве $u = \xi$ мы получаем обобщенную случайную функцию типа «белого шума» на $\mathscr{L}_2(S)$. □

В теоретико-вероятностной модели, описываемой общим стохастическим уравнением (1), возникает целый ряд традиционных для теории случайных функций задач, таких как нахождение вероятностных характеристик решения $u = \xi$ (например, корреляционной функции случайного поля ξ в области $T \subseteq R^d$), различных задач прогнозирования, задач о характеризации поведения реализаций/траекторий случайного поля ξ и др.

Скажем, рассматривая решение $u = \xi$ общего стохастического уравнения (1) как обобщенную функцию со значениями $(\varphi, \xi) \in H$ в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω, естественно поставить вопрос: а будет ли его реализация $\xi_\omega = (\varphi, \xi)_\omega$ при отдельном исходе $\omega \in \Omega$ обобщенной функцией переменного $\varphi \in C_0^\infty(T)$, т. е. будет ли она линейной и непрерывной относительно сходимости в пространстве Шварца $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$? А если будет, то удовлетворяет ли $u = \xi_\omega$ обобщенному дифференциальному уравнению (1) с соответствующей правой частью $f = \eta_\omega$? Ответ на эти вопросы положителен для надлежащих эквивалентных модификаций $u = \xi$, $f = \eta$ *).

Обратившись для примера к реализациям $u = \xi$ в стохастическом уравнении (1) с оператором Лапласа $L = \Delta$ и случайным источником $f = \eta$ типа «белого шума» на соболевском пространстве $W_2^1(T)$ в области $T \subseteq R^d$ евклидова d-мерного пространства, отметим, что реализации η_ω столь плохи, что в шкале соболевских пространств даже локальное включение $\eta_\omega \in W_2^{-q}$ возможно лишь для $q > d/2 + 1$; при большой размерности d это дает также плохую обобщенную функцию ξ_ω типа $\xi_\omega \in W_2^{-q+2}$. Несмотря на это, обобщенная задача Дирихле для уравнения $Lu = 0$ $(L = \Delta)$ в области $S \subset T$ с условиями на границе $\Gamma = \partial S$ в форме $(x, u) = (x, \xi)$, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$, заданными с помощью обобщенных пробных $x \in X$, имеет единственным решением гармоническую функцию $u = u(t)$, $t \in S$, допускающую посредством данных граничных условий «склейку» с обобщенной функцией ξ вне области S, в целом составляя обобщенную функцию типа $u \in W_2^{-q+2}$.

Как теоретико-вероятностная модель стохастическое уравнение (1) наибольший интерес представляет в случае источника $f = \eta$, который описывается обобщенной

*) Эти вопросы тесно связаны с известными результатами о вероятностных мерах в счетно-гильбертовых пространствах (теоремой Сазонова — Минлоса), но как-то в свое время не получили должного внимания — см., например, Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Т. 4. Некоторые применения гармонического анализа.— М.: Физматгиз, 1962. Относительно ответа на эти вопросы см., напримр, Itô K. Foundations of stochastic differential equations in infinite dimensional spaces // Series in Appl. Math. SIAM.— 1984.— V. 47.

случайной функцией $\eta=(\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, с **независимыми значениями**. Естественно возникает вопрос о том или ином достаточно общем представлении случайных функций этого типа, аналогичном известному представлению случайных процессов с независимыми приращениями, и здесь важным примером может служить общее стохастическое представление для функций $\eta=$ $=(\varphi, \eta)$, непрерывных по $\varphi \in C_0^\infty(T)$ в пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$, аналогичное представлению Леви — Ито для стохастических мер с независимыми значениями*).

В случае источника $f=\eta$ с независимыми значениями одним из характерных свойств решения $u=\xi$ общего стохастического дифференциального уравнения (1) является **марковское свойство**, которое для $\xi=(x, \xi)$ с функциональным переменным $x \in X$ означает, что поведение ξ в любой области $S \subseteq T$ при данных граничных значениях (x, ξ), $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$, на границе $\Gamma=\partial S$ не зависит от поведения ξ **вне** S. Более того, всякое обобщенное **гауссовское** поле ξ с так называемым **устойчивым марковским свойством** может быть описано уравнением (1) с надлежащим локальным оператором L и гауссовским «белым шумом» $f=\eta$ на соответствующем локальном функциональном пространстве $\mathscr{F} \supseteq C_0^\infty(T)$; поясним: устойчивость марковского свойства означает его сохранение в области S при расширении соответствующих граничных условий — отсутствие такой устойчивости типично, например, для обобщенных случайных полей с независимыми значениями**).

Как и для всякой теоретико-вероятностной модели, для стохастического уравнения (1) возникают «обратные задачи» — по имеющимся статистическим данным идентифицировать (оценить) неизвестные параметры — скажем, неизвестное среднее, возникающее за счет детерминированной составляющей в источнике $f=\eta$, или неизвестные коэффициенты самого оператора $L=\sum_k a_k \partial^k$. Для решения этих задач можно использовать общие подходы математической статистики, скажем, основанные на от-

---

*) Задача описания обобщенных случайных функций с независимыми значениями ставилась уже давно — см., например, Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. в примечании на с. 00.

**) По этому поводу см., например, Розанов Ю. А. Марковские случайные поля.— М.: Наука, 1981.

ношении правдоподобия (если оно существует!). Понятно, что здесь сразу же возникает вопрос о существовании плотности для распределений вероятностей решения $u = \xi$ уравнения (1) при различных параметрах в том или ином функциональном пространстве, а также вопрос о возможности безошибочной идентификации тех или иных параметров, различие в которых приводит к взаимно сингулярным распределениям. В связи с последним возникает много на первый взгляд совершенно неожиданного. Например, для стационарного гауссовского поля ξ на d-мерном евклидовом пространстве R^d со спектральной плотностью вида

$$1/\mathscr{P}(i\lambda), \quad \lambda \in R^d, \text{ где } \mathscr{P}(i\lambda) = \sum_{|k| \leqslant 2p} a_k (i\lambda)^k \geqslant 0$$

— полином степени $2p$, которое может быть описано как решение $u = \xi$ уравнения (1) с надлежащим случайным источником $f = \eta$ и эллиптическим оператором

$$L = \mathscr{P} = \sum_{|k| \leqslant 2p} a_k \partial^k,$$

при соотношении

$$2p < d/2$$

по отдельной реализации $\tilde{\xi} = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$, в сколь угодно малой области $S \subseteq R^d$ безошибочно определяются все коэффициенты a_k, $|k| \leqslant 2p$ (это радикально отличается от того, что известно для стационарных процессов авторегрессии, отвечающих случаю $d = 1$). □

В заключение отметим, что изложение в целом предполагает известными основные элементы функционального анализа и теории вероятностей, но не требует какихлибо специальных сведений из теории дифференциальных уравнений *), хотя знакомство с ней, особенно в части различного типа граничных задач, сделает более полным восприятие предлагаемого материала (в числе вспомогательных сведений содержащего элементы теории обобщенных функций, преобразований Фурье и др.).

---

*) Из многочисленных и очень разных руководств по теории дифференциальных уравнений укажем здесь: Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— 5-е изд.— М.: Наука, 1988; Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973; Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983; Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т.— М.: Мир, 1986—1989.

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

§ 1. Некоторые вводные понятия

1° Обобщенные случайные функции. Говоря о случайности, мы будем иметь в виду зависимость от элементарного события $\omega \in \Omega$ из вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ с мерой $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$ на σ-алгебре событий $A \in \mathfrak{A}$. Так, случайные величины ξ (действительные или комплексные) с конечным математическим ожиданием

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

суть интегрируемые функции $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Будет широко использоваться гильбертово пространство $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ случайных величин ξ с нормой

$$\|\xi\|_H = (E|\xi|)^2)^{1/2} < \infty,$$

в котором скалярное произведение $\xi, \eta \in H$ есть

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = E\xi\overline{\eta};$$

здесь и далее черта сверху означает операцию перехода к комплексно-сопряженным величинам/функциям (не путать с операцией замыкания, которая будет обозначаться скобками $[\cdot]$).

Основным объектом нашего интереса будут обобщенные случайные функции, описывающие те или иные случайные поля. При этом под *обобщенной случайной функцией* в области $T \subseteq R^d$ (открытом множестве T в d-мерном евклидовом пространстве R^d) мы будем понимать обобщенную векторную функцию

$$\xi = (\varphi, \xi), \qquad \varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T),$$

со значениями $(\varphi, \xi) \in \mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве H случайных величин. Это заключает в себе линейность и непрерывность функции $\xi = (\varphi, \xi)$ в ее зависимости от *пробных* $\varphi \in \mathscr{D}$

— уточним: $\|(\varphi_n, \xi)-(\varphi, \xi)\|_H \to 0$ при $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathscr{D}=C_0^\infty(T)$. Основными характеристиками такой функции ξ являются *среднее значение*

$$(\varphi, A)=E(\varphi, \xi), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

и определенная для каждого $u \in \mathscr{D}$ *корреляционная функция*

$$(\varphi, Bu)=E(\varphi, \xi)\overline{(u, \xi)}, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

которая представляет собой *симметрическую положительно-определенную билинейную форму*

$$\langle u, v\rangle=(u, Bv), \quad u, v \in \mathscr{D}, \tag{1.1}$$

а именно

$$\langle u, v\rangle=\overline{\langle v, u\rangle}, \quad \langle u, u\rangle \geqslant 0,$$

для любых элементов из $\mathscr{D}$, и для любых их линейных комбинаций

$$\left\langle \sum_k a_k u_k, \sum_j b_j v_j \right\rangle=\sum_{k,j} a_k \bar{b}_j \langle u_k, v_j\rangle. \ \square$$

Напомним, что $\mathscr{D}=C_0^\infty(T)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi=\varphi(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_d) \in T$, с компактными носителями $\operatorname{supp}\varphi \subseteq T$, и сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в нем означает, что для данных φ_n имеется компакт $\mathscr{K} \subseteq T$, где сосредоточены носители $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \mathscr{K}$, и все производные

$$\partial^k\varphi_n \to \partial^k\varphi$$

сходятся равномерно; здесь и далее $\partial^k=\partial^{|k|}/\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_d^{k_d}$ указывает производную порядка $|k|=k_1+\ldots+k_d$ по переменным $t_1, \ldots, t_d$. Отметим, что при носителях $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \mathscr{K}$ из компакта $\mathscr{K} \subseteq T$ равномерная сходимость $\partial^k\varphi_n \to \partial^k\varphi$ всех производных равносильна их сходимости в $\mathscr{L}_2$-норме:

$$\|\partial^k\varphi_n-\partial^k\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2=\int|\partial^k\varphi_n-\partial^k\varphi|^2dt \leqslant C\max|\partial^k\varphi_n-\partial^k\varphi|^2 \to 0.$$

В этом легко убедиться, например, взяв для $u \in \mathscr{D}$ представление

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t_1}\ldots\int_{-\infty}^{t_d}\partial^1 u\,dt, \quad \partial^1=\partial^d/\partial t_1\ldots\partial t_d,$$

и вытекающее из него при $\operatorname{supp} u \subseteq \mathscr{K}$ неравенство

$$\max |u(t)| \leqslant C \left(\int_{\mathscr{K}} |\partial^l u|^2 \, dt \right)^{1/2},$$

которое нужно применить ко всем производным $u = \partial^k \varphi_n - \partial^k \varphi$. Гильбертово пространство $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(T)$ измеримых функций $u = u(t)$, $t \in T$, с нормой

$$\| u \|_{\mathscr{L}_2} = \left(\int_T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

и скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{\mathscr{L}_2} = \int_T u(t) \overline{v(t)} \, dt, \quad u, v \in \mathscr{L}_2,$$

будет широко использоваться в дальнейшем.

Имея дело со скалярными обобщенными функциями

$$f = (\varphi, f), \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

действительными или комплексными, их совокупность будем обозначать как $\mathscr{D}^*$. Как обычно, будем отождествлять обобщенную функцию $f \in \mathscr{D}^*$ с локально интегрируемой функцией $f(t)$, $t \in T$, если

$$f = (\varphi, f) = \int \varphi(t) f(t) \, dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Для такого рода $f \in \mathscr{D}^*$ комплексно-сопряженная функция есть, очевидно,

$$\bar{f} = (\varphi, \bar{f}) = (\overline{\bar{\varphi}, f}), \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

и в этой форме операция перехода к комплексно-сопряженным обобщенным функциям переносится на произвольные $f \in \mathscr{D}^*$.

Напомним так называемое *разложение единицы*

$$1 = \sum_j w_j(t), \; t \in T_{\text{loc}},$$

которое имеет место для любого покрытия замыкания $[T_{\text{loc}}]$ ограниченной области T_{loc} системой областей $T_j \subseteq T$, надлежаще взятых в конечном числе $w_j \in C_0^\infty(T_j)$. Указанное разложение позволяет, например, определить каждую функцию $\varphi \in C_0^\infty(T)$ по ее локализациям $w_j \varphi$ в любой системе областей T_j, покрывающих $T_{\text{loc}} \supseteq \operatorname{supp} \varphi$, а именно

$$\varphi = \sum_j w_j \varphi;$$

соответственно определяется каждая обобщенная функция

$$f = (\varphi, f) = \sum_j (w_j\varphi, f) \equiv \sum_j w_j f.$$

Напомним еще важное для всего дальнейшего понятия носителя $\operatorname{supp} f$, представляющего минимальное замкнутое множество, в дополнении к которому $S = T \setminus \operatorname{supp} f$ обобщенная функция $f = 0$, т. е. $(\varphi, f) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$. □

Пространство $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ с определенной в нем сходимостью можно рассматривать как объединение

$$\mathscr{D} = \bigcup \mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}})$$

по ограниченным областям T_{loc} с замыканием $[T_{\mathrm{loc}}] \subseteq T$ счетно-гильбертовых пространств $\mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}})$, каждое из которых получается пополнением функций $\varphi \in C_0^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ относительно системы норм

$$\|\varphi\|_p = \left(\sum_{|k| \leq p} \int_{T_{\mathrm{loc}}} |\partial^k \varphi|^2 \, dt\right)^{1/2}, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

и представляет собой пересечение

$$\mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}}) = \bigcap_p \mathring{W}_2^p(T_{\mathrm{loc}})$$

известных *соболевских пространств* $\mathring{W}_2^p(T_{\mathrm{loc}})$ — пополнений $C_0^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ относительно соответствующей нормы $\|\varphi\|_p$; поясним, что при естественном вложении $C_0^\infty(T_{\mathrm{loc}}) \subseteq \subseteq C_0^\infty(T)$ сходимость функций $\varphi_n \in C_0^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ в пространстве $\mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ равносильна равномерной сходимости в области T всех их производных и, в частности, предельные $\varphi \in \mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ суть бесконечно дифференцируемые функции с носителями $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [T_{\mathrm{loc}}]$. Понятно, что сходимость функций $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ означает их принадлежность какому-либо пространству $\mathring{W}_2^\infty(T_{\mathrm{loc}})$ и сходимость в нем $\varphi_n \to \varphi$.

Мы увидим, что для выяснения тех или иных свойств обобщенной случайной функции $\xi = (u, \xi)$, $u \in \mathscr{D}$, может быть полезной ее характеризация с помощью «пробных» $u \in W$ из более широкого, чем $\mathscr{D}$, функционального класса $W = [\mathscr{D}]$, который мы введем как пополнение $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ относительно скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle_W = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathscr{D}, \tag{1.2}$$

задаваемого формой (1.1).

2° Пространства типа W. Обратимся к произвольному гильбертову пространству типа $W = [\mathscr{D}]$, которое получается путем факторизации и пополнения $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ относительно скалярного произведения (1.2), заданного с помощью произвольной симметрической положительно-определенной билинейной формы $\langle u, v \rangle$, $u, v \in \mathscr{D}$, непрерывной вместе с

$$\|\varphi\|_W = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

относительно сходимости в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$.

Введем оператор

$$B\colon W \to \mathscr{D}^*$$

для каждого элемента $u \in W$, определяющего обобщенную функцию $x = Bu \in \mathscr{D}^*$ по формуле

$$x = (\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{1.3}$$

В комплексном случае наряду с B введем дополнительно комплексно-сопряженный линейный оператор

$$\mathscr{P} = \overline{B}\colon \mathscr{P}u = \overline{Bu}, \quad u \in W,$$

— понятно, что в действительном случае мы имеем $\mathscr{P} = B$.

В любом случае

$$X = BW = \overline{\mathscr{P}W}$$

есть линейное пространство, поскольку для любых (комплексных) λ и $x = Bu \in X$ мы имеем $\overline{\lambda}u \in W$, $\lambda x = B(\overline{\lambda}u) \in X$.

Обобщенная функция $x = Bu \in \mathscr{D}^*$ равна 0 тогда и только тогда, когда $u = 0$ в W, поскольку $\mathscr{D}$ плотно в $W = [\mathscr{D}]$ и $(\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ тогда и только тогда, когда $\|u\|_W = 0$.

Обратимый оператор $B\colon W \to \mathscr{D}^*$ переносит на пространство $X = BW \subseteq \mathscr{D}^*$ норму

$$\|x\|_X = \|u\|_W, \quad x = Bu, \quad u \in W, \tag{1.4}$$

относительно которой X будет гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle Bu, Bv\rangle_X = \langle u, v\rangle_W, \quad u, v \in W. \ \square$$

Каждая обобщенная функция $x \in X \subseteq \mathscr{D}^*$ представима в виде

$$x = (\varphi, x) = \langle \varphi, v\rangle_W, \quad \varphi \in W,$$

с соответствующим $v = B^{-1}x \in W$ и по непрерывности относительно $\|\varphi\|_W$ может быть доопределена на всех $u \in W$, а именно, для $u = \lim \varphi$ как предела функций $\varphi \in \mathscr{D}$ в $W = [\mathscr{D}]$:

$$(u, x) = \lim (\varphi, x) = \langle u, v\rangle_W. \tag{1.5}$$

Согласно этому, $(u, x) = 0$ для всех $x \in X$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Учитывая это, отождествим каждый элемент $u \in W$ с соответствующей *функцией*

$$u = (x, u) = (u, x), \quad x \in X, \tag{1.6}$$

обобщенного переменного $x \in X \subseteq \mathscr{D}^*$, определенной как

$$(x, u) = (u, x);$$

здесь величины (x, u) можно рассматривать как результат опробывания функций $u = \lim \varphi \in W$ с помощью пробных $x \in X$.

Условившись называть обобщенные функции $x \in X \subseteq \mathscr{D}^*$ *пробными* для $u \in W$, дадим их характеризацию в следующей форме.

Теорема. *Обобщенная функция $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, является пробной для $u \in W$ тогда и только тогда, когда она непрерывна относительно $\|\varphi\|_W$.*

Доказательство очевидно. Поясним, что указанного типа функция $x = (\varphi, x)$ задает линейный непрерывный функционал (φ, x) от $\varphi \in \mathscr{D}$ в гильбертовом пространстве $W = [\mathscr{D}]$, который согласно представлению Рисса $(\varphi, x) = \langle \varphi, u\rangle_W$ с соответствующим $u \in W$ совпадает с $x = Bu$ (см. (1.3)); при этом

$$\sup_{\|\varphi\|_W \le 1} |(\varphi, x)| = \|u\|_W = \|x\|_X$$

согласно (1.4).

Всякий линейный непрерывный функционал $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, на гильбертовом пространстве $W = [\mathscr{D}]$ с плотным в нем $\mathscr{D}$ можно однозначно отождествить с соответствующим $x \in W^*$ из сопряженного пространства W^*, и в этом смысле мы имеем $X = BW$ в качестве сопряженного пространства к W,

$$X = W^*;$$

при этом мы имеем для $x \in X = W^*$ соответствующее *представление Рисса* в виде

$$x = (\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W, \quad \varphi \in W,$$

с $u = B^{-1}x$,

$$(\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W = \langle Bu, B\varphi \rangle_X = \langle x, B\varphi \rangle_X = (x, \varphi) \quad (1.7)$$

для всех $\varphi \in W$, $x \in X$.

Понятно, что в (1.6) мы фактически отождествляем $W = [\mathscr{D}]$ с сопряженным пространством $W = X^*$. □

Рассматривая в схеме (1.2) — (1.7) пространства

$$W = [\mathscr{D}], \quad X = BW = W^*,$$

для указания их связи с $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в соответствующей области $T \subseteq R^d$ будем использовать обозначения

$$W = \mathring{W}(T), \quad X = \mathring{X}(T). \quad (1.8)$$

Для различных $T = T_1, T_2$ в случае $T_1 \subseteq T_2$ укажем на естественные вложения

$$\mathring{W}(T_1) \subseteq \mathring{W}(T_2), \quad \mathring{X}(T_1) \subseteq \mathring{X}(T_2), \quad (1.9)$$

в которых $W_1 = \mathring{W}(T_1)$, $X_1 = W_1^*$ рассматриваются как п о д п р о с т р а н с т в а в соответствующих $W_2 = \mathring{W}(T_2)$, $X_2 = W_2^*$ — понятно, что речь идет о пространствах, отвечающих одной и той же форме

$$\langle u, v \rangle, \quad u, v \in C_0^\infty(T)$$

(см. (1.2) и далее). Именно, $W_1 = [C_0^\infty(T_1)]$ непосредственно совпадает с замыканием $C_0^\infty(T_1)$ в $W_2 = [C_0^\infty(T_2)]$, а равенство

$$(\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_{W_2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(T_1),$$

для $u \in W_1$ определяющее элемент $x \in X_1$ и имеющее смысл для всех $\varphi \in C_0^\infty(T_2)$, одновременно определяет $x \in X_2$,

$$x = (\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_{W_2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(T_2),$$

что позволяет рассматривать X_1 как подпространство $X_1 = BW_1$ в $X_2 = W_2^*$, получающееся с помощью соответствующего B: $W_2 \to X_2 = BW_2$; при этом в X_2 для $x \in X_1$ в представлении $x = Bu$ с $u \in W_1 \subseteq W_2$ мы имеем

$$\|x\|_{X_2} = \|u\|_{W_2} = \|u\|_{W_1} = \|x\|_{X_1}.$$

Отметим, что $X_1 = BW_1$ есть единственное «унитарное представление» сопряженного пространства $X_1 = W_1^*$ с помощью подпространства $X_1 \subseteq X_2$, и оно может быть получено факторизацией всех элементов $x \in X_2$ по норме $\|x\|_{X_1} = \sup\limits_{\|\varphi\|_{W_1} \leqslant 1} |(\varphi, x)|$, где верхняя грань берется по $\varphi \in C_0^\infty(T_1)$; при этом используемый в схеме (1.2)—(1.7) в области $T = T_2$ оператор B одновременно обслуживает эту схему и в области $T = T_1 \subseteq T_2$ *).

При данной выше интерпретации $W_1 \subseteq W_2$ справедливо следующее предложение.

Т е о р е м а. *Пространство $W_1 \subseteq W_2$ состоит из всех функций $u \in W_2$, обращающихся в 0 вне области $T_1 \subseteq T_2$.* (Уточним: здесь имеется в виду, что $(x, u) = 0$ при носителе $\operatorname{supp} x \subseteq T_1^c$ в дополнении к области T_1.) Действительно. W_1 есть аннулятор для ортогонального дополнения $X_1^\perp = X_2 \ominus X_1$ к подпространству $X_1 = BW_1$ в $X = X_2$,

---

*) Подчеркнем, что при вложении $\mathring{X}(T_1) \subseteq \mathring{X}(T_2)$ элементы $x \in \mathring{X}(T_1) \subseteq \mathscr{D}(T_1)^*$, представленные обобщенными функциями $x \in \mathring{X}(T_2) \subseteq \mathscr{D}(T_2)^*$ в области T_2, суть с у ж е н и е этих функций в $T_1 \subseteq T_2$ с нормой

$$\|x\|_{X(T)} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathring{W}(T_1)} \leqslant 1} |(\varphi, x)| \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{\mathring{W}(T_2)} \leqslant 1} |(\varphi, x)| = \|x\|_{\mathring{X}(T_2)};$$

понятно, что это сужение может быть одним и тем же для совсем р а з л и ч н ы х $x \in \mathring{X}(T_2)$, и $x \in \mathring{X}(T_1)$ как обобщенная функция в области T_1 (скажем, с носителем $\operatorname{supp} x \subset T_1$) может вовсе не быть элементом в $\mathring{X}(T_2)$; например, в случае $W = W(R^1)$ с нормой $\|u\|_W = \|u'\|_{\mathscr{L}_2}$, $u \in C_0^\infty(R^1)$, пространство $X = \mathring{X}(R^1)$ содержит пробные функции вида $x = \delta(t-a) - \delta(t-b)$, сужение которых в области $T \subset R^1$, содержащей точку $t = a$ и н е с о д е р ж а щ е й точку $t = b$, дает в этой области пробные функции $x = \delta(t-a)$, которые как дельта-функции $x = \delta(t-a)$, $t \in R^1$, на прямой R^1 не входят в $X = \mathring{X}(R^1)$.

а именно

$$(x, u) = \langle x, Bu\rangle_X = 0, \qquad x \in X_1^\perp, \quad u \in W_1,$$

где для $X_1 = BW_1 = [BC_0^\infty(T_1)]$ принадлежность $x \in X_1^\perp$ можно охарактеризовать условием

$$\langle B\varphi, x\rangle_X = (\varphi, x) = 0, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T_1),$$

которое для обобщенной функции $x \in X$ означает, что ее носитель $\operatorname{supp} x$ лежит в дополнении T_1^c к области T_1. □

Наряду со скалярными функциями $u = (x, u)$ обобщенного переменного $x \in X \subseteq \mathscr{D}^*$, образующими соответствующее пространство $W = [\mathscr{D}]$, мы будем рассматривать *случайные функции* $u = (x, u)$ — векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин — линейные и непрерывные по $x \in X$; принадлежность к этому классу будем указывать записью $u \in \mathbf{W}$.

3° Пространства с воспроизводящим ядром. Для любой билинейной положительно определенной формы $\langle u, v\rangle$, непрерывной по $u, v \in \mathscr{D}$, существует случайная обобщенная функция $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, связанная с данной формой соотношением (1.1) — к этому мы еще вернемся. Рассматривая случайную обобщенную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, и ее *корреляционную форму* (1.1), можно воспользоваться непрерывностью (φ, ξ) в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ относительно $\|\varphi\|_W$ в отвечающем форме (1.1) пространстве $W = [\mathscr{D}]$ и доопределить ξ до функции

$$\xi = (u, \xi), \qquad u \in W,$$

на всем пространстве W. При этом мы будем иметь унитарное соответствие

$$W \ni u \leftrightarrow (u, \xi) \in H_\xi$$

между W и подпространством $H_\xi \subseteq \mathbf{H}$ всех величин (u, ξ), $u \in W$. Введенный формулой (1.3) оператор B назовем *корреляционным оператором* случайной обобщенной функции ξ. Легко видеть, что соответствующее пространство $X = BW$ образовано всеми обобщенными функциями, допускающими представление

$$x = (\varphi, x) = E(\varphi, \xi)\overline{(u, \xi)}, \qquad \varphi \in \mathscr{D}, \qquad (1.10)$$

с $u \in W$ $(x = Bu)$, причем

$$\langle Bu, Bv\rangle_X = E\overline{(u, \xi)}(v, \xi);$$

такое гильбертово X называют *пространством с воспроизводящим ядром* для ξ. Пространство W, отвечающее в нашей схеме форме (1.1), будем называть *собственным пространством* для случайной обобщенной функции ξ. □

Приведем два вспомогательных предложения относительно линейных функций $\xi = (u, \xi)$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, рассматривая здесь переменное $u \in U$ в линейном пространстве U.

Пусть $\langle u, v\rangle$ есть произвольная симметрическая положительно определенная билинейная форма от $u, v \in U$.

Теорема. *Существует функция $\xi = (u, \xi)$, $u \in U$, связанная с данной формой соотношением* (1.1).

В частности, для $U = \mathscr{D}$ и формы $\langle u, v\rangle$, непрерывной относительно сходимости пробных u, v в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, мы имеем здесь обобщенную случайную функцию $\xi = (u, \xi)$, $u \in \mathscr{D}$.

Для доказательства обратимся к гильбертову пространству $[U]$, которое получается факторизацией и пополнением исходного U относительно полунормы $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$. Имея в виду свободный выбор вероятностного пространства Ω, возьмем его так, чтобы соответствующее гильбертово пространство $\mathbf{H}$ случайных величин имело бы размерность $\dim \mathbf{H} \geqslant \dim [U]$ *). Возьмем любой изометрический оператор $\mathscr{I}: U \to \mathbf{H}$ и положим

$$(u, \xi) = \mathscr{I}u, \quad u \in U.$$

Очевидно, что для функции $\xi = (u, \xi)$, $u \in U$, будет справедливо соотношение (1.1).

Рассмотрим теперь свойство непрерывности случайной функции $\xi = (u, \xi)$ относительно той или иной полунормы $\|u\|$ переменного $u \in U$.

Теорема. *Слабая непрерывность в $\mathbf{H}$ линейной функции $\xi = (u, \xi)$ равносильна ее сильной непрерывности.*

---

*) Здесь можно взять, например, семейство независимых гауссовских величин (в надлежащем числе $\tau \geqslant \dim U$) — их замкнутая линейная оболочка $H \subseteq \mathbf{H}$ будет подпространством размерности τ; используя изометрический оператор $\mathscr{I}: U \to H$, мы получим гауссовскую функцию $(u, \xi) = \mathscr{I}u$, $u \in U$, для которой все величины (u, ξ), $u \in U$, являются гауссовскими.

Это есть следствие известного принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза. Действительно, непрерывность $\langle (u, \xi), \eta \rangle_{\mathbf{H}}$ по $\|u\|$ равносильна ограниченности $\langle (u, \xi), \eta \rangle_{\mathbf{H}} \leqslant C_\eta$ при $\|u\| \leqslant 1$, и если такая ограниченность имеет место для всех $\eta \in \mathbf{H}$, то $\|(u, \xi)\|_{\mathbf{H}} \leqslant C$ при $\|u\| \leqslant 1$, что равносильно сильной непрерывности (u, ξ) по $\|u\|$. □

Рассматривая то или иное гильбертово $X \subseteq \mathscr{D}^*$ на предмет того, является ли оно пространством с воспроизводящим ядром, можно дать следующий критерий.

Теорема. *Гильбертово пространство $X \subseteq \mathscr{D}^*$ обобщенных функций $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, является пространством с воспроизводящим ядром тогда и только тогда, когда для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ величина*

$$\|\varphi\|_W = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |(\varphi, x)|$$

конечна и непрерывна по φ относительно сходимости в $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$.

Понятно, что речь идет о том, может ли данное $X \subseteq \mathscr{D}^*$ быть реализовано в нашей схеме (1.2) — (1.7) как $X = BW = W^*$ с соответствующим $W = [\mathscr{D}]$. Необходимость условия теоремы очевидна в силу того, что если X — пространство с воспроизводящим ядром для обобщенной случайной функции $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, то собственное для ξ пространство $W = [\mathscr{D}]$ совпадает с сопряженным пространством $W = X^*$. С другой стороны, при указанном в теореме условии каждая пробная функция $\varphi \in \mathscr{D}$ задает линейный непрерывный функционал $\varphi = (\varphi, x)$ на $x \in X \subseteq \mathscr{D}^*$, и в этом смысле мы имеем вложение $\mathscr{D} \subseteq X^*$. Воспользовавшись представлением Рисса $(\varphi, x) = \langle x, B\varphi \rangle_X$, видим, что элементы $B\varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}$, плотны в X, так как при $(\varphi, x) = 0$, $\varphi \in \mathscr{D}$, мы имеем дело с нулевой обобщенной функцией $x \in \mathscr{D}^*$, и, следовательно, $x = 0$ в $X \subseteq \mathscr{D}^*$. Плотность совокупности $B\mathscr{D}$ в X для унитарного $B\colon X^* \to X$ означает плотность $\mathscr{D}$ в гильбертовом $X^* = W$ с нормой $\|\varphi\|_W = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} |(\varphi, x)|$, и, таким образом, X является сопряженным к гильбертову пространству $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$, что только и требовалось доказать, принимая во внимание условие непрерывности $\|\varphi\|_W$ относительно пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, которое лежит в основе определения пространств типа W в нашей схеме (1.2)—(1.7).

4° Обобщенные случайные функции и стохастические интегралы. Имея дело с той или иной случайной функцией $\xi=\xi(t)$, $t\in T$, локально интегрируемой в области $T\subseteq R^d$, можно рассматривать ее в обобщенном смысле как

$$\xi=(\varphi,\xi)=\int\varphi(t)\,\xi(t)\,dt,\quad \varphi\in C_0^\infty(T), \tag{1.11}$$

используя ту или иную конструкцию взятого справа интеграла — например, рассматривая функции со значениями в $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$, можно использовать интеграл в гильбертовом H. В (1.11) мы имеем дело с обобщенной функцией $\xi=(\varphi,\ \xi)$ типа обычной функции $\xi=\xi(t)$, $t\in T$.

Аналогичная конструкция дает обобщенные функции

$$\xi=(\varphi,\xi)=\int\varphi(t)\,\eta(dt),\qquad \varphi\in C_0^\infty(T), \tag{1.12}$$

с помощью взятого здесь *стохастического интеграла по стохастической мере* — непрерывной в $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$ аддитивной функции $\eta=\eta(A)$ на борелевских $A\subseteq T$. Скажем, это может быть *стохастическая мера с некоррелированными* (при непересекающихся $A\subseteq T$) *значениями* $\eta(A)$,

$$E\eta(A)=0,\quad E|\eta(A)|^2=\mu(A),$$

где $\mu(dt)$ — обычная σ-конечная мера, и тогда

$$E(\varphi,\xi)=0,\quad E|(\varphi,\xi)|^2=\int|\varphi(t)|^2\mu(dt);$$

при $\mu(dt)=dt$ в (1.12) возникает так называемый «белый шум» $\xi=(\varphi,\ \xi)$, для которого

$$E(\varphi,\xi)=0,\quad E|(\varphi,\xi)|^2=\|\varphi\|_{\mathscr{F}}^2$$

с нормой в $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$.

(Условимся называть *белым шумом* на каком-либо гильбертовом пространстве $\mathscr{F}=\left[C_0^\infty(T)\right]$ обобщенную функцию $\xi=(\varphi,\ \xi)$ с указанным выше свойством по отношению к норме $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$ в $\mathscr{F}$.)

Отметим, что всякая обобщенная случайная функция $\xi=(\varphi,\ \xi)$, непрерывная по норме $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$ в $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ и по непрерывности определенная на всем пространстве $\mathscr{L}_2(T)=\left[C_0^\infty(T)\right]$, представима как (1.12), и можно сказать, что она является *обобщенной функцией типа* *стохастической меры*, в качестве которой выступает

$$\eta(A)=(1_A, \xi),$$

связанная с $\xi=(\varphi, \xi)$, $\varphi\in\mathscr{L}_2(T)$, посредством индикаторов $\varphi=1_A$ ограниченных борелевских множеств $A\subseteq T$ — очевидно, что здесь мы имеем дело с непрерывной в $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$ аддитивной функцией $\eta(A)$, $A\subseteq T$. Поясним: положив

$$\int\varphi(t)\,\eta(dt)=\sum_k\varphi_k\eta(A_k)$$

для простых функций $\varphi\in\mathscr{L}_2(T)$, каждая из которых отлична от 0 лишь в ограниченной области и принимает там не более конечного числа значений $\varphi(t)=\varphi_k$, $t\in A_k$, на непересекающихся $A_k\subseteq T$, мы получим

$$\int\varphi(t)\,\eta(dt)=(\varphi, \xi),$$

что указывает на непрерывность введенного нами интеграла относительно нормы $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, и эта непрерывность позволяет предельным переходом определить соответствующий *стохастический интеграл* $\int\varphi(t)\,\eta(dt)$ для всех $\varphi\in\mathscr{L}_2(T)$. В целях согласования обозначений будем использовать символическую запись

$$\eta(dt)=\xi(t)\,dt,$$

связывающую в (1.12) стохастическую меру $\eta(dt)$ с обобщенной случайной функцией $\xi=(\varphi, \xi)$. Отметим, что $\eta(dt)=\xi(t)\,dt$ вовсе не обязана быть стохастической мерой с некоррелированными значениями — скажем, для обычной функции $\xi=\xi(t)$ с

$$\int E\,|\xi(t)|^2dt=C<\infty$$

мы имеем в (1.12) непрерывную по $\varphi\in\mathscr{L}_2(T)$ обобщенную функцию $\xi=(\varphi, \xi)$ с

$$E\,|(\varphi, \xi)|^2\leqslant C\cdot\|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_2},$$

и здесь $\eta(dt)=\xi(t)\,dt$ есть

$$\eta(A)=\int_A\xi(t)\,dt, \qquad A\subseteq T.$$

Для «временнóго» интервала $T\subseteq R^1$ (например, $T=(a, \infty)$) произвольную непрерывную по $\varphi\in\mathscr{L}_2(T)$

обобщенную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$ и отвечающую ей стохастическую меру $\eta(dt) = \xi(t)\,dt$ можно связать со случайным процессом

$$\eta_t = (1_{(a,t)}, \xi),$$

непрерывным по $t \geqslant a$ в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$, для которого

$$(\varphi, \xi) = \int \varphi(t)\,\eta(dt) = \int \varphi(t)\,d\eta_t, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

можно определить по данному η_t, $t \geqslant a$, с помощью взятого справа стохастического интеграла типа Римана — Стилтьеса. Поясним: с простых $\varphi(t) = \varphi(t_k)$, $t \in \Delta_k = (t_{k-1}, t_k]$, этот интеграл

$$\int \varphi(t)\,d\eta_t = \sum_k \varphi(t_k)\left[\eta_{t_k} - \eta_{t_{k-1}}\right]$$

распространяется предельным переходом на общие $\varphi \in \mathscr{L}_2(T)$. Как следствие формулы интегрирования по частям здесь

$$(\varphi, \xi) = \int \varphi(t)\,d\eta_t = -\int \varphi'(t)\,\eta_t dt, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T). \quad (1.13)$$

В дальнейшем в ряде важных примеров нам встретятся случайные процессы $\xi = \xi_t$, состояние которых в момент $t \geqslant a$ определяется с помощью пробных $x \in C_0^\infty(G)$ в области $G \subseteq R^{d-1}$ величинами (x, ξ_t), в их зависимости от переменного x, представляющих соответствующие обобщенные функции $\xi_t = (x, \xi_t)$. При рассмотрении такого рода процессов может быть использована следующая конструкция случайных функций в области $T = G \times (a, \infty)$, в которой «время» представлено переменным $r > a$ в $t = (s, r) \in T$ с «пространственным» переменным $s \in G$.

Именно, пусть $\xi = \xi_t$ — случайный процесс указанного выше типа, для которого при каждой пробной $x \in C_0^\infty(G)$ мы имеем непрерывный в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ «одномерный» процесс (x, ξ_r), $r \geqslant a$, с

$$E\,|(x, \xi_r)|^2 \leqslant C\,\|x\|^2_{\mathscr{L}_2(G)}, \qquad x \in C_0^\infty(G),$$

на каждом конечном интервале $a < r < b$. Взяв пробную $\varphi \in C_0^\infty(T)$ и рассматривая ее как функцию $\varphi = \varphi_r$ переменного $r > a$ со значениями $\varphi_r = \varphi(s, r)$, $s \in G$, из $C_0^\infty(G)$ для непрерывной в $\mathscr{L}_2(G)$ функции $\varphi = \varphi_r$ будем иметь непрерывную в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ функцию $\varphi_r\xi_r = (\varphi_r, \xi_r)$

с интегралом типа Римана

$$(\varphi, \xi) = \int \varphi_r \xi_r \, dr \tag{1.14}$$

в его зависимости от $\varphi \in C_0^\infty(T)$, определяющего обобщенную случайную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$ в области $T = G \times (a, b)$ с

$$E\,|(\varphi, \xi)|^2 \leqslant C \int \|\varphi_r\|^2_{\mathscr{L}_2(G)} \, dr, \quad \varphi \in G \times (a, b),$$

на каждом конечном интервале $a < r < b$. Понятно, что сам интеграл (1.14) типа Римана определен, например, для всех кусочно-непрерывных функций $\varphi = \varphi_r$ — поясним, при $h \to 0$ и $\|\varphi_{r+h} - \varphi_r\|_{\mathscr{L}_2(G)} \to 0$ мы имеем

$$\|\varphi_{r+h}\xi_{r+h} - \varphi_r \xi_r\|_H \leqslant$$
$$\leqslant C\,\|\varphi_{r+h} - \varphi_r\|_{\mathscr{L}_2(G)} + \|(\varphi_r, \xi_{r+h}) - (\varphi_r, \xi_r)\|_H \to 0.$$

Отметим, что, используя «первообразную»

$$\eta_r = \int_a^r \xi_r \, dr, \quad r \geqslant a,$$

задающую случайный процесс с состояниями

$$(x, \eta_r) = \int_a^r (x, \xi_r) \, dr, \quad x \in C_0^\infty(G),$$

обобщенную случайную функцию (1.14) можно представить в виде интеграла типа Римана — Стилтьеса

$$(\varphi, \xi) = \int \varphi_r d\eta_r \tag{1.15}$$

как предела в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ интегральных сумм

$$\sum \varphi_{r_k} \left[\eta_{r_k} - \eta_{r_{k-1}}\right] = \sum_k \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_{r_k} \xi_r \, dr.$$

Обратимся к конструкции (1.15) с помощью общего *стохастического интеграла типа Римана — Стилтьеса* по непосредственно данному случайному процессу $\eta = \eta_r$, определяемого как предел

$$\int \varphi_r d\eta_r = \lim \sum_k \varphi_{r_k} \left[\eta_{r_k} - \eta_{r_{k-1}}\right]$$

соответствующих интегральных сумм в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$. Указанный интеграл (1.15) существует для всех пробных $\varphi \in \mathscr{L}_2(T)$ и задает обобщенную случайную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$, скажем, когда мы при каждом $x \in C_0^\infty(G)$ имеем дело с непрерывным в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ процессом (x, η_r), $r \geqslant a$, и

$$E\,|(x, \eta_r)|^2 \leqslant C\,\|x\|^2_{\mathscr{L}_2(G)}, \qquad x \in C_0^\infty(G),$$

равномерно на каждом конечном интервале. Как уже фактически отмечалось, в этом случае для произвольных

$$\varphi_r' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_r \in C_0^\infty(G)$$

функция $\varphi_r'\eta_r = (\varphi_r', \eta_r)$ является непрерывной, а интеграл типа Римана

$$-\int \varphi_r'\eta_r\,dr = \int \varphi_r\,d\eta_r \tag{1.16}$$

дает соответствующий интеграл (1.15) типа Римана — Стилтьеса. Важным примером здесь является случай *процесса с некоррелированными приращениями*

$$x\left[\eta_{r_k} - \eta_{r_{k-1}}\right] = \left(x, \eta_{r_k}\right) - \left(x, \eta_{r_{k-1}}\right), \qquad x \in C_0^\infty(G),$$

для которых

$$E\left|\left(x, \eta_{r_k} - \eta_{r_{k-1}}\right)\right|^2 \leqslant C\,\|x\|^2_{\mathscr{L}_2}(r_k - r_{k-1})$$

— в этом случае мы имеем

$$E\left|\int \varphi_r\,d\eta_r\right|^2 \leqslant C\int \|\varphi_r\|^2_{\mathscr{L}_2(G)}\,dr$$

и в (1.15)

$$E\,|(\varphi, \xi)|^2 \leqslant C\,\|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_2(T)}. \tag{1.17}$$

Понятно, что при всех $r > a$ непрерывные ξ_r в (1.14) и η_r в (1.15) однозначно определяются соответствующей обобщенной функцией $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, — например, взяв пробные $\varphi(s, r) = x(s)\,w(r)$ с $x \in C_0^\infty(G)$ и

$$w \to 1_{(r_1, r_2)}, \quad w' \to \delta(r - r_2) - \delta(r - r_1),$$

для произвольных $r_2 > r_1 > a$ получим

$$\left(x, \eta_{r_2}\right) - \left(x, \eta_{r_1}\right) = \lim\,(\varphi, \xi).$$

§ 2. Пространства пробных обобщенных функций

1° Пробные пространства типа W. Мы ввели линейные непрерывные функции $u=(x, u)$ обобщенного переменного $x \in X$, где $X \subseteq \mathscr{D}^*$ есть соответствующее *пространство пробных обобщенных функций* $x=(\varphi, x)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, которые выделяются в $\mathscr{D}^*$ тем, что они непрерывны относительно $\|\varphi\|_W$ в соответствующем $W=[\mathscr{D}]$ и наделены гильбертовой нормой

$$\|x\|_X = \sup_{\|\varphi\|_W=1} |(\varphi, x)|$$

— см. (1.2) — (1.7). Естественно выделить случай, когда «стандартные» пробные функции $\varphi \in \mathscr{D}$ входят в X, их норма $\|\varphi\|_X$ непрерывна относительно сходимости в пространстве $\mathscr{D}=C_0^\infty(T)$ и, более того, само $\mathscr{D} \subseteq X$ плотно в гильбертовом X, так что

$$X=[\mathscr{D}] \tag{2.1}$$

является пространством того же типа W, что и $W=[\mathscr{D}]$ в нашей схеме (1.2) — (1.7). В указанном случае рассматриваемые нами функции $u=(x, u)$ обобщенного переменного $x \in X$ можно отождествить с соответствующими обобщенными функциями

$$u=(\varphi, u), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

которые в силу непрерывности относительно $\|\varphi\|_X$ однозначно определяют $u=(x, u)$ на замыкании $[\mathscr{D}]=X$; в этом смысле

$$W=[\mathscr{D}] \subseteq \mathscr{D}^*.$$

Например, в схеме (1.2) — (1.7) с оператором $Bu=\bar{u}$, $u \in \mathscr{D}$, когда $W=[\mathscr{D}]=\mathscr{L}_2$, мы имеем

$$X=W^*=BW=\mathscr{L}_2=[\mathscr{D}]$$

типа W с обобщенными функциями $x=Bu \in X$ $(u \in W)$ вида

$$x=(\varphi, x)=(\varphi, \bar{u})=\langle\varphi, u\rangle_{\mathscr{L}_2}, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

По поводу того, что $W=\mathscr{L}_2=[\mathscr{D}]$, напомним здесь один известный прием аппроксимации функциями $\varphi \in \mathscr{D}$, в котором используются «урезанные» функции $u \in \mathscr{L}_2$ (равные 0 вне какой-либо ограниченной области T_{loc},

$[T_{\text{loc}}] \subset T$) и их свертки

$$\varphi = w * u(t) = \int w(t-s)\, u(s)\, ds \in \mathscr{D}$$

с *дельта-образными* функциями $w \geqslant 0$ из $\mathscr{D}$,

$$\int w(t)\, dt = 1, \quad \int\limits_{|t|>\varepsilon} w(t)\, dt \to 0$$

при каждом $\varepsilon > 0$ — для них $w * u = u * w \to u$ в $\mathscr{L}_2$, что следует, например, из простой оценки

$$\int \left| \int [u(t-s) - u(t)]\, w(s)\, ds \right|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \int \int |u(t-s) - u(t)|^2\, w(s)\, ds\, dt =$$
$$= \int\limits_{|s| \leqslant \varepsilon} \left[\int |u(t-s) - u(t)|^2\, dt \right] w(s)\, ds + o(1). \quad \square$$

Обратимся к нашей схеме (1.2) — (1.7) с произвольным $W = [\mathscr{D}]$ и соответствующим $X = W^*$. Допустим, имеется *невырожденное вложение*

$$W \subseteq W_0 \tag{2.2}$$

в гильбертово пространство $W_0 = [\mathscr{D}]$ с $X_0 = W^*$ типа W, $X_0 = [\mathscr{D}]$ (скажем, это может быть $W_0 = \mathscr{L}_2$) — уточним: условие невырожденности здесь для более слабой нормы $\|u\|_{W_0} \leqslant C\|u\|_W$, $u \in W$, означает, что $\|u\|_{W_0} \neq 0$ при $\|u\|_W \neq 0$).

Теорема. *При невырожденном вложении* (2.2) *имеются плотные в* $X = W^*$ *вложения*

$$\mathscr{D} \subseteq X_0 = W_0^* \subseteq W^* = X. \tag{2.3}$$

Это дает нам своего рода *критерий сравнения* для $W = [\mathscr{D}]$ на предмет того, будет ли $X = W^*$ типа W. Понятно, что согласно (2.3), вместе с $\|\varphi\|_{X_0}$, $\varphi \in \mathscr{D}$, более слабая норма $\|\varphi\|_X$ в $X = W^*$ непрерывна относительно сходимости в $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$.

Доказательство. Очевидно, что любой элемент $x \in X_0$ задает на $W \subseteq W_0$ линейный непрерывный функционал $x = (u, x)$, так что $X_0 \subseteq X$; при этом

$$\|x\|_X = = \sup_{\|u\|_W \leqslant 1} |(u, x)| \leqslant C \sup_{\|u\|_{W_0} \leqslant 1} |(u, x)| = C\|x\|_{X_0}.$$

Более того, X_0 плотно в X — если бы это было не так, то нашелся бы не равный 0 элемент $u \in W = X^*$, $(x, u) = 0$, при всех $x \in X_0$, определяющий равный 0 элемент $u \in W_0 = X_0^*$, что противоречит условию $\|u\|_W = 0$ при $\|u\|_{W_0} = 0$.

Далее, в данном нам $X_0 = [\mathscr{D}]$ каждый элемент $x_0 \in X_0$ может быть сколь-угодно точно аппроксимирован пробными $\varphi \in \mathscr{D}$, и соответственно относительно более слабой нормы в $X \supseteq X_0$ мы имеем

$$\|x_0 - \varphi\|_X \leqslant C\|x_0 - \varphi\|_{X_0} \to 0.$$

Установленные в X плотные вложения $\mathscr{D} \subseteq X_0$, $X_0 \subseteq X$. дают $X = [\mathscr{D}]$, причем норма $\|\varphi\|_X$, $\varphi \in \mathscr{D}$, непрерывна относительно сходимости в $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, поскольку этим свойством обладает более сильная норма $\|\varphi\|_{X_0} \geqslant c\|\varphi\|_X$.

Добавим, что *в* (2.3) *мы имеем невырожденное вложение* $X_0 = W_0^* \subseteq W^* = X$. В самом деле, для $x \in X_0$ с $\|x\|_X = 0$ будем иметь $(u, x) = 0$, $u \in W$, а поскольку W плотно в W_0, то $(u, x) = 0$ при всех $u \in W_0$, т. е. $x = 0$ как элемент сопряженного пространства $X_0 = W_0^*$, $\|x\|_{X_0} = 0$. □

В дальнейшем мы укажем различные классы пространств $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$ типа W, и каждое $W_0 = W$, X (все равно, идет ли речь о самом $W = [\mathscr{D}]$ или о двойственном ему $X = [\mathscr{D}]$) может служить эталоном для любого другого интересующего нас пространства $W = [\mathscr{D}]$ в критерии сравнения (2.2) на предмет проверки того, будет ли соответствующее пространство пробных функций $X = W^*$ типа W — см. (2.3).

2° Пробные пространства, связанные с операторами в $\mathscr{L}_2$. Рассмотрим случай, когда форма (1.2) связана с оператором B: $\mathscr{D} \to \mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{D}^*$ в пространстве $\mathscr{L}_2$, иначе говоря, когда в нашей схеме (1.2)—(1.7) мы имеем $B\varphi \in \mathscr{L}_2$ при $\varphi \in \mathscr{D}$. Этот случай удобнее описать с помощью оператора $\mathscr{P} = \bar{B}$, а именно

$$\langle u, v\rangle_W = \langle u, \mathscr{P}v\rangle_{\mathscr{L}_2}, \quad u, v \in \mathscr{D}, \tag{2.4}$$

где $\mathscr{P}$ — линейный симметрический положительный оператор на $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в пространстве $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(T)$,

$$\langle u, \mathscr{P}v\rangle_{\mathscr{L}_2} = \langle \mathscr{P}u, v\rangle_{\mathscr{L}_2}, \quad \langle u, \mathscr{P}u\rangle_{\mathscr{L}_2} \geqslant 0$$

для всех $u, v \in \mathscr{D}$.

Допустим, что этот оператор $\mathscr{P} \geqslant 0$ удовлетворяет *условию полуограниченности*

$$\langle \varphi, \mathscr{P}\varphi \rangle_{\mathscr{L}_2} \geqslant c \|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_2}, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.5}$$

при некотором $c > 0$.

Это условие на норму $\|\varphi\|_W = \langle \varphi, \mathscr{P}\varphi \rangle^{1/2}_{\mathscr{L}_2}$ в W дает очевидное вложение $W = [\mathscr{D}] \subseteq \mathscr{L}_2$. Покажем, что оно является невырожденным, т. е. для $u \in W$ с нормой $\|u\|_{\mathscr{L}_2} = 0$ мы имеем $\|u\|_W = 0$. Действительно, взяв обобщенную функцию $x = Bu \in X$ с $\|u\|_{\mathscr{L}_2} = 0$, получим

$$(\varphi, Bu) = \langle \varphi, \mathscr{P}u \rangle_{\mathscr{L}_2} = \langle \mathscr{P}\varphi, u \rangle_{\mathscr{L}_2} = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

откуда видно, что обобщенная функция $x = Bu = 0$ в $X \subseteq \subseteq \mathscr{D}^*$ и $\|Bu\|_X = \|u\|_W = 0$. Применяя критерий сравнения (2.2) с $W_0 = \mathscr{L}_2$, гарантирующий вложения (2.3), приходим к следующему предложению.

Теорема. *При условии полуограниченности* (2.5) *пространство пробных функций* $X = BW = \overline{\mathscr{P}W}$ *содержит плотное в нем* $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(T)$ *и является пространством типа* W. □

В связи с условием (2.5) отметим следующее.

Отправляясь от симметрического положительного оператора $\mathscr{P}$ в $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(T)$ с областью определения $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ и связывая его с соответствующей формой (2.4), в схеме (1.2)—(1.7) мы фактически получаем его продолжение $\mathscr{P}$: $\mathscr{P}u = \overline{Bu}$, $u \in W = [\mathscr{D}]$, как оператора

$$\mathscr{P}\colon W \to \overline{X} = \overline{\mathscr{P}W},$$

которое определяет, в частности, расширение оператора $\mathscr{P}$ в пространстве $\mathscr{L}_2$ на область

$$\mathscr{D}_{\mathscr{P}} = \{u \in W\colon \mathscr{P}u \in \mathscr{L}_2\}.$$

Оно совпадает с известным *расширением по Фридрихсу* исходного симметрического $\mathscr{P} \geqslant 0$ до самосопряженного оператора в $\mathscr{L}_2$.

Поясним: по самому определению область значений $\mathscr{P}u$, $u \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}}$, есть пересечение $\mathscr{L}_2 \cap \overline{BW}$, а, как мы знаем, $X \supseteq \mathscr{L}_2$, так что совокупность $\overline{X} = \overline{BW} = \mathscr{P}W$ комплексно-сопряженных функций $\mathscr{P}u = \overline{Bu}$ с $u \in W$ содержит $\overline{\mathscr{L}}_2 = \mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{P}W = \mathscr{L}_2$. Оператор

$$\mathscr{P}\colon \mathscr{D}_{\mathscr{P}} \to \mathscr{L}_2 = \mathscr{P}\mathscr{D}_{\mathscr{P}}$$

является симметрическим, что диктуется равенством

$$\langle u, \mathscr{P}v\rangle_{\mathscr{L}_2} = \langle u, v\rangle_W, \quad u, v \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}}.$$

Кроме того, он удовлетворяет условию

$$\|\mathscr{P}u\|_{\mathscr{L}_2} \geqslant c\|u\|_{\mathscr{L}_2}, \quad u \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}},$$

что следует из условия полуограниченности (2.5) при переходе к пределу $\varphi \to u \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}}$ в пространстве $W \subseteq \mathscr{L}_2$:

$$\|u\|_{\mathscr{L}_2}\|\mathscr{P}u\|_{\mathscr{L}_2} \geqslant \langle u, \mathscr{P}u\rangle_{\mathscr{L}_2} = \|u\|_W^2 =$$
$$= \lim\|\varphi\|_W^2 = \lim\langle\varphi, \mathscr{P}\varphi\rangle_{\mathscr{L}_2} \geqslant \lim c\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2 = c\|u\|_{\mathscr{L}_2}^2.$$

В итоге мы имеем симметрический оператор $\mathscr{P}$ с определенным на всем пространстве $\mathscr{L}_2$ симметрическим ограниченным обратным оператором $Q = \mathscr{P}^{-1}$, $\|Q\| \leqslant 1/c$, и вместе с Q оператор $\mathscr{P} = Q^{-1}$ является самосопряженным. □

По поводу (2.5) отметим еще, что как условие, гарантирующее включение $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в пространство пробных функций $X = BW = \overline{\mathscr{P}W}$ и приводящее к $X = [\mathscr{D}]$ типа W, оно в случае

$$\mathscr{P}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$$

может быть заменено более слабым условием

$$\langle\varphi, \mathscr{P}\varphi\rangle_{\mathscr{L}_2}^{1/2} \geqslant c\int\limits_{T_{\text{loc}}} |\varphi|\,dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.6}$$

в каждой ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq T$.

Действительно, для всех функций $x = x(t)$ из $\mathscr{D}$ согласно (2.6) мы имеем непрерывность (φ, x) относительно $\varphi \in \mathscr{D}$ по норме $\|\varphi\|_W = \langle\varphi, \mathscr{P}\varphi\rangle_{\mathscr{L}_2}^{1/2}$, поскольку

$$|(\varphi, x)| \leqslant \max|x(t)|\cdot\int\limits_{T_{\text{loc}}}|\varphi|\,dt \leqslant C\max|x(t)|\cdot\|\varphi\|_W$$

в области $T_{\text{loc}} \supseteq \operatorname{supp} x$, содержащей носитель $\operatorname{supp} x$, а такая непрерывность, как мы знаем, и определяет принадлежность обобщенных $x \in \mathscr{D}^*$ к пространству пробных функций X.

Таким образом,

$$X \supseteq \mathscr{D},$$

и, более того, поскольку по самому определению $X = [B\mathscr{D}] = [\overline{\mathscr{P}\mathscr{D}}]$ содержит плотное в нем $\overline{\mathscr{P}\mathscr{D}} \subseteq \overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D}$, при включении $\mathscr{D} \subseteq X$ мы имеем $X = [\mathscr{D}]$.

При условии (2.6) норма $x \in \mathscr{D}$ как элементов в X непрерывна относительно сходимости в пространстве $\mathscr{D}$,

$$\|x\|_X = \sup_{\|\varphi\|_W \leqslant 1} |(\varphi, x)| \leqslant C \max |x(t)|,$$

и в итоге получается следующий результат.

Теорема. *В случае $\mathscr{P}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ при условии* (2.6) *пространство пробных функций $X = BW = \overline{\mathscr{P}W}$ содержит плотное в нем $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ и является пространством типа W.*

Отметим, что мы имеем $\mathscr{P}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$, например, в случае дифференциального оператора $\mathscr{P} = \sum a_k \partial^k$ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами.

3° Пробные пространства для дифференциальных операторов. Важное место в дальнейшем занимают пространства пробных функций для симметрических дифференциальных операторов

$$\mathscr{P} = \sum a_k \partial^k \geqslant 0$$

с действительными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, для которых в схеме (1.2)—(1.7) с формой (2.4) мы имеем

$$B\varphi = \overline{\mathscr{P}\varphi} = \mathscr{P}\bar{\varphi}, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Здесь мы специально останавливаемся на комплексном случае, чтобы подчеркнуть инвариантность соответствующего пространства $X = \overline{\mathscr{P}W} \subseteq \mathscr{D}^*$ относительно перехода $x \to \bar{x}$ к комплексно-сопряженным $x \in \mathscr{D}^*$. Именно, в указанном случае

$$\|\varphi\|_W^2 = \langle \varphi, \mathscr{P}\varphi \rangle_{\mathscr{L}_2} = \langle \bar{\varphi}, \mathscr{P}\bar{\varphi} \rangle_{\mathscr{L}_2} = \|\bar{\varphi}\|_W, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

и эта инвариантность нормы в W относительно перехода $\varphi \to \bar{\varphi}$ показывает, что вместе с $x \in X$ комплексно-сопряженная обобщенная функция $\bar{x} = \overline{(\bar{\varphi}, x)}$ является непрерывной по норме

$$\|\varphi\|_W = \|\bar{\varphi}\|_W, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

а следовательно, $\bar{x} \in X$.

Понятно, что вместе с комплексно-сопряженным $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D}$ мы имеем

$$\overline{X} = \mathscr{P}W = X \tag{2.7}$$

с нормой

$$\|\overline{x}\|_X = \sup_{\|\varphi\|_W \leqslant 1} |(\varphi, \overline{x})| = \sup_{\|\overline{\varphi}\|_W \leqslant 1} |(\overline{\varphi}, x)| = \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Для дифференциального оператора $\mathscr{P} = \sum a_k\partial^k$ его действие на обобщенные функции $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, определяется формулой

$$\mathscr{P}u = (\varphi, \mathscr{P}u) = (\mathscr{P}^*\varphi, u), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

где

$$\mathscr{P}^*\varphi = \sum_k (-1)^{|k|}\partial^k(a_k\varphi).$$

Отметим, что оператор $\mathscr{P}$ в (2.7), являющийся расширением исходного заданного на $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ симметрического дифференциального оператора

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}^*,$$

действует на функции $u \in W = [\mathscr{D}]$ так же, как дифференциальный оператор; точнее,

$$(\varphi, \mathscr{P}u) = (\mathscr{P}^*\varphi, u), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Действительно, согласно общему определению $\mathscr{P} = \overline{B}$, мы имеем

$$(\varphi, \mathscr{P}u) = (\varphi, \overline{Bu}) = \overline{(\overline{\varphi}, Bu)} = \overline{(B\overline{\varphi}, u)} = (\overline{\mathscr{P}\overline{\varphi}}, u) = (\mathscr{P}\varphi, u)$$

с $\mathscr{P}\overline{\varphi} = \overline{\mathscr{P}\varphi}$, $\mathscr{P}\varphi = \mathscr{P}^*\varphi$. □

Рассматривая вопрос о том, когда X является пространством типа W, т. е. $X = [\mathscr{D}]$ является замыканием пространства $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, сразу можно было бы сказать, что указанное свойство $X = [\mathscr{D}]$ равносильно *невырожденности* оператора $\mathscr{P}$ в следующей форме: *сходимость* $\|\varphi\|_W = (\varphi, \mathscr{P}\varphi)^{1/2} \to 0$ *влечет слабую сходимость* $\varphi \to 0$ *функций* $\varphi \in \mathscr{D}$ в $\mathscr{D}'$, а именно,

$$(x, \varphi) = (\varphi, x) \to 0$$

при каждом $x \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$.

Напомним, что в случае *полуограниченного оператора* $\mathscr{P}$, удовлетворяющего условию (2.5) или — когда $\mathscr{P}\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ — условию (2.6), пространство пробных функций

$X=[\mathscr{D}]$ включает плотное в нем $\mathscr{D}=C_0^\infty(T)$. и функции $u=(x, u)$, $x\in X$, из $W=[\mathscr{D}]$ можно отождествить с обобщенными функциями

$$u=(x, u), \quad x\in\mathscr{D}, \text{ в } \mathscr{D}^*.$$

Примером дифференциального оператора $\mathscr{P}$ с условием полуограниченности (2.5) — и тем более условием (2.6) — может служить оператор

$$\mathscr{P}=\sum_{|k|\leqslant p}(-1)^{|k|}\partial^{2k}, \tag{2.8}$$

задающий форму (2.4) вида

$$\langle u, v\rangle_W=\langle u, \mathscr{P}v\rangle_{\mathscr{L}_2}=\sum_{|k|\leqslant p}\left\langle\partial^k u, \partial^k v\right\rangle_{\mathscr{L}_2}, \quad u, v\in\mathscr{D}.$$

Ей отвечают известные *соболевские пространства*

$$W=\mathring{W}_2^p(T), \quad X=\mathscr{P}W=W^*=\mathring{W}_2^{-p}(T)$$

с нормами, обозначаемыми в дальнейшем как

$$\|u\|_W=\|u\|_p, \quad \|x\|_X=\|x\|_{-p}.$$

Отметим, что

$$\|u\|_p^2=\sum_{|k|\leqslant p}\left\|\partial^k u\right\|_{\mathscr{L}_2}^2,$$

причем это справедливо не только для $u\in\mathscr{D}=C_0^\infty(T)$, но и для всех $u\in\mathring{W}_2^p(T)$ — нужно только понимать $\partial^k u$ как обобщенную производную

$$(\varphi, \partial^k u)=(-1)^{|k|}(\partial^k\varphi, u), \quad \varphi\in\mathscr{D}.$$

В частности, согласно указанной формуле для $\|u\|_p^2$, здесь утверждается, что

для всех $u\in\mathring{W}_2^p(T)$ обобщенные производные $\partial^k u$ порядка $|k|\leqslant p$ принадлежат пространству $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(T)$.

В самом деле, каждая функция $u\in\mathring{W}_2^p$ есть предел $u=\lim u_n$ функций $u_n\in\mathscr{D}$ в $\mathring{W}_2^p=[\mathscr{D}]$, для них в $\mathscr{L}_2$ существует предел $\lim\partial^k u_n=f_k$, при всех $\varphi\in\mathscr{D}$

$$\left(\varphi, \partial^k u\right)=(-1)^{|k|}\left(\partial^k\varphi, u\right)=\lim(-1)^{|k|}\left(\partial^k\varphi, u_n\right)=$$
$$=\lim\left(\varphi, \partial^k u_n\right)=(\varphi, f_k),$$

и здесь уже непосредственно видно, что $\partial^k u=f_k\in\mathscr{L}_2$, причем

$$\|u\|_p^2 = \lim \|u_n\|_p^2 = \lim \sum_{|k| \leqslant p} \|\partial^k u_n\|_{\mathscr{L}_2}^2 = \sum_{|k| \leqslant p} \|f_k\|_{\mathscr{L}_2}^2.$$

Аналогичный пример дает дифференциальный оператор

$$\mathscr{P} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \leqslant p_j} (-1)^{|k_j|} \partial^{2k_j}, \tag{2.8$'$}$$

задающий форму (2.4) вида

$$\langle u, v \rangle_W = (u, \mathscr{P}u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \leqslant p_j} \langle \partial^{k_j} u, \partial^{k_j} v \rangle_{\mathscr{L}_2}, \quad u, v \in \mathscr{D},$$

где мультииндексы k_j указывают производные по j-й группе переменных, скажем, формально объединенных в многомерное $t_j \in R^{d_j}$ и в совокупности $\sum d_j = d$ представляющих $t = (t_1, \ldots, t_d) \in R^d$. Соответствующие

$$W = \mathring{W}_2^p(T), \quad X = \mathscr{P}W = W^* = \mathring{W}_2^{-p}(T)$$

с мультииндексом $p = (p_1, \ldots, p_n)$ будем также называть *соболевскими пространствами*, используя те же обозначения $\|u\|_W = \|u\|_p$, $\|x\|_X = \|x\|_{-p}$. Понятно, что для всех $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ обобщенные производные $\partial^{k_j} u$, $|k_j| \leqslant p_j$, принадлежат пространству $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(T)$ и

$$\|u\|_p^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \leqslant p_j} \|\partial^{k_j} u\|_{\mathscr{L}_2}^2, \quad u \in \mathring{W}_2^p.$$

Отметим, что при любых $p' \leqslant p'' \left(p_j' \leqslant p_j'', j = 1, \ldots, n\right)$ имеют место вложения

$$\mathring{W}_2^{p''} \subseteq \mathring{W}_2^{p'} \subseteq \mathscr{L}_2 \subseteq \mathring{W}_2^{-p'} \subseteq \mathring{W}_2^{-p''}$$

того же типа, что и в (2.2), (2.3). □

В случае дифференциального оператора

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial) = \sum_k a_k \partial^k \tag{2.9}$$

с постоянными коэффициентами его свойства определяются соответствующим полиномом

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(i\lambda) = \sum_k a_k (i\lambda)^k, \quad \lambda \in R^d. \tag{2.9$'$}$$

Это связано с представлением

$$\langle u, v\rangle_W = \langle u, \mathscr{P}v\rangle_{\mathscr{L}_2} = \int \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\mathscr{P}(i\lambda)\,d\lambda,$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — преобразование Фурье функций $u, v \in C_0^\infty(T)$. Из него непосредственно видно, например, что при

$$\mathscr{P}(i\lambda) \geqslant c > 0, \quad \lambda \in R^d,$$

для оператора $\mathscr{P}$ будет выполнено условие полуограниченности (2.5) и тем более условие (2.6) — поясним:

$$\|\varphi\|_W^2 = \int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \mathscr{P}(i\lambda)\,d\lambda \geqslant c\int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2\,d\lambda = c\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2.$$

4° Преобразование Фурье пробных обобщенных функций. Напомним коротко о некоторых свойствах *преобразования Фурье*

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{R^d} e^{-i\lambda t}\varphi(t)\,dt, \quad \lambda \in R^d. \tag{2.10}$$

Для интегрируемой $\varphi = \varphi(t)$, $t \in R^d$, оно определяет непрерывную функцию переменного λ, $\tilde{\varphi}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, и в случае интегрируемости $\tilde{\varphi}(\lambda)$, $\lambda \in R^d$, справедлива формула

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int e^{i\lambda t}\tilde{\varphi}(\lambda)\,d\lambda, \quad t \in R^d,$$

определяющая соответствующее *обратное преобразование Фурье* $\tilde{f} = \varphi$ *для* $f = \tilde{\varphi}$. При интегрируемости $|t|^p\varphi(t)$ правую часть в (2.10) можно p раз дифференцировать по переменным $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \lambda$ под знаком интеграла, и операция дифференцирования $\partial^k\tilde{\varphi}$, $|k| \leqslant p$, непосредственно дает

$$\partial^k\tilde{\varphi} = \widetilde{(-it)^k\varphi}.$$

С другой стороны, если функция φ имеет интегрируемые производные $\partial^k\varphi$, $|k| \leqslant p$, то интегрированием по частям в (2.10) получается

$$\widetilde{\partial^k\varphi} = (i\lambda)^k\tilde{\varphi}.$$

Для *свертки* $\varphi = u * v$ интегрируемых функций

$$\varphi(t) = \int u(t-s)v(s)\,ds$$

повторное интегрирование в (2.10) дает

$$\widetilde{u * v} = (2\pi)^{d/2}\tilde{u}\tilde{v}.$$

Аналогично в случае интегрируемости $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ обратное преобразование Фурье свертки $\tilde{u} * \tilde{v}$ дает произведение $(2\pi)^{d/2}\, uv$, и при интегрируемости uv получается, что

$$(2\pi)^{d/2}\widetilde{uv} = \tilde{u} * \tilde{v},$$

$$\int e^{-i\lambda t} u(t)\, v(t)\, dt = \int \tilde{u}(\mu)\, \tilde{v}(\lambda - \mu)\, d\mu.$$

Взяв вместо v комплексно-сопряженную функцию $\bar{v}$, при $\lambda = 0$ здесь получим известное *равенство Парсеваля*

$$\int u(t)\, \overline{v(t)}\, dt = \int \tilde{u}(\mu)\, \overline{\tilde{v}(\mu)}\, d\mu.$$

Обратимся к пространству $\mathcal{S}$ бесконечно дифференцируемых функций φ, таких что все их производные $\partial^k\varphi(t)$ убывают на «бесконечности» быстрее любой степени $|t|^{-p}$:

$$|t|^p \partial^k \varphi \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{2.11}$$

Сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}$ определяется как равномерная сходимость

$$|t|^p \partial^k \varphi_n \to |t|^p \partial^k \varphi$$

для всех производных $\partial^k\varphi$ и степеней $|t|^p$. Очевидно вложение

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(R^d) \subseteq \mathcal{S}$$

со сходимостью $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, более сильной, чем в $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье функций $\varphi \in \mathcal{S}$ дает $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$ из такой же совокупности функций (двойственного переменного $\lambda \in R^d$), и то же самое можно сказать об обратном преобразовании, так что мы имеем взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{S} \ni \varphi \leftrightarrow \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}.$$

Легко видеть, что это соответствие взаимно непрерывно, т. е. при $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}$ мы имеем $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ в $\mathcal{S}$ и наоборот — это следует, например, из общей для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ оценки

$$\left|(i\lambda)^k\, \partial^l \tilde{\varphi}\right| \leqslant \int\limits_{R^d} (1 + |t|^2)^{-r}\, dt \cdot \sup_t (1 + |t|^2)^r \left|\partial^k [(-it)^l \varphi]\right|$$

с $r > d/2$.

Взяв $w \in C_0^\infty(R^d)$ с $w(t)=1$ при $|t| \leqslant 1$ и положив $\varphi_n(t) = w(t/n)\varphi(t)$, для любой функции $\varphi \in \mathscr{J}$ получим $\varphi_n \in \mathscr{D} = C_0^\infty(R^d)$, для которых

$$\varphi_n \to \varphi, \quad \widetilde{\varphi}_n \to \varphi$$

в $\mathscr{J}$. Каждая обобщенная функция

$$x = (\varphi, x), \ \varphi \in \mathscr{D},$$

непрерывная относительно сходимости в $\mathscr{J}$, по непрерывности однозначно продолжается на все $\varphi \in \mathscr{J}$, и это определяет *обобщенную функцию* $x \in \mathscr{J}^*$; понятно, что $\mathscr{J}^* \subseteq \mathscr{D}^*$.

Для любой обобщенной функции $x \in \mathscr{J}^*$ равенство

$$(\varphi, \widetilde{x}) = (\widetilde{\varphi}, x) \tag{2.12}$$

с помощью $(\widetilde{\varphi}, x)$ на $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{J}$ задает обобщенную функцию $\widetilde{x} \in \mathscr{J}^*$ на $\varphi \in \mathscr{J}$ — *обобщенное преобразование Фурье функции* $x \in \mathscr{J}^*$.

Например, равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \widetilde{\varphi}(t) = (\widetilde{\varphi}, \delta_t) = (\varphi, \widetilde{\delta}_t), \qquad \varphi \in \mathscr{J},$$

непосредственно определяет функцию $\widetilde{x} = \widetilde{\delta}_t(\lambda) = e^{-i\lambda t}$, $\lambda \in R^d$, как обобщенное преобразование Фурье *дельта-функции* $x = \delta_t(s)$, $s \in R^d$, в точке $t \in R^d$.

Внешне равенство (2.12) схоже с равенством Парсеваля, которое фактически и составляет суть формулы (2.12) для $u = \widetilde{\varphi}$ и $x = \bar{v}$. С учетом того, что пространство $\mathscr{J} \supseteq C_0^\infty(R^d)$ плотно в $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(R^d)$, справедливое для $u, v \in \mathscr{J}$ равенство Парсеваля распространяется на все $u, v \in \mathscr{L}_2$, устанавливая унитарность преобразования Фурье $\varphi \to \widetilde{\varphi}$ в $\mathscr{L}_2$.

Для обобщенного преобразования Фурье сохраняют свою силу формулы дифференцирования и умножения на полином.

В связи с умножением выделим функции w, являющиеся *мультипликаторами* в $\mathscr{J}$, для которых $w\mathscr{J} \subseteq \mathscr{J}$ и операция умножения $\varphi \to w\varphi$ непрерывна по $\varphi \in \mathscr{J}$ относительно сходимости в пространстве $\mathscr{J}$. Такими мультипликаторами являются бесконечно дифференцируемые функции, которые сами и все их производные растут на бесконечности не быстрее, чем степенным образом,— скажем, для $w = w(t)$, $t \in R^d$, должно быть

$$\left|\partial^k w(t)\right| \leqslant C_k |t|^{p_k}, \quad t \in R^d.$$

В соответствии с этим w является также *мультипликатором* в $\mathcal{S}^*$ для каждого $x \in \mathcal{S}^*$, определяя $wx \in \mathcal{S}^*$ как

$$(\varphi, wx) = (w\varphi, x), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

На обобщенное преобразование Фурье переносится формула для умножения-*свертки*

$$(2\pi)^{d/2}\widetilde{wx} = \widetilde{w} * \widetilde{x}.$$

Понятно, что все сказанное относится и к обобщенному обратному преобразованию Фурье. □

Сделаем несколько дополнительных замечаний, связанных с операцией свертки.

Используя *свертку* $f * g$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}^*$ и пробной функции $g \in \mathcal{D} = C_0^\infty(R^d)$, которая определяется при каждом $t \in R^d$ как результат применения f к пробной $g(t-s)$, $s \in R^d$, мы имеем дело с бесконечно дифференцируемой функцией $f * g$ $(f * g \in C^\infty)$ с производными

$$\partial^k(f * g) = f * \partial^k g$$

— поясним: операция дифференцирования $\partial^k g_t$ непрерывна в пространстве $\mathcal{D}$.

Для $f \in \mathcal{D}^*$ с компактным носителем *свертка* $f * g$ определена для любой обобщенной функции $g \in \mathcal{D}^*$, а именно действие $f * g \in \mathcal{D}^*$ на пробные $\varphi(s)$, $s \in R^d$, определяется как результат последовательного применения f к сдвинутой на t пробной $\varphi_t = \varphi(s+t)$, а затем применения g к пробной функции (φ_t, f), $t \in R^d$; при этом

$$f * g = g * f,$$

где справа $f \in \mathcal{D}^*$ с компактным носителем действует соответственно на функцию $(\varphi_t, g) \in C^\infty$ (локализованную в окрестности носителя $\operatorname{supp} f$).

Свертку $f * g$ можно рассматривать как тензорное произведение $f \otimes g$ на $\varphi(s+t)$, $s, t \in R^d$, что непосредственно указывает на включение

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

в арифметическую сумму носителей f и g. Аналогичное включение справедливо и для *сингулярных носителей*

$$\operatorname{sing\,supp}(f * g) \subseteq \operatorname{sing\,supp} f + \operatorname{sing\,supp} g$$

(напомним, что sing supp обобщенной функции есть дополнение к открытому множеству, для каждой точки которого имеется окрестность, где она является бесконечно дифференцируемой). Указанное соотношение для $f, g \in \mathscr{D}^*$ с компактными носителями получается, например, из их представления $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$ с $f_1, g_1 \in \mathscr{D}$ и $f_2, g_2 \in \mathscr{D}^*$ с носителями из ε-окрестностей сингулярных носителей f и g:

$$\operatorname{sing\,supp}(f_1 * g_1 + f_1 * g_2 + f_2 * g_1 + f_2 * g_2) \subseteq \\ \subseteq \operatorname{supp} f_2 * g_2 \subseteq \operatorname{supp} f_2 + \operatorname{supp} g_2,$$

а к общему случаю можно прийти локализацией $f \to w(t/n)f$, $g \to w(t/n)g$ с $w \in \mathscr{D}$ ($w = 1$ в окрестности 0) при $n \to \infty$.

Благодаря непрерывности операции дифференцирования в $\mathscr{D}$,

$$\partial^k(f * g) = (\partial^k f * g) = (f * \partial^k g).$$

Имея *фундаментальное решение* $E \in \mathscr{D}^*$ уравнения $LE = \delta$ для операторов L с постоянными коэффициентами, являющееся функцией C^∞ всюду, кроме точки 0 (сингулярного носителя дельта-функции δ), для любого $u \in \mathscr{D}^*$ с компактным носителем можно использовать представление

$$u = \delta * u = LE * u = L(E * u) = L(u * E) = Lu * E,$$

которое дает включение

$$\operatorname{sing\,supp} u \subseteq \operatorname{sing\,supp} Lu,$$

указывающее на бесконечную дифференцируемость решения $u \in \mathscr{D}^*$ уравнения

$$Lu = f$$

в той же области, где этим свойством обладает правая часть f. Указанное свойство, характерное для эллиптических операторов, называют гипоэллиптичностью. Отметим, что фундаментальное решение $E \in \mathscr{D}^*$ в R^d может быть описано преобразованием Фурье

$$\widetilde{E} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{L(i\lambda)}, \quad \lambda \in R^d,$$

непосредственно получающимся из уравнения

$$LE = \delta. \ \square$$

Покажем, например, как, используя преобразования Фурье (точнее, соответствующие ряды Фурье), можно выявить некоторые нужные нам в дальнейшем свойства пространств $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ и $\mathring{W}_2^p(T)$, $p = 0, 1, \ldots$

Каждая функция $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в области $T \subseteq R^d$, имея компактный носитель в одном из кубов $(-n\pi, n\pi)^d$, $n = 1, 2, \ldots$, представима в нем рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_k \tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{k}{n}t}$$

с коэффициентами

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\frac{k}{n}t} \varphi(t)\, dt \to 0$$

при $|k| \to \infty$ быстрее любой (отрицательной) степени $|k|$, так что **все** производные $\partial^m\varphi$ представимы соответствующим равномерно сходящимся рядом

$$\partial^m \varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_k \left(i\frac{k}{n}\right)^m \tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{k}{n}t}.$$

Понятно, что функция φ с носителем в ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq T$ может быть аппроксимирована в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ частичными суммами φ_N (по $|k| \leqslant N$) указанного ряда Фурье, **локализованными** надлежащим множителем $w \in C_0^\infty(T)$, $w = 1$, в области $T_{\text{loc}} \supseteq \operatorname{supp} \varphi$, а именно, при $N \to \infty$ для всех производных

$$\left|\partial^m\varphi - \partial^m(w\varphi_N)\right| = \left|\partial^m w(\varphi - \varphi_N)\right| \leqslant C \sum_{l \leqslant m} \left|\partial^l\varphi - \partial^l\varphi_N\right| \to 0$$

равномерно. Очевидно, что функции вида $we^{i\frac{k}{n}t}$ с различными w, отвечающими счетному числу областей T_{loc} (объединение которых составляет T), образуют **счетную** *полную систему* в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ — полную в том смысле, что ее линейная оболочка плотна в $\mathscr{D}$, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ найдется последовательность линейных комбинаций функций вида $we^{i\frac{k}{n}t}$, сходящаяся к φ в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$; при этом, скажем, здесь можно взять линейные комбинации с рациональными коэффициентами, и это показывает, что *пространство* $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ *является сепарабельным.* Понятно, что вместе с ним будут сепарабельными все соболевские пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^p(T) = \left[C_0^\infty(T)\right]$ и сопряженные к ним $\overset{\circ}{W}{}_2^{-p}(T)$ $(p = 0, 1, \ldots)$.

Добавим, что согласно известному «разложению единицы», в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в качестве полной системы можно взять $\left\{we^{i\frac{k}{n}t}\right\}$ с надлежащими $w = w_1 \ldots \ldots w_d$, локализованными в достаточно малых окрестностях (взятых в счетном числе) и дающих

$$we^{i\frac{k}{n}t} = \prod_{j=1}^{d} w_j(t_j)\, e^{i\frac{k_j}{n}t_j}$$

как произведение пробных функций от каждого переменного t_j в $t = (t_1, \ldots, t_d)$; это указывает, в частности, на полноту соответствующих тензорных произведений типа

$$\varphi = \prod_{j=1}^{d} \otimes \varphi_j \equiv \prod_{j=1}^{d} \varphi_j(t_j). \ \square$$

Тензорное произведение обобщенных функций $f, g \in \mathscr{D}^*$ в области $T \subseteq R^d$ определено в прямом произведении $T \times T$ как обобщенная функция $f \otimes g$, действие которой на пробные функции $\varphi(s, t)$, $(s, t) \in T \times T$, есть результат последовательного действия f на $\varphi(\cdot, t)$ при фиксированном t и g на пробные $(\varphi(\cdot, t), f) \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$.

Обобщенная функция $f \otimes g$ однозначно определяется на всем $C_0^\infty(T \times T)$ при ее задании на пробных функциях

$$\varphi(s, t) = \varphi_1(s)\varphi_2(t) = \varphi_1 \otimes \varphi_2$$

с $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}$, где она есть

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2, f \otimes g) = (\varphi_1, f) \cdot (\varphi_2, g)$$

— поясним: всевозможные пробные $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ образуют полную систему в $C_0^\infty(T \times T)$. $\square$

Продолжим рассмотрение соболевских $\overset{\circ}{W}{}_2^p(T)$ и более общих пространств типа W с помощью преобразования Фурье.

Обозначим через $\mathscr{L}_{2,F}$ гильбертово пространство типа $\mathscr{L}_2$ с *весовой функцией* $F(\lambda) \geqslant 0$, локально ограниченной и растущей при $|\lambda| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|\lambda|^r$ (уточним, $\mathscr{L}_{2,F}$ образуется функциями $f = f(\lambda)$, $F^{1/2} f \in \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(R^d)$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{L}_{2,F}} = \int f(\lambda) \overline{g(\lambda)} F(\lambda)\, d\lambda, \qquad f, g \in \mathscr{L}_{2,F}.$$

В частности, в $\mathscr{L}_{2,F}$ входят все функции $f \in \mathscr{I}$, убывающие вместе со своими производными при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $|\lambda|^{-p}$; при этом сходимость в пространстве $\mathscr{I}$ сильнее, чем в $\mathscr{L}_{2,F}$ (см. (2.11)).

Отметим сразу же, что совокупность $\mathscr{I} \supseteq C_0^\infty(R^d)$ плотна в пространстве $\mathscr{L}_{2,F}$,

$$\mathscr{L}_{2,F} = [\mathscr{I}]$$

— например, любая ограниченная функция f, равная 0 вне некоторого компакта, может быть аппроксимирована в $\mathscr{L}_2$ надлежащими свертками $f * w \in C_0^\infty(\Lambda)$ с носителями в ограниченной области $\Lambda \subseteq R^d$, и для них

$$\| f - f * w \|_{\mathscr{L}_{2,F}} \leqslant C \| f - f * w \|_{\mathscr{L}_2} \to 0.$$

Обратимся к пространствам $W = \mathring{W}(T)$, $X = \mathring{W}(T)^*$, отвечающим в схеме (1.2)—(1.7) форме (1.2) вида

$$\langle u, v \rangle_W = \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_{\mathscr{L}_{2,F}}, \qquad u, v \in \mathscr{D}. \tag{2.13}$$

Как уже отмечалось (см. (1.9)), для любой области $T \subset R^d$ их всегда можно рассматривать как подпространства в соответствующих

$$W = \mathring{W}(R^d), \quad X = \mathring{W}(R^d)^*,$$

что мы и будем делать, остановившись на случае $T = R^d$.

Согласно (2.13), преобразование Фурье дает нам изометрическое соответствие

$$W \ni \varphi \leftrightarrow \tilde{\varphi} \in \mathscr{L}_{2,F}$$

для функций $\varphi \in \mathscr{D}$, которое продолжается до унитарного соответствия

$$W \leftrightarrow \tilde{W} = \mathscr{L}_{2,F}, \tag{2.14}$$

при котором для произвольного $u \in W = [\mathscr{D}]$ как предела $u = \lim \varphi$ с $\varphi \in \mathscr{D}$ соответствующее преобразование Фурье дает $\widetilde{u} = \lim \widetilde{\varphi} \in \mathscr{L}_{2,F}$, а совокупность $\widetilde{W}$ всех таких $\widetilde{u}$, $u \in W$, составляет все пространство $\mathscr{L}_{2,F}$ (поясним: функции $\widetilde{\varphi}$, $\varphi \in \mathscr{D}$, плотны в пространстве $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}_2$, а значит, и в самом пространстве $\mathscr{L}_{2,F} = [\mathscr{S}]$).

Согласно (2.14), пространство $W = \mathring{W}(R^d)$ содержит все функции $u = \widetilde{f} \in \mathscr{S}$, получающиеся из функций $f \in \mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}_{2,F}$ обратным преобразованием Фурье, причем сходимость в пространстве $\mathscr{S} \subseteq W$ сильнее, чем в самом W; понятно, что

$$W = [\mathscr{S}].$$

Очевидно, что элементы $x = (u, x)$, $u \in W$, сопряженного пространства $X = W^*$ можно рассматривать как обобщенные функции $x \in \mathscr{S}^*$, непрерывные по $u \in \mathscr{S}$ относительно $\|u\|_W$, и в соответствии с этим можно использовать обобщенное преобразование Фурье

$$\widetilde{x} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{x}), \quad \widetilde{\varphi} \in \mathscr{S},$$

— см. (2.12); при этом совокупность $\widetilde{X}$ всех $\widetilde{x}$, $x \in X$, можно отождествить с совокупностью всех линейных непрерывных функционалов $\widetilde{x} = (f, \widetilde{x})$ на $f \in \widetilde{W} = \mathscr{L}_{2,F}$ — напомним, что $\mathscr{S}$ плотно в пространстве $\mathscr{L}_{2,F}$.

Для более явного описания обобщенных пробных функций $x \in X = BW$ удобно перейти к комплексно-сопряженным функциям

$$\overline{x} = \overline{Bu} = \mathscr{P}u, \quad u \in W$$

— отметим, что скалярное произведение (2.13) инвариантно относительно перехода к комплексно-сопряженным функциям, и мы имеем

$$X = \overline{X} = \mathscr{P}W.$$

Воспользовавшись обобщенным преобразованием Фурье, получим

$$\widetilde{\mathscr{P}u} = F\widetilde{u}, \quad u \in W, \tag{2.15}$$

согласно тому, что

$$(\widetilde{\varphi}, \overline{\widetilde{\mathscr{P}u}}) = (\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W = \langle \widetilde{\varphi}, \widetilde{u} \rangle_{\mathscr{L}_{2,F}} = \int \widetilde{\varphi} \overline{F\widetilde{u}}\, d\lambda, \quad \widetilde{\varphi} \in \mathscr{S}.$$

Обратимся к случаю, когда $1/F(\lambda)$ допустима в качестве весовой функции и можно использовать отвечающее ей пространство $\mathscr{L}_{2,1/F}$. Очевидно, что в этом случае

$$f = \widetilde{\mathscr{P}u} = F\widetilde{u}, \quad \widetilde{u} \in \widetilde{W} = \mathscr{L}_{2,F}$$

однозначно характеризуются условием $f \in \mathscr{L}_{2,1/F}$, т. е.

$$\int \frac{|f|^2}{F}\, d\lambda < \infty,$$

и мы имеем унитарное соответствие

$$X = \mathscr{P}W \leftrightarrow \widetilde{X} = \mathscr{L}_{2,1/F}, \qquad (2.16)$$

задаваемое обобщенным преобразованием Фурье $f = \widetilde{\mathscr{P}u}$ обобщенных пробных функций $\mathscr{P}u$, $u \in W$ поясним:

$$\left(\|\mathscr{P}u\|_X = \sup_{\|\varphi\|_W \leqslant 1} |(\varphi, \mathscr{P}u)| = \sup_{\|\widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F}} \leqslant 1} |(\widetilde{\varphi}, f)| = \|f\|_{\mathscr{L}_{2,1/F}}\right).$$

Подведем итог.

Теорема. *Отвечающие форме* (2.13) *пространства*

$$W = \overset{c}{W}(R^d), \quad X = \mathscr{P}W = W^*$$

с помощью преобразования Фурье допускают унитарные представления (2.14), (2.16), *в рамках которых, согласно* (2.15), *оператор* $\widetilde{\mathscr{P}}$ *есть оператор умножения на весовую функцию* F. □

Остановимся подробнее на случае весовой функции типа

$$F(\lambda) \asymp 1 + |\lambda|^{2p} \qquad (2.17)$$

с целым показателем $p \geqslant 0$.

Отметим, что стоящий справа полином $\mathscr{P}(i\lambda) = 1 + |\lambda|^{2p}$ соответствует, согласно общей формуле (2.9), дифференциальному оператору $\mathscr{P}(\partial) = 1 + (-1)^p \Delta^p$, где

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial t_j^2}$$

оператор Лапласа. Очевидно, что этот полином в условии эквивалентности (2.17) можно заменить на эквивалентный ему полином $\mathscr{P}(i\lambda) = \sum_{|k| \leqslant p} |\lambda|^{2k}$, соответствующий дифференциальному оператору $\mathscr{P}(\partial) = \sum_{|k| \leqslant p} (-1)^{|k|} \partial^{2k}$, которому (см. (2.8)) отвечают соболевские пространства $W = \mathring{W}_2^p$, $X = \mathring{W}_2^{-p}$. Это указывает на эквивалентность норм

$$\|\varphi\|_W = \|\widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F}} \asymp \|\widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,\mathscr{P}}} = \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

где, напомним, $\|u\|_p^2 = \sum\limits_{|k|\leqslant p} \|\partial^k u\|_{\mathscr{L}_2}^2$ есть норма в соболевском пространстве $\mathring{W}_2^p$, которое и получается у нас в случае весовой функции типа (2.17):

$$W = \mathring{W}_2^p(R^d)$$

с эквивалентной нормой $\|u\|_W \asymp \|u\|_p$, $u \in W$.

Как мы знаем, каждая функция $u \in \mathring{W}_2^p$ имеет обобщенные производные $\partial^k u \in \mathscr{L}_2$ порядка $|k| \leqslant p$, и это полностью характеризует функции $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ — действительно, условие $\partial^k u \in \mathscr{L}_2(R^d)$ влечет включение $\widetilde{\partial^k u} = (i\lambda)^k \widetilde{u} \in \mathscr{L}_2(R^d)$, и если это верно при всех $|k| \leqslant p$, то $\mathscr{P}(i\lambda)^{1/2}\widetilde{u} \in \mathscr{L}_2(R^d)$ для $\mathscr{P}(i\lambda) = \sum\limits_{|k|\leqslant p} |\lambda|^{2k}$, что дает $\widetilde{u} \in \mathscr{L}_{2,\mathscr{P}} = \widetilde{W}$, $u \in W$ (см. (2.14)).

Понятно, что вместе с $W = \mathring{W}_2^p$ мы имеет соболевское пространство $X = W^* = \mathring{W}_2^{-p}$ с эквивалентной нормой $\|x\|_X \asymp \|x\|_{-p}$, $x \in X$.

Рассмотренный в (2.17) случай очевидным образом обобщается на

$$F(\lambda) \asymp 1 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{2p_j}, \tag{2.17$'$}$$

где многомерные $\lambda_j \in R^{d_j}$ указывают соответствующие переменные, в совокупности $\left(\sum\limits_j d_j = d\right)$ представляя $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^d$. Здесь возникают анизотропные соболевские пространства

$$W = \mathring{W}_2^p, \quad X = W^* = \mathring{W}_2^{-p},$$

отвечающие мультииндексу $p = (p_1, \ldots, p_n)$, с эквивалентными нормами

$$\|u\|_W \asymp \|u\|_p, \quad \|x\|_X \asymp \|x\|_{-p}$$

— см. (2.8)$'$; напомним

$$\|u\|_p^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k_j|\leqslant p_j} \|\partial^{k_j} u\|_{\mathscr{L}_2}^2, \quad u \in \mathring{W}_2^{\mathbf{p}}.$$

При этом функции $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ полностью характеризуются тем свойством, что их обобщенные производные

$$\partial^{k_j} u \in \mathscr{L}_2, \quad |k_j| \leqslant p_j \quad (j = 1, \ldots, n). \ \square$$

Рассматривая $W = W(T)$, $X = \mathring{W}(T)^*$ в произвольной области $T \subseteq R^d$ как подпространства в $W = \mathring{W}(R^d)$, $X = \mathring{W}(R^d)^*$ (см. по этому поводу (1.9)), их можно описать с помощью преобразования Фурье, обратившись к соответствующим подпространствам $\widetilde{W} = [\widetilde{\mathscr{D}}] \subseteq \mathscr{L}_{2,F}$ — замыканию в $\mathscr{L}_{2,F}$ всех функций $\widetilde{\varphi}$, $\varphi \in \mathscr{D}$ и $\widetilde{X} = [F\widetilde{\mathscr{D}}] \subseteq \mathscr{L}_{2,1/F}$ — замыканию в $\mathscr{L}_{2,1/F}$ всех функций $F\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{D}$, образованном всеми функциями $F\widetilde{u}$, $\widetilde{u} \in \widetilde{W}$; здесь помимо представления

$$\widetilde{x} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{x}) = \langle \widetilde{\varphi}, f \rangle_{\mathscr{L}_{2,F}}, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

с $f \in \widetilde{W}$ можно использовать для $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ такое же представление с другими $f \in \mathscr{L}_{2,F}$, имеющими одну и ту же ортопроекцию на подпространство $\widetilde{W} \subseteq \mathscr{L}_{2,F}$. $\square$

Рассмотрим вопрос о том, как соотносятся нормы в пространствах $W = [\mathscr{D}]$, отвечающих форме (2.13) при различных весовых функциях F — речь будет идти о нормах

$$\|\varphi\|_W = \|\widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F}}, \quad \varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T),$$

для ограниченных областей $T \subseteq R^d$.

Отметим сразу, что при условии

$$F(\lambda) \geqslant c_0 > 0 \tag{2.18}$$

мы имеем вложения $\mathscr{L}_{2,F} \subseteq \mathscr{L}_2$, $W \subseteq \mathscr{L}_2$ и каждая функция $f \in \widetilde{W} = [\widetilde{\mathscr{D}}] \subseteq \mathscr{L}_{2,F}$ есть преобразование Фурье

$$f(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_T e^{-i\lambda t} u(t)\, dt$$

финитной функции $u \in W$ ($u = 0$ вне ограниченной области $T \subseteq R^d$), определяющее целую аналитическую функцию $f(\lambda)$ комплексных λ, о которой можно сказать, что $f(\lambda) \equiv 0$ в случае, когда $f(\lambda) = 0$ в некоторой области действительных $\lambda \in R^d$.

Рассмотрим пространства $\mathscr{L}_{2,F}$ при различных $F = F_1, F_2$ (считая, что $F_1 \geqslant F_2$). Допустим, что разность

$F_1 - F_2$ имеет своим обобщенным преобразованием Фурье локально квадратично интегрируемую функцию $b(t)$, $t \in R^d$; положив

$$b(s, t) = b(s+t), \quad (s, t) \in T \times T \subseteq R^{2d},$$

продолжим $b(s, t)$ на все пространство R^{2d} до квадратично интегрируемой функции u и возьмем ее преобразование Фурье $\tilde{b}(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in R^{2d}$. Используя известные формулы для умножения-свертки и равенство Парсеваля, для $u, v \in C_0^\infty(T)$ получим

$$\int \tilde{u}\tilde{v}(F_1 - F_2)\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\int u(s)\, v(t)\, \overline{b(s+t)}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\int u(s)\, v(t)\, \overline{b(s, t)}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\int \tilde{u}(\lambda)\, \tilde{v}(\mu)\, \overline{\tilde{b}(\lambda, \mu)}\, d\lambda\, d\mu.$$

Считая в дальнейшем $F = F_1$, нужное нам продолжение $b(s, t)$ выберем удовлетворяющим условию

$$\int\int \frac{|\tilde{b}(\lambda, \mu)|^2}{F(\lambda)\, F(\mu)}\, d\lambda\, d\mu < \infty \tag{2.19}$$

— это можно сделать, например, в случае $F(\lambda) \geqslant c_0 > 0$. Взяв

$$a(\lambda, \mu) = (2\pi)^{d/2} \frac{\tilde{b}(\lambda, \mu)}{F(\lambda)\, F(\mu)},$$

будем иметь $a(\lambda, \mu) \in \mathscr{L}_{2, F \times F}$ в пространстве известного нам типа с весовой функцией $F(\lambda)F(\mu)$, $(\lambda, \mu) \in R^{2d}$, и

$$\int\int \tilde{u}\tilde{v}(F_1 - F_2)\, d\lambda = \langle \tilde{u} \times \tilde{v}, a \rangle_{\mathscr{L}_{2, F \times F}}$$

с $\tilde{u} \times \tilde{v} = \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\mu) \in \mathscr{L}_{2, F \times F}$. Непосредственно видно, что ограниченная симметрическая билинейная форма

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{L}_{2, F_1}} - \langle f, g \rangle_{\mathscr{L}_{2, F_2}} = \langle f, Ag \rangle_{\mathscr{L}_{2, F}}$$

от $f, g \in \widetilde{W}$ допускает указанное здесь представление с симметрическим вполне непрерывным (компактным) оператором A в гильбертовом пространстве $\widetilde{W} \subseteq \mathscr{L}_{2, F}$ — поясним: для ортонормированного базиса $\{\tilde{u}_k\}$ в $\widetilde{W}$ мы имеем ортонормированную систему $\{\tilde{u}_k \times \tilde{u}_j\}$ в $\mathscr{L}_{2,F\times F}$ и

$$\sum_{k,j} |\langle \tilde{u}_k, A\tilde{u}_j\rangle_{\mathscr{L}_{2,F}}|^2 = \\ = \sum_{k,j} |\langle \tilde{u}_k \times \tilde{u}_j, a\rangle|^2_{\mathscr{L}_{2,F\times F}} \leqslant \|a\|^2_{\mathscr{L}_{2,F\times F}} < \infty$$

(обладающий указанным свойством оператор A называют оператором Гильберта — Шмидта). Как известно, верхняя грань

$$\sup \langle f, Af\rangle_{\mathscr{L}_{2,F}} = c$$

по всем $f \in \overline{W}$, $\|f\|_{\mathscr{L}_{2,F}} = 1$, достигается на собственной функции $f = f_0 \in \overline{W}$. В нашем случае $F = F_1 \geqslant F_2$ мы имеем $0 \leqslant c \leqslant 1$. Покажем, что $c < 1$. Действительно, при $c = 1$ мы имели бы $\int |f_0|^2 F_2(\lambda)\, d\lambda = 0$ и $f_0(\lambda) = 0$ в той области $\lambda \in R^d$, где $F_2(\lambda) \neq 0$, но это в рассматриваемом случае $F = F_1$ типа (2.18) может быть справедливо лишь для $f_0 \equiv 0$. В итоге мы имеем $c < 1$ и

$$(1 - c)\|f\|_{\mathscr{L}_{2,F_1}} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_{2,F_2}} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_{2,F_1}}, \quad f \in \overline{W}.$$

Сформулируем полученный при сделанных выше предположениях результат.

Лемма. *Для любой ограниченной области $T \subseteq R^d$ имеет место эквивалентность норм*

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F_1}} \asymp \|\tilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F_2}}, \quad \varphi \in C_0^\infty(T). \tag{2.20}$$

Пусть, например, весовая функция F удовлетворяет условию

$$0 < \varliminf_{\lambda\to\infty} |\lambda|^{-2p} F(\lambda) \leqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty} |\lambda|^{-2p} F(\lambda) < \infty \tag{2.21}$$

или более широкому условию

$$0 < \varliminf_{\lambda\to\infty} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{2p_j}\right)^{-1} F(\lambda) \leqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{2p_j}\right)^{-1} F(\lambda) < \infty \tag{2.21'}$$

(уточним: при достоточно больших λ она представляет собой функцию типа (2.17) или соответственно функцию более широкого типа (2.17)′). Очевидно, можно взять другую весовую функцию $F = F_1$ в точности тина (2.17), (2.17)′, совпадающую с исходной функцией $F = F_2$ при достаточно больших λ и удовлетворяющую условию (2.18). Как мы знаем, для любой области $T \subseteq R^d$ при условии (2.17), (2.17)′ мы имеем соболевские пространства $W = \mathring{W}_2^p(T)$, $X = W^* = \mathring{W}_2^{-p}(T)$. Разность $F_1 - F_2$ есть финитная функция, и ее преобразование Фурье допускает нужное нам продолжение с условием (2.19), так что, согласно (2.20), получается следующий результат.

Теорема. *Форме* (2.13) *с весовой функцией типа* (2.21), (2.21)′ *в любой ограниченной области* $T \subseteq R^d$ *отвечают соответствующие соболевские пространства* $W = \mathring{W}_2^p(T)$, $X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$ *с эквивалентными нормами*

$$\|u\|_W \asymp \|u\|_p, \quad \|x\|_X \asymp \|x\|_{-p}.$$

5° Положительные дифференциальные операторы. Обратимся снова к дифференциальному оператору $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial)$ с постоянными коэффициентами в (2.9) и соответствующим ему по формуле (2.9)′ полиному

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(i\lambda) = \sum_{|k| \leqslant m} a_k (i\lambda)^k, \qquad \lambda \in R^d.$$

Положительная определенность формы (2.4) (иначе говоря, положительность оператора $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial) \geqslant 0$) диктует положительность $\mathscr{P}(i\lambda) \geqslant 0$, $\lambda \in R^d$. В самом деле, условие

$$(\varphi, \mathscr{P}\varphi) = \int |\tilde{\varphi}|^2 \mathscr{P}(i\lambda)\, d\lambda \geqslant 0$$

для определенного на $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$ оператора $\mathscr{P}$ распространяется на все функции $\varphi \in \mathscr{S}$, преобразование Фурье которых дает, в частности, все функции $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(R^d)$, и указанное условие, очевидно, равносильно положительности $\mathscr{P}(i\lambda) \geqslant 0$, $\lambda \in R^d$.

Понятно, что имеет место представление (2.13) с весовой функцией $F(\lambda) = \mathscr{P}(i\lambda)$. □

Объединив все члены полинома $\mathscr{P}(i\lambda)$ старшей степени m, получим однородную форму

$$\sum_{|k|=m} a_k (i\lambda)^k = i^m \sum_{|k|=m} a_k \lambda^k, \qquad \lambda \in R^d.$$

Для каждого $\lambda = \lambda_0$, где эта форма не равна 0, она при $\lambda = r\lambda_0$ растет с $r \to \infty$, как r^m быстрее, чем остальные члены полинома $\mathscr{P}(i\lambda) \geqslant 0$, и ясно, что в случае дей-

ствительных коэффициентов здесь должно быть $m = 2p$, причем

$$(-1)^p \sum_{|k|=2p} a_k \lambda^k \geqslant 0$$

при всех $\lambda \in R^d$.

Допустим, имеет место условие *эллиптичности* оператора $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial)$, выраженное строгой положительной определенностью

$$(-1)^p \sum_{|k|=2p} a_k \lambda^k > 0 \tag{2.22}$$

при $\lambda \neq 0$. Классическим примером здесь может служить оператор $\mathscr{P}(\partial) = (-1)^p \Delta^p$, представляющий собой взятую с надлежащим знаком p-ю степень оператора Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial t_j^2}$ и отвечающий полиному $\mathscr{P}(i\lambda) = |\lambda|^{2p}$.

В условии (2.22) старшая однородная форма порядка $m = 2p$ такова, что

$$c_1 r^{2p} \leqslant (-1)^p \sum_{|k|=2p} a_k \lambda^k \leqslant c_2 r^{2p}$$

при всех λ, $|\lambda| = r$, где c_1, $c_2 > 0$ есть min, max этой формы при $|\lambda| = 1$, и при достаточно больших $r = |\lambda|$, очевидно, $F(\lambda) = \mathscr{P}(i\lambda) \asymp |\lambda|^{2p}$ удовлетворяет условию (2.21).

Как следствие, получаем, что *для эллиптического оператора $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial)$ в каждой ограниченной области $T \subseteq R^d$ имеет место эквивалентность*

$$(u, \mathscr{P}u) \asymp \sum_{|k| \leqslant p} \|\partial^k u\|^2_{\mathscr{L}_2}, \quad u \in \mathring{W}_2^p(T).$$

Понятно, что в нашей схеме (1.2) — (1.7) мы в каждой ограниченной области $T \subseteq R^d$ имеем соболевские пространства

$$W = \mathring{W}_2^p(T), \quad X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$$

с эквивалентными нормами $\|u\|_W \asymp \|u\|_p$, $\|x\|_X \asymp \|x\|_{-p}$. □

Обобщением условия эллиптичности (2.22) для дифференциального оператора $\mathscr{P}(\partial) \geqslant 0$ может служить условие

$$\mathscr{P}(i\lambda) \asymp \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{2p_j} \tag{2.22'}$$

при достаточно больших $|\lambda|$, где $\lambda_j \in R^{d_j}$ указывает на j-ю группу переменных, в совокупности $\left(\sum_j d_j = d\right)$ представляющих $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^d$; согласно (2.21)′, *для каждой ограниченной области* $T \subseteq R^d$ *имеет место эквивалентность*

$$(u, \mathscr{P}u) \asymp \sum_{j=1} \sum_{|k_j| \leqslant p_j} \|\partial^k u\|^2_{\mathscr{L}_2}, \qquad u \in \mathring{W}^p_2(T),$$

где $\mathring{W}^p_2(T)$ есть соболевское пространство с мультииндексом $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Характерным здесь является

$$\mathscr{P} = L^*L = -\partial^2/\partial t_1^2 + A^2$$

с параболическим оператором $L = \partial/\partial t_1 + A$, где $\partial/\partial t_1$ — производная по переменному $t_1 \in R^1$, а A — симметрический эллиптический оператор по остальным переменным $(t_2, \ldots, t_d) \in R^{d-1}$ с производными ∂^k, $|k| \leqslant p$, $k = (k_2, \ldots, k_d)$; согласно (2.21)′, мы имеем

$$(u, \mathscr{P}u) = \|Lu\|^2_{\mathscr{L}_2} \asymp$$
$$\asymp \|u\|^2_{\mathscr{L}_2} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{\mathscr{L}_2} + \sum_{|k| \leqslant p} \|\partial^k u\|^2_{\mathscr{L}_2}, \qquad u \in \mathring{W}^{(1,p)}_2(T),$$

в любой ограниченной области $T \subseteq R^d$. □

Обратимся теперь к произвольному положительному оператору $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial) \geqslant 0$ с полиномом $\mathscr{P}(i\lambda) \geqslant 0$, удовлетворяющим условию

$$\varliminf_{\lambda \to \infty} \mathscr{P}(i\lambda) > 0. \tag{2.23}$$

Согласно унитарному представлению (2.15) и нашей лемме из п. 4° (см. (2.20)), для $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в каждой ограниченной области $T \subseteq R^d$ мы будем иметь

$$(\varphi, \mathscr{P}\varphi) \asymp \|\tilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,F}}, \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

выбрав весовую функцию F так, что $F(\lambda) = \mathscr{P}(i\lambda)$ при достаточно больших $|\lambda|$ и $F(\lambda) \geqslant \mathscr{P}(i\lambda)$, $F(\lambda) \geqslant c > 0$, при всех $\lambda \in R^d$. Очевидно, что $\|\tilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,F}} \geqslant c\|\tilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_2}$ для так выбранной $F(\lambda) \geqslant c > 0$. В итоге получаем, что при условии (2.23) *для дифференциального оператора* $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial)$ *в каждой ограниченной области* $T \subseteq R^d$ *выполняется усло-*

вие полуограниченности

$$(\varphi, \mathscr{P}\varphi) \geqslant c \|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

со всеми вытекающими из него следствиями (см. (2.5)). □

Характерный пример, когда нарушается условие (2.23), дает оператор $\mathscr{P} = L^*L$ с

$$L = \partial^p, \quad p = (p_1, \ldots, p_d),$$

и полином $\mathscr{P}(i\lambda) = |\lambda_1|^{2p_1} \ldots |\lambda_d|^{2p_d}$. Однако и для него в каждой ограниченной области $T \subseteq R^d$ выполняется условие (2.5), более того, в любой области типа

$$T \subseteq \{t\colon\ t_j > t_j^0; \quad j = 1, \ldots, d\}$$

выполняется условие полуограниченности (2.6).

Покажем это, выделив $p_j \neq 0$ и считая здесь $j = 1, \ldots, n < d$. Воспользовавшись тем, что всякую функцию $u \in C_0^\infty(T)$ можно представить p_j-кратным повторным интегралом от производной $\partial^{p_j} u$ и применяя эту менному t_j с оценкой

$$|u(t)|^2 \leqslant C \int_{t_j^0}^{t_j'} |\partial^{p_j} u|^2 \, dt_j$$

в любом конечном интервале $t_j^0 < t_j < t_j'$, и применяя эту оценку к $u = \varphi$ при $j = 1$, а затем последовательно при $j = 2, \ldots, n$ к соответствующим подынтегральным функциям

$$u = \partial^{p_1}\varphi, \quad \partial^{(p_1, p_2)}\varphi = \partial^{p_2}(\partial^{p_1}\varphi), \ldots,$$

получим

$$|\varphi(t)|^2 \leqslant C \int_{t_1^0}^{t_1'} \ldots \int_{t_n^0}^{t_n'} |\partial^p \varphi|^2 \, dt_1 \ldots dt_n$$

в любой ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq \{t\colon\ t_j^0 < t_j < t_j';\ j = 1, \ldots, n\}$; дополнительное интегрирование дает здесь очевидную оценку

$$\int_{T_{\text{loc}}} |\varphi(t)|^2 \, dt \leqslant C \int_T |\partial^p \varphi|^2 dt,$$

выражающую для $\mathscr{P} = L^*L$, $L = \partial^p$, условие

$$\langle \varphi, \mathscr{P}\varphi\rangle^{1/2}_{\mathscr{L}_2} \geqslant c \int\limits_{T'_{\rm loc}} |\varphi(t)|^2 \, dt, \qquad \varphi \in \mathscr{D}. \qquad (2.24)$$

6° Мультипликаторы и локализация пробных обобщенных функций. Рассмотрим вопрос о том, когда в наших пространствах $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^* \subseteq D^*$ определено умножение на ту или иную функцию w. Скажем, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию w определено для любой обобщенной функции $x \in D^*$ как

$$wx = (\varphi, wx) \equiv (w\varphi, x), \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

но остается вопрос о том, будет ли это для $x \in X \in \mathscr{D}^*$ давать функцию $wx \in \mathscr{D}^*$ из X.

Допустим, что функция w такова, что определенное указанной формулой произведение $wx \in X$ при всех $x \in X$ (это заключает в себе, в частности, что $w\varphi \in W$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}$). Покажем, что (линейный) оператор умножения $x \to wx$ *замкнут* в X. При сходимости $x_n \to x$, $wx_n \to y$ в X мы имеем также слабую сходимость

$$\begin{array}{ll} (\varphi, wx_n) = (w\varphi, x_n) & \\ \quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow & \\ (\varphi, y) \quad = (w\varphi, x) = (\varphi, wx), & \varphi \in \mathscr{D}, \end{array}$$

и видно, что $y = wx$. Как известно, определенный на всем гильбертовом пространстве линейный замкнутый оператор является *ограниченным*, и на всех $x \in X$

$$\|wx\|_X \leqslant C\|x\|_X.$$

Отсюда следует, что

$$|(w\varphi, x)| = |(\varphi, wx)| \leqslant \|\varphi\|_W \|wx\|_X \leqslant C\|\varphi\|_W \|x\|_X$$

и

$$\|w\varphi\|_W = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |(w\varphi, x)| \leqslant C\|\varphi\|_W, \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

т. е. что непосредственно определенный на $\mathscr{D}$ оператор умножения $\varphi \mapsto w\varphi$ *ограничен* в W. В свою очередь при условии ограниченности этого оператора на $\mathscr{D}$ в $W = [\mathscr{D}]$

$$\|w\varphi\|_W \leqslant C\|\varphi\|_W, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \qquad (2.25)$$

для любого $x \in X$ и $wx = (\varphi, wx)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, получается

$$|(\varphi, wx)| \leqslant \|w\varphi\|_W \|x\|_X \leqslant C\|\varphi\|_W \|x\|_X,$$

что указывает на принадлежность $wx \in X = W^*$ с нормой
$$\|wx\|_X \leqslant C\|x\|_X. \tag{2.25'}$$

Отметим, что ограниченный в W оператор умножения на функцию w, непосредственно определенный для $\varphi \in \mathscr{D}$, однозначно продолжается на все пространство $W = [\mathscr{D}]$ как
$$wu = \lim w\varphi \tag{2.26}$$
для всех $u = \lim \varphi$ в W. В случае, когда X есть пространство типа W $(X = [\mathscr{D}])$ и $W \subseteq \mathscr{D}^*$, определенный в (2.26) оператор умножения действует на предельные элементы $u = \lim \varphi$ как на обобщенные функции $u \in \mathscr{D}^*$, поскольку
$$(x,\ wu) = (wu,\ x) = \lim (w\varphi,\ x) = \\ = \lim (\varphi,\ wx) = (u,\ wx) = (wx,\ u), \qquad x \in \mathscr{D}.$$

Подведем итог следующим предложением.

Теорема. *Оператор умножения на w определен в пространствах $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$ тогда и только тогда, когда он ограничен на $\mathscr{D}$ в W.* □

Для примера обратимся к условию ограниченности (2.25) в случае **соболевских пространств** $W = \mathring{W}_2^p(T)$, $X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$. Очевидно, что оно выполняется для любой p-гладкой функции $w = w(t)$, ограниченной вместе с производными $\partial^k u$ порядка p — напомним здесь формулу Лейбница
$$\partial^k (w\varphi) = \sum_{l \leqslant k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!}\, \partial^l w \partial^{k-l} \varphi$$
с мультииндексами k, l, согласно которой
$$\| w\varphi \|_W^2 \asymp \sum_{|k| \leqslant p} \| \partial^k (w\varphi) \|_{\mathscr{L}_2}^2 \leqslant \\ \leqslant C \sum_{|j| \leqslant p} \| \partial^j \varphi \|_{\mathscr{L}_2}^2 \asymp C \| \varphi \|_W^2, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Это относится и к соболевским пространствам с мультииндексом $p = (p_1, \ldots, p_n)$, указывающим порядок p_j производных по соответствующей группе переменных $t_j \in R^{d_j}$ в представлении $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^d$ с $d = \sum_{j=1}^{n} d_j$;

напомним, что

$$\|\varphi\|_p^2 = \sum_{j=1} \sum_{|k_j| \leqslant p_j} \left\| \partial^{k_j} \varphi \right\|_{\mathscr{L}_2}^2.$$

Более широкий класс пространств можно определить условием

$$C \sum_k \int_{T_{\text{loc}}} |\partial^k \varphi|^2 dt \leqslant \|\varphi\|_W^2 \leqslant C \sum_k \|\partial^k \varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.27}$$

для каждой ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq T$, в которое вместе с каждой производной $\partial^k \varphi$ входят и все производные $\partial^l \varphi$ меньшего порядка $l \leqslant k$ $(l_i \leqslant k_i,\ i = 1, \ldots, d$, для мультииндексов $l, k)$. При условии (2.27) в $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$ определено умножение на все финитные функции $w \in C_0^\infty(T)$ — очевидно, что, взяв $T_{\text{loc}} \supseteq \operatorname{supp} w$, получим

$$\|w\varphi\|_W^2 \leqslant C \sum_k \|\partial^k (w\varphi)\|_{\mathscr{L}_2}^2 \leqslant C \sum_k \int_{T_{\text{loc}}} |\partial^k \varphi|^2 dt \leqslant C \|\varphi\|_W. \ \square$$

Рассмотрим вопрос об умножении для пространств $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$, отвечающие форме (2.13), используя для W унитарное представление $\widetilde{W} \subseteq \mathscr{L}_{2,F}$ в пространстве $\mathscr{L}_{2,F}$ с весовой функцией F (см. (2.15)).

Пусть весовая функция $F(\lambda)$, $\lambda \in R^d$, допускает оценку

$$F(\lambda + \mu) \leqslant F(\lambda) G(\mu) \tag{2.28}$$

при всех $\mu \in R^d$ (например, это так для весовых функций F типа (2.17), (2.17)′, дающих соболевские пространства).

Произведение $w\varphi$ имеет своим преобразованием Фурье свёртку $\widetilde{w\varphi} = (2\pi)^{-d/2} \widetilde{w} * \widetilde{\varphi}$, и условие ограниченности (2.25) можно выразить в форме

$$\|\widetilde{w} * \widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F}} \leqslant C \|\widetilde{\varphi}\|_{\mathscr{L}_{2,F}}, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Допустим, что преобразование Фурье $\widetilde{w}$ таково, что функция $f(\mu) = |\widetilde{w}(\mu)| G(\mu)^{1/2}$ является интегрируемой,

$$\int |\widetilde{w}(\mu)| G(\mu)^{1/2} d\mu < \infty. \tag{2.29}$$

Тогда, воспользовавшись неравенством

$$F(\lambda) \leqslant F(\lambda - \mu) G(\mu)$$

и считая $\int f(\mu)\,d\mu = 1$, получим

$$\|\widetilde{w} * \widetilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,F}} = \int \left| \int \widetilde{\varphi}(\lambda-\mu)\,\widetilde{w}(\mu)\,F(\lambda)^{1/2}\,d\mu \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int \left| \int \widetilde{\varphi}(\lambda-\mu)\,F(\lambda-\mu)^{1/2} f(\mu)\,d\mu \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C \int \int |\widetilde{\varphi}(\lambda-\mu)|^2 F(\lambda-\mu)\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= C \int \left[\int |\widetilde{\varphi}(\lambda-\mu)|^2 F(\lambda-\mu)\,d\lambda \right] f(\mu)\,d\mu = \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,F}}$$

— видно, что условие ограниченности (2.25) выполнено. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *В отвечающих весовой функции F типа* (2.28) *пространствах $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$ определено умножение на любую функцию w, удовлетворяющую условию* (2.29).

Понятно, что эта теорема об умножении переносится на все пространства $W = [\mathscr{D}]$, $X = W^*$ с эквивалентными нормами

$$\|\varphi\|^2_W \asymp \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,F}}, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \ \square$$

Отметим широкий класс пространств

$$W = \overset{\circ}{W}(T) = [\mathscr{D}] \subseteq \mathscr{D}^*$$

с «аппроксимационной единицей», образованной последовательностью мультипликаторов $w_n = w(t/n)$, $n \to \infty$, $w \in C_0^\infty(R^d)$, $w = 1$ в окрестности $t = 0$; здесь мы имеем в виду W с умножением на функции $w \in C_0^\infty(R^d)$, такие что последовательность операторов умножения на $w_n = w(t/n)$ является ограниченной,

$$\|w_n\varphi\|_W \leqslant C\|\varphi\|_W, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Примером здесь могут служить соболевские пространства $W = \overset{\circ}{W}{}^p_2(T)$, связанные с дифференциальными операторами (2.8), (2.8)′. Для таких пространств $W = \overset{\circ}{W}(T)$ локализация функций $u \in W$ в подобласти $S \subseteq T$ дает следующий результат.

Теорема (о локализации). *Функции $u \in W$ с носителями $\operatorname{supp} u \subseteq S$ входят в подпространство*

$$\mathring{W}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right].$$

(Подчеркнем, что здесь S может быть произвольным открытым множеством $S \subseteq T$ в R^d.)

В случае компактного носителя $\operatorname{supp} u \subseteq S$ можно взять мультипликатор $w \in C_0^\infty(S)$, $w = 1$ в окрестности компакта $\operatorname{supp} u$, для которого $u = wu = \lim w\varphi$ в представлении $u = \lim \varphi$ в W как предела функций $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, и, таким образом, $u = \lim w\varphi$ для $w\varphi \in \in C_0^\infty(S)$. В случае произвольного носителя $\operatorname{supp} u \subseteq S$ можно взять «аппроксимационную единицу» $w_n = w(t/n)$, для которой $u = \lim w_n u \in \mathring{W}(S)$ как предел функций $w_n u \in \mathring{W}(S)$ с компактными носителями $\operatorname{supp} w_n u \subseteq \subseteq \operatorname{supp} u \subseteq S$. Здесь для ограниченной по норме последовательности операторов умножения на w_n с очевидной сходимостью $w_n\varphi \to \varphi$ в $\mathscr{D} = C_0^\infty(T) \subseteq W$ мы имеем

$$\|u - w_n u\|_W \leqslant \|u - \varphi\|_W + \|\varphi - w_n\varphi\|_W + \|w_n(\varphi - u)\|_W$$

с $\varphi \to u$ в W. □

Рассмотрим еще один вопрос, касающийся локализации функций $u \in W$ в той или иной области $S \subseteq T$. Напомним, что пространство $W = \mathring{W}(T)$ было введено как пополнение исходного $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в области $T \subseteq R^d$. При этом, имея дело с $W = \mathring{W}(T)$, мы условились рассматривать $u \in W$ как функции $u = (x, u)$ обобщенного переменного $x \in X$, взяв соответствующие $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in \in \mathscr{D}$, за пробные обобщенные функции — см. (1.6), (1.7). Этот подход можно использовать, чтобы определить функции $u \in W$ в области S как $u = (x, u)$ с помощью пробных $x \in X$, скажем, имеющих носители $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$ в замыкании $[S]$ этой области. Обозначив $X(S)$ совокупность всех таких $x \in X$, составляющую подпространство в гильбертовом X, введем соответствующий функциональный класс $W(S)$ как пространство всех $u = =(x, u)$, линейных и непрерывных по $x \in X(S)$. Понятно, что всякая функция $u \in W(S)$, будучи линейным непрерывным функционалом на подпространстве $X(S) \subseteq \subseteq X$, продолжается до функции $u \in W = X^*$ во всей области $T \supseteq S$, где она определяется с помощью обобщенных пробных $x \in X$ как $u = (x, u)$, $x \in X$.

Выделим здесь специально важный случай, когда X есть пространство типа W, $X=\left[C_0^\infty(T)\right]$, и в соответствии с этим каждая функция $u\in W(S)$ представляет в области S обобщенную функцию

$$u=(\varphi,u),\quad \varphi\in C_0^\infty(S), \tag{2.30}$$

на пробных $\varphi=x\in X(S)\supseteq C_0^\infty(S)$; отметим здесь, например, что для соболевских $W=\mathring{W}_2^p(T)$, $X=\mathring{W}_2^{-p}(T)$ мы имеем $X(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]$, так что $u\in W(S)$ можно отождествить с обобщенной функцией $u=(\varphi,u)$; $\varphi\in C_0^\infty(S)$ на плотном в $X(S)$ пространстве $\mathscr{D}=C_0^\infty(S$ в области $S\subseteq T$.

Казалось бы, само определение $W(S)$ указывает на зависимость этого функционального класса от соответствующей области $T\supseteq S$, однако это не совсем так.

Рассмотрим $S\subseteq T$ с замыканием $[S]\subseteq T_{\mathrm{loc}}$ в области $T_{\mathrm{loc}}\subseteq T$ с соответствующими $W_{\mathrm{loc}}=\mathring{W}(T_{\mathrm{loc}})$ и $X_{\mathrm{loc}}=\mathring{X}(T_{\mathrm{loc}})$, интерпретируя X_{loc}, согласно (1.9), как подпространство $X_{\mathrm{loc}}\subseteq X=\mathring{X}(T)$, которое получается из X факторизацией по норме

$$\|x\|_{X_{\mathrm{loc}}}=\sup_{\|\varphi\|_W\leqslant 1}|(\varphi,x)|, \tag{2.31}$$

где $\varphi\in C_0^\infty(T_{\mathrm{loc}})$. Допустим, мы имеем дело со случаем, когда в исходном $X=\mathring{X}(T)$ определено умножение на $w\in C_0^\infty(T)$ с $w(t)=1$ при $t\in[S]$. Тогда для $x\in C_0^\infty(S)\subseteq X$ мы имеем

$$\|x\|_{X_{\mathrm{loc}}}\leqslant\|x\|_X=\sup_{\|\varphi\|_W\leqslant 1}|(w\varphi,x)|\leqslant \leqslant C\sup_{\|w\varphi\|_W\leqslant 1}|(w\varphi,x)|\leqslant C\|x\|_{X_{\mathrm{loc}}}.$$

Имея эквивалентные нормы

$$\|x\|=\|x\|_{X_{\mathrm{loc}}}\asymp\|x\|_X,\quad x\in C_0^\infty(S). \tag{2.32}$$

для различных областей $T_{\mathrm{loc}}\supseteq S$ мы получаем один и тот же функциональный класс $W(S)$, образованный всеми обобщенными функциями $u=(x,u)$, непрерывными по $x\in C_0^\infty(S)$ *относительно* $\|x\|$.

Как пример укажем здесь *соболевские пространства*

$$W(S) = W_2^p(S), \tag{2.33}$$

отвечающие соответствующим $W = \mathring{W}_2^p(T) = [C_0^\infty(T)]$, $p = 0, \pm 1, \ldots$

Уже говорилось, что наряду со скалярными $u \in W(S)$ мы будем иметь дело с обобщенными случайными функциями $u = (x, u)$, $x \in C_0^\infty(S)$, непрерывными относительно нормы $\|x\|$ в соответствующем X (типа W) со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин на вероятностном Ω; принадлежность к этому классу будем указывать записью $u \in \mathbf{W}(S)$.

§ 3. Реализация случайных обобщенных функций и некоторые теоремы вложения

1° Обобщенные функции и соболевские пространства. Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}^*$ в области $T \subseteq R^d$ представляет собой линейную функцию $f = (\varphi, f)$ переменного $\varphi \in \mathscr{D}$, в каждой ограниченной подобласти T_{loc} с замыканием $[T_{loc}] \subseteq T$, являющуюся непрерывной по $\varphi \in \mathring{W}_2^\infty(T_{loc}) = \bigcap\limits_p W_2^p(T_{loc})$, и локализация ее как wf с помощью мультипликатора $w \in C_0^\infty(T_{loc})$ дает линейный непрерывный функционал

$$wf \in \mathring{W}_2^\infty(T_{loc})^* = \bigcup_p \mathring{W}_2^{-p}(T_{loc}),$$

т. е. при некотором p

$$wf \in \mathring{W}_2^{-p}(T_{loc}). \tag{3.1}$$

Понятно, что выраженное в (3.1) свойство равносильно тому, что в любой *ограниченной* области T_{loc} с замыканием $[T_{loc}] \subset T$ *сужение* $f = (\varphi, f)$, $\varphi \in C_0^\infty(T_{loc})$, обобщенной функции $f \in \mathscr{D}^*$ представляет элемент из соболевского пространства $\mathring{W}^{-p}(T_{loc})$ с показателем p, отвечающим соответствующему мультипликатору $w \in C_0^\infty(T)$ в (3.1), $w = 1$ на $[T_{loc}]$; указанное здесь свойство локальной принадлежности обобщенной функции $f \in \mathscr{D}^*$ пространствам $\mathring{W}_2^{-p}(T_{loc})$ выразим как

$$f \overset{loc}{\in} \mathring{W}^{-p}(T_{loc}) \tag{3.1$'$}$$

с отвечающим области T_{loc} показателем p.

Этот подход можно использовать и для характеризации векторных обобщенных функций $f=(\varphi, f)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ (со значениями в гильбертовом пространстве) — нужно лишь использовать векторные $W_2^{-p}(T)$ как пространства векторных $f=(\varphi, f)$, непрерывных относительно пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ по норме $\|\varphi\|_p$ в соответствующих соболевских пространствах $\mathring{W}_2^p(T)=[\mathscr{D}]$. Так и будет нами сделано в дальнейшем для случайных обобщенных функций и их реализаций, и здесь нам потребуется одно уточнение в шкале соболевских пространств

$$\ldots \subseteq \mathring{W}_2^{p+1} \subseteq \mathring{W}_2^p \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{L}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathring{W}_2^{-p} \subseteq \mathring{W}_2^{-p-1} \subseteq \ldots$$

касающееся так называемых вложений Гильберта — Шмидта.

2° Реализация случайных функций и некоторые теоремы вложения. Говоря о случайной обобщенной функции $\xi=(\varphi, \xi)$, мы условились иметь в виду векторную линейную функцию от пробных $\varphi \in \mathscr{D}$, значения которой в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}=\mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин непрерывны относительно сходимости в $\mathscr{D}= C_0^\infty(T)$. Как отмечалось, можно считать, что значения $(\varphi, \xi) \in \mathbf{H}$ непрерывны относительно некоторой полунормы $\|\varphi\|_W$, которая в свою очередь непрерывна относительно сходимости в $\mathscr{D}$, и $\xi=(\varphi, \xi)$ можно рассматривать как векторную линейную функцию на соответствующем гильбертовом пространстве $W=[\mathscr{D}]$,— см. п. 1° § 1.

Имея это в виду, рассмотрим произвольное гильбертово пространство W и линейную непрерывную функцию $\xi=(u, \xi)$ от $u \in W$ с векторными значениями $(u, \xi) \in \mathbf{H}$ в пространстве $\mathbf{H}$ случайных величин, зависящих от элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Эту зависимость для случайных величин (u, ξ) укажем записью

$$(u, \xi)=(u, \xi)_\omega, \qquad \omega \in \Omega.$$

При каждом исходе $\omega \in \Omega$ мы имеем реализацию $(u, \xi)_\omega$ случайных величин (u, ξ), а в их совокупности — *реализацию*

$$\xi_\omega=(u, \xi)_\omega, \qquad u \in W,$$

случайной функции $\xi=(u, \xi)$, $u \in W$. Спрашивается, можно ли выбрать векторную функцию $\xi=(u, \xi)$ в $\mathbf{H}$ так, чтобы ее реализации $\xi_\omega=(u, \xi)_\omega$ были линейны и непрерывны по $u \in W$ для всех (или почти всех)

$\omega \in \Omega$? Понятно, что речь здесь идет о вложении реализаций ξ_ω в сопряженное пространство $X = W^*$, при котором

$$\xi_\omega = (u, \xi_\omega), \; u \in W,$$

с $\xi_\omega \in X$.

Отметим, что в нашей интерпретации случайной функции $\xi = (u, \xi)$ как векторной функции со значениями в $\mathbf{H}$ мы отождествляем ее со всеми *эквивалентными* случайными функциями $\tilde{\xi} = (u, \tilde{\xi})$, при каждом отдельном $u \in W$ имеющими значения $(u, \tilde{\xi}) = (u, \xi)$ в $\mathbf{H}$ — поясним: эти значения как случайные величины равны с вероятностью 1,

$$(u, \tilde{\xi})_\omega = (u, \xi)_\omega$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, что оставляет возможность «подправить» зависимость значений функции $\xi = (u, \xi)$ от случая для каких-то «плохих» исходов ω, в совокупности имеющих вероятность 0 (и такая поправка может внести радикальные изменения в поведение реализаций!). Говоря о реализациях случайной функции $\xi = (u, \xi)$ с тем или иным свойством, мы будем иметь в виду возможность выбора эквивалентной случайной функции с такими реализациями.

Указывая на связь с предложенной в (1.2) — (1.7) схемой, используем φ для обозначения элементов гильбертова пространства W. Рассмотрим вопрос о реализациях $\xi_\omega \in X = W^*$ случайной функции $\xi = (\varphi, \xi)$ при дополнительно данном условии ее непрерывности относительно нормы $\|\varphi\|_{W_0}$ в каком-либо гильбертовом пространстве $W_0 \supseteq W$. Данное здесь вложение

$$W \subseteq W_0 \tag{3.2}$$

подразумевает, что норма $\|\varphi\|_W$ не слабее $\|\varphi\|_{W_0}$.

Нам удобно будет использовать для элементов $x \in X = W^*$ представление Рисса

$$x = (\varphi, x) = \langle \varphi, u \rangle_W, \qquad \varphi \in W,$$

которое задает $x = Bu$ с помощью $u \in W$ и позволяет отождествить W^* с гильбертовым пространством $X = BW$,

$$\langle Bu, Bv \rangle_X = \overline{\langle u, v \rangle}_W.$$

Характеризуя векторную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in W$, со значениями в $\mathbf{H}$ ее непрерывностью относительно нормы $\|\varphi\|_{W_0}$, мы налагаем условие

$$E|(\varphi, \xi)|^2 \leqslant C\|\varphi\|^2_{W_0}, \quad \varphi \in W.$$

Назовем (3.2) *вложением Гильберта — Шмидта*, если для ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}$ в W

$$\sum_k \|\varphi_k\|^2_{W_0} < \infty. \tag{3.3}$$

Теорема. *При условии, что $W \subseteq W_0$ есть вложение Гильберта — Шмидта, реализации $\xi_\omega = (\varphi, \xi)_\omega = (\varphi, \xi_\omega)$ являются линейными непрерывными функциями от $\varphi \in W$,*

$$\xi_\omega \in X = W^*. \tag{3.4}$$

Доказательство. Исходя из условия (3.3), положим $\xi_k = (\varphi_k, \xi)$. Для случайных величин $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $\omega \in \Omega$, мы имеем

$$E\sum_k |\xi_k(\omega)|^2 = \sum_k E|(\varphi_k, \xi)|^2 \leqslant C\sum_k \|\varphi_k\|^2_{W_0} < \infty,$$

что дает $\sum\limits_k |\xi_k(\omega)|^2 < \infty$ при почти всех $\omega \in \Omega$. Возьмем эквивалентные случайные величины $\tilde{\xi}_k = \xi_k(\omega)$ так, чтобы указанный ряд сходился при всех $\omega \in \Omega$. Используя в $X = W^*$ сопряженный ортонормированный базис $\{x_k\}$ с $x_k = B\varphi_k$, введем

$$\tilde{\xi}_\omega = \sum_k \tilde{\xi}_k(\omega) x_k \in X.$$

При каждом $\omega \in \Omega$ мы имеем $\tilde{\xi}_\omega = (\varphi, \tilde{\xi}_\omega)$, $\varphi \in W$, как реализацию в X случайной функции $\tilde{\xi} = (\varphi, \tilde{\xi})$, $\varphi \in W$, со значениями

$$(\varphi, \tilde{\xi}) = \sum_k \tilde{\xi}_k \cdot (\varphi, x_k) = \sum_k (\varphi, x_k)(\varphi_k, \xi) = \left(\sum_k (\varphi, x_k)\varphi_k, \xi\right) = (\varphi, \xi)$$

— здесь используются разложение

$$\varphi = \sum_k \langle \varphi, \varphi_k\rangle_W \varphi_k = \sum_k (\varphi, x_k)\varphi_k$$

по ортонормированному базису $\{\varphi_k\}$ и непрерывность функции $\xi = (\varphi, \xi)$ по $\varphi \in W$ в H. Имея $\tilde{\xi} = (\varphi, \tilde{\xi})$ как случайную функцию, эквивалентную $\xi = (\varphi, \xi)$, видим, что все ее реализации дают нам элементы $\tilde{\xi}_\omega \in X = W^*$. □

Условие (3.3) того, что $W \subseteq W_0$ есть вложение Гильберта — Шмидта, можно выразить в разной форме. Само вложение $W \subseteq W_0$ означает, что элементы $\varphi \in W$ одновременно представляют элементы $\varphi \in W_0$ с нормой $\|\varphi\|_{W_0} \leqslant c \|\varphi\|_W$, и, таким образом, скалярное произведение $\langle u, v\rangle_{W_0}$ непрерывно по u, v в гильбертовом пространстве W, допуская известное представление

$$\langle u, v\rangle_{W_0} = \langle u, Rv\rangle_W, \quad u, v \in W, \tag{3.5}$$

с линейным ограниченным оператором $R \geqslant 0$ в W. Взяв квадратный корень $Q = R^{1/2}$, можно переписать условие (3.3) в виде

$$\sum_k \|Q\varphi_k\|_W^2 = \sum_k \langle \varphi_k, R\varphi_k\rangle_W < \infty \tag{3.6}$$

— напомним, что $\{\varphi_k\}$ есть ортонормированный базис в W. Условие (3.6) определяет $Q = R^{1/2}$ как *оператор Гильберта — Шмидта*, а R — как ядерный оператор в W.

Рассматривая случайную функцию $\xi = (\varphi, \xi)$ с непрерывными по $\varphi \in W$ значениями $(\varphi, \xi) \in H$, в качестве $W_0 \supseteq W$ всегда можно взять собственное для ξ гильбертово пространство $W_0 = [W]$, получающееся пополнением исходного W относительно скалярного произведения, определяемого *корреляционной формой*

$$\langle u, v\rangle_{W_0} = E(u, \xi)\overline{(v, \xi)}, \quad u, v \in W,$$

— для нее мы имеем представление (3.5), в котором соответствующий R называют *корреляционным оператором* в W. Перефразируя доказанную теорему о включении (3.4), можно сформулировать следующее предложение.

Теорема. *При условии ядерности корреляционного оператора в W для реализаций случайной функции $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in W$, справедливо включение* (3.4). □

Рассматривая в нашей схеме (1.2)—(1.7) случайную функцию $\xi = (x, \xi)$ обобщенного переменного $x \in X$, где $X = W^*$ — отвечающее данному $W = [\mathscr{D}]$ пространство пробных обобщенных функций, можно поставить вопрос о принадлежности реализаций

$$\xi_\omega \in W_0 \tag{3.7}$$

сопряженному пространству $W_0 = X_0^*$ для того или иного гильбертова $X_0 \subseteq X$. (Пока здесь в сравнении с рассмотренным выше общим случаем лишь переставлены местами W_0 и X.)

Теорема. *Включение* (3.7) *имеет место для любого W, допускающего вложение Гильберта — Шмидта*

$$W \subseteq W_0. \tag{3.8}$$

Это следует из уже доказанного ранее (при замене W_0 на X) с помощью следующей модификации общего условия (3.3) того, что $W \subseteq W_0$ есть вложение Гильберта — Шмидта.

Именно, взяв произвольный ортонормированный базис $\{x_j\}$ в гильбертовом пространстве $X_0 = W_0^*$, это условие можно выразить в форме

$$\sum_{k,j} |(\varphi_k, x_j)|^2 < \infty. \tag{3.3$'$}$$

Действительно, используя сопряженный ортонормированный базис $\{u_j\}$ в W_0, мы имеем

$$\|\varphi\|_{W_0}^2 = \sum_j |\langle \varphi, u_j \rangle_{W_0}|^2 = \sum_j |(\varphi, x_j)|^2$$

для любого $\varphi \in W_0$, и в условии (3.3) для ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}$ в гильбертовом пространстве $W \subseteq W_0$

$$\sum_k \|\varphi_k\|_{W_0}^2 = \sum_{k,j} |(\varphi_k, x_j)|^2 < \infty.$$

При вложении $W \subseteq W_0$ мы имеем одновременно вложение

$$X_0 = W_0^* \subseteq W^* = X$$

сопряженных пространств. При этом $W = X^*$ является сопряженным к гильбертову $X = W^*$ и $\{\varphi_k\}$ является ортонормированным базисом в X^*. Согласно этому, в (3.3)$'$ мы имеем также условие того, что $W_0^* \subseteq W^*$ есть вложение Гильберта — Шмидта. Получается следующий результат:

вложение Гильберта — Шмидта $W \subseteq W_0$ равносильно такого же типа вложению $W_0^* \subseteq W^*$ сопряженных пространств.

Таким образом, условие (3.8) равносильно тому, что $X_0 \subseteq X$ есть вложение Гильберта — Шмидта, а это, как мы уже знаем, дает для $W_0 = X_0^*$ включение (3.7). □

3° Гауссовские случайные функции. *Гауссовская случайная функция* $\xi=(\varphi, \xi)$, $\varphi\in W$, на гильбертовом пространстве W — это линейная непрерывная функция с действительными значениями $(\varphi, \xi)\in \mathbf{H}$, имеющими гауссовское распределение вероятностей для всех φ. Напомним, что при нулевом среднем $E(\varphi, \xi)=0$ это есть распределение с плотностью вероятности

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty<x<\infty,$$

где $\sigma^2=E(\varphi, \xi)^2$.

Допустим, что реализации $\xi_\omega=(\varphi, \xi_\omega)$, $\varphi\in W$, такой функции можно охарактеризовать тем свойством, что с положительной вероятностью $\xi_\omega\in X$ входят в сопряженное пространство $X=W^*$. Взяв ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ в W, получим, что с положительной вероятностью $(\varphi_k, \xi_\omega)\to 0$ при $k\to\infty$, а это для гауссовских случайных величин влечет среднеквадратичную сходимость,

$$E|(\varphi_k, \xi)|^2=\langle\varphi_k, R\varphi_k\rangle\to 0,$$

указывающую на компактность корреляционного оператора R. Взяв ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ из его собственных значений, для соответственно независимых гауссовских величин (φ_k, ξ_ω), $k=1, 2, \ldots$, и сходящегося (с положительной вероятностью) ряда

$$\sum_k|(\varphi_k, \xi_\omega)|^2=\|\xi_\omega\|_X^2<\infty,$$

получим вытекающую отсюда среднеквадратичную сходимость

$$\sum_k E(\varphi_k, \xi)^2=\sum_k\langle\varphi_k, R\varphi_k\rangle_W<\infty,$$

и мы видим, что R — ядерный оператор в W.

Ранее для произвольной случайной функции $\xi\in(\varphi, \xi)$, $\varphi\in W$, мы установили, что условие ядерности ее корреляционного оператора R в W дает $\xi_\omega\in X=W^*$ при всех $\omega\in\Omega$ (точнее, дает возможность выбора эквивалентной случайной функции с реализациями $\xi_\omega\in X=W_0^*$). В итоге *для реализаций гауссовской случайной функции* $\xi=(\varphi, \xi)$, $\varphi\in W$, *включение* $\xi_\omega\in X=W^*$ *имеет место тогда и только тогда, когда ее корреляционный оператор* R *в* W *является ядерным.*

Рассматривая гауссовскую случайную функцию $\xi \in = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in W_0$, на гильбертовом пространстве W_0, где она является невырожденной со среднеквадратичными значениями

$$E(\varphi, \xi)^2 \asymp \|\varphi\|^2_{W_0}. \tag{3.9}$$

на основании полученных результатов можно сформулировать следующее предложение.

Теорема. *Вложение Гильберта — Шмидта $W \subseteq W_0$ является необходимым и достаточным условием включения реализаций $\xi_\omega \in X = W^*$ гауссовской невырожденной функции $\xi \in (\varphi, \xi)$, $\xi \in W$.*

Это указывает на неулучшаемость общих включений (3.4), (3.7).

4° Вложения Гильберта — Шмидта. Рассмотрим соболевские пространства $\mathring{W}^n_2(T)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, в области $T \subseteq R^d$. Напомним, что $\mathring{W}^n_2(T) = [\mathscr{D}]$ при $n \geqslant 0$ есть замыкание пространства $\mathscr{D} = C^\infty_0(T)$ по норме

$$\|\varphi\|^2_n = \sum_{|k| \leqslant n} \|\partial^k \varphi\|^2_{\mathscr{L}_2},$$

а соответствующее $\mathring{W}^{-n}_2(T) = \mathring{W}^n_2(T)^*$ является сопряженным к $\mathring{W}^n_2(T)$. Нам удобнее будет использовать эквивалентную норму

$$\|\varphi\|^2_n = (\varphi, \mathscr{P}\varphi), \qquad \mathscr{P} = (1 - \Delta)^n,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Как мы знаем, при всех $n \geqslant m$ имеет место вложение

$$\mathring{W}^n_2(T) \subseteq \mathring{W}^m_2(T). \tag{3.10}$$

Теорема. *При*

$$n - m > d/2 \tag{3.11}$$

для любой ограниченной области $T \subseteq R^d$ в (3.10) *имеет место вложение Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Ограниченная область T содержится в некотором кубе $T_0 = [-\pi a, \pi a]^d$, и мы воспользуемся в пространстве $\mathscr{L}_2(T_0)$ разложением

$$\varphi(t) = \sum_k \tilde{\varphi}_k e_k(t) \tag{3.12}$$

по ортонормированному базису из функций

$$e_k(t) = \frac{1}{(2\pi a)^{d/2}} e^{i\frac{k}{a}t},$$

где $k=(k_1, \ldots, k_d)$ пробегает всю целочисленную d-мерную решетку. Не ограничивая общности доказательства, будем считать $a=1$. Введем операторы $\mathscr{I}^n$ как

$$\mathscr{I}^n\varphi(t) = \sum_k (1+|k|^2)^{n/2}\tilde{\varphi}_k e_k(t), \tag{3.13}$$

определенные на $\varphi \in \mathscr{L}_2(T_0)$, для которых в их разложении (3.12)

$$\sum_k (1+|k|^2)^n |\tilde{\varphi}_k|^2 < \infty.$$

Очевидно, что все функции $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ входят в область определения оператора $\mathscr{I}^n$ при каждом n, поскольку для них коэффициенты

$$\tilde{\varphi}_k = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \varphi(t) e^{-ikt}\, dt$$

стремятся к 0 при $|k| \to \infty$ быстрее, чем $(1+|k|^2)^{-p}$ с любым $p \geqslant 0$; отметим, что при $n=0, 1, \ldots$

$$(1-\Delta)^n\varphi(t) = \sum_k (1+|k|^2)^n \tilde{\varphi}_k e_k(t)$$

и

$$\|\varphi\|_n^2 = \|\mathscr{I}^n\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2. \tag{3.14}$$

Рассмотрим оператор $Q=\mathscr{I}^{-p}$, $p>d/2$. Очевидно, что есть ограниченный симметрический положительный оператор в $\mathscr{L}_2(T_0)$, имеющий элементы ортонормированного базиса $\{e_k\}$ своими собственными функциями с соответствующими собственными значениями $(1+|k|^2)^{-p/2}$, для которого

$$\sum_k \|Qe_k\|^2 = \sum_k (1+|k|^2)^{-p} < \infty$$

при $p>d/2$. Таким образом, Q есть оператор Гильберта — Шмидта в $\mathscr{L}_2(T_0)$, и этим мы воспользуемся.

Обратимся к вложению (3.10) с произвольным $m \geqslant 0$ и $n=m+p$, $p>d/2$. Согласно (3.14), ортонормированному базису $\{\varphi_j\}$ в $\mathring{W}_2^n(T)$ из функций $\varphi_j \in \mathscr{D}$ в $\mathscr{L}_2(T_0)$ отвечает ортонормированная система $\{\mathscr{I}^n\varphi_j\}$, применяя к которой оператор Гильберта — Шмидта $Q=\mathcal{I}^{-p}$, получаем

$$\sum_j \| Q(\mathcal{I}^n\varphi_j)\|^2_{\mathcal{L}_2}=\sum_j \|\mathcal{I}^m\varphi_j\|^2_{\mathcal{L}_2}=\sum_j \|\varphi_j\|^2_m<\infty,$$

а это и доказывает то, что $\mathring{W}_2^n(T)\subseteq\mathring{W}_2^m(T)$ есть вложение Гильберта — Шмидта. Применяя полученный результат к сопряженным пространствам, убеждаемся в том, что $\mathring{W}_2^{-m}(T)\subseteq\mathring{W}_2^{-n}(T)$ есть вложение Гильберта — Шмидта при любых $-m-(-n)=p>d/2$.

Рассмотрим теперь оставшиеся еще $n=-m+p$ (с m, $n>0$ и $p>d/2$) и установим, что $\mathring{W}_2^n(T)\subseteq\mathring{W}_2^{-m}(T)$ есть вложение Гильберта — Шмидта. Для элементов $x=\varphi_j\in\mathcal{D}$ ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$ в $\mathring{W}_2^n(T)$, рассматриваемых в $X=\mathring{W}_2^{-m}(T)$, мы имеем

$$\|x\|_{-m}=\sup_{\|\varphi\|_m\leqslant 1}|(\varphi,x)|=\sup_{\|\mathcal{I}^m\varphi\|_{\mathcal{L}_2}\leqslant 1}|(\mathcal{I}^m\varphi, Q\mathcal{I}^n x)|\leqslant$$

$$\leqslant\|Q\mathcal{I}^n x\|_{\mathcal{L}_2},$$

откуда с использованием ортонормированной системы $\{\mathcal{I}^n\varphi_j\}$ в $\mathcal{L}_2(T_0)$ и оператора Гильберта — Шмидта Q получаем

$$\sum_j\|\varphi_j\|^2_{-m}\leqslant\sum_j\|Q\mathcal{I}^n\varphi_j\|^2_{\mathcal{L}_2}<\infty,$$

что и требовалось доказать*).

В дополнение к доказанной теореме с условием (3.11) отметим еще следующее.

В пространстве $\mathcal{L}_2(T_0)$ операторы $\mathcal{I}^m$ определены формулой (3.13) на $\varphi\in\mathcal{D}=C_0^\infty(T)$ при всех действительных m, и с их помощью для каждого $m\geqslant 0$ равенством (3.14) можно ввести норму $\|\varphi\|_W=\|\varphi\|_m$, отвечающую в общей схеме (1.2) — (1.7) положительной билинейной форме

$$\langle u, v\rangle_W=\langle\mathcal{I}^m u, \mathcal{I}^m v\rangle_{\mathcal{L}_2},\quad u, v\in\mathcal{D}.$$

---

*) Условие (3.11) доказанной теоремы нельзя улучшить, что, в частности, следует из расходимости ряда $\sum\limits_k(1+|k|^2)^{-p}=\infty$ при $p=n-m\leqslant d/2$.

и порождающую соответствующее пространство $W=[\mathscr{D}]$, которое обозначим как $W=\mathring{W}_2^m(T)$; в согласии с этим обозначим $X=W^*$ как $X=\mathring{W}_2^{-m}(T)$. Очевидно, что $\|\varphi\|_m \geqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$ при любом $m \geqslant 0$ и имеет место невырожденное вложение $\mathring{W}_2^m(T) \subseteq \mathscr{L}_2(T)$ (поясним: все $\varphi \in \mathring{W}_2^m(T)$ входят в $\mathscr{L}_2(T) \subseteq \mathscr{L}_2(T_0)$, и при $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}=0$ мы имеем $\varphi=0$, $\mathscr{I}^m\varphi=0$ в $\mathscr{L}_2(T_0)$, так что $\|\varphi\|_m = \|\mathscr{I}^m\varphi\|_{\mathscr{L}_2}=0\big)$. Согласно этому, $X=\mathring{W}_2^{-m}(T)$ есть пространство типа W, $X=[\mathscr{D}]$ — см. (2.2), (2.3). Данное нами доказательство того, что *при условии* (3.11) *мы имеем в* (3.10) *вложение Гильберта — Шмидта*, распространяется на все действительные n, m с $n-m=p>d/2$. □

Выделим здесь специально случай

$$p>d/2,$$

когда мы в ограниченной области $T \subseteq R^d$ имеем вложение Гильберта — Шмидта

$$\mathring{W}_2^p(T) \subseteq \mathscr{L}_2(T).$$

Дополнительно здесь можно указать справедливое для любой области $T \subseteq R^d$ вложение

$$\mathring{W}_2^p(T) \subseteq C(T) \tag{3.15}$$

в пространство непрерывных функций $C(T)$, которое легко установить, например, используя для функций $u \in \mathring{W}_2^p(T) \subseteq \mathring{W}_2^p(R^d)$ преобразование Фурье $\tilde{u} \in \mathscr{L}_{2,F}$ из известного нам пространства $\mathscr{L}_{2,F}$ с весовой функцией

$$F(\lambda) \asymp 1+|\lambda|^{2p}, \qquad \lambda \in R^d.$$

В самом деле, в силу интегрируемости функции $1/F$ получается, что

$$\int|\tilde{u}(\lambda)|\,d\lambda \leqslant \left(\int|\tilde{u}(\lambda)|^2 F(\lambda)\,d\lambda\right)^{1/2}\left(\int\frac{1}{F(\lambda)}\,d\lambda<\infty\right)^{1/2} = C\,\|\tilde{u}\|_{\mathscr{L}_{2,F}},$$

и, следовательно, сама функция $u \in \mathring{W}_2^p(T)$, представимая обратным преобразованием Фурье

$$u = u(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\lambda t} \widetilde{u}(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T,$$

является непрерывной по переменному t, причем

$$\sup_t |u(t)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int |\widetilde{u}(\lambda)|\, d\lambda \leqslant C \|\widetilde{u}\|_{\mathscr{L}_{2,F}} \leqslant C \|u\|_p.$$

В соответствии с этим случайные $u \in \mathbf{W} = \mathring{\mathbf{W}}_2^p(T)$ также представимы как непрерывные функции $u = u(t)$, $t \in T$, в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин на вероятностном Ω, поскольку пространство пробных обобщенных функций $X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$ содержит всевозможные дельта-функции $x = \delta_t$ с $\widetilde{\delta}_t = e^{i\lambda t} \in \mathscr{L}_{2,F}$, которые в совокупности образуют полную систему в X, позволяя идентифицировать $u \in \mathbf{W}$ как «обычные» функции

$$u = u(t) = (x, u), \quad x = \delta_t,$$

переменного $t \in T$; при этом

$$E\,|u(t+h) - u(t)|^2 \leqslant C \|\widetilde{\delta}_{t+h} - \widetilde{\delta}_t\|^2_{\mathscr{L}_{2,1/F}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int |e^{i\lambda h} - 1|^2 \frac{1}{F(\lambda)}\, d\lambda. \ \square$$

5° Случайные обобщенные функции и соболевские пространства. Рассматривая случайную обобщенную функцию

$$\xi = (\varphi, \xi), \quad \varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T),$$

как векторную обобщенную функцию со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин, ее можно охарактеризовать тем свойством, что в каждой ограниченной области T_{loc} с замыканием $\bar{T}_{\text{loc}} \subseteq T$ она непрерывна по $\varphi \in C_0^\infty(T_{\text{loc}})$ относительно нормы $\|\varphi\|_p$ соболевского пространства $\mathring{W}_2^p(T_{\text{loc}})$ — с зависящим от области T_{loc} показателем p. Для скалярных функций это свойство было определено как локальная принадлежность к сопряженным соболевским пространствам $\mathring{W}_2^{-p}(T_{\text{loc}})$ (см. (3.1), (3.1)$'$).

Рассматривая случайную обобщенную функцию ξ с точностью до эквивалентности и имея в виду возможность выбора соответствующих реализаций

$$\xi_\omega = (\varphi, \xi_\omega), \quad \varphi \in C_0^\infty(T), \tag{3.16}$$

отвечающих случайным исходам $\omega \in \Omega$, установим следующее важное свойство.

Теорема. *Реализации случайной обобщенной функции локально принадлежат соболевским пространствам:*

$$\xi_\omega \overset{\text{loc}}{\in} \mathring{W}_2^{-p}(T_{\text{loc}}).$$

Это заключает в себе утверждение о том, что в (3.16) мы имеем не просто какую-то коллекцию данных (φ, ξ_ω), $\varphi \in C_0^\infty(T)$, а такую, что *при каждом* $\omega \in \Omega$ (3.16) *дает нам обобщенную функцию* $\xi_\omega \in \mathcal{D}^*$.

При доказательстве мы используем нашу схему (1.2)—(1.7) для $T_{\text{loc}} = T_1, T_2, \ldots$ с монотонно расширяющимися областями T_n, в сумме дающими $\bigcup_n T_n = T$. Как мы знаем, непрерывность $\xi = (\varphi, \xi)$ по $\varphi \in C_0^\infty(T_n)$ в $W_n = \mathring{W}_2^p(T_n)$ позволяет представить ξ в области T_n как

$$(\varphi, \xi) = (\varphi, \xi_n), \quad \varphi \in C_0^\infty(T_n), \tag{3.17}$$

со случайным элементом

$$\xi_n \in X_n = \mathring{W}_2^{-p_n}(T_n), \quad p_n > p + d/2,$$

— см. (3.4), (3.11). Уточним, случайный элемент $\xi_n = \xi_n(\omega) \in X_n$ при всех $\omega \in \Omega$, а равенство (3.17) для любого $\varphi \in C_0^\infty(T_n)$ выполняется с вероятностью 1 (при почти всех $\omega \in \Omega$), какова бы ни была рассматриваемая модификация случайной обобщенной функции ξ. Обе части равенства (3.17) как случайные обобщенные функции в области T_n непрерывны по φ в $\mathring{W}_2^{p_n}(T_n)$, и это равенство распространяется на все $\varphi \in \mathring{W}_2^{p_n}(T_n) = [C_0^\infty(T_n)]$. Возьмем монотонно возрастающую последовательность p_n. Взяв без изменения начальный элемент $\xi_1 = \tilde{\xi}_1$ и определив надлежащие $\tilde{\xi}_m \in X_m$, $m \leqslant n$, несколько «подправим» последующие $\xi_{n+1} \in X_{n+1}$, чтобы получить нужные нам $\tilde{\xi}_{n+1}$. Для этого используем вложение

$$X_n = \mathring{W}_2^{-p_n}(T_n) \subseteq \mathring{W}_2^{-p_{n+1}}(T_n),$$

рассматривая $\mathring{W}_2^{-p_{n+1}}(T_n) = \mathring{X}(T_n)$ как подпространство в $X_{n+1} = \mathring{W}_2^{-p_{n+1}}(T_{n+1})$, ортогональное аннулятору $Y_n \subseteq \subseteq X_{n+1}$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(T_n)$ (согласно общему представлению (1.9) мы используем здесь $\mathring{X}(T_{n+1}) = B\mathring{W}(T_{n+1})$ с $\mathring{W}(T_{n+1}) = \mathring{W}_2^{p_{n+1}}(T_{n+1}) \supseteq \mathring{W}_2^{p_{n+1}}(T_n) = \mathring{W}(T_n)$ и $\mathring{X}(T_n) = = B\mathring{W}(T_n)$ как подпространство в $\mathring{X}(T_{n+1}) = = \mathring{W}_2^{-p_{n+1}}(T_{n+1})$). Возьмем ортогональное разложение $\xi_{n+1} = \mathring{\xi}_n + \eta_n$ в X_{n+1} с компонентами $\mathring{\xi}_n \in \mathring{X}(T_n)$ и $\eta_n \in \in Y_n$, для которых при любом $\varphi \in \mathring{W}(T_n) = [C_0^\infty(T_n)]$ мы имеем $(\varphi, \eta_n) = 0$ и с вероятностью 1

$$(\varphi, \mathring{\xi}_n) = (\varphi, \xi_{n+1}) = (\varphi, \xi).$$

Используя определенный на предшествующем шаге элемент $\tilde{\xi}_n \in X_n \subseteq \mathring{X}(T_n)$, для которого при любом $\varphi \in \in \mathring{W}(T_n) \subseteq \mathring{W}^{-p_n}(T_n)$ с вероятностью 1

$$(\varphi, \tilde{\xi}_n) = (\varphi, \xi),$$

заменим $\mathring{\xi}_n$ на $\tilde{\xi}_n$ и положим

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \tilde{\xi}_n + \eta_n.$$

Для любого $\varphi \in \mathring{W}(T_{n+1})$ в его разложении $\varphi = \mathring{\varphi} + \psi$ на компоненты $\mathring{\varphi} \in \mathring{W}(T_n)$ и $\psi \perp \mathring{W}(T_n)$ в $\mathring{W}(T_{n+1}) \supseteq \mathring{W}(T_n)$ получим с вероятностью 1

$$(\mathring{\varphi}, \tilde{\xi}_{n+1}) = (\mathring{\varphi}, \tilde{\xi}_n) = (\mathring{\varphi}, \xi)$$

и

$$(\psi, \tilde{\xi}_{n+1}) = (\psi, \eta_n) = (\psi, \xi)$$

— поясним; $\mathring{X}(T_n) \subseteq X_{n+1}$ есть аннулятор ортогонального дополнения к подпространству $\mathring{W}(T_n)$ в $\mathring{W}(T_{n+1})$, так что в итоге с вероятностью 1

$$(\varphi, \tilde{\xi}_{n+1}) = (\varphi, \xi).$$

В нашей конструкции мы последовательно имеем

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1, \quad \tilde{\xi}_{n+1} = \tilde{\xi}_n + \eta_n \in \mathring{W}_2^{-p_{n+1}}(T_{n+1})$$

с $(\varphi, \eta_n) = 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(T_n)$, так что ξ можно представить формально «слабо сходящимся» рядом

$$\tilde{\xi} = \xi_1 + \sum_n \eta_n,$$

для которого при каждом $\varphi \in C_0^\infty(T)$ с вероятностью 1

$$(\varphi, \tilde{\xi}) = (\varphi, \tilde{\xi}_n) = (\varphi, \xi), \tag{3.18}$$

где n подчинено лишь условию $T_n \supseteq \operatorname{supp} \varphi$. Взяв равенство (3.18) за определение предлагаемой с помощью $\tilde{\xi}$ модификации случайной обобщенной функции ξ, видим, что ее реализации локально принадлежат соболевским пространствам $\mathring{W}_2^{-p_n}(T_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Теорема доказана. □

§ 4. Граничные значения обобщенных функций (случай соболевских пространств)

1° Некоторые характерные свойства соболевских пространств. Допустим, что мы имеем дело с обобщенной функцией $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, в области $T \subseteq R^d$ и нас интересует ее граничное поведение вблизи границы $\Gamma = \partial S$ подобласти $S \subseteq T$. В общей форме трудно даже поставить вопрос, отражающий этот предположительный интерес, однако в случае непрерывности $u = (\varphi, u)$ по норме $\|\varphi\|$ в том или ином пространстве пробных функций $X = [\mathscr{D}] \subseteq \mathscr{D}^*$ определенной характеристикой граничного поведения $u = (\varphi, u)$ может служить предел

$$\lim (\varphi, u) = (x, u) \tag{4.1}$$

при сходимости пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ к граничным функциям $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$; дополнительно здесь можно требовать от пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ быть так или иначе локализованными вблизи границы Γ, скажем $\operatorname{supp} \varphi \subseteq S$. С этой точки зрения мы рассмотрим граничные свойства обобщенных функций $u \in W$ для соболевских пространств

$$W = \mathring{W}_2^p(T), \quad X = \mathring{W}_2^{-p}(T),$$

точнее, речь будет идти о граничных свойствах функций $u \in W(S) = W_2^p(S)$ в области S на границе $\Gamma = \partial S$. Напомним, что $W(S) = W_2^p(S)$ у нас означает пространство, получающееся как сужение $W = \mathring{W}_2^p(T)$ в области $S \subseteq T$ (см. (2.33)). □

Начнем со случая, когда $\mathring{W}_2^p$ характеризуется целым $p>0$. Напомним, что $\mathring{W}_2^p(T) = [\mathscr{D}]$ есть замыкание $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ относительно нормы

$$\|u\|_p^2 = \sum_{|k|\leqslant p} \|\partial^k u\|^2_{\mathscr{L}_2(T)}$$

— см. (2.8).

Обратимся к пространству $C_0^p(T)$ всех функций $u = u(t)$ переменного $t \in T$ с компактными носителями $\operatorname{supp} u \subset T$, имеющих непрерывные производные $\partial^k u$, $|k| \leqslant p$; при рассмотрении таких функций в $\mathring{W}_2^p(R^d)$ мы имеем

$$C_0^p(T) \subseteq \mathring{W}_2^p(T)$$

с замыканием

$$\left[C_0^p(T)\right] = \mathring{W}_2^p(T).$$

Используя это представление для $\mathring{W}_2^p(T)$, легко установить, что *соболевские пространства типа $\mathring{W}_2^p$ инвариантны относительно p-гладких невырожденных преобразований переменного* $t = \tau(\widehat{t})$, покоординатно задаваемых функциями

$$t_i = \tau_i(\widehat{t_1}, \ldots, \widehat{t_d}), \qquad i = 1, \ldots, d, \tag{4.2}$$

с ограниченными производными до порядка p и невырожденным якобианом $|\partial\tau| \geqslant c > 0$. Действительно, при $t = \tau(\widehat{t})$ функции $u = u(t) \in C_0^p(T)$ переходят в функции $\widehat{u} = u(\tau(\widehat{t})) \in C_0^p(\widehat{T}) \subseteq \mathring{W}_2^p(\widehat{T})$ в соответствующей области $\widehat{T} \subseteq R^d$, причем, как легко проверить, имеет место эквивалентность норм $\|\widehat{u}\|_p \asymp \|u\|_p$, что в итоге для всех функций $u \in \mathring{W}_2^p(T) = \left[C_2^p(T)\right]$ дает $\widehat{u} \in \mathring{W}_2^p(\widehat{T}) = \left[C_0^p(\widehat{T})\right]$.

Сказанное здесь переносится и на анизотропные пространства $\mathring{W}_2^p(T)$, характеризуемые мультииндексом $p = (p_1, \ldots, p_n)$, если иметь в виду преобразования, сохраняющие однородные группы переменных $t_j = \tau_j(\widehat{t_j})$, $j = 1, \ldots, n$ — см. $(2.8)'$. □

Рассматривая $\mathring{W}_2^p(T) \subseteq \mathring{W}_2^p(R^d)$ как подпространство в $\mathring{W}_2^p(R^d)$, обратимся к случаю $T = R^d$.

При $|k| \leqslant p-1$ каждая функция $f = \partial^k u$ и ее обобщенная производная $g = \partial f/\partial t_i \in \mathscr{L}_2(R^d)$ по любому переменному $t_i \in R^1$ из $t = (t_1, \ldots, t_d) \in R^d$ связаны равенством

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f\, dt = \int \varphi g\, dt, \qquad \varphi \in C_0^\infty(R^d);$$

объединив все t_j, $j \neq i$, в переменное $s \in R^{d-1}$ и взяв произведение пробных функций от переменных s и t_i, как следствие, при **почти всех** $s \in R^{d-1}$ получим

$$-\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f\, dt_i = \int_a^b \varphi g\, dt_i = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \left[\int_a^{t_i} g\right] dt_i,$$

$$\varphi \in C_0^\infty([a, b]),$$

на любом конечном интервале $a \leqslant t_i \leqslant b$, и в силу этого здесь должно быть

$$f = \int_a^{t_i} g\, dt_i + C,$$

что указывает на **абсолютную непрерывность** функции f по переменному t_i с **обычной** производной $g = \partial f/\partial t_i$.

Таким образом, для любого t_i из $t = (t_1, \ldots, t_d) = (s, t_i)$ *все функции $f = \partial^k u(s, t_i)$ с $|k| \leqslant p-1$ и обобщенной производной $\partial f/\partial t_i \in \mathscr{L}_2(R^d)$ при почти всех $s \in R^{d-1}$ абсолютно непрерывны по переменному t_i и имеют $\partial f/\partial t_i$ своей обычной производной.*

Отметим, что к такого рода абсолютно непрерывным функциям применимо правило интегрирования по частям, которое дает тождество

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t_i} \varphi, f\right) = \left(\varphi, \frac{\partial}{\partial t_i} f\right),$$

указывающее, что обычная производная $\dfrac{\partial}{\partial t_i} f \in \mathscr{L}_2(R^d)$ функции f задает и ее обобщенную производную по переменному t_i.

Остановившись на случае однородно-изотропного пространства $\mathring{W}_2^p(R^d)$, характеризуемого целым $p > 0$, видим, что принадлежность $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ можно определить условием абсолютной непрерывности (указанного выше типа) по всем переменным самой функции $u = u(t)$ и всех ее последующих обычных производных до порядка $p - 1$ с $\partial^k u \in \mathscr{L}_2(R^d)$ при $|k| \leqslant p$ — см. (2.17).

С очевидными изменениями это переносится и на случай анизотропного $\mathring{W}_p(R^d)$ с мультииндексом $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — см. (2.17)$'$. □

2° След обобщенных функций и граничные значения. Рассматривая функции $u \in W = \mathring{W}_2^p(T)$ в области $S \subseteq T \subseteq R^d$, вернемся к поставленному ранее вопросу об их предельном поведении вблизи границы $\Gamma = \partial S$, остановившись на случае, когда Γ есть $(d-1)$-мерное многообразие в R^d. Будем предполагать, что граница представима в виде к о н е ч н о г о объединения

$$\Gamma = \cup \Gamma_\alpha \tag{4.3}$$

замкнутых «кусков» Γ_α, каждый из которых имеет окрестность в R^d, где после надлежащей замены переменных $t = \tau(s, r)$ типа (4.2) в локальных координатах (s, r) представляется «плоским куском» $\widehat{\Gamma}_\alpha \subseteq R^{d-1}$ в $(d-1)$-мерном подпространстве переменного $s \in R^{d-1}$ — в исходных координатах $t = \tau(s, r)$ Γ_α описывается уравнением

$$t = \tau(s, 0), \quad s \in \widehat{\Gamma}_\alpha \subseteq R^{d-1}.$$

В дальнейшем структура составляющих Γ отдельных кусков Γ_α не является существенной; мы будем их рассматривать лишь с точки зрения лебеговой меры ds в R^{d-1}, которая с $\widehat{\Gamma}_\alpha \subseteq R^{d-1}$ переносится на Γ_α, предполагая, что пересечения различных Γ_α имеют меру 0 — понятно, что в целом мы имеем лебегову меру ds на Γ; существенную роль будет играть соответствующее пространство $\mathscr{L}_2(\Gamma)$.

Представление (4.3) будет нами использовано для перехода от $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ к соответствующим «плоским кускам» $\widehat{\Gamma}_\alpha \subseteq R^{d-1}$; именно, локализовав $u \in W = \mathring{W}_2^p(T)$ как wu с надлежащим мультипликатором $w \in C_0^\infty(R^d)$ в окрестности локальных координат $t = \tau(s, r)$, мы обратимся к функции $wu[\tau(s, r)]$ от новых переменных $(s, r) \in R^d$,

$$wu \in \mathring{W}_2^p(R^d),$$

граничное поведение которой вблизи новой границы $\Gamma = R^{d-1} \supseteq \widehat{\Gamma}_\alpha$ описывает граничное поведение исходной функции $u = u(t)$ вблизи $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ — в качестве новой области S с границей $\Gamma = R^{d-1}$ при этом появится соответствующее полупространство, скажем

$$S = R^d_+ = \{(s, r):\ s \in R^{d-1},\ r > 0\}.$$

Имея это в виду, рассмотрим граничное поведение функций

$$u \in \mathring{W}^p_2(R^d)$$

вблизи «границы» $\Gamma = R^{d-1}$, образованной подпространством переменного $s \in R^{d-1}$ в R^d. □

Мы знаем, что для почти всех $s \in R^{d-1}$ каждая функция $u = u(s, r) \in \mathring{W}^p_2(R^d)$ и ее последующие производные $\partial^k u$ порядка $|k| \leqslant p - 1$ абсолютно непрерывны по переменному r; в частности, сама функция $u = u(s, r)$ и все ее последующие производные $\partial^k u$ порядка $k \leqslant p - 1$ по переменному r таковы, что для почти всех $s \in R^{d-1}$ имеется предел

$$\lim_{r \to 0} \partial^k u(s, r) = \partial^k u(s, 0) = u^{(k)}(s). \tag{4.4}$$

Напомним, что $u = u(t)$ как функция переменного $t = (s, r)$ определена при почти всех $t \in R^d$, точнее, при изменении ее на множестве меры 0 она будет представлять тот же самый элемент пространства $\mathring{W}^p_2(R^d)$; естественно спросить, как такое изменение отразится на соответствующих функциях $u^{(k)}(s)$ в (4.4). Частично на этот вопрос сразу же можно ответить, для рассматриваемых в области $S = R^d_+$ функций $u \in \mathring{W}^p_2(R^d)$ взяв, например, пробные $\varphi = x_n \in C_0^\infty(S)$ вида

$$x_n = x_n(s,\ r) = x(s)\, w_n(r) \tag{4.5}$$

с $x(s) \in C_0^\infty(R^{d-1})$ и дельта-образными $w_n(r) = n w(nr)$, $w \in C_0^\infty(R^1)$, на которых обобщенные производные $\partial^k u$, $k \leqslant p - 1$, принимают значения

$$\begin{aligned}
(x_n, \partial^k u) &= (-1)^k (\partial^k x_n, u) = \\
&= (-1)^k \int \Big[\int \partial^k x_n u \, dr \Big] ds = \int \Big[\int x_n \partial^k u \, dr \Big] ds = \\
&= \int x(s) \Big[\int \partial^k u(s, r)\, w_n(r)\, dr \Big] ds \to \int x(s)\, u^{(k)}(s)\, ds,
\end{aligned}$$

где справа в пределе появляются функции $u^{(k)}(s)$ из (4.4), а сам предел

$$\lim\left(x_n, \partial^k u\right) = \int x(s)\, u^{(k)}(s)\, ds \tag{4.6}$$

вместе с допредельными значениями $(x_n, \partial^k u) = (-1)^k(\partial^k x_n, u)$ не меняется при изменении $u = u(t)$ на множестве меры 0. Ввиду произвольности «весовых функций» $x(s)$, $s \in R^{d-1}$, отсюда следует, что *для каждого элемента* $u \in \mathring{W}_2^p\left(R^d\right)$ *функции* $u^{(k)} = u^{(k)}(s)$, $k \leqslant p-1$, *в* (4.4) *определены однозначно при почти всех* $s \in R^{d-1}$. □

Взятые нами в (4.5) функции $x_n \in \mathscr{D} = C_0^\infty\left(R^d\right)$ в пределе дают обобщенную функцию $x = x^{(0)} \in \mathscr{D}^*$ с обобщенными производными $x^{(k)} = \partial^k x$ по переменному r вида

$$(\varphi, x^{(k)}) = (-1)^k \int\limits_\Gamma x(s)\, \varphi^{(k)}(s)\, ds, \qquad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{4.7}$$

где $\varphi^{(k)}(s) = \partial^k \varphi(s, r)\,|_{r=0}$, $k \leqslant p-1$; понятно, что обобщенные $x^{(k)} \in \mathscr{D}^*$ имеют носители $\operatorname{supp} x^{(k)} \subseteq \Gamma = R^{d-1}$. Покажем, что *все* $x^{(k)} \in \mathscr{D}^*$ $(k \leqslant p-1)$ *входят в пространство обобщенных пробных функций* $X = \mathring{W}_2^{-p}\left(R^d\right)$. Установим сначала, что в (4.7) для функций $\varphi^{(k)}(s)$, $s \in \Gamma$, на $\Gamma = R^{d-1}$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ справедлива оценка

$$\|\varphi^{(k)}\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)} \leqslant C \|\varphi\|_p, \qquad k \leqslant p-1. \tag{4.8}$$

Она легко получается с помощью преобразования Фурье $\tilde{\varphi}(\lambda)$ с двойственным для $t = (s, r)$ переменным $\lambda = (\sigma, \rho)$; именно, согласно равенству Парсеваля для $\varphi^{(k)}(s) = \partial^k \varphi(s, r)\,|_{r=0}$ с

$$\widetilde{\varphi^{(k)}}(\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int (i\rho)^k\, \tilde{\varphi}(\sigma, \rho)\, d\rho,$$

$$|\widetilde{\varphi^{(k)}}(\sigma)|^2 \leqslant C \int \frac{|\rho|^{2k}}{1+|\lambda|^{2p}}\, d\rho \cdot \int |\tilde{\varphi}|^2 (1+|\lambda|^{2p})\, d\rho \leqslant$$
$$\leqslant C \int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 (1+|\lambda|^{2p})\, d\rho$$

при $k \leqslant p-1$, получаем

$$\int |\varphi^{(k)}(s)|^2\, ds = \int |\widetilde{\varphi^{(k)}}(\sigma)|^2\, d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant C \int\int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 (1+|\lambda|^{2p})\, d\sigma\, d\rho \leqslant C \|\varphi\|_p^2$$

— напомним здесь о представлении (2.14) пространства $W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ с помощью преобразования Фурье. Для самих же $x^{(k)} \in \mathscr{D}^*$ в (4.7) теперь получаем

$$|(\varphi, x^{(k)})| \leqslant \|x\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)} \cdot \|\varphi^{(k)}\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|x\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)} \cdot \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

и это уже непосредственно показывает, что $x^{(k)} \in X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$, причем

$$\|x^{(k)}\|_X = \|x^{(k)}\|_{-p} \leqslant C\|x\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)}, \quad k \leqslant p-1. \tag{4.9}$$

для всех «весовых функций» $x(s)$, $s \in \Gamma$, из $\mathscr{L}_2(\Gamma)$.

Из оценки (4.8) вытекает также, что для любого $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ как предела $u = \lim \varphi$ функций $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(R^d)$ в $W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ имеются соответствующие

$$u^{(k)}(s) = \lim \varphi^{(k)}(s), \tag{4.10}$$

являющиеся пределом в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ производных $\varphi^{(k)}(s) = \partial^k \varphi(s, r)|_{r=0}$ по переменному r порядка $k \leqslant p-1$, с помощью которых значения обобщенных $x^{(k)} \in X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$ вида (4.7) на $u \in W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ могут быть выражены как

$$(u, x^{(k)}) = \lim (\varphi, x^{(k)}) =$$
$$= \lim (-1)^k \int \varphi^{(k)}(s)\, x(s)\, ds = (-1)^k \int u^{(k)}(s)\, x(s)\, ds.$$

Сравним это с тем, что ранее получилось в (4.6) для функций $u^{(k)}(s)$ из (4.4), обратившись для этого к уже послужившим нам пробным $x_n \in \mathscr{D}$ вида (4.5). Покажем, что их производные $x_n^{(k)} = \partial^k x_n$ порядка $k \leqslant p-1$ сходятся в пространстве обобщенных пробных функций $X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$; понятно, что, согласно (4.6), при сходимости $\partial^k x_n \to \partial^k x$ предельными $x^{(k)} = \partial^k x$ могут быть лишь соответствующие $x^{(k)} \in X$ вида (4.7). Указанную сходимость легко установить с помощью преобразования Фурье

$$\widetilde{\partial^k x_n}(\lambda) = \widetilde{x}(\sigma)\,[(i\rho)^k w(\rho/n)],$$
$$\widetilde{\partial^k x}(\lambda) = \widetilde{x}(\sigma)\,(i\rho)^k,$$

где $\lambda = (\sigma, \rho)$; именно, используя представление (2.16) для пространства $X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$ и учитывая, что

$$\frac{|\rho|^{2k}}{1+|\lambda|^{2p}} \leqslant (1+\rho^2)^{-1}, \quad k \leqslant p-1,$$

получаем

$$\|\partial^k x_n - \partial^k x\|_{-p}^2 \asymp \int |\widetilde{\partial^k x_n} - \widetilde{\partial^k x}|^2 (1+|\lambda|^{2p})^{-1}\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \int |\widetilde{x}(\sigma)|^2 d\sigma \cdot \int |\widetilde{w}(\rho/n) - 1|^2 \frac{d\rho}{1+\rho^2} \to 0.$$

При этом слабый предел

$$\lim \left(u, \partial^k x_n\right) = \left(u, \partial^k x\right) = (-1)^k \int u^{(k)}(s)\, x(s)\, ds$$

выражается как мы только что видели, через функции $u^{(k)}(s)$ из (4.10), а, согласно (4.6), этот предел представим в том же виде через функции $u^{(k)}(s)$ из (4.4); ввиду произвольности весовых $x(s)$ отсюда заключаем, что $u^{(k)} = u^{(k)}(s)$, $k \leqslant p-1$, *в* (4.4), (4.10) *суть одни и те же функции* (определенные при почти всех $s \in \Gamma$ на границе $\Gamma = R^{d-1}$) — их называют *следом* функции $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ и ее производных $\partial^k u$, $k \leqslant p-1$, по нормали к границе Γ.

Отметим, что оценка (4.8) распространяется на все $\varphi = u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ с $\varphi^{(k)} = u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$. □

Возьмем функцию $u = u(t)$, для которой указанные выше производные $\partial^k u$ по переменному r из $t = (s, r)$ имеют нулевой след $u^{(k)} = 0$ на $\Gamma = R^{d-1}$ при всех $k \leqslant p-1$, и рассмотрим ее сужение

$$u_0 = u_0(t) = \begin{cases} u(t), & t \in S, \\ 0, & t \notin S \end{cases} \tag{4.11}$$

в области $S \subseteq R^d$ с границей Γ — скажем, в полупространстве $S = R_+^d$ всех $t = (s, r)$, $r > 0$. Вместе с $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ функция $u_0 = u_0(t)$ обладает тем свойством, что в области S она сама и ее последовательные производные $\partial^k u_0 = \partial^k u_0(t)$ по всем переменным из $t \in R^d$ порядка $|k| \leqslant p-1$ абсолютно непрерывны по каждому t_i из t (для почти всех остальных переменных в их координатном подпространстве R^{d-1}); применение правила интегрирования по частям для любой пробной $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(R^d)$ последовательно при всех $|k| \leqslant p$ дает *)

$$\int_T \partial^k \varphi u_0 dt = \int_S \partial^k \varphi u_0 dt = (-1)^{|k|} \int_S \varphi \partial^k u_0(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{|k|} \int_T \varphi \partial^k u_0(t)\, dt .$$

Это показывает, что обобщенные производные $\partial^k u_0$, $|k| \leqslant \leqslant p$, во всей области $T = R^d$ суть

$$\partial^k u_0(t) = \begin{cases} \partial^k u(t), & t \in S, \\ 0, & t \notin S, \end{cases}$$

представляя сужение функций $\partial^k u \in \mathscr{L}_2(T)$ в области $S = R^d_-$. Таким образом, *операция срезки* (4.11) для любой функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ с нулевым полным следом $u^{(k)} = 0$, $k = 0, \ldots, p-1$, на границе $\Gamma = \partial S$ дает

$$u_0 \in \mathring{W}_2^p(T).$$

Более того,

$$u_0 \in \mathring{W}_2^p(S) = [C_0^\infty(S)]; \tag{4.12}$$

в самом деле, такое включение очевидно для сдвинутых по переменному $r \to r - h$, $h > 0$, функций $u_0(s, r-h)$ с $\operatorname{supp} u_0 \subseteq S = R^d_+ = \{t = (s, r),\ r > 0\}$ — см. лемму о локализации, а исходная функция u_0 есть предел в $\mathring{W}_2^p(T)$

$$u_0(s, r) = \lim_{h \to 0} u_0(s, r-h). \ \square$$

---

*) Здесь для проверки удобно выделить отдельно дифференцирование ∂^l по переменным из $s \in R^{d-1}$ и ∂^k по переменному r; учитывая независимость производных функций $\varphi \in \mathscr{D}$ от порядка дифференцирования и положив $v = \partial^l \varphi$, например, будем иметь

$$-\int_{R^d_+} \frac{\partial v}{\partial r} u\, dt = \int_{R^{d-1}} \left[-\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial r} u\, dr \right] ds =$$

$$= \int_{R^{d-1}} \left[v(s, 0)\, u(s, 0) + \int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial r}\, dr \right] ds$$

с нулевым следом $u(s, 0) = \lim_{r \to 0} u(s, r) = 0$.

Покажем, что описанные в (4.4) — (4.12) граничные свойства имеют место в случае границы $\Gamma = \partial S$ общего типа (4.3).

Имеющее локальный характер предельное соотношение (4.4) непосредственно переносится на функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$, которые в окрестности локальных координат $t = \tau(s, r)$ для каждого $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ в (4.3) могут рассматриваться как функции $u(\tau(s, r)) \in \mathring{W}_2^p(R^d)$, и для почти всех $s \in \Gamma_\alpha$ производные $u^{(k)}(t) = \partial^k u/\partial r^k$ порядка $k \leqslant p-1$ при $r \to 0$ имеют указанный в (4.4) предел, определяющий *след* производных $u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$, по направлению нормали к границе Γ на каждом $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ и в целом на $\Gamma = \bigcup \Gamma_\alpha$.

Этот *след* можно определить и предельным соотношением (4.10), распространив на случай границы Γ общего типа (4.3) оценки (4.8), (4.9) со всеми вытекающими из них следствиями. Именно, взяв функцию $\varphi \in C_0^p(T)$ и локализовав ее как $w\varphi = \varphi$ в окрестности локальных координат $t = \tau(s, r)$ с помощью $w \in C_0^\infty(R^d)$, $w = 1$ в окрестности компакта $\Gamma_\alpha \cap \operatorname{supp} \varphi$, мы можем применить к $w\varphi[\tau(s, r)] \in C_0^p(R^d)$ оценку (4.8), действующую для всех функций из $\mathring{W}_2^p(R^d) \supseteq C_0^p(R^d)$, которая на $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ из данной координатной окрестности дает

$$\|\varphi^{(k)}\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma_\alpha)} \leqslant C\|w\varphi\|_p \leqslant C\|\varphi\|_p;$$

суммируя здесь по всем Γ_α, в конечном объединении (4.3) получаем оценку (4.8) на $\Gamma = \bigcup \Gamma_\alpha$ — понятно, что речь идет о производных $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi$ в окрестности границы Γ, вычисляемых в локальных координатах $t = \tau(s, r)$ как

$$\partial^k \varphi = \partial^k \varphi(t)/\partial r^k, \qquad k \leqslant p-1.$$

Повторим здесь, что оценка (4.8) с $\varphi \in C_0^p(T)$ позволяет определить *след* самой функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ и ее $k-1$ обобщенных производных $\partial^k u$ (имеющихся в окрестности границы Γ) как предел

$$u^{(k)}(s) = \lim \varphi^{(k)}(s), \qquad s \in \Gamma,$$

в пространстве $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ с помощью $\varphi \in C_0^p(T)$, $\lim \varphi = u$ в $\mathring{W}_2^p(T)$. Сама оценка при указанном предельном переходе распространяется на все функции $\varphi = u \in \mathring{W}_2^p(T)$

$$\|u^{(k)}\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma)} \leqslant C \|u\|_p, \quad k \leqslant p-1. \tag{4.13}$$

Так же как и раньше, эта оценка позволяет установить принадлежность обобщенных $x^{(k)}$, $k \leqslant p-1$, вида (4.7) к пространству $X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$, давая для них оценку (4.9).

Отметим, что формуле (4.7), задающей обобщенные $x^{(k)} \in \mathscr{D}^*$, можно дать несколько другую интерпретацию, при $u = \varphi \in \mathscr{D}$ рассматривая

$$(-1)^k(u,\ x^{(k)}) = (-1)^k(x^{(k)},\ u) = (x,\ u^{(k)}), \quad k \leqslant p-1, \tag{4.14}$$

как *граничные значения* функции $u \in W = \mathring{W}_2^p(T)$ на пробных $(-1)^k x^{(k)} \in X$, а весовые функции $x = x(s)$, $s \in \Gamma$, в (4.7) как «пробные» $x \in \mathscr{L}_2(\Gamma)$, с помощью которых *след* производных $\partial^k u$ на Γ можно определить как обобщенные функции

$$u^{(k)} = (x,\ u^{(k)}), \quad x \in \mathscr{L}_2(\Gamma).$$

При этом равенство (4.14) можно взять за определение обобщенных $u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$. Очевидно, что это распространяется с $u = \varphi \in \mathscr{D}$ предельным переходом $\varphi \to u$ в $W = \mathring{W}_2^p(T)$ на все функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$, при котором, согласно (4.13), мы имеем $\varphi^{(k)} \to u^{(k)}$ в $\mathscr{L}_2(\Gamma)$, $k \leqslant p-1$. □

Нам осталось еще распространить на случай общей границы Γ определенную в $\mathring{W}_2^p(T)$ операцию (4.11) и включение (4.12).

Это легко сделать, когда в окрестности любой компактной части $\Gamma_{\mathrm{loc}} \subseteq \Gamma$ имеется «разложение единицы»

$$1 = \sum_j w_j,$$

в котором каждая функция $w_j \in C_0^\infty(R^d)$ имеет носитель внутри окрестности локальных координат $t = \tau(s,\ r)$ для какого-либо Γ_α в представлении (4.3)

$$\Gamma_\alpha \supseteq \Gamma \cap \operatorname{supp} w_j$$

— например, такое «разложение единицы» имеется в случае, когда граница Γ представляет собой гладкое $(d-1)$-мерное многообразие с картой окрестностей локальных координат $t=\tau(s, r)$ типа (4.2). Удобно спачала взять функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ с **компактными** носителями $\operatorname{supp} u \Subset T$; для каждой из них указанное «разложение единицы» в окрестности $\Gamma_{\text{loc}} = \Gamma \cap \operatorname{supp} u$ при операции «срезки» (4.11) дает нам представление

$$u_0 = \Big(1 - \sum_j w_j\Big) u_0 + \sum_j w_j u_0 = \Big[\Big(1 - \sum_j w_j\Big) u\Big]_0 + \sum_j (w_j u)_0,$$

где первое слагаемое есть функция из $\mathring{W}_2^p(S)$ в силу уже известной нам теоремы о локализации, а каждое из остальных слагаемых $w_j u^0 = (w_j u)^0$ с **компактным** носителем в окрестности локальных координат $t=\tau(s, r)$ при достаточно малых сдвигах $r \to r + 1/n$ переменного $r>0$ дает функции с компактным носителем в области S, является их пределом при $n \to \infty$ в $\mathring{W}_2^p(T)$ и вместе с ними входит в $\mathring{W}_2^p(S)$ согласно упомянутой уже теореме о локализации. К общим функциям $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ теперь можно перейти предельным переходом от функций

$$u_n = w_n u \to u \in \mathring{W}_2^p(T)$$

с «аппроксимативной единицей» $w_n = w(t/n) \in C_0^\infty(R^d)$. $\square$

Подведем итог всему сказанному выше о граничном поведении функций $u \in \mathring{W}_2^p(T)$ в области $S \subseteq T$ с границей $\Gamma = \partial S$ рассмотренного типа:

при почти всех $s \in \Gamma$ имеются производные $u^{(k)} = u^{(k)}(s)$ порядка $k \leqslant p-1$ по нормали к Γ, $u^{(k)} \in \mathscr{L}_2(\Gamma)$ с оценкой (4.13); как обобщенные функции $u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$, могут быть определены на Γ формулой (4.14); условие

$$u^{(k)} = 0, \quad k \leqslant p-1, \tag{4.15}$$

характеризует сужение $u_0 = u$ в области $S \subseteq T$ как $u_0 \in \mathring{W}_2^p(S)$; условие

$$\operatorname{supp} u \subseteq [S] \tag{4.16}$$

дает $u = u_0$ *в области* T *и характеризует функции* $u \in \in \mathring{W}_2^p(S)$.

Уже отмечалось, что $u^{(k)}$ называют *следом* на границе $\Gamma = \partial S$ нормальной производной $\partial^k u$ обобщенной функции $u \in \mathring{W}_2^p(T)$; будем называть *полным следом* совокупность $u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$. □

Описанные выше свойства соболевских пространств $\mathring{W}_2^p(T) \subseteq \mathring{W}_2^p(R^d)$ для однородно-изотропного случая, характеризуемого одним целым $p > 0$, с очевидно необходимыми изменениями переносятся на анизотропные пространства $\mathring{W}_2^{\mathbf{p}}(R^d)$ с мультииндексом $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, определяющим норму

$$\|u\|_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|k_i| \leqslant p_i} \|\partial^{k_i} u\|_{\mathscr{L}_2}^2,$$

где i указывает соответствующую группу переменных $t_i \in R^{d_i}$ из $t \in R^d \left(\sum d_i = d\right)$. Возникающая при различных p_i анизотропность накладывает ограничения на возможность использованного нами перехода от $\Gamma = R^{d-1}$ к границе $\Gamma = \cup \Gamma_\alpha$ произвольного типа (4.3). Эти ограничения касаются представления

$$\Gamma_\alpha = \{t = \tau(s, r),\ s \in \widehat{\Gamma}_\alpha,\ r = 0\}$$

«плоским куском» $\widehat{\Gamma}_\alpha \subseteq R^{d-1}$ и могут быть выражены тем условием, что преобразование $t = \tau(s, r)$ типа (4.2) сохраняет соответствующие группы переменных

$$t_i = \tau_i(\widehat{t_i}), \quad \widehat{t_i} \in R^{d_i}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

и тем самым сохраняет само пространство $\mathring{W}_2^p(R^d)$ с $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Понятно, что в окрестности локальных координат $t = \tau(s, r)$ с переменным $r \in R$ из группы $t_i \in R^{d_i}$ описанные для однородного случая с одним p граничные свойства переносятся в отдельности на каждый кусок $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$ со своим $p = p_i$, что вносит изменения в неравенства (4.8), (4.9) и граничные свойства на границе $\Gamma = \cup \Gamma_\alpha$ в целом — мы имеем в виду свойства, определяемые наличием на Γ_α *следа* $u^{(k)}(s)$, $s \in \Gamma_\alpha$, нормальных производных порядка $k \leqslant p-1$, вообще говоря, со своим $p = p_i$ для каждого $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$. Очевидно, что неравенства (4.8), (4.9) и вытекающие из них следствия, а также определяющая *след* формула (4.14) сохраняются с тем лишь изменением, что нужно ограничиться соответствующими функциями $x(s)$, $s \in \Gamma$, из $\mathscr{L}_2(\Gamma)$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma_\alpha$ в каждом отдельном $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$. Очевидно, что сохраняет свою силу и условие (4.15) нулевого *полного следа* $u^{(k)}$, $k \leqslant p-1$ (с соответствующим $p = p_i$), а вместе с ним и условие (4.16). Поясним сказанное на примере двух различных $p_1 > 1$, $p_2 = 1$ в применении к функциям $u \in \mathring{W}_2^{(p_1, p_2)}(R^d)$ с группой переменных $t_1 \in R^{d-1}$ и $t_2 \in R^1$; скажем, для полупространства $S = \{t_1 \in R^{d-1},\ t_2 > 0\}$ *полный след* на границе $\Gamma = \partial S$ есть отвечающий $p = p_2 = 1$ след самой функции $u = u^{(0)}(s)$, $s \in \Gamma$; для цилиндра $S = \{t_1 \in G,\ t_2 \in R^1\}$ с основанием $G \subseteq R^{d-1}$ *полный след* на $\Gamma = \partial S$ есть отвечающий $p = p_1$ след всех нормальных к поверхности цилиндра производных $u^{(k)}(s)$, $s \in \Gamma$, порядка $k \leqslant p-1$ и т. п.

3° Полнота системы граничных значений. Рассматривая функции $u \in \mathring{W}_2^p(R^d)$ в области $S \subseteq R^d$, мы ввели $W_2^p(S)$ как пространство, образованное всеми этими обобщенными функциями

$$u = (\varphi, u), \quad \varphi \in C_0^\infty(S);$$

понятно, что обратившись к обобщенным пробным $x \in X(S)$ из замыкания $X(S) = [C_0^\infty(S)]$ в $X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$ в общей схеме (1.2)—(1.7) мы будем иметь $u \in W(S)$ как функции

$$u = (x, u), \quad x \in X(S),$$

с *граничными значениями*

$$(x, u) = \lim (\varphi, u), \quad \varphi \in C_0^\infty(S), \tag{4.17}$$

для граничных пробных $x \in X(S)$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$. Введем соответственно *обобщенную границу* $X(\Gamma)$ как совокупность всех обобщенных пробных $x \in X(S)$, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$; очевидно, что $X(\Gamma)$ есть линейное подпространство (поясним: для предела $x = \lim x_n \in X(S)$ обобщенных $x_n \in X(\Gamma)$ мы имеем

$$(\varphi, x) = \lim (\varphi, x_n) = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^d \setminus \Gamma),$$

что и означает включение $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$).

Ограничившись случаем, когда граница Γ представляет собой гладкое $(d-1)$-мерное многообразие в R^d, покажем, что

$X(\Gamma)$ *есть подпространство всех* $x \in X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$

с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$.

Достаточно показать, что $C_0^\infty(S)$ плотно в подпространстве $X([S])$ всех $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$ в замыкании $[S]$ области $S \subseteq R^d$:

$$X([S]) = \left[C_0^\infty(S)\right] = X(S).$$

Рассматривая $u \in W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ как элементы $u = (x, u)$, $x \in X$, сопряженного пространства $W = X^*$, возьмем произвольную функцию $u \in W$, аннулирующую все $x \in C_0(S_1)$, $S_1 = S$. Как мы знаем (см. общее условие (4.16)), равная 0 в дополнительной к $S_2 = R^d \setminus [S]$ области $S_1 = S$ обобщенная функция $u \in W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ является пределом $u = \lim \varphi$ в W функций $\varphi \in C_0^\infty(S_2)$, и ее значения на обобщенных пробных $x \in X([S_1])$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq [S_1]$ вне области S_2 есть

$$(x, u) = (u, x) = \lim (\varphi, x) = 0.$$

Таким образом, произвольный линейный функционал $u \in X^*$, равный 0 на $C_0^\infty(S_1) \subseteq X$, равен 0 на подпространстве $X([S_1])$, и, следовательно, $C_0^\infty(S_1)$ плотно в $X([S_1])$.

Напомним, что с помощью обобщенных пробных функций вида (4.7) для $u \in \mathring{W}_2^p(S)$ был определен их п о л н ы й след на $\Gamma = \partial S$ (см. по этому поводу (4.14)). Покажем, что *всякая система граничных пробных функций* $x \in X(\Gamma)$, *определяющая полный след для* $u \in \mathring{W}_2^p(S)$ *на границе* Γ, *является полной в гильбертовом* $X(\Gamma)$. Действительно, всякая функция $u \in W = \mathring{W}_2^p(R^d)$ с нулевыми граничными значениями $(x, u) = 0$ на такой системе пробных $x \in X(\Gamma)$ имеет нулевой полный след на Γ, а, как мы знаем, это есть условие того, что ее сужение $u_0 = u$ в области S есть $u_0 \in \in \overset{\circ}{W}{}_2^p(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$ (см. по этому поводу (4.15)); понятно, что $(x, u) = (x, u_0)$ при всех $x \in \left[C_0^\infty(S)\right] = = X([S])$, и, рассматривая $u_0 \in W$ как предел $u_0 = \lim \varphi$ функций $\varphi \in C_0^\infty(S)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^p(S)$, мы будем иметь

$$(x, u) = (x, u_0) = (u_0, x) = \lim(\varphi, x) = 0$$

при всех $x \in X(\Gamma) \subseteq X([S])$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ вне области S. Таким образом, всякая функция $u \in W = = X^*$, аннулирующая данную систему пробных $x \in X(\Gamma)$, аннулирует все $x \in X(\Gamma)$, что и определяет свойство полноты этой системы в $X(\Gamma)$.

Возвращаясь к первоначально поставленному вопросу о граничных значениях (4.1), как итог выделим следующий результат.

Теорема. *Предельные граничные значения* $(x, u) = = \lim(\varphi, x)$ *для обобщенной функции* $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in \ni C_0^\infty(S)$, *из пространства* $W(S) = W_2^p(S)$ *в области* $S \subseteq R^d$ *суть граничные значения* (x, u), $x \in X(\Gamma)$, *на всех обобщенных пробных* $x \in X = \overset{\circ}{W}{}_2^{-p}(T)$ *с носителями* $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ *на границе* $\Gamma = \partial S$, *и все они определяются полным следом функции* $u \in W_2^p(S)$ *на границе* Γ.

Для ясности добавим, что каждая пробная функция $x \in X(\Gamma)$ есть предел $x = \lim x_n$ пробных x_n, являющихся линейными комбинациями из полной в $X(\Gamma)$ системы обобщенных пробных функций вида (4.7), и

$$(x, u) = \lim(x_n, u). \ \square$$

Выделенная выше теорема распространяется на векторные обобщенные функции $u \in \mathbf{W}_2^p(S)$ со значениями $(x, u) \in H$ в гильбертовом пространстве H и, в частности, на случайные обобщенные функции со значениями в пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин на вероятностном Ω; в уточнении нуждается лишь определение *следа*. Напомним, что $\mathbf{W}_2^p(S)$ означает сужение соответствующего $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^p(R^d)$ в области $S \subseteq R^d$, а сам функциональный класс $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^p(R^d)$ определяется условием непрерывности в H составляющих его обобщенных функций

$$u = (\varphi, u), \quad \varphi \in C_0^\infty(R^d),$$

относительно нормы $\|\varphi\|_{-p}$ в соболевском $X = \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$. Имея в виду для начала однородно-изотропные $\mathring{\mathbf{W}}_2^p(R^d)$, характеризуемые одним целым $p \geqslant 0$, отметим, что локальные свойства случайных обобщенных функций $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^p(R^d)$ много хуже, чем известные нам свойства детерминированных $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^p(R^d)$; грубо говоря, локально обобщенные случайные функции $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^p(R^d)$ могут быть реализованы лишь как функции из $\mathring{W}_2^q(R^d)$ с $q < p - d/2$ (см. по этому поводу (3.8), (3.11)). Общую ситуацию здесь можно проиллюстрировать на примере так называемого «белого шума», представимого обобщенной случайной функцией $u = (\varphi, u)$ с

$$\|(\varphi, u)\|_H^2 = E\,|(\varphi, u)|^2 = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^d).$$

— такая функция, непрерывная относительно нормы $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, даже локально не может быть реализована как функция из $\mathscr{L}_2$ (она локально реализуется лишь в соболевском $\mathring{W}_2^q$ с $q < -d/2$). Тем не менее для обобщенных случайных функций $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^p(S)$ и обобщенных нормальных производных $\partial^k u$, $k \leqslant p - 1$, вблизи границы $\Gamma = \partial S$ с помощью формулы (4.14) можно определить их *след* на Γ как обобщенные функции

$$u^{(k)} = (x, u^{(k)}), \quad x \in \mathscr{L}_2(\Gamma), \tag{4.18}$$

где значения $(x, u^{(k)})$ на пробных $x \in \mathscr{L}_2(\Gamma)$ суть граничные значения функции $u \in \mathbf{W}_2^p(S)$ на обобщенных пробных $(-1)^k x^{(k)} \in X(\Gamma)$ из (4.7) с соответствующими весовыми функциями $x \in \mathscr{L}_2(\Gamma)$; полная в $X(\Gamma)$ система таких обобщенных пробных функций определяет *полный след* функций $u \in \mathbf{W}_2^p(S)$ на границе Γ. Понятно, что так же, как и раньше для детерминированных функций, это распространяется на анизотропные пространства с мультииндексом $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$.

4° Некоторые функциональные свойства граничных значений. Как пример рассмотрим обобщенные случайные функции $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, из пространства $\mathring{\mathbf{W}}_2^p(T)$ в цилиндрической области $T = G \times (a, \infty)$ с мультииндексом $p = (p_1, p_2)$, отвечающим группе переменных $t_1 \in G$

в области $G \subseteq R^{d-1}$ и $t_2 \in (a, \infty)$. Обратимся к следу

$$u_r = (x, u_r), \quad x \in C_0^\infty(G),$$

на каждом сечении области T гиперплоскостью

$$\Gamma_r = \{t_1 \in R^{d-1},\ t_2 = r\}.$$

Напомним, что согласно формуле (4.14),

$$(x, u_r) = (x_r, u) \tag{4.19}$$

для обобщенных пробных

$$x_r = x \cdot \delta_r = x(t_1) \cdot \delta(t_2 - r) \in X$$

вида (4.7) с весовыми функциями $x = x(t_1)$ переменного $t_1 = s \in R^{d-1}$ и дельта-функциями $\delta_r = \delta(t_2 - r)$ переменного $t_2 \in R^1$. Рассматривая $u = (\varphi, u)$, непрерывные по φ в соболевском пространстве $X = \mathring{W}_2^{-p}(T)$, нам удобно будет воспользоваться соответствующим вложением $\mathring{W}_2^{-p}(T) \subseteq \mathring{W}_2^{-p}(R^d)$, в общей форме указанным в (1.9).

Положив $p_1 = l$ и $p_2 = m$, покажем, что

$$u_r \in \mathring{\mathbf{W}}_2^q(G), \quad q = [l - l/(2m)]. \tag{4.20}$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье с двойственным для $t = (s, r)$ переменным $\lambda = (\sigma, \rho)$, для обобщенных пробных $x_r \in X \subseteq \mathring{W}_2^{-(l,m)}(R^d)$, согласно представлению (2.16), получим

$$\|x_r\|_X^2 \asymp \int |\widetilde{x}(\sigma)|^2 \left[\int \frac{d\rho}{(1 + |\sigma|^2)^l + \rho^{2m}}\right] d\sigma,$$

где при $1 + |\sigma|^2 = a^2$ и $k \leqslant l - l/(2m)$ мы имеем

$$\int \frac{d\rho}{a^{2l} + \rho^{2m}} = \frac{1}{a^{2k}} \left[a^{2k - 2l + l/m}\right] \int \frac{d\rho}{1 + \rho^{2m}} \leqslant \frac{C}{a^{2k}},$$

так что

$$\|x_r\|_X^2 \leqslant C \int |\widetilde{x}(\sigma)|^2 \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma^2|)^k} \asymp \|x\|_{-k}^2;$$

справа указана норма весовых функций $x \in C_0^\infty(R^{d-1})$ из (4.7) в соболевском пространстве $\mathring{W}_2^{-k}(R^{d-1})$. В итоге для наибольшего $k=[l-l/(2m)]=q$ получаем

$$\|x_r\|_X^2 \leqslant C\|x\|_{-q}^2,$$

что указывает на непрерывность обобщенных функций (4.19) относительно $x \in C_0^\infty(G)$ по норме $\|x\|_{-q}$ в соболевском пространстве $\mathring{W}_2^{-q}(G)$, а это и определяет включение (4.20).

Отметим, что здесь $q \geqslant 0$, и, в частности, для случайных функций $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^{(l,m)}(T)$ мы имеем

$$E|(x, u_r)|^2 \leqslant C\|x\|_{\mathscr{L}_2(G)}^2, \quad x \in C_0^\infty(G). \tag{4.21}$$

Укажем на непрерывность обобщенных пробных $x_r = x\delta_r$ в (4.19) по переменному r — скажем,

$$\|x_{r+h}-x_r\|_X^2 \asymp \\ \asymp \int\int |\widetilde{x}(\sigma)|^2 |e^{i\rho h}-1|^2 \frac{d\sigma\, d\rho}{(1+|\sigma|^2)^l+\rho^{2m}} \leqslant C\|x\|_{\mathscr{L}_2(G)}^2 \theta(h),$$

где $\theta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Понятно, что для $(x, u_r) = (x_r u)$ в (4.19), непрерывных по $x_r \in X$, мы имеем

$$E|(x, u_{r+h})-(x, u_r)|^2 \leqslant C\|x_{r+h}-x_r\|_X^2 \leqslant \\ \leqslant C\|x\|_{\mathscr{L}_2(G)}^2 \theta(h), \quad x \in C_0^\infty(G). \tag{4.22}$$

Воспользовавшись предложенной в (1.15) конструкцией, для $u \in \mathring{\mathbf{W}}_2^{(l,m)}(T)$ как обобщенной функции $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, можно дать представление в виде соответствующего интеграла

$$(\varphi, u) = \int \varphi_r u_r\, dr, \tag{4.23}$$

где, как и выше, φ_r получаются из $\varphi=\varphi(s, r)$ фиксацией переменного r, а $\varphi_r u_r = (\varphi_r, u_r)$ есть результат апробации следа u_r с помощью пробной $\varphi_r = x \in C_0^\infty(G)$. Действительно, мы знаем, что при условиях (4.21), (4.22) взятый справа в (4.23) интеграл задает обобщенную случайную функцию $u=(\varphi, u)$ типа случайного процесса $u=u_r$, и остается лишь пояснить, что как функция переменного r след $u = u_r$ задает соответствующую функцию $u \in \mathring{W}_2^{(l,m)}(T)$. Это можно сделать, например, обратившись к представлению пробной $\varphi \in C_0^\infty(T)$ как элементу в $X = \mathring{W}_2^{-(l,m)}(T)$ в виде интеграла

$$\varphi = \int \varphi_r \delta_r \, dr$$

от непрерывной в X функции $\varphi_r \delta_r$ переменного r, что для элемента $x \in \mathring{W}_2^{(l,m)}(T)$ дает

$$(\varphi, u) = \int (\varphi_r \delta_r, u) \, dr = \int (\varphi_r, u_r) \, dr.$$

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Обобщенные дифференциальные уравнения

1° Пробные функции для операторных уравнений. Действие дифференциального оператора $L = \sum a_k \partial^k$ (скажем, с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами) на обобщенные функции $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, в области $T \subseteq R^d$ определяет соответствующие $Lu = (\varphi, Lu)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, формулой

$$(\varphi,\ Lu) = (L^*\varphi,\ u)$$

с оператором

$$L^*\varphi = \sum (-1)^{|k|} \partial^k (a_k \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D};$$

понятно, что это дает $Lu = \sum a_k \partial^k u$ на гладких функциях (скажем, на $u \in \mathscr{D}$).

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \tag{1.1}$$

где правая часть как обобщенная функция $f = (\varphi, f)$ характеризуется непрерывностью относительно пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ по норме $\|\varphi\|_F$ в некотором гильбертовом пространстве F (например, в $F = \mathscr{L}_2$); обозначим $\mathbf{F} \ni f$ класс таких функций и обратимся к вопросу о выборе соответствующего функционального класса $\mathbf{W} \ni u$.

Обобщенные функции в (1.1) могут быть со значениями в гильбертовом пространстве (в частности, это могут быть скалярные функции), но в большей степени нас будут интересовать обобщенные с л у ч а й н ы е функции со значениями в известном нам гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω.

Уравнение (1.1) в области $T \subseteq R^d$ означает, что

$$(L^*\varphi,\ u) = (\varphi,\ f) \tag{1.1$'$}$$

для всех пробных $\varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T)$. Согласно (1.1)$'$ с $f \in \mathbf{F}$, непрерывность $f = (\varphi, f)$ по $\|\varphi\|_F$ вносит в определение $\mathbf{W} \ni u$ непрерывность $u = (x, u)$ относительно пробных $x = L\varphi$ по $\|x\| = \|\varphi\|_F$. Допустим, $F \supseteq \mathscr{D}$ есть гильбертово пространство обобщенных функций $(F \subseteq \mathscr{D}^*)$, в котором сходимость $g_n \to g \in F$ влечет (слабую) сходимость $g_n \to g$ в $\mathscr{D}^*$, а вместе с этим и слабую сходимость обобщенных функций $L^*g_n \to L^*g$ в $\mathscr{D}^*$,

$$(\varphi, L^*g_n) = (L\varphi, g_n) \to (L\varphi, g) = (\varphi, L^*g), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Обратимся к замыканию $[\mathscr{D}]$ в F и, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать $[\mathscr{D}] = F$.

В уравнении (1.1) — (1.1)$'$ нам фактически дана функция $f = (g, f)$ с пробными $g \in F$, непрерывная по норме $\|g\|_F$ — мы имеем в виду непрерывное продолжение исходной функции $f = (\varphi, f)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, на замыкание $[\mathscr{D}] = F$. При этом для каждого $g = \lim \varphi$ и соответствующего $x = L^*g = \lim L^*\varphi$ в $\mathscr{D}^*$ формула (1.1)$'$ определяет предел

$$(x, u) = \lim (L^*\varphi, u) = \lim (\varphi, f) = (g, f),$$

который можно интерпретировать как результат апробирования функции $u \in \mathbf{W}$ с помощью обобщенной пробной функции $x \in \mathscr{D}^*$. Такая интерпретация вносит в определение $\mathbf{W} \ni u$ идентичность значений $(x, u) = (g, f)$ для различных $g = \lim \varphi$ в F с одним и тем же $x = L^*g = \lim L^*\varphi$ в $\mathscr{D}^*$ — уточним, рассматривая здесь $x \in \mathscr{D}^*$ как обобщенные функции

$$x = (\varphi, x), \quad \varphi \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T),$$

мы не делаем различия между функциями, совпадающими в области $T \subseteq R^d$, и, согласно предложенной интерпретации значений $(x, u) = \lim (L^*\varphi, u)$, в частности, должно быть $(x, u) = 0$ при $x = L^*g$ с

$$(\varphi, L^*g) = (L\varphi, g) = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

В рамках этого подхода *уравнение* (1.1) *описывает функцию* $u = (x, u)$ *с помощью обобщенных пробных* $x \in L^*F$ *как*

$$(L^*g, u) = (g, f), \quad g \in F. \tag{1.2}$$

Понятно, что это равенство накладывает на его правую часть дополнительное требование, состоящее в том, что $(g, f) = 0$ при $L^*g = 0$ в $\mathscr{D}^*$. Ядро оператора L^*: $F \to \mathscr{D}^*$ является замкнутым подпространством в гильбертовом F, так что, взяв ортогональное к нему дополнение F в $\hat{F}$

и проекцию $\mathring{g}$ на $\mathring{F}$ произвольного $g \in F$ с $L^*g = L^*\mathring{g}$, получим, что

$$(g, f) = (\mathring{g}, f), \quad g \in F,$$

должна быть непрерывной относительно $\|\mathring{g}\|_F \leqslant \|g\|_F$; обладающие этим ограничительным свойством функции $f \in \mathbf{F}$ объединим в подкласс $\mathring{\mathbf{F}} \subseteq \mathbf{F}$ (понятно, что для невырожденного оператора L^* мы имеем $\mathring{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$). Обратимый оператор $L^*\colon \mathring{F} \to \mathscr{D}^*$ переносит гильбертову норму в $\mathring{F}$ на пространство

$$X = L^*F = L^*\mathring{F} \subseteq \mathscr{D}^*, \tag{1.3}$$

и можно сказать, что *описываемая уравнениями* (1.1), (1.2) *функция* $u = (x, u)$ *непрерывна относительно пробных* $x \in X$ *по норме*

$$\|x\|_X = \|\mathring{g}\|_F, \quad x = L^*\mathring{g}, \quad \mathring{g} \in \mathring{F}.$$

Как мы увидим в дальнейшем, во многих важных случаях появляющееся в связи с уравнением (1.1), (1.2) гильбертово пространство (1.3) есть пространство пробных обобщенных функций известного нам типа, в общей форме введенное в схеме (1.2)—(1.7) гл. I; именно так будет в случае, когда характеризующее правую часть (1.1) гильбертово пространство $F \subseteq \mathscr{D}^*$ таково, что величина

$$\|\varphi\|_W = \sup_{\|\mathring{g}\|_F \leqslant 1} |(L\varphi, \mathring{g})| \tag{1.4}$$

конечна при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ и непрерывна в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ — она-то и определяет $W = [\mathscr{D}]$, $X = BW = W^*$ в рамках упомянутой схемы (на это фактически уже было указано при рассмотрении пространств с воспроизводящим ядром). Мы знаем, что для широкого класса таких пространств X (типа W) справедливо вложение

$$\mathscr{D} \subseteq X = L^*F; \tag{1.5}$$

понятно, что в этом случае предельная формула (1.2), определяющая функцию $u = (x, u)$ на всех пробных $x \in X$, полностью определяет ее как обобщенную функцию

$$u = (x, u), \quad x \in \mathscr{D} = C_0^\infty(T),$$

и здесь естественно ввести связанный с уравнением (1.1) функциональный класс $\mathbf{W} \ni u$ условием непрерывности составляющих его обобщенных функций $u = (\varphi, x)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, относительно нормы $\|\varphi\|_x$ в X, что даст известное уже нам пространство $\mathbf{W}$. Напомним, что вложение (1.5) будет иметь место, например, при условии

$$\|\varphi\|_W \geqslant c \int\limits_{T_{\text{loc}}} |\varphi| dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{1.5$'$}$$

для каждой ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq T$ — см. (2.6) гл. I.

Отметим, что при рассмотрении уравнения (1.1), (1.1)$'$ для функций $u \in \mathbf{W}$, определяемых с помощью соответствующих пробных $x \in X$ как $u = (x, u)$, вовсе не обязательно требовать, чтобы коэффициенты оператора $L = \sum a_k \partial^k$ были бесконечно дифференцируемы,— нужно лишь, чтобы в (1.1), (1.1)$'$ был определен соответствующий сопряженный оператор

$$L^*\colon \mathscr{D} \to X \subseteq \mathscr{D}^*. \tag{1.6}$$

Подведем итог следующим предложением для случая (1.5) невырожденного оператора

$$L^*\colon F \to X \subseteq \mathscr{D}^*.$$

Теорема. *При любой правой части $f \in F$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $u \in \mathbf{W}$, которое как обобщенная функция $u = (\varphi, u)$ описывается формулой (1.2) с $L^*g = \varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}$* *).

Добавим, в случае вырождения L^* это будет справедливо при $f = \mathring{\mathbf{F}}$. □

Уже говорилось, что уравнение (1.1) будет нас интересовать в основном, для обобщенных случайных функций $u = \xi \in \mathbf{W}$ со значениями в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω.

Как мы знаем, обобщенные случайные функции $\xi \in \mathbf{W}$ имеют эквивалентную модификацию с реализациями

*) На первый взгляд здесь может показаться странным, что уравнение (1.1) имеет единственное решение $u \in W$ без каких-либо видимых дополнительных условий. Объяснение этому заключается в том, что функции $u \in \mathbf{W}$ фактически удовлетворяют нулевым граничным условиям на $\Gamma = \partial T$, имея предельные граничные значения $(x, u) = 0$ на обобщенных пробных x, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$.

$\xi_\omega = (\varphi, \xi_\omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, которые при каждом $\omega \in \Omega$ являются обобщенными функциями $\xi_\omega \in \mathscr{D}^*$. Рассматривая уравнение (1.1) со случайными $u = \xi$, $f = \eta$ как уравнение с обобщенными векторными функциями в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$, одновременно можно рассматривать (1.1) как уравнение для реализаций $u = \xi_\omega$, $f = \eta_\omega \in \mathscr{D}^*$, а именно, используя для интересующего нас решения $u = \xi \in \mathbf{W}$ эквивалентную модификацию с реализациями $\xi_\omega \in \mathscr{D}^*$, можно считать, что обобщенная случайная функция представлена модификацией с реализациями $\eta_\omega \in \mathscr{D}^*$:

$$\eta_\omega = (\varphi, \eta_\omega) = (L^*\varphi, \xi_\omega), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Однако для $\eta \in \mathbf{F}$, $\xi \in \mathbf{W}$ их реализации будут вне указанных функциональных классов. □

Рассмотрим два важных для дальнейшего примера, остановившись на действительном случае, чтобы избежать необходимых переходов к комплексно-сопряженным функциям.

Пример. **Симметрические положительные операторы в пространствах типа $\mathbf{W}$.** Рассмотрим уравнение (1.1) с симметрическим положительным оператором

$$L = L^* = \mathscr{P} \geqslant 0 \tag{1.7}$$

и правой частью $f \in \mathbf{F}$, отвечающей пространству $F = W = [\mathscr{D}]$ с нормой

$$\|\varphi\|_W = (\varphi, \mathscr{P}\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Очевидно, что именно эту норму мы получаем в (1.4) с

$$(L\varphi, g) = (\varphi, \mathscr{P}g) = \langle \varphi, g \rangle_W,$$

и пространство пробных обобщенных функций (1.3) для уравнений (1.1), (1.2) есть

$$X = L^*F = \mathscr{P}W = BW,$$

отвечающее в схеме (1.2)—(1.7) гл. I пространству $W = F$ с оператором $\mathscr{P} = B$. По поводу невырожденности оператора (1.6) здесь можно сказать, что этот оператор

$$L^* = \mathscr{P}: W \to X$$

является унитарным. □

Пример. Операторы в пространстве $\mathscr{L}_2$. При $F = \mathscr{L}_2(T)$ в (1.4) мы имеем

$$\|\varphi\|_W = \|L\varphi\|_{\mathscr{L}_2}, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

и для уравнения (1.1), (1.2) пространством пробных функций (1.3) служит

$$X = \mathscr{P}W, \quad \mathscr{P} = L^*L,$$

отвечающее в схеме (1.2)—(1.7) гл. I пространству $W = [\mathscr{D}]$ с указанной нормой $\|\varphi\|_W$, $\varphi \in \mathscr{D}$. Рассмотрим это подробнее в применении к уравнению (1.1) для произвольного линейного оператора

$$L\colon \mathscr{D} = C_0^\infty(T) \to F = \mathscr{L}_2(T), \tag{1.8}$$

непрерывного в F относительно сходимости пробных $\varphi \in \mathscr{D}$ в пространстве $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$, с оператором $L^*\colon F \to \mathscr{D}^*$, заданным формулой

$$L^*g = (\varphi,\ L^*g) = \langle L\varphi,\ g\rangle_F, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Оператор (1.8) является изометрическим на $\mathscr{D} \subseteq W = [\mathscr{D}]$, и можно взять его унитарное замыкание

$$L\colon W \to \mathring{F} = [L\mathscr{D}] \subseteq F,$$

где $\mathring{F} = [L\mathscr{D}]$ как раз есть ортогональное дополнение в $F = \mathscr{L}_2(T)$ к ядру оператора L^*, образованному всеми $g \in F$ с

$$(\varphi,\ L^*g) = \langle L\varphi,\ g\rangle_F = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Используя связь $\mathring{g} = Lv$ соответствующих $v \in W$ и $\mathring{g} \in \mathring{F}$, получаем

$$\langle \varphi,\ v\rangle_W = \langle L\varphi,\ Lv\rangle_F = (\varphi,\ L^*\mathring{g}), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

откуда непосредственно видно, что появившиеся у нас ранее для уравнения (1.1) пробные обобщенные функции

$$x = L^*\mathring{g} = (\varphi,\ L^*\mathring{g}), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

есть не что иное, как

$$x = \mathscr{P}v = (\varphi,\ \mathscr{P}v), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

из пространства $X = BW = \mathscr{P}W$ в схеме (1.2)—(1.7) гл. I с оператором $B = \mathscr{P}$, $\mathscr{P} = L^*L$, для которых

$$\|Bv\|_X = \|v\|_W = \|Lv\|_F = \|\mathring{g}\|_F.$$

Добавим, что невырожденность оператора L^* выражается условием

$$\mathring{F} = [L\mathscr{D}] = F. \tag{1.9}$$

Отметим еще, что уравнение (1.1) с оператором L в пространстве $F=\mathscr{L}_2(T)$ для $u\in\mathbf{W}$ сводится к уравнению

$$\mathscr{P}u=f$$

с оператором $\mathscr{P}=L^*L$ и новой обобщенной функцией $f=(\varphi, f)$, получающейся из правой части (1.1) заменой переменного $\varphi\to L\varphi$, $\varphi\in\mathscr{D}$ — она будет непрерывной по норме $\|\varphi\|_W=\|L\varphi\|_F$. Это новое уравнение равносильно исходному уравнению (1.1) в том смысле, что описывает $u\in\mathbf{W}$ с помощью тех же обобщенных пробных

$$x=\mathscr{P}v=\lim\mathscr{P}\varphi\in X,$$

применение которых дает тот же результат, что и в (1.2) с $g=\mathring{g}=Lv$, представимый как

$$(x,\ u)=\lim(\mathscr{P}\varphi,\ u)=\lim(\varphi,\ f)=(v,\ f)$$

с помощью новой функции $f=(\varphi,\ f)$, определенной по непрерывности на всех $v=\lim\varphi$ в пространстве $W=[\mathscr{D}]$. Сказанное здесь фактически повторяет суть предложенного в (1.2) общего подхода к уравнению (1.1), когда в качестве L выступает симметрический положительный оператор $\mathscr{P}$, а в качестве F — гильбертово пространство $F=W=[\mathscr{D}]$.

2° Некоторые примеры. Проиллюстрируем предложенный общий подход к уравнению (1.1), обратившись к простейшему дифференциальному оператору $L=d/dt$ и уравнению

$$\frac{d}{dt}u=f \tag{1.10}$$

на конечном интервале $T=(a,\ b)$ с обобщенной правой частью $f=(\varphi,\ f)$, непрерывной по $\varphi\in C_0^\infty(T)$ в пространстве $F=\mathscr{L}_2(T)$.

Для (1.10) соответствующее пространство обобщенных пробных функций x есть соболевское пространство

$$X=\mathring{W}_2^{-1}(T)=\left[C_0^\infty(T)\right],$$

сопряженное к $W=\mathring{W}_2^1(T)$, т. е. к замыканию $\left[C_0^\infty(T)\right]$ по норме

$$\|\varphi\|_W^2=\|\varphi'\|_{\mathscr{L}_2}^2\asymp\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}^2+\|\varphi'\|_{\mathscr{L}_2}^2=\|\varphi\|_1^2,$$

которое состоит из функций

$$u = u(t) = \int_c^t \mathring{g}(t)\,dt, \qquad t \in T,$$

с $\mathring{g} \in \mathring{F}$ из подпространства $\mathring{F} \subseteq F = \mathscr{L}_2(T)$, определяемого условием

$$\int_a^b \mathring{g}(t)\,dt = \langle 1, \mathring{g}\rangle_F = 0.$$

Поясним, что всякая удовлетворяющая этому условию $\mathring{g} \in C_0^\infty(T)$ есть производная от функции $\varphi(t) = \int_0^t \mathring{g}(t)\,dt$ из $C_0^\infty(T)$; в общем случае $\mathring{g} \in \mathscr{L}_2(T)$ есть предел соответствующих производных φ' от функций $\varphi \in C_0^\infty(T)$, а при сходимости $\varphi' = L\varphi \to \mathring{g}$ в $\mathscr{L}_2(T)$ мы имеем сходимость $\varphi \to u$ в W, определяющую $u \in W$ как функцию указанного выше вида.

Как мы знаем, $\mathring{F}$ есть ортогональное дополнение к ядру оператора $L^* = -d/dt$ в $\mathscr{L}_2(T)$, и это показывает, что обобщенное решение уравнения $L^*g = 0$ есть постоянная на интервале $t \in T = (a, b)$ функция $g(t) = c$. Пространство $X = \mathring{W}_2^{-1}(T)$ образовано всеми обобщенными функциями

$$x = L^*g = -dg/dt, \qquad g \in \mathscr{L}_2(T),$$

факторизованными по норме $\|x\|_X = \|\mathring{g}\|_{\mathscr{L}_2}$, где $\mathring{g}$ есть проекция на подпространство $\mathring{F}$. Случайные функции $u \in W$ обобщенного переменного $x \in X$, определяемые условием непрерывности $u = (x, u)$ по норме $\|x\|_X$, можно описать как $u = u(t)$, $t \in T$, взяв полную в X систему пробных дельта-функций

$$x = \delta_t = \delta(s - t) = L^*1_{(a,t)}$$

переменного $s \in T$ с параметром $t \in T$, отвечающих полной в $\mathscr{L}_2(T)$ системе индикаторных функций

$$1_A(s) = \begin{cases} 1, & s \in A, \\ 0, & s \notin A \end{cases}$$

с $A=(a, t)$, и положив

$$u(t)=(\delta_t, u), \quad t\in T.$$

Отметим, что $\overset{\circ}{1}_{(a,t)}\to 0$ в $\mathscr{L}_2(T)$ при $t\to a$, b и это дает нулевые граничные значения

$$u(a)=\lim_{t\to a} u(t)=0, \quad u(b)=\lim_{t\to b} u(t)=0$$

в граничных точках $t=a$, b интервала $T=(a, b)$.

В уравнении (1.10) обобщенная производная $f=du/dt$ от $u\in \mathbf{W}$ как обобщенной функции

$$u=(x, u), \quad x\in C_0^\infty(T)\subseteq X,$$

такова, что

$$f=(\varphi, f)=(\overset{\circ}{\varphi}, f), \quad \varphi\in C_0^\infty(T);$$

и с сохранением этого равенства $f=(\varphi, f)$ продолжается по непрерывности на все $\varphi\in F=\mathscr{L}_2(T)=\left[C_0^\infty(T)\right]$; такое продолжение, в частности, дает нам

$$(1_{(a,t)}, f)=(L^*1_{(a,t)}, u)=(\delta_t, u)=u(t),$$

определяя функцию $u\in\mathbf{W}$ по $f=Lu$. Обратившись к интегральному представлению

$$(\varphi, f)=\int \varphi(t) f(t)\, dt, \quad \varphi\in\mathscr{L}_2(T),$$

в котором для обобщенной случайной функции f используется отвечающий ей стохастический интеграл, единственное решение $u\in\mathbf{W}$ уравнения (1.10) можно описать как

$$u(t)=(1_{(a,t)}, f)=\int_a^t f(s)\, ds, \quad t\in T. \;\square$$

Указанное здесь интегральное представление описывает функции $u\in\mathbf{W}$ для уравнения (1.10) и на бесконечном $T=(a, \infty)$, причем с тем дополнением, что $f=(\varphi, f)$ может быть произвольной обобщенной функцией, непрерывной по $\varphi\in F=\mathscr{L}_2(T)$ — дело в том, что оператор $L^*=-d/dt$ является невырожденным на $\mathscr{L}_2(a, \infty)$ и мы имеем $\overset{\circ}{F}=F$. Поясним: обобщенное решение уравнения $L^*g=0$ на каждом конечном интервале $a<t<b$, как мы знаем, есть постоянная $g(t)=c$,

и лишь $g(t)=0$ входит в пространство $F=\mathscr{L}_2(T)$ в случае бесконечного $T=(a, \infty)$. Взяв в уравнении (1.10) в качестве $f=\eta$ — гауссовский белый шум $\eta=(\varphi, \eta)$ с нулевым средним и

$$E|(\varphi, \eta)|^2=\|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

как единственное решение $u=\xi\in\mathbf{W}$, получим случайный процесс $u(t)=\xi(t)$, $t\geqslant a$, представляющий хорошо известное *броуновское движение*, связанное с белым шумом *стохастическим интегралом Ито*

$$\int \varphi(t)\,d\xi(t)=(\varphi, \eta)=\int \varphi(t)\,\eta(t)\,dt, \quad \varphi\in\mathscr{L}_2(T). \;\square$$

Как уже отмечалось в общем случае, уравнение (1.10) для $u\in\mathbf{W}$ равносильно соответствующему уравнению

$$-\frac{d^2}{dt^2}u=\dot f \tag{1.11}$$

с новой правой частью, получающейся из исходной применением сопряженного оператора $L^*=-d/dt$. Поясним здесь этот факт тем, что свойство непрерывности функций $u=(x, u)$ по $x\in X$ дает

$$E|u(t)|^2=E|(\delta_t, u)|^2\leqslant C\|1_{(a,t)}\|^2_{\mathscr{L}_2}=C(t-a), \quad t\geqslant a.$$

В результате применения оператора $L^*=-d/dt$ белый шум на $\mathscr{L}_2$ переходит в белый шум $\eta=(\varphi, \eta)$ на соответствующем пространстве W типа $\mathring{W}_2^1(T)$ с

$$E|(\varphi, \eta)|^2=\|\varphi\|^2_W=\|\varphi'\|^2_{\mathscr{L}_2},$$

и с его помощью броуновское движение представляется как единственное решение $u=\xi\in\mathbf{W}$ уравнения (1.11) при $f=\eta$ на полупрямой $T=(a, \infty)$.

Та же модель (1.11) на конечном интервале $T=(a, b)$ дает в качестве $u=\xi$ хорошо известный *броуновский мост* $\xi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, — с тем же распределением вероятностей, как и у броуновского движения при условии

$$\xi(a)=\xi(b)=0.$$

Уточним: решение $u=\xi\in\mathbf{W}$ рассматриваемого уравнения (1.11) на интервале $T=(a, b)$ — с белым шумом $f=\eta$ на соответствующем W — связано с удовлетворяющим тому же уравнению броуновским движением $u=\xi_0$

равенством

$$\xi(t) = \xi_0(t) - \frac{t-a}{b-a}\xi_0(b), \quad a \leqslant t \leqslant b. \ \square$$

Во многом аналогичным уравнению (1.10) является уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} u = f \tag{1.12}$$

с переменным $t = (t_1, t_2)$ на плоскости — мы рассмотрим его в области $T = (a_1, \infty) \times (a_2, \infty)$. Применим наш общий подход к этому уравнению с оператором $L = \partial^2/\partial t_1\, \partial t_2$ в случае $F = \mathscr{L}_2(T)$. Отметим сразу же, что оператор $L^* = \partial^2/\partial t_1\, \partial t_2$ является **невырожденным**, поскольку для обобщенного решения $g \in \mathscr{L}_2(T)$ уравнения $L^*g = 0$, согласно равенству

$$(L\varphi, g) = \int_{a_1}^{\infty}\int_{a_2}^{\infty} \varphi_1'(t_1)\, \varphi_2'(t_2)\, g(t)\, dt_1\, dt_2 = 0$$

со всевозможными пробными $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \in C_0^\infty(T)$, мы имеем функцию

$$g_1(t_1) = \int_{a_2}^{\infty} \varphi_2'(t_2)\, g(t)\, dt_2 = 0$$

единственным решением в $\mathscr{L}_2(T_1)$ обобщенного уравнения $dg_1/dt_1 = 0$ на бесконечном $T_1 = (a_1, \infty)$, и, как следствие, $g(t_1, t_2) = 0$ есть единственное решение в $\mathscr{L}_2(T_2)$ обобщенного уравнения $dg/dt_2 = 0$ на бесконечном $T_2 = (a_2, \infty)$. Это позволяет заключить, что пространство пробных функций X для уравнения (1.12) образовано всеми обобщенными

$$x = L^*g = \partial^2 g/\partial t_1\, \partial t_2, \qquad g \in \mathscr{L}_2(T),$$

с нормой $\|x\|_X = \|g\|_{\mathscr{L}_2}$. Очевидно, что оператор $L = \partial^2/\partial t_1\, \partial t_2$ принадлежит к указанному в (2.6) гл. I типу, и мы имеем $C_0^\infty(T) \subseteq X$, $X = \left[C_0^\infty(T)\right]$. В нашей общей схеме (1.2) — (1.7) гл. I пространство X является сопряженным к $W = \left[C_0^\infty(T)\right]$ — замыканию всех $u \in C_0^\infty(T)$ по норме

$$\|u\|_W = \|g\|_{\mathscr{L}_2}, \quad g = \partial^2 u/\partial t_1 \partial t_2,$$

которое состоит из функций вида

$$u(t)=\int\limits_{a_1}^{t_1}\int\limits_{a_2}^{t_2} g(s)\,ds, \qquad g\in\mathscr{L}_2(T);$$

понятно, что это интегральное представление описывает единственное решение $u\in W$ уравнения (1.12) с данной правой частью $f=g\in\mathscr{L}_2(T)$. В той же форме можно представить решение $u\in \mathbf{W}$ этого уравнения с обобщенной случайной $f=(\varphi,\ f)$, непрерывной относительно $\varphi\in F=\mathscr{L}_2(T)$, обратившись к соответствующему стохастическому интегралу

$$u(t)=\int\limits_{a_1}^{t_1}\int\limits_{a_2}^{t_2} f(s)\,ds$$

по стохастической мере, символически представленной как $f(s)ds$ и на ограниченных лебеговских $A\subseteq T$ принимающей значения, определенные с помощью индикаторных функций как

$$\int\limits_A f(s)\,ds=(1_A,\ f).$$

Уточним: функция $u=(x,\ u)$ обобщенного переменного $x\in X=\left[C_0^\infty(T)\right]$ может быть описана с помощью полной в X системы пробных дельта-функций

$$x=\delta_t=\delta(s-t)=L^*\mathbf{1}_A,\qquad A=(a_1,\ t_1)\times(a_2,\ t_2),$$

как $u(t)=(\delta_t,\ u)$, $t\in T$. Из приведенного интегрального представления для $u\in\mathbf{W}$ видно, что при $t_1\to 0$, $t_2\to 0$ имеются нулевые граничные значения

$$u(0,\ t_2)=\lim_{t_1\to 0}u(t_1,\ t_2)=0,\quad u(t_1,\ 0)=\lim_{t_0\to 0}u(t_1,\ t_2)=0.$$

Взяв в уравнении (1.12) в качестве $f=\eta$ гауссовский белый шум $\eta=(\varphi,\ \eta)$, $\varphi\in F=\mathscr{L}_2(T)$, как единственное решение $u=\xi\in\mathbf{W}$, получим случайную функцию

$$\xi(t)=\int\limits_{a_1}^{t_1}\int\limits_{a_2}^{t_2}\eta(s)\,ds,\qquad t\in T,$$

представляющую с помощью указанного стохастического интеграла так называемое *винеровское поле* (известное еще как *броуновский лист*) с нулевыми граничными значениями

$$\xi(0, t_2) = 0, \qquad \xi(t_1, 0) = 0.$$

Отметим, что с помощью введения «пространственного» переменного $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 - t_2)$ и «времени» $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 + t_2)$ уравнение (1.12) переходит в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = f \tag{1.12$'$}$$

в ограниченной его характеристиками $s = \pm r$ новой области T, при «белом шуме» $f = \eta$ определяя там соответствующее винеровское поле как единственное решение $u = \xi = W$, которое совпадает с решением известной задачи Гурса для уравнения (1.12) с нулевыми данными на характеристиках*). □

Обратимся к уравнению

$$\Delta u = f \tag{1.13}$$

с оператором Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial t_1^2 + \partial^2/\partial t_2^2 + \partial^2/\partial t_3^2$ в области $T = R^3 \setminus \{0\}$ переменного $t = (t_1, t_2, t_3)$ с выколотой точкой $t = 0$, где правая часть $f = (\varphi, f)$ характеризуется непрерывностью по $\varphi \in C_0^\infty(T)$ в пространстве $F = \mathscr{L}_2(T)$. Оператор $L^* = \Delta$ является невырожденным на $\mathscr{L}_2(T)$, поскольку при $L^*g = 0$ в области $T = R^3 \setminus \{0\}$ для $g \in \mathscr{L}_2(R^3)$ обобщенная функция $x = L^*g$ имеет носителем $\operatorname{supp} x = \{0\}$ в точке $t = 0$, преобразование Фурье $x(\lambda) = |\lambda|^2 \tilde{g}(\lambda)$ есть полином и благодаря особенностям $\tilde{g}(\lambda) = |\lambda|^{-2}\tilde{x}(\lambda)$ при $\lambda \to 0, \infty$ мы имеем $\tilde{g} \in \mathscr{L}_2(R^3)$ лишь в случае $\tilde{g} = 0$.

Согласно этому функции $Lu = \Delta u$, $u \in C_0^\infty(T)$, плотны в пространстве $F = \mathscr{L}_2(T) = \mathscr{L}_2(R^3)$, а их преобразования Фурье $\widetilde{\Delta u} = |\lambda|^2 \tilde{u}(\lambda) = \alpha(\lambda)$ плотны в двойственном $\mathscr{L}_2(R^3)$. Используя для $u \in C_0^\infty(T)$ с $u(0) = 0$

---

*) Отметим, стохастическое волновое уравнение (точнее, «уравнение струны») появлялось в целом ряде работ — см., например, Walsh J. B. An introduction to stochastic partial differential equations // Lecture notes in Math.— 1984.— V. 1180.— P. 226—434.

интегральное представление

$$u(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\lambda t} \tilde{u}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{i\lambda t} - 1}{|\lambda|^2} \alpha(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T, \tag{1.14}$$

в качестве пополнения $[C_0^\infty(T)] = W$ по норме

$$\|u\|_W = \|\Delta u\|_{\mathscr{L}_2} = \|\alpha\|_{\mathscr{L}_2},$$

получаем все функции указанного выше вида с $\alpha \in \mathscr{L}_2(R^3)$. Уточним: здесь мы используем изометрию $u \leftrightarrow \alpha$ и тот факт, что при каждом t функции

$$a_t(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{|\lambda|^2}, \qquad \lambda \in R^3,$$

входят в пространство $\mathscr{L}_2(R^3)$, в совокупности по $t \in T$ образуя там полную систему с

$$\int [a_{t+s}(\lambda) - a_t(\lambda)]\, \alpha(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\lambda t} \left[\frac{e^{i\lambda s} - 1}{|\lambda|^2} \alpha(\lambda) \right] d\lambda \equiv 0$$

лишь при $\alpha(\lambda) = 0$. Отметим для дальнейшего еще равенство

$$\int |a_t(\lambda)|^2\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|e^{i|t|\mu_1} - 1|^2}{|\mu|^4}\, d\mu = \sigma^2 |t|, \tag{1.15}$$

получающееся ортогональным преобразованием $\lambda \to \mu$ с

$$\mu_1 = \lambda_1 \frac{t_1}{|t|} + \lambda_2 \frac{t_2}{|t|} + \lambda_3 \frac{t_3}{|t|}$$

и последующим преобразованием подобия $|t|\mu \to \mu$ с $\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|e^{i\mu_1} - 1|}{|\mu|^4}\, d\mu$. Для оператора $L = \Delta$ выполняется условие невырожденности (2.6) гл. I — скажем, из интегрального представления (1.14) для $u = \varphi \in C_0^\infty(T)$ с $\varphi(t) = \int a_t(\lambda)\, \alpha(\lambda)\, d\lambda$ получается, что

$$\|L\varphi\|_{\mathscr{L}_2} \asymp \|\alpha\|_{\mathscr{L}_2} \geqslant \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left| \int a_t(\lambda)\, \alpha(\lambda)\, d\lambda \right| \geqslant c\, |\varphi(t)|, \qquad t \in T_{\text{loc}},$$

в каждой ограниченной области $T_{\text{loc}} \subseteq T$, и, согласно этому, пространство обобщенных пробных функций $X \supseteq C_0^\infty(T)$, $X = \left[C_0^\infty(T)\right]$, уточним: X является сопряженным к описанному выше W и состоит из всех обобщенных функций

$$x = L^* g = \Delta g, \quad g \in \mathscr{L}_2(T),$$

в области T с нормой $\|x\|_X = \|g\|_{\mathscr{L}_2}$. Отметим, что взяв

$$g(s) = \widetilde{a}_t(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\lambda s} a_t(\lambda)\, d\lambda, \quad s \in T,$$

в качестве пробных $x = \Delta g$, получим **полную** в X систему дельта-функций $x = \delta_t = \delta(s - t)$ с параметром $t \in T$; здесь, согласно интегральному представлению (1.14), для $u = \varphi \in C_0^\infty(T)$

$$(\varphi, x) = (\Delta\varphi, g) = (\widetilde{\Delta\varphi}, a_t) = \varphi(t),$$

где для полной системы функций $a_t(\lambda)$ в $\mathscr{L}_2(R^3)$ мы имеем полную систему $g_t(s) = \tilde{a}_t(s)$ в двойственном $\mathscr{L}_2(R^3) = \mathscr{L}_2(T)$ и соответственно полную систему $\delta(s - t) = \Delta g(s)$ в $X = L^* \mathscr{L}_2(T)$ с **унитарным**

$$L^* = \Delta\colon F = \mathscr{L}_2(T) \to X.$$

Интегральное представление (1.14) показывает, как функция $u \in W = \left[C_0^\infty(T)\right]$ восстанавливается по обобщенной $f = \Delta u$ с помощью преобразования Фурье $\tilde{f} = \alpha \in \mathscr{L}_2(R^3)$. Аналогичным образом дело обстоит с обобщенными **случайными** $u \in \mathbf{W}$, которые определяются как $u = (x, u)$ пробными $x \in X = \left[C_0^\infty(T)\right]$ и с помощью **полной** в X системы пробных $x = \delta_t$ могут быть описаны как функции $u(t) = (\delta_t, u)$, $t \in T$, задаваемые **стохастическим** интегральным представлением

$$u(t) = (a_t, \tilde{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{i\lambda t} - 1}{|\lambda|^2} \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T,$$

по обобщенной случайной $f = \Delta u$ ее преобразованием Фурье $\tilde{f}$, где справа указан отвечающий $\tilde{f}$ **стохастический интеграл**; очевидно, что при $t \to 0$ имеется предельное граничное значение

$$u(0) = \lim_{t \to 0} u(t) = 0.$$

Взяв в качестве $f=\eta$ **гауссовский «белый шум»** на $F=\mathscr{L}_2(T)=\mathscr{L}_2(R^3)$, как единственное решение $u=\xi\in\mathbf{W}$ уравнения (1.13) получим гауссовскую случайную функцию

$$\xi(t)=(a_t,\widetilde{\eta})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{i\lambda t}-1}{|\lambda|^2}\widetilde{\eta}(\lambda)\,d\lambda,\qquad t\in T,$$

с нулевым граничным значением $\xi(0)=0$, нулевым средним $E\xi(t)\equiv 0$ и, согласно (1.15),

$$E|\xi(t)-\xi(s)|^2=\int|a_t(\lambda)-a_s(\lambda)|^2\,d\lambda=$$
$$=\int|a_{t-s}(\lambda)|^2\,d\lambda=\sigma^2|t-s|,\quad s,t\in R^3;$$

случайная функция $\xi=\xi(t)$, $t\in R^3$, известна как *броуновское движение* Леви. □

Рассмотрим уравнение

$$Lu=f \tag{1.16}$$

с имеющим постоянные (действительные) коэффициенты дифференциальным оператором $L=\sum\limits_k a_k\partial^k$ в области $T=R^d$ и обобщенной правой частью $f=(\varphi,f)$, характеризуемой непрерывностью по $\varphi\in C_0^\infty(R^d)$ в пространстве $F=\mathscr{L}_2(R^d)$. Пусть отвечающий оператору $\mathscr{P}=L^*L$ полином

$$\mathscr{P}(i\lambda)=L^*(i\lambda)L(i\lambda)=|L(i\lambda)|^2$$

таков, что функция $1/\mathscr{P}=1/\mathscr{P}(i\lambda)$, $\lambda\in R^d$, может служить весовой функцией для соответствующего пространства $\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}$ известного нам типа. Тогда, как мы знаем, пространство пробных обобщенных функций $x\in X$ для уравнения (1.16) можно описать с помощью преобразования Фурье условием $\widetilde{x}\in\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}$ — напомним, что X является сопряженным к пространству $W=[C_0^\infty(R^d)]$ с нормой

$$\|u\|_W=\|Lu\|_{\mathscr{L}_2}=\|\widetilde{u}\|_{\mathscr{L}_{2,\mathscr{P}}};$$

в частности, X содержит плотное в нем $C_0^\infty(R^d)$, $X=[C_0^\infty(R^d)]$ — см. (2.16) гл. I. Конечно, оператор $L^*=\sum\limits_k(-1)^k a_k\partial^k$ является невырожденным на $F=\mathscr{L}_2(R^d)$, поскольку для $g\in\mathscr{L}_2(R^d)$ обобщенная функция $L^*g = 0$ имеет своим преобразованием Фурье обобщенную функцию $L^*(i\lambda)\tilde{g}(\lambda) = 0$ лишь при $g = 0$, и дополнительно можно сказать, что X состоит из всех обобщенных функций $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{L}_2(R^d)$, $\tilde{x}(\lambda) = L(-i\lambda)\tilde{g}(\lambda)$, причем

$$\|x\|_X = \|g\|_{\mathscr{L}_2} = \|x\|_{\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}} = \left(\int |\tilde{x}(\lambda)|^2 \frac{1}{\mathscr{P}} d\lambda\right)^{1/2}.$$

Согласно этому, единственное решение $u \in \mathbf{W}$ уравнения определяется по $f = Lu$ с помощью пробных $x = L^*g \in X$ как

$$u = (x, u) = (g, f),$$

где, скажем, $g \in \mathscr{L}_2(R^d)$ может быть найдена для данного $x \in X$ с помощью обратного преобразования Фурье функции

$$\tilde{g}(\lambda) = \tilde{x}(\lambda)/L(-i\lambda) \in \mathscr{L}_2(R^d);$$

в частности, взяв здесь $x = \varphi \in C_0^\infty(R^d)$, мы получим решение $u \in \mathbf{W}$ как обобщенную функцию $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$.

При условии интегрируемости весовой функции $1/\mathscr{P}$ мы имеем: $1/L(-i\lambda) \in \mathscr{L}_2(R^d)$ и $\tilde{x}(\lambda) = e^{i\lambda t}$ с параметром $t \in R^d$ образуют в пространстве $\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}$ полную систему, для которой соответствующие $x = \delta_t = \delta(s - t)$ образуют полную систему в X, позволяя описать решение уравнения (1.16) как

$$u = u(t) = (\delta_t, u) = (w_t, f) = \int w(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in R^d,$$

где

$$w_t = w(t-s) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\lambda(t-s)} \frac{1}{L(-i\lambda)} d\lambda, \quad s \in R^d,$$

а крайнее справа выражение представляет в общем случае стохастический интеграл, определяемый по обобщенной случайной функции $f = (g, f)$, $g \in \mathscr{L}_2(R^d)$. Взяв здесь в качестве $f = \eta$ белый шум $\eta = (g, \eta)$, $g \in \mathscr{L}_2(R^d)$, как единственное решение $u = \xi \in \mathbf{W}$ уравнения получим стационарное *случайное* поле

$$\xi(t) = \int w(t-s)\eta(s)\, ds, \quad t \in R^d,$$

с нулевым средним и спектральной плоскостью $1/\mathscr{P} =$

$=1/\mathscr{P}(i\lambda)$; при общей весовой функции $1/\mathscr{P}$ мы получим *обобщенное стационарное поле*

$$(\varphi, \xi) = (g, \eta), \quad \varphi = x \in C_0^\infty(R^d),$$

с указанной спектральной плотностью

$$E\,|(\varphi, \xi)|^2 = \|g\|^2_{\mathscr{L}_2} = \int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \frac{1}{\mathscr{P}}\,d\lambda. \;\square$$

Аналогичное решение получается для уравнения

$$\mathscr{P}u = f \tag{1.17}$$

с имеющим постоянные коэффициенты дифференциальным оператором

$$\mathscr{P} = L = \sum a_k \partial^k \geqslant 0$$

в области $T = R^d$ и обобщенной правой частью $f = (\varphi, f)$, характеризуемой непрерывностью по $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$ в соответствующем оператору $\mathscr{P} \geqslant 0$ пространстве $F = W = [C_0^\infty(R^d)]$ с нормой

$$\|\varphi\|_W = (\varphi, \mathscr{P}\varphi)^{1/2}.$$

При тех же условиях на

$$1/\mathscr{P} = 1/\mathscr{P}(i\lambda), \quad \mathscr{P}(i\lambda) = \sum_k a_k(i\lambda),$$

что и раньше (с $1/\mathscr{P}$ как весовой функцией можно образовать $\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}$) в качестве пространства пробных функций $X = [C_0^\infty(R^d)]$ для уравнения (1.17) мы имеем совокупность всех обобщенных x, $\widetilde{x} \in \mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}$, с нормой

$$\|x\|_X = \|\widetilde{x}\|_{\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}} = \left(\int |\widetilde{x}(\lambda)|^2 \frac{1}{\mathscr{P}}\,d\lambda\right)^{1/2}.$$

При этом оператор $\mathscr{P} = L = L^*$ в уравнении (1.17) в применении к функциям $g \in W$ дает в совокупности все пробные $x = \mathscr{P}g \in X$ и, в частности, единственное решение $u \in W$ уравнения (1.17) как обобщенная функция $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$, определяется по имеющейся в (1.17) обобщенной $f = (g, f)$, $g \in W$, формулой

$$(\varphi, u) = (g, f), \quad g = \mathscr{P}^{-1}\varphi,$$

где для преобразований Фурье мы имеем

$$\widetilde{g}(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda)/\mathscr{P}(i\lambda), \quad \lambda \in R^d.$$

Взяв, например, в качестве $f=\eta$ «белый шум» $\eta=(g,\eta)$ на пространстве $F=W$, как единственное решение $u=\xi\in\mathbf{W}$ уравнения (1.17) получим *обобщенное стационарное поле*

$$(\varphi,\xi)=(g,\eta),\qquad \varphi\in C_0^\infty(R^d),$$

с нулевым средним и *спектральной плотностью* $1/\mathscr{P}$,

$$E\,|(\varphi,\xi)|^2=\|g\|_W^2=\|\varphi\|^2=\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathscr{L}_{2,1/\mathscr{P}}}=\int|\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2\frac{1}{\mathscr{P}}\,d\lambda.$$

Упомянем здесь хорошо известное *свободное марковское поле* со спектральной плотностью вида $(|\lambda|^2+a^2)^{-1}$, $\lambda\in R^1$, отвечающее модели (1.17) с $\mathscr{P}=-\Delta+a^2$, где Δ — оператор Лапласа. □

Коротко остановимся еще на одном примере, к которому мы вернемся в дальнейшем. Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial r}-Au=f \tag{1.18}$$

в области $T=G\times(a,\infty)$ с «пространственным» переменным $s\in G$ и «временем» $r>a$ в $t=(s,r)\in T$, где $-A\geqslant 0$ есть положительный эллиптический оператор (порядка m) в области $G\subseteq R^{d-1}$, для которого сопряженный к $L=\partial/\partial r-A$ оператор $L^*=-\partial/\partial r-A$ является невырожденным на пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$, и оператор $\mathscr{P}=L^*L=-\partial^2/\partial r^2+A^2$ в схеме (1.2)—(1.7) гл. I порождает соболевское $W=\mathring{W}(T)=\mathring{W}_2^p(T)$, $p=(m,1)$, с

$$\|\varphi\|_W^2=(\varphi,\mathscr{P}\varphi)\asymp\|\varphi\|_p^2.$$

Пространством обобщенных пробных функций $x\in X$ для уравнения (1.18) с обобщенной правой частью $f=(\varphi,f)$, непрерывной относительно $\varphi\in C_0^\infty(T)$ в $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$, будет соответствующее соболевское

$$X=\mathring{W}_2^{-p}(T)=\left[C_0^\infty(T)\right],$$

и имеется единственное решение $u\in\mathring{\mathbf{W}}_2^p(T)$ этого уравнения, определяемое согласно предложенному в (1.2) общему подходу. Как мы знаем, обобщенная функция $u=(\varphi,u)$, $\varphi\in C_0^\infty(T)$, класса $\mathring{W}_2^p(T)$ на каждом сечении $G\times\{r\}$ области T имеет след

$$u_r = (x, u_r), \quad x \in C_0^\infty(G),$$

для которого

$$(\varphi, u) = \int \varphi_r u_r \, dr,$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}, u\right) = -\int \varphi_r' u_r \, dr = \int \varphi_r \, du_r,$$

причем аналогичный интеграл дает и

$$(A\varphi, u) = \int A\varphi_r u_r \, dr;$$

напомним, что $\varphi_r \in C_0^\infty(G)$ получается из $\varphi = \varphi(s, r)$ фиксацией переменного $r > a$ — см. (1.14) гл. I. Возьмем в правой части (1.18) обобщенную случайную функцию f типа стохастической меры $d\eta_r$ с

$$(\varphi, f) = \int \varphi_r \, d\eta_r, \quad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

где, скажем, $\eta = \eta_r$ есть случайный процесс с некоррелированными приращениями

$$E\,|(x, \eta_{r+h} - \eta_r)|^2 \leqslant C\,\|x\|^2_{\mathscr{L}_2(G)} h, \quad x \in C_0^\infty(G),$$

— как мы знаем, $f = (\varphi, f)$ будет тогда непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(T)$ в $\mathscr{L}_2(T)$ (см. гл. I). Согласно уравнению (1.18), мы имеем

$$\int \varphi_r \, du_r = \int A\varphi_r u_r \, dr + \int \varphi_r \, d\eta_r;$$

взяв здесь $\varphi \in C_0^\infty(T)$ вида $\varphi(s, r) = x(s)\,w(r)$ с $x \in C_0^\infty(G)$, получим

$$\int w(r)\, d(x, u_r) = \int w(r)\,(Ax, u_r)\, dr + \int w(r)\, d(x, \eta_r).$$

и в итоге, используя предельный переход $w \to 1_{(r_1, r_2)}$, получаем

$$(x, u_{r_2}) - (x, u_{r_1}) = \int_{r_1}^{r_2} (Ax, u_r)\, dr + \int_{r_1}^{r_2} d(x, \eta_r),$$

что для рассматриваемого случайного процесса $u_r = \xi_r$ можно символически представить с помощью стохастических дифференциалов в виде уравнения

$$d\xi_r = A\xi_r\,dr + d\eta_r,$$

известного как *стохастическое уравнение Ито*. Включение $u = \xi \in \mathring{\mathbf{W}}_2^p(T)$ для $T = G \times (a, \infty)$ дает начальное значение

$$\xi_a = \lim_{r \to a} \xi_r = 0.$$

(Отметим, что в рамках описываемой стохастическим уравнением Ито теоретико-вероятностной модели случайный процесс $\xi = \xi_r$ рассматривается лишь в его зависимости от времени $r > a$, оставляя в стороне фактически имеющуюся зависимость от пространственного переменного в области $G \subseteq R^{d-1}$, явно выступающую в соответствующем уравнении (1.18).)

§ 2. Граничные задачи

1° Общие граничные условия для обобщенных дифференциальных уравнений. Обратимся к общему уравнению (1.1) с дифференциальным оператором $L = \sum a_k \partial^k$ в области $T \subseteq R^d$ и обслуживающему (1.1), (1.2) функциональному классу $\mathbf{W} = \mathring{\mathbf{W}}(T)$, в котором решение $u \in \mathbf{W}$ является единственным. Понятно, что, имея дело с уравнением

$$Lu = f \tag{2.1}$$

в той или иной области $S \subseteq T$, уже нельзя гарантировать единственность решения, и возникает вопрос о дополнительных к уравнению (2.1) данных, которые однозначно выделяли бы интересующее нас $u \in \mathbf{W}(S)$ в соответствующем функциональном классе $\mathbf{W}(S)$, получающемся сужением $\mathbf{W}$ в области $S \subseteq T$. Этому вопросу можно придать более точную направленность, имея в виду данные, которые доступны в форме своего рода «граничных условий», скажем, отражающих те или иные условия вне области S (примером здесь могут служить рассматриваемые в дальнейшем задачи прогнозирования *)).

*) Здесь можно было бы сказать об известных задачах математической физики, исследования которых в рамках соответствующих граничных задач определили целые направления в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Используем предложенный в (1.1)—(1.2) общий подход для уравнения (2.1) в области $S \subseteq T$. Именно, используя непрерывность правой части $f = (\varphi, f)$ по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$ и непрерывность $u = (x, u)$ относительно $x = L^*\varphi$ по $\|x\|_X$, вместе с обобщенным уравнением (2.1) для $u \in \mathbf{W}(S)$ рассмотрим эквивалентное ему уравнение

$$(L^*g,\ u) = (g,\ f), \quad g \in \mathscr{F}(S), \tag{2.1$'$}$$

с «пробными» $g \in \mathscr{F}(S)$ из замыкания $\mathscr{F}(S) = [C_0^\infty(S)]$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F}$, где указанное $\mathbf{W}(S)$ есть совокупность обобщенных функций $u = (x, u)$ с пробными $x \in X(S)$ из подпространства $X(S)$ обобщенных пробных $x \in X = \mathring{X}(T)$ в замыкании области S — с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$. Само уравнение (2.1), (2.1)$'$ дает нам не что иное, как функцию $u = (x, u)$ на подпространстве $x \in X^-(S)$,

$$X^-(S) = L^*\mathscr{F}(S) = \left[L^*C_0^\infty(S)\right] \subseteq X(S). \tag{2.2}$$

Понятно, что дополнительными данными, вместе с (2.1), (2.1)$'$ однозначно определяющими $u \in \mathbf{W}(S)$, могли бы быть значения (x, u) с пробными $x \in X(S)$ из дополнения к подпространству $X^-(S)$ — скажем, из ортогонального дополнения

$$X(S) \ominus X^-(S).$$

Оказывается, что это ортогональное дополнение входит в *граничное пространство* $X(\Gamma) \subseteq X(S)$ всех пробных x, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$, с носителями на границе $\Gamma = \partial S$ области S, и, таким образом, дополнительные данные относительно искомой функции $u \in W(S)$, о которых здесь идет речь, суть ее граничные значения

$$(x, u), \quad x \in X_0^+(\Gamma), \tag{2.3}$$

на указанном *граничном подпространстве*

$$X_0^+(\Gamma) = X(S) \ominus X^-(S) \subseteq X(\Gamma)$$

пробных x, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$. Покажем это.

Остановимся сначала на случае оператора L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$, когда пространством пробных функций во всей области $T \supseteq S$ служит

$$X = L^*\mathscr{L}_2(T) = \mathscr{P}W$$

с $\mathscr{P}=L^*L$ на соответствующем $W=\overset{\circ}{W}(T)=\left[C_0^\infty(T)\right]$, и в $(2.1)'$ мы имеем

$$\mathscr{F}(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]=\mathscr{L}_2(S).$$

Очевидно, что включение $LC_0^\infty(S)\subseteq\mathscr{L}_2(S)$ для замыкания $\overset{\circ}{W}(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]$ в W дает нам

$$\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S)=\left[\mathscr{P}C_0^\infty(S)\right]\subseteq L^*\mathscr{L}_2(S)=X^-(S)\subseteq X(S),$$

где в пространстве $X(S)$ всех обобщенных пробных $x\in X$, $\operatorname{supp}x\subseteq[S]$, граничные $x\in X(\Gamma)$ с носителями $\operatorname{supp}x\subseteq\Gamma$ на границе $\Gamma=\partial S$ выделяются условием

$$(\varphi,x)=\langle\mathscr{P}\varphi,x\rangle_X=0,\qquad \varphi\in C_0^\infty(S),$$

описывающим граничное $X(\Gamma)$ как ортогональное дополнение в $X(S)$ к подпространству $\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S)$,

$$X(S)=\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S)\oplus X(\Gamma)\tag{2.4}$$

— см. по этому поводу (1.7), (2.4) гл. I. Согласно (2.4), в ортогональном разложении

$$X^-(S)=\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S)\oplus X^-(\Gamma)$$

ортогональное дополнение к $\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S)$ в $X^-(S)=L^*\mathscr{L}_2(S)$ есть

$$X^-(\Gamma)=X(\Gamma)\cap X^-(S)=X(\Gamma)\cap L^*\mathscr{L}_2(S),\tag{2.5}$$

а ортогональным дополнением к $X^-(S)$ в $X(S)$ является ортогональное дополнение

$$X_0^+(\Gamma)=X(\Gamma)\ominus X^-(\Gamma)\tag{2.6}$$

к $X^-(\Gamma)$ в $X(\Gamma)$.

Оставшийся нерассмотренным случай оператора $L=L^*=\mathscr{P}\geqslant 0$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F}=W=\overset{\circ}{W}(T)$ еще проще; именно, здесь мы имеем

$$\mathscr{F}(S)=\overset{\circ}{W}(S)=\left[C_0^\infty(S)\right],$$

$$X^-(S)=L^*\mathscr{F}(S)=\left[L^*C_0^\infty(S)\right]=\mathscr{P}\overset{\circ}{W}(S),$$

и ортогональное дополнение к пробным $x\in X^-(S)$, согласно общему ортогональному разложению (2.4), есть

$$X_0^+(\Gamma) = X(\Gamma), \tag{2.7}$$

т. е. все граничное пространство $X(\Gamma)$. □

В общем случае мы имеем ортогональную сумму

$$X(S) = X^-(S) + X_0^+(\Gamma). \tag{2.8}$$

Понятно задав произвольно граничные значения (2.3), а именно, задав произвольно линейную непрерывную функцию $u = (x, u)$, $x \in X_0^+(\Gamma)$, на граничном подпространстве $X_0^+(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$ и имея заданную уравнением (2.1), (2.1)$'$ функцию $u = (x, u)$, $x \in X^-(S)$, в совокупности мы однозначно определим линейную функцию $u = (x, u)$ при всех $x \in X(S)$ как

$$(x, u) = (x^-, u) + (x^+, u)$$

при разложении $x = x^- + x^+$ на компоненты $x^- \in X^-(S)$, $x^+ \in X^+(\Gamma)$. □

Приведем следующее очевидное предложение: *система граничных пробных $x \in X^+(\Gamma)$ является полной в $X(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\mathscr{P}u = 0$$

в области $T\backslash\Gamma$ с граничными условиями

$$(x, u) = 0, \quad x \in X^+(\Gamma),$$

имеет единственное решение $u \in W$ (т. е. $u = 0$). Поясним, что это относится как к случаю $\mathscr{P} = L = L^* \geqslant 0$ на $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$, так и к случаю $\mathscr{P} = L^*L$ с оператором L на $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$. Отметим, что в силу общего представления $X = L^*\mathscr{F}$ (см. (1.5)) граничные $x \in X(\Gamma)$ могут быть описаны как $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{F}$, удовлетворяющими однородному *сопряженному уравнению*

$$L^*g = 0 \tag{2.9}$$

в дополнительной к границе области $T\backslash\Gamma$. При этом в случае $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$, когда от решения уравнения (2.9) не требуется даже непрерывности на границе $\Gamma = \partial S$, его можно «разрезать» по Γ, выделив отдельно решения с $g = g^- \in \mathscr{L}_2(S)$, $L^*g^- = 0$ в S и $g^- = 0$ в дополнении $S^c = T\backslash S$, и с $g = g^+ \in \mathscr{L}_2(S^c)$, $g^+ = 0$ в S и $L^*g^+ = 0$ в дополнительной к S области $S^+ = T\backslash[S]$; здесь граничные $x = L^*g^-$ в совокупности образуют $X^-(\Gamma)$, а составляющие дополнение к ним граничные $x = L^*g^+$ в случае невырожденного L^* образуют *ортогональное дополнение* $X_0^+(\Gamma)$ — напомним, что невырожденный оператор

$$L^*\colon \mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T) \to X = L^*\mathscr{F}$$

является унитарным оператором. □

Говоря о *граничных условиях* на обобщенное решение $u \in \mathbf{W}(S)$ уравнения (2.1), которое в нашей схеме есть обобщенная функция $u = (x, u)$ функционального переменного $x \in X(S)$, естественно понимать их как условия на те или иные *граничные значения* (x, u), $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$, на границе $\Gamma = \partial S$ области S, скажем, как условия, *задающие* граничные значения

$$(x, u) = (x, u^+), \quad x \in X^+(\Gamma), \tag{2.10}$$

для *произвольной* совокупности $X^+(\Gamma)$ обобщенных граничных $x \in X(\Gamma)$, и при таком подходе можно сказать, что выбор $X^+(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$ определяет *тип граничных условий* (2.10). В дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров мы в рамках этого подхода встретимся со многими известными в теории дифференциальных уравнений граничными условиями. Отметим, что в (2.10) речь идет о линейной непрерывной функции $u = (x, u)$ функционального переменного x, и задание ее значений в точках $x \in X^+(\Gamma)$ определяет ее на их замкнутой линейной оболочке; согласно этому можно считать, что $X^+(\Gamma)$ есть *подпространство* в граничном $X(\Gamma)$, а в (2.10) задаются граничные значения (x, u) на какой-либо *полной системе* $x \in X^+(\Gamma)$ в *граничном подпространстве* $X^+(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$.

Как уже фактически отмечалось, некоторые *граничные значения* удовлетворяющей уравнению (2.1) функции $u \in \mathbf{W}(S)$ определяются самим уравнением, а именно это значения

$$(x, u), \quad x \in X^-(\Gamma),$$

отвечающие в схеме с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ пробным

$$x \in X^-(S) = \left[L^*C_0^\infty(S)\right] = L^*\mathscr{L}_2(S)$$

с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$ (см. (2.5)); уточним: при этих $x = L^*g$, согласно (2.1), (2.1)$'$

$$(x, u) = (g, f), \tag{2.11}$$

где соответствующие $g \in \mathscr{L}_2(S)$, $g = 0$ вне S могут быть описаны *сопряженным уравнением*

$$L^*g = 0 \tag{2.12}$$

в самой области S. Таким образом, если в граничных условиях (2.10) речь идет о той же функции $u \in W(S)$, что и в уравнении (2.1), то должно быть

$$(x,\ u^+) = (g,\ f), \quad x = L^*g, \tag{2.13}$$

для тех пробных $x \in X^+(\Gamma)$ из (2.10), что задействованы также в (2.1)′, т. е. для

$$x \in X^+(\Gamma) \cap X^-(\Gamma);$$

более того, должно быть

$$(x,\ u^+) - (g,\ f) \to 0 \tag{2.13$'$}$$

для тех $x \in X^+(\Gamma)$ из (2.10), что сближаются с какими-то пробными L^*g из (2.1)′,

$$\|x - L^*g\|_X \to 0.$$

В (2.13), (2.13)′ выражена необходимая *согласованность граничных условий* (2.10) с уравнением (2.1). Очевидно, что вопрос об этой согласованности не возникает для граничных условий (2.10) произвольного типа $X^+(\Gamma)$ с *граничным подпространством* $X^+(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$, составляющим прямую сумму

$$X(\Gamma) = X^-(\Gamma) + X^+(\Gamma), \tag{2.14}$$

когда $X^+(\Gamma)$ является прямым дополнением к $X^-(S) = [L^*C_0^\infty(S)]$ в

$$X(S) = X^-(S) + X^+(\Gamma) \tag{2.14$'$}$$

— понятно, что *произвольно* заданные граничные условия (2.10) этого типа $X^+(\Gamma)$ являются согласованными с уравнением (2.1), поскольку в (2.13) речь может идти лишь об $x = 0$, а в (2.13)′ — лишь об $x \to 0$. Тем более вопрос о согласованности не возникает в случае уравнения (2.1) с оператором $L = L^* = \mathscr{P} \geqslant 0$ в отвечающем ему пространстве $\mathscr{F} = W$, когда

$$X^-(\Gamma) = X(\Gamma) \cap X^-(S) = 0$$

— см. (2.7).

Назовем граничные условия (2.10) *полными*, если $x \in X^+(\Gamma)$ дополняют $X^-(S) = [L^*C_0^\infty(S)]$ до полной системы в пространстве $X(S)$ всех пробных функций x, $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$.

Справедливо следующее предложение.

Теорема. *Произвольно заданные граничные условия (2.10) определяют единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$ уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда они являются полными и согласованными с этим уравнением.*

Доказательство очевидно: заданную на $x \in X^-(S)$ уравнением (2.1), (2.1)$'$, а на дополняющих их $x \in X^+(\Gamma)$ — граничными условиями (2.10) линейную непрерывную функцию $u = (x, u)$ можно единственным образом продолжить на все пространство $x \in X(S)$.

Добавим здесь, что в случае, когда согласованность можно выразить в форме (2.13) с теми или иными $x = L^*g \in X^+(\Gamma)$, $g \in \mathscr{L}_2(S)$, при полноте граничных условий, мы имеем представление всех элементов $x \in X(S)$ в виде прямой суммы

$$x = L^*\varphi + x^+$$

с соответствующими $\varphi \in \mathscr{L}_2(S)$, ортогональными функциям $g \in \mathscr{L}_2(S)$ из (2.13) и граничными $x^+ \in X^+(\Gamma)$; очевидно, что единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$ общей граничной задачи (2.1), (2.10) при произвольных граничных условиях такого типа $X^+(\Gamma)$ описывается с помощью пробных $x \in X(S)$ формулой

$$(x, u) = (\varphi, f) + (x^+, u^+). \tag{2.15}$$

Добавим еще, что при соотношении эквивалентности

$$\|L^*\varphi\|_X \asymp \|\varphi\|_{\mathscr{F}}, \quad \varphi \in C_0^\infty(S), \tag{2.16}$$

граничная задача (2.1), (2.10) разрешима при любой правой части — любой обобщенной функции f (скажем, со значениями $(\varphi, f) \in H$ в гильбертовом H), непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$ и, понятно, удовлетворяющей (2.13). Все вместе это в случае условия согласованности (2.13) и соотношения эквивалентности (2.16) приводит нас к следующему предложению.

Теорема. *Общая граничная задача* (2.1), (2.10) *имеет единственное решение $u \in W(S)$, описываемое формулой* (2.15) *с оценкой*

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(x, u)\|_H \leqslant C \left[\sup_{\|\varphi\|_{\mathscr{F}} \leqslant 1} \|(\varphi, f)\|_H + \sup_{\|x^+\|_X \leqslant 1} \|(x^+, u^+)\|_H \right].$$

Отметим, что в частном случае граничных условий типа (2.14), не требующих никакой согласованности (условие (2.13) отсутствует), первое слагаемое в формуле (2.15) представляет решение при однородных (нулевых) граничных условиях (2.10) с $u^+=0$, а второе слагаемое в (2.15) представляет решение однородного уравнения (2.1) с правой частью $f=0$.

Напомним. что указанный в (2.14) тип $X^+(\Gamma)=X(\Gamma)$ с тривиальным $X^-(\Gamma)=0$ только и может быть для оператора $L=\mathscr{P}\geqslant 0$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F}=$ $=W=\overset{\circ}{W}(T)$.

Для общего оператора L в пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ важным примером полных и согласованных с уравнением (2.1) граничных условий (2.10) типа $X^+(\Gamma)$ являются чисто *внешние граничные условия* — под этим мы будем понимать задание граничных $(x, u)=(x, u^+)$ с помощью пробных $x\in X^+(\Gamma)$, которые связаны с соответствующими $g^+\in\mathscr{L}_2(S^c)$ вне области S и представимы как $x=L^*g^+$ с $g^+=0$ в S и $L^*g=0$ в дополнительной области $S^+=T\setminus[S]$ — см. (2.9), (2.12); понятно, что в нашей модели (2.1) с данным f в области T граничные условия этого типа непосредственно связаны с f вне области S равенством

$$(x, u)=(x, u^+)=(g^+, f), \qquad x=L^*g^+\in X^+(\Gamma).$$

Отметим, что здесь в случае невырожденного оператора L^* на $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ мы имеем граничные условия типа

$$X^+(\Gamma)=X_0^+(\Gamma),$$

определяемые на ортогональном дополнении $X_0^+(\Gamma)=X(\Gamma)\ominus X^-(\Gamma)$ — см. (2.6), (2.8). Выделим специально случай, когда внешние граничные условия являются единственно полными — мы имеем в виду случай. когда они типа

$$X^+(\Gamma)=X(\Gamma),$$

что отвечает $X^-(\Gamma)=0$, когда в области $S\subseteq T$ кроме тривиального $g=0$ нет решений $g\in\mathscr{L}_2(S)$ сопряженного уравнения $L^*g=0$ в S — см. (2.9), (2.12)*).

*) Это наблюдается для самых различных операторов L в бесконечных областях S.

В нашей общей граничной задаче (2.1), (2.10) в области $S \subseteq T$ само уравнение (2.1) разрешимо (имеет решение) в классе $u \in \mathbf{W}(S)$ тогда и только тогда, когда правая часть (2.1) задается обобщенной функцией $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно нормы $\|L^*\varphi\|_X$ в соответствующем $X(S)$. При этом

$$\|L^*\varphi\|_X = \|\varphi\|_{\mathscr{F}}$$

для оператора L в левой части (2.1) в случае $L = L^* = \mathscr{P} > 0$ в отвечающем ему пространстве $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$ или, в случае произвольного L, в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ с невырожденным L^*, с $\mathscr{F} = [LC_0^\infty(T)] = \mathscr{L}_2(T)$; в случае же общего оператора L в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ норма

$$\|L^*\varphi\|_X = \|\mathring{\varphi}\|_{\mathscr{F}}$$

совпадает с нормой ортопроекции $\mathring{\varphi}$ на подпространство $\mathring{\mathscr{F}} = [LC_0^\infty(T)]$, и здесь можно дополнительно указать *случай общего положения* с отличным от 0 углом между $\mathscr{F}(S) = \mathscr{L}_2(S)$ и ортогональным дополнением $\mathscr{F} \ominus \mathring{\mathscr{F}}$ (ядром сопряженного оператора L^*) в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ — понятно, что это как раз случай, когда выполняется условие (2.16) и *уравнение* (2.1) *имеет решение* $u \in \mathbf{W}(S)$ *для любой правой части* $f = (\varphi, f)$, *непрерывной по* $\varphi \in C_0^\infty(S)$ *относительно нормы* $\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$.

Напомним, что мы рассматриваем уравнения (2.1) для обобщенных функций со значениями в произвольном гильбертовом пространстве (в частности, для обобщенных случайных функций со значениями в гильбертовом $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω). Покажем, что *соотношение эквивалентности* (2.16) *в* $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ *равносильно тому, что уравнение* (2.1) *разрешимо для любой скалярной функции* $f \in \mathscr{L}_2(S)$. Действительно, наличие равенства $f = Lu$ дает непрерывность линейной формы $(\varphi, f) = (L^*\varphi, u)$ по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|L^*\varphi\|_X$ и ее ограниченность на множестве $\varphi \in C_0^\infty(S)$ с $\|L^*\varphi\|_X \leqslant 1$ при каждом $f \in \mathscr{L}_2(S)$, что указывает на ограниченность этого множества в гильбертовом $\mathscr{L}_2(S)$ и на справедливость неравенства

$$\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2} \leqslant C \|L^*\varphi\|_X$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(S)$, где $\|L^*\varphi\|_X \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$.

Понятно, что *при соотношении эквивалентности* (2.16) *уравнение* (2.1) *разрешимо в классе* $u \in \mathbf{W}(S)$ *при любой правой части* $f = (\varphi, f)$, *непрерывной по* $\varphi \in C_0^\infty(S)$ *относительно* $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$. □

Для иллюстрации всего сказанного можно обратиться к простейшему уравнению

$$\frac{d}{dt} u = f$$

на интервале $S = (t_0, t_1)$ в схеме с пространством $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ на конечном интервале $T = (a, b) \supset [S]$. Пространством обобщенных пробных функций для $u \in \mathbf{W}(S)$ здесь будет соболевское $X(S) = W_2^{-1}(S)$, и соответственно мы имеем $\mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^1(S)$. Ядро $\mathscr{F} \ominus \mathring{\mathscr{F}}$ сопряженного к $L = d/dt$ оператора $L^* = -d/dt$ состоит из постоянных в T функций $g \equiv c$, и в случае $[S] \subset T$ очевидно, что подпространство $\mathscr{F}(S) = \mathscr{L}_2(S)$ имеет с ним отличный от 0 угол, что дает нам случай общего положения, когда решение $u \in \mathbf{W}(S)$ существует для любой $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$. Граничное пространство $X(\Gamma)$ порождается обобщенными пробными $x = L^*g$, отвечающими п о с т о я н н ы м на интервалах (a, t_0), (t_0, t_1), (t_1, b) функциям $g \in \mathscr{L}_2(T)$, и эти $x \in X(\Gamma)$ в н у т р и $T = (a, b)$ проявляют себя как линейные комбинации

$$x = c_0\delta(t - t_0) + c_1\delta(t - t_1)$$

дельта-функций в граничных точках $t_0, t_1 \in T$ интервала $S = (t_0, t_1)$. Подпространство $X^-(\Gamma)$ образовано граничными

$$x = c\mathbb{1}_{(t_0, t_1)} = c[\delta(t - t_0) - \delta(t - t_1)],$$

которые дают определяемые самим уравнением граничные значения

$$(x, u) = -c\left(\mathbb{1}_{(t_0, t_1)}, f\right) = -c\int_{t_0}^{t} f\,dt,$$

где для обобщенной с л у ч а й н о й функции $f = (g, f)$,

$g \in \mathscr{L}_2(S)$ (скажем, типа «белого шума») имеется в виду отвечающий ей стохастический интеграл. Граничные условия (2.10) могут быть выражены для решения $u \in \mathbf{W}(S)$ как функции $u = u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определенной линейной комбинацией

$$c_0 u(t_0) + c_1 u(t_1) = (x, u) = (x, u^+)$$

с помощью соответствующего граничного $x = c_0\delta(t - t_0) + c_1\delta(t - t_1)$, задающего $X^+(\Gamma)$. При любом таком x, $x \notin X^-(\Gamma)$, имеется единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$, удовлетворяющее указанным граничным условиям. Дополнительно здесь можно отметить, что аналогичная схема с $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ на бесконечном интервале $T = (a, \infty)$ будет более простой и удобной благодаря невырожденности $L^* = -d/dt$, задающего унитарный оператор

$$L^*\colon \mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T) \to X = L^*\mathscr{F}.$$

Скажем, в этом случае непосредственно видно, что граничное $x = L^* 1_{(a, t_0)}$, проявляющее себя в качестве пробной функции внутри T как

$$x = \delta(t - t_0),$$

ортогонально к

$$x = L^* 1_{(t_0, t_1)} \in X^-(\Gamma)$$

и, более того, порождает ортогональное дополнение $X_0^+(\Gamma)$ к $X^-(\Gamma)$ в граничном пространстве $X(\Gamma)$, задавая во внешних граничных условиях (2.10) типа $X^+(\Gamma) = X_0^+(\Gamma)$ начальное значение $u(t_0)$ для $u(t)$, $t \geqslant t_0$. □

Обратимся к детерминированным функциям $u \in W(S)$. Напомним, что для них функциональный класс $W(S)$ получается сужением в области S функций $u \in W = \mathring{W}(T)$, которые являются предельными,

$$u = \lim \varphi$$

относительно соответствующей нормы $\|\cdot\|_W$ для функций $\varphi \in C_0^\infty(T)$ в объемлющей области $T \supseteq S$, причем действие дифференциального оператора $L = \sum a_k \partial^k$, непосредственно определенного на $\varphi \in C_0^\infty(T)$ как

$$L\varphi = \sum_k a_k \partial^k \varphi,$$

может быть на $u \in W$ определено предельным переходом

$$Lu = \lim L\varphi,$$

и сужение так определяемой обобщенной функции Lu в области $S \subseteq T$ как раз и представлено в уравнении (2.1) для искомого $u \in W(S)$.

Во многих известных задачах теории дифференциальных уравнений применительно к функциональным классам типа $u \in W(S)$ граничные условия на границе $\Gamma = \partial S$ ставятся фактически с помощью того или иного *граничного* (линейного) *оператора* L_0, определенного на $W(S)$ таким образом, для произвольно взятого «эталона» $u^+ \in W(S)$, характеризующего нужное граничное поведение искомого решения $u \in W(S)$,

$$L_0(u - u^+) = 0. \tag{2.17}$$

Естественно, функции $u = \varphi \in C_0^\infty(S)$, равные 0 в окрестности $\Gamma = \partial S$, должны удовлетворять нулевым граничным условиям

$$L_0(\varphi) = 0.$$

Оказывается, для оператора L_0 с замкнутым ядром $\{u\colon L_0(u) = 0\}$ в $W(S)$ справедливо следующее предложение *).

Теорема. *Граничные условия произвольного типа* (2.17) *равносильны граничным условиям* (2.10) *соответствующего типа* $X^+(\Gamma)$.

Действительно, подпространство $\{u\colon L_0(u) = 0\}$ в $W(S)$ однозначно описывается соответствующим аннулятором в сопряженном пространстве $X(S)$, который, согласно ортогональному разложению (2.4), аннулируя все функции $u = \varphi \in C_0^\infty(s)$, входит в граничное пространство $X(\Gamma)$, представляя собой граничное подпространство $X^+(\Gamma) \subseteq \subseteq X(\Gamma)$. Понятно, что условие (2.17) того, что разность $u - u^+$ входит в ядро оператора L_0, равносильно тому, что $u - u^+$ как элемент сопряженного к $X(S)$ пространства $W(S)$ аннулирует подпространство $X^+(\Gamma) \subseteq X(S)$, т. е.

*) Аналогичное предложение о связи сильных и слабых решений общих граничных задач для функций в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ было предложено в работе Булычев В. А., Фролов Ф. Ф. Граничные задачи для обобщенных дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1988.— Т. 136(177), № 3.— С. 275—296.

равносильно тому, что

$$(x,\ u-u^{+})=0,$$

$$(x,\ u)=(x,\ u^{+}),\quad x\in X^{+}(\Gamma).\ \square$$

Укажем на возможность использования в нашей общей схеме (в частности, для обобщенных случайных функций) тех или иных результатов теории дифференциальных уравнений, связанных с детерминированными граничными задачами.

Обратимся, например, к однородным граничным условиям (2.17) с эталонной функцией $u^{+}=0$, которые могут быть дополнены условиями согласованности (2.13) вида

$$(g,\ f)=0 \tag{2.17$'$}$$

для правой части уравнения (2.1) на $g\in\mathscr{L}_2(S)$, $L^{*}g=0$ в области S, что выражает граничные условия $(x,\ u)=(x,\ u^{+})$ при $u^{+}=0$ на граничных пробных $x=L^{*}g\in X^{-}(\Gamma)$ и в совокупности с (2.17) дает $X^{+}(\Gamma)$ с $u^{+}=0$). Допустим, что при этих однородных граничных условиях уравнение (2.1) с произвольной правой частью $f\in\mathscr{L}_2$, удовлетворяющей условиям (2.17)$'$, имеет единственное решение $u\in W(S)$. Тогда в отношении общей граничной задачи (2.1), (2.10) данного типа (для случайных функций, в частности) справедливо следующее предложение.

Теорема. *Граничные условия*

$$(x,\ u)=(x,\ u^{+}),\quad x\in X^{+}(\Gamma),$$

являются полными, а их согласованность с уравнением (2.1) при произвольных $u^{+}\in\mathbf{W}(S)$ выражается соответствующими условиями (2.13). При любой правой части $f=(\varphi,\ f)$, непрерывной по $\varphi\in C_0^{\infty}(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, и любых граничных условиях (с произвольным $u^{+}\in\mathbf{W}(S)$) в случае указанной согласованности уравнение (2.1) имеет единственное решение $u\in\mathbf{W}(S)$.

В самом деле, существование и единственность решения детерминированной граничной задачи с однородными граничными условиями рассматриваемого типа $X^{+}(\Gamma)$, где $X^{+}(\Gamma)$ взято, скажем, в форме граничного подпространства, при произвольной правой части $f\in\mathscr{L}_2$, удовлетворяющей (2.17), означает существование и единственность линейного непрерывного функционала $u = (x, u)$, $x \in X(S)$, равного 0 на $x = x^+ \in X^+(\Gamma)$ и произвольно заданного как $(x, u) = (\varphi, f)$ на $x = L^*\varphi$ при всех $\varphi \in \mathscr{L}_2(S)$, ортогональных функциям $g \in \mathscr{L}_2(S)$ из (2.17)′, что имеет место лишь тогда, когда элементы $x \in X(S)$ разлагаются в прямую сумму $x = L^*\varphi + x^+$ соответствующих $L^*\varphi$ и x^+, а в этом случае существует и единственно решение общей граничной задачи типа $X^+(\Gamma)$ — см. (2.15).

Остается добавить, фактически повторив сказанное по поводу (2.16), что разрешимость уравнения (2.1) при любой правой части $f \in \mathscr{L}_2$, удовлетворяющей (2.17)′, дает соотношение эквивалентности (2.16) для $\varphi \in \mathscr{L}_2(S)$, ортогональных функциям $g \in \mathscr{L}_2(S)$ из (2.17)′, а это вместе с условиями согласованности $(g, f) = (L^*g, u)$ дает разрешимость уравнения (2.1) для произвольной функции $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$.

2° Стохастическое волновое уравнение. Обратимся к гиперболическому уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = f, \tag{2.18}$$

рассматривая его в нашей общей схеме (2.1), (2.1′) с волновым оператором $L = \partial^2/\partial t_1^2 - \partial^2/\partial t_2^2$ в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$, которая в случае гауссовского белого шума $f = \eta$ в области $T \subseteq R^2$ задает случайное поле $u = \xi$ типа «броуновского листа» (см. (1.12), (1.12)′).

При описании всех возможных граничных условий*) для этого уравнения в области $S \subseteq T$ в классе решений $u \in \mathbf{W}(S)$ нам удобнее обратиться к нему в форме (1.12), получающейся из (2.18) поворотом координатных осей на 45°. Для получающегося таким образом дифференциального оператора

$$L = \partial^2/\partial t_1\,\partial t_2$$

в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ мы в целях упрощения обо-

*) Интерес к граничным условиям для уравнения (2.18) может возникнуть, скажем, при рассмотрении известной нам задачи прогнозирования, которая в случае «броуновского листа» привлекала внимание многих исследователей — см., например, Dalang R. C., Russo F. Prediction Problem for the Brownian Sheet (preprint).

значений возьмем

$$T = (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Как мы знаем, общие граничные условия типа (2.10) определяются выбором соответствующего $X^+(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$ в граничном пространстве $X(\Gamma)$ всех обобщенных пробных $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$, представимых как $x = L^* g$ с помощью $g \in \mathscr{L}_2(T)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (2.9) с оператором $L^* = \partial^2/\partial t_1\, \partial t_2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} g = 0$$

в области $T \setminus \Gamma = S \cup S^+$.

Всякое обобщенное решение $g \in \mathscr{L}_2(T)$ этого уравнения как функция $g = g(t)$ переменного $t = (t_1, t_2)$ в T локально описывается формулой

$$g(t) = g_1(t_1) + g_2(t_2), \tag{2.19}$$

точнее, такой вид имеет общее решение в каждом прямоугольнике $a_1 < t_1 < b_1$, $a_2 < t_2 < b_2$. В самом деле, при всех $\varphi \in C_0^\infty(a_2, b_2)$ обобщенная производная функции

$$\int \varphi'(t_2)\, g(t_1, t_2)\, dt_2 \in \mathscr{L}_2(a_1, b_1)$$

на интервале $a_1 < t_1 < b_1$ равна 0 и

$$\int \varphi'(t_2)\, g(t_1, t_2)\, dt_2 = c$$

есть постоянная $c = c(\varphi')$; при почти каждом t_1 из ортогонального разложения

$$g(t_1, t_2) = g_1(t_1) + g_2(t_1, t_2)$$

функции $g(t_1, t_2) \in \mathscr{L}_2(a_2, b_2)$ с постоянной $g_1(t_1)$ и проекцией $g_2(t_1, t_2)$ на замыкание в $\mathscr{L}_2(a_2, b_2)$ всех производных $\varphi'(t_2)$ получим

$$\int \varphi'(t_2)\, g_2(t_1, t_2)\, dt_2 = c(\varphi'), \qquad \varphi \in C_0^\infty(a_2, b_2),$$

что однозначно определяет одну и ту же функцию $g_2(t_1, t_2) = g_2(t_2)$, и в итоге мы получаем формулу (2.19).

Примером здесь могут служить индикаторные функции $g = 1_{(0, s_1) \times (0, s_2)}$, представимые как $g = 1_{(0, s_1)}(t_1)$ в полосе $(0, \infty) \times (0, s_2)$ и $g = 1_{(0, s_2)}(t_2)$ в полосе $(0, s_1) \times \times (0, \infty)$; они дают пробные дельта-функции

$$x = L^* g = \delta(t - s) \tag{2.20}$$

в области T,

$$(\varphi, x) = (L^*\varphi, g) = \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\varphi\, dt = \varphi(s), \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

— в частности, они дают граничные $x \in X(\Gamma)$ в точках $s \in \Gamma$ границы $\Gamma = \partial S$.

Допустим, часть границы представляет гладкую кривую $\gamma \subseteq \Gamma$, переменное $s = (t_1, t_2) \in \gamma$ на которой может быть описано, скажем, уравнением

$$t_2 = \gamma(t_1), \qquad a_1 < t_1 < b_1.$$

Используя функцию $g \in \mathscr{L}_2(T)$, отличную от 0 лишь в полосе $a_1 < t_1 < b_1$ под кривой γ, где она взята как $g = g(t_1)$ в качестве граничного $x = L^*g \in X(\Gamma)$ получим

$$x = (\varphi, x) = (L^*\varphi, g) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} g(t_1)\left[\int_0^{\gamma(t_1)} \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\varphi(t_1, t_2)\, dt_2\right] dt_1 =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} g(t_1)\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\varphi(t_1, \gamma(t_1))\right] dt_1, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T).$$

Непосредственно видно, что мы имеем здесь обобщенную функцию вида

$$x = \int_\gamma x(s)\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\delta(t - s)\right] ds \tag{2.20'}$$

— распределенную по $\gamma \subseteq \Gamma$ производную $\dfrac{\partial}{\partial t_1}\delta(t - s)$ дельта-функций в граничных точках $s \in \gamma$. Отметим, что в случае отрезка прямой $\gamma(t_1) = c$ граничные $x \in X(\Gamma)$ вида $(2.20)'$ ничего существенного в добавление к дельта-функциям (2.20) не вносят, поскольку здесь при индикаторных функциях $g(t_1) = 1_{(a_1, s_1)}$ получается, что

$$x = \int_{a_1}^{s_1} \frac{\partial}{\partial t_1}\delta(t - s)\, ds_1 = \delta(t - s) - \delta(t - s^0)$$

есть просто разность дельта-функций в граничных точках $s=(s_1, c)$, $s^0=(a_1, c)$.

Аналогично, если переменное $s=(t_1, t_2)\in\gamma$ допускает представление

$$t_1=\gamma(t_2), \quad a_2<t_2<b_2,$$

то на части границы $\gamma\subseteq\Gamma$ мы имеем в качестве обобщенных пробных функций граничные $x\in X(\Gamma)$ вида

$$x=\int\limits_{\gamma} x(s)\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\delta(t-s)\right]ds. \tag{2.20}''$$

Пусть кривая $\gamma\subseteq\Gamma$ не содержит прямолинейных участков вида $\gamma(t_1)=c_1$ или $\gamma(t_2)=c_2$, которые представляют характеристические направления для оператора $L=\partial^2/\partial t_1\,\partial t_2$; скажем точнее, пусть $\gamma\subseteq\Gamma$ есть участок границы, который одновременно может быть описан как уравнением $t_2=\gamma(t_1)$, так и уравнением $t_1=\gamma(t_2)$, и на нем одновременно имеются распределенные производные (2.20)$'$ и (2.20)$''$. Тогда на $\gamma\subseteq\Gamma$ имеются граничные пробные $x\in X(\Gamma)$ общего вида

$$x=\int\limits_{\gamma} x(s)\left[\frac{\partial}{\partial l}\delta(t-s)\right]ds,$$

т. е. типа *распределенных производных* $\frac{\partial}{\partial l}\delta(t-s)$ *по любому* направлению l (в частности, по нормали) в граничных точках $s\in\gamma$.

Оказывается, что для кусочно гладкой границы $\Gamma=\partial S$, представимой в виде объединения такого рода гладких кривых γ, вместе с дельта-функциями (2.20) граничные $x\in X(\Gamma)$ вида (2.20)$'$, (2.20)$''$ образуют полную систему в граничном пространстве $X(\Gamma)$.

Поясним это сначала на примере прямоугольной области $S=(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)$, когда полной является система *дельта-функций* (2.20) — как уже фактически отмечалось, в этом случае граничные (2.20)$'$ на отрезках $\gamma(t_1)=a_2$, b_2 и граничные (2.20)$''$ на отрезках $\gamma(t_2)=a_1$, b_1 ничего существенного не добавляют. Обратившись к *детерминированным* функциям $u\in W$ с их общим представлением

$$u(t)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} f\,dt, \quad f\in\mathscr{L}_2(T), \tag{2.21}$$

рассмотрим в S граничные условия типа $X^+(\Gamma)$, взяв в качестве $x \in X^+(\Gamma)$ дельта-функции $x = \delta(t-s)$ на отрезках $\gamma(t_1) = a_2$ и $\gamma(t_2) = a_1$, задающие граничные значения $u(t_1, a_2)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$, и $u(a_1, t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$. Отметим здесь $X^+(\Gamma) \subseteq X_0^+(\Gamma)$, поскольку взятые нами дельта-функции $x = \delta(t-s)$ получаются как

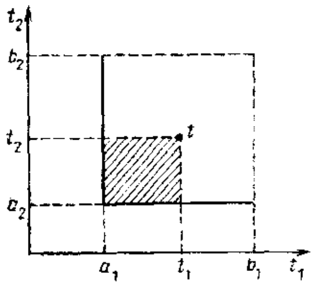

Рис. 1

$$x = L^* g,$$

$$g = 1_{(0, s_1)\times(0, s_2)} \in \mathscr{L}_2(S^+)$$

с индикаторами прямоугольников $(0, s_1)\times(0, s_2)$ из дополнительной к S области $S^+ = T \setminus [S]$ (см. по этому поводу замечание к (2.9)). При произвольно заданных граничных условиях (2.10) выбранного нами типа $X^+(\Gamma) \subseteq X_0^+(\Gamma)$ наше уравнение с произвольным $f \in \mathscr{L}_2(S)$ имеет единственное решение $u \in W(S)$, определяемое, как видно из рис. 1, выражением

$$u(t) = u(a_1, t_2) + u(t_1, a_2) - u(a_1, a_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} f\, dt, \quad t \in S.$$

Это означает, что $X^+(\Gamma)$ составляет полную систему в ортогональном дополнении $X_0^+(\Gamma)$ к соответствующему $X^-(\Gamma)$ в граничном пространстве $X(\Gamma)$. Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что $X^-(\Gamma)$ играет роль граничного подпространства типа $X_0^+(\Gamma^+)$ по отношению к дополнительной области S^+ с границей Γ^+, где лишь на части $\Gamma \subseteq \Gamma^+$ имеются отличные от 0 граничные $x \in X(\Gamma^+)$.

Возьмем граничные $x \in X^-(\Gamma)$, получающиеся как

$$x = L^* 1_{(a_1, s_1)\times(a_2, s_2)}$$

с помощью индикаторов прямоугольников $(a_1, s_1)\times(a_2, s_2)$ с $a_1 \leqslant s_1 \leqslant b_1$, $s_2 = b_2$ и $s_1 = b_1$, $a_2 \leqslant s_2 \leqslant b_2$ — они представляют собой «вторые разности» дельта-функций в вершинах соответствующего прямоугольника, задавая граничные значения вида

$$u(s_1, b_2) - u(a_1, b_2) - u(s_1, a_2) + u(a_1, a_2),$$
$$u(b_1, s_2) - u(b_1, a_2) - u(a_1, s_2) + u(a_1, a_2).$$

Рассмотрим в дополнительной области S^+ граничные условия, задающие с помощью взятых $x \in X^-(\Gamma)$ указанные выше граничные значения. Легко видеть, что наше уравнение с произвольным $f \in \mathscr{L}_2(S)$ в области S^+ при произвольно заданных на границе $\Gamma^+ \supseteq \Gamma$ граничных условиях типа (2.10) с выбранными

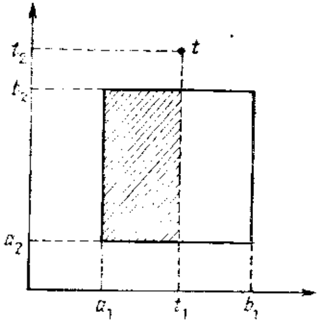

Рис. 2

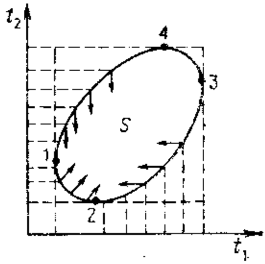

Рис. 3

нами граничными $x \in X^-(\Gamma)$ имеет единственное решение $u \in W(S^+)$ — скажем, в указанном на рис. 2 случае с $s_1 = t_1$ оно определяется как

$$u(t) = \int\int f\,dt + [u(s_1, b_2) - u(a_1, b_2) - u(s_1, a_2) + u(a_1, a_2)],$$

где интеграл от данной в уравнении функции $f \in \mathscr{L}_2(S^+)$ берется по области в S^+, получающейся из прямоугольника $(0, t_1)\times(0, t_2)$ выбрасыванием прямоугольника $[a_1, t_1]\times[a_2, b_2]$. Это означает, что выбранные нами граничные $x \in X^-(\Gamma)$ составляют полную систему в граничном подпространстве $X^-(\Gamma)$, и в итоге мы видим, что *дельта-функции* $x = \delta(t-s)$, $s \in \Gamma$, *образуют полную систему в граничном пространстве*

$$X(\Gamma) = X^-(\Gamma) \oplus X_0^+(\Gamma).$$

Совершенно аналогичные соображения с использованием элементарных приемов интегрирования по частям позволяют описать граничные подпространства $X^-(\Gamma)$, $X_0^+(\Gamma)$ и в случае общего вида области S с кусочно гладкой границей Γ. Скажем, взяв выпуклую область (на рис. 3 она взята ограниченной), будем иметь граничные пробные $x \in X_0^+(\Gamma)$ вида (2.20) на участке $\gamma = (1) - (2) - (3)$ и вида $(2.20)'$ на участке $\gamma =$

$=(2)-(1)-(4)$, представляющие собой распределенные производные $\frac{\partial}{\partial t_1}(\delta(t-s))$ и $\frac{\partial}{\partial t_2}(\delta(t-s))$ дельта-функций; понятно, что на общем участке $\gamma=(1)-(2)$ мы имеем распределенные производные $\frac{\partial}{\partial l}(\delta(t-s))$ по любому направлению — в частности, по нормали (на рис. 3 направления производных схематично указаны стрелками). Кроме того, на участке $\gamma=(1)-(2)$ мы имеем граничные пробные $x\subseteq X_0^+(\Gamma)$ вида дельта-функций $\delta(t-s)$ в отдельных точках $s\in\gamma$, которые получаются как $x=L^*g$ с помощью индикаторных функций

$$g=1_{(0,s_1)\times(1,s_2)}\in\mathscr{L}_2(S^+).$$

Взяв в качестве $X^+(\Gamma)\subseteq X_0^+(\Gamma)$ все эти граничные x, легко убедиться, что при произвольно заданных граничных условиях (2.10) с так выбранным типом $X^+(\Gamma)$ наше уравнение с произвольной правой частью $f\in\mathscr{L}_2(S)$ имеет единственное решение $u\in W(S)$, и это означает, что *указанная совокупность* $X^+(\Gamma)\subseteq X_0^+(\Gamma)$ *граничных пробных функций составляет полную систему в граничном подпространстве* $X_0^+(\Gamma)$.

Остановимся подробнее на том, как уравнение с данной в области S функцией $f\in\mathscr{L}_2$ вместе с граничными условиями (2.10) выбранного нами типа $X^+(\Gamma)$ определяют решение $u\in W(S)$. Из общего интегрального представления (2.21) для детерминированных функций $u\in W$ видно, что при почти каждом в отдельности t_1, t_2 имеются производные

$$\frac{\partial}{\partial t_1}u(t)=\int_0^{t_2}f\,dt_2,\quad \frac{\partial}{\partial t_2}u(t)=\int_0^{t_1}f\,dt_1,$$

которые фактически и задаются в наших граничных условиях — скажем, с помощью граничных пробных $x\in\in X^+(\Gamma)$ в схеме на рис. 3 непосредственно задается

$$\int_{a_1}^{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1,\gamma(t_1))\,dt_1,\qquad a_1\leqslant t_1\leqslant b_1,$$

на участке $\gamma=(1)-(2)-(3)$ и

$$\int\limits_{a_2}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} u(\gamma(t_2), t_2)\, dt_2, \qquad a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2,$$

на участке $\gamma=(2)-(1)-(4)$. Помимо этого на участке $\gamma=(1)-(2)$ задаются еще сами значения $u(s)$, $s\in\gamma$.

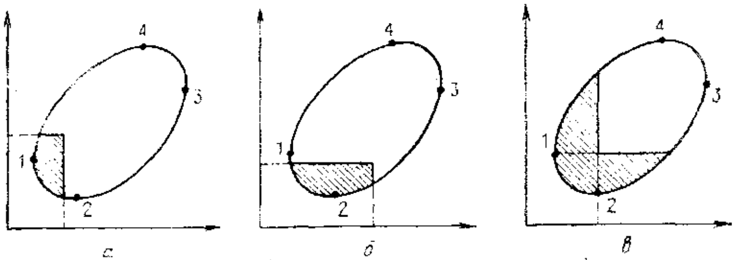

Рис. 4

Используя интегральное представление (2.21) с данной нам в области S функцией $f\in\mathscr{L}_2(T)$, получаем

$$\int\limits_{a_1}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} u(t_1, \gamma(t_1))\, dt_1 = \int\limits_{a_1}^{t_1} \int\limits_{0}^{\gamma(t_1)} f\, dt_2\, dt_1$$

и

$$\int\limits_{a_2}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} u(\gamma(t_2), t_2)\, dt_2 = \int\limits_{a_2}^{t_2} \int\limits_{0}^{\gamma(t_2)} f\, dt_1\, dt_2,$$

что позволяет определить

$$u(t) = \iint f\, dt + \int\limits_{s_1}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} u(t_1, \gamma(t_1))\, dt_1 + u(s)$$

согласно рис. 4, *а* и

$$u(t) = \iint f\, dt + \int\limits_{s_2}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} u(\gamma(t_2), t_2)\, dt_2 + u(s)$$

согласно рис. 4, *б*, где в обоих случаях двойной интеграл берется по заштрихованной области. Таким образом определяется $u(t)$ при всех t в заштрихованной на рис. 4, *в* области, и для оставшихся $t \in S$ можно определить $u(t)$ аналогичным, столь же элементарным приемом, что мы и предоставляем сделать читателю.

Обратимся к граничному подпространству $X^-(\Gamma)$. Возьмем содержащиеся в нем пробные $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{L}_2(S)$ вида $g = g(t_1)$ и $g = g(t_2)$ — они дают соответственно

$$x = \int_{a_1}^{b_1} g(t_1)\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\delta(t - s^+) - \frac{\partial}{\partial t_1}\delta(t - s^-)\right] ds_1 \quad (2.22)$$

при $s^- = (s_1, \gamma^-(s_1))$ на кривой $\gamma^- = (1) - (2) - (3)$, $s^+ = (s_1, \gamma^+(s_1))$ на кривой $\gamma^+ = (1) - (4) - (3)$ и

$$x = \int_{a_2}^{b_2} g(t_2)\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\delta(t - s^+) - \frac{\partial}{\partial t_2}\delta(t - s^-)\right] ds_2 \quad (2.22')$$

при $s^- = (\gamma^-(s_2), s_2)$ на кривой $\gamma^- = (2) - (1) - (4)$, $s^+ = (\gamma^+(s_2), s_2)$ на кривой $\gamma^+ = (2) - (3) - (4)$. Скажем, с помощью весовых функций $g = 1_{(a_1, t_1)}$ и $g = 1_{(a_2, t_2)}$ эти граничные пробные $x \in X^-(\Gamma)$ определяют соответственно

$$\int_{a_1}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}u(s_1, \gamma^+(s_1)) - \frac{\partial}{\partial t_1}u(s_1, \gamma^-(s_1)\right] ds_1 =$$

$$= \int_{a_1}^{t_1}\int_{\gamma^-(s_1)}^{\gamma^+(s_1)} f\, dt_2\, ds_1, \quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1,$$

и

$$\int_{a_2}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t_2}u(\gamma^+(s_2), s_2) - \frac{\partial}{\partial t_2}u(\gamma^-(s_2), s_2)\right] ds_2 =$$

$$= \int_{a_2}^{t_2}\int_{\gamma^-(s_2)}^{\gamma^+(s_2)} f\, dt_1\, ds_2, \quad a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2,$$

где двойные интегралы берутся по областям, заштрихованным на схематичных рис. 5, *а* и *б* и определяются правой частью f нашего уравнения в области S. Задав с помощью взятых $x \in X^-(\Gamma)$ граничные условия для рассматриваемого уравнения в дополнительной области $S^+ = T \setminus [S]$, легко убедиться, что всегда имеется единственное решение $u \in W(S^+)$, и это означает,

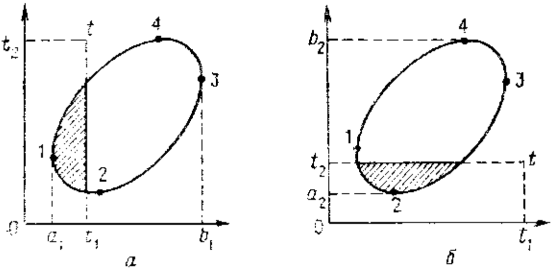

Рис. 5

что взятые нами *граничные* $x \in X^-(\Gamma)$ *вида* (2.22), (2.22)′ *образуют полную систему в граничном подпространстве* $X^-(\Gamma)$. Для ясности укажем, например, что, согласно рис. 5, *а*

$$u(t) = \iint f\,dt + \int_{a_1}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} u(s_1, \gamma^+(s_1)) - \frac{\partial}{\partial t_1} u(s_1, \gamma^-(s_1))\right] ds_1,$$

где двойной интеграл берется по входящему в S^+ дополнению к заштрихованной области в прямоугольнике $(0, t_1)\times(0, t_2)$.

Еще раз отметим, что если для детерминированных функций $u \in W$ обращение к обобщенным пробным $x \in X(\Gamma)$ на границе $\Gamma = \partial S$ дает лишь удобный способ описания соответствующих граничных условий, то для общих $u \in W$ это едва ли не единственный способ самого определения граничных значений (x, u) обобщенных случайных $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$. Случайные $u \in W$ типа винеровского случайного поля (броуновского листа), хотя и могут быть представлены как функции $u = u(t)$ переменного $t \in T$, являются нигде не дифференцируемыми, и их граничные значения вида *)

$$(x, u) = \int\limits_{\gamma} x(s) \frac{\partial}{\partial l} u(s)\, ds$$

с соответствующими производными на $\gamma \subseteq \Gamma$ можно лишь интерпретировать как значения определенной на Γ с помощью «пробных» $x(s)$, $s \in \Gamma$, *обобщенной производной* $\frac{\partial}{\partial l} u(s)$, $s \in \Gamma$; например, винеровское поле $u = \xi$ как функция $\xi = \xi(t)$ в гильбертовом пространстве случайных величин $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица лишь с показателем 1/2, точнее,

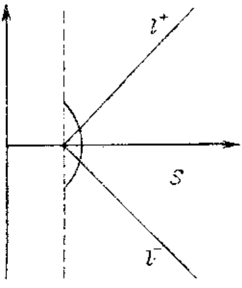

Рис. 6

$$\|\xi(t) - \xi(s)\|_H = (E|\xi(t) - \xi(s)|^2)^{1/2} = \\ = (c_1|t_1 - s_1| + c_2|t_2 - s_2| - \\ - |t_1 - s_1||t_2 - s_2|)^{1/2},$$

где $c_1 = \max(s_2, t_2)$, $c_2 = \max(s_1, t_1)$.

Вернувшись к волновому уравнению (2.18), можно было бы рассмотреть для случайных полей $u = \mathbf{W}$, скажем, хорошо известные в теории дифференциальных уравнений граничные задачи; например, *задачу Гурса* для области $S \subseteq T$, образованной характеристиками l^-, l^+ (как схематично указано на рис. 6), когда задаются граничные условия типа

$$u(s) = u^+(s), \quad s \in \Gamma,$$

или *первую краевую задачу* для цилиндрической области с начальными при $t_1 = t_1^0$ значениями

$$u(s) = u^+(s), \quad \frac{\partial}{\partial n} u(s) = \frac{\partial}{\partial n} u^+(s), \quad s \in \gamma = (1) - (2),$$

включающими обобщенные нормальные производные, и граничными условиями

$$u(s) = u^+(s), \quad s \in \gamma = (1) - (4),\ (2) - (3)$$

*) То, что граничные значения броуновского листа на границе Γ не исчерпываются значениями $\xi(t)$, $t \in \Gamma$, было обнаружено при исследовании марковского свойства случайного поля ξ — см. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля.— М.: Наука, 1981. Укажем здесь на возможность определения обобщенных нормальных производных непосредственно с помощью предельного перехода — см., например, Russo.

(рис. 7), или аналогичную *вторую краевую задачу* с теми же начальными данными на участке границы $\gamma=(1)-(2)$ и граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial n}u(s)=\frac{\partial}{\partial n}u^{+}(s), \qquad s\in\gamma=(1)-(4), \quad (2)-(3)$$

(рис. 8).

Напомним, что существование и единственность решения тех или иных граничных задач в классе детерминированных функций $u\in W(S)$ для соответствующих

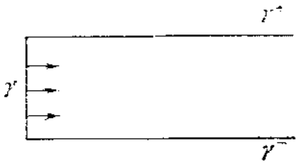

Рис. 7

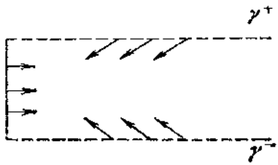

Рис. 8

граничных условий, выраженных в форме (2.10) с помощью граничных пробных $x\in X^{+}(\Gamma)$, означает их полноту и согласованность с уравнением, что дает существование единственного решения $u\in\mathbf{W}(S)$ стохастического уравнения (в рассматриваемом случае — уравнения (2.18)) с произвольной обобщенной случайной функцией $f=(\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi\in C_0^{\infty}(S)$ относительно нормы $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}=\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, и произвольно заданных обобщенных граничных условиях типа $X^{+}(\Gamma)$ — скажем, с произвольной обобщенной случайной функцией $u^{+}\in\mathbf{W}(S)$.

Обратившись к рассматриваемому уравнению в форме (2.19), остановимся на детерминированном случае смешанной краевой задачи в области $S\subseteq T$ общего вида, схематично изображенной на рис. 8 (к этому виду относится и цилиндрическая область S, рассматриваемая в классических задачах математической физики). Отметим, что на рис. 8 графически представлена вторая смешанная задача с «косыми» производными (соответственно $\left.\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)$, в которой мы имеем дело с внешними граничными условиями типа $X_0^{+}(\Gamma)$ на границе $\Gamma=\partial S$.

Рассмотрим общую смешанную задачу, в которой граничные условия задают на участке границы $\gamma=(1)-(2)$

$$u=u^{+},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u^{+}}{\partial n} \tag{2.23}$$

— саму функцию $u \in W$ и ее производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ по некасательному направлению, а на участках границы $\gamma=(1)-(4)$, $\gamma=(2)-(3)$ задают

$$c_1 u+c_2\frac{\partial u}{\partial n}=c_1 u^{+}+c_2\frac{\partial u^{+}}{\partial n}. \tag{2.23$'$}$$

Используем для $u \in W$ представление (2.21). Понятно, что по самой функции вдоль кривой $\gamma=(1)-(2)$ определяется ее производная в касательном направлении $l=\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2$,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\alpha_1\frac{\partial u}{\partial t_1}+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial t_2},$$

что вместе с некасательной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\beta_1\frac{\partial u}{\partial t_1}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

определяет на γ производные

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(s)=\int_0^{s_2} f(s_1, t_2)\,dt_2,\quad \frac{\partial u}{\partial t_2}(s)=\int_0^{s_1} f(t_1, s_2)\,dt_1,$$

$$s=(s_1,\ s_2)\in\gamma.$$

На участке границы $\gamma=(1)-(4)$ с точками $s^{+}=(s_1,\ s_2^{+})$, лежащими непосредственно над кривой $\gamma=(1)-(2)$, по данной в области S правой части уравнения определяется интеграл

$$\int_{s_2}^{s_2^{+}} f(s_1, t_2)\,dt_2,$$

а вместе с ним и производная

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(s^{+})=\int_0^{s_2^{+}} f(s_1, t_2)\,dt_2.$$

Допустим, мы имеем дело со второй краевой задачей, когда на этом же участке границы $\gamma=(1)-(4)$ из граничных условий нам известна производная

$$\frac{\partial u}{\partial n}(s^+)=\beta_1\frac{\partial u}{\partial t_1}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial t_2};$$

тогда при

$$b_2\neq 0$$

определяется также

$$\frac{\partial u}{\partial t_2}(s^+)=\frac{1}{\beta_2}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(s^+)-\beta_1\frac{\partial u}{\partial t_1}(s^+)\right].$$

Аналогичным образом на участке границы $\gamma=(2)-(3)$ с точками $s^+=\left(s_1^+, s_2\right)$, лежащими непосредственно правее кривой $\gamma=(1)-(2)$, по заданной в граничных условиях

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\beta_1\frac{\partial u}{\partial t_1}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

при $\beta_1\neq 0$ определяется производная

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(s^+)=\frac{1}{\beta_1}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(s^+)-\beta_2\frac{\partial u}{\partial t_2}(s^+)\right].$$

Легко видеть, что, продолжая идти по этому пути, мы можем по данной на участках $\gamma=(1)-(4)$, $\gamma=(2)-(3)$ производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ определить

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t_1}(s), \qquad s\in\gamma=(2)-(3),\\ &\frac{\partial u}{\partial t_2}(s), \qquad s\in\gamma=(1)-(4).\end{aligned} \tag{2.23}''$$

Эти данные $\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}$ вместе с $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ на участке $\gamma=(1)-(2)$ определяют внешние граничные условия (см. рис. 4), при произвольном задании которых, как мы знаем, в области $S\subseteq T$ имеется единственное решение $u\in W$. Очевидно, оно будет также единственным решением первоначальной задачи с данной на $\gamma=(1)-(4)$, $\gamma=(2)-(3)$ производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ — поясним, на том пути, который мы ранее проделали от $\frac{\partial u}{\partial n}$ до полученных $\frac{\partial u}{\partial t_1}$,

$\frac{\partial u}{\partial t_2}$, мы от них придем к первоначальной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^+}{\partial n}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть первую краевую задачу с данной на участках $\gamma = (1) - (4)$, $\gamma = (2) - (3)$ функцией

$$u = u^+.$$

Чтобы использовать указанный нами путь, здесь нужно лишь обратиться к производной по касательному направлению $l = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t_1} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t_2},$$

по которой при известных начальных значениях в точках (1), (2) определяется сама функция $u = u^+$; чтобы прийти к внешним граничным условиям $(2.23)''$, мы должны иметь

$$\alpha_1 \neq 0$$

на участке $\gamma = (1) - (4)$ и

$$\alpha_2 \neq 0$$

на участке $\gamma = (2) - (3)$. Лишь несколько сложнее указанный путь будет в случае общей граничной задачи (2.23), $(2.23)'$. Скажем, на участке $\gamma = (1) - (4)$, располагая производной $\frac{\partial u}{\partial t_1}$, из граничных условий $(2.23)'$ мы можем вдоль кривой $s \in \gamma$ определить

$$c_1 \int_{(1)}^{s} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t_2} ds + \alpha_2 \frac{\beta_2}{a_2} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t_2}(s)$$

и, решая возникающее здесь относительно функции

$$\int_{(1)}^{s} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t_2} ds, \qquad s \in \gamma,$$

дифференциальное уравнение, определить затем производную

$$\frac{\partial u}{\partial t_2}(s), \qquad s \in \gamma = (1) - (4);$$

аналогично определяется

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(s), \qquad s \in \gamma = (2)-(3),$$

и таким образом, мы от общей задачи с граничными условиями (2.23), (2.23)′ приходим к равносильной задаче с внешними граничными условиями (2.23), (2.23)″, для которой, как мы уже знаем, при произвольном выборе граничных данных (при произвольном $u^+ \in W$) имеется единственное в области $S \subseteq T$ решение $u \in W$.

Подведем итог сказанному, обратившись к волновому уравнению (2.18) в области S, рассмотренного с граничными условиями (2.23), (2.23)′, где в (2.23)′ направление n для производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ отлично от характеристических направлений $t_1 = -t_2$ на участке границы $\gamma = (1)-(4)$ и от $t_1 = t_2$ на участке границы $\gamma = (2)-(3)$.

Теорема. *Общая стохастическая граничная задача со смешанными граничными условиями типа* (2.23), (2.23)′ *при их произвольном задании* (*с* $u^+ \in \mathbf{W}$) *имеет единственное решение* $u \in \mathbf{W}$.

Как пример приведем стохастическую вторую смешанную задачу, в которой граничные условия определяются с помощью винеровского поля $u^+ \in \mathbf{W}$ (являющегося независимым от источника белого шума $f = \eta$ в области S) и на участках границы $\gamma = (1)-(4)$, $(2)-(3)$ задаются обобщенные производные

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^+}{\partial n}$$

в характеристических направлениях n: $t_1 = t_2$ на $\gamma = (1)-(4)$ и n: $t_1 = -t_2$ на $\gamma = (2)-(3)$; решение такой граничной задачи в области S дает нам броуновский лист $u \in W$ (точнее, целый броуновский лист в области $T \supseteq S$ получается склейкой решения в S с частью данного броуновского листа $u^+ \in W$ вне S).

3° **Стохастические эллиптические и параболические уравнения.** Для иллюстрации предложенного нами общего подхода к обобщенным граничным условиям в его связи с известными эллиптическими граничными задачами теории дифференциальных уравнений можно обратится, например, к уравнению (2.1) с оператором Лапласа $L = \Delta$, рассматривая его в области $S \subseteq T$ с достаточно хорошей границей.

Заменив Δ на $\mathscr{P}=-\Delta$, обратимся сначала к нашей схеме с оператором $L=\mathscr{P}\geqslant 0$ в отвечающем ему пространстве $\mathscr{F}=W=\mathring{W}(T)$, которое получается замыканием $C_0^\infty(T)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_W=(\varphi,\ \mathscr{P}\varphi)^{1/2}$$

и локально совпадает с соболевским $\mathring{W}_2^1(T)$. В этой схеме для *уравнения Пуассона*

$$\Delta u=f \tag{2.24}$$

в ограниченной области S с замыканием $[S]\subset T$ пробными функциями будут обобщенные $x\in X(S)$ из соболевского пространства $X(S)=W_2^{-1}(S)$, которое образуется всеми x, $\operatorname{supp} x\subseteq[S]$, из сопряженного к $W=\mathring{W}(T)$ пространства X.

Соответствующий класс $u\in\mathbf{W}(S)=\mathbf{W}_2^1(S)$ обобщенных функций $u=(x,\ u)$ определяется условием непрерывности по $x\in C_0^\infty(S)$ относительно соболевской нормы $\|x\|_X=\|x\|_{-1}$ в $X(S)$, что позволяет по непрерывности продолжить $u=(x,\ u)$ на все обобщенные пробные $x\in X(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]$. Для любой обобщенной функции $f=(\varphi,\ f)$, непрерывной по $\varphi\in C_0^\infty(S)$ относительно соболевской нормы $\|\varphi\|_W=\|\varphi\|_1$, уравнение (2.24) является разрешимым — оно имеет решение $u\in\mathbf{W}(S)=\mathbf{W}_2^1(S)$. Его граничные значения $(x,\ u)$, $x\in X(\Gamma)$, на границе $\Gamma=\partial S$ являются предельными для $(\varphi,\ u)$ с $\varphi\in C_0^\infty(S)$, $\varphi\to x$ в $X(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]$. Обобщенные пробные $x\in X(\Gamma)$ вида

$$x=(\varphi,\ x)=\int\varphi(s)\,x(s)\,ds,\qquad \varphi\in C_0^\infty(S).$$

образуют полную систему в граничном пространстве $X(\Gamma)$, задавая след обобщенных функций $u\in\mathbf{W}(S)=\mathbf{W}_2^1(S)$, который в случае детерминированных (скалярных) $u\in W(S)=W_2^1(S)$ представим соответствующими функциями $u(s)$, $s\in\Gamma$, из $\mathscr{L}_2(S)$ с

$$\int\limits_\Gamma u(s)\,x(s)\,ds=(u,\ x)=(x,\ u)$$

— см. по этому поводу § 4 гл. I.

Взяв в качестве $X^+(\Gamma)$ полную систему пробных $x\in X(\Gamma)$ указанного выше вида, в граничных условиях (2.10) типа $X^+(\Gamma)$ мы задаем не что иное, как след интересующего нас решения $u \in \mathbf{W}(S)$. Задание граничных условий (2.10) типа $X^+(\Gamma)$ с помощью надлежащего $u^+ \in \mathbf{W}(S)$ выражает требование того, чтобы граничное поведение искомого решения $u \in \mathbf{W}(S)$ было таким же, как у взятого эталона $u^+ \in \mathbf{W}(S)$ (точнее, чтобы решение имело на границе $\Gamma = \partial S$ такой же след, как и эталонная функция u^+). Граничные условия (2.10), означающие, что разность $u - u^+$ аннулирует подпространство $X(\Gamma) \subseteq X(S)$, для детерминированных функций $u, u^+ \in W(S)$ равносильны тому, что

$$u - u^+ \in \mathring{W}(S) = \mathring{W}_2^1(S) = \left[C_0^\infty(S)\right].$$

В целом можно сказать, что рассматриваемое уравнение (2.24) с граничными условиями (2.10) составляют *обобщенную задачу Дирихле*, которая при произвольной правой части в (2.24) и произвольно заданных полных граничных условиях (2.10) имеет единственное решение $u \in \in W(S) = \mathbf{W}_2^1(S)$. $\square$

Напомним здесь, что обычно *задача Дирихле* для эллиптического оператора $L = \mathcal{P} \geqslant 0$ порядка $2p$ в соболевском пространстве $W(S) = W_2^p(S)$ определяется заданием в граничных условиях полного следа искомой функции $u \in W(S)$, включающего след всех ее нормальных производных $\partial^k u$, $k = 0, \ldots, p-1$. Аналогичная обобщенная задача Дирихле запускает постановку в нашей общей схеме и для обобщенных случайных функций $u \in \in \mathbf{W}(S)$. Как мы знаем, задающие полный след граничные условия являются полными, и, согласно нашей общей теореме о существовании и единственности решения уравнения (2.1) в классе $\mathbf{W}(S)$, можно сформулировать следующее предложение.

Теорема. *Обобщенная задача Дирихле для уравнения* (2.1) *с оператором $L = \mathcal{P} \geqslant 0$ порядка $2p$ имеет единственное решение $u \in W(S) = \mathbf{W}_2^p(S)$ при любой правой части $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_p$ в $W(S) = W_2^p(S)$, и любой функции $u^+ \in \mathbf{W}(S)$, задающей полный след*

$$\partial^k u = \partial^k u^+, \quad k = 0, \ldots, p-1,$$

на границе $\Gamma = \partial S$ области S.

Это предложение применительно к детерминированным функциям в соболевском $W_2^p(S)$ с условием

Дирихле в форме

$$u - u^+ \in \mathring{W}_2^p(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$$

дает важный и хорошо известный пример теоремы дифференциальных уравнений в частных производных. □

Обратимся теперь к уравнению (2.24) в нашей схеме с оператором $L = \Delta$ в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$, скажем, взяв $T = R^d$. В ограниченной области S пробными для уравнения (2.24) функциями будут обобщенные $x \in X(S)$ из соболевского пространства $X(S) = W_2^{-2}(S)$, образованного всеми x, $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$, из пространства X, сопряженного к соответствующему $W = \mathring{W}(R^d)$, которое получается замыканием функций $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_W = \|L\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\Delta\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$$

и локально представляет собой пространство типа W_2^2. Соответствующий класс $u \in \mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^2(S)$ определяется условием непрерывности обобщенных функций $u = (x, u)$ по $x \in C_0^\infty(S)$ относительно соболевской нормы $\|x\|_X = \|x\|_{-2}$ в $X(S)$, что позволяет по непрерывности продолжить $u = (x, u)$ на все обобщенные пробные $x \in X(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$.

Как и для всякого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, $L^* = \Delta$ является невырожденным на $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(R^d)$, так что уравнение (2.24) разрешимо в классе $u \in \mathbf{W}_2^2(S)$ для любой обобщенной функции $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}.$$

Граничное пространство $X(\Gamma)$ всех обобщенных пробных x, $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ (с носителем на границе $\Gamma = \partial S$) может быть описано с помощью составляющих в нем полную систему обобщенных функций $x = (\varphi, x)$, $\varphi \in C_0^\infty(R^d)$, вида

$$x = \int_\Gamma x(s)\,\varphi\,ds, \quad \int_\Gamma x(s)\,\partial\varphi\,ds$$

(с нормальными производными $\partial\varphi$); эти граничные пробные $x \in X(\Gamma)$ определяют распределенные на границе Γ функции u, ∂u как

$$(x, u) = \int_{\Gamma} x(s)\, u\, ds, \quad \int_{\Gamma} x(s)\, \partial u\, ds = (u, x)$$

с соответствующими «весовыми» (или «пробными», если хотите) функциями $x(s)$, $s \in \Gamma$, задавая полный след u, ∂u обобщенных $u \in \mathbf{W}_2^2(S)$ на Γ (см. § 4 гл. I).

Граничное $X^-(\Gamma) \subseteq X(\Gamma)$, где значения (x, u), $x \in X^-(\Gamma)$, любого решения $u \in W_2^2(S)$ уравнения (2.24) определяются, согласно (2.11), самим уравнением, образовано всеми пробными $x = L^*g$ $(L^* = \Delta)$ с гармоническими, согласно (2.12) функциями $g \in \mathscr{L}_2(S)$ в области S, и, применяя формулу Грина, их можно описать как обобщенные функции вида

$$x = (\varphi, x) = \int_{\Gamma} (\varphi\, \partial g - g\, \partial\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

а точнее,

$$(\varphi, x) = (\Delta\varphi, g) = \lim \int_{S_\varepsilon^-} \Delta\varphi g = \lim \int_{\Gamma_\varepsilon^-} (\varphi\, \partial g - g\, \partial\varphi),$$

где указанные интегралы появляются при применении формулы Грина к надлежаще аппроксимирующим областям $S_\varepsilon^- \subseteq S$ с границами $\Gamma_\varepsilon^- \to \Gamma$.

Возьмем в (2.10) граничные условия типа $X^+(\Gamma)$ с системой пробных $x \in X^+(\Gamma)$, определяющих след самих функций $u \in W_2^2(S)$. Для детерминированных функций $u \in W(S)$ из соболевского пространства $W(S) = W_2^2(S)$ уравнение (2.24) с $f \in \mathscr{L}_2(S)$ вместе с задающими след

$$u(s) = u^+(s), \qquad s \in \Gamma,$$

граничными условиями (2.10) дает нам известную *задачу Дирихле*, относительно которой в теории дифференцированных уравнений имеется, скажем, следующий результат:

при однородных граничных условиях (с $u^+ = 0$) для любой правой части $f \in \mathscr{L}_2$ уравнение Пуассона (2.24) в ограниченной области S с гладкой границей $\Gamma = \partial S$ имеет единственное решение $u \in W(S)$ в соболевском $W(S) = W_2^2(S)$ *). Как мы знаем, это указывает на полноту и согласованность условий Дирихле, представляющих собой граничные условия типа (2.14), и, следовательно, в отношении *стохастического уравнения Пуассона* (2.24) получается следующее предложение.

Теорема. *Для любой обобщенной случайной функции $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, при произвольно заданных стохастических граничных условиях Дирихле*

$$u = u^+$$

на границе $\Gamma = \partial S$ с любым $u^+ \in W_2^2(S)$ уравнение (2.24) *имеет единственное решение $u \in W_2^2(S)$.* □

Возьмем еще в (2.10) граничные условия другого типа $X^+(\Gamma)$ с системой пробных $x \in X^+(\Gamma)$, задающих след

$$\partial u(s) = \partial u^+(s), \quad s \in \Gamma,$$

нормальных производных ∂u для функций $u \in \mathbf{W}_2^2(S)$, а также, скажем,

$$\int_\Gamma u = \int_\Gamma u^+.$$

Необходимость согласования их с уравнением (2.24) диктует здесь определенное требование на (x, u) при $x = L^*g \in X^+(\Gamma) \cap X^-(\Gamma)$ с индикатором $g = 1_S \in \mathscr{L}_2(S)$ области S,

$$x = (\varphi, x) = -\int_\Gamma \partial\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

при $\Delta u = f$ задающим граничное значение

$$(x, u) = (u, x) = -\int_\Gamma \partial u = (1_s, f);$$

*) Граница $\Gamma = \partial S$ области $S \subseteq R^d$ предполагается гладкой класса C^2, и возникающее в нашей схеме $W(S)$ как сужение пространства $\mathring{W}_2^2(R^d)$ на S совпадает с соболевским пространством $W_2^2(S)$ в его общепринятом понимании (см., например, Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1983, с. 240, 139).

интеграл от нормальной производной ∂u здесь можно понимать буквально в случае детерминированных $u \in W_2^2(S)$ со следом $\partial u = \partial u(s)$, $s \in \Gamma$, из $\mathscr{L}_2(\Gamma)$, когда

$$-\int_\Gamma \partial u = \int_S f(t)\,ds$$

с $f = \Delta u \in \mathscr{L}_2(S)$.

В детерминированном случае поставленные здесь граничные условия составляют для уравнений Пуассона хорошо известную в теории дифференциальных уравнений *задачу Неймана*, относительно которой имеет место следующий результат*): при однородных граничных условиях (с $u^+ = 0$) для любой правой части $f \in \mathscr{L}_2$, $\int_S f(t)\,dt = 0$, уравнение Пуассона (2.24) в ограниченной области S с гладкой границей $\Gamma = \partial S$ имеет единственное решение $u \in W_2^2(S)$. Как следствие в отношении взятой нами *обобщенной задачи Неймана* для стохастического уравнения Пуассона получается следующее предложение.

Теорема. *Для любой обобщенной случайной функции $f = (\varphi, f)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, при произвольно заданных условиях Неймана*

$$\partial u = \partial u^+, \quad \int_\Gamma u = \int_\Gamma u^+$$

на границе $\Gamma = \partial S$ с любым $u^+ \in \mathbf{W}_2^2(S)$, $\int_\Gamma \partial u^+ = \int_S f$ уравнение (2.24) *имеет единственное решение $u \in \mathbf{W}_2^2(S)$.*

Нужно еще раз здесь отметить, что случайные $u \in \mathbf{W}(S)$ из класса

$$\mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^1(S),\ \mathbf{W}_2^2(S),$$

рассматриваемые как обобщенные функции со значениями в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω, по своим локальным свойствам весьма отличаются от детерминированных функций, образующих

*) См. примечание на с. 151.

соответствующий подкласс

$$W(S) = W_2^1(S), \quad W_2^2(S).$$

Скажем, случайные $u \in \mathbf{W}(S)$ в каждом случае $\omega \in \Omega$ представлены реализациями, которые, как мы знаем, описываются функциями $u \in W_2^{-q}(S)$ с характерным для них показателем $q > d/2 - 1$ при $\mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^1(S)$ и $q > d/2 - 2$ при $\mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^2(S)$, где d — размерность пространства $R^d \supseteq S$ — см. по этому поводу § 3 гл. I. Сами $u \in \mathbf{W}(S)$ как функции со значениями в гильбертовом $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ также сильно отличаются по своим локальным свойствам от детерминированных функций $u \in W(S)$. Скажем, в каком важном примере, как броуновское движение Леви $\xi = \xi(t)$, $t \in R^3$, в ограниченной области $S \subseteq R^3$, представляющее функцию $u = \xi \in \mathbf{W}_2^2(S)$, мы имеем для $u = \xi$ лишь условие Липшица с показателем $1/2$, точнее,

$$\|\xi(t) - \xi(s)\|_H = (\mathbf{E}\,|\,\xi(t) - \xi(s)\,|^2)^{1/2} = \sigma\,|\,t - s\,|^{1/2}. \ \square$$

Несмотря на уже не раз отмечавшееся существенное различие в свойствах случайных функций $u \in \mathbf{W}(S) = \mathbf{W}_2^p(S)$ и детерминированных функций соответствующего соболевского класса $u \in W(S) = W_2^p(S)$, накопленный теорией дифференциальных уравнений обширный материал по различным граничным задачам в соболевских пространствах для эллиптических и параболических уравнений можно с успехом применить к общему стохастическому уравнению (2.1), когда в рамках нашей схемы с подходящим $T \supset [S]$ в качестве обобщенных пробных функций $x \in X(S)$ для этого уравнения в области S мы имеем соответствующее соболевское пространство типа

$$X(S) = W_2^{-p}(S).$$

Например, это может быть соболевское $X(S) = W_2^{-p}(S)$, характеризуемое одним показателем $p \geqslant 0$, что в нашей схеме получается для уравнения (2.1) с эллиптическим оператором $L = \mathscr{P} \geqslant 0$ порядка $2p$ в отвечающем ему $\mathscr{F} = W$, или для общего эллиптического оператора L порядка p, в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$, или, скажем, это может быть $X(S) = W_2^{-p}(S)$ с мультипоказателем $p = (l, 1)$ для параболического уравнения (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Au = f \tag{2.25}$$

в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ с производной $\partial/\partial r$ по временному переменному $r > r_0$ и эллиптическим оператором $A \geqslant 0$ порядка $l = 2q$, действующим по группе $s \in R^{d-1}$ пространственных переменных в $t = (s, r)$.

Используя наше общее вспомогательное предложение, устанавливающее полноту и согласованность граничных условий на основе разрешимости соответствующей детерминированной граничной задачи, мы можем установить разрешимость аналогичной стохастической граничной задачи.

К такого рода граничным задачам для параболического уравнения (2.25) с $u \in W(S) = W_2^{(2q,1)}(S)$ можно отнести, например, задачу Коши в полупространстве $S = R^{d-1} \times (r_0, \infty)$ с условиями Коши, в начальный момент «времени» $r = r_0$ задающими (обобщенный) след

$$u = u^+$$

с помощью надлежащего эталона, в качестве которого можно взять произвольное $u^+ \in \mathbf{W}(S)$; сюда же можно отнести первую краевую задачу в цилиндрической области $S = G \times (r_0, r_1)$ с заданным следом

$$u = u^+$$

при $r = r_0$ на основании $G \subseteq R^{d-1}$ цилиндра S и (обобщенным) следом

$$\partial^k u = \partial^k u^+, \qquad k = 0, \ldots, q - 1,$$

самой функции и ее нормальных производных на боковой поверхности этого цилиндра (напомним, что $2q = l$ есть порядок эллиптического оператора A в (2.25)).

Отметим, что решение $u = \xi$ задачи Коши дает решение соответствующего стохастического уравнения Ито

$$d\xi_r + A\xi_r dr = d\eta_r, \tag{2.26}$$

как об этом уже говорилось при рассмотрении (1.18), но здесь уже при произвольных начальных условиях

$$\xi_{r_0} = \xi_{r_0}^+$$

— это решение $u=\xi$ представляется следом $\xi_r=u_r$, функции $u=\xi\in W_2^{(2q,1)}(S)$ $r\geqslant r_0$, (см. по этому поводу (4.20)—(4.23) гл. I).

Добавим, что, рассматривая стохастическое уравнение Ито со случайным процессом ξ_r, $r>r_0$, скажем, в фазовом пространстве $\mathscr{L}_2(G)$, для линейного уравнения типа (2.26) в нашей схеме можно поставить и первую краевую задачу, обратившись к соответствующему параболическому уравнению (2.25) со случайным источником f, который получается из правой части уравнения (2.26) с $\eta_r\in\mathscr{L}_2(G)$ так же, как это было указано в примере с уравнением (1.18). Соответствующее $u\in\in\mathbf{W}_2^{(2q,1)}(S)$ в $S=G\times(r_0,\infty)$ имеет при фиксированном r след

$$u_r=\xi_r\in\mathbf{W}_2^q(G),$$

который в области G является функцией с определенным следом ее самой и ее нормальных производных

$$\partial^k u_r=\partial^k\xi_r,\quad k\leqslant q-1,$$

на границе ∂G, что позволяет в форме первой краевой задачи поставить граничные условия

$$\xi_{r_0}=\xi_{r_0}^+$$

при $r=r_0$ на основании G цилиндра $S=G\times(r_0,\infty)$ и

$$\partial^k\xi_r=\partial^k\xi_r^+,\quad k=0,\ldots,q-1,$$

на его боковой поверхности*).

Покажем еще, как в нашей общей схеме можно использовать известные результаты по разрешимости граничных задач для параболического уравнения (2.25) с оператором $A=-\Delta$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f.$$

*) Один из возможных подходов к однородным (нулевым) граничным условиям для эволюционных стохастических уравнений сводится к выбору надлежащего функционального пространства как пространства состояний описываемого уравнением случайного процесса — см., например, Гихман И. И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн.— 1979.— Т. 31, № 5.— С. 483—489 (обзор результатов в этом направлении можно найти в книге Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы.— М.: Наука, 1983).

Рассмотрим две известные граничные задачи для этого уравнения в ограниченном цилиндре $S = G \times (r_0, r_1)$, $G \subseteq R^{d-1}$. В обеих из них при $r = r_0$ на основании цилиндра S задается

$$u_{r_0} = u_{r_0}^+;$$

в *первой смешанной задаче* (типа Коши — Дирихле) на боковой поверхности цилиндра S задается еще

$$u_r = u_r^+,$$

а во *второй смешанной задаче* (типа Коши — Неймана) — нормальная производная

$$\partial u_r = \partial u_r^+;$$

уточним, что мы имеем в виду граничные условия, заданные с помощью следа функции $u^+ \in \mathbf{W}_2^{(2,1)}(S)$ и ее нормальной производной.

В детерминированном случае относительно этих задач известно *), что для любой правой части $f \in \mathscr{L}_2(S)$ при однородных граничных условиях с $u^+ = 0$ имеется единственное решение $u \in W(S) = W_2^{(2,1)}(S)$. Это означает, что в обеих поставленных задачах граничные условия, задающие соответствующую часть полного следа функций $u \in \mathbf{W}_2^{(2,1)}(S)$, являются в нашей схеме условиями типа (2.14), и мы приходим к следующему предложению.

Теорема. *Стохастические первая и вторая смешанные задачи имеют единственное решение $u = \xi \in \mathbf{W}_2^{(2,1)}(S)$ для любого стохастического источника $f = \eta$, непрерывного по пробным $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, при произвольных стохастических граничных условиях с любым $u^+ \in \mathbf{W}_2^{(2,1)}(S)$.*

Отметим, что обобщенное случайное поле $u = \xi$, которое возникает как единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$ уравнения (2.25) в цилиндре $S = G \times (r_0, r_1)$ с теми или иными граничными условиями, может быть продолжено при $r_1 \to \infty$ на область $G \times (r_0, \infty)$. На каждом сечении $G \times \{r\}$ будет след $u_r = \xi_r$, который может быть описан,

*) См., например, Михайлов В. П. Теория дифференциальных уравнений в частных производных.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983.

например, с помощью пробных функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в области G, соответственно представляя там при каждом $r \geqslant r_0$ обобщенное случайное поле

$$\xi_r = (\varphi, \xi_r), \quad \varphi \in C_0^\infty(G);$$

как уже фактически отмечалось ранее, само поле ξ в области $G \times (r_0, \infty)$ однозначно определяется по случайному процессу ξ_r, $r \geqslant r_0$,— скажем, при всех пробных функциях вида $x = \varphi \otimes \alpha$ в прямом произведении $G \times \times (r_0, \infty)$ мы имеем

$$(\varphi \otimes \alpha, \xi) = \int \alpha(r)(\varphi, \xi_r)\,d\tau.$$

Предположим, что обобщенная случайная функция $f = \eta$ в правой части (2.25) есть производная случайного процесса w_r, $r \geqslant r_0$ с фазовым состоянием, которое может быть описано как обобщенное случайное поле

$$w_r = (\varphi, w_r), \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

в области G, точнее,

$$(\varphi \otimes \alpha, \eta) = -\int \alpha'(r)(\varphi, w_r)\,dr$$

на полной системе всех пробных функций вида $\varphi \otimes \alpha$ в $G \times (r_0, \infty)$. Согласно обобщенному дифференциальному уравнению (2.25), мы имеем тогда

$$-\int \alpha'(r)(\varphi, \xi_r)\,dr - \int \alpha(r)(A^*\varphi, \xi_r)\,dr = \\ = -\int \alpha'(r)(\varphi, w_r)\,dr,$$

что при $w_{r_0} = 0$ дает нам

$$(\varphi, \xi_r) - (\varphi, \xi_{r_0}) - \int_{r_0}^{r} (A^*\varphi, \xi_r)\,dr = (\varphi, w_r), \quad r \geqslant r_0,$$

а это интегральное уравнение определяет указанное в (2.26) *стохастическое уравнение Ито*

$$d\xi_r = A\xi_r dr + dw_r.$$

Таким образом, предложенная в (2.25)—(2.26) вероятностная модель дает нам *стохастическое уравнение Ито с неоднородными стохастическими граничными условиями.*

§ 3. Однородные уравнения

1° Общий тип разрешимых граничных задач; точные и приближенные решения. Обратимся к общему *однородному уравнению* (2.1) с правой частью $f=0$,

$$Lu = 0 \tag{3.1}$$

в области S, при произвольно заданных граничных условиях (2.10) того или иного типа $X^+(\Gamma)$,

$$(x, u) = (x, u^+), \quad x \in X^+(\Gamma). \tag{3.2}$$

С помощью выбранной системы граничных пробных $x \in X^+(\Gamma)$ в (3.2) задаются значения линейной непрерывной по x функции $u^+ = (x, u^+)$, которая при указанных свойствах линейности и непрерывности в остальном является произвольной — скажем, можно считать, что граничные условия (3.2) предписывают для искомого решения $u \in \mathbf{W}(S)$ такие же граничные значения (x, u), $x \in X^+(\Gamma)$, как и у произвольно данного эталона $u^+ \in \mathbf{W}(S)$. Понятно, что задание в (3.2) линейной непрерывной функции $(x, u) = (x, u^+)$ на той или иной системе $x \in X^+(\Gamma)$ однозначно определяет значения $(x, u) = (x, u^+)$ на всех x из замкнутой линейной оболочки исходного $X^+(\Gamma)$, так что, не ограничивая общности, можно считать $X^+(\Gamma)$ подпространством в граничном пространстве $X(\Gamma)$ всех обобщенных пробных $x \in X(S)$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$ области S.

Мы уже отмечали, что в функциональном классе $W(S)$ детерминированных функций общие граничные условия (3.2) эквивалентным образом могут быть заданы с помощью граничного оператора L_0 на $W(S)$ в форме

$$L_0(u - u^+) = 0 \tag{3.2$'$}$$

с данным эталоном $u^+ \in W(S)$ — для данных в этой форме граничных условий соответствующее $X^+(\Gamma)$ в сопряженном пространстве $X(S) = W(S)^*$ есть аннулятор ядра оператора L_0 в $W(S)$.

Допустим, что детерминированная граничная задача (3.1), (3.2) при произвольном $u^+ \in W(S)$ имеет единственное решение $u \in W(S)$. Это означает, что всякий линейный непрерывный функционал $u = (x, u)$, равный 0 на $x \in L^*C_0^\infty(S)$ и произвольно заданный на $x \in X^+(\Gamma)$, единственным образом продолжается на все пространство $x \in X(S)$, а это в свою очередь означает, что подпространства

$$X^-(S) = \left[L^* C_0^\infty(S)\right]$$

и $X^+(\Gamma)$ образуют прямую сумму

$$X^-(S) + X^+(\Gamma) = X(S) \qquad (3.3)$$

с $X^-(S) = \left[\mathscr{P} C_0^\infty(S)\right] \oplus X^-(\Gamma)$, где, согласно ортогональному разложению (2.4), подпространство $\left[\mathscr{P} C_0^\infty(S)\right]$ ортогонально всему граничному $X(\Gamma)$, и, следовательно, $X^-(\Gamma)$ с $X^+(\Gamma)$ образуют прямую сумму

$$X^-(\Gamma) + X^+(\Gamma) = X(\Gamma), \qquad (3.3)'$$

причем угол $\theta \neq 0$ между $X^-(\Gamma)$ и $X^+(\Gamma)$ равен углу между $X^-(S)$ и $X^+(\Gamma)$. При произвольных граничных условиях типа $X^+(\Gamma)$ с указанным в (3.3) свойством общее неоднородное уравнение

$$Lu = f$$

с произвольным f имеет единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$, определяемое формулой

$$(x, u) = (g, f) + (x^+, u^+), \quad x \in X(S), \qquad (3.4)$$

где $(g, f) = (x^-, u)$, $(x^+, u^+) = (x^+, u)$ задают $u \in \mathbf{W}(S)$ на компонентах $x^- = L^* g \in X^-(S)$ с $g \in \mathscr{F}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$ и $x^+ \in X^+(\Gamma)$ в разложении $x = x^- + x^+$ произвольного $x \in X(S)$; очевидно, что первое слагаемое в (3.4) представляет *общее решение*

$$u = (x, u) = (x^-, u) = (g, f), \quad x \in X(S), \qquad (3.5)$$

неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями типа $X^+(\Gamma)$, а второе слагаемое — *общее решение*

$$u = (x, u) = (x^+, u) = (x^+, u^+), \quad x \in X(S), \qquad (3.6)$$

однородного уравнения с произвольными граничными условиями.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *При условии, что однородная детерминированная задача* (3.1), (3.2)′ *имеет единственное решение, общая стохастическая граничная задача того же ти-*

на $X^+(\Gamma)$ также имеет единственное решение $u \in \mathbf{W}(S)$, определяемое формулой (3.4).

Отметим, что в нашей схеме для уравнения (2.1), (3.1) с оператором $L = \mathscr{P} \geqslant 0$ на соответствующем пространстве $\mathscr{F} = W$, когда $X^-(S) = \left[\mathscr{P}C_0^\infty(S)\right]$ и в прямой сумме (3.3) граничным подпространством $X^+(\Gamma) \subseteq \subseteq X(\Gamma)$ может быть лишь само $X(\Gamma)$ (см. (2.5), (2.6)), имеющей единственное решение однородной граничной задачей типа (3.2), (3.2)′ является *обобщенная задача Дирихле* с

$$X^+(\Gamma) = X_0^+(\Gamma) = X(\Gamma);$$

в схеме же с общим дифференциальным оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ мы имеем разнообразие граничных задач типа (3.2), (3.2)′, имеющих единственное решение при произвольно заданных граничных условиях.

Отметим также, что предложенная выше теорема распространяется на случай граничных задач общего типа $X^+(\Gamma)$, когда произвольность граничных условий тем не менее предполагает их согласованность с $f = 0$ — см. (2.13), (2.13)′. Примером здесь может служить задача Неймана для уравнения Лапласа с $L = \Delta$ в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$, когда на границе $\Gamma = \partial S$ произвольно задается (обобщенная) нормальная производная

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^+}{\partial n},$$

согласованность которой с $f = 0$ означает, что

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u^+}{\partial n} = 0;$$

в качестве соответствующего $X^+(\Gamma)$ при представлении этих граничных условий в форме (3.2)′ можно взять систему обобщенных пробных

$$x = (\varphi, x) = \int\limits_\Gamma x(s)\partial\varphi ds, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

из соболевского $X(S) = W_2^{-2}(S)$ с системой весовых функций $x(s)$, $s \in \Gamma$, полностью определяющих соответствующий след нормальных производных ∂u на границе $\Gamma = \partial S$ области $S \subseteq T$ для функций $u \in W(S)$ из соболевского $W(S) = X(S)^* = W_2^2(S)$. □

Выбор граничного подпространства $X^+(\Gamma)$ определяет тип граничных условий (3.2). Поясним еще раз, что мы имеем в виду, на примере оператора Лапласа $L=\Delta$ в пространстве $\mathcal{F}=\mathcal{L}_2$, когда $X(S)=W_2^{-2}(S)$, $W(S)=W_2^2(S)$ есть соболевские пространства — здесь задачи Дирихле, Неймана или смешанная задача получаются при выборе в (3.2) соответствующего $X^+(\Gamma)$.

От одного типа граничных условий всегда можно перейти к другому. Именно, по заданным граничным условиям (3.2) типа $X^+(\Gamma)=X_1^+(\Gamma)$ можно непосредственно определить соответствующие условия любого другого типа $X^+(\Gamma)=X_2^+(\Gamma)$, взяв для $x\in X_2^+(\Gamma)$ разложение $x=x^-+x^+$ на компоненты $x^-\in X^-(\Gamma)$, $x^+\in X_1^+(\Gamma)$ в прямой сумме (3.3) с $X^+(\Gamma)=X_1^+(\Gamma)$ и положив

$$(x,u)=(x^-,u)+(x^+,u)=(x^+,u^+); \tag{3.7}$$

— поясним, для решения $u\in\mathbf{W}(S)$ однородного уравнения (3.1) должно быть $(x^-,u)=0$.

Рассмотрим общую граничную задачу (3.1), (3.2) с *базисной системой* $\{x_k\}$ в граничном подпространстве $X^+(\Gamma)$, определяющем в (3.2) тип граничных условий — мы имеем в виду, что каждый элемент $x\in X^+(\Gamma)$ однозначно представим рядом

$$x=\sum c_k x_k,$$

сильно сходящимся в гильбертовом $X^+(\Gamma)$ с коэффициентами c_k,

$$\sum_k |c_k|^2 \asymp \|x\|^2, \quad x\in X^+(\Gamma),$$

которые могут быть определены формулой

$$c_k=(x,u_k)$$

по *сопряженной системе* $\{u_k\}$ в сопряженном $W(S)=X(S)^*$,

$$(x_j,u_k)=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases} \tag{3.8}$$

поясним: для любого линейного непрерывного функционала $u=(x, u)$ на $x=\sum c_k x_k$ мы имеем сходящийся ряд

$$\sum_k c_k(x_k, u)=(x, u),$$

и это равенство при $u=u_j$ дает $c_j=(x, u_j)$.

Рассматривая (3.8) как граничные условия типа $X^+(\Gamma)$ для детерминированных функций $u=u_k\in W(S)$, задаваемые с помощью базисной системы пробных $x=x_j\in X^+(\Gamma)$, при каждом k мы можем в качестве элемента сопряженной системы $\{u_k\}$ взять единственное решение $u=u_k$ однородного уравнения (3.1). Возьмем *базисную систему* $\{u_k\}$ таких решений детерминированной граничной задачи (3.1), (3.2) типа $X^+(\Gamma)$ и рассмотрим общую граничную задачу этого типа при произвольных граничных условиях, заданных на базисной системе граничных пробных $x_k\in X^+(\Gamma)$ с помощью произвольных

$$(x_k, u)=(x_k, u^+)=\xi_k, \qquad \sum_k E\,|\xi_k|^2<\infty.$$

Теорема. *Общее решение граничной задачи* (3.1), (3.2) *представимо (сильно) сходящимся рядом*

$$u=\sum_k \xi_k u_k \tag{3.9}$$

по базисной системе детерминированных решений $\{u_k\}$ *с данными в граничных условиях величинами* $\{\xi_k\}$.

В самом деле, обратившись к общей формуле (3.6) и взяв разложение

$$x^+=\sum c_k x_k=\sum_k (x^+, u_k)\,x_k$$

для компоненты $x^+\in X^+(\Gamma)$ произвольной пробной функции $x\in X(S)$, получим, что

$$(x, u)=(x^+, u)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\leqslant n} c_k(x_k, u)=\lim\sum_{k\leqslant n}(x^+, u_k)\,\xi_k=$$
$$=\lim\left(x^+, \sum_{k\leqslant n}\xi_k u_k\right)=\lim\left(x, \sum_{k\leqslant n}\xi_k u_k\right)$$

есть предел в $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$ для функций

$$u^{(n)}=\sum_{k\leqslant n}\xi_k u_k, \tag{3.10}$$

точнее, для разности $u - u^{(n)}$ с

$$\left(x, u - u^{(n)}\right) = \left(x^+ - \sum_{k \leqslant n} c_k x_k, u\right)$$

мы имеем

$$E\left|\left(x, u - u^{(n)}\right)\right|^2 \leqslant C \left\| x^+ - \sum_{k \leqslant n} c_k x_k \right\|_X^2. \quad \square \qquad (3.11)$$

2° Гладкость и продолжаемость решений; устранимые особенности. Обобщенную функцию $u \in D^*$ в области S

$$u = (\varphi, u), \qquad \varphi \in D = C_0^\infty(S),$$

условимся называть *L-гармонической*, если она удовлетворяет однородному уравнению (3.1) с дифференциальным оператором L. Так, в представлении (3.9) решения $u = \xi \in W(S)$ общей стохастической граничной задачи (3.1), (3.2) мы имеем его разложение по детерминированным L-гармоническим составляющим $u_k \in W(S)$. В связи с этим отметим важный класс *гипоэллиптических операторов* L, для которых всякое обобщенное решение $u \in D^*$ уравнения $Lu = 0$ в S представляется соответственно гладкой внутри области S функцией $u = u(t)$, $t \in S$; классическим примером может служить оператор Лапласа $L = \Delta$, для которого всякое обобщенное решение $u \in D^*$ уравнения $Lu = 0$ в S представляется гармонической функцией $u = u(t)$, $t \in S$. Естественно здесь возникает вопрос о соответствующей гладкости решения $u = \xi \in \mathbf{W}(S)$ общей стохастической граничной задачи (3.1), (3.2). На этот вопрос сразу же можно ответить, имея в виду надлежащую модификацию $\xi = \xi_\omega$ с реализациями $u = \xi_\omega \in D^*$, представленными обобщенными функциями

$$\xi_\omega = (\varphi, \xi_\omega), \qquad \varphi \in D = C_0^\infty(S),$$

при всех $\omega \in \Omega$: *реализации $\xi_\omega \in D^*$ являются регулярными функциями $\xi_\omega = \xi_\omega(t)$, $t \in S$, той степени гладкости, которая гарантируется соответствующей гипоэллиптичностью дифференциального оператора L в уравнении* (3.1). Это есть следствие следующего общего предложения.

Теорема. *Реализации решения $u = \xi \in \mathbf{W}(S)$ общей стохастической граничной задачи* (3.1), (3.2) *являются L-гармоническими функциями.*

Речь здесь идет о надлежащей модификации обобщенной случайной функции ξ с реализациями $u=\xi_\omega \in D^*$, удовлетворяющими обобщенному уравнению $Lu=0$ в области S (с дифференциальным оператором $L=\sum a_k \partial^k$, имеющим бесконечно-дифференцируемые коэффициенты).

Покажем как выбрать такую модификацию. Для счетной плотной в пространстве $D=C_0^\infty(S)$ совокупности пробных $\varphi \in D$ мы при всех $\omega \in A$ из некоторого $A \subseteq \Omega$ меры $P(A)=1$ имеем

$$(L^*\varphi,\ u)=(L^*\varphi,\ \xi_\omega)=0,$$

и это равенство для исходно взятых $u=\xi_\omega \in D^*$ по непрерывности продолжается на все $\varphi \in D$, что дает нам $u=\xi_\omega$ при каждом $\omega \in A$ как обобщенное решение уравнения $Lu=0$. Подправив $\xi=\xi_\omega$ для остальных $\omega \in \Omega$ — скажем, положив $\xi_\omega=0$, мы получим нужную модификацию $\xi=\xi_\omega \in D^*$, $\omega \in \Omega$. □

Рассмотрим такое свойство, как продолжаемость решения $u=\xi \in \mathbf{W}(S)$ в более широкую область $S_0 \supseteq S$ с сохранением класса $u=\xi \in \mathbf{W}(S_0)$. По самому определению, $\mathbf{W}(S)$ есть сужение возникающего в общей схеме (1.1), (1.2) функционального класса $W=\mathring{\mathbf{W}}(T)$ в области $T \supseteq S$, так что указанного типа продолжение всегда возможно в любую область S_0, $S \subseteq S_0 \subseteq T$.

Именно, $u \in \mathbf{W}(S)$ в нашей схеме отождествляется с линейной непрерывной функцией $u=(x,\ u)$ на пробных $x \in X(S)$ из подпространства $X(S) \subseteq X=\mathring{X}(T)$ в гильбертовом X, которая всегда может быть продолжена до линейной непрерывной функции $u=(x,\ u)$ на всех $x \in X$, определяющей $u \in \mathbf{W}=\mathring{W}(T)$ — скажем, всегда можно взять функцию $(x,\ u)=0$ на ортогональном дополнении к $X(S)$ и линейно доопределить ее на всех $x \in X$. В частности, напомним, что *соболевские пространства* типа $\mathbf{W}(S)=\mathbf{W}_2^p(S)$, $S \subseteq T$, в нашей схеме с выбранным $T \subseteq R^l$ определяются как соответствующее сужение пространства $\mathbf{W}=\mathbf{W}_2^p(T)$, в котором детерминированные функции образуют $W=\mathring{W}_2^p(T)=[C_0^\infty(T)]$, являющееся замыканием функций $u \in C_0^\infty(T)$ по соболевской норме $\|u\|_p$; уточним, что в сопряженном $X=W^*=\mathring{W}_2^{-p}(T)$ мы выделяем подпространство

$X(S)=W_2^{-p}(S)$ всех обобщенных функций $x\in X$ с носителями $\operatorname{supp} x\subseteq[S]$ в замыкании области S и определяем $u\in \mathbf{W}(S)$ как сужение линейной непрерывной функции $u=(x, u)$, $x\in X$, на подпространстве $X(S)$, которое оказывается замыканием $C_0^\infty(S)$ в X. $X(S)=$ $=\left[C_0^\infty(S)\right]$, что позволяет рассматривать общие $u\in$ $\in\mathbf{W}(S)$ как обобщенные (случайные) функции $u=$ $=(x, u)$, $x\in C_0^\infty(S)$.

Продолжаемость решения $u=\xi\in\mathbf{W}(S)$ общей стохастической граничной задачи (3.1), (3.2) позволяет получить это решение, рассматривая соответствующую граничную задачу в более широкой области $S_0\supseteq S$, которая по тем или иным причинам может быть более предпочтительной (скажем, S_0 имеет более гладкую границу и т. п.). Пусть S получается из S_0 исключением некоторого (замкнутого) множества γ,

$$S=S_0\setminus\gamma.$$

Условимся называть γ *устранимой особенностью*, если всякое решение однородного уравнения (3.1) в S, иначе говоря, всякая L-гармоническая в области S функция $u\in\mathbf{W}(S)$, продолжаемая, как мы знаем, до функции $u\in\mathbf{W}(S_0)$, при любом продолжении дает L-гармоническую функцию в области S_0 (удовлетворяющую в S_0 уравнению $Lu=0$). Спрашивается, как охарактеризовать множество γ, являющееся устранимой особенностью. На этот вопрос можно сразу же ответить следующим образом, обратившись к замыканию $\left[C_0^\infty(S)\right]=\mathscr{F}(S)$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F}$, где, согласно нашему общему подходу (1.1), (1.2), действует дифференциальный оператор L^*. Именно, свойство L-гармоничности в области S означает, что

$$(L^*g, u)=0, \quad g\in\mathscr{F}(S),$$

и обязательность такого свойства в области $S_0\supseteq S$ диктует равенство

$$[L^*\mathscr{F}(S_0)]=[L^*\mathscr{F}(S)],$$

которое будет выполнено при условии равенства

$$\left[C_0^\infty(S)\right]=\left[C_0^\infty(S_0)\right] \tag{3.12}$$

в $\mathscr{F}$, причем указанное условие необходимо в случае невырожденного на подпространстве $\mathscr{F}(S) \subseteq \mathscr{F}$ оператора L^*.

Напомним, что в нашей схеме с оператором $L = \mathscr{P} \geqslant 0$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F} = W = \overset{\circ}{W}(T)$ мы всегда имеем $L^* = L$ унитарным, а для общего оператора L в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ невырожденность L^* на подпространстве $\mathscr{F}(S) = \mathscr{L}_2(S)$ в области S с замыканием $[S] \subset T$ можно считать случаем общего положения — см. по этому поводу (2.16).

Сформулируем указанный в (3.12) результат *).

Теорема. *Множество γ представляет устранимую особенность для L-гармонических функций, когда $C_0^\infty(S_0 \setminus \gamma)$ является плотным в $\mathscr{F}(S_0) = [C_0^\infty(S_0)]$, что является необходимым для устранимости γ в случае дифференциального оператора L с невырожденным L^* на $\mathscr{F}(S_0)$.*

Как следствие, для дифференциального оператора L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ получается, что *всякое (замкнутое) множество γ лебеговой меры 0 представляет для L-гармонических функций устранимую особенность.*

Проиллюстрируем это на простейшем примере оператора $L = d/dt$ в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ на полупрямой $T = (0, \infty)$, когда речь идет о конечном интервале $S_0 = (a, b) \subset T$ с особой точкой γ, $a < \gamma < b$; здесь для $S = S_0 \setminus \gamma$ мы имеем соболевский класс $W(S) = W_2^1(S)$ как сужение соответствующего $W(S) = W_2^1(S_0)$, так что всякая L-гармоническая в $S = S_0 \setminus \gamma$ функция $u \in W_2^1(S)$ подчиняется требованию продолжаемости до непрерывной функции $u \in W_2^1(S_0)$ и есть постоянная на всем интервале $S_0 = (a, b)$.

В противоположность этому, скажем, для оператора $L = \mathscr{P} = -d^2/dt^2$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F} = W = \overset{\circ}{W}(T)$ с $W(S_0) = W_2^1(S_0)$ особая точка γ уже не является устранимой — каждая ломаная, представляющая функцию $u \in W_2^1(S_0)$, является L-гармонической в

*) В анализе и теории дифференциальных уравнений имеются самые разные постановки вопросов об «устранимых особенностях» для тех или иных функциональных классов — укажем для примера Hedberg L. I. Spectral syntesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions to the Dirichlet problem // Acta Math.— 1985.— V. 147.— P. 237—264.

$S=S_0\backslash\gamma$, но не является таковой во всем интервале $S_0=(a, b)$. □

Как уже отмечалось, решение $u\in\mathbf{W}(S)$ общей граничной задачи (3.1), (3.2) в области $S=S_0\backslash\gamma$, продолжаемое до функции $u\in W(S_0)$ в S_0, может быть получено путем решения надлежащей граничной задачи в области S_0. В случае устранимой особенности γ любое продолжение $u\in\mathbf{W}(S_0)$ будет удовлетворять в S_0 тому же однородному уравнению (3.1); в случае произвольного γ в области S_0 придется иметь дело с неоднородным уравнением

$$Lu=f, \tag{3.13}$$

для которого правая часть f и соответствующие граничные условия на $\Gamma_0=\partial S_0$ определяются исходными граничными условиями (3.2) на $\Gamma=\partial S$. Переход от $S=S_0\backslash\gamma$ к новой области $S=S_0$ наиболее просто выглядит для граничных условий (3.2), преобразованных к типу $X^+(\Gamma)=X_0^+(\Gamma)$; по поводу преобразования граничных условий см. (3.7). Остановимся на этом подробнее для уравнения (3.1) в схеме с общим дифференциальным оператором L в пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ при таком $T\subseteq R^d$, что сопряженный оператор L^* является невырожденным на $\mathscr{F}$. Тогда, как мы знаем, граничное подпространство $X_0^+(\Gamma)$ состоит из обобщенных пробных функций вида $x=L^*g$ с $g\in\mathscr{L}_2(T)$, где $g=0$ в области S и $L^*g=0$ в дополнительной области $S^+=T\backslash[S]$ — см. (2.9), (2.12). В соответствии с этим граничные условия (3.2) типа $X^+(\Gamma)=X_0^+(\Gamma)$ определяют на указанных $g\in\mathscr{L}_2(T)$ функцию f,

$$(g, f)\equiv(x, u^+)=(x, u), \quad x=L^*g,$$

которая может быть продолжена до линейной непрерывной на всем $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ функции $f=(g, f)$, равной 0 в области S, $(g, f)=0$ при $g\in\mathscr{L}_2(S)$. Формула

$$(x, u)=(g, f), \quad x=L^*g, \quad g\in\mathscr{L}_2(T),$$

задает продолжение определяемой в (3.1), (3.2) функции $u\in\mathbf{W}(S)$ на всю область T, и для этого продолжения $u\in\mathbf{W}(S_0)$ в области $S_0\subseteq T$ мы имеем указанное в (3.13) дифференциальное уравнение с определяемыми на границе $\Gamma_0=\partial S_0$ граничными условиями

$$(x, u)=(x, u^+)\equiv(g, f), \quad x=L^*g\in X_0^+(\Gamma_0), \tag{3.14}$$

того же типа, что и исходные условия (3.2) с $X^+(\Gamma) = X_0^+(\Gamma)$

Отметим, что общей моделью граничной задачи (3.1), (3.2) с граничными условиями указанного в (3.14) типа $X^+(\Gamma) = X_0^+(\Gamma)$ может служить обобщенное случайное поле $u = \xi \in \mathbf{W}$, описываемое в соответствующей области $T \subseteq R^d$ общим уравнением $Lu = f$ со случайным источником f вне рассматриваемой области $S \subseteq T$, точнее, с $f = 0$ в S (см. по этому поводу § 1); поясним: в области S это $u = \xi$ удовлетворяет однородному уравнению (3.1), для которого граничные условия (3.2) могут быть сформированы по данному f как

$$(x, u) = (x, u^+) = (g, f) \tag{3.15}$$

с помощью обобщенных пробных $x = L^*g$, отвечающих $g \in \mathscr{L}_2(T)$, $g = 0$ в S и $L^*g = 0$ в S^+.

Для общей граничной задачи (3.1), (3.2) с граничными условиями типа (3.15) особенно наглядно выделяется *непрерывная зависимость решения* $u \in \mathbf{W}(S)$ *от соответствующего* f, которая, например, в детерминированных задачах с $f \in \mathscr{L}_2(T)$ позволяет получить сколь угодно точное приближение для искомого $u \in \mathbf{W}(S)$, заменив в рассматриваемой задаче f на достаточно гладкую функцию, надлежаще приближающую f в $\mathscr{L}_2(T)$.

3° **Продолжаемость и предельное поведение решений.** Рассмотрим следующую модельную задачу. Представим, что в области $T \subseteq R^d$ имеется случайное поле, которое описывается обобщенной случайной функцией $u = \xi$, связанной со случайным источником $f = \eta$ (действующим вне области $S \subseteq T$) дифференциальным уравнением

$$Lu = f,$$

с единственным решением $u = \xi \in \mathbf{W}$ в соответствующем классе $\mathbf{W}$ (см. § 1); рассматривая это уравнение в схеме с оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$, имеющем невырожденный на $\mathscr{F}$ сопряженный оператор L^*, в области $S \subseteq T$ можно описать $u = \xi \in \mathbf{W}(S)$ как единственное решение граничной задачи (3.1), (3.2) с $f = 0$ в S и граничными условиями типа $X^+(\Gamma) = X_0^+(\Gamma)$ на границе $\Gamma = \partial S$ — см. (3.15). Представим теперь, что область S имеет сложную сильно гранулированную структуру, скажем, она получается из некоторой простой области S_0 как $S = S_0 \setminus \gamma$ исключением замкнутого γ, состоящего из большого числа мелких гранул, плотно распределенных в S_0.

Спрашивается, а что получится, если попытаться решить аналогичную граничную задачу (3.1), (3.2) в простой области S_0, рассматривая ее при «в целом малом γ» как своего рода приближение для области $S = S_0 \setminus \gamma$?

Как мы знаем, решение исходной граничной задачи (3.1), (3.2) может быть получено с помощью решения соответствующей граничной задачи (3.13), (3.14) в области S_0, и непосредственно видно, что если лебегова мера $\operatorname{mes}\gamma$ в R^d достаточно мала, то правая часть f в уравнении (3.13),

$$f = wf, \quad w = 1_\gamma,$$

является соответственно малой, и соответственно будет малой разность между решением $u \in \mathbf{W}(S_0)$ в (3.13), (3.14) и решением однородной граничной задачи (3.1), (3.2) в области S_0; по поводу произведения wf с индикатором $w = 1_\gamma$ множества γ нужно пояснить, что для обобщенной случайной функции $f = (g, f)$ с пробными $g \in \mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ *определено* умножение на ограниченные функции w, а именно

$$(g, wf) = (wg, f), \quad g \in \mathscr{F}.$$

Можно поставить общий вопрос о предельном поведении решений $u = u_n$ граничной задачи (3.1), (3.2) во все более сложных областях $S = S_n$,

$$S_n = S_0 \setminus \gamma_n$$

(со все более плотным в S_0 множеством $\gamma = \gamma_n$ из все более мелких гранул)*). Именно, при каких условиях на γ_n имеется слабый/сильный предел решений $u = \lim u_n$ и, если он есть, является ли предельная функция $u = \lim u_n$ решением соответствующей граничной задачи? Уточним, что мы имеем в виду слабую/сильную сходимость $u_n \in \mathbf{W}(S_0)$ как функций со значениями в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ случайных величин на вероят-

---

*) Вопросы такого рода рассматривались в самой разной постановке — см., например, Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелко зернистой границей.— Киев: Наукова думка, 1974; Papanicolaü G., Varadhan C. R. S., Diffusions in regions with many small hols/Notes Control.— Inform. Sci.— 1980.— V. 25.

ностном Ω, где каждая функция $u = u_n$, исходно определенная в своей области $S_n = S_0 \setminus \gamma_n$, доопределена в общей при всех n области S_0 как решение соответствующего уравнения (3.13) вида

$$Lu = w_n f \tag{3.16}$$

с индикатором $w_n = 1_{\gamma_n}$ множества γ_n при граничных условиях (3.14).

Согласно общей формуле (3.4), от переменного γ_n зависит лишь та часть в $u = u_n$, что является решением уравнения (3.16) при нулевых граничных условиях, которая для каждой пробной функции $x \in X(S)$ в ее разложении $x = x^- + x^+$ на $x^- = L^*g$, $g \in \mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$, и $x^+ \in X_0^+(\Gamma_0)$ дает

$$(x^-, u_n) = (w_n g, f).$$

В случае, например, белого шума $f = \eta$ из этой формулы непосредственно видно, что сильная сходимость решений равносильна сильной сходимости функций $w_n g$ для каждого g в пространстве $\mathscr{L}_2(S_0)$; видно также, что при указанной сходимости $w_n g$ сильная сходимость решений будет в случае любого источника f. Легко проверить также, что сильная сходимость $w_n g = 1_{\gamma_n} g$ при каждом g в $\mathscr{L}_2(S_0)$ равносильна наличию такого предельного множества

$$\gamma = \lim \gamma_n, \tag{3.17}$$

что лебегова мера $\operatorname{mes}[(\gamma_n \circ \gamma) \cap B] \to 0$ для симметрической разности $\gamma_n \circ \gamma = (\gamma_n \setminus \gamma) \cup (\gamma \setminus \gamma_n)$ при каждом ограниченном $B \subseteq S_0$, причем в качестве предельной функции при сходимости $w_n g$ будет $wg = \lim w_n g$ с индикатором

$$w = 1_\gamma$$

предельного множества γ: поясним: в силу равномерной по n ограниченности

$$\| w_n g \|_{\mathscr{L}_2} \leqslant \| g \|_{\mathscr{L}_2}$$

сходимость $w_n g$ при всех $g \in \mathscr{L}_2(S_0)$ равносильна сходимости при $g = 1_B$ для полной в $\mathscr{L}_2(S_0)$ системы индикаторов ограниченных $B \subseteq S_0$. Сильная сходимость $w_n g \to$ $\to wg$ при всех $g \in \mathscr{L}_2(S_0)$ дает

$$\lim (g, w_n f) = \lim (w_n g, f) = (wg, f) = (g, wf),$$

и в соответствии с этим сильный предел решений $\lim u_n = u$, определяющий

$$\lim (x^-, u_n) = \lim (g, w_n f) = (g, wf) = (x^-, u),$$

$$x \in X(S_0),$$

представляет собой функцию $u \in \mathbf{W}(S_0)$, которая есть решение предельного для (3.16) уравнения

$$Lu = wf \tag{3.18}$$

при имеющихся у нас граничных условиях (3.14).

Перейдем теперь к *слабой* сходимости $u_n \in \mathbf{W}(S_0)$, имея в виду слабую сходимость величин (x, u_n) в гильбертовом пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω. Наличие такой сходимости при любом f, в частности при *детерминированных* $f \in \mathscr{L}_2(S_0)$, влечет сходимость детерминированных величин $(w_n g, f)$, которая при $f = g = 1_B$ дает предел

$$\lim \operatorname{mes} (\gamma_n \cap B) = \int_B w(t)\, dt \tag{3.19}$$

для каждого ограниченного $B \subseteq S_0$; поясним: указанный предел определяет аддитивную функцию множеств $B \subseteq S_0$, абсолютно непрерывную относительно лебеговой меры $\operatorname{mes} B$ и представимую указанным в (3.19) интегралом от соответствующей *плотности* w, $0 \leqslant w \leqslant 1$. Легко видеть, что наличие предела (3.19) для каждого ограниченного множества $B \subseteq S_0$ означает также существование

$$\lim (w_n g, f) = (wg, f)$$

для любых f, g из полной системы индикаторных функций $\{1_B\}$, и в силу равномерной ограниченности

$$\| w_n g \|_{\mathscr{L}_2} \leqslant \| g \|_{\mathscr{L}_2}$$

это *равносильно слабой сходимости* $w_n g \to wg$ для каждого g в $\mathscr{L}_2(S_0)$. В свою очередь такая сходимость при любом *случайном источнике* f и произвольном $\eta \in H$ дает сходимость линейного непрерывного функционала

$$E(w_n g, f)\eta \to E(wg, f)\eta$$

от $w_n g \to wg$, а это означает слабую сходимость решений $u_n \to u$ к функции $u \in \mathbf{W}(S_0)$, определяемой как

$$(x^-, u) = (wg, f), \quad x \in X(S_0),$$

и представляющей, согласно общей формуле (3.4), решение предельного для (3.16) уравнения (3.18) с граничными условиями (3.14).

Добавим к этому еще тот факт, что *плотность* $w = w(t)$, $t \in S_0$, *в предельном соотношении* (3.19), *для каждого ограниченного* $B \subseteq S_0$ *при почти всех* $t \in B$ *определяемая как слабый предел*

$$w1_B = \lim w_n 1_B = \lim 1_{\gamma_n \cap B},$$

может быть произвольной функцией w, $0 \leqslant w(t) \leqslant 1$. В самом деле, возьмем систему непересекающихся множеств B_n^j, $j = 0, 1, \ldots, n$, которая асимптотически полна в том смысле, что для любого $g = 1_B$ из полной в $\mathscr{L}_2(S_0)$ системы $\{1_B\}$ найдутся соответствующие объединения $B_n = \bigcup B_n^j$ с $1_{B_n} \to 1_B$. Возьмем теперь произвольную функцию w, $0 \leqslant w \leqslant 1$, и для непересекающихся

$$C_n^k = \left\{t\colon \frac{k-1}{n} < w(t) \leqslant \frac{k}{n}\right\}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

образуем

$$A_n^{jk} = B_n^j \cap C_n^k, \quad j, k = 0, \ldots, n.$$

Наконец, выберем замкнутые $\gamma_n^{jk} \subseteq A_n^{jk}$ с лебеговой мерой

$$\operatorname{mes} \gamma_n^{jk} = \frac{k}{n} \operatorname{mes} A_n^{jk} + o\left(n^{-2}\right)$$

и положим

$$\gamma_n = \bigcup_{j,k} \gamma_n^{j,k}.$$

Очевидно, что для любого $g = 1_B = \lim 1_{B_n}$ с соответствующим объединением $B_n = \bigcup A_n^{jk}$

$$\lim \operatorname{mes}(\gamma_n \cap B_n) = \lim \sum \frac{k}{n} \operatorname{mes} A_n^{jk} = \lim \int_{B_n} w(t)\,dt = \int_B w(t)\,dt.$$

Подведем итог.

Теорема. *Для слабой/сильной сходимости решений в областях* $S_n = S_0 \setminus \gamma_n$ *(при произвольном случайном источнике* f *вне* S_n*) необходимо и достаточно условие* (3.19)/(3.17); *при этом предельная для этих решений функция получается из решения* $u \in \mathbf{W}(S_0)$ *предельного уравнения* (3.18) *в области* S_0 *с предельной для индикаторов* $w_n = 1_{\gamma_n}$ *плотностью* $w = \lim w_n$, *которая в зависимости от* γ_n, $n \to \infty$, *может быть произвольной функцией* $0 \leqslant w(t) \leqslant 1$, $t \in S_0$.

Рассмотренную выше модель предельного поведения решений граничных задач в сильно гранулированных областях вида $S_n = S_0 \setminus \gamma_n$ можно пополнить случаем, когда множества γ_n имеют хаотическую структуру, моделируемую некоторым стохастическим механизмом (независимого от случайного источника f).

Представим, например, что $\gamma_n = \bigcup \gamma_n^k$ при каждом n есть объединение шарообразных гранул γ_n^k радиуса r в R^d, $r^d = \lambda/n$ при $n \to \infty$ и постоянном λ, с центрами в случайных точках $\tau_k \in S_0$, независимых и распределенных в области S_0 с плотностью вероятности $p(t)$, $t \in S_0$. Такого рода хаотическая структура γ_n при $n \to \infty$ дает характерный пример соотношения (3.19) со всюду положительной плотностью $w = w(t)$, $t \in S_0$; при взятых выше параметрах она *имеет вид*

$$w(t) = 1 - e^{-\lambda\sigma^2 p(t)}, \quad t \in S_0, \tag{3.20}$$

где σ^2 — объем единичного шара в R^d. Покажем это *).

Используя вероятностное пространство Ω, где определены случайные

$$\tau_k = \tau_k(\omega), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

обратимся к измеримой по совокупности переменных (ω, t) функции

$$1_{\gamma_n}(t) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left[1 - 1_{\gamma_{kn}}(t)\right]$$

---

*) См. Арато Н. Об одной предельной теореме для обобщенных гауссовских случайных полей, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных // Теория вероятн. и ее примен.— 1989.— Т. 24.— С. 409—411.

с индикаторами

$$1_{\gamma_{kn}}(t) = 1_{\{(\omega,t):\ |\tau_k(\omega)-t|\leqslant r\}},$$

при каждом $\omega \in \Omega$ представляющей индикатор $1_{\gamma_n}(t)$, $t \in R^d$, случайного множества

$$\gamma_n = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_{kn} \subseteq R^d,$$

которое в пересечении с ограниченным $B \subseteq S_0$ имеет меру

$$\mu_n = \operatorname{mes}(\gamma_n \cap B) = \int_B 1_{\gamma_n}(t)\,dt.$$

Установим среднеквадратичную сходимость *)

$$\lim_{n\to\infty} \int_B 1_{\gamma_n}(t)\,dt = \int_B \left[1 - e^{-\lambda\sigma^2 p(t)}\right] dt.$$

Рассмотрим случайные величины

$$\mu_n = \int_B \prod_{k=1}^{n} \left[1 - 1_{\gamma_{kn}}(t)\right] dt.$$

Нам нужно установить среднеквадратичную сходимость

$$\lim \mu_n = \int_B e^{-\lambda\sigma^2 p(t)}\,dt$$

Используя независимость случайных τ_k, получаем

$$E\mu_n = \int_B E \prod_{k=1}^{n} \left[1 - 1_{\gamma_{kn}}(t)\right] dt = \int_B \prod_{k=1}^{n} \left[1 - E1_{\gamma_{kn}}(t)\right] dt \sim \\ \sim \int_B \left[1 - \frac{\lambda\sigma^2 p(t)}{n}\right]^n dt \sim \int_B e^{-\lambda\sigma^2 p(t)}\,dt,$$

поскольку

$$E1_{\gamma_{kn}}(t) = \int_{|u-t|\leqslant r} p(u)\,du \sim \frac{\lambda\sigma^2 p(t)}{n}$$

*) Простые оценки позволяют установить также и сходимость при почти всех $\omega \in \Omega$.

при $r^d = \lambda/n$ $(n \to \infty)$. Одновременно имеем

$$E\mu_n^2 = \iint\limits_{B\times B} E \prod_{k=1}^{n} [1 - \gamma_{kn}(s)][1 - \gamma_{kn}(t)]\, ds\, dt \sim$$

$$\sim \iint\limits_{(B\times B)\cap\{|s-t|>2r\}} \left[1 - \frac{\lambda\sigma^2 p(s)}{n} - \frac{\lambda\sigma^2 p(t)}{n}\right]^n ds\, dt \sim$$

$$\sim \int\limits_B \int\limits_B e^{-\lambda\sigma^2 p(s) - \lambda\sigma^2 p(t)}\, ds\, dt = \left[\int\limits_B e^{-\lambda\sigma^2 p(t)}\, dt\right]^2,$$

что дает

$$E\mu_n^2 \sim (E\mu_n)^2$$

и доказывает среднеквадратичную сходимость

$$E\,|\mu_n - E\mu_n|^2 = E\mu_n^2 - (E\mu_n)^2 \to 0$$

при $n \to \infty$.

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. Вероятностные характеристики стохастических граничных задач

1° Среднее значение. Можно представить себе с л у ч а й н о е п о л е ξ, возникающее в области $T \subseteq R^d$ как результат того или иного с л у ч а й н о г о и с т о ч н и к а η, с которым ξ связано обобщенным дифференциальным уравнением

$$L\xi = \eta, \tag{1.1}$$

являясь единственным его решением $\xi \in \mathbf{W}$ в соответствующем функциональном классе $\mathbf{W} = \mathring{\mathbf{W}}(T)$, или, скажем, уравнение (1.1) имеет место в области $S \subseteq T$, где помимо этого для случайного поля ξ на границе $\Gamma = \partial S$ имеются еще граничные условия, выраженные с помощью той или иной системы граничных пробных функций в форме

$$(x, \xi) = (x, \xi^+), \quad x \in X^+(\Gamma) \tag{1.2}$$

— общие схемы такого рода и целый ряд важных примеров были предложены в гл. II.

Можно представить, например, что нас интересует решение $u \in W(S)$ детерминированной граничной задачи:

$$Lu = f \tag{1.3}$$

в области S,

$$(x, u) = (x, u^+), \quad x \in X^+(\Gamma), \tag{1.4}$$

на границе $\Gamma = \partial S$ (где граничные условия могут быть заданы и в какой-то другой эквивалентной форме), но по тем или иным обстоятельствам нам приходится иметь дело с соответствующей стохастической граничной задачей (1.1), (1.2), возникающей в результате появления дополнительных возмущений случайного характера, дающих вместо детерминированных f, u^+ в (1.3), (1.4) соответствующие η, ξ^+ в (1.1), (1.2) со *средними значения-*

ми $E\eta = f$, $E\xi^+ = u^+$ — уточним, что здесь имеются в виду функции

$$E(\varphi, \eta) = (\varphi, f), \quad \varphi \in C_0^\infty(S),$$

и

$$E(x, \xi^+) = (x, u^+), \quad x \in X^+(\Gamma);$$

понятно, что интересующее нас решение $u \in W(S)$ граничной задачи (1.3), (1.4) будет *средним значением* $u = E\xi$ случайного поля $\xi \in \mathbf{W}(S)$ в области S, описываемого стохастической моделью (1.1)—(1.2). Для нее, как и для всякой другой теоретико-вероятностной схемы, возникают задачи определения тех или иных вероятностных характеристик описываемого этой схемой случайного объекта ξ — в предлагаемой модели (1.1), (1.2) одной из важнейших характеристик такого рода (наряду с уже упоминавшимся средним значением) является корреляционная функция случайного поля ξ.

2° Корреляционная функция. Для обобщенного случайного поля $\xi = (\varphi, \xi)$ с пробными $\varphi \in D$ из пространства $D = C_0^\infty(S)$ мы ввели *корреляционный оператор* — обозначим его Q,— при каждом $y \in C_0^\infty(S)$ задающий *корреляционную функцию* $Qy \in D^*$,

$$Qy = (\varphi, Qy), \quad \varphi \in D,$$

которая (при нулевом среднем $E(\varphi, \xi) = 0$) определяет корреляцию

$$E(\varphi, \xi)\overline{(y, \xi)} = (\varphi, Qy).$$

Рассматривая общую стохастическую модель (1.1), (1.2), когда случайное поле $\xi \in \mathbf{W}(S)$ описывается с помощью пробных $x \in X(S)$ из надлежащего гильбертова пространства $X(S) \supseteq C_0^\infty(S)$, удобно ввести *корреляционную функцию* Qy для каждого $y \in X(S)$, положив

$$Qy = (x, Qy) = E(x, \xi)\overline{(y, \xi)}, \quad x \in X(S),$$

что определяет ее как функцию $Qy \in W(S)$ из соответствующего функционального класса $W(S) = X(S)^*$ — здесь мы считаем, что детерминированная часть в (1.1), (1.2) уже исключена, и вместе с $E\eta = 0$, $E\xi^+ = 0$ мы имеем нулевое среднее $E(x, \xi) = 0$, $x \in X(S)$.

Допустим, что случайный источник η в (1.1), представленный обобщенной случайной функцией $\eta = (\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$, имеет корреляционный оператор R. Спрашивается, как найти корреляционный оператор/корреляционную функцию случайного поля ξ? Отвечая на этот вопрос, остановимся на случае, когда действие источника η в (1.1) внутри области S некоррелировано/независимо от предписанных для ξ граничных условий (1.2) на границе $\Gamma = \partial S$. В этом случае

$$\xi = \xi^- + \xi^+$$

есть сумма некоррелированных/независимых ξ^- и ξ^+, из которых $\xi^- \in \mathbf{W}(S)$ получается как решение уравнения (1.1) с нулевыми граничными условиями (1.2), а ξ^+ — как решение однородного уравнения (1.1) с $\eta = 0$ при данных в (1.2) общих граничных условиях — см. по этому поводу § 2 гл. II; уточним, что

$$\xi^- = (x, \xi^-) = (x^-, \xi) = (g, \eta)$$

и

$$\xi^+ = (x, \xi^+) = (x^+, \xi) = (x^+, \xi^+)$$

для пробных $x \in X(S)$ при их представлении $x = x^- + x^+$ с компонентами $x^- = L^*g$, $g \in \mathscr{F}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$, и $x^+ \in X^+(\Gamma)$. Понятно, что используя корреляционные функции Q^-y, Q^+y с корреляционными операторами Q^-, Q^+ компонент ξ^-, ξ^+, мы можем получить

$$Qy = Q^-y + Q^+y$$

с $Q = Q^- + Q^+$.

Напомним, что $\eta = (\varphi, \eta)$ в уравнении (1.1) считается непрерывным по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно соответствующей нормы $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$, и мы имеем $\eta = (g, \eta)$ определенным при всех $g \in \mathscr{F}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$; согласно этому, положим

$$Rg = (\varphi, Rg) = E(\varphi, \eta)\overline{(g, \eta)}, \qquad \varphi \in D = C_0^\infty(S),$$

что определяет *корреляционную функцию* Rg (*с корреляционным оператором* R) как обобщенную функцию $Rg \in D^*$, непрерывную относительно пробных $\varphi \in D$ по норме $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$. Очевидно, что при любом пробном $y \in X(S)$ в его представлении $y = y^- + y^+$ с $y^- = L^*g$, $y^+ \in X^+(\Gamma)$, для корреляционной функции $u = Q^-y = Q^-y^- \in W(S)$ мы имеем

$$(L^*\varphi, u) = E(L^*\varphi, \xi)\overline{(L^*g, \xi)} =$$
$$= E(\varphi, \eta)\overline{(g, \eta)} = (\varphi, Rg), \qquad \varphi \in C_0^\infty(S),$$

и непосредственно видно, что $u=Q^-y$ есть (единственное) решение уравнения (1.3) с

$$f=Rg \tag{1.5}$$

при нулевых граничных условиях (1.4). Очевидно также, что корреляционная функция $u=Q^+y=Q^+y^+\in \in W(S)$ есть решение однородного уравнения (1.3) с $f=0$ при граничных условиях (1.4), определяемых корреляцией

$$(x,\ u^+)=E(x,\ \xi^+)(y^+,\ \xi^+),\quad x\in X^+(\Gamma), \tag{1.6}$$

в стохастических граничных условиях (1.2). В целом же для источника η в (1.1) с корреляционным оператором R, действующим некоррелированно/независимо от граничных условий в (1.2), для любого пробного $y=L^*g+y^+$ с $g\in\mathscr{F}(S)=\left[C_0^\infty(S)\right]$ и $y^+\in X^+(\Gamma)$ получается следующий результат.

Теорема. *Корреляционная функция* $u=Qy\in W(S)$ *есть единственное решение уравнения* (1.3) *с функцией* f *вида* (1.5) *при граничных условиях* (1.4) *с функцией* u^+ *вида* (1.6). □

Рассмотрим общее уравнение (1.1) в области $S=T$, когда для определения $\xi\in\mathbf{W}=\mathring{\mathbf{W}}(T)$ не требуется дополнительных граничных условий. Это уравнение, имеющее вид

$$\mathscr{P}\xi=\eta \tag{1.6$'$}$$

в нашей схеме с оператором $L=\mathscr{P}\geqslant 0$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F}=W=\mathring{W}(T)$, как мы знаем, в схеме с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2(T)$ эквивалентно уравнению (1.6)$'$ с $\mathscr{P}=L^*L\geqslant 0$ и новым источником η, получающимся из исходного $\eta=(g,\eta)$ в (1.1), определенного на всех $g\in\mathscr{L}_2(T)=\left[C_0^\infty(T)\right]$, заменой $g=\varphi$ на $L\varphi,\ \varphi\in C_0^\infty(T)$ — см. § 1 гл. II.

Правая часть $\eta=(\varphi,\ \eta)$ в (1.6)$'$ является непрерывной по $\varphi\in C_0^\infty(T)$ относительно соответствующей нормы $\|\varphi\|_W$ в $\mathscr{F}=W$, и *корреляционный оператор* R, определяющий

$$E(\varphi,\ \eta)\overline{(v,\ \eta)}=(\varphi,\ Rv)$$

при всех $v\in W$, дает нам обобщенную функцию $Rv\in X$ из отвечающего W пространства обобщенных функций $X=\mathscr{P}W$. Перейдя от (1.1) к уравнению (1.6)$'$, при любом пробном $x = \mathscr{P}v$ (с $v \in W$) для *корреляционной функции*

$$u = (\varphi, u) = (\varphi, Qx) = E(\varphi, \xi)\overline{(x, \xi)}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

получим

$$(\mathscr{P}\varphi, u) = (\mathscr{P}\varphi, Qx) = E(\mathscr{P}\varphi, \xi)\overline{(\mathscr{P}v, \xi)} = \\ = E(\varphi, \eta)\overline{(v, \eta)} = (\varphi, Rv),$$

что определяет искомую корреляционную функцию как единственное решение $u \in W = \mathring{W}(T)$ дифференциального уравнения

$$\mathscr{P}u = f \tag{1.7}$$

с правой частью $f = Rv \in X$ в области T.

Рассматривая общее уравнение (1.7), можно использовать $f = Rv$ с $v = \varphi \in C_0^\infty(T)$ для определения искомой корреляционной функции $u = Qx$ с $x = \mathscr{P}v$ при произвольном $v \in W$, воспользовавшись предельным переходом

$$u = Q\mathscr{P}v = \lim Q\mathscr{P}\varphi$$

в пространстве $W = \mathring{W}(T)$ с $\varphi \to v$.

Для примера выделим тот случай, когда в (1.6)′ мы имеем источник «белого шума» на $W = \mathring{W}(T)$ с корреляционным оператором $R = \mathscr{P}$ — он возникает, скажем, в исходной модели (1.1) о общим L при источнике «белого шума» соответственно на $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$; именно в этом случае уравнение (1.7) превращается в равенство

$$\mathscr{P}u = \mathscr{P}v,$$

которое непосредственно дает

$$u = v, \quad Qx = v,$$

при каждом $x = \mathscr{P}v \in X$, так что в указанном случае *корреляционным оператором случайного поля* $\xi \in \mathbf{W}$ *является*

$$Q = \mathscr{P}^{-1}$$

— *обратный оператор к* $\mathscr{P}$: $W \to X$; поясним: равенство

$$(\varphi, Q\mathscr{P}v) = (\varphi, v), \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

дает $Q\mathscr{P}v = v$ при всех $v \in W$, $x = \mathscr{P}v \in X$. Для полуограниченного оператора

$$\mathscr{P}\colon C_0^\infty(T) \to \mathscr{L}_2(T)$$

и его самосопряженного расширения $\mathscr{P}\colon \mathscr{D}_{\mathscr{P}} \to \mathscr{L}_2(T)$ с областью определения $\mathscr{D}_{\mathscr{P}} \subseteq W$ из уравнения (1.7) при $f = Rv \in \mathscr{L}_2(T)$ мы получаем $u = Qf$ с помощью обратного к самосопряженному $\mathscr{P}$ оператора $Q = \mathscr{P}^{-1}$ в пространстве

$$\mathscr{L}_2(T) \subseteq X = [\mathscr{L}_2(T)];$$

понятно, что рассматривая случайное поле $\xi = (x, \xi)$ на пробных $x \in \mathscr{L}_2(T)$, мы имеем

$$E(x, \xi)\overline{(y, \xi)} = (x, Qy)$$

с корреляционным оператором $Q = \mathscr{P}^{-1}$, являющимся ограниченным в пространстве $\mathscr{L}_2(T)$. Здесь, например, рассматривая нашу модель (1.1), (1.6) в ограниченной области $T \subseteq R^d$ с эллиптическим дифференциальным оператором $\mathscr{P}$ порядка $2p$, $p > d/2$, мы имеем $Q = \mathscr{P}^{-1}$ интегральным оператором Гильберта — Шмидта,

$$Qf(t) = \int Q(s, t) f(s)\, ds, \quad t \in T,$$

с ядром $Q(s, t)$, $\int\int |Q(s, t)|^2\, ds\, dt < \infty$ — понятно, что

$$Q(s, t) = E\xi(s)\overline{\xi(t)}, \quad s, t \in T,$$

есть *корреляционная функция* величин $\xi(t) = (x, \xi)$, получающихся с помощью полной в X системы пробных дельта-функций $x = \delta_t$ в точках $t \in T$ и представляющих случайное поле $\xi \in \mathbf{W}$ как $\xi = \xi(t)$, $t \in T$. □

Все сказанное в отношении (1.7) фактически остается в силе (с формальной заменой T на произвольную область $S \subseteq T$) при рассмотрении случайного поля $\xi \in \mathbf{W}(S)$, которое описывается уравнением (1.6)′ в области $S \subseteq T$ и нулевыми граничными условиями

$$(x, \xi) = 0, \quad x \in X(\Gamma),$$

на границе $\Gamma = \partial S$. Именно, здесь, согласно формуле (2.15) гл. II, при любом пробном $x \in X(S)$ в его ортогональном разложении $x = x^- + x^+$ на $x^- = \mathscr{P}g \in X^-(S)$ с $g \in \mathring{W}(S) = [C_0^\infty(S)]$ и $x^+ \in X(\Gamma)$ мы получаем

$$(x, \xi) = (\mathscr{P}\varphi, \xi) = (\varphi, \eta),$$

как и для уравнения (1.6)′ в области $T = S$.

Это можно использовать при рассмотрении уравнения (1.6)′ в области $S \subseteq T$ с общими граничными условиями

$$(x, \xi) = (x, \xi^+), \quad x \in X(\Gamma),$$

когда случайный источник η внутри области S действует некоррелированно независимо от граничных условий на границе $\Gamma = \partial S$. Именно, $\xi \in \mathbf{W}(S)$ в этом случае можно представить в виде суммы $\xi = \xi^- + \xi^+$ некоррелированных независимых компонент ξ^-, $\xi^+ \in \mathbf{W}(S)$, из которых ξ^- получается как решение рассматриваемого уравнения при нулевых граничных условиях, а ξ^+ — как решение однородного уравнения с рассматриваемыми граничными условиями; корреляционный оператор Q случайного поля ξ представим суммой

$$Q = Q^- + Q^+,$$

где Q^- и Q^+ есть соответственно корреляционные операторы компонент ξ^- и ξ^+, из которых относительно Q^- фактически уже говорилось выше, а Q^+ при любом пробном $x \in X(S)$ дает $\mathscr{P}$ — гармоническую корреляционную функцию $u = Q^+x \in W(S)$, являющуюся решением обобщенной задачи Дирихле:

$$\mathscr{P}u = 0$$

в области S с граничными условиями

$$(y, u) = (y, u^+), \quad y \in X(\Gamma),$$

определяемыми корреляцией

$$(y, u^+) = E(y, \xi^+)\overline{(x^+, \xi^+)}$$

для компоненты x^+ в разложении $x = x^- + x^+$ на $x^- \in X^-(S)$, $x^+ \in X(\Gamma)$. Напомним здесь, что при переходе от общей граничной задачи (1.1), (1.2) в схеме с оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ к эквивалентной обобщенной задаче Дирихле для уравнения (1.6)′ с $\mathscr{P} = L^*L$ дополнительно к (1.2) появляются новые граничные условия

$$(x, \xi) = (g, \eta), \quad x \in X^-(\Gamma),$$

где пробные $x \in X(\Gamma)$ имеют вид $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{L}_2(S)$, $L^*g = 0$ в S ($(L\varphi, g) = 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(S)$); в соответствии с этим упомянутое выше условие некоррелированности источника и граничных условий для модели (1.6)′ будет выполнено, если, например, в исходной модели (1.1) мы имеем дело со случайным η типа «белого шума» на пространстве $\mathscr{F}(S)=\mathscr{L}_2(S)$, который некоррелирован с граничными условиями в (1.2) — для такого источника величины $(L\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, некоррелированы с граничными значениями $(x, \xi^+)=(g, \eta)$, $x=L^*g\in X^-(\Gamma)$.

3° Характеристический функционал. Рассматривая общую стохастическую модель (1.1), (1.2), можно представить себе, что случайный источник η в (1.1) воздействует как своего рода хаотическое возмущение, причем это воздействие происходит независимо от граничных условий в (1.2). Представим случайное поле $\xi\in \mathbf{W}(S)$, описываемое такой моделью, в виде суммы

$$\xi=\xi^-+\xi^+$$

независимых компонент $\xi^-, \xi^+\in\mathbf{W}(S)$, из которых ξ^- является решением рассматриваемого уравнения (1.1) с нулевыми граничными условиями (1.2), а ξ^+ — решением однородного уравнения (1.1) с рассматриваемыми граничными условиями (1.2).

Обратимся к $\xi=\xi^-$, в качестве модели для хаотически воздействующего источника взяв обобщенное *случайное поле* $\eta=(\varphi, \eta)$ *с независимыми значениями* — с независимыми величинами (φ, η) для пробных $\varphi\in C_0^\infty(S)$ имеющих непересекающиеся носители supp φ, считая среднее $E(\varphi, \eta)=0$.

Можно представить, например, что в бесконечно малой окрестности каждой точки $t\in S$ мы имеем случайный источник с гауссовской (нормальной) компонентой $\nu(dt)$,

$$E\nu(dt)=0,\quad E|\nu(dt)|^2=F_\nu(dt),$$

— представленной в целом *гауссовской* (*нормальной*) *мерой* $\nu=\nu(dt)$ в области $S\subseteq T\subseteq R^d$, и независимыми при различных $r\in R^1$ компонентами $r\pi(dt\,dr)$ пуассоновского типа,

$$E\pi(dt\,dr)=0,\quad E|\pi(dt\,dr)|^2=F_\pi(dt\,dr),$$

которые в целом описываются центрированной *пуассоновской мерой* $\pi=\pi(dt\,dr)$ в трубчатой области $S\times R\subseteq R^{d+1}$ с $R=R^1\setminus\{0\}$; понятно, что интегральное воздействие этих компонент, независимо действующих при различных $t\in S$, с помощью пробных $\varphi\in$

$\in C_0^\infty(S)$ описывается как

$$(\varphi, \eta) = \int_S \varphi(t)\, \nu(dt) + \int_S \int_R \varphi(t)\, r\pi(dt\, dr), \tag{1.8}$$

где для случайных величин (φ, η) мы имеем

$$E\,|(\varphi, \eta)|^2 = \int |\varphi|^2 F_\nu(dt) + \int\int |\varphi|^2 r^2 F_\pi(dt\, dr).$$

Используя в (1.8) действительные $\eta = (\varphi, \eta)$, укажем *характеристический функционал* $E\,e^{i(\varphi, \eta)}$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$, точнее, его логарифм

$$\log Ee^{i(\varphi,\eta)} = \\ = -\frac{1}{2}\int |\varphi|^2 F_\nu(dt) + \int\int \left[e^{i\varphi(t)r} - 1 - i\varphi(t)\, r\right] F_\pi(dt\, dr). \tag{1.9}$$

Понятно, что при источнике η вида (1.8) мы имеем случайное поле $\xi = \xi^- \in \mathbf{W}(S)$ с

$$(x, \xi) = \int_S g(t)\, \nu(dt) + \int_S \int_R g(t)\, r\pi(dt\, dr)$$

при всех пробных $x = L^*g$, $g \in \mathscr{F} = \left[C_0^\infty(S)\right]$, — напомним, что $\eta = (\varphi, \eta)$ в правой части (1.1) считается непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ в соответствующем $\mathscr{F}$ (см. § 1 гл. II), так что представление (1.8) распространяется с $\varphi \in C_0^\infty(S)$ на произвольные $g \in \mathscr{F}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$. Рассматривая случай пробных $x \in C_0^\infty(S)$ и условно считая для наглядности, что из дифференциального уравнения $L^*g = x$ функция $g \in \mathscr{F}(S)$ определяется с помощью интегрального оператора $Gx = g$ с ядром $G(s, t)$,

$$g(t) = \int_S x(s)\, G(s, t)\, ds, \qquad t \in S,$$

получим

$$(x, \xi) = \int_S \left[\int_S G(s, t)\, \nu(dt)\right] x(s)\, ds + \\ + \int_S \left[\int_S \int_R G(s, t)\, r\pi(dt\, dr)\right] x(s)\, ds; \tag{1.8'}$$

соответственно для действительного случайного поля

$\xi = \xi^-$ характеристический функционал будет описываться формулой

$$\log Ee^{i(x,\xi)} = -\frac{1}{2}\int\limits_S \left[\int\limits_S G(s,t)\,x(s)\,ds\right]^2 F_\nu(dt) + \\ + \int\limits_S \int\limits_R \left[e^{ir\int\limits_S G(s,t)x(s)\,ds} - 1 - \right. \\ \left. - ir\int\limits_S G(s,t)\,x(s)\,dr\right] F_\pi(dt\,dr).\ \square \quad (1.9)'$$

Для общего дифференциального оператора $L = \sum a_k \partial^k$ стохастическая модель (1.1) была нами предложена в схеме, когда L рассматривается в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$ и в соответствии с этим правая часть в (1.1) представляется обобщенной случайной функцией $\eta = (\varphi, \eta)$, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно нормы $\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$. Это накладывает на параметры F_ν, F_π в представлении (1.8) дополнительные условия, которые можно выразить в форме

$$F_\nu(dt) = f_\nu(t)\,dt, \\ F_\pi(dt\,dr) = f_\pi(t, r)\,dt\,F_\pi(dr) \qquad (1.10)$$

с ограниченными

$$f_\nu(t) \leqslant C, \quad \int\limits_R r^2 f_\pi(t, r)\,F_\pi(dr) \leqslant C.$$

Обратившись к стохастической модели (1.1), в которой случайный источник представлен обобщенной функцией $\eta = (\varphi, \eta)$ с независимыми значениями, непрерывной по $\varphi \in C_0^\infty(S)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$, укажем его общий вид.

Теорема. *Общий вид* $\eta = (\varphi, \eta)$ *описывается стохастическим представлением* (1.8), *которое в действительном случае определяется формулой Леви — Хинчина* (1.9) *с параметрами типа* (1.10).

Доказательство основано на том, что $\eta = (\varphi, \eta)$ по непрерывности продолжается на все $\varphi \in \mathscr{F}(S) = \mathscr{L}_2(S)$, при $\varphi = 1_B$ задавая на ограниченных (борелевских) множествах $B \subseteq S$ стохастическую меру $\mu(B) = (1_B, \varphi)$ с независимыми для непересекающихся B значениями $\mu(B)$,

$$E\mu(B)=0, \quad E|\mu(B)|^2<\infty.$$

Из условия непрерывности $E|\mu(B)|^2$ относительно $\varphi=1_B$ в $\mathscr{F}(S)=\mathscr{L}_2(S)$ вытекает, что $\mu(B)$ является безгранично делимой случайной величиной, и, рассматривая действительные величины, согласно общей формуле Леви — Хинчина, мы имеем

$$\log Ee^{i\lambda\mu(B)}=-\frac{1}{2}\lambda^2F_\nu(B)+\int_R\left(e^{i\lambda r}-1-i\lambda r\right)F_\pi(B,dr).$$

В силу равенства

$$\mu(B_1\cup B_2)=\mu(B_1)+\mu(B_2)$$

с независимыми для непересекающихся B_1, $B_2\subseteq S$ слагаемыми в указанном представлении Леви — Хинчина мы имеем $F_\nu(B)$, $F_\pi(B)$ аддитивными функциями от $B\subseteq S$, абсолютно непрерывными относительно σ-конечной меры $m(B)=E|\mu(B)|^2$, с которой они связаны равенством

$$m(B)=F_\nu(B)+\int_R r^2F_\pi(B,dr);$$

точнее, мы имеем F_ν, F_π как σ-конечные меры $F_\nu=F_\nu(dt)$ и $F_\pi=F_\pi(dt\,dr)$ соответственно в области $S\subseteq T\subseteq R^d$ и в произведении $S\times R\subseteq R^{d+1}$ с $R=R^1\setminus\{0\}$. Отсюда для линейных комбинаций $\varphi=\sum\lambda_k1_{B_k}$ индикаторов непересекающихся множеств $B_k\subseteq S$ и отвечающих им случайных величин

$$(\varphi,\eta)=\sum\lambda_k\mu(B_k)$$

получаем

$$\log Ee^{i(\varphi,\eta)}=-\frac{1}{2}\sum_k\lambda_k^2F_\nu(B_k)+$$
$$+\sum_k\int_R\left(e^{i\lambda_kr}-1-i\lambda_kr\right)F_\pi(B_k,dr)=$$
$$=-\frac{1}{2}\int|\varphi|^2F_\nu(dt)+\iint\left[e^{i\varphi(t)r}-1-i\varphi(t)r\right]F_\pi(dt\,dr).$$

Здесь в силу непрерывности случайных величин (φ,η) по $\varphi\in\mathscr{L}_2(S)$ предельным переходам к $\varphi\in C_0^\infty(S)$ и получается формула (1.9). Она указывает, что *распределение вероятностей случайных величин* (φ,η), $\varphi\in$

$\in C_0^\infty(S)$, *такое же, как и в стохастическом представлении* (1.8) с гауссовской мерой $\nu(dt)$ и центрированной пуассоновской мерой $\pi(dt\,dr)$ *). □

Используя шкалу соболевских пространств $W = \mathring{W}_2^p = [C_0^\infty]$, $-\infty < p < \infty$, естественно поставить вопрос об общей структуре обобщенных случайных функций $\eta = (\varphi, \eta)$ с независимыми значениями, непрерывных по $\varphi \in C_0^\infty$ относительно нормы $\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_p$ в W. Простой ответ здесь имеется, по-видимому, лишь для $W = \mathring{W}_2^p$ при $p \leqslant 0$, а именно, для отвечающего $p = 0$ пространства $W = \mathscr{L}_2$ мы имеем общее представление (1.8), а для $W = \mathring{W}_2^p$ при $p < 0$ непрерывных по $\varphi \in W$ случайных функций $\eta = (\varphi, \eta)$ с независимыми значениями просто не может быть (понятно, не считая $\eta = 0$) — поясним; при $p \leqslant 0$ мы имеем вложение $\mathscr{L}_2 \subseteq W$ и вытекающее из него общее представление (1.8), (1.9), которое в случае существования нетривиальной функции $\eta = (\varphi, \eta)$ дает обязательное вложение $W \subseteq \subseteq \mathscr{F} = [C_0^\infty]$ с $\mathscr{F}$ типа $\mathscr{L}_2$, где $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}^2 \equiv E\,|(\varphi, \eta)|^2$, согласно (1.10), имеет вид

$$\|\varphi\|_{\mathscr{F}}^2 = \int |\varphi|^2 f(t)\,dt,$$

а для такого $\mathscr{F}$ и $W = \mathring{W}_2^p$ с показателем $p < 0$ вложения $W \subseteq \mathscr{F}$, означающего, что норма $\|\varphi\|_W$ сильнее $\|\varphi\|_{\mathscr{F}}$, быть не может. Для пространств $W = \mathring{W}_2^p$ с показателем $p > 0$ широкий класс случайных $\eta = (\varphi, \eta)$ с независимыми значениями, непрерывных относительно $\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_p$, получается из представления (1.8), (1.9) заменой $\varphi \in C_0^\infty(S)$ на дифференциальное выражение $\sum c_k \partial^k \varphi$ с производными порядка $|k| \leqslant p/2$; в области $S \subseteq R^d$ к этому можно при $p > d/2$ добавить, например, еще обобщенные случайные функции вида

$$\eta = \sum_k \eta_k \delta(t - t_k)$$

с независимыми случайными коэффициентами η_k и т. п.

---

*) Указанные $\nu(dt)$ и $\pi(dt\;dr)$ определяются по величинам (φ, η), $\varphi \in C_0^\infty(S)$, на том же вероятностном пространстве Ω аналогично тому, как это получается в известном представлении Леви — Хинчина — Ито для случайных процессов с независимыми приращениями.

§ 2. Прогнозирование и марковское свойство

1° Задача о наилучшем прогнозе. Обратимся к случайному полю ξ, которое в области $S_0 \subseteq T$ описывается нашей общей моделью с обобщенным дифференциальным уравнением

$$L\xi = \eta \tag{2.1}$$

и граничными условиями

$$(x,\ \xi) = (x,\ \xi^+), \qquad x \in X^+(\Gamma_0), \tag{2.2}$$

на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$. Можно представить, что по тем или иным причинам непосредственное наблюдение ξ недоступно в той или иной части области S_0, и требуется дать прогноз для ξ по каким-то имеющимся данным $\mathfrak{B}$. Определяя ξ с помощью пробных функций как

$$\xi = (x,\ \xi), \qquad x \in X(S_0),$$

в качестве прогноза для величин $(x,\ \xi)$ можно использовать *условное математическое ожидание*

$$(x,\ \hat{\xi}) = E[(x,\ \xi)/\mathfrak{B}] \tag{2.3}$$

относительно данных $\mathfrak{B}$, которое для рассматриваемых величин в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ на вероятностном Ω задается оператором $E(\cdot/\mathfrak{B})$ ортогонального проектирования на подпространство $\mathbf{H}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega)$, образованное всеми величинами, измеримыми относительно σ-алгебры событий в Ω, порождаемой данными $\mathfrak{B}$ (тем же $\mathfrak{B}$ будем в дальнейшем обозначать и упомянутую σ-алгебру). Указанный в (2.3) способ дает *наилучший прогноз* — в нем среднеквадратическая ошибка

$$E|(x,\ \hat{\xi}) - (x,\ \xi)|^2 = \min$$

является *минимальной* в сравнении с любым другим способом прогнозирования, в качестве прогноза для величин $(x,\ \xi)$, дающим по $\mathfrak{B}$ те или иные величины из $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$.

Очевидно, что для $\xi \in \mathbf{W}(S_0)$ тому же функциональному классу принадлежит и функция $\hat{\xi} = (x,\ \hat{\xi})$ — напомним, что включение $u = \hat{\xi} \in \mathbf{W}(S_0)$ определяется условием непрерывности относительно пробных $x \in X(S_0)$. Уравнение (2.1) означает, что

$$(L^*\varphi,\ \xi) = (\varphi,\ \eta)$$

при всех пробных $x = L^*\varphi$ с $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$, откуда следует, что

$$(L^*\varphi, \widehat{\xi}) = (\varphi, \widehat{\eta})$$

связано аналогичным уравнением

$$L\widehat{\xi} = \widehat{\eta} \tag{2.1$'$}$$

с функцией $\widehat{\eta} = (\varphi, \widehat{\eta})$, определенной как

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = E[(\varphi, \eta)/\mathfrak{B}], \quad \varphi \in C_0^\infty(S_0).$$

Ясно, что имеющиеся для ξ граничные условия (2.2) дают соответствующие граничные условия

$$(x, \widehat{\xi}) = (x, \widehat{\xi}^+), \quad x \in X^+(\Gamma_0), \tag{2.2$'$}$$

на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$ с

$$(x, \widehat{\xi}^+) = E[(x, \xi)/\mathfrak{B}],$$

и, таким образом, *наилучший прогноз* $\widehat{\xi}$ *может быть получен как решение граничной задачи* (2.1)$'$, (2.2)$'$.

Понятно, что это относится к любому прогнозу $\widehat{\xi}$, который дается с помощью того или иного линейного ограниченного оператора $\widehat{E}(\cdot/\mathfrak{B})$ в гильбертовом $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$, определяя

$$\widehat{\xi} = (x, \widehat{\xi}) = \widehat{E}[(x, \xi)/\mathfrak{B}] \tag{2.4}$$

при пробных $x \in X(S_0)$. В частности, для данных $\mathfrak{B}$, представленных теми или иными величинами из пространства $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$, это относится и к *наилучшему линейному прогнозу* $\widehat{\xi}$, который дается оператором $\widehat{E}(\cdot/\mathfrak{B})$ ортогонального проектирования на замкнутую линейную оболочку составляющих $\mathfrak{B}$ величин из $\mathbf{H}$ — отметим здесь сразу же тот хорошо известный факт, что в случае, когда прогнозируемые величины с данными в $\mathfrak{B}$ имеют совместные гауссовские распределения вероятностей, определяемый формулой (2.3) *наилучший прогноз является линейным.* □

Рассмотрим нашу модель (2.1), (2.2) со случайным источником η в (2.1), действие которого внутри области S_0 не зависит от имеющихся граничных условий (2.2) на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$; при этом будем считать, что обобщенное случайное поле $\eta = (\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$, имеет нулевое среднее $E(\varphi, \eta) = 0$.

Говоря о задаче прогнозирования, можно представить, например, что данные $\mathfrak{B}$ содержат лишь граничные значения (x, ξ), $x \in X^+(\Gamma_0)$, определяемые граничными условиями (2.2). Тогда очевидно, что граничная задача $(2.1)'$, $(2.2)'$ для наилучшего прогноза $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S_0)$ имеет вид

$$Lu = 0$$

в области S_0,

$$(x, u) = (x, \xi), \quad x \in X^+(\Gamma_0),$$

на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$.

Выделив область $S \subseteq S_0$, где «наблюдения» недоступны, можно представить также, что имеющиеся данные $\mathfrak{B}$ о случайном поле ξ вне области S содержат, в частности, все граничные значения

$$\mathfrak{A}(\Gamma) = \{(x, \xi), \ x \in X(\Gamma)\} \tag{2.5}$$

— напомним, что граничное $X(\Gamma)$ образовано всеми пробными $x \in X(S_0)$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial S$; наиболее полные данные $\mathfrak{B}$ о случайном поле ξ вне области S получаются с помощью величин

$$\mathfrak{A}(S^c) = \{(x, \xi), \ x \in X(S^c)\} \tag{2.6}$$

при всех пробных $x \in X(S_0)$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq S^c$ в дополнение к S.

Как мы знаем, при данных граничных значениях $\mathfrak{A}(\Gamma)$ случайное поле ξ в области S однозначно определяется уравнением

$$\mathscr{P}\xi = \eta, \tag{2.7}$$

где

$$\mathscr{P} = L$$

для модели (2.1), (2.2) с $L \geqslant 0$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$ и

$$\mathscr{P} = L^*L$$

для модели с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ — уточним, что для нее в (2.7) появляется не только новый в сравнении с (2.1) оператор $\mathscr{P}$, но и новый случайный источник η, получающийся из исходного $\eta = (\varphi, \eta)$ в (2.1) заменой пробных φ на $L\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$; по поводу используемых здесь и в дальнейшем конструкций в схеме модели (2.1), (2.2) см. гл. II.

Понятно, что определяемый общей формулой (2.4) прогноз для ξ в S может быть получен как (единственное) решение уравнения

$$\mathscr{P}\widehat{\xi} = \widehat{\eta} \tag{2.7$'$}$$

в области S с соответствующей правой частью $\widehat{\eta}$,

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = \widehat{E}\,[(\varphi, \eta)/\mathfrak{B}], \qquad \varphi \in C_0^\infty(S),$$

при обобщенных условиях Дирихле

$$(x, \widehat{\xi}) = (x, \xi), \qquad x \in X(\Gamma),$$

на границе $\Gamma = \partial S$ с данными в $\mathfrak{B}$ граничными значениями (2.5).

В нашей схеме (2.1), (2.2) в области $S_0 \subseteq T$ с оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ своего рода стандартной моделью случайного источника хаотических возмущений в области S_0 может служить гауссовский «белый шум» на $\mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$ — поясним, что такая модель случайного поля $\eta = (\varphi, \eta)$, $\varphi \in \mathscr{F}(S_0)$, отражает определенную однородность в распределении по S_0 интенсивности рассматриваемых возмущений, а также соответствующую малость их интегрального воздействия в каждой достаточно малой области в S_0. Обратимся к общей стохастической модели (2.1), (2.2) со случайным источником η, представленным гауссовским «белым шумом» на соответствующем $\mathscr{F}(S_0) = \left[C_0^\infty(S_0)\right]$. В такого рода модели задача о прогнозе получает следующее решение.

Теорема. *Наилучший прогноз для ξ в области $S \subseteq S_0$ по данным $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(S^c)$ вне S дается (единственным) решением $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ обобщенной задачи Дирихле:*

$$\mathscr{P}u = 0 \tag{2.8}$$

в области S,

$$(x, u) = (x, \xi), \qquad x \in X(\Gamma), \tag{2.9}$$

на границе $\Gamma = \partial S$. ∎

Понятно, что то же решение получается и при любых других данных $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}(S^c)$, содержащих граничные значения (2.5), с помощью которых ставятся граничные условия (2.9) — поясним, что для соответствующих $\widehat{\xi} = (x, \widehat{\xi})$ и решения $u \in \mathbf{W}(S)$ граничной задачи (2.8), (2.9) при всех пробных $x \in X(S)$ использование повторных условных математических ожиданий дает равенства

$$(x, \widehat{\xi}) = E[(x, \xi)/\mathfrak{B}] = E\{E[(x, \xi)/\mathfrak{A}(S^c)]\mathfrak{B}\} = \\ = E\{E[(x, \xi)/\mathfrak{A}(\Gamma)]/\mathfrak{B}\} = E[(x, \xi)/\mathfrak{A}(\Gamma)] = (x, u).$$

Предлагаемое здесь решение задачи о наилучшем прогнозе в случае гауссовского источника η в (2.1) является следствием решения аналогичной задачи о наилучшем линейном прогнозе, к которой мы и переходим. □

Обратимся к нашей модели (2.1), (2.2) с произвольным «белым шумом» η на соответствующем $\mathscr{F}(S_0) = [C_0^\infty(S_0)]$ в (2.1), некоррелированным с граничными условиями (2.2).

Напомним, что в (2.7) мы имеем то же $\mathscr{P} = L$ и η, что и в исходном уравнении (2.1) для нашей модели в области $S_0 \Subset T$ с оператором $L = \mathscr{P} \geqslant 0$ в соответствующем $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$, и в (2.7) появляются оператор $\mathscr{P} = L^*L$ и новый источник η для модели с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ — при этом новый источник η, который получается заменой $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$ на $L\varphi$ в исходном «белом шуме» $\eta = (\varphi, \eta)$ из (2.1), представляется «белым шумом» на новом $\mathscr{F}(S_0) = [C_0^\infty(S_0)] = \mathring{W}(S_0)$, поскольку по самому определению скалярного произведения в $W = \mathring{W}(T)$ мы имеем

$$\langle u, v\rangle_W = \langle Lu, Lv\rangle_{\mathscr{L}_2}$$

(по этому поводу см., например, § 1 гл. II).

Отметим, что имея дело с источником η, представленным произвольным полем с некоррелированными значениями на $\mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$ с невырожденной корреляционной формой

$$E(f, \eta)\overline{(g, \eta)} = \int\limits_{S_0} f(t)\overline{g(t)}\,\sigma^2(t)\,dt, \quad \sigma^2(t) \geqslant c > 0,$$

заменой в исходном $\eta = (\varphi, \eta)$ переменного $\varphi \in \mathscr{L}_2(S_0)$ на $\frac{1}{\sigma}\varphi$ можно получить новый источник η, используя его в эквивалентном (2.1) уравнении того же типа с новым

$$L = \sum_k \frac{1}{\sigma} a_k \partial^k,$$

получающимся из исходного оператора в (2.1) умножением на функцию $1/\sigma$, что дает новый оператор $\mathscr{P} = L^* L$ с сопряженным

$$L^* = \sum_k (-1)^{|k|} \partial^k \left(\frac{1}{\sigma} a_k \right). \quad \square$$

Перейдем непосредственно к доказательству заявленной теоремы.

В данных $\mathfrak{B}$ вне области $S \subseteq S_0$ содержатся и все граничные значения

$$(x, \xi), \quad x \in X(\Gamma_0),$$

на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$ самой области S_0, где рассматривается модель (2.1), (2.2). Имея эти данные, можно выделить в ξ составляющую ξ^+, получающуюся как *решение* $u = \xi^+ \in \mathbf{W}(S_0)$ *обобщенной задачи Дирихле*:

$$\mathscr{P} u = 0 \tag{2.10}$$

в области S_0,

$$(x, u) = (x, \xi), \quad x \in X(\Gamma_0). \tag{2.11}$$

Выделив таким образом все величины

$$\mathfrak{A}^+ = \{(x, \xi^+),\ x \in X(S_0)\},$$

обратимся к разности

$$\xi^- = \xi - \xi^+,$$

которая как функция $\xi^- = \mathbf{W}(S_0)$ есть решение уравнения

$$\mathscr{P} \xi^- = \eta \tag{2.12}$$

в области S_0 при нулевых граничных условиях

$$(x, \xi^-) = 0, \quad x \in X(\Gamma_0). \tag{2.13}$$

При рассмотрении ξ^- нам удобно будет освободиться от граничных условий (2.13), обратившись к уравнению (2.12) во всей области $T \supseteq S_0$ с надлежаще продолженной правой частью $\eta = (\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$. Именно, воспользовавшись ортогональным разложением

$$X = \mathscr{P} \mathring{W}(S_0) \oplus X(S_0^c)$$

с $\mathring{W}(S) = \left[C_0^\infty(S_0)\right]$ в $W = \mathring{W}(T)$ и подпространством $X\left(S_0^c\right)$ всех пробных $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq S_0^c$ в дополнение к области S_0, для соответствующего ортогонального разложения

$$W = \mathring{W}(S_0) \oplus \mathscr{P}^{-1}X\left(S_0^c\right)$$

с унитарным $\mathscr{P}^{-1}$: $X \to W$ при $u = u_0 + v$ с $u_0 \in \mathring{W}(S_0)$, $v \in \mathscr{P}^{-1}X\left(S_0^c\right)$ положим

$$(u, \eta) = (u_0, \eta), \quad u \in W. \tag{2.14}$$

С так определенной правой частью η уравнение (2.12) в области T, однозначно определяющее $\xi \in \mathbf{W} = \mathring{\mathbf{W}}(T)$ с нулевыми значениями $(x, \xi) = (v, \eta) = 0$ при всех пробных $x \in X\left(S_0^c\right) \supseteq X(\Gamma_0)$, $x = \mathscr{P}v$, в области $S_0 \subseteq T$ будет давать решение ξ^- граничной задачи (2.12), (2.13). Для $\xi^- \in \mathbf{W}$ при всех пробных $x = \mathscr{P}u$, $u \in W$, мы имеем

$$(x, \xi^-) = (u, \eta),$$

где определенное в (2.14) случайное поле $\eta = (u, \eta)$, $u \in W$, обладает тем свойством, что *при любых ортогональных* $\varphi \in \mathring{W}(S_0)$, $u \in W$ *величины* (φ, η), (u, η) *являются некоррелированными* — поясним, что взяв разложение $u^- = u_0 + v$, для ортогональных φ, $u_0 = u - v \in \mathring{W}(S_0)$ получим некоррелированные (φ, η), $(u_0, \eta) = (u, \eta)$. В частности, для $S \subseteq S_0$ мы имеем некоррелированные (φ, η), $\varphi \in C_0^\infty(S)$, и (u, η), $u \in \mathscr{P}^{-1}X(S^c)$, с пробными $u \in W$ из ортогонального дополнения к подпространству $\mathring{W}(S) = \left[C_0^\infty(S)\right]$ в W, где $X(S^c)$ представляет все пробные $x \in X$ с носителями $\operatorname{supp} x \subseteq S^c$ в дополнение к области S — напомним, что

$$X = \mathscr{P}\mathring{W}(S) \oplus X(S^c).$$

Итак, при $\varphi \in C_0^\infty(S)$ мы имеем (φ, η) некоррелированными с величинами из совокупности

$$\mathfrak{A}^- = \{(x, \xi^-),\ x \in X(S^c)\},$$

которая вместе с выделенной в (2.10), (2.11) совокупностью $\mathfrak{A}^+$ образует все данные $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(S^c)$ в н е области S, на что укажем записью

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^- \cup \mathfrak{A}^+.$$

Рассматривая нашу модель (2.1), (2.2), мы до сих пор не оговаривали, какого типа граничные условия (2.2) в ней ставятся. Будем считать теперь, что для **детерминированных** функций $u \in W(S_0)$ **однородное** уравнение (2.1)

$$Lu = 0$$

в области S_0 имеет единственное решение при произвольных граничных условиях типа (2.2) — при задании их, скажем, с помощью надлежащего граничного оператора L_0 в форме

$$L_0(u - u^+) = 0$$

с произвольным $u^+ \in W(S_0)$ (см. по этому поводу § 3 гл. II). В нашей модели граничные условия (2.2) такого типа $X^+(\Gamma_0)$ при произвольном их задании выделяют (единственное) решение $\xi \in \mathbf{W}(S_0)$ уравнения (2.1).

При рассмотрении уравнения (2.1) с оператором $L = \mathscr{P} \geqslant 0$ в пространстве $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$ указанного типа условия (2.2) есть обобщенные условия Дирихле типа $X^+(\Gamma_0) = X(\Gamma_0)$, с помощью которых ранее была выделена компонента ξ^+ — см. (2.10), (2.11). При том условии, что источник η в (2.1) является некоррелированным с граничными условиями (2.2), мы имеем величины $\varphi, \eta)$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$, некоррелированными со всей совокупностью $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^- \cup \mathfrak{A}^+$, и в итоге при нулевом среднем $E(\varphi, \eta) = 0$ для правой части $\widehat{\eta}$ в общем уравнении (2.7) получаем

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = \widehat{E}[(\varphi, \eta)/\mathfrak{B}] = 0.$$

Аналогичный результат получается для модели (2.1), (2.2) с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$. Именно, при рассматриваемом типе граничных условий (2.2) граничное $X(\Gamma_0)$ представимо **прямой суммой**

$$X(\Gamma_0) = X^-(\Gamma_0) + X^+(\Gamma_0),$$

и для пробных $x = x^- + x^+$ с $x^- \in X^-(\Gamma_0)$, $x^+ \in X^+(\Gamma_0)$ мы имеем

$$(x, \xi) = (x^-, \xi) + (x^+, \xi),$$

где $x^- = L^* g^-$ с $g^- \in \mathscr{T}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$, **ортогональными** всем $L\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$ — напомним, что

$$(L\varphi, g^-) = 0$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$. В случае исходного источника η в (2.1), представленного «белым шумом» на пространстве $\mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$ и некоррелированного с граничными условиями (2.2), мы имеем величины $(L\varphi, \eta)$ некоррелированными со всеми граничными значениями

$$(x, \xi) = (g^-, \eta) + (x^+, \xi^+), \quad x \in \dot{X}(\Gamma_0).$$

Это говорит о том, что новый источник η в (2.7) является некоррелированным со всеми граничными значениями (x, ξ), $x \in X(\Gamma_0)$, и дает в области S величины (φ, η), $\varphi \in C_0^\infty(S)$, которые некоррелированы с $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^- \vee \mathfrak{A}^+$, и для них в правой части (2.7)′

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = E[(\varphi, \eta)/\mathfrak{B}] = 0.$$

В итоге получается следующий результат.

Теорема. *Наилучший линейный прогноз для ξ в области S по данным вне S дается (единственным) решением $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ обобщенной задачи Дирихле* (2.8), (2.9). □

Этот результат показывает, в частности, что *наилучший линейный прогноз по всем данным $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(S^c)$ вне области S оказывается таким же, как и наилучший линейный прогноз по данным только лишь граничным значениям* $\mathfrak{A}(\Gamma)$, а именно,

$$\widehat{E}[(x, \xi)/\mathfrak{A}(S^c)] = \widehat{E}[(x, \xi)/\mathfrak{A}(\Gamma)] \tag{2.15}$$

при всех пробных $x \in X(S)$ в замыкании $[S]$ области S. Выраженное в (2.15) свойство можно назвать *марковским* (в широком смысле). Для гауссовского ξ оно означает, что при указанных в (2.5) граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$ случайное поле ξ в области S не зависит от событий вне этой области, определяемых указанными в (2.6) данными $\mathfrak{A}(S^c)$. Уточним, что речь идет об условной независимости ξ в S от $\mathfrak{A}(S^c)$ при данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$, которая при использовании определяемого по $\mathfrak{A}(\Gamma)$ решения $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ граничной задачи (2.8), (2.9) объясняется (безусловной) независимостью разности

$$\xi_0 = \xi - u \in W(S)$$

в области S от величин $\mathfrak{A}(S^c)$ и выражается в том. что условное распределение вероятностей совокупности величин (x, ξ), $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$, относительно $\mathfrak{A}(S^c)$ такое же, как и относительно $\mathfrak{A}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{A}(S^c)$ — поясним: за вычетом условных средних $(x, u) = \mathrm{E}[(x, \xi)/\mathfrak{A}(\Gamma)]$ условное распределение величин (x, ξ) такое же, как у независимых от $\mathfrak{A}(S^c)$ величин (x, ξ_0), $\operatorname{supp} x \subseteq [S]$.

2° Наилучший прогноз и марковское свойство. Допустим, перед нами стоит задача о наилучшем прогнозе случайного поля ξ, описываемого общей моделью (2.1), (2.2), которое в интересующей нас области $S \subseteq S_0$ обладает *марковским свойством*, а именно, условное распределение величин

$$\mathfrak{A}(S) = \{(x, \xi),\ \operatorname{supp} x \subseteq [S]\} \tag{2.16}$$

относительно данных $\mathfrak{A}(S^c)$ вне области S такое же, как относительно граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$ на границе $\Gamma = \partial S$ — напомним, что введенные ранее $\mathfrak{A}(\Gamma)$, $\mathfrak{A}(S^c)$ определяются аналогично (2.16); см. (2.5), (2.6). Понятно, что при наличии марковского свойства наилучший прогноз $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ по данным $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{A}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}(S^c),$$

получается, согласно общему уравнению (2.7) как единственное) решение уравнения

$$\mathscr{P}u = f \tag{2.17}$$

в области S с правой частью $f = \widehat{\eta}$,

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = E[(\varphi, \eta)/\mathfrak{A}(\Gamma)], \qquad \varphi \in C_0^\infty(S),$$

при граничных условиях

$$(x, u) = (x, \xi), \qquad x \in X(\Gamma), \tag{2.18}$$

поставленных с помощью граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$. Можно представить, например, что нам как-то удалось получить дополнительные данные, связанные с ξ в «недоступной» области S — скажем, это какие-то данные $\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$ в малой окрестности Γ^ε границы $\Gamma = \partial S$, которые в совокупности с прежним $\mathfrak{B}$ составляют $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$. Как на основе новых $\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ подправить наилучший прогноз?

На первый взгляд может показаться очевидным, что в уравнении (2.17) для наилучшего прогноза нужно лишь подправить правую часть f, взяв там $f = \widehat{\eta}$ с

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = E\left[(\varphi, \eta)/\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}\left(\Gamma^{\varepsilon}\right)\right], \quad \varphi \in C_0^{\infty}(S),$$

что отвечает замене исходных граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$ на более полные данные $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$ в окрестности Γ^{ε} границы $\Gamma = \partial S$. К сожалению, такое решение может оказаться ошибочным, так как $\mathscr{P}\xi = \eta$ в области S может стать при расширенных данных $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$ существенно зависимым от $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}(S^c)$. Проиллюстрируем это на простейшем примере броуновского движения $\xi = \xi(t)$, $t \in T$, в модели (2.1), (2.2) с $S_0 = T = R \setminus \{0\}$ и оператором $\mathscr{P} = -d^2/dt^2$ в соответствующем пространстве $\mathscr{F} = W = \mathring{W}(T)$ типа соболевского $\mathring{W}_2^1(T)$ — поясним: в качестве источника η в (2.1) используется производная гауссовского «белого шума» на $\mathscr{L}_2(T)$. При наилучшем прогнозе в «будущее» $S = (0, \infty)$ мы имеем независимость ξ в S от «прошлого» $\xi(t)$, $t \in S^c = (-\infty, 0]$ — поясним: $\xi(0) = 0$. Налицо марковское свойство, выраженное полной независимостью $\mathfrak{A}(S)$ от $\mathfrak{A}(S^c)$ при тривиальном $\mathfrak{A}(\Gamma) = 0$ на точечной границе $\Gamma = \{0\}$. Однако $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$ становятся существенно зависимыми при данных $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon}) = \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$ с

$$\mathfrak{B}\left(\Gamma^{\varepsilon}\right) = \left\{(\varphi, \eta),\ \varphi \in C_0^{\infty}\left(\Gamma^{\varepsilon}\right)\right\} \subseteq \mathfrak{A}\left(\Gamma^{\varepsilon}\right);$$

достаточно указать здесь на явную зависимость величин

$$\eta_1 = [\xi(3\varepsilon) - \xi(\varepsilon)] - [\xi(\varepsilon) - \xi(-\varepsilon)]$$

и

$$\eta_2 = [\xi(-3\varepsilon) - \xi(-\varepsilon)] + [\xi(\varepsilon) - \xi(-\varepsilon)]$$

с общей компонентой $\eta_3 = [\xi(\varepsilon) - \xi(-\varepsilon)]$, каждая из которых не зависит от $\mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$, а η_1 и η_2 должны были бы быть условно независимыми относительно $\mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$ в случае условной независимости $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$ относительно $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon}) = \mathfrak{B}(\Gamma^{\varepsilon})$ — к этому мы еще вернемся при рассмотрении устойчивости марковского свойства по отношению к допустимым расширениям граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$. *)

---

*) См. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля.— М.: Наука, 1981, где аналогичный пример был приведен в связи с ошибочностью некоторых имеющихся ранее представлений о марковских случайных полях.

Наш пример указывает на нетривиальность самого марковского свойства, для модели (2.1), 2.2) равносильного тому, что имеющийся в правой части (2.1) случайный источник η в области $S \subseteq S_0$ является **условно независимым** от поля ξ **вне** этой области при граничных данных $\mathfrak{A}(\Gamma)$, и в частности, условно независимым от $\eta = L\xi$ в дополнительной к S области $S^+ = S_0 \setminus [S]$, что, вообще говоря, может не быть даже в модели, представляющей источник η как обобщенное случайное поле с независимыми значениями. □

Ранее мы установили марковское свойство для модели (2.1), (2.2) в области $S_0 \subseteq T$ со случайным источником гауссовского «белого шума» в (2.1), действие которого внутри S_0 не зависит от граничных условий (2.2) на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$.

Рассмотрим теперь источник η, представленный **произвольным** случайным полем с независимыми значениями, обратившись к модели (2.1), (2.2) в области $S_0 \subseteq T$ с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T)$ и *внешними граничными условиями* на $\Gamma_0 = \partial S_0$ типа $X^+(\Gamma_0)$, в которых граничные пробные $x \in X^+(\Gamma_0)$ связаны с соответствующими $g \in \mathscr{L}_2(S_0^c)$ **вне** области S_0 и могут быть представлены как $x = L^*g$ с $g = 0$ в S_0, $L^*g = 0$ в дополнительной области $S_0^+ = T \setminus [S_0]$ — см. по этому поводу § 2 гл. II.

Обратимся к

$$\mathfrak{A}(S),\ \mathfrak{A}(\Gamma),\ \mathfrak{A}(S^c),$$

порожденным случайным полем ξ на $[S]$, Γ, S^c — см. (2.16).

Используя σ-алгебры событий, порождаемые соответствующими случайными величинами, *марковское свойство* условной независимости $\mathfrak{A}(S)$ от $\mathfrak{A}(S^c)$ относительно $\mathfrak{A}(\Gamma)$ можно коротко описать, сказав, что $\mathfrak{A}(\Gamma)$ *расщепляет* σ-алгебры $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$, или, иначе, что $\mathfrak{A}(\Gamma)$ является *расщепляющей σ-алгеброй* для $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$.

Мы покажем, что не только $\mathfrak{A}(\Gamma)$, но и ее любое расширение $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$, порождаемое соответствующими величинами

$$\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) = \{(x,\ \xi),\ \operatorname{supp} x \subseteq [\Gamma^\varepsilon]\}$$

из замыкания окрестности Γ^ε границы $\Gamma = \partial S$, является **расщепляющей** σ-алгеброй для величин $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$. □

Напомним сначала некоторые известные свойства расщепленных σ-алгебр *).

Определим $\mathfrak{B}$ как *расщепленную σ-алгебру* для $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, если при данном $\mathfrak{B}$ σ-алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются условно независимыми в том смысле, что для условных вероятностей при любых событиях $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ выполняется равенство

$$P(A_1A_2/\mathfrak{B}) = P(A_1/\mathfrak{B})P(A_2/\mathfrak{B}).$$

С использованием индикаторов $\xi_1 = 1_{A_1}$, $\xi_2 = 1_{A_2}$ событий A_1, A_2 указанное равенство можно выразить как

$$E(\xi_1\xi_2/\mathfrak{B}) = E(\xi_1/\mathfrak{B})E(\xi_2/\mathfrak{B}),$$

и это распространяется на любые величины ξ_1, $\xi_2 \in H = \mathscr{L}_2(\Omega)$, измеримые относительно $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

Расщепляя $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ расщепляет также расщепленные σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{B}$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B}$ (порождаемые дополнительно к $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ еще событиями из $\mathfrak{B}$), что непосредственно видно для событий $\widetilde{A}_1 = A_1B_1$ и $\widetilde{A}_2 = A_2B_2$ с $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ и B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$, порождающих δ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_2$ — поясним: для индикаторов указанных событий

$$E\left(1_{A_1B_1} \cdot 1_{A_1B_2}/\mathfrak{B}\right) = 1_{B_1}1_{B_2}E\left(1_{A_1}/\mathfrak{B}\right)E\left(1_{A_2}/\mathfrak{B}\right) = \\ = E\left(1_{A_1B_1}/\mathfrak{A}\right)E\left(1_{A_2B_2}/\mathfrak{B}\right).$$

Определенная выше условная независимость $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ относительно $\mathfrak{B}$ равносильна тому, что для всех событий $A_1 \in \mathfrak{A}_1$

$$P(A_1/\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B}) = P(A_1/\mathfrak{B});$$

поясним это, указав в случае расщепляющей σ-алгебры $\mathfrak{B}$ на равенство

$$E[\xi_1 - E(\xi_1/\mathfrak{B})]\,\widetilde{\xi}_2 = E\{E[\xi_1 - E(\xi_1/\mathfrak{B})]\,\widetilde{\xi}_2/\mathfrak{B}\} = 0$$

для измеримых относительно $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B} = \widetilde{\mathfrak{A}}_2$ величин ξ_1, $\widetilde{\xi}_2 \in H$, которое означает, что

$$E(\xi_1/\mathfrak{B}) = E(\xi_1/\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B})$$

*) См., например, Knight F. A remark on Markovian germ fields // Z. Wahr. Geb.— 1970.— Bd 15.— S. 291—296.

есть проекция величины ξ_1 на подпространство $H(\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B})$ измеримых относительно $\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B}$ величин в $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$.

Парадоксальным на первый взгляд кажется тот факт, что расширение $\widetilde{\mathfrak{B}} \supseteq \mathfrak{B}$ может уже не быть расщепляющей σ-алгеброй для $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Вспомним как пример σ-алгебры

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}(0, \infty), \quad \widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}(-\varepsilon, \varepsilon), \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}(-\infty, 0),$$

порождаемые производной гауссовского «белого шума» на интервалах $(0, \infty)$, $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $(-\infty, 0)$, где независимые σ-алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются условно зависимыми относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{B}}$ (которую можно рассматривать как расширение тривиальной σ-алгебры $\mathfrak{B}$) — ранее была указана явная (условная) зависимость соответствующих $\mathfrak{B}_1 \vee \widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}(-\varepsilon, \infty)$, $\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(-\infty, \varepsilon)$ относительно $\widetilde{\mathfrak{B}}$.

Оказывается, что расширение $\widetilde{\mathfrak{B}}$ расщепляющей σ-алгебры $\mathfrak{B}$ будет также расщепляющей σ-алгеброй, если $\widetilde{\mathfrak{B}}$ получается как

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_2$$

присоединением компонент $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}_2$; поясним это, скажем, пир $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_2$, когда для любой измеримой относительно $\mathfrak{A}_1$ величины $\xi_1 \in H$ и $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}_2$

$$E(\xi_1/\widetilde{\mathfrak{B}}) = E[E(\xi_1/\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_2)/\widetilde{\mathfrak{B}}] =$$
$$= E[E(\xi_1/\mathfrak{B})/\widetilde{\mathfrak{B}}] = E(\xi_1/\mathfrak{B}) = E(\xi_1/\mathfrak{A}_2 \vee \widetilde{\mathfrak{B}})$$

с $\mathfrak{A}_2 \vee \widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B}$. Понятно, что во всех указанных ранее соотношениях σ-алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ можно поменять местами — их условная независимость относительно $\mathfrak{B}$ симметрично отражается на свойствах $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

Укажем еще операцию сужения расщепляющих σ-алгебр; именно, при расщепляющих $\mathfrak{B}_1 \supseteq \mathfrak{B}_2 \supseteq \ldots$ расщепляющей будет также предельная σ-алгебра

$$\mathfrak{B} = \bigcap_n \mathfrak{B}_n,$$

что непосредственно следует из самого определения и непрерывности условных вероятностей/математических ожиданий относительно предельного перехода от $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_n$ к $\mathfrak{B} = \bigcap \mathfrak{B}_n$. □

Вернемся к нашей модели (2.1), (2.2) со случайным источником $\eta = (\varphi, \eta)$, непрерывным относительно пробных $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$ по норме $\|\varphi\|_{\mathscr{F}} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$ и продолженным по непрерывности на все $\varphi \in \mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$. Для случайного поля с независимыми значениями порождаемые им величины

$$\mathfrak{B}(S) = \{(\varphi, \eta), \ \varphi \in \mathscr{L}_2(S)\}$$

в произвольной области $S \subseteq S_0$ не зависят от величин

$$\mathfrak{B}(S^c) = \{(g, \eta), \ g \in \mathscr{L}_2(S^c)\}$$

вне S, что является следствием независимости от $\mathfrak{B}(S^c)$ величин (φ, η) при пробных $\varphi \in C_0^\infty(S)$, каждая из которых имеет компактный носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset S$, не пересекающийся с замкнутым S^c. Сразу же отметим, что независимость $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^c)$ переходит в условную независимость относительно σ-алгебры $\mathscr{L} = \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$, порождаемой величинами (g, η), $g \in \mathscr{L}_2(\Gamma^\varepsilon)$, в любом расширении $\Gamma^\varepsilon \supseteq \Gamma$ границы $\Gamma = \partial S$, что является следствием разложения

$$\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon) = \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)^- \vee \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)^+$$

на компоненты, порождаемые соответственно величинами (g^-, η) и (g^+, η) с $g^- \in \mathscr{L}_2(\Gamma^\varepsilon \cap S)$ и $g^+ \in \mathscr{L}_2(\Gamma^\varepsilon \cap S^c)$ — поясним: каждая функция $g \in \mathscr{L}_2(\Gamma^\varepsilon)$ представима как $g = g^- + g^+$; более того, при любом $\Gamma^\varepsilon \supseteq \Gamma$ σ-алгебра $\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ является расщепляющей для $\mathfrak{B}(S \cup \Gamma^\varepsilon)$ и $\mathfrak{B}(S^c \cup \Gamma^\varepsilon)$. Указанная здесь условная независимость случайного поля η в произвольных (замкнутых) $S_1 = S \cup \Gamma^\varepsilon$ и $S_2 = S^c \cup \Gamma^\varepsilon$ при задании его на расширенной границе $\Gamma^\varepsilon = S_1 \cap S_2$ определяет так называемое *устойчивое* (*глобальное*) *марковское свойство*, означающее устойчивость свойства условной независимости $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^c)$ при указанных выше расширениях граничных условий. Отметим, что согласно разложению

$$\mathscr{L}_2(S_0) = \mathscr{L}_2(S) + \mathscr{L}_2(\Gamma) + \mathscr{L}_2(S^+)$$

для области $S \subseteq S_0$ с границей $\Gamma = \partial S$ и дополнительной областью $S^+ = S_0 \setminus [S]$, *устойчивым* (*глобальным*) *марковским свойством* обладает всякое обобщенное *марковское поле* $\eta = (\varphi, \eta)$ непрерывное по $\varphi \in C_0^\infty(S_0)$ относительно $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_2}$ — уточним, что *марковским* называют такое обобщенное случайное поле, для которого соответствующие $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^+)$ условно независимы относительно *граничной σ-алгебры* $\mathfrak{B}(\Gamma)$, определяемой как пересечение

$$\mathfrak{B}(\Gamma) = \bigcap \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$$

по всем (открытым) $\Gamma^\varepsilon \supset \Gamma$.

В дальнейшем нам удобно будет использовать замкнутые окрестности Γ^ε границы $\Gamma = \partial S$, обратившись к марковскому случайному источнику η в (2.1), для которого порождаемые им $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^c)$ будут условно независимы относительно $\mathscr{L} = \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$; более того, для такого источника η, действие которого внутри области S_0 не зависит от граничных условий (2.2) на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$, мы имеем соответствующую σ-алгебру $\mathfrak{B}(S)$ условно независимой от σ-алгебры $\mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$, дополнительно порождаемой граничными величинами (x, ξ^+), $x \in X^+(\Gamma_0)$. Здесь расщепляющую σ-алгебру $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ можно расширить до σ-алгебры $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) \supseteq \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$, порождаемой всеми величинами (x, ξ), $\operatorname{supp} x \subseteq \Gamma^\varepsilon$, с пробными $x \in X(\Gamma^\varepsilon)$. Дело в том, что в нашей модели (2.1), (2.2) в области $S_0 \subseteq T$ каждая пробная функция $x \in X(\Gamma^\varepsilon)$ представима как $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{L}_2(T)$, $L^*g = 0$ в области

$$T \setminus [\Gamma^\varepsilon] = (S \setminus [\Gamma^\varepsilon]) \cup (S^c \setminus [\Gamma^\varepsilon]),$$

где при разложении

$$g = g^- + g^+$$

на компоненты

$$g^- \in \mathscr{L}_2(S), \quad g^+ \in \mathscr{L}_2(S^c)$$

мы получаем разложение

$$x = x^- + x^+$$

на x^-, $x^+ \in X(\Gamma^\varepsilon)$ с $x^- = L^*g^-$ и $x^+ = L^*g^+$, для которых $(x^-, \xi) = (g^-, \eta) \in \mathfrak{B}(S)$, а $(x^+, \xi) \in \mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$, что непосредственно видно из дополнительного разложения

$$g^+ = g^{+-} + g^{++}$$

на компоненты

$$g^{+-} \in \mathscr{L}_2(S^c \setminus S_0)$$

и

$$g^{++} \in \mathscr{L}_2(S_0^c),$$

для которых

$$(x^+, \xi) = (g^{+-}, \eta) + (x^{++}, \xi^+)$$

с пробными

$$x^{++} = L^* g^{++} \in X^+(\Gamma_0),$$

определяющими внешние граничные условия типа $X^+(\Gamma_0)$ в (2.2). Согласно указанным разложениям, мы имеем представление

$$\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) = \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)^- \vee \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)^+ \tag{2.19}$$

с $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)^- \subseteq \mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)^+ \subseteq \mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$, которое указывает на то, что расширение $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) \supseteq \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ является расщепляющей σ-алгеброй для $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$. Здесь $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$ будет также расщепляющей для расширений

$$\mathfrak{B}(S) \vee \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) \supseteq \mathfrak{A}(S)$$

и

$$\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon) \vee \mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0) \supseteq \mathfrak{A}(S^c),$$

что дает нам *устойчивое (глобальное) марковское свойство* случайного поля ξ: $\mathfrak{A}(S)$ *условно не зависит от* $\mathfrak{A}(S^c)$ *относительно* $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$ *).

Вернемся к источнику η с независимыми значениями, когда $\mathfrak{B}(S)$ и $\mathfrak{B}(S^c)$ расщепляются σ-алгеброй $\mathfrak{B}(\Gamma) \subseteq \subseteq \mathfrak{A}(\Gamma)$, порожденной величинами (g, η), $g \in \mathscr{L}_2(\Gamma)$ — понятно, что для границы $\Gamma = \partial S$ нулевой меры $\mathfrak{B}(\Gamma)$ является тривиальной; в случае источника в (2.1), действие которого внутри S_0 не зависит от граничных условий (2.2) на границе $\Gamma_0 = \partial S_0$, для нашей модели (2.1), (2.2) в области $S_0 \subseteq T$ с внешними граничными условиями (или в $S_0 = T$ без каких-либо граничных условий) в силу аналогичного (2.19) разложения

$$\mathfrak{A}(\Gamma) = \mathfrak{A}(\Gamma)^- \vee \mathfrak{A}(\Gamma)^+ \tag{2.20}$$

получается следующий результат

---

*) Ср., например, Kusuoka S. Markov fields and local operators // Journal of the Faculty of Science, Univ. Tokyo.— 1979.— V. 26, № 2.— P. 199—212, где устанавливается сохранение устойчивого (глобального) марковского свойства при локальных невырожденных преобразованиях вида $L\xi = \eta$ на пространствах типа $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2$.

Теорема. *Случайное поле* ξ *обладает устойчивым (глобальным) марковским свойством и, в частности, для любой области* $S \subseteq S_0$ σ*-алгебры* $\mathfrak{A}(S)$ *и* $\mathfrak{A}(S^c)$ *условно независимы относительно граничной* σ*-алгебры* $\mathfrak{A}(\Gamma)$ *на границе* $\Gamma = \partial S$.

Подчеркнем, что устойчивость означает сохранение свойства условий независимости $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$ при расширении граничных данных до $\mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$ на любом $[\Gamma^\varepsilon] \supseteq \Gamma$. Однако это вовсе не означает сохранение условной независимости $\mathfrak{A}(S)$ и $\mathfrak{A}(S^c)$ при всяком расширении $\mathfrak{A}(\Gamma)$ до $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ с каким-либо $\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}(\Gamma^\varepsilon)$, на что уже фактически указывалось выше в примере броуновского движения в модели (2.1), (2.2) с $L = d/dt$ в $T = R^1 \setminus \{0\}$ и гауссовским «белым шумом» η в $\mathscr{F} = \mathscr{L}_2(T) = \mathscr{L}_2(R^1)$, когда для $S = (0, \infty)$, $S^c = (-\infty, 0]$ и $\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$, порожденном обобщенной производной $-\eta' = L^*\eta = \mathscr{P}\xi$ «белого шума» η на интервале $\Gamma = (-\varepsilon, \varepsilon)$, мы указали на явную (условную) зависимость «будущего» $\mathfrak{A}(S)$ и «прошлого» $\mathfrak{A}(S^c)$ при данных $\mathfrak{A}(\Gamma) \vee \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon) = \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)$ с тривиальным $\mathfrak{A}(\Gamma)$ на точечной границе $\Gamma = \{0\}$ с граничным значением $\xi(0) = 0$ — поясним еще, что в противоположность разложению вида (2.19), (2.20) мы здесь имеем

$$\mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon) \neq \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)^- \vee \mathfrak{B}(\Gamma^\varepsilon)^+,$$

где указанная справа σ-алгебра порождается компонентами

$$(\varphi'_-, \eta), \ (\varphi'_+, \eta),$$

появляющимися при разложении

$$-(\varphi, \eta') = (\varphi', \eta) = (\varphi'_-, \eta) + (\varphi'_+, \eta)$$

с $\varphi'_- \in \mathscr{L}_2(S)$, $\quad \varphi'_+ \in \mathscr{L}_2(S^c)$ в $\varphi' = \varphi'_- + \varphi'_+ \in C_0^\infty(\Gamma^\varepsilon)$. □

Вернемся к вопросу о наилучшем прогнозе в рассмотренной выше модели, когда в общей граничной задаче (2.17), (2.18) для наилучшего прогноза $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ случайного поля ξ с марковским свойством в области S правая часть $f = \eta$ в уравнении (2.17) может быть определена, согласно разложению (2.20) с $\mathfrak{A}(\Gamma)^- \subseteq \mathfrak{B}(S)$, $\mathfrak{A}(\Gamma)^+ \subseteq \mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$, как

$$(\varphi, \widehat{\eta}) = E\left[(\varphi, \eta)/\mathfrak{A}(\Gamma)^-\right], \qquad \varphi \in C_0^\infty(S),$$

где, напомним,

$$\mathfrak{A}(\Gamma)^- = \{(x, \xi),\ x \in X^-(\Gamma)\}$$

отвечает граничным $x = L^*g$ с $g \in \mathscr{L}_2(S)$, $L^*g = 0$ в области S. Случай, когда таких $g \in \mathscr{L}_2(S)$ нет, мы охарактеризовали ранее тем, что назвали соответствующие граничные условия типа $X^+(\Gamma) = X(\Gamma)$ внешними. Ясно, что в этом случае, когда $\mathfrak{A}(\Gamma)^- = 0$, при источнике η с нулевым средним в правой части уравнения (2.17) нужно взять $f = 0$ и, более того, саму граничную задачу (2.17), (2.18) нужно заменить более простой граничной задачей с уравнением

$$Lu = 0 \tag{2.21}$$

в области S и внешними граничными условиями

$$(x, u) = (x, \xi), \quad x \in X^+(\Gamma) = X(\Gamma), \tag{2.22}$$

на границе $\Gamma = \partial S$ — *ее решение и дает нам наилучший прогноз* $u = \widehat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$.

Иллюстрацией к этому может служить прогноз на «будущее» в хорошо известной модели (2.1), (2.2) с обыкновенным дифференциальным оператором

$$L = \sum_{k \leqslant p} a_k d^k/dt^k$$

на бесконечном $S_0 = (t_0, \infty)$ при граничных условиях (2.2) с (начальными) производными $\xi^{(k)}(t_0)$, $k = 0, \ldots$ $\ldots, p-1$, задающей случайный процесс $\xi = \xi(t)$, $t \geqslant t_0$, вида

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \xi^{(k)}(t_0)\, u_k(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} u_{p-1}(t, s)\, \eta(ds),$$

где $u_k(t, t_0)$, $k = 0, \ldots, p-1$, есть система решений однородного уравнения $Lu = 0$ в S_0 с граничными условиями

$$u_k^{(m)}(t_0, t_0) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (m = 0, \ldots, p-1),$$

а $\eta(ds)$ — стохастическая мера с независимыми значениями, отвечающими источнику η на $\mathscr{F}(S_0) = \mathscr{L}_2(S_0)$. Именно, рассматривая $S = (t, \infty)$, мы видим, что на отрезке $[t_0, t] = S^c$ случайный процесс ξ определяется начальными $\xi^{(k)}(t_0)$, $k = 0, \ldots, p-1$, и источником η на интервале (t_0, t), и, таким образом, для задаваемых производными $\xi^{(k)}(t)$, $k=0, \ldots, p-1$ граничных значений $\mathfrak{A}(\Gamma)$ на границе $\Gamma=\{t\}$ мы имеем соответственно

$$\mathfrak{A}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{B}(S^c) \vee \mathfrak{A}^+(\Gamma_0),$$

что при независимости от граничного $\mathfrak{A}^+(\Gamma_0)$ на $\Gamma_0=\{t_0\}$ случайном источнике η с нулевым средним дает для наилучшего прогноза $u=\hat{\xi} \in \mathbf{W}(S)$ граничную задачу (2.21), (2.22).

ГЛАВА IV

ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения *)

1° Гауссовские величины и σ-алгебры событий. Имея дело с той или иной совокупностью $\{\xi\}$ действительных случайных величин, их называют *гауссовскими*, если гауссовскими являются совместные распределения вероятностей любых (взятых в конечном числе) величин этой совокупности. Напомним, что гауссовское распределение вероятностей в R^n (распределение случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$) имеет характеристическую функцию

$$E \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k\right\} = \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1} b_{kj} \lambda_k \lambda_j\right\}.$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n,$$

с параметрами

$$a_k = E\xi_k, \quad b_{kj} = E(\xi_k - a_k)(\xi_j - a_j), \quad k, j = 1, \ldots, n,$$

которые, подчеркнем, непрерывно зависят от величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$; отметим, что для $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с нулевыми средними и невырожденной корреляционной матрицей $B = \{b_{kj}\}$ в R^n имеется плотность вероятности

$$\frac{1}{(2\pi)^n \det B^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}x, x\right)\right\}, \tag{1.1}$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n.$$

Ограничимся рассмотрением действительного $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$. В нем замкнутая линейная оболочка $H = H(\xi)$ произвольной совокупности $\{\xi\}$ гауссовских величин дает нам гауссовские же величины $\{\eta\} = H$. Благодаря этому обстоятельству, например, при переходе от гауссовской случайной функции $\xi(t)$, $t \in T$, переменного $t \in T$ в об-

---

*) См. также Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения /Тр. МИАН СССР. Т. 108.— М.: Наука, 1968.

ласти $T \subseteq R^d$ к величинам

$$(\varphi, \xi) = \int \varphi(t)\xi(t)\,dt, \qquad \varphi \in C_0^\infty(T),$$

мы получаем обобщенную гауссовскую функцию (φ, ξ), $\varphi \in C_0^\infty(T)$. Остановимся на этом несколько подробнее.

Интеграл от гауссовской функции. Рассмотрим гауссовскую функцию $\xi(t)$, $t \in T$, на измеримом пространстве T с мерой $m(dt)$ как функцию со значениями в пространстве $\mathscr{L}_2(\Omega)$, считая ее (сильно) интегрируемой. Напомним, что кусочно постоянная функция $\xi(t)$, принимающая постоянные значения ξ_k на измеримых множествах $\Delta_k \subseteq T$:

$$\xi(t) = \xi_k, \quad k \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots \quad \left(\bigcup_k \Delta_k = T\right),$$

называется интегрируемой, если интегрируемой является числовая функция $\|\xi(t)\|$, $t \in T$; при этом

$$\int_T \xi(t)\,m(dt) = \sum_k \xi_k m(\Delta_k);$$

произвольная функция $\xi(t)$ называется *интегрируемой*, если найдется такая последовательность интегрируемых кусочно постоянных функций $\xi_n(t)$, что

$$\lim \int_T \|\xi(t) - \xi_n(t)\|\,m(dt) = 0;$$

при этом (сильный) предел

$$\int_T \xi(t)\,m(dt) = \lim \int_T \xi_n(t)\,m(dt)$$

не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности. Ясно, что аппроксимирующие функции $\xi_n(t)$ всегда можно взять со значениями в замкнутой линейной оболочке величин $\xi(t)$, $t \in T$ (обозначим ее H), поскольку для проекций $\widehat{\xi}_n(t)$ величин $\xi_n(t)$ на H мы имеем

$$\|\xi(t) - \widehat{\xi}_n(t)\| \leqslant \|\xi(t) - \xi_n(t)\|.$$

Таким образом,

$$\int_T \xi(t)\,m(dt) \in H,$$

где для гауссовских величин $\xi(t)$, $t \in T$, совокупность H является **г а у с с о в с к о й**.

Отметим, что функция $\xi(t) \in H = \mathscr{L}_2(\Omega)$, $t \in T$, интегрируема тогда и только тогда, когда действительная функция

$$\xi(t) = \xi(\omega, t), \quad (\omega, t) \in \Omega \times T,$$

пары переменных (ω, t) измерима относительно произведения мер $P \times m$ и

$$\int_T \|\xi(t)\| m(dt) < \infty.$$

При этом в качестве надлежащей аппроксимирующей последовательности можно взять действительные кусочно постоянные функции $\xi_n(t) = \xi_n(\omega, t)$, принимающие конечное число различных ξ_{nk} на непересекающихся множествах $A_{nk} \times \Delta_{nk}$ с $A_{nk} \in \Omega$ и $\Delta_{nk} \in T$ (совокупность множеств указанного вида порождает σ-алгебру измеримых множеств в произведении $\Omega \times T$). Отметим также, что интеграл $\int \xi(t) m(dt)$ как величина в пространстве $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$ есть

$$\int_T \xi(t) m(dt) = \int_T \xi(\omega, t) m(dt), \qquad \omega \in \varphi,$$

где справа стоит интеграл от числовой функции $\xi(\omega, t)$, $t \in T$, при фиксированном ω; этот интеграл существует при почти всех $\omega \in \Omega$, поскольку

$$\int_\Omega \int_T |\xi(\omega, t)| m(dt) P(d\omega) \leqslant \int_T \|\xi(t)\| m(dt).$$

Гауссовские σ-алгебры событий. Рассматривая совокупность гауссовских величин $\{\xi\}$ и порождаемую ими σ-алгебру событий $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\xi)$, можно перейти к их замкнутой линейной оболочке $H = H(\xi)$. При таком переходе, имея дело с различными гауссовскими H и порождаемыми ими σ-алгебрами $\mathfrak{A}$, *пересечение* $\cap\mathfrak{A}$ *можно охарактеризовать как σ-алгебру, порождаемую гауссовской совокупностью* $\cap H$.

Покажем это для последовательности гауссовских $H = H_n$, $n = 0, 1, \ldots$ Используя подпространства $\mathbf{H}_n$ в $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$, каждое из которых образовано величинами, измеримыми относительно соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$, достаточно показать, что пересечение

$$\cap \mathbf{H} = \mathbf{H}_\infty$$

совпадает с подпространством $\mathbf{H}_\infty$ величин, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$, порожденной гауссовской совокупностью

$$H_\infty = \cap H_n.$$

Не меняя обозначений, будем считать $H_n = \bigcap_{k \leqslant n} H_k$. Воспользуемся тем свойством гауссовских H_n, что ортогональные дополнения $H_n^\perp = H_{n-1} \ominus H_n$ будут независимыми при различных $n = 1, 2, \ldots$, и

$$H_0 = H_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} H_n^\perp.$$

Обозначив через $\mathfrak{A}_n^\perp$ σ-алгебры, порождаемые $H_n^\perp$, мы имеем $\mathfrak{A}_0$ как порождаемую независимыми σ-алгебрами $\mathfrak{A}_\infty$ и

$$\mathfrak{A}_\infty^\perp = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n^\perp.$$

Рассмотрим всевозможные произведения $\xi \cdot \xi^\perp$ величин в $\mathbf{H}_0$, где ξ измеримы относительно $\mathfrak{A}_\infty$, а $\xi^\perp$ — относительно $\mathfrak{A}_\infty^\perp$ (скажем, речь идет об ограниченных величинах). Такие $\xi \cdot \xi^\perp$ в совокупности образуют полную систему в $\mathbf{H}_0$; при этом в разложении

$$\xi \cdot \xi^\perp = (E\xi^\perp)\xi + \xi(\xi^\perp - E\xi^\perp)$$

первое слагаемое входит в подпространство $\mathbf{H}_\infty$, а второе ортогонально ему, так что всевозможные $\xi(\xi^\perp - E\xi^\perp)$ образуют полную систему в ортогональном дополнении

$$\mathbf{H}_\infty^\perp = \mathbf{H}_0 \ominus \mathbf{H}_\infty.$$

Возьмем произвольную величину η из пересечения всех $\mathbf{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Будучи измеримой относительно $\mathfrak{A}_n$, она не зависит от $\mathfrak{A}_n^\perp$ (при каждом $n = 1, 2, \ldots$) и, следовательно, не зависит от $\mathfrak{A}_\infty^\perp = \bigvee_n \mathfrak{A}_n^\perp$, что указывает на ортогональность η системе величин $\xi(\xi^\perp - E\xi^\perp)$, и, таким образом, η входит в подпространство $\mathbf{H}_\infty = \mathbf{H}_0 \ominus \mathbf{H}_\infty^\perp$, что и требовалось доказать.

2° Полиномы от гауссовских величин. Пусть $\{\xi\}$ — произвольная совокупность гауссовских величин и $H^p =$

$=H^p(\xi)$ — замыкание в пространстве $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$ всех полиномов степени не выше p от величин $\{\xi\}$. Включив в рассматриваемую совокупность величину $\xi\equiv 1$, можно сказать, что H^p есть замкнутая линейная оболочка произведений $\xi_1\ldots\xi_k$, $k\leqslant p$, всевозможных величин из $\{\xi\}$; в частности, $H=H^1$ есть замкнутая линейная оболочка самой совокупности $\{\xi\}$. Очевидно, что H^p не изменится, если в качестве исходной совокупности взять все величины $\{\eta\}=H$,

$$H^p(\eta)=H^p(\xi) \tag{1.2}$$

— поясним: для гауссовских величин их произведения $\xi_1\ldots\xi_k$ непрерывно зависят в $H=\mathscr{L}_2(\Omega)$ от $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и для предельных

$$\eta_1=\lim\xi_1, \ \ldots, \ \eta_k=\lim\xi_k$$

в H^1 получается, что

$$\eta_1\ldots\eta_k=\lim\xi_1\ldots\xi_k$$

в H^p.

Условные математические ожидания. Рассмотрим произвольную совокупность $\{\eta\}\subseteq H(\xi)$, произвольную величину $\varphi_p(\xi)\in H^p(\xi)$ и ее условное математическое ожидание относительно $\{\eta\}$; оказывается, что

$$E[\varphi_p(\xi)/\{\eta\}]\in H^p(\eta). \tag{1.3}$$

Покажем это. При $p=1$, имея дело с гауссовскими величинами $\varphi_1(\xi)=\xi\in H^1(\xi)$, получаем

$$E[\varphi_1(\xi)/\{\eta\}]=\widehat{\xi}$$

как проекцию $\widehat{\xi}$ величины ξ на подпространство $H^1(\eta)$, поскольку ортогональная к $H^1(\eta)$ гауссовская величина $\xi-\widehat{\xi}$ не зависит от $\{\eta\}$ и

$$E[\xi-\widehat{\xi}/\{\eta\}]=E(\xi-\widehat{\xi})=0.$$

Допустив справедливость (1.3) при всех $p<q$ и рассматривая при $p=q$ соответственно $\varphi_q(\xi)=\xi_1\ldots\xi_q$ возьмем проекции $\widehat{\xi}_1, \ldots, \widehat{\xi}_q$ на $H^1(\eta)$ и положим

$$\psi_q(\xi)=(\xi_1-\widehat{\xi}_1)\ldots(\xi_q-\widehat{\xi}_q).$$

Величина $\psi_q(\xi)\in H^q(\xi)$ не зависит от $\{\eta\}$, и

$$E[\psi_q(\xi)/\{\eta\}]=E\psi_q(\xi).$$

Разность полиномов $\varphi_q(\xi)-\psi_p(\xi)$ представляется линейной комбинацией произведений вида

$$(\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_p})(\widehat{\xi_{k_{p+1}} \ldots \xi_{k_q}}), \qquad p < q,$$

для которых

$$E\left[(\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_p})(\widehat{\xi_{k_{p+1}} \ldots \xi_{k_q}})/\{\eta\}\right] = \\ = E\left[(\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_p})/\{\eta\}\right](\widehat{\xi_{k_{p-1}} \ldots \xi_{k_q}}),$$

где, согласно нашему предположению о справедливости включения (1.3) при $p < q$, мы имеем

$$E\left[(\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_p})/\{\eta\}\right] \in H^p(\eta),$$

и вместе с $\hat{\xi}_{k_{p+1}}, \ldots, \hat{\xi}_{k_q} \in H^1(\eta)$ это дает

$$E\left[(\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_p})/\{\eta\}\right](\widehat{\xi_{k_{p+1}} \ldots \xi_{k_q}}) \in H^q(\eta).$$

В итоге получается, что

$$E[\varphi_q(\xi)/\{\eta\}] = E[\varphi_q(\xi) - \psi_q(\xi)/\{\eta\}] + E\psi_q(\xi) \in H^q(\eta).$$

Ортогональные разложения по полиномам. Для произвольной гауссовской совокупности $\{\xi\}$ всевозможные полиномы образуют полную систему в подпространстве

$$\mathbf{H}(\xi) \subseteq H = \mathscr{L}_2(\Omega)$$

всех случайных величин, измеримых относительно порождаемой $\{\xi\}$ *) σ-алгебры $\mathfrak{A}(\xi)$.

Обратившись к подпространствам $H^p = H^p(\xi)$, порожденным всеми полиномами $\varphi(\xi)$ степени не выше p, можно процессом ортогонализации перейти к подпространствам

$$H_p(\xi) = H^p(\xi) \ominus H^{p-1}(\xi), \qquad p = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

включив сюда также $H_0(\xi) = H^0(\xi)$, образованное всеми

---

*) Например, непосредственно видно, что для любой линейной комбинации $\xi = \sum_k \lambda_k \xi_k$ величин из $\{\xi\}$

$$\lim_{n\to\infty} E\left| e^{i\xi} - \sum_{k\leq n} \frac{(i\xi)^k}{k!}\right|^2 = 0,$$

а функции вида $\varphi(\xi) = e^{i\sum_k \lambda_k \xi_k}$ образуют полную систему в комплексном $\mathbf{H}(\xi)$ при любой совокупности действительных величин $\{\xi\}$.

постоянными. Получающиеся таким образом

$$\varphi(\xi) \in H_p(\xi)$$

называют *полиномами Эрмита* от гауссовской совокупности $\{\xi\}$. Понятно, что имеют место ортогональные разложения

$$H^p(\xi) = \sum_{k=0}^{p} \oplus H_k(\xi), \quad \mathbf{H}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus H_k(\xi). \tag{1.5}$$

Рассмотрим две произвольные совокупности $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ с тем лишь условием, что их совместные распределения вероятностей являются гауссовскими. Казалось бы, для различных $H_p(\xi)$, $H_q(\eta)$ нет оснований ожидать каких-либо особых связей, однако на самом деле *имеет место следующее соотношение ортогональности: при* $p \neq q$

$$H_p(\xi) \perp H_q(\eta). \tag{1.6}$$

Докажем это. Пусть для определенности $p < q$. Рассмотрим произвольную величину $\varphi = \varphi(\xi) \in H_q(\xi)$ и ее условное математическое ожидание

$$\widehat{\varphi} = E[\varphi/\{\eta\}] \in \mathbf{H}^p(\eta)$$

— см. по этому поводу (1.3). Как известно, $\widehat{\varphi}$ есть проекция величины φ на все подпространство $\mathbf{H}(\eta) = H^p(\eta) \oplus \oplus \sum\limits_{k>p} H_k(\eta)$ и, в частности, $\varphi - \widehat{\varphi} \perp H_q(\eta)$, $q > p$, что вместе с ортогональностью $H^p(\eta) \perp H_q(\eta)$ при $\widehat{\varphi} \in H^p(\eta)$ дает $\varphi = (\varphi - \widehat{\varphi}) + \widehat{\varphi} \perp H_q(\eta)$.

Согласно установленным выше свойствам полиномов Эрмита от гауссовских величин $\{\xi\}$, для любой совокупности

$$\{\eta\} \subseteq H^1(\xi)$$

подпространство $\mathbf{H}(\eta) \subseteq \mathbf{H}(\xi)$ оказывается инвариантным относительно оператора проектирования на подпространство $H_p(\xi)$, а именно,

$$\mathbf{H}(\eta) \to H_p(\eta); \tag{1.7}$$

поясним: в ортогональном разложении $\mathbf{H}(\eta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \oplus H_k(\eta)$ все $H_k(\eta)$ $(k \neq p)$, являются о р т о г о н а л ь н ы м и к

$$H_p(\xi) \supseteq H_p(\eta).$$

Отметим, что в классическом анализе *полиномами Эрмита* принято называть полиномы $\varphi_p(x)$ от действительного переменного, ортогональные при различных степенях $p = 0, 1, \ldots$ с «весом» $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(x)\, \varphi_q(x)\, p(x)\, dx = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

При любой гауссовской совокупности $\{\xi\}$, взяв в $H = H_1(\xi)$ полную ортонормированную систему $\{\eta\}$, можно получить полную ортонормированную систему во всем пространстве $\mathbf{H}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} H_k(\xi)$, образовав всевозможные величины вида

$$\varphi_{k_1}(\eta_1) \ldots \varphi_{k_n}(\eta_n)$$

с различными $\eta_1, \ldots, \eta_n$ из системы $\{\eta\}$.

3° Одна теорема сравнения для квадратичных форм от гауссовских величин. Речь будет идти о сравнении дисперсий квадратичных форм вида

$$\varphi(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} \xi_j \xi_k$$

от гауссовской совокупности $\{\xi\}$ относительно различных распределений вероятностей — скажем, P и P_0. Понятно, что здесь можно было бы говорить о различных $\{\xi\}$ и $\{\xi^0\}$ с распределениями P и P_0 при установленном взаимно однозначном соответствии

$$\xi \leftrightarrow \xi^0$$

величин из рассматриваемых совокупностей $\{\xi\}$ и $\{\xi^0\}$, сравнивая дисперсии соответствующих

$$\varphi(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} \xi_j \xi_k, \quad \varphi(\xi^0) = \sum_{j,k=1} c_{jk} \xi_j^0 \xi_k^0.$$

Рассмотрим гауссовские $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с нулевым средним и корреляцией

$$B_{jk} = E\xi_j \xi_k, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Для симметричных

$$\varphi(\xi) - E\varphi(\xi) \in H_2(\xi)$$

с коэффициентами $c_{jk}=c_{kj}$ получаем

$$E\,|\varphi(\xi)-E\varphi(\xi)|^2=2\sum_{j,k}\sum_{l,m}c_{jk}c_{lm}B_{jl}B_{km}.$$

Используя вероятностное пространство Ω с заданным на порождаемой совокупностью $\{\xi\}$ σ-алгебре $\mathfrak{A}$ общим (гауссовским) распределением P и произведение $\Omega\times\Omega$ с вероятностной мерой $P\times P$, обратимся к симметрической билинейной форме

$$\varphi(\omega,\omega')=\sum_{j,k}c_{jk}\xi_j(\omega)\,\xi_k(\omega')$$

от $(\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega$; для нее, как легко проверить,

$$\int\int|\varphi(\omega,\omega')|^2P(d\omega)\,P(d\omega')=$$
$$=\sum_{j,k}\sum_{l,m}c_{jk}c_{lm}B_{jl}B_{km}=\frac{1}{2}E\,|\varphi(\xi)-E\varphi(\xi)|^2. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь различные P и P_0. Допустим, что для всевозможных линейных форм от $\{\xi\}$

$$E\left|\sum_k c_k\xi_k\right|^2\leqslant CE_0\left|\sum_k c_k\xi_k\right|^2, \quad (1.9)$$

где указанные математические ожидания берутся относительно P, P_0. Тогда *для всех квадратичных форм* $\varphi(\xi)$ *справедливо неравенство*

$$E|\varphi(\xi)-E\varphi(\xi)|^2\leqslant C^2E_0|\varphi(\xi)-E\varphi(\xi)|^2. \quad (1.9')$$

Покажем это. Очевидно, что в силу (1.8), мы имеем соотношение

$$\int\int|\varphi(\omega,\omega')|^2P\times P=\int E\left|\sum_j\left[\sum_k c_{jk}\xi_k(\omega')\right]\xi_j\right|^2P(d\omega')\leqslant$$
$$\leqslant C\int E_0\left|\sum_j\left[\sum_k c_{jk}\xi_k(\omega')\right]\xi_j\right|^2P(d\omega')=$$
$$=C\int\int|\varphi(\omega,\omega')|^2P_0\times P,$$

которое аналогичным образом продолжается в неравенство

$$\int\int|\varphi(\omega,\omega')|^2P\times P\leqslant C^2\int\int|\varphi(\omega,\omega')|^2P_0\times P_0$$

— оно с учетом полученного выше общего выражения (1.8) для стоящих здесь интегралов и дает неравенство (1.9′).

4° Отношение правдоподобия. Рассмотрим гауссовскую совокупность $\{\xi\}$ с различными распределениями вероятностей (скажем, P и P_0). Имея то или иное данное вероятностное пространство Ω с определенными на нем случайными величинами $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, и говоря о распределении вероятностей совокупности $\{\xi\}$, обратимся к соответствующим вероятностным мерам P и P_0 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порождаемой $\{\xi\}$. Речь будет идти о плотности

$$p(\omega)=\frac{P(d\omega)}{P_0(d\omega)}$$

как функции от совокупности $\{\xi\}$, которую будем считать индексированной (произвольным) переменным $u\in U$, т. е. образованной соответствующе данными величинами

$$\xi(u)=\xi(\omega,\ u),\quad \omega\in\Omega\quad(u\in U),$$

гауссовские распределения P, P_0 которых определяются *средними*

$$A(u)=E\xi(u),\quad A_0(u)=E_0\xi(u)$$

и *корреляционными функциями*

$$B(u,\ v)=E[\xi(u)-A(u)]\,[\xi(v)-A(v)],$$
$$B_0(u,\ v)=E_0[\xi(u)-A(u)]\,[\xi(v)-A(v)]$$

от $u,\ v\in U$.

Обратимся сначала к P и P_0 с одинаковыми корреляционными функциями $B=B_0$, когда различие распределений P и P_0 проявляется в различии средних A и A_0. Будем считать $A_0=0$ — понятно, что к этому случаю всегда можно перейти, используя преобразование

$$\xi(u)\to\xi(u)-A_0(u),\quad u\in U,$$

при котором

$$A_0(u)\to 0,\quad A(u)\to a(u)=A(u)-A_0(u),\quad u\in U.$$

Рассматривая совокупность $\{\xi\}$ по отношению к распределению P_0, используем замкнутую линейную оболочку $H=H_1(\xi)$ величин $\xi=\xi(u)$, $u\in U$, имеющим по отношению к распределению P среднее $a(u)=E\xi(u)$, $u\in U$. *Оказывается, что для плотности* $p(\omega)=P(d\omega)/P_0(d\omega)$ *имеет место формула*

$$p=\sigma^2\exp\{\eta\},\tag{1.10}$$

где $\eta\in\varphi(\omega)\in H(\xi)$ *однозначно определяется из* *уравнения*

$$a(u)=\int \xi(\omega, u)\,\varphi(\omega)\,P_0(d\omega), \qquad u \in U, \tag{1.11}$$

причем само представление (1.11) *среднего* $a(u)$, $u \in U$, *с помощью некоторого* $\varphi(\omega) \in H$ *является необходимым и достаточным условием существования плотности* p; *постоянная* σ^2 *в* (1.10) *определяется нормировкой*

$$\int p(\omega)\,P_0(d\omega)=1$$

(*и имеет вид* $\sigma^2=\exp\left\{-\frac{1}{2}E_0\eta^2\right\}$).

Понятно, что представление (1.11) и величина $\eta \in H=H_1(\omega)$ не зависят от выбора индексации совокупности $\{\xi\}$ переменным $u \in U$, и (1.11) выражает то факт, что среднее $a(u)=E\xi(u)$, $u \in U$, задает на H линейный непрерывный функционал, который на линейных формах $\sum c_k\xi(u_k)$ принимает значения $\sum c_k a(u_k)$; при этом (1.11) есть фактически представление Рисса этого линейного функционала на полной системе элементов $\xi(u)$, $u \in U$.

Убедиться в справедливости (1.10), (1.11) легче всего, обратившись сначала к конечному числу ортонормированных величин $\{\xi(u),\ u=1, \ldots, n\}$ из $H=H_1(\xi)$ и порождаемой ими σ-алгебре $\mathfrak{A}_n$, на которой соответствующая плотность $p_n(\omega)=P(d\omega)/P_0(d\omega)$ с учетом общей формулы (1.1) для гауссовской плотности в R^n будет иметь вид

$$p_n=\exp\left\{\sum_{u=1}^{n} a(u)\,\xi(u)-\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{n} a^2(u)\right\},$$

где

$$a(u)=E\xi(u)=\int \xi(\omega, u)\,\eta_n(\omega)\,P_0(d\omega)$$

суть коэффициенты ортогонального разложения величины $\eta_n=\sum_{u=1}^{n} a(u)\,\xi(u)$. Легко видеть, что для расширяющихся конечных совокупностей $\{\xi(u),\ u=1, \ldots, n\}$ существование предела

$$p=\lim p_n$$

равносильно существованию предела $\eta=\lim \eta_n$, и условия этого могут быть выражены в форме (1.11), позволяющей указать предельную плотность (1.10).

Отметим одно общее положение: P_0 может быть абсолютно непрерывным относительно P лишь при условии эквивалентности

$$E\left|\sum_k c_k\xi_k\right|^2 \asymp E_0\left|\sum_k c_k\xi_k\right|^2 \tag{1.12}$$

для всевозможных линейных форм $\sum\limits_k c_k\xi_k$ от совокупности $\{\xi\}$ — очевидно, что при нарушении этого условия P и P_0 будут взаимно сингулярны. Как мы знаем (см. (1.9), (1.9)′), вместе с (1.12) будет также выполнено условие эквивалентности

$$\int\int |\varphi(\omega, \omega')|^2 P(d\omega)\, P_0(d\omega') \asymp E\,|\eta|^2$$

для всевозможных симметрических билинейных форм

$$\varphi(\omega, \omega') = \sum_{j,k} c_{jk}\xi_j(\omega)\,\xi_k(\omega') = \sum_{j,k} c_{jk}\xi_j \otimes \xi_k$$

на $\Omega\times\Omega$,

$$\varphi = \varphi(\omega, \omega) = \sum_{j,k} c_{jk}\xi_j(\omega)\,\xi_k(\omega)$$

на Ω и соответствующих

$$\eta = \varphi - E_0\varphi \in H_2(\xi),$$

представляющих полиномы Эрмита второго порядка (относительно гауссовского распределения P_0); при этом взаимно однозначное соответствие

$$\varphi(\omega, \omega') \leftrightarrow \eta = \varphi - E_0\varphi \tag{1.13}$$

между указанными величинами распространяется предельным переходом на все $\eta \in H_2(\xi)$ и соответствующие предельные $\varphi(\omega, \omega')$ (совокупность которых обозначим $H\times H$).

Рассмотрим теперь гауссовские распределения P и P_0 для величин $\{\xi\}$, индексированных переменным $u \in U$, с одинаковыми средними $A = A_0 = 0$ и различными корреляционными функциями B и B_0. Положим

$$b(u, v) = B(u, v) - B_0(u, v), \quad u, v \in U.$$

Оказывается, что *для плотности* $p(\omega) = P(d\omega)/P_0(d\omega)$ *имеет место формула*

$$p(\omega) = \sigma^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\eta(\omega)\right\}, \tag{1.14}$$

где $\eta \in H_2(\xi)$ *однозначно определяется по* $\varphi(\omega, \omega') \leftrightarrow \eta$ *из уравнения*

$$b(u, v) = \int\int \xi(\omega, u)\,\xi(\omega', v)\,\varphi(\omega, \omega')\,P(d\omega)\,P_0(d\omega'), \quad (1.15)$$

причем само представление (1.15) *с* $\varphi(\omega, \omega') \in H \times H$ *является необходимым и достаточным условием существования плотности* p; *постоянная* σ^2 *в* (1.14) *определяется нормировкой*

$$\int p(\omega)\,P_0(d\omega) = 1.$$

Задающая плотность (1.14) величина $\eta \in H_2(\xi)$ может быть определена с помощью представления (1.15) следующим образом. Возьмем в $H = H_1(\xi)$ любую полную систему величин, преобразуем ее последовательной ортогонализацией по отношению к скалярным произведениям

$$E_0\xi\eta, \quad E\xi\eta \qquad (\xi, \eta \in H)$$

в соответствующие ортонормированные системы $\{\xi_j\}$, $\{\eta_k\}$ и образуем ортонормированный базис в $H \times H$ из величин

$$\xi_j \otimes \eta_k = \xi_j(\omega)\,\eta_k(\omega'), \qquad (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega.$$

Величина $\varphi(\omega, \omega') \in H \times H$ в (1.15) представима как

$$\varphi(\omega, \omega') = \sum_{j,k} c_{jk}\xi_j \otimes \eta_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\xi_j \otimes \eta_k$$

с коэффициентами

$$c_{jk} = E\xi_j\eta_k - E_0\xi_j\eta_k,$$

причем указанные здесь частичные суммы являются симметричными величинами в $H \times H$, что видно, например, из представления

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\xi_j \otimes \eta_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sigma_j^2 - 1\right) \zeta_j \otimes \zeta_j,$$

где при данном n в общей линейной оболочке величин ξ_j $(j = 1, \ldots, n)$ и η_k $(k = 1, \ldots, n)$ использована система величин с

$$E_0\zeta_j\zeta_k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad E\zeta_j\zeta_k = \begin{cases} \sigma_j^2, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Согласно (1.15), *величина* $\eta \in H_2(\xi)$, *задающая плотность*

(1.14), *представима как*

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=1}^{n} (E\xi_j\eta_k - E_0\xi_j\eta_k)(\xi_j\eta_k - E_0\xi_j\eta_k) =$$

$$= \sum_{j,k} (E\xi_j\eta_k - E_0\xi_j\eta_k)(\xi_j\eta_k - E_0\xi_j\eta_k). \quad (1.16)$$

Отметим, что вычисление по этой формуле проводится с помощью ортогонализации произвольно взятой полной системы величин в $H = H(\xi)$ и не требует, скажем, решения задач по отысканию базисной системы $\{\zeta_j\}$ в H, ортогональной одновременно по отношению к обоим скалярным произведениям $E_0\xi\eta$, $E\xi\eta$ $(\xi, \eta \in H)$.

Поясним, например, как из представления (1.15) вытекает условие эквивалентности (1.12).

Для линейных форм от величин $\{\xi\}$, индексированных переменных $u \in U$, мы имеем

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 - E_0\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 = \sum_{j,k} c_jc_k b(u_j, u_k) =$$

$$= \int\int \left[\sum_{j=1}^{n} c_j\xi(\omega, u_j)\right]\left[\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(\omega', u_k)\right]\varphi(\omega, \omega')\, P(d\omega)\, P_0(d\omega') \leqslant$$

$$\leqslant E\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 E_0\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 \int\int |\varphi(\omega, \omega')|^2 P(d\omega)\, P_0(d\omega'),$$

и видно, что если $E\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 \to 0$, то также $E_0 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi(u_k)\right|^2 \to 0$, и наоборот.

Очевидно, что представление (1.15) и величина $\eta \in H_2(\xi)$ не зависят от выбора индексации совокупности $\{\xi\}$ переменным $u \in U$, и (1.15) выражает тот факт, что разность корреляционных функций задает в гильбертовом $H \times H$ линейный непрерывный функционал, который на билинейных формах $\varphi(\omega, \omega') = \sum_{j,k} c_{jk}\xi(\omega, u_j)\,\xi(\omega', u_k)$ принимает значения $\sum_{j,k} c_{jk} b(u_j, u_k)$; при этом (1.15) есть фактически представление Рисса этого линейного функционала на полной системе элементов $\xi(\omega, u)\,\xi(\omega', v)$, $u, v \in U$, в пространстве $H \times H$. Понятно, что представление (1.15) будет иметь место, если в указанном выше смысле разность корреляционных функций $b(u, v)$ задает линейный непрерывный функционал в гильбертовом $H \times H$ с эквивалентной нормой

$$\int\int |\varphi(\omega, \omega')|^2 P_0(d\omega) P_0(d\omega') \asymp \int\int |\varphi(\omega, \omega')|^2 P(d\omega) P_0(d\omega).$$

Как уже фактически отмечалось, такая эквивалентность есть следствие условия (1.12), и при его выполнении (1.15) можно заменить аналогичным представлением

$$b(u, v) = \int\int \xi(\omega, u)\,\xi(\omega', v)\,\varphi_0(\omega, \omega')\,P_0(d\omega)\,P_0(d\omega') \quad (1.15)'$$

с соответствующим $\varphi_0(\omega, \omega') \in H \times H$. Подчеркнем, что это представление равносильно (1.15) лишь при условии эквивалентности (1.12). Обратившись к (1.15)′, рассмотрим линейный ограниченный оператор в гильбертовом $H = H_1(\xi)$, определяемый билинейной формой

$$E\xi\eta - E_0\xi\eta = \langle \xi, b\eta \rangle_H \quad (1.17)$$

от $\xi, \eta \in H$; имея

$$\langle \xi(u), b\xi(v) \rangle_H = \int_\Omega \xi(\omega, u)\,[b\xi(\omega, v)]\,P_0(d\omega) = b(u, v) =$$

$$= \int_\Omega \xi(\omega, u) \left[\int_\Omega \varphi_0(\omega, \omega')\,\xi(\omega', v)\,P_0(d\omega') \right] P_0(d\omega),$$

видим, что этот оператор, определяемый разностью $b(u, v)$, задается ядром $\varphi_0(\omega, \omega') \in H \times H$,

$$b\eta(\omega) = \int_\Omega \varphi_0(\omega, \omega')\,\eta(\omega')\,P_0(d\omega)$$

— напомним, что этого типа операторы составляют класс операторов Гильберта — Шмидта. В итоге получается, что *для абсолютной непрерывности P относительно P_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие эквивалентности* (1.12) *и определяемый разностью корреляций оператор в* (1.17) *был бы оператором Гильберта — Шмидта* *).

Условие (1.15) на разность корреляционных функций, очевидно, является симметричным по отношению к P и P_0 — при перемене их местами лишь меняется знак самой разности и величины $\varphi(\omega, \omega') \in H \times H$; это показывает,

---

*) Это условие было указано Фелдманом — см. Feldman J. Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes // Pacific J. Math.— 1960.— V. 10.— P. 1211—1220.

что *гауссовские распределения P и P_0 либо взаимно абсолютно непрерывны (эквивалентны), либо взаимно сингулярны.*

Убедиться в справедливости (1.14), (1.15) легче всего, обратившись сначала к конечному числу величин $\{\xi(u),\ u=1,\ \ldots,\ n\}$ в $H=H_1(\xi)$, ортонормированных по отношению к распределению P_0 и ортогональных по отношению к P

$$E\xi(u)^2=\sigma^2(u), \quad u=1,\ \ldots,\ n.$$

На порождаемой ими σ-алгебре $\mathfrak{A}_n$ соответствующая плотность $p_n(\omega)=P(d\omega)/P_0(d\omega)$ с учетом общей формулы (1.1) для гауссовской плотности в R^n будет иметь вид

$$p_n=\sigma^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\eta_n\right\},$$

где $\eta_n=\varphi_n-E\varphi_n\leftrightarrow\varphi_n(\omega,\ \omega')$ согласно (1.13) соответствует билинейной форме

$$\varphi_n(\omega,\ \omega')=\sum_{u=1}^{n}\frac{\sigma^2(u)-1}{\sigma^2(u)}\xi(\omega,\ u)\,\xi(\omega',\ u),$$

— поясним, что в представлении (1.15), отвечающим выбранной нами индексации $\{\xi(u),\ u=1,\ \ldots,n\}$, мы имеем

$$b(u,\ v)=E\xi(u)\,\xi(v)-E_0\xi(u)\,\xi(v)=\begin{cases}\sigma^2(u)-1, & v=u,\\ 0, & v\neq u\end{cases}$$

коэффициентами при ортогональных $\xi(\omega,\ u)\,\xi(\omega',\ u)$ $u,\ v=1,\ \ldots,\ n$, в $H\times H$. Для расширяющихся конечных совокупностей, каждая из которых может быть индексирована указанным выше способом как $\{\xi(u),\ u=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n\}$, существование предела

$$p=\lim p_n$$

равносильно существованию предела $\eta=\lim\eta_n$, и условия этого могут быть выражены в форме (1.15), позволяющей непосредственно указать предельную плотность (1.14). □

Указанному критерию эквивалентности гауссовских распределений P, P_0 для семейства $\{\xi(u)\}$ случайных величин $\xi(u)=(u,\ \xi)$, индексированных пробными $u\in\mathcal{D}=$ $=C_0^\infty(T)$ и образующих обобщенное случайное поле $\xi=(u,\ \xi)$ в области $T\subseteq R^d$, можно придать несколько иную форму, выразив этот критерий непосредственно через корреляционные операторы B, B_0 рассматриваемых распределений. Напомним, мы ввели корреляционный оператор (остановимся для определенности на B_0) как

$$B_0\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}^*,$$

при каждом $u \in \mathscr{D}$ задающим обобщенную функцию $B_0 u \in \mathscr{D}^*$,

$$B_0 u = (\varphi, B_0 u) = E_0(\varphi, \xi)(u, \xi), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

и его можно рассматривать в рамках общей схемы § 1 гл. I на *собственном* для ξ гильбертовом пространстве $W_0 = [\mathscr{D}]$, которое отвечает скалярному произведению

$$\langle \varphi, u \rangle_{W_0} = E_0(\varphi, \xi)(u, \xi), \quad \varphi, u \in \mathscr{D},$$

и является изометричным пространству $H = H_1(\xi)$ — замыканию всех величин (φ, ξ), $\varphi \in \mathscr{D}$, в $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$; при этом B_0 совпадает на $\mathscr{D} \subseteq W_0$ с унитарным оператором

$$B_0\colon W_0 \to X_0$$

в сопряженное гильбертово $W_0^* = X_0 \subseteq \mathscr{D}'$. Заменив $H = H_1(\xi)$ на изометричное W_0 с плотным в нем $D = C_0^\infty(T)$, критерий эквивалентности гауссовских распределений P, P_0 можно выразить следующим образом: *корреляционный B является обратимым оператором*

$$B\colon W_0 \supseteq \mathscr{D} \to X_0 \subseteq \mathscr{D}^*,$$

таким, что разность

$$B - B_0\colon W_0 \to X_0 \tag{1.17'}$$

есть оператор Гильберта — Шмидта.

§ 2. Идентификация коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений по реализации их решения

1° Условия эквивалентности и взаимной сингулярности гауссовских распределений. Обратимся к предложенной нами в § 1 гл. II модели обобщенного случайного поля $\xi = (x, \xi)$, $x \in D = C_0^\infty(T)$, представляющего единственное решение $\xi \in \mathbf{W}$ стохастического уравнения

$$L\xi = \eta$$

в области $T \subseteq R^d$, где, напомним, L может быть дифференциальным оператором общего вида при его рассмотрении в пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{L}_2(T)$ или это может быть дифференциальный оператор вида $L = \mathcal{P} \geqslant 0$ в отвечающем ему пространстве $\mathcal{F} = W = [\mathcal{D}]$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_W = (u, \mathcal{P}v), \quad u, v \in \mathcal{D};$$

стохастический источник η будем считать представленным гауссовским белым шумом на соответствующем $\mathcal{F}$. Имея дело с различными операторами L, поставим вопрос об эквивалентности соответствующих распределений вероятностей для $\xi = (x, \xi)$, $x \in \mathcal{D}$.

Здесь речь идет о гауссовских распределениях с нулевым средним и корреляционным оператором B, который, как мы знаем (см. 2° § 1 гл. III), имеет вид

$$B = \mathcal{P}^{-1}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P} = L^*L$ в модели с оператором L в $\mathcal{F} = \mathcal{L}_2(T)$ и $\mathcal{P} = L$ в модели с $L \geqslant 0$ в $\mathcal{F} = W = [\mathcal{D}]$; напомним в связи с этим, что $\xi = (x, \xi)$, $x \in \mathcal{D}$, представляет единственное решение $\xi \in \mathbf{W}$ стохастического дифференциального уравнения

$$\mathcal{P}\xi = \eta \tag{2.2}$$

с источником «белого шума» η на $W = [\mathcal{D}]$, и использование уравнения общего вида (2.2) непосредственно дает указанную в (2.1) связь с соответствующим распределением вероятностей. Уточним еще, что

$$B = \mathcal{P}^{-1}: X \to W$$

есть унитарный оператор, задающий представление Рисса сопряженного $W = X^*$ к пространству обобщенных пробных функций $x \in X = [\mathcal{D}]$ типа W, являющегося собственным для $\xi = (x, \xi)$, $x \in \mathcal{D}$.

Рассмотрим модель (2.2) с оператором $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ в пространстве $W = W_0$ и другим оператором $\mathcal{P}$ в его $W = [\mathcal{D}]$, обозначив через P и P_0 гауссовские распределения отвечающего им $\xi = (x, \xi)$, $x \in \mathcal{D}$. Условие эквивалентности P, P_0 включает эквивалентность

$$\|x\|_X^2 = E\,|(x, \xi)|^2 \asymp E_0\,|(x, \xi)|^2 = \|x\|_{X_0}^2, \quad x \in \mathcal{D}, \tag{2.3}$$

которая и будет предполагаться в дальнейшем; при этом, как мы знаем, корреляционный B будет обратимым оператором

$$B = \mathscr{P}^{-1}\colon\ X_0 \to W_0,$$

а необходимое и достаточное условие эквивалентности гауссовских P, P_0 будет выражаться в том, что

$$B - B_0\colon\ X_0 \to W_0 \tag{2.4}$$

есть оператор Гильберта — Шмидта; здесь в сравнении с (1.47′) лишь поменялись местами обозначения W_0 и X_0 соответствующих пространств типа W. Это равносильно тому, что оператором Гильберта — Шмидта является

$$(B - B_0)\mathscr{P}_0\colon\ W_0 \to W_0$$

с унитарным

$$\mathscr{P}_0 = B_0^{-1}\colon\ W_0 \to X_0 = \mathscr{P}_0 W_0.$$

Умножив

$$(B - B_0)\mathscr{P}_0 = B\mathscr{P}_0 - I$$

слева на обратимый (ограниченный с ограниченным обратным $B = \mathscr{P}^{-1}$) оператор $\mathscr{P}$, получим следующий результат.

Теорема. *Для эквивалентности гауссовских P, P_0 необходимо и достаточно, чтобы разность*

$$\mathscr{P} - \mathscr{P}_0\colon\ W_0 \to X_0 \tag{2.5}$$

представляла оператор Гильберта — Шмидта. □

Для примера обратимся к невырожденным эллиптическим операторам $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_0$ порядка $2p$ на соболевском $W_0 = \mathring{W}_2^p(T)$ с

$$\|u\|_{W_0}^2 \asymp \|u\|_p^2 = \sum_{|k| \leqslant p} \int |\partial^k u|^2, \quad u \in D.$$

Будем считать, что $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_0$ имеют гладкие коэффициенты с ограниченными k-ми производными, $|k| \leqslant 2p$. Покажем, что разность

$$A = \delta\mathscr{P} = \sum_{|k| \leqslant q} w_k \partial^k$$

представляет дифференциальный оператор порядка q, ограниченный в схеме

$$A\colon\ \mathring{W}_2^p(T) \to \mathring{W}_2^n(T)$$

с показателем $n \leqslant p - q$. Действительно, оператор дифференцирования

$$\partial\colon \mathring{W}_2^m(T) \to \mathring{W}_2^{m-1}(T)$$

является ограниченным при всех $m = 0, \pm 1, \ldots$, что очевидно при $m > 0$, а при $m \leqslant 0$ получается, например, из ограниченности билинейной формы

$$|(\varphi, \partial x)| = |(\partial\varphi, x)| \leqslant \|\partial\varphi\|_{-m}\|x\|_m \leqslant C\|\varphi\|_{-m+1}\|x\|_m$$

от $\varphi \in C_0^\infty(T)$, $x \in \mathring{W}_2^m(T)$, дающей

$$\|\partial x\|_{m-1} = \sup_{\|\varphi\|_{-m+1} \leqslant 1} |(\varphi, \partial x)| \leqslant C\|x\|_m;$$

оператор умножения на гладкую функцию $w = w(t)$ с ограниченными k-ми производными, $|k| \leqslant m$, будет ограниченным в любом $\mathring{W}_2^m$, что очевидно при $m \geqslant 0$ и получается при $m < 0$ из ограниченности формы

$$|(\varphi, wx)| = |(w\varphi, x)| \leqslant \|w\varphi\|_{-m}\|x\|_m \leqslant C\|\varphi\|_{-m}\|x\|_m$$

от $\varphi \in C_0^\infty(T)$, $x \in W_2^m(T)$, дающей

$$\|wx\|_m = \sup_{\|\varphi\|_{-m} \leqslant 1} |(\varphi, wx)| \leqslant C\|x\|_m,$$

и в итоге указанная ограниченность $A = \sum\limits_{|k| \leqslant q} a_k\partial^k$ получается последовательным применением операторов дифференцирования и умножения на функции. Как мы знаем, для $n = p - q > -p$ вложение

$$I\colon W_2^n(T) \to W_2^{-p}(T)$$

будет оператором Гильберта — Шмидта при

$$n - (-p) = n + p > d/2,$$

и, следовательно, в схеме

$$W_2^p(T) \xrightarrow{A} W_2^n(T) \xrightarrow{I} W_2^{-p}(T)$$

с ограниченным A произведение IA будет оператором Гильберта — Шмидта, представляющим

$$A\colon W_2^p(T) \to W_2^{-p}(T).$$

Поясним: в случае сопряженных ограниченного A^* и Гильберта — Шмидта I^*

$$\sum_j \|A^*I^*v_j\|_p^2 \leqslant C\sum_j \|I^*v_j\|_n^2 < \infty$$

для ортонормированного базиса в $\mathring{W}_2^{-p}(T)$. Таким образом, соотношение
$$n+p=2p-q>d/2$$
является условием того, что $A=\delta\mathscr{P}=\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$ будет оператором Гильберта — Шмидта, и в итоге для *стохастических эллиптических уравнений типа* (2.2) с различными дифференциальными операторами
$$\mathscr{P}=\sum_{|k|\leqslant 2p} a_k\partial^k \tag{2.6}$$
порядка $2p$ в ограниченной области $T\subseteq R^d$ d-мерного R^d и отвечающих им гауссовских распределений получается следующий результат *).

Теорема. *Распределения P, P_0 эквивалентны при условии, что операторы $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_0$ имеют одинаковыми все старшие коэффициенты порядка $|k|>q$ с целым*
$$q<2p-d/2. \tag{2.7}$$

Как уже фактически отмечалось по поводу операторов Гильберта — Шмидта, неравенство (2.7) не может быть улучшено — *имеются простые примеры*, в которых при обратном неравенстве условие эквивалентности (2.5) нарушается. В дальнейшем мы представим широкий класс такого рода примеров, в которых по реализации случайного поля ξ, описываемого стохастическим уравнением (2.2) с эллиптическим оператором $\mathscr{P}=\sum a_k\partial^k$, однозначно определяются все коэффициенты a_k, $|k|>q$, с указанным выше q.

Согласно этому, решение $\xi\in\mathbf{W}$ стохастического уравнения (2.2) при различных $\mathscr{P}$ (имеющих различие в старших коэффициентах a_k, $|k|>q$, указанного в (2.7) порядка) будет иметь взаимно сингулярные распределения P, что дает принципиальную возможность безошибочно идентифицировать по отдельной реализации ξ соответствующее P **).

---

*) Ср. Inoue K. Equivalence of measures for some class of Gaussian fields // J. Multivar. Anal.— 1976.— V. 6, № 2.— P. 295—308; Соколова С. Д. Об эквивалентности гауссовских мер, отвечающих решениям стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероят. и ее примен.— 1983.— Т. 28, № 2.— С. 429—433.

**) Отметим, однако, что для случайного ξ, распределение вероятностей P которого принадлежит данному семейству взаимно сингулярных распределений, вообще отнюдь не всегда по реализа-

2° Идентификация коэффициентов. Обратимся к вопросу об идентификации коэффициентов дифференциального оператора $\mathscr{P}$ в стохастическом уравнении (2.2) по реализации его решения *) $\xi \in W$, остановившись на случае постоянных коэффициентов, когда оператору

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial) = \sum_{\{\alpha\}} a_\alpha \partial^\alpha \tag{2.8}$$

с $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из данной совокупности $\{\alpha\}$, индексирующей производные ∂^α, отвечает полином

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(z) = \sum_{\{\alpha\}} a_\alpha z^\alpha \geqslant 0$$

от $z = e^{i\lambda}$, $\lambda \in R^d$ (см. по этому поводу § 2 гл. II).

Примером относящихся сюда результатов может служить известная теорема Леви **), согласно которой для броуновского движения $\xi = \xi(t)$, $t \geqslant 0$, с коэффициентом диффузии σ^2 при почти всех реализациях (скажем, на интервале $I = (0, 1)$) мы имеем

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right|^2$$

— напомним, что броуновское движение представляет обобщенное решение $\xi \in \mathbf{W}$ простейшего уравнения (2.2) с оператором

$$\mathscr{P} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{d^2}{dt^2}$$

на полупрямой $T = (0, \infty)$.

ции ξ можно определить соответствующее P; скажем, хорошо известен пример гауссовских распределений P на плоскости, каждое из которых имеет носитель на своей прямой, где оно есть одномерное гауссовское распределение с данными параметрами — понятно, по реализации ξ можно определить лишь весь пучок прямых, проходящих через точку $\xi = x$ на плоскости, и не более того.

*) См. Горяинов В. Б. О теоремах типа Леви — Бакстера для стохастических эллиптических уравнений // Теория вероятн. и ее примен.— 1988.— Т. 33, № 1.— С. 176—179, а также Арато Н. М. Об одной теореме для обобщенных гауссовских полей // Теория вероятн. и ее примен.— 1989.— Т. 34, № 4.— С. 409—411, где рассматриваются переменные коэффициенты.

**) См. еще, например, Розанов Ю. А. Бесконечномерные гауссовские распределения/Тр. МИАН СССР, т. 108.— М.: Наука, 1968, где имеются предельные теоремы типа Леви — Бакстера, позволяющие идентифицировать параметры в семействе взаимно сингулярных гауссовских распределений для широкого класса случайных процессов.

Мы обратимся к стационарному решению $\xi \in \mathbf{W}$ в $T = R^d$, условия существования которого выражаются локальной интегрируемостью функции

$$f(\lambda) = \frac{1}{\mathscr{P}(i\lambda)}, \quad \lambda \in R^d, \tag{2.9}$$

представляющей спектральную плотность обобщенного стационарного гауссовского поля $\xi = (x, \xi)$, $x \in C_0^\infty(R^d)$. Зато при этом мы откажемся от условия невырожденности

$$\Big| \sum_{|\alpha|=2p} a_\alpha z^\alpha \Big|^2 \geqslant c\, |z|^{2p},$$

относительно $\mathscr{P}$ в (2.8) предполагая лишь, что $a_\beta \neq 0$ для $\beta \in \{\alpha\}$, являющихся **крайними** точками выпуклой оболочки в R^d всех имеющихся α старшего порядка $|\alpha| = 2p$, и что полином $\mathscr{P}(z)$ является мажорантой своих членов,

$$|z^\alpha| \leqslant C\mathscr{P}(z) \tag{2.10}$$

для данной в (2.8) совокупности $\{\alpha\}$ (очевидно, что указанные здесь требования будут выполнены при условии невырожденности $\mathscr{P}(z)$ для совокупности **всех** α, $|\alpha| \leqslant 2p$).

Предваряя точные формулировки, коротко можно сказать, что каждый коэффициент в (2.8) порядка

$$|\alpha| > 2p - d/2 \tag{2.11}$$

определяется по реализации $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in C_0^\infty(I)$, в сколь угодно малой области $I \subseteq R^d$ (мы возьмем для удобства обозначений единичный куб $I = (0, 1)^d$) с помощью квадратичных функционалов вида

$$S_n = \sum_m \frac{1}{B_n} [(Q\varphi_{mn}, \xi)^2 - A_n]; \tag{2.12}$$

здесь для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (2.11) берутся надлежащий дифференциальный оператор Q, нормирующие постоянные A_n, B_n и функции $\varphi_{mn}(t) = \varphi(n^\gamma t - m)$, получающиеся из $\varphi \in C_0^\infty(I)$ указанным преобразованием сжатия — переноса с подходящим $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ и $m = (m_1, \ldots, m_d)$ на целочисленной решетке с $m_k = 0, \ldots, n^{\gamma_k} - 1$ $(k = 1, \ldots, d)$, где целое $n \to \infty$.

Перейдем к более детальному описанию процедуры определения коэффициентов a_α указанного в (2.11) порядка. Начнем с крайних старших $\alpha = \beta$, $|\beta| = 2p$, для каждого из них выбирая подходящее γ, дающее

$$(\alpha, \gamma) < (\beta, \gamma) \tag{2.13}$$

при всех $\alpha \neq \beta$; здесь, например, можно взять γ с компонентами

$$\gamma_k \sim 1 + \varepsilon\beta_k^0 \quad (k = 1, \ldots, d),$$

указанными при малом ε с точностью до $o(\varepsilon)$, где $\beta^0 = (\beta_1^0, \ldots, \beta_d^0)$ задает гиперплоскость $\{\lambda\colon (\lambda, \beta^0) = (\beta, \beta^0)\}$ в R^d, отделяющую все $\alpha \neq \beta$ с

$$(\alpha, \gamma) \sim |\alpha| + \varepsilon(\alpha, \beta^0) < 2p + \varepsilon(\beta, \beta^0) \sim (\beta, \gamma).$$

Для каждого крайнего $\alpha = \beta$ возьмем

$$Q = \partial^\beta,$$

$$A_n = 0, \quad B_n = n^{(\beta, \nu)}(\varphi, \partial^\beta \varphi) = n^{(\beta, \nu)} \int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 (-i\lambda)^\beta \, d\lambda.$$

Вообще, используя тот или иной дифференциальный оператор $Q = Q(\partial)$ с постоянными коэффициентами и отвечающий ему полином $Q = Q(i\lambda)$, для соответствующих величин $(Q\varphi_{mn}, \xi)$ в (2.12) стационарного поля ξ со спектральной плотностью (2.9) мы имеем

$$E\,|(Q\varphi_{mn}, \xi)|^2 = E\,|(Q\varphi_{0n}, \xi)|^2 = \int |\widetilde{\varphi}_{0n}(\lambda)|^2 \frac{|Q(i\lambda)|^2}{\mathscr{P}(i\lambda)} \, d\lambda,$$

где преобразование Фурье $\widetilde{\varphi}_{0n}$ есть

$$\widetilde{\varphi}_{0n}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\lambda t} \varphi(n^\gamma t) \, dt = n^{-|\gamma|} \widetilde{\varphi}(\lambda n^{-\gamma}), \qquad \lambda \in R^d,$$

что сразу же получается после замены $n^\gamma t \to t$, точнее,

$$n^{\gamma_k} t_k \to t_k \quad (k = 1, \ldots, d),$$

с якобианом $n^{|\gamma|}$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. После аналогичной замены $\lambda n^{-\gamma} \to \lambda$ с якобианом $n^{-|\gamma|}$ приходим к выражению

$$E\,|(Q\varphi_{mn}, \xi)|^2 = n^{-|\gamma|} \int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \frac{|Q(i\lambda n^\gamma)|^2}{\mathscr{P}(i\lambda n^\gamma)} \, d\lambda.$$

В нем для

$$\mathscr{P}(i\lambda n^\gamma) = \sum_{(\alpha)} a_\alpha (i\lambda)^\alpha n^{(\alpha, \gamma)}$$

и $Q(i\lambda n^{\gamma})=(i\lambda)^{\beta}n^{(\beta,\gamma)}$ в силу неравенства (2.13) при $n\to\infty$ мы имеем

$$\frac{|Q(i\lambda n^{\gamma})|^2}{\mathscr{P}(i\lambda n^{\gamma})}\sim\frac{1}{a_\beta}(-i\lambda)^{\beta}n^{(\beta,\gamma)},$$

$$E\,|(Q\varphi_{mn},\xi)|^2\sim\frac{1}{a_\beta}\int|\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2(-i\lambda)^{\beta}\,d\lambda\cdot n^{(\beta,\gamma)}=\frac{B_n}{a_\beta},$$

что для S_n в (2.12), где число различных $m=(m_1,\ldots,m_d)$ составляет $n^{|\gamma|}$, дает

$$\lim_{n\to\infty}ES_n=\theta \tag{2.14}$$

с $\theta=1/a_\beta$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}E\,|S_n-\theta|^2=0. \tag{2.15}$$

При условии (2.14) для

$$S_n-ES_n=\frac{1}{B_n}\sum_m\eta_{mn}$$

с величинами

$$\eta_{mn}=(Q\varphi_{mn},\xi)^2-E(Q\varphi_{mn},\xi)^2\in H_2,$$

являющимися полиномами Эрмита второй степени от гауссовского поля ξ, нужно показать, что

$$\frac{1}{B^2}E\left|\sum_m\eta_{mn}\right|^2\to0.$$

Согласно известному нам свойству (см. (1.9), (1.9)′), величины $\eta_{mn}\in H_2$ в сравнении с соответствующими

$$\overset{\circ}{\eta}_{mn}=(\mathscr{P}\varphi_{mn},\xi)^2-E(\mathscr{P}\varphi_{mn},\xi)^2$$

имеют

$$E\left|\sum_m\eta_{mn}\right|^2\leqslant CE\left|\sum_m\overset{0}{\eta}_{mn}\right|^2; \tag{2.16}$$

поясним: условие (2.10) дает нам неравенство

$$|Q(z)|^2\leqslant C|\mathscr{P}(z)|^2,$$

а вместе с ним и неравенство

$$E(Q\varphi_{mn},\xi)^2=\int|\widetilde{\varphi}_{mn}(\lambda)|^2\frac{|Q(i\lambda)|^2}{\mathscr{P}(i\lambda)}d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant C\int|\widetilde{\varphi}_{mn}(\lambda)|^2\frac{|\mathscr{P}(i\lambda)|^2}{\mathscr{P}(i\lambda)}d\lambda=E(\mathscr{P}\varphi_{mn},\xi)^2$$

для соответствующих гауссовских величин

$$\xi_{mn} = (Q\varphi_{mn}, \xi) \leftrightarrow (\mathscr{P}\varphi_{mn}, \xi) = \xi^0_{mn}.$$

В правой части (2.16) величины η^0_{mn-1} являются независимыми, поскольку независимыми являются

$$\xi^0_{mn} = (\mathscr{P}\varphi_{mn}, \xi) = (\varphi_{mn}, \eta)$$

с пробными $\varphi_{mn} \in C_0^\infty(I)$, имеющими непересекающиеся носители — напомним, в рассматриваемой нами модели $\mathscr{P}\xi = \eta$ есть обобщенное случайное поле с независимыми значениями, точнее, обобщенное гауссовское поле с нулевым средним и корреляционным оператором $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\partial)$.

С учетом стационарности при суммировании по всем m (их число составляет $n^{|\gamma|}$) получаем

$$E\left|\sum_m \eta^0_{mn}\right|^2 = \sum_m E\left|\eta^0_{mn}\right|^2 =$$

$$= n^{|\gamma|} E\left|(\mathscr{P}\varphi_{0n}, \xi)^2 - E(\mathscr{P}\varphi_{0n}, \xi)^2\right|^2 = n^{|\gamma|}\cdot 2\left[E(\mathscr{P}\varphi_{0n}, \xi)^2\right]^2 =$$

$$= n^{|\gamma|}\cdot 2\left[n^{-|\gamma|}\int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \frac{|\mathscr{P}(i\lambda n^\gamma)|^2}{\mathscr{P}(i\lambda n^\gamma)}\,d\lambda\right]^2 \leqslant Cn^{-|\gamma|+2\max(\alpha,\gamma)}.$$

В итоге при $B_n = (\varphi, \partial^\beta\varphi)n^{(\beta,\gamma)}$ получается, что

$$E|S_n - ES_n|^2 \leqslant Cn^{-2(\beta,\gamma)-|\gamma|+2\max(\alpha,\gamma)},$$

где для $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ с компонентами $\gamma_k = 1 + O(\varepsilon)$ при малом ε мы имеем

$$(\beta, \gamma) = |\beta| + O(\varepsilon), \quad |\gamma| = d + O(\varepsilon),$$
$$\max(\alpha, \gamma) = 2p + O(\varepsilon),$$

и видно, что если

$$|\beta| > 2p - d/2,$$

то при достаточно малом ε

$$E|S_n - ES_n|^2 \leqslant Cn^{-\delta} \tag{2.17}$$

с некоторым $\delta > 0$. Это вместе с (2.14) доказывает предельное соотношение (2.15) и, более того, доказывает, что *при достаточно быстро растущих n (скажем, $n = 2^N$ с целым $N \to \infty$) мы имеем*

$$\lim S_n = \theta \tag{2.18}$$

с вероятностью 1.

Согласно этому, определяются все **крайние** старшие $\beta \in \{\alpha\}$. Перейдем к остальным α, последовательно упорядочив их так, что при уже выбранных старших $\alpha > \beta$ очередное по старшинству β из оставшихся α берется как $\alpha = \beta$ наибольшего порядка $|\beta| = \max$ и наибольшей евклидовой нормы $\|\beta\| = (\beta, \beta)^{1/2}$ в R^d. Используя для очередного $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ отвечающее ему γ с компонентами

$$\gamma_k \sim 1 + \varepsilon\beta_k, \quad k = 1, \ldots, d,$$

указанными с точностью до $o(\varepsilon)$, при достаточно малом ε будем иметь для всех $\alpha < \beta$ неравенство (2.13),

$$(\alpha, \gamma) \sim |\alpha| + \varepsilon(\alpha, \beta) < |\beta| + \varepsilon(\beta, \beta) \sim (\beta, \gamma);$$

указывая γ с точностью до $o(\varepsilon)$, мы возьмем его так, чтобы **все** (β, γ) с крайними старшими β^j были различны, что дает

$$(\alpha, \gamma) < \max_{\{\beta^j\}} (\beta^j, \gamma) = (\beta^*, \gamma) \tag{2.19}$$

для всех α, не являющихся крайними — поясним: для α порядка $|\alpha| = 2p$, принадлежащим выпуклой оболочке крайних $\{\beta^j\}$, $\alpha = \sum\limits_j c_j\beta^j$ с коэффициентами $0 \leqslant c_j < 1$ $\left(\sum c_j = 1\right)$, и мы имеем при **различных** (β^j, γ) строгое неравенство

$$(\alpha, \gamma) = \sum_j c_j (\beta^j, \gamma) < \max_{\{\beta^j\}} (\beta^j, \gamma).$$

Зная ранее определенные коэффициенты a_α с $\alpha > \beta$, включая **все** крайние старшие $\alpha = \beta^j$, для определения коэффициента a_α с очередным $\alpha = \beta$, старшим по отношению к остальным $\alpha < \beta$, в (2.12) используем дифференциальный оператор

$$Q = Q(\partial) = \sum_{\alpha > \beta} a_\alpha \partial^\alpha,$$

положив

$$A_n = \frac{1}{n^{|\gamma|}} \left(\varphi, \sum_{\alpha > \beta} a_\alpha n^{(\alpha, \gamma)} \partial^\alpha \varphi\right) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} \int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 Q(i\lambda n^\gamma)\, d\lambda,$$

$$B_n = n^{(\beta, \gamma)} (\varphi, \partial^\beta \varphi) = n^{(\beta, \gamma)} \int |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 (-i\lambda)^\beta\, d\lambda$$

с γ, отвечающим данному β. Не повторяя фактически проведенных уже выкладок, с учетом четности $\mathscr{P}(-z) = \mathscr{P}(z)$

укажем сразу, что

$$ES_n = \frac{1}{B_n}\int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \left[\frac{|Q(i\lambda n^\gamma)|^2}{\mathscr{P}(-i\lambda n^\gamma)} - Q(i\lambda n^\gamma)\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{B_n}\int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \left[a_\beta(-i\lambda)^\beta n^{(\beta,\gamma)} + \sum_{\alpha<\beta} a_\alpha(-i\lambda)^\alpha n^{(\alpha,\gamma)}\right] \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{\alpha>\beta} a_\alpha (i\lambda)^\alpha n^{(\alpha,\gamma)}}{\sum\limits_{\alpha} a_\alpha (i\lambda)^\alpha n^{(\alpha,\gamma)}}\, d\lambda,$$

где отношение под интегралом имеет в числителе все крайние $\alpha = \beta^j$, так что, согласно неравенству (2.19) с крайним β^*, $(\beta^*, \gamma) = \max\limits_j (\beta^j, \gamma)$, это отношение асимптотически при $n \to \infty$ есть

$$\frac{a_{\beta^*}(i\lambda)^{\beta^*} n^{(\beta^*,\gamma)} + \ldots}{a_{\beta^*}(i\lambda)^{\beta^*} n^{(\beta^*,\gamma)} + \ldots} \sim 1,$$

и с выбранным B_n асимптотически

$$ES_n \sim a_\beta \frac{1}{B_n} n^{(\beta,\gamma)} \int |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 (-i\lambda)^\beta d\lambda = a_\beta.$$

Таким образом, мы получаем предельное соотношение (2.14) с $\theta = a_\beta$, а вместе с ним также и соотношение (2.15), поскольку фактически проведенная уже оценка дисперсий величин S_n, на которые не влияют значения постоянных A_n, дает нам (2.17). Как следствие, мы имеем предельное соотношение (2.18), при почти всех реализациях ξ определяющее $\theta = a_\beta$.

Сформулируем итоговый результат в виде следующего предложения.

Теорема. *При почти всех реализациях ξ справедливо предельное соотношение* (2.18) *с* $\theta = 1/a_\alpha$ *для крайних старших* α *и* $\theta = a_\alpha$ *для остальных* α *порядка* $|\alpha| > 2p - d/2$.

Видно, в частности, что при *большой размерности*

$$d > 4p \tag{2.20}$$

предельное соотношение (2.18) *определяет все коэффициенты* a_α (полностью определяет дифференциальный оператор $\mathscr{P}$ в нашей стохастической модели (2.2) — полностью определяет спектральную плотность (2.9) возникающего в этой модели стационарного гауссовского поля ξ). □

В дополнение отметим, что для **гипоэллиптических** уравнений любое решение в (2.2) отличается от стационарного ξ лишь на слагаемое, которое как решение $u \in W(S)$ **однородного** уравнения $\mathscr{P}u = 0$ в области S есть соответственно гладкая функция — такая, скажем, что при использовании нами дифференциальных операторов Q мы имеем ограниченные функции $Qu = f$ и для них (с вероятностью 1)

$$\sum_{m} (\varphi_{mn}, f)^2 \leqslant n^{|\gamma|} \cdot C \left[\int |\varphi(n^{\gamma} t)| \, dt \right]^2 \leqslant C n^{-|\gamma|} \to 0,$$

и в силу этого выраженное в (2.18) *свойство распространяется со стационарного решения на любые решения* ξ *уравнения* (2.2).

3° Об оценках корреляционного оператора. Обратившись к стохастической модели

$$\mathscr{P}\xi = \eta$$

с оператором

$$\mathscr{P}\colon W \to X$$

и гауссовским белым шумом на отвечающем $\mathscr{P} \geqslant 0$ пространстве $W = [\mathscr{D}]$, $\mathscr{D} = C_0^\infty(T)$ в области $T \subseteq R^d$ — (см. (2.2)), коротко остановимся на вопросе об оценках корреляционного оператора $B = \mathscr{P}^{-1}$ в обстановке, когда известно, что распределение вероятностей обобщенного случайного поля $\xi \in \mathbf{W}$ принадлежит семейству гауссовских распределений $\{P\}$, **эквивалентных** данному $P = P_0$ с корреляционным оператором $B = B_0$, отвечающим в рамках рассматриваемой нами модели оператору $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0$ $(B_0 = \mathscr{P}_0^{-1})$.

Располагая оператором $\mathscr{P}_0\colon W_0 \to X_0$ для каждого $\mathscr{P}$ и отвечающего ему W, введем дифференциальный оператор $\mathscr{P} \otimes \mathscr{P}_0$, действующий на функции $w(s, t)$ в области

$$(s, t) \in T \times T \subseteq R^{2d}$$

таким образом, что $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_0$ действуют по **своим** переменным s и t. Используя тензорное произведение $W \otimes W_0$ с плотным в нем $C_0^\infty(T \times T)$, будем иметь

$$\mathscr{P} \otimes \mathscr{P}_0\colon W \otimes W_0 \to X \otimes X_0$$

как унитарный оператор в сопряженное пространство $X \otimes X_0 = (W \otimes W_0)^*$ — точно в плане общей схемы § 1 гл. I; уточним, для элементов

$$u \otimes v = u(s)v(t) \in W \otimes W_0$$

с компонентами $u, v \in C_0^\infty(T)$ мы имеем

$$(\mathscr{P} \times \mathscr{P}_0)(u \times v) = \mathscr{P}u \otimes \mathscr{P}_0 v \in X \otimes X_0$$

с $x = \mathscr{P}u \in X$, $y = \mathscr{P}_0 v \in X_0$.

Отметим, что фактически мы уже использовали надлежащее тензорное произведение при выводе формулы (1.14) для плотности $p(\omega) = P(d\omega)/P_0(d\omega)$, элементами которого служили величины $\varphi(\omega, \omega')$ на произведении $\Omega \times \Omega$ — с очевидно понятными изменениями обозначений применительно к совокупности гауссовских (x, ξ), $x \in D = C_0^\infty(T)$, указанные $\varphi(\omega, \omega')$ суть

$$\varphi(\omega, \omega') = \sum_{j,k} c_{jk}(x_j, \xi)(x_k, \xi)_{\omega'}$$

— см. (1.13). Учитывая, что для каждого $\mathscr{P}$ случайное поле $\xi \in \mathbf{W}$ является гауссовским белым шумом на $X = [D]$, приходим к изометрии

$$\varphi(\omega, \omega') \leftrightarrow \sum_{j,k} c_{jk}(x_j \otimes x_k) \in X \otimes X_0, \tag{2.21}$$

согласно которой введем обозначение

$$\varphi(\omega, \omega') = (z, \xi \times \xi)_{\omega,\omega'}, \quad z = \sum_{j,k} c_{jk}(x_j \otimes x_k).$$

Напомним, что при выводе формулы (1.14) мы использовали изоморфизм

$$(z, \xi \times \xi)_{\omega,\omega'} \leftrightarrow \eta = \varphi - E_0\varphi \in H_2(\xi) \tag{2.21$'$}$$

— на него в дальнейшем будем указывать соответствующим обозначением

$$\eta = (z, \xi \times \xi), \quad z \in X \otimes X_0,$$

для величин $\eta \in H_2(\xi)$; добавим здесь, что при $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0$ мы имеем в (2.21$'$) изометрию

$$(z, \xi \times \xi)_{\omega,\omega'} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(z, \xi \times \xi) \in H_2(\xi).$$

Согласно (2.21), представление (1.15) для разности корреляционных операторов $b = B - B_0$ дает нам

$$(x, by) = \int\int (x \otimes y, \xi \times \xi)_{\omega,\omega'}(z, \xi \times \xi)_{\omega,\omega'} P(d\omega) \times P_0(d\omega') = \\ = \langle x \otimes y, z \rangle_{X \otimes X_0}, \quad x, y \in D = C_0^\infty(T),$$

с полной в $X \otimes X_0$ системой $\{x \otimes y\}$, и это можно интерпретировать так, что разность $b = B - B_0$ задает на всевозможных пробных

$$x \otimes y = x(s)\, y(t) \in C_0^\infty (T \times T)$$

обобщенную функцию $b \in W \otimes W_0$, определенную как

$$(x \otimes y,\, b) \equiv (x,\, by) = \langle x \otimes y.\, z \rangle_{X \otimes X_0}$$

— понятно, что при такой интерпретации мы имеем

$$z = (\mathscr{P} \times \mathscr{P}_0)\, b.$$

Итак, в рамках предложенной здесь схемы *критерий эквивалентности гауссовских P, P_0 выражается в терминах разности $b = B - B_0$ условием*

$$(x \otimes y,\ b) \equiv (x,\ by) \in W \otimes W_0, \tag{2.22}$$

причем

$$p(\omega) = \frac{P(d\omega)}{P_0(d\omega)} = \sigma^2 \exp\{(z,\, \xi \times \xi)\}, \tag{2.23}$$

$$z = (\mathscr{P} \times \mathscr{P}_0,\ b).$$

Взяв произвольную полную систему функций в W и процессом ортогонализации по отношению к скалярным произведениям

$$(u,\ \mathscr{P} v), \quad (u,\ \mathscr{P}_0 v), \quad u,\ v \in W,$$

преобразовав ее соответственно в ортонормированные системы $\{u_j\}$, $\{v_k\}$, согласно (1.16), получим, что

величина $\eta \in H_2(\xi)$ в формуле (2.23) *представима как*

$$\eta = \sum_{j,k} [(u_j,\, \mathscr{P} v_k) - (u_j,\, \mathscr{P}_0 v_k)]\, [(\mathscr{P}_0 u_j,\, \xi)\, (\mathscr{P} v_k,\, \xi) - (u_j,\, \mathscr{P}_0 v_k)].$$

Рассматривая вопрос об оценках корреляционного оператора B, можно перевести его в вопрос об оценках функционального параметра $\theta = b$ в пространстве $W \otimes W_0$ из данного семейства θ,

$$\theta \in \Theta \subseteq W \otimes W_0.$$

Величины

$$\eta_\theta = (z,\ \xi \times \xi) = (z_\theta,\ \xi \times \xi)$$

в формуле (2.23) для плотности вероятности распределений $P = P_\theta$, отвечающих $\theta = b = B - B_0$, зависят от параметра $\theta \in W \otimes W_0$ л и н е й н о, так что в обстановке, когда $\Theta \subset W \otimes W_0$ вместе с любыми $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ содержит их линейные комбинации $\theta = \sum_k \lambda_k \theta_k$ с $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из некоторой области в R^n, мы имеем в (2.23) экспоненциальное семейство плотностей.

Для их параметров могут быть применены известные методы оценивания *) — здесь, скажем, в качестве исходных данных можно использовать величины

$$(x \otimes y, \xi \times \xi) = (x, \xi)(y, \xi) - (x, B_0 y),$$

являющиеся несмещенными оценками для значений

$$(x \otimes y, \theta) = (x, By) - (x, B_0 y)$$

при всевозможных пробных $x, y \in X$ (напомним здесь, что при условии эквивалентности (2.3) пространства $X = X_0$ отличаются лишь эквивалентными нормами).

§ 3. Оценка осредненных решений стохастических дифференциальных уравнений

1° Постановка задачи **). Наилучшие несмещенные оценки. Можно представить, что введенная в гл. III общая стохастическая модель, описываемая в области $S \subseteq T \subseteq R^d$ стохастическим дифференциальным уравнением

$$L\xi = \eta$$

и граничными условиями

$$(x, \xi) = (x, \xi^+), \quad x \in X^+(\Gamma),$$

на границе $\Gamma = \partial S$, возникает в обстановке, когда главным объектом является обобщенное решение $u \in W(S)$ соответствующей детерминированной задачи

$$\begin{gathered} Lu = f, \\ (x, u) = (x, u^+), \quad u \in X^+(\Gamma), \end{gathered} \tag{3.1}$$

которое в результате стохастических возмущений оказывается спрятанным в случайном поле ξ, являясь его детерминированной составляющей

$$u = E\xi,$$

*) См., например, Леман Е. Проверка статистических гипотез.— М.: Наука, 1964.

**) Близкие вопросы рассматривались Л. Маркушем (диссертация, МГУ, 1990 г.).

и здесь, непосредственно имея дело с наблюдаемым ξ, нужно оценить неизвестное $u \in W(S)$.

Мы рассмотрим среднее $u = \theta$ как неизвестный параметр соответствующего распределения вероятностей P_θ совокупности случайных величин

$$(x, \xi), \quad x \in X(S),$$

индексированных пробными $x \in X(S) = W(S)^*$, считая, что $\theta \in \Theta$ принадлежит определенному множеству $\Theta \subseteq W(S)$ в отвечающем схеме (3.1) функциональном пространстве $W(S)$, и предполагая распределения P_θ гауссовскими, будем считать, что вместе с каждыми линейно независимыми $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ множество Θ содержит все $\theta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta_k$ с $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из некоторого n-мерного параллелепипеда в R^n. При $\theta = 0$ гауссовские величины (x, ξ), $x \in X(S)$, представляют те стохастические возмущения, которые накладываются на решение $u = \theta$ граничной задачи (3.1), и, обратившись к их распределению вероятностей P с нулевым средним $E(x, \xi) = 0$, уточним, что все P_θ отличаются от P лишь соответствующим средним

$$(x, \theta) = E_\theta(x, \xi), \quad x \in X(S).$$

Сами стохастические возмущения с распределением $P = P_0$ будем считать по своей природе близкими к белому шуму на гильбертовом $X(S)$, а именно, при $E(x, \xi) = 0$ такими, что

$$E\,|(x, \xi)|^2 \asymp \|x\|_X^2, \quad x \in X(S). \tag{3.2}$$

Мы используем распределение P и отвечающее ему пространство $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ величин $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, на вероятностном Ω, являющихся функциями от совокупности «наблюдаемых» величин (x, ξ), $x \in X(S)$ — точнее, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\xi)$, порожденной этой совокупностью. При условии эквивалентности (3.2) все распределения P_θ имеют относительно $P = P_0$ плотность вероятности

$$p_\theta(\omega) = \frac{P_\theta(d\omega)}{P(d\omega)} = \sigma_\theta^2 \exp\{\eta_\theta\} \in \mathbf{H}, \tag{3.3}$$

задаваемую соответствующими величинами $\eta_\theta \in H = H_1(\xi)$, каждая из которых однозначно определяется уравнением

$$(x, \theta) = E(x, \xi)\,\eta_\theta, \quad x \in X(S). \tag{3.4}$$

Поясним, что $\theta = u \in W(S)$ есть линейная непрерывная функция от $x \in X(S)$, и в силу условия (3.2) (x, θ) задает линейную непрерывную функцию от $(x, \xi) \in H$; добавим, что представление (3.4) распространяется с совокупности величин $\eta = (x, \xi)$ на их замыкание $H = H_1(\xi)$ в $\mathbf{H}$, выражая равенство

$$E_\theta \eta = E(\eta \cdot \eta_\theta), \qquad \eta \in H,$$

так что рассматривая пространство пробных функций $x \in X(S)$ с плотным в нем $C_0^\infty(S)$, мы имеем плотную в $H = H(\xi)$ совокупность величин $(x, \xi), x \in C_0^\infty(S)$, и, согласно этому, в определяющих величины $\{\eta_\theta\}$ представлении (3.4) можно ограничиться переменным $x \in C_0^\infty(S)$.

Понятно, что согласно (3.3) для любого $\eta \in \mathbf{H}(\xi)$ имеется конечное математическое ожидание

$$E_\theta \eta = E\eta p_\theta, \qquad \theta \in \Theta.$$

Обозначив через $\mathfrak{B}$ σ-алгебру, порождаемую всеми величинами p_θ, $\theta \in \Theta$, отметим, что совокупность $\{p_\theta\}$ образует *достаточную статистику*, относительно которой условное математическое ожидание

$$E_\theta(\eta/\mathfrak{B}) = E(\eta/\mathfrak{B})$$

любой величины $\eta \in \mathbf{H}(\xi)$ не зависит от $\theta \in \Theta$,— поясним:

$$\int_B E(\eta/\mathfrak{B})\, P_\theta(d\omega) = \int_B E(\eta/\mathfrak{B})\, p_\theta P(d\omega) =$$
$$= \int_B E(\eta \cdot p_\theta/\mathfrak{B})\, P(d\omega) = \int_B \eta p_\theta P(d\omega) = \int_B \eta P_\theta(d\omega)$$

при всех $B \in \mathfrak{B}$, так что $E_\theta(\eta/\mathfrak{B})$ задается величиной $\widehat{\eta} = E(\eta/\mathfrak{B})$.

При том или ином пробном $x \in X(S)$ используем в качестве возможной оценки неизвестного значения (x, θ) величины $\eta \in \mathbf{H}(\xi)$, обладающие свойством *несмещенности*:

$$E_\theta \eta = (x, \theta), \qquad \theta \in \Theta,$$

— тривиальной оценкой такого рода может служить $\eta = (x, \xi)$.

Как известно, для каждой несмещенной оценки $\eta \in \mathbf{H}(\xi)$ имеется улучшенная несмещенная оценка

$$\widehat{\eta} = E(\eta/\mathfrak{B}) = E_\theta(\eta/\mathfrak{B}),$$

которая лучше исходной η в том смысле, что среднеквадратическая ошибка в оценке $\widehat{\eta}$ меньше, поскольку $E_\theta|\eta-(x,\theta)|^2 =$

$$= E_\theta|\widehat{\eta}-(x,\theta)|^2 + E_\theta|\eta-\widehat{\eta}|^2 \geqslant E_\theta|\widehat{\eta}-(x,\theta)|^2.$$

Получаемая указанным выше способом улучшенная оценка $\widehat{\eta}$ является измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, точнее,

$$\widehat{\eta} = E(\eta/\mathfrak{B}) \in \mathbf{H}(\mathfrak{B}) \tag{3.5}$$

входит в подпространство $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$ всех измеримых относительно $\mathfrak{B}$ величин из $\mathbf{H}(\xi)$. При *условии полноты* достаточной статистики $\{p_\theta\}$, означающей в рассматриваемой схеме полноту величин p_θ, $\theta\in\Theta$, в подпространстве $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$, имеется лишь единственная несмещенная оценка $\eta\in\in\mathbf{H}(\mathfrak{B})$, поскольку для разности такого рода оценок $\eta=\eta_1,\ \eta_2$ получается

$$E_\theta(\eta_1-\eta_2) = E(\eta_1-\eta_2)p_\theta = 0, \quad \theta\in\Theta,$$

что в силу полноты $\{p_\theta\}$ влечет $\eta_1=\eta_2$ в $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$.

Наложенное нами условие на множество $\Theta\subseteq W(S)$, указывающее, что в экспоненциальной совокупности (3.3) вместе с каждыми линейно независимыми $\eta_\theta=\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n$ имеются $\eta_\theta=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k$ с $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ из некоторого n-мерного параллелепипеда R^n, дает полноту экспоненциального семейства величин $\{p_\theta\}$ вида (3.3) в $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$ — это следует, например, из полноты всевозможных $\exp\left\{i\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right\}$ с $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\in R^n$ в комплексном $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$ *).

Таким образом, в классе всех несмещенных оценок $\eta\in\mathbf{H}(\xi)$ для неизвестного значения (x,θ) мы имеем единственную оценку из $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$, которая, как указано в (3.5), получается из любой другой несмещенной оценки η ее осреднением относительно $\mathfrak{B}$, представляя таким образом *наилучшую оценку*

$$\widehat{\eta} = (x,\widehat{\theta})$$

---

*) Поясним: для любой величины $\eta\in\mathbf{H}(\mathfrak{B})$ выражение $E\eta\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\eta_k\right\}$ определяет целую аналитическую функцию комплексных $(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, которая тождественно равна 0 (и, в частности, при $z_1=i\lambda_1,\ \ldots,\ z_n=i\lambda_n$), если она равна 0 в некотором n-мерном параллелепипеде действительного R^n.

с наименьшей среднеквадратической ошибкой

$$E|(x, \widehat{\theta})-(x, \theta)|^2=\min.$$

Отправляясь от тривиальной несмещенной оценки $\eta = (x, \xi)$ и получая наилучшую оценку как среднее

$$(x, \widehat{\theta})=E_0[(x, \xi)/\mathfrak{B}]$$

относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, порождаемой гауссовской совокупностью $\{\eta_\theta\}$ из (3.3), заключаем, что $(x, \widehat{\theta})$ принадлежит замкнутой линейной оболочке $H\{\eta_\theta\}$ величин η_θ, $\theta \in \Theta$, и в этом смысле наилучшая оценка $(x, \widehat{\theta})$ является *линейной*:

$$(x, \widehat{\theta}) \in H\{\eta_\theta\}.$$

Если принять во внимание общее представление (3.4) относительно наилучшей оценки $\eta=(x, \widehat{\theta})$ с $E_0\eta=(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, то получается следующий результат:

Теорема. *Наилучшая несмещенная оценка для (x, θ) однозначно определяется как* $(x, \widehat{\theta}) \in H\{\eta_\theta\}$,

$$E(x, \widehat{\theta})\,\eta_\theta=(x, \theta), \quad \theta \in \Theta. \tag{3.6}$$

Отметим, что при наложенном нами на множество $\Theta \subseteq W(S)$ условии наилучшая несмещенная оценка $(x, \widehat{\theta})$ для (x, θ), $\theta \in \Theta$, будет также наилучшей несмещенной оценкой для (x, θ) и в обстановке, когда вместо исходного Θ рассматривается его (замкнутая) линейная оболочка в пространстве $W(S)$, к которой нам и будет удобно перейти, обозначив ее тем же Θ (поясним, такой переход не меняет соответствующей σ-алгебры $\mathfrak{B}$).

Рассмотрим задачу о наилучших оценках неизвестного среднего $u=\theta$ в (3.1) при стохастических возмущениях с

$$E|(x, \xi)|^2=\sigma^2\|x\|_X^2, \qquad x \in X(S). \tag{3.7}$$

Мы знаем, что пространство пробных функций $X(S)$ представляет сопряженное $W(S)^*$ и получается в общей схеме (3.1) как

$$X(S)=\mathscr{P}W(S)$$

при помощи оператора $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}=L^*L$ в схеме (3.1) с общим оператором L в пространстве $\mathscr{F}=\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{P}=L$ в схеме (3.1) с положительным $L \geqslant 0$ в соответствующем $\mathscr{F}=W$.

Согласно (3.7), мы имеем

$$E(x, \xi)(\mathscr{P}u, \xi) = \sigma^2\langle x, \mathscr{P}u\rangle_X = \sigma^2(x, u)$$

при всех $x \in X(S)$, $u \in W(S)$ — в частности

$$E(x, \xi)(\mathscr{P}\theta, \xi) \equiv \sigma^2(x, \theta),$$

и непосредственно видно, что величины η_θ в представлении (3.4) есть

$$\eta_\theta = \frac{1}{\sigma^2}(\mathscr{P}\theta, \xi), \qquad \theta \in \Theta. \tag{3.8}$$

Взяв ортонормированный базис $\{\theta_k\}$ в $\Theta \subseteq W(S)$, с помощью унитарного оператора $\mathscr{P}$: $W(S) \to X(S)$ получаем ортонормированную систему $\{\mathscr{P}\theta_k\}$ в пространстве $X(S)$, который в подпространстве $H\{\eta_\theta\}$ — замкнутой линейной оболочке величин η_θ, $\theta \in \Theta$, отвечает ортонормированный базис $\{\sigma^{-1}(\mathscr{P}\theta_k, \xi)\}$. Используя ортогональное разложение

$$\left(x, \widehat{\theta}\right) = \sum_k c_k(\mathscr{P}\theta_k, \xi)$$

искомой оценки $(x, \widehat{\theta})$, из (3.6) можно определить коэффициенты

$$c_k = E\left(x, \widehat{\theta}\right)\frac{1}{\sigma^2}(\mathscr{P}\theta_k, \xi) = (x, \theta_k).$$

чи (3.1) — точнее, оценок его значений (x, θ) на пробных $x \in X(S)$, при стохастических возмущениях типа (3.7) получается следующий результат.

Теорема. *Наилучшие оценки $(x, \widehat{\theta})$ могут быть получены с помощью ортогонального разложения*

$$\left(x, \widehat{\theta}\right) = \sum_k (x, \theta_k)(\mathscr{P}\theta_k, \xi). \tag{3.9}$$

Уточним, что речь идет об оценках $(x, \widehat{\theta})$ при фиксированном $x \in X(S)$, при каждом из которых (3.9) представляет ряд по ортогональному базису в $H\{\eta_\theta\}$ из величин $\eta_k = (\mathscr{P}\theta_k, \xi)$, отвечающих ортонормированной системе $\{\theta_k\}$ в $W(S)$. Представив этот ряд в виде

$$\left(x, \widehat{\theta}\right) = \sum_k \eta_k(x, \theta_k), \qquad x \in X(S),$$

для конечномерного Θ получим *функциональную оценку*

$$\widehat{\theta} = \sum_k \eta_k \theta_k \in \Theta \tag{3.10}$$

неизвестного решения $u = \theta$ в (3.1). К сожалению, функциональное разложение (3.10) по ортонормированному базису $\{\theta_k\}$ в Θ не действует для бесконечномерного Θ, поскольку $\sum\limits_k |\eta_k|^2 = \infty$ с вероятностью 1 для независимых гауссовских величин $\eta_k = (\mathscr{P}\theta_k, \xi)$, $E|\eta_k|^2 = \sigma^2$ — здесь можно гарантировать лишь сходимость с вероятностью 1 ряда $\sum\limits_k \eta_k (x, \theta_k)$, для которого при каждом $x \in X(S)$ мы имеем

$$E_0 \sum_k |\eta_k(x, \theta_k)|^2 = \sigma^2 \sum_k |(x, \theta_k)|^2 \leqslant \sigma^2 \|x\|_X^2.$$

Отметим еще, что формула (3.9) для наилучших оценок не зависит от множителя σ^2 в (3.7), характеризующего интенсивность стохастических возмущений типа белого шума.

2° Псевдонаилучшие оценки и метод наименьших квадратов; условие состоятельности. Легко представить себе обстановку, когда при оценках решения $u \in W(S)$ граничной задачи (3.1) распределение вероятностей имеющих место стохастических возмущений оказывается неизвестным — скажем, известно лишь, что относительно этого распределения P среднее $E(x, \xi) = 0$; напомним еще, что в рамках рассматриваемой нами модели мы имеем величины (x, ξ) непрерывными по $x \in X(S)$ в гильбертовом пространстве H, что приводит к

$$E|(x, \xi)|^2 \leqslant C\|x\|_X^2, \qquad x \in X(S),$$

и понятно, что это также является известным свойством распределения P.

Независимо от того, каким является истинное распределение вероятностей P, можно попытаться использовать оценки, являющиеся наилучшими по отношению к какому-либо (взятому по тем или иным соображениям) распределению P_0. Скажем, рассматривая обобщенное решение $u = \theta \in W(S)$ граничной задачи (3.1) с вложением

$$W(S) \subseteq W_0(S), \tag{3.11}$$

которое позволяет при $W_0(S) = X_0(S)^*$ интерпретировать $u = (x, u)$ как функцию от пробных $x \in X_0(S)$ из соответствующего

$$X_0(S) \subseteq X(S); \tag{3.11'}$$

в качестве распределения P_0 соответствующего обобщенного $\xi = (x, \xi)$, $x \in X_0(S)$, можно взять распределение «белого шума» на гильбертовом $X_0(S)$ — конечно, здесь речь идет о пространстве $X_0(S)$ типа W с плотным в нем $C_0^\infty(S)$ в рамках нашей общей схемы § 1 гл. I. Согласно этому, в качестве оценок значений (x, θ) при пробных $x \in X_0(S)$ для неизвестного $u = \theta \in \Theta$ в $W_0(S)$ предлагается взять величины $(x, \widehat{\theta})$, определяемые по формуле (3.10) с заменой ортонормированного базиса в $\Theta \subseteq W(S)$ на ортонормированный базис $\{\theta_k\}$ в $\Theta \subseteq W_0(S)$ и оператора $\mathscr{P}$ на соответствующий оператор

$$\mathscr{P}_0\colon\ W_0(S) \to X_0(S)$$

в представлении Рисса сопряженного пространства $W_0(S) = X_0(S)^*$, что дает

$$\left(x, \widehat{\theta}\right) = \sum_k (x, \theta_k)(\mathscr{P}_0\theta_k, \xi). \tag{3.12}$$

Получаемые таким образом величины $(x, \widehat{\theta}) \in H = H_1(\xi)$ назовем *псевдонаилучшими оценками* для (x, θ) — подчеркнем, что они являются наилучшими при $P = P_0$.

Т е о р е м а. *Псевдонаилучшие оценки являются несмещенными.*

В самом деле,

$$E_\theta\left(x, \widehat{\theta}\right) = \sum_k (x, \theta_k) E_\theta(\mathscr{P}_0\theta_k, \xi) =$$
$$= \sum_k (x, \theta_k)(\mathscr{P}_0\theta_k, \theta) = (x, \theta),$$

поскольку для $\theta \in \Theta$ в гильбертовом $W_0(S)$ мы имеем разложение

$$\theta = \sum_k (\mathscr{P}_0\theta_k, \theta)\,\theta_k \tag{3.13}$$

по ортонормированному базису $\{\theta_k\}$ в $\Theta \subseteq W_0(S)$.

Остановимся дополнительно на случае, когда (3.11), (3.11′) есть вложения Гильберта — Шмидта. Тогда обобщенная случайная функция $\xi = (x, \xi)$, $x \in X_0(S)$, наблюдаемая как результат стохастических возмущений решения $u = \theta \in W_0(S)$ в (3.1), имеет эквивалентную модификацию, все реализации которой есть

$$\xi \in W_0(S) \tag{3.14}$$

— см. по этому поводу § 3 гл. I. Рассматривая реализацию $\xi \in W_0(S)$, для оценки $\widehat{\theta}$ спрятанной в ней составляющей $u = \theta \in \Theta$ можно попытаться взять наилучшее приближение для $\xi \in W_0(S)$ функциями из линейной оболочки $\theta \in \Theta$, точнее, из замыкания $[\Theta]$ в $W_0(S)$ — это наилучшее приближение $\widehat{\theta} \in [\Theta]$ дается проекцией функции ξ на подпространство $[\Theta]$ в гильбертовом $W_0(S)$. Взяв ортонормированный базис $\{\theta_k\}$ из линейной оболочки Θ в $W_0(S)$ и дополнив его элементами $\{u_k\}$ до ортонормированного базиса во всем $W_0(S)$, для

$$\xi = \sum_k (\mathscr{P}_0\theta_k, \xi)\,\theta_k + \sum_k (\mathscr{P}_0 u_k, \xi)\, u_k$$

получим

$$\widehat{\theta} = \sum_k (\mathscr{P}_0\theta_k, \xi)\,\theta_k,$$

что при всех пробных $x \in X_0(S)$ дает

$$\left(x, \widehat{\theta}\,\right) = \sum_k (x, \theta_k)(\mathscr{P}_0\theta_k, \xi).$$

Непосредственно видно, что изложенный выше известный *метод наименьших квадратов* дает для значений (x, θ) оценки $(x, \widehat{\theta})$, введенные нами по формуле (3.12) как псевдонаилучшие — наилучшие по отношению к распределению $P = P_0$ стохастических возмущений типа «белого шума» на пространстве пробных функций $X_0(S)$. Коротко сформулируем это в виде следующего предложения.

Теорема. *Оценки наименьших квадратов являются псевдонаилучшими.*

Вернемся к наилучшим оценкам, получающимся предложенным выше методом при $P = P_0$. Понятно, что даже для наилучших оценок $(x, \widehat{\theta})$ стоит вопрос о том, насколько они хороши с точки зрения близости к оцениваемым значениям (x, θ), например с точки зрения близости в смысле среднеквадратичного расстояния

$$E_\theta\,|(x, \widehat{\theta}) - (x, \theta)|^2 = E\,|(x, \widehat{\theta})|^2. \tag{3.15}$$

Этот вопрос можно поставить точнее в обстановке, когда рассматриваются расширяющиеся данные — в нашей общей модели это, скажем, данные о случайном поле

$$\xi = (x,\ \xi)$$

при пробных $x \in X(S)$ в расширяющихся областях

$$S = S_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

а именно, точность оценок

$$\eta_n = (x,\ \widehat{\theta}_n)$$

по данным в каждой области S_n можно охарактеризовать их *состоятельностью*, означающей, что

$$E\,|(x,\ \widehat{\theta}_n) - (x,\ \theta)|^2 \to 0 \tag{3.16}$$

при $n \to \infty$.

Здесь определенные в каждой области S_n обобщенные функции $u = \theta \in W(S_n)$ естественно рассматривать как обобщенные функции в области

$$S_* = \bigcup_n S_n,$$

характеризуемые не только пробными $x \in C_0^\infty(S_*)$, но и обобщенными пробными функциями x, каждая из которых входит в какое-либо

$$X(S_n) = W(S_n)^*.$$

Выясним условия состоятельности оценок $\widehat{(x,\ \theta)}$ значений $(x,\ \theta)$, обратившись сначала к одномерному множеству Θ, когда речь идет фактически об оценке неизвестного $\lambda \in \boldsymbol{R}^1$ в представлении $\theta = \lambda\theta_0$ обобщенной функции $u = \theta$ в области S_* с данной в S_* функцией θ_0. В каждой области S_n мы имеем $\theta \in W(S_n)$ с нормой

$$\|\theta\|_{W(S_n)} = \sup_{\|x\|=1} (x, \theta),$$

где sup берется по указанным пробным $x \in X(S_n)$. Ограниченность этой нормы по $n = 1,\ 2,\ \ldots$ означает для обобщенной функции θ в области S_* включение $\theta \in W(S_*)$, и вместе с этим мы имеем включение $\xi \in \mathbf{W}(S_*)$ возникающего в нашей модели гауссовского обобщенного поля в области S_*. Допустим, что $\xi \in \mathbf{W}(S_*)$ по отношению к распределению P со средним $E\xi = 0$ представляет стохастические возмущения, охарактеризованные в (3.2) для $S_* = S$. Тогда распределение P_θ со средним

$$E_\theta \xi = \theta$$

будет абсолютно непрерывным относительно распределения P, и сходимость в (3.16) может быть, очевидно, лишь при $\theta = 0$.

Таким образом, условие

$$\|\theta\|_{W(S_n)} \to \infty \tag{3.17}$$

на $\theta \neq 0$ является необходимым для состоятельности наилучших оценок. С другой стороны, при этом условии для определяемых общей формулой (3.9) оценок функции $\theta \in \Theta$ в области $S = S_n$ мы имеем

$$(x, \theta) = \frac{1}{\|\theta\|^2_{W(S_n)}} (x, \theta_0) (\mathscr{P}\theta_0, \xi)$$

с постоянным при $n \to \infty$ значением (x, θ_0) на данном пробном x и

$$E\left|(x, \widehat{\theta}\,)\right|^2 \leqslant C \frac{|(x, \theta_0)|^2}{\|\theta_0\|^2_{W(S_n)}} \to 0,$$

где постоянная C зависит от распределения P — уточним, что в случае стохастических возмущений типа «белого шума», охарактеризованных в (3.7),

$$E\left|(x, \widehat{\theta}\,)\right|^2 = \sigma^2 \frac{|(x, \theta_0)|^2}{\|\theta_0\|^2_{W(S_n)}}.$$

Понятно, что (3.17) является необходимым условием состоятельности оценок для общего Θ, поскольку, как мы видели, его нарушение при каком-либо $\theta = \theta_0$ лишает свойства состоятельности даже наилучшие оценки, несмещенные лишь для «одномерного» параметра вида $\theta = \lambda\theta_0$. Уже отмечалось, что при несмещенных оценках можно, не ограничивая общности, расширить Θ до его (замкнутой) линейной оболочки; оказывается, что при взятом в таком виде Θ условие (3.17) на $\theta \in \Theta$ будет достаточным для состоятельности всех наилучших оценок $(x, \widehat{\theta})$. Покажем это.

Располагая несмещенной оценкой $\eta_n = (x, \widehat{\theta})$ по данным в области $S = S_n$, наилучшую оценку $\eta_{n+1} = (x, \widehat{\theta})$ по данным в расширенной области $S = S_{n+1} \supseteq S_n$ можно получить соответствующей операцией проектирования, в общей форме описанной в (3.5), и, таким образом, последовательность наилучших оценок η_n, $n = 1, 2, \ldots$, получаемая последовательным проектированием, имеет в $\mathbf{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ предел $\eta = \lim \eta_n$. Каждая величина η_n по своему определению такова (сравни (3.4)), что формула

$$E(\varphi, \xi)\eta_n = (\varphi, \theta_n), \quad \varphi \in C_0^\infty(S_n),$$

определяет некоторую функцию $\theta_n \in \Theta$. Очевидно, что при сходимости η_n в $\mathbf{H}$ мы имеем слабую сходимость обобщенных функций $\theta_n \in \Theta$ в области $S_* = \bigcup S_n$, и в силу замкнутости Θ получаем предельную функцию $\theta = \lim \theta_n \in \Theta$, для которой

$$E(\varphi, \xi)\eta = (\varphi, \theta), \quad \varphi \in C_0^\infty(S_*).$$

Полученное представление функции $\theta \in \Theta$ указывает на ее непрерывность относительно пробных $\varphi \in C_0^\infty(S_*)$ по норме $\|\varphi\|_X$, что определяет принадлежность $\theta \in W(S_*)$, а это в силу условия (3.17) может быть лишь для $\theta = 0$, $\eta = 0$. В итоге видим, что при условии (3.17)

$$\lim \eta_n = \eta = 0$$

в $\mathbf{H}$, т. е. $E|\eta_n|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Перейдя к предложенным в (3.12) псевдонаилучшим оценкам $(x, \widehat{\theta})$, отвечающим вложениям (3.11), (3.11)$'$ в области $S = S_*$, укажем следующий критерий их состоятельности.

Теорема. *При условии, что для каждой функции* $\theta \neq 0$

$$\|\theta\|_{W_0(S_n)} \to \infty,$$

псевдонаилучшие оценки $(x, \widehat{\theta})$ *всех* (x, θ) *являются состоятельными.*

Для доказательства нужно лишь принять во внимание, что для среднеквадратичных ошибок

$$E_\theta|(x, \widehat{\theta}) - (x, \theta)|^2 = E|(x, \widehat{\theta})|^2,$$

согласно вложениям (3.11), (3.11)$'$ мы имеем мажорантное соотношение

$$E|(x, \widehat{\theta})|^2 \leqslant CE_0|(x, \widehat{\theta})|^2,$$

где правая часть представляет те ошибки, которые имели бы место для $P = P_0$, отвечая псевдораспределению P_0 — как фактически уже было указано, при условии теоремы для оценок $\eta_n = (x, \widehat{\theta})$ по данным в расширяющихся областях S_n мы имеем

$$E_0|\eta_n|^2 \to 0.$$

Добавим в заключение, что при эквивалентности норм в используемых для построения псевдонаилучших оценок вложениях (3.11), (3.11)$'$ условие теоремы, равносильное условию (3.17), будет необходимым условием состоятельности.

ОГЛАВЛЕНИЕ