В.Л.Гинзбург

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И АСТРОФИЗИКА. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Книга представляет собой дополнительный курс, посвященный некоторым вопросам теоретической физики и частично теоретической астрофизики. Как это характерно для дополнительных курсов в отличие от систематических, речь идет об изложении лишь отдельных вопросов и методов, которые не находят обычно достаточно подробного освещения в учебниках и учебных пособиях. В данном случае внимание концентрируется в основном на проблематике, в той или иной мере связанной с микроскопической и макроскопической электродинамикой. Отбор материала определяется при этом преимущественно научными интересами автора.

Во втором издании добавлена глава, посвященная переходному излучению и переходному рассеянию, а также другой новый материал.

Содержание

Предисловие ко второму изданию 5

Предисловие к первому изданию 7

Глава 1. Гамильтоновский метод в электродинамике 9

Гамильтоновский метод в классической электродинамике в вакууме. Квантование. Фотоны и виртуальные фотоны. Излучает ли равномерно движущийся электрон?

Глава 2. Реакция излучения 35

Реакция излучения при поступательном движении заряда. Вращение магнитного момента (наклонного магнитного ротатора)

Глава 3. Равномерно ускоренный заряд 44

Излучение и радиационная сила при равномерно ускоренном движении заряда. Релятивистское уравнение движения с учетом реакции излучения. Закон сохранения энергии для заряда и поля

Глава 4. Об излучении при нерелятивистском и релятивистском движении заряда 58

Характерные особенности излучения нерелятивистских и релятивистских частиц, движущихся в вакууме. Движение и излучение в ондуляторе. Движение в магнитном поле. Реакция излучения и пределы применимости классической теории. Радиационные (магнитотормозные) потери при движении заряженной частицы в магнитном поле

Глава 5. Синхротронное излучение 75

Особенности синхротронного излучения. Некоторые применения теории синхротронного излучения в астрофизике. Границы применимости теории

Глава 6. Электродинамика сплошной среды 105

Гамильтоновский метод. Фотоны в среде. Излучение осциллятора в изотропной и анизотропной средах. Черенковское излучение. Эффект Доплера. Ондулятор в среде. Характерные особенности

излучения частиц, движущихся в среде. Синхротронное излучение в плазме. Вакуум в сильном электромагнитном поле как двоякопреломляющая среда
Глава 7. Эффекты Вавилова — Черенкова и Доплера **135**
Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Доплера с квантовой точки зрения. Реакция излучения в среде. Черенковское излучение и поглощение волн в изотропной и магнитоактивной плазме. Черенковское излучение диполей. Излучение в каналах и щелях. Применение теоремы взаимности
Глава 8. Переходное излучение и переходное рассеяние **166**
Природа переходного излучения и переходного рассеяния. Переходное излучение на границе раздела двух сред. Переходное излучение в нестационарной среде. Зона формирования излучения. Энергетический баланс при переходном излучении. Переходное рассеяние
Глава 9. О сверхсветовых источниках излучения **211**
Кажущиеся и реальные сверхсветовые скорости источников излучения. Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью, большей скорости света в вакууме
Глава 10. Реабсорбция и перенос излучения **229**
Реабсорбция и мазерный эффект (усиление волн). Уравнения переноса излучения. Метод коэффициентов Эйнштейна и его применение в случае поляризованного излучения. Реабсорбция и усиление синхротрон-ного излучения в вакууме и при наличии холодной плазмы
Глава 11. Электродинамика сред с пространственной дисперсией **252**
Об учете пространственной дисперсии. Нормальные волны в анизотропной среде. Некоторые эффекты пространственной дисперсии в кристаллооптике. О поляритонах
Глава 12. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн в плазме **282**
Диэлектрическая проницаемость плазмы (элементарная и кинетическая теория). Распространение волн в однородной изотропной плазме и в однородной магнитоактивной плазме
Глава 13. О тензоре энергии — импульса и силах в макроскопической электродинамике. Энергия и выделяющееся тепло в диспергирующей поглощающей среде **316**
О тензоре энергии — импульса в макроскопической электродинамике. Применение законов сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде. Силы, действующие на среду. Плотность энергии и выделяющееся тепло в диспергирующей поглощающей среде
Глава 14. Флуктуации и Ван-дер-ваальсовы силы **340**

Флуктуации в электрическом контуре. Тепловое излучение в среде. Молекулярные (ван-дер-ваальсовы) силы между макроскопическими телами. Взаимодействие электронов с полем в полом резонаторе

Глава 15. Рассеяние волн в среде **362**

Рассеяние электромагнитных волн (света) в среде. Ширина линий в спектре излучения и в спектре рассеянного света. Комбинационное рассеяние света с образованием поляритонов (реальных экситонов). Рассеяние на свободных электронах и в плазме. Переходное рассеяние в плазме

Глава 16. Астрофизика космических лучей **392**

Вводные замечания. Модели происхождения космических лучей. Общая характеристика проблематики. Ионизационные потери энергии. О пучковой неустойчивости и плазменных эффектах в космических лучах. Уравнения переноса в диффузионном приближении. Упрощения уравнений переноса в случае протонно-ядерной и электронной компонент. Некоторые оценки

Глава 17. Рентгеновская астрономия (некоторые процессы) **437**

Процессы, приводящие к образованию рентгеновских и гамма-лучей. Определение величин, используемых в рентгеновской и гамма-астрономии. Тормозное рентгеновское излучение нерелятивистского ионизированного газа (плазмы)- Тормозное излучение релятивистских электронов и тормозные (радиационные) потери энергии. Рассеяние релятивистских электронов на фотонах (обратный комптон-эффект). Комптоновскис потери энергии. О синхротронном рентгеновском излучении. Замечания о сопоставлении теории с наблюдениями

Глава 18. Гамма-астрономия (некоторые процессы) **477**

Гамма-излучение, генерируемое протонно-ядерной компонентой, космических лучей. Пример Магеллановых Облаков и межзвездной среды. Поглощение рентгеновских и гамма-лучей

Цитированная литература 492

Предметный указатель

Волны виртуальные 205
— дополнительные 262, 274, 277
— необыкновенные 147, 233—237, 245
— нормальные 110, 233—237, 279, 309—312
— —, поляризация 117, 240, 244
— обыкновенные 233—237, 245
Вырождение поляризационное 238, 239
Гирочастота 66
Движение гиперболическое 49, 51
— сверхсветовое 128, 140, 147, 218—220 225—227
Дисперсия 106, 111
— в кристаллооптике 273
— пространственная 106, 206, 252—281 230 328-333
— частотная 106, 111, 191, 203, 206, 254, 265
Длина волны де Бройля 289, 360

Законы сохранения 44—57, 135—137, 149, 318—327
Излучательная способность 94, 232 237, 242, 443, 446, 448, 450
Излучение изгибное 76, 104
— индуцированное 139, 152
— квазисинхротронное 225
— магнитотормозное 155 и д.
— переходное 29, 119, 152, 167—210
— — акустических волн 170
— — в среде анизотропной 182, 187, 224
— — — — нестационарной 183—188
— — вперед 175—178, 180, 187
— —, зона формирования 188—193, 203, 224
— — на границе раздела 167—183
— — назад 176, 178, 180, 187
— —, поляризация 184
— — резонансное 198
— —, энергетический баланс 132—138
—, реабсорбция 102, 152, 229, 242, 414
—, — в вакууме 240
—, — — холодной плазме 240
—, —, коэффициент 243, 245, 246, 249
—, — отрицательная 230, 244, 249, 250
— рекомбинационное 438
— рентгеновское 444
— — рекомбинационное 449
— — тормозное плазмы 444, 445
— синхро-комптоновское 101, 104
— синхротронное 53, 75 и д.
— — космическое 467—470
— —, поляризация 77, 78, 87, 89, 470
— —, радиационные потери 79, 83
— тормозное 155, 179, 438, 452-457
Излучение частиц 58
— — в ондуляторе 61—65, 75, 125
— — — среде 105—134
— — нерелятивистских 58—73
— — релятивистских 58—73
— черенковское 29, 31, 53, 119, 135 и д.
— — диполей 158—165
— — — в канале 161—165
— — зайчика 221
— — нелинейное 208
— — условие 120, 124, 141, 154, 200, 294
— —,— резонанса 156
— циклотронное 59
Интеграл столкновений 291, 292, 297
Источники галактические 473—476
— сверхсветовые 128, 218—220, 225—227
Калибровка кулоновская 12
— Лорентца 10
Колебания, затухание 147—150
—, раскачка 147—150
Конус черенковский 123—126, 147 и д.
Коэффициент экстинции 365, 381
Коэффициенты Эйнштейна 139, 237
— —, метод 234—242
Лучи космические 98
— —, анизотропия 395, 423
— —, диффузионное приближение 424—428
— —, компонента протонно-ядерная 396, 406, 477
— —, — электронная 396, 399, 400, 406
— —, происхождения 99, 393, 403—406, 424, 483
— —, спектр 394—405
— —, химический состав 396—399, 432, 433
— субкосмические 393
Магеллановы Облака 481—483
Метод гамильтоновский 27, 33, 107, 110 и д.
— изображений 170
— кинетического уравнения 157, 237
Нелинейность вакуума 128—133

Неустойчивость пучка 139, 140, 152, 153, 414, 420, 422
— —, критерий 139, 152
Осцилляторы поля 15, 28, 31
Параметр прицельный 33
Параметры Стокса 86—89, 96, 231-237, 241, 245, 246 Пары электрон-позитронные 69
Плазма 133, 143, 151, 207 и д.
— горячая 308
— изотропная 143, 151, 153, 241, 283—303 309
— магнитоактивная 143, 151, 155 157 303— 315
— холодная 236, 244, 280, 307, 310 311
Плазмоны 141, 150—152, 154, 417
Поглощение бесстолкновительное 294, 302
— отрицательное 139, 140
Поля виртуальные 205
Поляритоны 278—280, 377
Потенциалы Лиенара — Вихерта 45, 62, 120
Потери ионизационные 124, 161, 406—436
— — в плазме 410—412
— комптоновские 435, 462—465
— магнитотормозные 435
— радиационные 70—74, 79, 83, 428, 435 445 452—455
Радиогало 401—405
Радиодиск 401—403
Радиус дебаевский 257, 288, 296
Рассеяние дельбруковское 209
— в плазме 207, 379—385
— комптоновское 103, 439, 477—181
— переходное 166—210, 385—395
— света в среде 362—380
— — комбинационное 341—379, 384
— томсоновксе 138, 207, 386—389
Реакция излучения — см. Сила радиационная
Сила ван-дер-ваальсова 351
— Лоренца 50, 67, 70, 76, 317
— радиационная 35—43,50—57, 64, 69, 125, 143—145
— — в среде 135 и д.
— — черепковская 143
Скорость альвеновская 305
— сверхсветовая 128, 40, 147, 217—220, 225— 227
— — зайчика 217
Соотношения дисперсионные 111, 258
Среда 105 и д.
— анизотропная 115—123, 141, 147, 176—182, 187, 240, 260, 277
— гиротропная 257, 262, 264, 265, 271, 273, 276
— — диспергирующая поглощающая 327— 339
Среда гиротропная диспергирующая, выделение тепла 324—339
— — —, плотность энергии 327—339
— изотропная 105—115, 136, 142, 145 150 158, 278
— негиротропная 256, 257, 269, 271, 277, 278
—, тепловое излучение 351—356
Счетчики переходные 169, 202
— черепковские 169
Тензор энергии — импульса Абрагама 316— 327
— — — Минковского 316—327
Теорема взаимности 162, 164
— Пойнтинга 265, 266, 328
— флуктуационно-диссипационная 345—351
Угол черепковский 126 и д.
Уравнение дисперсионное 118, 150, 154, 259, 261, 264, 274, 297, 354
— материальное 254, 263, 264
— переноса 232, 234, 424, 428—436
— Френеля 261, 275
Фактор Г а унта 449
Флуктуации в контуре 340—348
— — резонаторе 358

Формула Тамма — Франка 174
Фотоны в среде 109—119, 135, 141
Функции Грина 204
Ширина линий 366—371
Экранирование дебаевское 288
— —, радиус 257, 288, 296
Эффект Вавилова — Черенкова — см. Излучение черенковское
— Доплера 47, 60, 77, 135 и д.
— — аномальный 123, 137, 140, 146, 228
— — нормальный 123, 137, 140, 146
— Комптона обратный 458—465
— мазерный 150, 229
— Фарадея 246

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Новое издание подготовлено по трем причинам.

Во-первых, настоящая книга, хотя и не является учебником или даже официально рекомендованным учебным пособием, предназначена для достаточно широкого круга физиков и астрофизиков, в том числе студентов. Между тем тираж первого издания был невелик и, так или иначе, книга сейчас весьма трудно доступна. Во-вторых, автору стал известен (в частности, в процессе подготовки английского перевода; Пергамон Пресс, 1979) ряд мелких неточностей и опечаток. Их устранение, разумеется, весьма желательно, ибо, как показывает опыт, присутствие даже сравнительно очевидных опечаток сильно препятствует использованию подобных книг. В-третьих, возникло стремление, не нарушая характера изложения, внести в книгу некоторые дополнения (это касается, например, теории переходного излучения и переходного рассеяния).

При подготовке нового издания был, естественно, изменен и частично дополнен список цитированной литературы. Наличие в этом списке значительного числа ссылок на статьи автора объясняется не какими-либо претензиями, а обусловлено причинами, указанными в предисловии к первому изданию. К сожалению, в этом предисловии не было подчеркнуто, что и весь список литературы имеет вспомогательный характер и в значительной мере предназначен только для известной ориентировки. Поэтому иногда цитируются статьи, лишь более или менее случайно попавшие в поле зрения автора, в то время как отсутствуют ссылки на многие пионерские работы, важные последующие исследования, обзоры и даже книги. Расчет, очевидно, ведется на то, чтобы снабдить читателей хотя бы исходной («затравочной») библиографической информацией. Поступить иначе вряд ли возможно, поскольку количество статей по затронутому в книге достаточно широкому кругу вопросов, поистине колоссально. В результате сколько-нибудь полно отразить литературные источники в наше время удается, к сожалению, только в обзорных статьях или монографиях, посвященных достаточно узкой проблеме, а также в изданиях библиографического или исторического характера.

И еще одно замечание, которое следовало бы сделать уже в предисловии к первому изданию. Именно, нужно отметить,

что последние три главы книги (гл. 16, 17 и 18), посвященные астрофизике высоких энергий, а частично и гл. 5 и 10 по своему стилю несколько отличаются от остальных. Так, в этих главах без вывода приведен, помимо прочего, ряд формул, используемых при астрофизических расчетах, имеется некоторый астрономический материал и т. д. Здесь, однако, нашла отражение лишь та разница, которая существует между теоретической физикой и такой не вполне четко определенной областью, как теоретическая астрофизика. Если бы речь шла об учебнике, о систематическом курсе, то тут действительно возникла бы известная проблема. Но, как нам кажется, для курса типа «дополнительных глав» неоднородность освещаемого материала, а в этой связи и характера изложения, представляется допустимой.

Автор, в заключение, пользуется возможностью поблагодарить всех читателей, сообщивших свои замечания и тем самым оказавших ему большую помощь.

Февраль 1980 г. *В. Л. Гинзбург*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Существует много курсов теоретической физики, среди которых особенно большой и заслуженной известностью пользуется многотомный курс Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. Ни в каком курсе нельзя, однако, изложить все вопросы. Кроме того, даже те проблемы, которые рассматриваются, не удается, обычно, осветить с разных сторон. Между тем в зависимости от типа способностей, характера подготовки, наклонностей и т. п. разным людям часто кажутся предпочтительными совсем различные подходы, аргументы, примеры и доказательства.

Единственная возможность удовлетворить имеющиеся потребности состоит, очевидно, в издании разных курсов и в особенности курсов дополнительного характера, посвященных не систематическому изложению предмета, а отдельным вопросам, аспектам и методам. Такие дополнительные курсы принципиально отличаются от систематических в том отношении, что отбор материала здесь в значительной степени не предопределен. То же можно сказать и о стиле и характере изложения, тогда как к систематическим курсам следует предъявлять весьма жесткие требования в отношении краткости, совершенства технических приемов, унификации обозначений и т. п. Настоящая книга представляет собой именно такой дополнительный курс, посвященный некоторым вопросам теоретической физики и астрофизики. Что это за вопросы ясно уже из оглавления, но в общем можно сказать, что в нем речь идет о проблематике, так или иначе связанной с электродинамикой.

Чтобы не нарушать такую, хотя и не строго выраженную направленность, за пределами книги остался ряд вопросов общей теории относительности и статистической физики, которые, по мнению автора, также должны были бы составить содержание дополнительных курсов аналогичного типа.

В основу изложения положены лекции для студентов кафедры проблем физики и астрофизики Московского физико-технического института. Эти лекции не имели целью заменить какой-либо систематический курс и носили как раз характер «дополнительных глав», но с учетом интересов кафедры и в не меньшей степени интересов и возможностей автора. Речь здесь идет, конечно, не о том, что вопросы, которыми автор когда-

либо занимался, важнее или интереснее многих других. Дело просто в том, что, только излагая «близкий по духу» и хорошо знакомый материал, автор мог хотя бы надеяться действительно дополнить другие имеющиеся курсы и монографии, а не заниматься, если не их переписыванием, то во всяком случае дублированием.

Что касается характера изложения, то нужно отметить, что речь идет не о записи лекций, а о специально написанном в порядке подготовки к лекциям тексте, в котором довольно широко представлен также материал, мало пригодный и не использовавшийся для самих лекций (т. е. для устного изложения). В этом отношении книга по стилю ближе к монографии или обзорам, что нашло отражение и в наличии довольно большого числа ссылок на литературу. Поскольку среди них имеется немало ссылок на статьи автора, подчеркнем, что это, как и отбор материала, совершенно не связано с какими-либо претензиями, а обусловлено уже отмеченным стремлением касаться лишь хорошо знакомых вопросов, подробнее излагаемых в цитированных статьях; кроме того, целый ряд таких статей непосредственно использовался в тексте.

Отметим, наконец, что книга безусловно не предназначена для людей с математическим уклоном, с которыми нередко отождествляют «чистых» физиков-теоретиков. Исключительно большая роль математики в теоретической физике совершенно несомненна и естественна, но стремление здесь к математической общности и стройности далеко не всегда оправдано — за них приходится платить. Общеизвестен, в частности, тот факт, что большинство новых физических результатов было получено сравнительно простыми способами, а «математизация» осуществлялась лишь на последующих этапах. Во всяком случае, в теоретической физике главное все же физика, а не математика. Поэтому изложение теоретических вопросов с «общефизическим» уклоном по крайней мере столь же допустимо, как и более распространенное в настоящее время стремление к математическому совершенству.

Хотелось бы надеяться на то, что книга окажется полезной студентам старших курсов, а также аспирантам и научным работникам.

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить всех, кто прочел рукопись или отдельные ее части и своими замечаниями способствовал улучшению текста.

Июль 1974 г. *В. Л. Гинзбург*

Глава 1

ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ МЕТОД В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Гамильтоновский метод в классической электродинамике в вакууме. Квантование. Фотоны и виртуальные фотоны. Излучает ли равномерно движущийся электрон?

При освещении целого ряда электродинамических вопросов в дальнейшем будет широко применяться так называемый гамильтоновский метод. При его использовании электродинамика представляется в форме, особенно близкой к механике. Поэтому в рамках гамильтоновского метода переход от классической электродинамики к квантовой производится вполне аналогично переходу от классической (ньютоновской) механики к нерелятивистской квантовой механике. В настоящее время в квантовой электродинамике и вообще в квантовой теории поля доминируют более рафинированные методы, для чего имеются веские основания. Однако для понимания целого ряда физических моментов использование гамильтоновского метода представляется нам по-прежнему вполне оправданным (так и делается, например, в книге Гайтлера [1]). Кроме того, гамильтоновский метод применяется ниже в основном в классической электродинамике как для вакуума, так и для среды.

Прежде чем перейти к гамильтоновскому методу, приведем основные уравнения и соотношения, причем для удобства сделаем это достаточно подробно.

Обычная форма уравнений Максвелла в вакууме такова (в книге везде используется только гауссова система единиц СГС):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, ρ — плотность зарядов, $\mathbf{v}$ — их скорость. Для простоты считаем, что в электромагнитном поле имеется

один точечный заряд e (радиус-вектор $\mathbf{r}_i(t)$). В этом случае плотность заряда задается δ-функцией

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), как известно, можно свести к уравнениям для электромагнитных потенциалов $\mathbf{A}$ и φ, которые связаны с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{1.3}$$

Вследствие (1.3) третье и четвертое уравнения (1.1) удовлетворяются автоматически, что легко проверить непосредственной подстановкой.

Из первого и второго уравнений (1.1) с помощью (1.3) и тождества

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} \tag{1.4}$$

получаем уравнения для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \\ \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = -4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Система уравнений (1.5) определяет потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ находят с помощью равенств (1.3).

Известно, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ определяются неоднозначно. Действительно, перейдем к новым потенциалам:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{1.6}$$

где χ — некоторая произвольная функция от координат и времени. Такое преобразование называется градиентным или калибровочным. Легко показать, что в результате преобразования (1.6) поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не меняются. Они выражаются через $\mathbf{A}'$ и φ' так же, как и через $\mathbf{A}$ и φ; в этом можно убедиться, подставив (1.6) в (1.3).

Неоднозначность в определении потенциалов дает нам право наложить на $\mathbf{A}$ и φ некоторое дополнительное условие. Это условие можно выбрать так, чтобы придать уравнениям (1.5) более простой вид.

Наложим, например, такое дополнительное условие:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{1.7}$$

Это — релятивистски инвариантное условие, которое иногда называют калибровкой или условием Лоренца. Его можно записать в форме

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \tag{1.7а}$$

где, как и везде ниже, предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам.

Отметим, что в (1.7а), как и везде ниже, используются обозначения, согласно которым четырехмерный вектор A^i имеет контравариантные компоненты A^0, A^1, A^2, A^3 и ковариантные компоненты $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$ и $A_3 = -A^3$. При этом $A^iA_i = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$. В случае, когда A^i есть потенциал электромагнитного поля компонента A^0 обычно обозначается через φ, т. е. $A^i = \{\varphi, \mathbf{A}\}$. Далее для четырехмерного радиус-вектора имеем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad \text{или} \quad x^i = \{ct, \mathbf{r}\},$$
$$x_i = \{ct, -\mathbf{r}\}, \quad x^ix_i = c^2t^2 - r^2.$$

Именно такие обозначения сейчас наиболее, видимо, распространены и используются, в частности, в курсе [2], на который мы часто будем опираться. Нужно вместе с тем заметить, что используются и другие обозначения, связанные с введением мнимой единицы (см., например, [1, 3—5]). При этом вводятся координаты x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$ или $x_i = \{\mathbf{r}, ict\}$, а векторный потенциал $A_i = \{\mathbf{A}, i\varphi\}$; поэтому уравнение (1.7а) имеет вид $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$.

Обозначения обоих типов детально сопоставляются в [5]. В рамках частной теории относительности введение мнимой единицы более удобно. Имея, однако, в виду переход к общей теории относительности, следует отдать предпочтение использованию контра- и ковариантных величин уже в псевдоевклидовом пространстве.

Легко видеть, что при выполнении условия (1.7) уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \Box\mathbf{A} &\equiv \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \\ \Box\varphi &\equiv \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Не следует думать, что условие (1.7) и система уравнений (1.8) полностью определяют $\mathbf{A}$ и φ. Мы можем еще совершить градиентное преобразование вида (1.6), где в данном случае функция χ должна удовлетворять однородному уравнению $\Box\chi = 0$. При этом поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ останутся неизменными.

Существенное значение, в частности в рамках гамильтоновского метода, имеет разделение поля на продольную и поперечную составляющие.

Разложим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на составляющие

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_{tr}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{tr}, \tag{1.9}$$

причем $\operatorname{div}\mathbf{E}_{tr} = 0$ и в силу (1.1) $\operatorname{div}\mathbf{H}_{tr} = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$.

Потребуем, чтобы векторный потенциал $\mathbf{A}$ описывал только поперечное поле, для чего наложим на него вместо дополнительного условия (1.7) условие

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{1.10}$$

Потенциал, удовлетворяющий условию (1.10), обозначают иногда через $\mathbf{A}_{tr}$.

Уравнения (1.5) для $\mathbf{A}$ и φ при выполнении условия (1.10) принимают вид

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho, \tag{1.11}$$

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}+\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Мы видим, что для потенциала φ получилось «статическое» уравнение Пуассона. Решение для случая, когда ρ есть плотность заряда точечного источника (1.2), хорошо известно:

$$\varphi=\frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)|}, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{r}_i(t)$ — точка, в которой находится заряд в момент времени t. Векторный потенциал $\mathbf{A}$ описывает теперь только поперечное поле. Калибровка (1.10) называется кулоновской *). Потенциалы $\mathbf{A}$ и φ определены здесь с точностью до функции $\chi(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющей условию $\Delta\chi=0$.

Вычислим теперь энергию электромагнитного поля

$$\mathscr{H}=\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV. \tag{1.14}$$

Подставим сюда выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в форме (1.9), причем очевидно, что в случае кулоновской калибровки (1.10)

$$\mathbf{E}_{tr}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{E}_l=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.9), (1.15) в (1.14), получим

$$\mathscr{H}=\frac{1}{8\pi}\int(E_{tr}^2+H^2)\,dV+\frac{1}{8\pi}\int E_l^2\,dV+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}_{tr}\mathbf{E}_l\,dV.$$

Легко показать, что последний интеграл для замкнутой системы, когда поле «на бесконечности» исчезает, равен нулю.

*) Возможность введения кулоновской калибровки (и связанное с ней использование уравнений (1.11) и (1.12) представляется достаточно очевидной. Поэтому довольно любопытно, что еще лет тридцать назад, когда классическая электродинамика была уже вполне «взрослой», гамильтоновский метод развивался обычно на базе уравнений (1.8), что приводило к усложнениям (см., например, первое издание лучшей для своего времени книги Гайтлера [1], появившееся на английском языке в 1936 г., в русском переводе в 1940 г.); другое свидетельство непопулярности в прошлом кулоновской калибровки можно видеть в том, что посвященная этой калибровке статья [6] была в 1939 г. опубликована в ЖЭТФ.

Таким образом, полная энергия электромагнитного поля складывается из энергии поперечного поля и энергии продольного поля.

Если в поле находится несколько точечных зарядов, то энергия продольного поля есть просто энергия кулоновского взаимодействия зарядов между собой, т. е.

$$\mathscr{H}_l = \frac{1}{8\pi}\int E_l^2\, dV = {}^1/_2 \sum_{i,\,j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}(t)}. \tag{1.16}$$

Собственная энергия точечных зарядов бесконечна и здесь, разумеется, не учитывается. Продольная часть электромагнитного поля по существу не квантуется. Квантуется только поперечное поле (см. [1] и ниже).

Поскольку энергия поля точечного заряда бесконечна, часто приходится (по крайней мере на промежуточном этапе) считать заряд «размазанным» по области с радиусом r_0. В этом случае $\mathscr{H}_l \sim e^2/r_0$. Электростатический (классический) радиус электрона, определяемый соотношением $r_e = e^2/mc^2$, где e и m — наблюдаемые заряд и масса электрона, равен $r_e = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ см. Вопросов, связанных с электромагнитной массой электрона (и других частиц), его точечностью и т. п., сейчас касаться не будем.

Следуя дальше по пути, ведущему к гамильтоновской форме электродинамики, разложим векторный потенциал поперечного электромагнитного поля $\mathbf{A}$ в ряд Фурье

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} q_\lambda(t)\sqrt{4\pi}\, c\mathbf{e}_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}). \tag{1.17}$$

Численный коэффициент $\sqrt{4\pi}\,c$ представляет собой нормировочный множитель. Вектор поляризации $\mathbf{e}_\lambda$ является единичным, т. е. $e_\lambda^2 = 1$ (для простоты здесь и обычно ниже векторы $\mathbf{e}_\lambda$ считаются вещественными). Для того чтобы применить разложение (1.17), следует представить себе электромагнитное поле заключенным в некоторый большой «ящик». Можно убедиться в том, что ни в одно из выражений для физически наблюдаемых величин размеры этого «ящика» не входят. Поэтому размер «ящика» ниже везде полагаем равным единице:

$$L = L^3 = 1.$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ есть величина вещественная; поэтому из разложения (1.17) следует, что $q_{-\lambda} = q_\lambda^*$. Поскольку поле поперечно, $\mathbf{e}_\lambda \mathbf{k}_\lambda = 0$, т. е. вектор поляризации гармоники потенциала с номером λ перпендикулярен волновому вектору этой гармоники $\mathbf{k}_\lambda$. Каждому направлению $\mathbf{k}_\lambda$ отвечают два вектора $\mathbf{e}_\lambda$. Поэтому следовало бы везде ввести еще один индекс, принимающий два значения или, другими словами, различать векторы $\mathbf{e}_{\lambda 1}$ и $\mathbf{e}_{\lambda 2}$. Для простоты ниже мы не будем этого

делать, производя в случае надобности суммирование по поляризации в конечных выражениях (при этом считается, что $\mathbf{e}_{\lambda 1}\mathbf{e}_{\lambda 2} = 0$).

Мы можем осуществить и другое разложение векторного потенциала, а именно

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda, i} q_{\lambda i}\mathbf{A}_{\lambda i}, \tag{1.18}$$

где индекс i может принимать только значения 1 и 2,

$$\mathbf{A}_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\, c\, \mathbf{e}_\lambda \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_{\lambda 2} = \sqrt{8\pi}\, c\, \mathbf{e}_\lambda \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}). \tag{1.19}$$

Легко видеть, что функции $\mathbf{A}_{\lambda 1}$ и $\mathbf{A}_{\lambda 2}$, по которым производится разложение (1.18), ортогональны, т. е.

$$\int \mathbf{A}_{\lambda i}\mathbf{A}_{\mu j}\, dV = 4\pi c^2 \delta_{\lambda\mu}\delta_{ij} \tag{1.20}$$

(интеграл берется по объему «ящика»).

Поле считается заключенным в «ящик» с зеркальными стенками, и поэтому компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_\lambda$ должны быть целыми кратными величины $2\pi/L$, где L — линейный размер «ящика», т. е.

$$\mathbf{k}_\lambda = \left\{ \frac{2\pi}{L} n_x, \frac{2\pi}{L} n_y, \frac{2\pi}{L} n_z \right\};$$

здесь n_x, n_y и n_z — целые числа (при этом суммирование в (1.18) проводится по полусфере направлений $\mathbf{k}_\lambda$). Сказанное, казалось бы, противоречит сделанному ранее утверждению о том, что размеры «ящика» L несущественны и положены равными 1. Однако нетрудно убедиться, что противоречия здесь нет (при достаточно больших значениях L эта величина не входит в окончательные результаты).

Из (1.18) видно, что поперечное электромагнитное поле полностью определяется заданием набора величин $q_{\lambda i}(t)$. Величины $q_{\lambda i}(t)$ образуют бесконечное (счетное) множество. Таким образом, с помощью разложения типа (1.18) поле представлено в виде системы с бесконечным (но счетным) числом степеней свободы.

Посмотрим, каким образом энергия электромагнитного поля выражается через величины $q_{\lambda i}(t)$, которые мы вправе называть координатами поля. Нас интересует энергия

$$\mathscr{H}_{tr} = \int \frac{E_{tr}^2 + H^2}{8\pi}\, dV. \tag{1.21}$$

Если $\mathbf{A}$ задано в виде (1.18), поля $\mathbf{E}_{tr}$ и $\mathbf{H}$ можно определить по формулам (1.3) и (1.15), возвести найденные величины $\mathbf{E}_{tr}$ и $\mathbf{H}$ в квадрат и подставить в интеграл (1.21). Тогда мы получим

$$\mathscr{H}_{tr} = {}^1/_2 \sum_{\lambda, i} (p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2). \tag{1.22}$$

Здесь введены обозначения

$$p_{\lambda i} = \dot{q}_{\lambda i}, \quad \omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2; \tag{1.23}$$

точка означает дифференцирование по времени. При получении выражения (1.22) было использовано условие ортогональности (1.20).

Каждый член суммы (1.22) есть энергия классического осциллятора с частотой ω_λ. Таким образом, (1.22) есть сумма энергий отдельных осцилляторов, которые называют осцилляторами поля.

Если известны все $q_{\lambda i}(t)$ в (1.18), мы можем определить энергию поперечного электромагнитного поля. Следовательно, дело сводится к определению $q_{\lambda i}(t)$.

Чтобы найти уравнения для $q_{\lambda i}(t)$, подставим разложение (1.18) в уравнение (1.12) для «поперечного» векторного потенциала. Умножив обе части полученного уравнения на $\mathbf{A}_{\lambda i}$ и проинтегрировав по объему «ящика», получим следующие уравнения для $q_{\lambda i}(t)$:

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\mathbf{A}_{\lambda i}(\mathbf{r}(t)) = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}(t)) \begin{cases} \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t)), \\ \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t)). \end{cases} \tag{1.24}$$

Это — уравнение осциллятора при наличии возбуждающей силы, причем $\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ берется при $i = 1$, а $\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ — при $i = 2$.

Уравнение (1.24) выведено в предположении, что в поле имеется один точечный электрон (заряд e; см. (1.2)), движущийся со скоростью $\mathbf{v}(t)$. Обобщение на случай многих зарядов очевидно.

Все рассмотренные соотношения можно записать вполне аналогично уравнениям Гамильтона классической механики:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p}, \tag{1.25}$$

где $\mathcal{H}(p, q)$ — функция Гамильтона механической системы, q и p — соответственно обобщенные координаты и обобщенные импульсы.

Наша задача — найти такую функцию $\mathcal{H}(p_{\lambda i}, q_{\lambda i})$, чтобы из нее можно было получить уравнения движения типа (1.25).

Очевидно, уравнения (1.24) для $q_{\lambda i}$ в случае свободного поля (без зарядов), т. е. уравнения

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = 0, \tag{1.26}$$

можно представить в форме Гамильтона, если

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{tr} = {}^1/_2 \sum_{\lambda, i} (p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2), \tag{1.27}$$

где $\mathcal{H}_{tr}$ — энергия поперечного электромагнитного поля (1.22).

Действительно, из (1.25) и (1.27) получаем

$$\dot{p}_{\lambda i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\lambda i}} = -\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}, \quad \dot{q}_{\lambda i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\lambda i}} = p_{\lambda i}, \tag{1.28}$$

что совпадает с (1.26).

Ряд (1.18) с $q_{\lambda i}$, которые определяются из (1.26), есть сумма плоских электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. В самом деле, из (1.26) следует, что $q_{\lambda i} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, причем $\omega = \omega_\lambda$. Вместе с тем $\omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2$ (см. (1.23)) и, следовательно, поле меняется по закону $\cos \omega_\lambda (t - \mathbf{s}_\lambda \mathbf{r}/c)$ или $\sin \omega_\lambda (t - \mathbf{s}_\lambda \mathbf{r}/c)$, где $\mathbf{s}_\lambda = \mathbf{k}_\lambda / k_\lambda$, $\mathbf{s}_\lambda^2 = 1$. Таким образом, в отсутствие зарядов поле состоит из плоских волн, движущихся со скоростью света; этот результат ясен, конечно, уже из исходных уравнений.

Если классическая функция Гамильтона электромагнитного поля без зарядов в вакууме есть энергия поля, то при наличии зарядов следует учесть еще энергию взаимодействия их с полем. Как хорошо известно, в нерелятивистском случае энергия заряда в поле имеет вид

$$\mathcal{H}_e = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{1.29}$$

Полный гамильтониан для системы электромагнитное поле + + заряженная частица, таким образом, равен сумме выражений (1.27) и (1.29)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}_i) + \mathcal{H}_{tr}, \tag{1.30}$$

где $\mathbf{r}_i$ — координаты точки, в которой находится заряженная частица (если частиц много, то $\mathcal{H}_e$ является суммой выражений типа (1.29); ниже индекс i у $\mathbf{r}_i$ мы будем иногда опускать).

Из этого гамильтониана (фактически мы все время говорим пока о классической функции Гамильтона) с помощью (1.25) получается следующая система уравнений:

$$\dot{p}_{\lambda i} = -\omega_\lambda^2 q_{\lambda i} + \frac{e}{mc}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{A}_{\lambda i}, \quad \dot{q}_{\lambda i} = p_{\lambda i}.$$

Эта система сводится к уравнению (1.24). Действительно, поскольку величина $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ есть просто скорость частицы $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$, мы приходим к уже выведенному ранее уравнению. Из функции Гамильтона (1.30) можно получить и уравнение движения частицы в поле; продифференцировав $\mathcal{H}$ по $\mathbf{r}$, находим

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right\} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}}, \tag{1.31}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ — обобщенный импульс частицы, находящейся в точке $\mathbf{r}$; при этом, как легко рассчитать (см. [7], с. 745), $\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{EH}]\, dv$ есть импульс электромагнитного поля, связанного с наличием заряда и внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ (конкретно $[\mathbf{EH}]$ вычисляется с использованием кулоновской калибровки (1.10) и в приближении, когда $\mathbf{H}$ есть внешнее поле, а $\mathbf{E}$ — кулоновское поле точечного заряда e; тем самым для рассматриваемого заряда, движущегося в магнитном поле с нерелятивистской скоростью $v \ll c$, в хорошем приближении речь идет о полном электромагнитном импульсе системы).

Итак, из выражения для функции Гамильтона (1.30) получаем и уравнение движения для осцилляторов поля, и уравнения движения для заряженных частиц.

Здесь мы рассматриваем все в нерелятивистском приближении *), для того чтобы использовать большую близость по форме между нерелятивистской классической механикой и нерелятивистской квантовой механикой. В релятивистской квантовой теории частиц со спином $^1/_2$, где используется уравнение Дирака, не имеющее столь ясного классического аналога, это сходство в известной мере теряется.

Переход от классической электродинамики в форме Гамильтона к квантовой электродинамике совершается точно так же, как переход от классической нерелятивистской механики к квантовой. Именно, классическая функция Гамильтона для частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и координатой $\mathbf{r}$

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + e\varphi(\mathbf{r}) \tag{1.32}$$

заменяется на оператор Гамильтона, или гамильтониан,

$$\hat{\mathscr{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\varphi, \tag{1.33}$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор импульса частицы, удовлетворяющий коммутационным соотношениям ($\mathbf{r} \equiv \{x_j\}$, $j = 1, 2, 3$)

$$\hat{p}_j x_j - x_j \hat{p}_j = -i\hbar \tag{1.34}$$

и равный

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla. \tag{1.35}$$

Если частица находится в электромагнитном поле, то в (1.32) $\mathbf{p}$ заменяется на $\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ и соответственно в (1.33) $\hat{\mathbf{p}}$ заменяется на

$$\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}}.$$

*) Речь, конечно, идет о частицах, поскольку электродинамика в вакууме (или с квантовой точки зрения теория частиц со спином 1 и массой покоя, равной нулю) всегда является релятивистской теорией.

Состояние системы определяется волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, изменение которой во времени описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi. \tag{1.36}$$

Волновые функции стационарных состояний имеют вид

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \exp(-iE_n t/\hbar)\, \psi_n(\mathbf{r}), \tag{1.37}$$

где $\psi_n(\mathbf{r})$ не зависит от t (n — номер, или квантовое число стационарного состояния). Квадрат модуля Ψ-функции (т. е. вероятность того, что частица будет обнаружена в данной точке) для стационарного состояния не зависит от времени. Подставляя (1.37) в (1.36) и сокращая на $\exp(-iE_n t/\hbar)$, имеем

$$\hat{\mathcal{H}}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n \psi_n(\mathbf{r}). \tag{1.38}$$

Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с массой, равной единице. Как известно, гамильтониан такого осциллятора имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2 + {}^1/_2\omega_0^2 q^2 \tag{1.39}$$

(здесь $q \equiv \hat{q}$ — координата и ω_0 — циклическая частота осциллятора). Энергия n-го стационарного состояния равна

$$E_n = \hbar\omega_0 (n + {}^1/_2); \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1.39а}$$

а волновая функция имеет вид

$$\psi_n(q) = C_n \exp(-q^2/2q_0^2)\, H_n(q/q_0), \tag{1.39б}$$

где $q_0 = \sqrt{\hbar/\omega_0}$, $H_n(x)$ — полином Эрмита и $C_n = \dfrac{1}{(\pi q_0^2)^{1/4}} \dfrac{1}{\sqrt{2^n n!}}$ — нормировочный множитель. В частности,

$$\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\, q_0}} \exp(-q^2/2q_0^2). \tag{1.39в}$$

Матричные элементы координаты $(q_{nn'})$ и импульса $(p_{nn'})$ для переходов из состояния с квантовым числом n в состояние с квантовым числом n' при $n' \neq n \pm 1$ равны нулю, а при $n' = n \pm 1$ равны

$$\left.\begin{aligned}
q_{n,\,n+1} &= \int \psi_n^* q \psi_{n+1}\, dq = \sqrt{\frac{\hbar\,(n+1)}{2\omega_0}}\,, \\
q_{n,\,n-1} &= \sqrt{\frac{\hbar n}{2\omega_0}}\,, \\
p_{n,\,n+1} &= \int \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \psi_{n+1}\, dq = \\
&= -i\omega_0 \sqrt{\frac{\hbar\,(n+1)}{2\omega_0}} = -i\omega_0 q_{n,\,n+1}, \\
p_{n,\,n-1} &= i\omega_0 \sqrt{\frac{\hbar n}{2\omega_0}} = i\omega_0 q_{n,\,n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

Выше упоминалось, что переход от классической электродинамики к квантовой проводится совершенно так же, как в механике. При этом функция Гамильтона системы, состоящей из поля и частицы,

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_e + \mathscr{H}_{tr} \tag{1.41}$$

($\mathscr{H}_e$ — функция Гамильтона для частицы в поле, рассмотренная выше; см. (1.29)) заменяется на оператор Гамильтона

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_e + \hat{\mathscr{H}}_{tr}, \tag{1.42}$$

где

$$\hat{\mathscr{H}}_{tr} = {}^1/_2 \sum_{\lambda, i} (\hat{p}^2_{\lambda i} + \omega^2_\lambda q^2_{\lambda i}). \tag{1.43}$$

Здесь оператор импульса $\hat{p}_{\lambda i}$, так же как и в механике, равен

$$\hat{p}_{\lambda i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_{\lambda i}} \tag{1.44}$$

и удовлетворяет соотношениям коммутации

$$\hat{p}_{\lambda i} q_{\mu j} - q_{\mu j} \hat{p}_{\lambda i} = -i\hbar \delta_{\lambda\mu} \delta_{ij}. \tag{1.45}$$

Если зарядов нет или их взаимодействием с полем, фигурирующим в $\mathscr{H}_e$, можно пренебречь, то волновая функция, описывающая состояние поля $\Psi(q, t)$ (q — совокупность координат $q_{\lambda i}$), удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}}_{tr} \Psi(q, t). \tag{1.46}$$

Волновая функция стационарного состояния $\psi_n(q)$ удовлетворяет тогда уравнению

$$\hat{\mathscr{H}}_{tr} \psi_n(q) = E_n \psi_n(q). \tag{1.47}$$

Легко проверить, что E_n имеет следующий вид:

$$E_n = \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda (n_{\lambda i} + {}^1/_2) = \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda n_{\lambda i} + {}^1/_2 \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda. \tag{1.48}$$

Член ${}^1/_2 \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda$ бесконечно велик. Однако эта бесконечность не приводит к существенным трудностям в теории по следующим причинам: во-первых, физическая наблюдаемая величина в этой теории — не сама энергия, а разность энергий в различных состояниях, и поэтому сумма ${}^1/_2 \sum_{\lambda, i} \hbar\omega_\lambda$, оставаясь постоянной, не входит в окончательный результат. Во-вторых, переход от классических уравнений к квантовым не однозначен. Можно найти такой метод квантования уравнений поля, при котором эта добавка исчезает. Действительно, будем исходить из классической функции Гамильтона для одного осциллятора в виде

$$\mathscr{H} = {}^1/_2 (p^2 + \omega^2 q^2) = {}^1/_2 (p + i\omega q)(p - i\omega q).$$

Тогда, переходя к оператору Гамильтона, т. е. заменяя p на $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$, находим

$$\hat{\mathscr{H}} = {}^1/_2\,(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) - {}^1/_2\hbar\omega$$

(этот результат получается потому, что операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ не коммутируют).

Таким образом, в применении к полю приходим для энергии стационарного состояния к выражению

$$E_n = \sum_{\lambda,\, i} \hbar\omega_\lambda n_{\lambda i}. \tag{1.49}$$

Волновая функция поля имеет вид произведения волновых функций отдельных осцилляторов, т. е.

$$\psi_n(q) = \prod_{\lambda,\, i} \psi_{n\lambda i}(q_{\lambda i}). \tag{1.50}$$

Из формулы (1.49) видно, что энергию электромагнитного поля можно трактовать как энергию совокупности частиц с энергией $\hbar\omega_\lambda$. Часто утверждают, что мы таким образом сразу же приходим к понятию о фотонах, причем числа $n_{\lambda i}$ суть числа фотонов данного сорта. Фотонами, однако, принято называть (и это вполне разумно) лишь кванты поля излучения (поля без источников, или свободного поля), в частности света. В большинстве случаев используется даже еще более узкое определение фотонов как квантов электромагнитного поля, имеющих энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega/c$). Ниже фотонами будем называть любые кванты излучения в вакууме, но это не меняет того факта, что полученные выше кванты поперечного электромагнитного поля (назовем их виртуальными фотонами или псевдофотонами), вообще говоря, не сводятся к фотонам. Все дело в том, что рассматривалось не поле излучения, т. е. свободное электромагнитное поле (решение однородных уравнений поля), а произвольное поле (решение неоднородных уравнений поля — уравнений при наличии токов и зарядов). Такое произвольное поперечное электромагнитное поле отлично от поля излучения или, на квантовом языке, от совокупности фотонов (в качестве примера достаточно упомянуть поперечное поле равномерно движущегося заряда, которое перемещается в пространстве со скоростью заряда $v < c$). Более того, если само квантование поперечного поля (1.45) проведено без всяких предположений, то как выражения (1.46)—(1.48), так и (1.49), (1.50) получены непоследовательным образом — при пренебрежении взаимодействием зарядов с полем. Если же этого не делать, то, очевидно, координаты поля q входят и в $\hat{\mathscr{H}}_{tr}$, и в $\hat{\mathscr{H}}_e$, в силу чего энергию поперечного поля нельзя представить в виде (1.48), (1.49). Введение псевдофотонов все же имеет некоторый смысл,

поскольку частоты ω_λ в (1.49) можно до поры до времени считать не связанными с волновым вектором соотношением $\omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2$. Такие виртуальные фотоны (псевдофотоны) появляются в промежуточных состояниях при расчетах по теории возмущений (см. ниже). Другими словами, энергия виртуальных фотонов $E_\lambda = \hbar\omega_\lambda$ и их импульс $\mathbf{p}_\lambda = \hbar\mathbf{k}_\lambda$ не связаны соотношением $E_\lambda^2 = c^2 p_\lambda^2$ $(\omega_\lambda^2 = c^2 k_\lambda^2)$, справедливым для фотонов с заданным импульсом. Для поперечного увлекаемого движущимся зарядом поля, как мы увидим ниже, $\omega = (\mathbf{kv})$, где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Если рассматривать соответствующие кванты с энергией $\hbar\omega$, то они относятся к виртуальным фотонам и образуют, как иногда говорят, «шубу» движущегося заряда.

Подчеркнем, что мы отнюдь не настаиваем на целесообразности введения понятия о виртуальных фотонах, не говоря уже о самом этом термине *). Главное для нас состоит в выяснении того факта, что поперечное электромагнитное поле, вообще говоря, не представляет собой совокупности фотонов. Об этом еще пойдет речь ниже. Виртуальные фотоны, фигурирующие в выражении (1.49), даже для поля излучения не сводятся к фотонам с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $(\hbar\omega/c)(\mathbf{k}/k)$. Это обстоятельство связано с тем, что выше использовалось разложение по стоячим волнам (см. (1.18), (1.19)). Стоячие волны не являются собственными функциями оператора импульса, и их квантование приводит к фотонам (мы имеем в виду чистое, свободное поле излучения) с равным нулю импульсом **).

Для того чтобы прийти к «обычным» фотонам с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $(\hbar\omega/c)(\mathbf{k}/k)$, представим векторный потенциал в виде суммы бегущих волн

$$\mathbf{A} = \sum_\lambda (q_\lambda \mathbf{A}_\lambda + q_\lambda^* \mathbf{A}_\lambda^*), \tag{1.52}$$

где

$$\mathbf{A}_\lambda = \sqrt{4\pi}\, c\mathbf{e}_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) \tag{1.53}$$

и суммирование в (1.52), в отличие от (1.17), проводится по полусфере, т. е. по половине направлений $\mathbf{k}_\lambda$.

---

*) Термин псевдофотоны, или виртуальные фотоны, применяется иногда также в ином смысле, отличном от используемого здесь. Именно, методом псевдофотонов называют прием, в основе которого лежит приближенная замена фурье-компонент поля, увлекаемого движущимся зарядом, соответствующей совокупностью фотонов (см., например, [4, 8]).

**) Для вычисления импульса фотона можно воспользоваться выражением для импульса поля

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{EH}]\, dV \tag{1.51}$$

и выразить $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через $\mathbf{A}$, т. е. через величины $p_{\lambda t}$ и $q_{\lambda t}$.

Тогда для функции Гамильтона поперечной части поля имеем

$$\mathscr{H}_{tr} = \sum_{\lambda} (p_\lambda p_\lambda^* + \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*). \tag{1.54}$$

Рассмотрим только чистое поле излучения. Тогда можно считать, что $p_\lambda = \dot{q}_\lambda = -i\omega_\lambda q_\lambda$ (см. также (1.26) и (1.28)) и

$$\mathscr{H}_{tr} = 2 \sum_{\lambda} \omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*. \tag{1.55}$$

Заметим, что величины q_λ и q_λ^* не являются каноническими переменными, так как уравнения движения в этих переменных не имеют вида (см. также [1])

$$\dot{q}^* = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^*}. \tag{1.56}$$

Поэтому введем новые переменные, являющиеся каноническими:

$$Q_\lambda = q_\lambda + q_\lambda^*, \quad P_\lambda = -i\omega_\lambda (q_\lambda - q_\lambda^*). \tag{1.57}$$

Тогда

$$\mathscr{H}_{tr} = {}^1/_2 \sum_{\lambda} (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2). \tag{1.58}$$

Проводя квантование, получим, очевидно, выражение (1.49) для энергии, а вычисляя импульс поля, найдем

$$\mathbf{G} = \sum_{\lambda} \frac{\hbar\omega_\lambda}{c} n_\lambda \frac{\mathbf{k}_\lambda}{k_\lambda}, \tag{1.59}$$

т. е. импульс одного фотона действительно равен

$$\mathbf{g}_\lambda = \frac{\hbar\omega_\lambda}{c} \frac{\mathbf{k}_\lambda}{k_\lambda} \equiv \frac{\hbar\omega_\lambda}{c} \mathbf{s}_\lambda, \quad s_\lambda^2 = 1. \tag{1.60}$$

Помимо энергии и импульса, поля и отвечающие им кванты характеризуются моментом количества движения. Момент количества движения электромагнитного поля в классике выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{r}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}]]\, dV. \tag{1.61}$$

Неограниченная плоская волна не имеет отличного от нуля момента количества движения вдоль направления волнового вектора $\mathbf{k}_\lambda$, поскольку вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ в такой волне направлен по $\mathbf{k}_\lambda$. Однако, например, для волны в цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками, значение $M_{em,\,z} \equiv M_z$ (z — ось волновода) может отличаться от нуля. Конкретно для монохроматических циркулярно поляризованных волн в волноводе (см. [1] и указанную там литературу)

$$M_z = \pm \mathscr{H}_{tr}/\omega_\lambda. \tag{1.62}$$

Здесь знак зависит от направления вращения поля в волне; $\mathcal{H}_{tr}$ — энергия поперечного поля. При квантовании (его нужно проводить, разлагая поля по «нормальным» волнам в волноводе) $\mathcal{H}_{tr} = \hbar\omega_\lambda n_\lambda$ и выражение (1.62) свидетельствует о том, что момент поля слагается из моментов количества движения квантов поля, причем для каждого кванта значение M_z равно $\pm\hbar$. Эти кванты при принятой выше терминологии можно называть фотонами (волновод считается пустым, а его стенки идеально проводящими). Важно, конечно, не название, а выявленное квантование момента количества движения излучения. Момент (точнее, его проекция) равен $\pm\hbar$, т. е. спин фотонов равен единице. Вопрос о моменте количества движения электромагнитного поля вообще и поля излучения в частности особенно важно рассматривать при разложении поля по сферическим волнам (такие волны излучаются электрическими и магнитными мультиполями, включая диполи). Подробнее о моменте количества движения поля излучения и спине фотонов см. [1, 9].

Рассмотрим снова полную систему, состоящую из поля и заряда. В нерелятивистском приближении для гамильтониана системы имеем

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}}\right)^2 + e\varphi + \hat{\mathcal{H}}_{tr}, \tag{1.63}$$

а уравнение для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t, q)$ принимает обычный вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi. \tag{1.64}$$

При решении задач методами теории возмущений гамильтониан представляют следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}', \\ \hat{\mathcal{H}}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\varphi + \hat{\mathcal{H}}_{tr}, \\ \hat{\mathcal{H}}' &= -\frac{e}{mc}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2mc^2}\hat{\mathbf{A}}^2, \end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

причем $\hat{\mathcal{H}}'$ рассматривается как возмущение *).

Заметим, что $\hat{\mathbf{p}}$, вообще говоря, не коммутирует с $\hat{\mathbf{A}}$, и поэтому в выражении для $\hat{\mathcal{H}}'$ следует писать не $\frac{e}{mc}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$, а $\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{p}})$, так как именно это выражение эрмитово.

*) Отметим, что использование теории возмущений с невозмущенным гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_0$ и возмущением $\hat{\mathcal{H}}'$, определенными согласно (1.65), не обеспечивает автоматически соблюдения требования калибровочной инвариантности всех вычислений (т. е. не обеспечивает независимости результатов от выбора потенциалов или, другими словами, от калибровки этих потенциалов). Несмотря на то, что при решении конкретных задач это обстоятельство сказывается весьма редко и, по-видимому, было замечено лишь недавно, о нем не следует забывать [10].

Однако в случае поперечного поля ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) члены с $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{p}}$ равны друг другу.

Эффекты, связанные с взаимодействием света с электроном, пропорциональны «константе электромагнитного взаимодействия», называемой также «постоянной тонкой структуры»

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}036}. \tag{1.66}$$

Поскольку $\alpha \ll 1$, взаимодействие электрона с электромагнитным полем является в известном отношении слабым *). Поэтому можно считать, что волновая функция стационарного состояния должна мало отличаться от решения уравнения

$$\hat{\mathscr{H}}_0 \psi_{n0} = E_{n0} \psi_{n0}, \tag{1.67}$$

которое можно найти по крайней мере в ряде случаев. В частности, в отсутствие внешнего электромагнитного поля

$$\psi_{n0} = \exp\left(\frac{i\mathbf{pr}}{\hbar}\right) \prod_{\lambda, i} \psi_{n\lambda i}(q_{\lambda i}). \tag{1.68}$$

Малое отличие точной волновой функции от решения уравнения (1.67) видно, например, из рассмотрения электронов на возбужденных уровнях в атоме водорода. Время жизни электрона на возбужденном уровне порядка 10^{-9} с, а «период обращения на орбите» порядка 10^{-15} с. Отсюда, используя соотношение неопределенностей для энергии

$$\Delta E \, \Delta t \sim \hbar, \tag{1.69}$$

получим, что ширина уровня $\Delta E \sim 10^{-6}$ эВ, а расстояние между уровнями порядка электронвольта. Таким образом, движение электронов на возбужденных уровнях атома водорода «квазистационарно» и мало отличается от движения, которое происходило бы, если бы электрон не взаимодействовал с полем излучения. Причина этого, как мы уже говорили заключается в том, что константа электромагнитного взаимодействия $\alpha = e^2/\hbar c$ много меньше единицы. Если бы подобная константа была порядка единицы (как в случае взаимодействия нуклона с мезонным полем), то ширина уровней была бы порядка расстояний

*) Это замечание касается в основном радиационных эффектов и не означает, конечно, что электромагнитное взаимодействие всегда можно рассматривать как возмущение. Достаточно отметить, что электростатическое взаимодействие электрона с ядром (заряд eZ) характеризуется параметром $e^2Z/\hbar v$, где v — скорость электрона. Для атома водорода в основном состоянии параметр $e^2/\hbar v \sim 1$.

между самими уровнями и ни о каком «квазистационарном» движении, вообще говоря, нельзя было бы говорить *).

Поскольку функции ψ_{n0} (см. (1.67)) образуют полную систему, можно представить решение Ψ уравнения (1.64) в виде

$$\Psi = \sum_m b_m(t)\,\psi_{m0}(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{iE_{m0}t}{\hbar}\right]. \tag{1.70}$$

Подставляя (1.70) в уравнение (1.64) с гамильтонианом (1.65), умножая обе части уравнения на ψ^*_{n0} интегрируя по всему пространству и учитывая ортогональность и нормировку функций ψ_{n0}, получаем

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{db_n(t)}{dt} &= \sum_m \mathscr{H}'_{nm} b_m(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{n0}-E_{m0})t\right], \\ \mathscr{H}'_{nm} &= \int \psi^*_{n0}\widehat{\mathscr{H}}'\psi_{m0}\,dV. \end{aligned}\right\} \tag{1.71}$$

Пусть при $t=0$ имеем $b_k = 1$ и $b_{n\neq k} = 0$. Тогда, предполагая, что b_n при $n \neq k$ малы во все остальные моменты времени, и отбрасывая члены следующего порядка малости, имеем

$$i\hbar\frac{db_n(t)}{dt} = \mathscr{H}'_{nk}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{n0}-E_{k0})t\right], \tag{1.72}$$

откуда легко получаем

$$|b_n(t)|^2 = \frac{2|\mathscr{H}'_{nk}|^2}{(E_{k0}-E_{n0})^2}\left\{1-\cos\left[\frac{(E_{k0}-E_{n0})t}{\hbar}\right]\right\}. \tag{1.73}$$

Если в первом порядке теории возмущений $|b_n(t)|^2 = 0$, то с помощью аналогичной процедуры можно найти следующие приближения. Например, во втором приближении матричный элемент имеет вид

$$\mathscr{H}'^{(2)}_{nk} = \sum_{n'}\frac{\mathscr{H}'_{nn'}\mathscr{H}_{n'k}}{E_{k0}-E_{n'0}}. \tag{1.74}$$

Выражение (1.73) определяет вероятность перехода только в одно конечное состояние с энергией E_{n0}. Нас же обычно интересует переход во все возможные состояния, т. е. интеграл

$$\int |b_n(t)|^2 \rho(E_{n0})\,dE_{n0}. \tag{1.75}$$

*) В этом отношении квантовая теория существенно отличается от классической. В классике сравнительно сильные возмущения могут не приводить к качественному изменению характера движения. Например, свойства свободного осциллятора, находящегося в тепловом равновесии, и свойства осциллятора в плотном газе, который сильно взаимодействует с осциллятором, весьма близки друг к другу. Напротив, в квантовой теории, если возмущение приводит к тому, что ширина уровня становится порядка расстояния между уровнями, свойства движения существенно изменяются (см. ниже гл. 14).

Здесь $\rho(E_{n0})\,dE_{n0}$ — число конечных состояний (они считаются «густо» расположенными) в интервале энергий E_{n0}, $E_{n0}+dE_{n0}$. Интеграл (1.75) при t, стремящемся к бесконечности, равен (см. ниже формулу (1.84) или подробнее в [1])

$$\frac{2\pi}{\hbar}|\mathscr{H}'|^2_{E=E_{k0}}\rho(E_{k0})\,t \tag{1.76}$$

и, следовательно, вероятность перехода в единицу времени выражается формулой

$$W=\frac{1}{t}\int|b_n(t)|^2\rho(E_{n0})\,dE_{n0}=\frac{2\pi}{\hbar}|\mathscr{H}'|^2\rho(E_{k0}). \tag{1.77}$$

(Переход имеет место только при наличии состояний E_{n0}, сколь угодно близких к E_{k0}, что уже отражено в (1.76).) При вычислении матричных элементов $\mathscr{H}'_{nn'}$ нужно, как ясно из всего вышеизложенного, воспользоваться выражениями (1.65), а также (1.18), (1.19) и (1.40), понимая под q операторы $q_{\lambda i}$ (подробнее см. [1]).

Использование теории возмущений в такой простой или в несколько более сложной форме дает возможность ответить на целый ряд вопросов теории излучения [1, 9]. Однако более широкое применение теории возмущений наталкивается на значительные трудности, что находит формальное отражение в появлении расходящихся (бесконечных) выражений. Возникновение расходящихся (бесконечных) выражений связано с предположением о «точечности» электрона, с бесконечным числом степеней свободы у поля и т. п. Некоторые из них не обусловлены квантованием и имеют классическую природу. Достаточно вспомнить, что электростатическая энергия точечного заряда равна бесконечности. Еще в классической электродинамике научились обходить такие трудности. Для этого, в частности, используется метод «перенормировки» массы *). В квантовой электродинамике приходится также перенормировывать заряд частицы и вообще ситуация усложняется. Исследование соответствующего круга вопросов в применении к квантовой электродинамике длительное время находилось в центре внимания теоретической физики. В результате достигнуты большие успехи, и бесконечности в квантовой электродинамике практически «обезврежены». Развит аппарат, позволяющий ответить на возникающие вопросы и, в частности, учесть чрезвычайно тонкие радиационные эффекты [1, 9].

Настоящий курс находится в стороне от всей этой проблематики, хотя изложенный выше материал, как можно надеяться, окажется полезным для понимания физических основ квантовой

*) Сам термин «перенормировка массы», насколько нам известно, возник лишь при проведении соответствующих операций в квантовой электродинамике. Это дало повод считать метод перенормировок порождением квантовой теории, что по меньшей мере неточно (см. гл. 2).

электродинамики. В плане же дальнейшего изложения нам было важно лишь сформулировать гамильтоновский метод в классической электродинамике и ознакомить с самыми элементарными аспектами квантовой электродинамики.

Любопытно, что в классической электродинамике гамильтоновский метод в прошлом почти совсем не применялся; этот метод стал популярным только при переходе к квантовой электродинамике. Однако, как часто бывает, затем начала действовать «обратная связь». Конкретно, выяснилось, что гамильтоновский метод очень удобен и для решения ряда классических задач, особенно при наличии среды (см. ниже гл. 6 и 7). В последние годы, когда многие проблемы оказались уже решенными, возникли новые более сложные задачи и, кроме того, был развит и начал широко применяться ряд мощных математических методов (диаграммная техника, метод функций Грина и т. п.), гамильтоновский метод отошел в тень как в квантовой, так и в классической теориях излучения. По нашему убеждению, гамильтоновский метод сохраняет тем не менее преимущество наглядности, простоты и довольно большой универсальности, что делает его изложение и использование вполне целесообразным по крайней мере для педагогических целей.

В качестве иллюстрации рассмотрим при помощи гамильтоновского формализма задачу об излучении осциллятора — гармонически колеблющегося заряда. Чтобы определить поле, нужно найти величины $q_{\lambda i}$ в разложении (1.18), причем уравнение движения для этих величин имеет вид (1.24)

$$\ddot{q}_{\lambda i} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i} = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}(t))\begin{cases}\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}),\\ \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}),\end{cases} \tag{1.24}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор излучающего заряда e; в случае осциллятора

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 \sin\omega_0 t, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cos\omega_0 t = \mathbf{a}_0\omega_0 \cos\omega_0 t. \tag{1.78}$$

Аргумент $(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t))$ в (1.24) мал, если

$$a_0 \ll \frac{1}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi}, \tag{1.79}$$

где λ_0 — длина волны испускаемого излучения. Примем условие (1.79), т. е. будем считать, что амплитуда колебаний осциллятора много меньше длины испускаемой волны (для нерелятивистского осциллятора это всегда справедливо, поскольку скорость $v_0 = \omega_0 a_0 \ll c$ и $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$), Тогда $(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ в (1.24) много меньше единицы, и мы вправе положить $\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) = 1$, $\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}) = 0$. Поэтому $q_{\lambda 2} = 0$, а для $q_{\lambda 1}$ получим уравнение

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = e(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0)\sqrt{8\pi}\cos\omega_0 t. \tag{1.80}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее требованию $q_{\lambda 1} = 0$, $\dot{q}_{\lambda 1} = 0$ при $t = 0$, имеет вид

$$q_{\lambda 1} = \frac{b_\lambda}{\omega_\lambda^2 - \omega_0^2} [\cos \omega_0 t - \cos \omega_\lambda t], \quad b_\lambda = e (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0) \sqrt{8\pi}. \quad (1.81)$$

Использование других начальных условий не сказывается на интересующем нас здесь результате — выражении (1.85) для мощности излучения (см. также ниже).

Получив $q_{\lambda i}$, мы тем самым полностью определили электромагнитное поле и можем вычислить все другие величины. Найдем, например, энергию, излучаемую зарядом (осциллятором) в единицу времени. Для этого, очевидно, следует вычислить энергию поля $\mathscr{H}_{tr}$ по формуле (1.22) и затем найти ее изменение в единицу времени, т. е. $d\mathscr{H}_{tr}/dt$. Это и будет энергия, излученная осциллятором в единицу времени.

Для $\mathscr{H}_{tr}$ получаем выражение

$$\mathscr{H}_{tr} = \sum_\lambda \left\{ b_\lambda^2 \omega_\lambda^2 \frac{[1 - \cos (\omega_\lambda - \omega_0) t]}{(\omega_\lambda^2 - \omega_0^2)^2} + \ldots \right\}. \quad (1.82)$$

В фигурных скобках мы выписали только тот член, за счет которого $\mathscr{H}_{tr}$ растет со временем; остальные члены, не выписанные в (1.82), не дают никакого вклада в выражение для энергии, излучаемой осциллятором в единицу времени при больших t (здесь предполагается, что t велико).

Для вычисления суммы (1.82) удобно перейти от суммирования к интегрированию. При этом выражение (1.82) нужно еще умножить на число осцилляторов поля с частотой от ω до $\omega + d\omega$; это число равно

$$\frac{\omega^2 d\omega\, d\Omega}{(2\pi c)^3}, \quad (1.83а)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Таким образом, переход от суммирования к интегрированию сводится к замене

$$\sum_\lambda \to \frac{1}{2 (2\pi c)^3} \int \ldots \omega^2 d\omega\, d\Omega, \quad (1.83б)$$

где появление дополнительного множителя $^1/_2$ связано с переходом к интегрированию по всем направлениям, а не по полусфере направлений $\mathbf{k}$.

Интегрирование выражения (1.82) по ω легко провести, если учесть равенство, справедливое при больших значениях t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \frac{[1 - \cos (\omega - \omega_0) t]}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \pi f(\omega_0)\, t. \quad (1.84)$$

В результате всех указанных простых вычислений получаем выражение для энергии, излученной осциллятором в единицу времени в телесный угол $d\Omega$,

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} = \frac{\mathcal{H}_{tr}}{t} = \frac{e^2 a_0^2 \omega_0^4}{8\pi c^3} \sin^2\theta \, d\Omega, \tag{1.85}$$

где θ — угол между направлением колебаний $\mathbf{a}_0$ и волновым вектором излучения $\mathbf{k}_0$, причем $k_0 = \omega_0/c$.

Излучение, как оно определено выше (часть поля, нарастающая пропорционально времени t), возникает в случае равенства частоты «силы», стоящей в правой части уравнения (1.24), и собственной частоты осцилляторов поля $\omega_\lambda = ck_\lambda$. В этом отношении гармонически колеблющийся заряд вполне типичен, хотя в рассмотренном дипольном приближении (условие (1.79)) излучается только одна частота ω_0. Отметим, что в квантовой теории излучения в рамках теории возмущений ситуация вполне аналогична (ср. (1.82) с (1.73); подробнее см. [1]).

Некоторые важные, остающиеся обычно в тени обстоятельства удобно теперь выяснить, обсуждая несколько риторический вопрос: может ли излучать равномерно движущийся электрон?

Стандартный, можно сказать азбучный, ответ на этот вопрос отрицателен. Фактически же нужно сделать много оговорок, причем некоторые из них нетривиальны и далеко не всегда учитывались (а это приводило к парадоксам и ошибкам).

Во-первых, следует уточнить систему отсчета, в которой рассматриваемый электрон *) движется равномерно, т. е. с некоторой постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Как обычно (когда это дополнительно не оговорено), речь идет о движении в инерциальных системах отсчета. Именно в таких системах написаны исходные уравнения поля, и только с этими системами отсчета мы имели дело. Очевидно, если электрон движется равномерно в некоторой неинерциальной системе, то относительно инерциальной системы он движется ускоренно и излучает.

Во-вторых, рассматривается равномерное движение в вакууме, а не в среде. Электрон, равномерно движущийся в среде, может излучать как черенковское, так и переходное излучение (см. ниже гл. 6—8).

В-третьих, считается, что скорость электрона $v < c$ — скорости света в вакууме. Часто такое условие рассматривается как нечто тривиальное, но это не так. Требование релятивистской инвариантности отнюдь не приводит к условию $v < c$ и, в частности, уравнения поля (1.1) вполне справедливы (и релятивистски инвариантны) и при $v > c$. Правда, частицу с массой

*) По существу, имеется, конечно, в виду некоторый заряд, лишь условно называемый электроном.

покоя m нельзя ускорить до скорости $v \geqslant c$, как ясно уже из выражения для энергии частицы $\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Но это еще не закрывает возможности рассматривать частицы (тахионы), которые всегда движутся со скоростью $v > c$ и энергией $\mathscr{E} = \frac{imc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}$. Трудности, которые действительно возникают при рассмотрении движения со скоростями $v > c$, связаны с возможными при этом нарушениями принципа причинности (именно последнее обстоятельство, а не нарушение релятивистской инвариантности привело к требованию $v < c$; см. [3, 11]). Поэтому тахионы, вопрос о которых активно обсуждался в последние годы в физической литературе, по всей вероятности, существовать не могут. Но источники излучения (хотя и не отдельные частицы), движущиеся со скоростями $v > c$, все равно существуют. Об этом еще пойдет речь в гл. 9.

После сказанного поставим вопрос точнее: излучает ли электрон, движущийся в вакууме в инерциальной системе отсчета с постоянной скоростью $v < c$?

Можно привести по крайней мере четыре доказательства того, что в таких условиях электрон не излучает.

Первое, и в известном смысле самое последовательное доказательство, связано с решением уравнений поля (1.1) при $\mathbf{v} = \text{const}$. Такое решение (см., например, [1—3] и гл. 3) свидетельствует о том, что поле излучения, т. е. поле, уменьшающееся как $1/R$ и дающее поток энергии на бесконечности, в обсуждаемом случае не появляется (при этом видно также, что при $v > c$ излучение появилось бы).

Второе доказательство не требует никаких расчетов. Перейдем в систему отсчета, где электрон покоится (при $\mathbf{v} = \text{const}$, $v < c$ это всегда можно сделать). В такой системе отсчета излучения явно нет (электрон все время покоится)*). Но от перехода от одной инерциальной системы к другой излучение появиться не может, значит, его нет и при $\mathbf{v} = \text{const}$. Известная слабость этого доказательства связана с тем, что его можно, казалось бы, применить и при $v > c$ и, таким образом, «доказать» отсутствие излучения и в данном случае. Между тем при $v > c$ заряд должен излучать черенковское излучение уже в вакууме (в этом, кстати, состоит одна из трудностей

*) Фактически здесь сразу предполагается, что в некоторой системе отсчета электрон всегда покоится, и поэтому нужны более детальные рассуждения, например такие. Допустим, что электрон (свободная заряженная частица) движется со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$ и не излучает. Тогда мы доказываем, что такое решение совместимо с уравнениями поля, переходя в инерциальную систему отсчета, в которой электрон всегда покоится, и его поле является электростатическим, а излучение отсутствует. По сути дела, это доказательство отличается от предыдущего только тем, что решение уравнений поля для покоящегося заряда проще, чем для движущегося, и может считаться общеизвестным.

в теории тахионов; см. также гл. 9). Разрешение возникающего парадокса состоит в том, что при $v > c$ нельзя реализовать систему отсчета, в которой электрон покоится.

Третье доказательство связано с использованием законов сохранения энергии и импульса. Проще всего (хотя и не обязательно) рассуждать на квантовом языке. Именно, если рассматривать частицу с энергией $\mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ и импульсом $\mathbf{p}$, то можно убедиться в том, что законы сохранения энергии и импульса не позволяют этой частице излучать фотон с энергией $\hbar\omega \neq 0$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$, $k = \omega/c$. Такое доказательство будет фактически приведено в гл. 7 при обсуждении условий излучения в среде. Кстати, в рамках подобного подхода излучения в вакууме не может быть лишь при $v < c$; для тахионов с энергией $\mathscr{E} = \sqrt{-m^2c^4 + c^2p^2}$ скорость

$$v = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial p} = \frac{c^2 p}{\sqrt{c^2p^2 - m^2c^4}} > c$$

и законы сохранения не препятствуют излучению фотонов равномерно движущейся частицей.

Четвертое доказательство основано на использовании гамильтоновского метода. При равномерном движении радиус-вектор электрона $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$ и $\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r} = (\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})t$, т. е. в правой части уравнения движения для осцилляторов поля фигурирует частота $\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v}$ (см. (1.24)). Собственная же частота осцилляторов поля в вакууме $\omega_\lambda = ck_\lambda$, и, очевидно, при $v < c$ резонанс невозможен, а значит, и нет излучения с нарастающей со временем энергией $\mathscr{H}_{tr}$.

Итак, при сделанных оговорках (инерциальная система, вакуум, скорость $v < c$) равномерно движущийся электрон не излучает.

Весь этот вопрос не обсуждался бы здесь, вероятно, если бы сказанным все и ограничивалось. Но это не так. Дело в том, что в первый период развития квантовой электродинамики было сделано парадоксальное утверждение о том, что в квантовой теории равномерно движущийся электрон все-таки излучает. К такому выводу легко прийти в результате простых вычислений в рамках первого приближения теории возмущений. Действительно, пусть при $t = 0$ электрон равномерно двигался (импульс $\mathbf{p} = \text{const}$) и энергия поперечного поля была равна нулю (все осцилляторы поля находились в основном состоянии, т. е. $n_{\lambda i} = 0$). Тогда при учете взаимодействия, скажем, взаимодействия $\mathscr{H}_1' = -\frac{e}{mc}\widehat{\mathbf{pA}}$ (см. (1.65)), матричные элементы переходов в квантовые состояния с $n_{\lambda i} = 1$ отличны от нуля (см. (1.40)), а значит, отлична от нуля и вероятность $|b_n(t)|^2$ в (1.73). Правда, энергия поля не будет расти во времени (при $t \to \infty$), но все равно какое-то излучение появится. Мы не при-

водим более подробного квантового расчета, поскольку обсуждаемый эффект фактически является чисто классическим [12]. В самом деле, поставим вопрос точно так же, как и выше, но в рамках гамильтоновского метода в классической электродинамике. Именно, будем искать решение для осцилляторов поля $q_{\lambda i}$ (а тем самым и для самого поперечного поля) в случае равномерно движущегося заряда, когда в (1.24) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$, и при условии, что при $t = 0$ все $q_{\lambda i} = 0$ и $\dot{q}_{\lambda i} = 0$, т. е. поле равно нулю. Для упрощения, совершенно неважного по сути дела, ограничимся также случаем, когда $\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}(t) = (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}) t \ll 1$; иными словами, будем считать достаточно малым время t или большой длину волны $\lambda = 2\pi/k$. Тогда уравнения (1.24) запишутся следующим образом:

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = e\sqrt{8\pi}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}), \qquad \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = 0. \tag{1.86}$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее упомянутым условиям, имеет вид

$$q_{\lambda 1} = \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda^2}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\,(1 - \cos \omega_\lambda t), \qquad q_{\lambda 2} = 0. \tag{1.87}$$

Подставляя найденное решение в (1.22), получаем

$$\mathscr{H}_{tr} = 8\pi e^2 \sum_\lambda \frac{(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})^2}{\omega_\lambda^2}\,(1 - \cos \omega_\lambda t). \tag{1.88}$$

Переходя от суммы к интегралу (см. (1.83б)) и проводя интегрирование по углам, а также по частоте от значения $\omega = 0$ до некоторого максимального значения $\omega_{\max}$, имеем

$$\mathscr{H}_{tr} = \frac{8e^2}{3\pi c^3}\,(1/2\, v^2)\left\{\omega_{\max} - \frac{\sin \omega_{\max} t}{t}\right\}. \tag{1.89}$$

Точно такой же результат получается при квантовом расчете. Как это обстоятельство, так и отсутствие в (1.89) квантовой постоянной $\hbar$, не оставляет сомнений в отсутствии в обсуждаемой задаче квантового элемента. Существо дела состоит, очевидно, в следующем. Электрон считается равномерно движущимся, но при $t = 0$ предполагается, что поперечное поле отсутствует. Между тем равномерно движущийся электрон (если он все время движется именно так) окружен своим увлекаемым полем, в том числе поперечным полем (магнитным и электрическим). Считать это поле отсутствующим при $t = 0$, а затем (при $t > 0$) описываемым уравнениями поля означает физически, что до момента $t = 0$ электрон покоился, а при $t = 0$ был мгновенно ускорен до скорости $\mathbf{v}$. Вполне естественно, что в результате заряд излучает, причем он, во-первых, «обрастает» своим увлекаемым полем и, во-вторых, испускает «истинное» излучение, уходящее на бесконечность и обуслов-

ленное ускорением заряда. Эта часть поперечного поля (поле излучения) представлена в (1.87) членом, пропорциональным $\cos \omega_\lambda t$, который отвечает решению однородного уравнения (1.86). Уже отсюда ясно, что речь идет об излучении свободного поля (или, на квантовом языке, об излучении фотонов). Если включать взаимодействие достаточно медленно (адиабатически), а, физически говоря, медленно разгонять электрон, то свободное поле не появляется и образуется только увлекаемое поле, энергия которого в нерелятивистском случае (т. е. при $v \ll c$) равна

$$\mathscr{H}_{tr} = \frac{4e^2\omega_{\max}}{3\pi c^3} (1/2 v^2).$$

Частота $\omega_{\max} = 2\pi c/\lambda_{\min}$, где $\lambda_{\min}$ — самая короткая длина волны. Для протяженного заряда с радиусом r_0, очевидно, $\lambda_{\min} \sim r_0$ и $\mathscr{H}_{tr} = 1/2 m_{em} v^2$, причем электромагнитная масса $m_{em} \sim e^2/r_0 c^2$, как и должно быть.

Итак, к числу условий, при выполнении которых равномерно движущийся электрон не излучает, нужно прибавить требование стационарности или, другими словами, равномерности движения во всем интервале $-\infty < t < +\infty$. В общем такое требование очевидно и в какой-то мере всегда подразумевается, но оно оказалось как-то скрытым при квантовых расчетах, о которых мы упоминали. Использование гамильтоновского метода и, главное, связанная с этим постановка задачи, аналогичная квантовому подходу с включением взаимодействия при $t = 0$, позволили устранить парадокс и полностью выяснить суть дела. Вместе с тем становится очевидным, что поле равномерно движущегося заряда вовсе не обязано быть стационарным. Другими словами, заряд может уже некоторое время двигаться равномерно, а увлекаемое им поле может отличаться от стационарного (существующего при достаточно длительном движении с постоянной скоростью).

Сказанное важно и при решении вполне реальных физических задач [12—14]. Так, покоящийся в начале электрон или другая заряженная частица могут за короткое время получить большую энергию (т. е. ускориться) в результате соударения с другой частицей. Родственный пример — упругое рассеяние быстрого электрона на достаточно большой угол на кулоновском центре или практически на атомном ядре. В подобных условиях поле ускоренного электрона на некотором расстоянии от района, где произошло соударение, будет отличаться от поля исходного покоящегося или равномерно движущегося заряда. В результате, например, повторное рассеяние быстрого электрона на находящемся поблизости втором рассеивающем центре будет при тех же скоростях и прицельном параметре отличаться от первого рассеяния [13, 14]. На рассмотренном примере электрона, равномерно движущегося при $t \geqslant 0$, особенно ясно также

уже отмеченное различие между свободным полем излучения и поперечным увлекаемым полем. Таким образом, не нужно отождествлять произвольное поперечное электромагнитное поле с совокупностью фотонов (как ни странно, забывать это очевидное обстоятельство стало буквально нормой при изложении квантовой теории излучения). Заметим, что фактическое построение квантовой электродинамики, как ясно уже из проведенного выше перехода (квантования) от классической электродинамики к квантовой, совершенно свободно от предположения об отсутствии зарядов и отнюдь не связано с отождествлением квантованного поперечного поля со свободным полем излучения, т. е. совокупностью фотонов. Поэтому, естественно, при последовательном использовании квантовой теории излучения и не получаются какие-либо неверные результаты. Существующая же обычно возможность игнорировать отличие произвольного поперечного поля от совокупности фотонов связана с характером задач, встречающихся в квантовой теории излучения (в подавляющем большинстве случаев рассматривается поле при $t \to \infty$, поле на бесконечности и т. п.). Но, как упоминалось, поступать таким образом можно все же не всегда (см. [12—14]). Отметим также, что сделанные замечания в качественном отношении относятся не только к электромагнитному полю, о котором шла речь, но и к другим полям (мезонному, гравитационному и т. д.).

Глава 2

РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Реакция излучения при поступательном движении заряда. Вращение магнитного момента (наклонного магнитного ротатора).

Если имеется источник излучения (заряд, антенна и т. д.), то на него, вообще говоря, действует реакция излучения. Наиболее простой и известный пример — это движение точечного заряда с нерелятивистской скоростью, описываемое уравнением движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}$ — сила реакции излучения (радиационная сила, или сила радиационного трения) и $\mathbf{F}_0$ — внешняя сила, которая в случае ее чисто электромагнитной природы имеет вид

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}_0]. \tag{2.2}$$

Релятивистское уравнение движения с учетом радиационной силы (см., например, ниже гл. 3) при скорости $v \equiv |\dot{\mathbf{r}}| \to 0$ переходит в (2.1) и, в общем, его получение из (2.1) не связано с дополнительными предположениями. Поэтому обсуждение условий, при которых можно получить и использовать (2.1), имеет прямое отношение и к релятивистскому случаю (см. ниже гл. 4).

Тот факт, что уравнение (2.1) нельзя применять «не думая», сразу же ясен, если считать внешнюю силу $\mathbf{F}_0$ равной нулю. Получающееся уравнение имеет тогда не только правильное решение $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} \equiv \text{const}$ (равномерное движение в рассматриваемой инерциальной системе отсчета), но и явно неверное «самоускоряющееся» решение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp\left\{\frac{3mc^3}{2e^2}t\right\},$$

причем «частота» $\Omega_e = 3mc^3/2e^2 = 1{,}6 \cdot 10^{23}\ c^{-1}$.

Уравнением (2.1) можно пользоваться без опасений, когда радиационная сила $\mathbf{f}$ мала по сравнению с внешней силой $\mathbf{F}_0$

$$|\mathbf{f}| \ll |\mathbf{F}_0|. \tag{2.3}$$

В таких условиях сила $\mathbf{f}$ играет роль возмущения, причем в первом приближении $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0$, а в следующем

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}}_0 + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0]. \tag{2.4}$$

Для гармонической силы с циклической частотой ω, когда $\dot{E}_0 \sim \omega E_0$, условие (2.3) эквивалентно требованиям *)

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \gg r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \tag{2.5}$$

$$H_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3} = 6 \cdot 10^{15} \text{ Э}. \tag{2.6а}$$

В дальнейшем множитель 2π в неравенствах типа (2.5) мы будем иногда опускать, что при наличии знаков $\gg$ или $\ll$ формально всегда законно. Заметим, что неравенство (2.6а) можно записать также в виде

$$\frac{\lambda_H}{2\pi} = \frac{c}{\omega_H} \gg r_e, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc} = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0. \tag{2.6б}$$

Смысл этого условия очевиден, если вспомнить, что нерелятивистский заряд в постоянном магнитном поле H_0 вращается с частотой $\omega_H = eH_0/mc$ и излучает электромагнитные волны той же частоты. Ограничение (2.6) практически не существенно, ибо даже в пульсарах поля вряд ли превосходят значения 10^{12}—10^{13} Э. Нужно, однако, иметь в виду, что для релятивистских частиц условия применимости соответствующего выражения для радиационной силы хотя и получаются из (2.5), (2.6), но в количественном отношении уже совсем другие из-за появления множителей типа $\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (см. гл. 4). Заметим также, что выше не учитывались квантовые ограничения. Поэтому условия (2.5), (2.6) для электронов носят по существу фиктивный характер, поскольку классическое рассмотрение пригодно лишь пока

$$\lambda \gg \frac{\hbar}{mc} = 3{,}86 \cdot 10^{-11} \text{ см}. \tag{2.7а}$$

Это неравенство можно записать также в виде

$$\hbar\omega = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} \ll mc^2 = 5{,}1 \cdot 10^5 \text{ эВ}. \tag{2.7б}$$

Условие (2.6) заменяется неравенством $\lambda_H \gg \hbar/mc$, что полностью согласуется с (2.7). Смысл условия (2.7) — пренебре-

*) Все перечисленные значения приводятся для электронов ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г). При этом и в применении к электрону величина e в формулах считается положительной, а тот факт, что заряд электрона отрицателен, учитывается при выборе знаков в соответствующих формулах. Гармонический характер поля $\mathbf{E}$ учтен в (2.5), но к (2.6) это предположение отношения не имеет.

жение возможностью рождения электронно-позитронных пар (в том числе их рождения в промежуточных состояниях).

Откуда, однако, следует само условие (2.3)? Вряд ли можно лучше и более убедительно ответить на этот вопрос, чем на пути получения уравнения движения из исходных уравнений, т. е. уравнений поля (1.1) и уравнения движения для «протяженного» заряда

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,dV', \tag{2.8}$$

где для простоты пренебрежено действием магнитного поля (случай $v \to 0$), плотность заряда $\rho(\mathbf{r}') = eD(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, причем $\int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' = 1$ и $\mathbf{r}$ — положение центра заряда; главное же, поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ в (2.8) представляет собой полное поле, равное сумме внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и собственного поля самого заряда $\mathbf{E}'(\mathbf{r}')$. Если длина волны, характеризующая внешнее поле, удовлетворяет условию (2.5), то $\mathbf{E}_0$ можно вынести из-под знака интеграла (2.8). Что же касается собственного поля $\mathbf{E}'$, то его учет и, если угодно, исключение как раз и должны привести к выражению для радиационной силы. Обычный, довольно громоздкий путь исключения поля $\mathbf{E}'$ приведен, например, в [1,4]; здесь же выполним этот расчет гамильтоновским методом [15, 16], что позволит выявить некоторые обстоятельства, остающиеся обычно в тени, и, главное, непосредственно перейти к задаче о реакции излучения при движении магнитного момента.

Для удобства, как мы часто поступали и будем поступать в дальнейшем, повторим основные уравнения, приведенные в гл. 1, но с некоторыми очевидными изменениями обозначений, ясными из (2.8) и пояснений к этому уравнению. Мы имеем

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = \sum_{\lambda}\sqrt{8\pi}\,c\mathbf{e}_\lambda\left[q_{\lambda 1}\cos(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}) + q_{\lambda 2}\sin(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r})\right], \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\,e\left(\mathbf{e}_\lambda\dot{\mathbf{r}}(t)\right)\int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cos\left(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}'\right)dV',\\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\,e\left(\mathbf{e}_\lambda\dot{\mathbf{r}}(t)\right)\int D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sin\left(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}'\right)dV'.\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Продольная часть поля $\mathbf{E}'$ в (2.8) роли не играет, поскольку она не вносит вклада в силу, действующую на заряд в целом; поэтому в (2.9) фактически и положено $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{tr}$.

Систему (2.10) можно проинтегрировать в общем виде. Нас, однако, не будут интересовать численные коэффициенты, зависящие от вида форм-фактора D. Поэтому будем просто считать, что интегралы в правых частях в (2.10) исчезают для длин волн $\lambda = 2\pi/k_\lambda < \lambda_{\min} = 2\pi c/\omega_{\max} \sim r_0$, где r_0 — радиус заряда. Далее, при $\omega_\lambda < \omega_{\max}$ можно положить

$$\int D\cos(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}')\,dV' = 1 \quad \text{и} \quad \int D\sin(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}')\,dV' = 0.$$

Такая возможность очевидна для покоящегося заряда, когда $\mathbf{r}' = 0$ (в силу сказанного r' отличается от r на величины порядка r_0, и это отличие не играет роли при $\omega < \omega_{max}$). В рассматриваемом же случае медленно движущегося заряда справедливость указанного приближения (не говоря уже о том, что она подтверждается результатом) обусловлена соблюдением неравенства $\omega_\lambda v/c \ll \omega_\lambda$. Дело в том, что именно частота порядка $\omega_\lambda v/c$ появляется в правой части уравнений (2.10) при подстановке $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} = \mathbf{v}t$, собственная же частота осцилляторов поля равна ω_λ. В результате приведенный ниже (см. (2.13)) интеграл первого из уравнений (2.10) мало изменяется при учете зависимости правых частей уравнений (2.10) от времени.

Поступая указанным образом, из (2.8)—(2.10) получаем

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 - e\sqrt{8\pi}\sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda \dot{q}_{\lambda 1}, \tag{2.11}$$

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = \sqrt{8\pi}\, e(\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(t)). \tag{2.12}$$

Здесь учтено также, что в сделанном приближении можно положить $q_{\lambda 2} = 0$ и $\mathbf{A} = \sqrt{8\pi}\, c\sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda q_{\lambda 1}$. Решение уравнения (2.12) при условии, что при $t = 0$ частица, окруженная своим увлекаемым полем, движется равномерно, имеет вид

$$q_{\lambda 1} = \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda^2}(\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(0))\cos\omega_\lambda t + \frac{e\sqrt{8\pi}}{\omega_\lambda}\int_0^t (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{r}}(\tau))\sin\omega_\lambda(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.11), переходя от суммирования по λ к интегрированию по ω и по углам (см. (1.83)), а затем производя несколько простых операций (осуществляется интегрирование по углам и преобразование интеграла), получаем окончательно

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{4e^2\omega_{max}}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{4e^2}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}}(0)\frac{\sin\omega_{max}t}{t} +$$

$$+ \frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^t\int_0^{\omega_{max}} \dddot{\mathbf{r}}(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\omega\,d\tau =$$

$$= e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - m_{em}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} + \frac{4e^2}{3\pi c^3}\ddot{\mathbf{r}}(0)\frac{\sin\omega_{max}t}{t} +$$

$$+ \text{члены, стремящиеся к нулю при } \omega_{max} \sim c/r_0 \to \infty. \tag{2.14}$$

Появление члена с электромагнитной массой $m_{em} = 4e^2\omega_{max}/3\pi c^3 \sim e^2/r_0c^2$, который стремится к ∞ при $r_0 \to 0$, свидетельствует о необходимости проводить перенормировку массы уже в классической теории. Перенормировка сводится

к тому, что суммарная масса $m + m_{em}$ объявляется наблюдаемой массой частицы *). Радиационная сила $\mathbf{f} = (2e^2/3c^3)\dddot{\mathbf{r}}$ не зависит от r_0 и, следовательно, от каких-либо предположений о структуре заряда. Но эта сила — не единственная сила реакции. Во-первых, появляется дополнительный член, пропорциональный $(\sin \omega_{max} t)/t$ и существенный при малых t. Вообще ясно, что просто интегрировать уравнение (2.1) с какими-то начальными условиями недопустимо, ибо оно непригодно при $t \to 0$. Поэтому не возникают и трудности, связанные с появлением «самоускоряющихся» и других неверных решений (подробнее см. [17, 18]). Во-вторых, невыписанные в (2.14) члены порядка (r_0/λ), $(r_0/\lambda)^2$ и т. д. малы по сравнению с f лишь при условии типа (2.5), которое и приводит к требованию (2.3). Итак, именно рассмотрение радиационной силы $\mathbf{f}$ как возмущения действительно позволяет без опасений использовать уравнение движения (2.1), смысл и границы применимости которого представляются достаточно ясными.

Было затрачено немало труда для доказательства возможности использовать уравнение (2.1) и его релятивистское обобщение (см. уравнение (3.11) в гл. 3) в применении к точечным зарядам в качестве точного уравнения, причем приходится, хотя бы для изгнания «самоускоряющихся» решений, налагать те или иные дополнительные условия. Этот вопрос, возникший по сути дела в начале века, продолжает привлекать к себе внимание до настоящего времени (в качестве примера сошлемся на книги [4, 19] и статьи [20—25]). Такая ситуация отражает, видимо, отсутствие здесь полной ясности. Поскольку речь идет о точечной частице или, во всяком случае, о частице (заряде), размеры которой в каком-то смысле стремятся к нулю или пренебрежимо малы, физическая задача должна решаться с учетом квантовых эффектов. Поэтому, если бы существовала вполне последовательная релятивистская квантовая теория (в данном случае — квантовая электродинамика), то классическое уравнение движения и область его применимости могли бы в принципе быть получены путем предельного перехода от квантовой теории к классической. Некоторые результаты в таком направлении уже получены [26—29], но в целом ясности еще нет. Это, с одной стороны, отражает тот факт, что сама существующая квантовая электродинамика, несмотря на все ее успехи [1, 9], не вполне последовательна и замкнута (имеются в виду необходимость проведения перенормировок, необходимость учета на достаточно малых расстояниях также неэлектромагнитных взаимодействий и некоторые другие моменты). С другой стороны, анализу перехода к уравнениям

*) Поступать так не только можно, но и нужно, поскольку «затравочная» масса m и электромагнитная масса m_{em} в отдельности никак не проявляются и измерены быть не могут (сказанное справедливо во всяком случае, пока характерная частота внешнего поля $\omega \ll \omega_{max}$, что и предполагается).

типа (2.1) и (3.11) как к классическому пределу еще не было уделено особого внимания, поскольку сделать такой анализ технически нелегко, а практического значения он, по-видимому, не имеет. Дело в том, что нам неизвестны классические задачи, в которых радиационную силу нельзя считать возмущением (в системе координат, в которой заряд покоится) и, другими словами, в связи с применением классического уравнения движения, содержащего радиационную силу, необходимость в каких-то уточнениях или обобщениях не возникала.

Анализ вопроса о реакции излучения позволяет лишний раз подчеркнуть различие, существующее при наличии поля (или, лучше сказать, при учете поля — у движущейся заряженной частицы поперечное поле всегда имеется) между скоростью частицы $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$ и ее обобщенным импульсом $\mathbf{p}$. В самом деле, выражения (2.11)—(2.14) получены при пренебрежении зависимостью векторного потенциала для собственного поля $\mathbf{A}$ от координат $\mathbf{r}$. Вместе с тем в общем случае (см. (1.31))

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = -\operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dV'\right)^2\right\}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}\left\{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)\, D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dV\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

где мы не учитываем действия внешней силы $\mathbf{F}_0$. Очевидно, при независимости $\mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$ от $\mathbf{r}'$ реакция поля излучения на импульс полностью пропадает (т. е. $\dot{\mathbf{p}} = 0$ или при учете поля $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_0$), тогда как для скорости она сохраняется и в указанных пределах описывается уравнением (2.1). Этот результат не может считаться парадоксальным, поскольку импульс заряженной частицы $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ является суммой «механического», или кинетического, импульса $m\mathbf{v}$ и импульса, связанного с полем движущегося с нерелятивистской скоростью $v \ll c$ заряда и внешним магнитным полем $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ (подробнее см. пояснение, сделанное в гл. 1 после выражения (1.31)).

В то же время в квантовой теории на передний план выступает именно импульс частицы и о его отличии от $m\mathbf{v}$ для заряженной частицы нужно помнить при сопоставлении квантовых и классических выражений.

Перейдем к вопросу о реакции излучения на магнитный момент, т. е. в рамках классической теории на некоторое тело или связанную систему частиц, обладающую магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$. Анализ этой задачи, возникшей при обсуждении моделей элементарных частиц [16], приобрел особый интерес в связи с пульсарами, представляющими собой в известном приближении как раз вращающиеся магнитные диполи, или, как иногда говорят, наклонные магнитные ротаторы (oblique mag-

netic rotators) [30—31]. Итак, рассмотрим некое тело (волчок, ротатор) с механическим моментом количества движения $\mathbf{M}$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$, причем намагничение ротатора $\mathfrak{M} = \mu D(\mathbf{r})$, $\int D(\mathbf{r})\, dV = 1$; центр масс ротатора расположен в точке $\mathbf{r} = 0$ и считается неподвижным.

Система уравнений движения для момента $\mathbf{M}$ и уравнений поля в этих условиях такова:

$$\dot{\mathbf{M}} = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_0] + \int [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}'(\mathbf{r})]\, D(\mathbf{r})\, dV, \tag{2.16}$$

$$\Box\, \mathbf{A} = -4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{M} = 4\pi [\mu \nabla D], \quad \mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{2.17}$$

где внешнее поле $\mathbf{H}_0$ считается однородным в пределах ротатора, а последний пока предполагается незаряженным и не несущим какого-либо тока, не связанного с намагничением $\mathfrak{M}$, Используя для $\mathbf{A}$ разложение (2.9), из (2.17), получаем

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= -\sqrt{8\pi}\, c \int \mathbf{e}_\lambda [\mu \nabla D(\mathbf{r})] \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = \\ &= -\sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\mu \mathbf{k}_\lambda] \int D(\mathbf{r}) \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV, \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\mu \mathbf{k}_\lambda] \int D(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

В (2.18) интегрирование по частям (переход от ∇D к D) возможно, поскольку функция D считается отличной от нуля лишь в области порядка радиуса ротатора r_0, по той же причине можно положить

$$\int D \sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 0 \quad \text{и} \quad \int D \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 1$$

при $\omega_\lambda < \omega_{\max} \sim 2\pi c / r_0$ и

$$\int D \cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, dV = 0$$

при $\omega_\lambda > \omega_{\max}$. Разумеется, таким путем нельзя точно вычислить коэффициенты, содержащие параметр r_0 и вообще зависящие от форм-фактора D.

Если поступить указанным образом, то можно считать $q_{\lambda 1} = 0$, а для $q_{\lambda 2}$ использовать уравнение (см. (2.18))

$$\ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = \sqrt{8\pi}\, c \mathbf{e}_\lambda [\boldsymbol{\mu}(t) \mathbf{k}_\lambda], \quad \omega_\lambda < \omega_{\max}. \tag{2.19}$$

Его решение имеет вид

$$q_{\lambda 2} = \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{\omega_\lambda^2} \boldsymbol{\mu}(0) [\mathbf{k}_\lambda \mathbf{e}_\lambda] \cos \omega_\lambda t + \\ + \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{\omega_\lambda} \int_0^t \mathbf{e}_\lambda [\boldsymbol{\mu}(\tau) \mathbf{k}_\lambda] \sin \omega_\lambda (t - \tau)\, d\tau, \tag{2.20}$$

где при $t=0$ поле $\mathbf{H}'$ считается отвечающим неподвижному моменту $\boldsymbol{\mu}(0)$.

С помощью (2.20) легко найти поле

$$\mathbf{H}'=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{A}=\sqrt{8\pi}\,c\sum_{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}q_{\lambda 2}\sin(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r})$$

и подставить его в (2.16). Производя затем простые операции, аналогичные упомянутым для заряда, получаем уравнение движения ($\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\mu}}=d\boldsymbol{\mu}/dt$ и аналогично для других величин)

$$\dot{\mathbf{M}}=[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_0]-\frac{4\omega_{\max}}{3\pi c^3}[\boldsymbol{\mu}\ddot{\boldsymbol{\mu}}]+\frac{2}{3c^3}[\dddot{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\mu}]+$$

$$+\frac{4}{3\pi c^3}\left[\boldsymbol{\mu}\left(\ddot{\boldsymbol{\mu}}(0)\frac{\sin\omega_{\max}t}{t}+\dot{\boldsymbol{\mu}}(0)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\omega_{\max}t}{t}\right)\right)\right]+$$

$$+\text{члены, стремящиеся к нулю при }\omega_{\max}\sim c/r_0\to\infty. \qquad (2.21)$$

Если отбросить члены, связанные с начальными условиями, и члены, исчезающие при $r_0\to 0$, то уравнение движения принимает вид

$$\dot{\mathbf{M}}=[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_0]-\mathbf{L}+\mathscr{R},$$

$$\mathbf{L}=\frac{4\omega_{\max}}{3\pi c^3}[\boldsymbol{\mu}\ddot{\boldsymbol{\mu}}],\quad \mathscr{R}=\frac{2}{3c^3}[\dddot{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\mu}]. \qquad (2.22)$$

Слагаемое $\mathscr{R}$ представляет собой момент сил радиационного трения и является диссипативным. В стационарных условиях или в среднем по времени работа момента сил $\mathscr{R}$ равна излучаемой энергии, подобно тому, как это имеет место в отношении силы радиационного трения $\mathbf{f}$ (подробнее см. ниже гл. 3). Пусть, например, магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ постоянен по величине и направлен перпендикулярно оси вращения ротатора ($\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_{\perp}$, $\mu_{\perp x}=\mu_{0\perp}\cos\Omega t$, $\mu_{\perp y}=\mu_{0\perp}\sin\Omega t$, угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ направлена по оси z). Тогда мощность излучения равна

$$\mathscr{P}=\frac{2}{3c^3}(\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2=\frac{2\Omega^4\mu_{0\perp}^2}{3c^3}\cdot \qquad (2.23)$$

В тех же условиях $\mathscr{R}=\frac{2}{3c^3}[\boldsymbol{\mu}_{\perp}\dddot{\boldsymbol{\mu}}_{\perp}]$ и работа $\mathscr{R}\boldsymbol{\Omega}$ как раз равна выражению (2.23). Член $\mathbf{L}$ в (2.22) является консервативным и, очевидно,

$$\mathbf{L}=\dot{\mathbf{M}}_m,\quad \mathbf{M}_m=\frac{4\omega_{\max}}{3\pi c^3}[\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{\mu}}], \qquad (2.24)$$

т. е. $\mathbf{M}_m$ представляет собой некоторый момент количества движения электромагнитного происхождения. Как следует из вывода уравнения (2.21) и вполне аналогично случаю заряда (см. (2.14)), в уравнении (2.22) нужно считать, что частота вращения момента $\Omega\ll\omega_{\max}\sim 2\pi c/r_0$. Поэтому в (2.22) по абсолютной величине $L\gg\mathscr{R}$. Но вместе с тем момент $\mathbf{M}_m$ может быть очень мал по сравнению с механическим моментом количества движения $\mathbf{M}$ (например, для пульсаров ситуация именно та-

кова; см. [30]). Таким образом, вопрос об учете или неучете членов $\mathbf{L}$ и $\mathscr{R}$ определяется характером задачи. В приведенном выше примере вычисления излучения магнитного диполя член $\mathbf{L}$ роли не играет. Если же рассматривается рассеяние электромагнитных волн на магнитном диполе, то, напротив, член $\mathbf{L}$ преобладает над $\mathscr{R}$ (см. [16]).

Появление члена $\mathbf{L}$ в (2.22) несколько неожиданно, ибо по аналогии со случаем заряда можно было бы ожидать, что учет собственного поля приведет к появлению члена, пропорционального $\dot{\mathbf{M}}$ или $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ и имитирующего вклад от них. Ситуация проясняется, если рассмотреть ротатор, обладающий не только магнитным моментом, но и зарядом с плотностью $eD(\mathbf{r})$. Вычислим для такого ротатора электромагнитный момент количества движения

$$\mathbf{M}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{r}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}]]\,dV, \tag{2.25}$$

причем для упрощения будем считать ротатор шаром радиуса r_0, поле вне шара — полем заряда e и магнитного диполя $\boldsymbol{\mu}$, расположенных в центре шара и, наконец, электрическое поле внутри шара положим равным нулю (такая модель вполне реалистична — ей соответствует хорошо проводящий заряженный и намагниченный шар). Тогда несложный расчет (см. [32]) приводит к результату

$$\mathbf{M}_{em} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_m, \qquad \mathbf{M}_e = \frac{2e\boldsymbol{\mu}}{3r_0 c}, \qquad \mathbf{M}_m = \frac{2}{3r_0 c^2}[\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{\mu}}]. \tag{2.26}$$

Момент количества движения $\mathbf{M}_m$ совпадает с полученным выше (см. (2.24)), где для полного совпадения нужно положить $\omega_{\max} = \pi c/2r_0$), а момент $\mathbf{M}_e$ действительно пропорционален $\boldsymbol{\mu}$ (это значит, что в уравнении типа (2.22) появится член, пропорциональный $\dot{\boldsymbol{\mu}}$). Если магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ пропорционален механическому моменту количества движения $\mathbf{M}$ (что часто бывает), то электромагнитный момент количества движения $\mathbf{M}_e$ фактически не будет играть роли — его нужно объединить с $\mathbf{M}$ и «перенормировать» суммарный момент, приравняв его величину наблюдаемому значению (здесь мы имеем в виду «точечную» частицу); для макроскопического ротатора при $\boldsymbol{\mu} = \varkappa\mathbf{M}$ просто

$$\mathbf{M}_e = \frac{2e\varkappa}{3r_0 c}\mathbf{M} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}_e = \left(1 + \frac{\varkappa}{\varkappa_e}\right)\mathbf{M},$$

где в условиях (2.26) $\varkappa_e = \mu/M_e = 3r_0 c/2e \sim e/m_{em}c$, поскольку электромагнитная масса $m_{em} \sim e^2/r_0 c^2$. Для незаряженного магнитного ротатора электромагнитный момент количества движения полностью сводится к $\mathbf{M}_m$, причем учет этого момента может в принципе радикально изменить динамику ротатора (см. (2.22)).

В заключение отметим, что с несколько иными аспектами проблемы реакции излучения мы еще столкнемся ниже.

Глава 3

РАВНОМЕРНО УСКОРЕННЫЙ ЗАРЯД

Излучение и радиационная сила при равномерно ускоренном движении заряда. Релятивистское уравнение движения с учетом реакции излучения. Закон сохранения энергии для заряда и поля.

В физике имеется несколько буквально «вечных вопросов», которые уже не одно десятилетие продолжают обсуждаться в научной литературе. В качестве примеров из области одной только классической электродинамики укажем на проблему электромагнитной массы и точных уравнений движения при учете силы радиационного трения (см. гл. 2), на выбор выражения для тензора энергии — импульса в среде (см. гл. 13) и на вопрос об излучении и реакции излучения при равноускоренном движении заряда.

Поле равноускоренного заряда впервые было рассмотрено 70 лет назад [33], а затем неоднократно публиковались иногда довольно противоречивые утверждения на этот счет (см. § 32 в [3] и [19, 29, 34—42], где цитируется также ряд других статей).

Проблема излучения равномерно ускоренного заряда, как и другие «вечные вопросы», не имеют актуального значения или, во всяком случае, с прагматической точки зрения были уже давно выяснены в достаточной мере. Только поэтому здесь в течение столь длительного времени и могли сохраниться какие-то неясности, обычно носящие скорее педагогический или методический характер. Но вместе с тем пренебрежение такими методическими вопросами иногда «мстит за себя», приводит к недоразумениям и к появлению неверных работ в весьма солидных научных журналах (некоторые примеры фактически упомянуты ниже, но явных ссылок на ошибочные публикации мы избегаем).

Самое элементарное, но по сути дела важнейшее затруднение, которое возникает в вопросе об излучении равномерно ускоренного заряда, заключается в следующем. При равномерном ускорении по определению $\dot{\mathbf{v}} = \text{const}$ и $\ddot{\mathbf{v}} \equiv \dddot{\mathbf{r}} = 0$, а значит, радиационная сила $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$ равна нулю (мы ограничиваемся сейчас нерелятивистским случаем). Вместе с тем, согласно известной формуле для мощности излучения (ее иногда называют

формулой Лармора),

$$\mathscr{P} = \frac{2e^2}{3c^3}\,(\dot{\mathbf{v}})^2. \tag{3.1}$$

Очевидно, для равноускоренного движения мощность $\mathscr{P} \neq 0$, и возникает вопрос: как же заряд может излучать, если радиационное трение равно нулю?

В общем случае работа силы радиационного трения в единицу времени — $\mathbf{vf}$ также не равна $\mathscr{P}$ (знак минус здесь связан с тем, что произведение $\mathbf{vf}$ есть уменьшение энергии частицы, а мощность $\mathscr{P}$ положительна, см. также ниже). Однако для периодического движения в среднем по времени (или для достаточно длительного интервала времени) баланс энергии сохраняется. Действительно, $\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - (\dot{\mathbf{v}})^2$ и при условии $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]_{t_1}^{t_1+T} = 0$ получаем

$$-\int \mathbf{vf}\,dt \equiv -\frac{2e^2}{3c^3}\int \mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}\,dt = \frac{2e^2}{3c^3}\int (\dot{\mathbf{v}})^2\,dt \equiv \int \mathscr{P}\,dt, \tag{3.2}$$

где интегралы по времени берутся в пределах от t_1 до $t_1 + T$ (T — период движения).

В большинстве случаев уже сохранения баланса в среднем по времени достаточно для отсутствия каких-то реальных противоречий. К тому же весьма распространенный элементарный вывод выражения для силы радиационного трения $\mathbf{f}$ основан именно на использовании равенства (3.2) и выражения (3.1) для мощности $\mathscr{P}$. При таком методе нахождения силы $\mathbf{f}$ можно заподозрить, что используемое выражение $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$ справедливо лишь для периодического движения или для более широкого класса движений, для которых за длительное время T можно пренебречь членом $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]_{t_1}^{t_1+T}$. Но, как мы убедились, подобное заключение ошибочно и никаких ограничений такого рода при получении выражения для $\mathbf{f}$ делать не нужно.

Объяснить суть дела можно весьма просто. Но обсуждение этого вопроса отнюдь не является для нас самоцелью, важнее познакомить читателя или, скорее, напомнить ему ряд полезных формул теории излучения.

При движении заряда e в вакууме по некоторой траектории электромагнитное поле определяется известными формулами, следующими из выражений для потенциалов Лиенара — Вихерта (см. [1, 2])

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)}{(R - \mathbf{vR}/c)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c}\right) + \frac{e}{c^2(R - \mathbf{vR}/c)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}R}{c}\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{3.3}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{3.4}$$

Здесь поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ берутся в точке наблюдения в момент t, а в правых частях равенства величины $\mathbf{R}$, $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ относятся

к «времени излучения» $t' = t - R(t')/c$, причем вектор $\mathbf{R}$ проведен из точки нахождения заряда e в точку наблюдения. Далее скорость заряда $\mathbf{v}(t') = -\partial \mathbf{R}(t')/\partial t'$ и $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v}/\partial t'$. Очевидно, функция $\mathbf{R}(t')$ определяет траекторию движения заряда, но удобнее характеризовать положение заряда вектором $\mathbf{r}(t')$ и точку наблюдения вектором $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t') + \mathbf{R}(t')$, откуда также $\dot{\mathbf{r}} \equiv \partial \mathbf{r}/\partial t' = -\partial \mathbf{R}/\partial t'$.

Первый член в (3.3) отвечает полю заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$; этот член уменьшается с расстоянием R по закону $1/R^2$. Второй член в (3.3) убывает по закону $1/R$ и при $R \gg \frac{c^2(1 - v^2/c^2)}{\dot{v}}$ является главным; описываемое этим членом поле оказывается поперечным и представляет собой поле некоторой электромагнитной волны. Если заряд создает такое волновое поле, то говорят, что он излучает. По существу мы имеем здесь определение, и оно не только не тривиально, но и нуждается в уточнении. Действительно, можно рассматривать волновое поле заряда, убывающее по закону $1/R$, только в волновой зоне, где лишь одно такое поле практически и существует. Однако убедиться в наличии волнового члена (второго члена в (3.3) и в развернутом выражении (3.4)) можно и при меньших расстояниях от заряда. В таком случае, однако, полное поле отнюдь не представляет собой поле излучения, которое распространяется со скоростью света. По причинам, ясным из дальнейшего, утверждение «заряд излучает» целесообразнее понимать в более широком смысле, а именно, при наличии волнового поля и независимо от присутствия или отсутствия другой части поля. Нужно подчеркнуть также, что при измерении полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в момент t мы можем делать заключения о состоянии (например, ускорении) электрона лишь в предшествующий момент $t' = t - R(t')/c$.

Если рассматривается поле только одного данного заряда, то при наличии излучения должен быть отличен от нуля поток энергии через любую замкнутую поверхность, окружающую заряд. Очевидно, энергия, прошедшая за время $dt = (1 - \mathbf{sv}/c)\,dt'$ через площадку $d\sigma = R^2 d\Omega$ в направлении $\mathbf{s} = \mathbf{R}/R$, равна

$$dW_s = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\,\mathbf{s}R^2\,d\Omega\,dt = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{[\mathbf{s}[(\mathbf{s} - \mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1 - \mathbf{sv}/c)^6}\,d\Omega\,dt, \qquad (3.5)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, а поле считается волновым (второй член в (3.3), (3.4)); по этой причине выражение (3.5) справедливо, вообще говоря, лишь в волновой зоне. Вычисление полной энергии, излучаемой в единицу времени t', дает

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\int \frac{[\mathbf{s}[(\mathbf{s} - \mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1 - \mathbf{sv}/c)^5}\,d\Omega =$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2 - [(1/c)\,\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2}{(1 - v^2/c^2)^3} = -\frac{2e^2 c}{3}\,w^i w_i. \qquad (3.6)$$

Здесь $w^i = (w^0, \mathbf{w}) = du^i/ds$ — четырехмерный вектор ускорения частицы (не путать единичный вектор $\mathbf{s}$ и длину интервала s, входящую ниже лишь в виде дифференциала ds)*). В силу лоренц-инвариантности выражения (3.6) его вычисление можно производить в любой инерциальной системе. В такой системе, в которой $\mathbf{v} = 0$, формула (3.5), как легко видеть, справедлива при любом R и, следовательно, вычисление излучаемой энергии и установление самого факта наличия излучения можно производить также вблизи заряда, а не только в волновой зоне. Такой вывод в какой-то мере ясен, конечно, уже из общих соображений, поскольку поле (и в частности волновое поле) определено формулами (3.3), (3.4) на любом расстоянии от заряда.

Величина $\mathscr{P} = dW/dt'$ характеризует поток энергии через сферу радиуса R в момент времени t, но нужно подчеркнуть, что в правой части фигурируют величины в момент времени $t' = t - R(t')/c$ и излученная энергия также отнесена к единице «времени излучения» t'. Различие между интервалами $dt = (1 - \mathbf{sv}/c)\,dt'$ и dt' есть проявление эффекта Доплера — импульс (цуг) излучения, испущенный зарядом за время dt', будет иметь в точке наблюдения продолжительность dt.

Если скорость заряда в момент излучения t равна нулю (или практически достаточно мала), то для мощности получим

$$\mathscr{P} \equiv \frac{dW}{dt'} = \frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\,(\dot{\mathbf{v}})^2. \tag{3.1a}$$

Это выражение по существу совпадает с (3.1), но выписано вновь несколько подробнее.

При нерелятивистском равномерно ускоренном движении $\dot{\mathbf{v}} = \text{const}$. Релятивистским равномерно ускоренным движением называют движение, при котором ускорение постоянно в сопутствующей (собственной) системе отсчета, т. е. в системе, в которой скорость частицы равна нулю. Это значит, что для рав-

---

*) Пользуемся обозначениями, принятыми в [2]. При этом четырехмерная скорость

$$\frac{dx^i}{ds} = u^i \equiv (u^0, \mathbf{u}) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\},$$

$$u^i u_i = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1, \quad ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

и

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \left\{ \frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}}{c^3(1 - v^2/c^2)^2},\ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2(1 - v^2/c^2)} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c^4(1 - v^2/c^2)^2} \right\},$$

где $\dot{\mathbf{v}} \equiv \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Легко видеть, что

$$w^i w_i = -\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2}{c^4(1 - v^2/c^2)^2} - \frac{(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^6(1 - v^2/c^2)^3} = -\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2 - [(\mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]^2}{c^4(1 - v^2/c^2)^3}. \tag{3.7}$$

номерно ускоренного движения в сопутствующей системе и именно в ней всегда $\ddot{\mathbf{v}} = 0$. В ковариантной форме такое условие можно записать в виде

$$\frac{dw^i}{ds} + \alpha u^i = 0,$$

где α — некоторая постоянная; при $\mathbf{v} = 0$ выписанное условие действительно приводит к равенству $\ddot{\mathbf{v}} = 0$. Учитывая, что $u^i u_i = 1$ и $w^i u_i \equiv \frac{du^i}{ds} u_i = 0$, находим

$$\alpha = -\frac{dw^i}{ds} u_i = w^i w_i.$$

Итак, приходим к условию, определяющему равноускоренное движение

$$\frac{dw^i}{ds} + w^k w_k u^i = 0; \tag{3.8а}$$

в трехмерных обозначениях это условие имеет вид

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{\mathbf{v}} + \frac{3}{c^2}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{v}} = 0. \tag{3.8б}$$

Из (3.8а) после умножения на w_i видим, что для равномерно ускоренного движения

$$w^i w_i = -\frac{w^2}{c^4} = \text{const}, \tag{3.9}$$

где w — ускорение в системе отсчета, в которой частица покоится (см. также (3.7)). Обратное утверждение было бы, однако, ошибочным — в общем случае постоянство величины $w^i w_i$ еще не обеспечивает выполнения условия (3.8), которое должно соблюдаться при принятом выше определении равномерно ускоренного движения (такое определение представляется разумным, но при желании можно было бы условиться называть равномерно ускоренным движение с постоянным квадратом четырехмерного ускорения, т. е. при выполнении условия (3.9)).

Заметим, что при движении заряженной частицы в постоянном и однородном электромагнитном поле и при неучете реакции излучения выполняется как раз условие (3.9). В самом деле, дифференцируя по s уравнение движения

$$\frac{du^i}{ds} \equiv w^i = \frac{e}{mc^2} F^{ik} u_k,$$

видим, что

$$\frac{dw^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} w_k \quad \text{и} \quad \frac{dw^i}{ds} w_i = {}^1/_2 \frac{d}{ds}(w^i w_i) = \frac{e}{mc^2} F^{ik} w_k w_i = 0$$

в силу антисимметричности тензора электромагнитного поля F^{ik}. Здесь использовано не только постоянство поля (его неза-

висимость от времени), но учтена однородность поля, которое в уравнениях движения берется в точке, «занимаемой» зарядом (таким образом, $F^{ik} = F^{ik}(t, \mathbf{r}(t))$ и производной от F^{ik} по s можно пренебречь, как это сделано выше, лишь в случае независимости F^{ik} и от t, и от $\mathbf{r}$).

В силу сказанного движение заряда в произвольном постоянном и однородном электромагнитном поле не всегда является равномерно ускоренным, т. е. условие (3.8) может не выполняться. Движение оказывается, однако, равномерно ускоренным в важном частном случае — для заряда, находящегося в постоянном и однородном электрическом поле (скажем, в конденсаторе) в условиях, когда скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ коллинеарны, т. е. движение происходит параллельно полю. Тогда из (3.7) и (3.9) получаем

$$\frac{\dot{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = w = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\ddot{v} + \frac{3v\dot{v}^2}{c^2(1 - v^2/c^2)} = 0,$$

что при коллинеарных $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ совпадает с условием (3.8). Выбирая направление скорости $\mathbf{v}$ в качестве оси z и полагая для получения особенно простых выражений, что при $t = 0$ значения $z = c^2/w$ и $v = dz/dt = 0$, в обсуждаемом частном случае имеем

$$\left.\begin{aligned} z = c\sqrt{\frac{c^2}{w^2} + t^2}, \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{wt}{\sqrt{1 + w^2t^2/c^2}}, \\ \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{c^3}{w^2(c^2/w^2 + t^2)^{3/2}} = \frac{w}{(1 + w^2t^2/c^2)^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.9a)$$

Релятивистское равномерно ускоренное прямолинейное движение называют также гиперболическим, поскольку функция $z(t)$ представляет собой гиперболу.

Движение является гиперболическим, конечно, не только в упомянутом случае постоянного и однородного электрического поля, коллинеарного скорости заряда *), но и в соответствующем поле тяготения, важно лишь, чтобы уравнение движения имело вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = F = \text{const}.$$

*) Как ясно из сказанного, если заряд движется в электрическом поле под углом к электрическому полю $\mathbf{E}_0$, т. е. его скорость имеет слагающую поперек поля, то такое движение не является равномерно ускоренным (заметим, что в этом случае в системе отсчета, где заряд покоится, имеется также магнитное поле). Излучение частицы при ее движении в произвольно направленном постоянном и однородном электрическом поле рассмотрено в работе [36] (см. также [37]).

Из формул (3.6), (3.1а) и сказанного выше очевидно, что как при нерелятивистском, так и при релятивистском равномерно ускоренном движении заряд излучает, причем $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2$. Более того, излучение при движении с постоянным ускорением ничем в качественном отношении не отличается от излучения при произвольно ускоренном движении. Последнее замечание справедливо не только при вычислении полной мощности $\mathcal{P} = dW/dt'$, но и для спектрального распределения излучения [36, 37].

Уравнение движения заряда в нерелятивистском приближении имеет вид (2.1) и подробно обсуждалось в гл. 2. Однако для удобства выпишем это уравнение еще раз в несколько других обозначениях:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{3.10}$$

Его релятивистское обобщение записывается в виде (см., например, [2], § 76)*)

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F_0^{ik}u_k + \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + u^i\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right), \tag{3.11}$$

где внешняя сила считается силой Лоренца (F_0^{ik} — тензор внешнего электромагнитного поля); иногда уравнение (3.11) записывают в другой форме, учитывая, что $u^i(du_i/ds) = 0$ и, следовательно,

$$u^k\frac{d^2u_k}{ds^2} = -\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}.$$

В трехмерных обозначениях уравнение (3.11) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\} + \mathbf{f}, \\ &\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3(1-v^2/c^2)}\left\{\ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}\frac{3(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-v^2/c^2)} + \right. \\ &\qquad\left. + \frac{\mathbf{v}}{c^2(1-v^2/c^2)}\left((\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-v^2/c^2)}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

*) Выражение для радиационной силы

$$g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + u^i\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)$$

обладает тем свойством, что приводит к силе $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$ в сопутствующей системе отсчета (см. выше обсуждение условия (3.8а)). Кроме того $g^iu_i = 0$, как это и должно быть для любой силы (последнее ясно из (3.11) и тождества $u^i\frac{du_i}{ds} = 0$).

Как ясно из (3.8), (3.11) и (3.12), радиационная сила для равномерно ускоренного и в частности для гиперболического движения равна нулю.

Отметим, что обсуждавшаяся в гл. 2 ограниченная применимость уравнения движения (2.1), ((3.10)) приводит, конечно, к невозможности использовать релятивистское уравнение (3.11), (3.12) без всяких оговорок. Соответствующие ограничения (см. гл. 4), однако, никак не связаны с рассматриваемым сейчас вопросом о равномерно ускоренном движении заряда.

Какие же здесь возникают неясные моменты и парадоксы?

Первая неясность уже была упомянута (наличие излучения, несмотря на равенство нулю силы радиационного трения). Второй момент, который дискутируется для случая равномерно ускоренного движения заряда, связан с применением принципа эквивалентности при движении заряда в однородном поле тяготения (см. статью [38]). Третья трудность возникает при попытках записать при всех z и t поле заряда, который всегда (при $-\infty < t < \infty$) движется равномерно ускоренно. В частности, статья [35] заканчивается утверждением: «мы таким образом приходим к выводу, что уравнения Максвелла несовместимы с существованием одиночного заряда, равномерно ускоренного все время». Такое заключение вполне может оказаться справедливым, поскольку при неограниченном во времени гиперболическом движении полная излученная энергия бесконечна, а при $t \to \pm \infty$ бесконечна также кинетическая энергия заряда (скорость заряда равна c). Но соответствующее решение и не нужно искать при любой реальной физической постановке задачи, при которой частица движется равномерно ускоренно только в течение конечного интервала времени. Например, если речь идет о движении в однородном и постоянном электрическом поле (конкретно в конденсаторе), то заряд движется в конденсаторе при $t_1' < t' < t_2'$, а при $t' < t_1'$ и $t' > t_2'$ его скорость, скажем, постоянна (напомним, что такое движение в конденсаторе является равномерно ускоренным и, конкретно, гиперболическим только в случае параллельности скорости заряда и вектора поля). Если учесть это обстоятельство, то возможность нахождения решения для поля в виде запаздывающих потенциалов не вызывает сомнений. Тот факт, что поле заряда при равномерно ускоренном или в частности при гиперболическом движении весьма специфично, виден и на примере перехода в волновую зону. Как уже упоминалось, поле убывает по закону $1/R$ (волновая зона) при условии $R \gg c^2(1 - v^2/c^2)/\dot{v}$. Но для гиперболического движения при фиксированном времени наблюдения t такой зоны для всей области пространства с $R \to \infty$ вообще не существует. В самом деле, при фиксированном t расстояние $R = c(t - t') \to \infty$ при $t' \to -\infty$. Но при $t' \to -\infty$ для частицы, совершающей гипер-

болическое движение (см. формулы (3.9а)),

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{1+(w^2/c^2)\,t'^2}\approx\frac{c^2}{w^2t'^2},\quad \dot v(t')\approx\frac{c^3}{w^2t'^3},$$

откуда $(c^2/\dot v)\,(1-v^2/c^2)\approx ct'$. Поэтому ясно, что для гиперболического движения при фиксированном $t=t'+R/c$ и $R\to\infty$ упомянутое условие $R\gg(c^2/\dot v)\,(1-v^2/c^2)$ выполняться не может. Тем самым ясна известная условность понятия об энергии, излученной зарядом, — нужно условиться, о каких значениях t или t' идет речь.

Для движения, равноускоренного на конечном интервале времени, ситуация тем не менее представляется вполне определенной. При данном времени наблюдения t и известном законе движения заряда находим $R(t')$ и время излучения t'. Если значение t' лежит в интервале (t_1', t_2'), когда заряд двигался равномерно ускоренно, то можно утверждать, что в этот момент t' на заряд не действовала радиационная сила и вместе с тем заряд излучал — поток энергии через сферу с радиусом $R(t')$ в момент $t=t'+R/c$ отличен от нуля.

Итак, мы возвращаемся к первому порадоксу — наличию излучения в отсутствие силы радиационного трения. На этом и сосредоточим внимание, поскольку, тем самым, можно будет яснее понять, в чем состоит закон сохранения энергии в электродинамике и как он связан с вычислением излучаемой энергии и работы сил радиационного трения.

При определении излучаемой зарядом энергии или интенсивности излучения, наблюдаемого на заданной поверхности, вычисляют вдали от заряда вектор Пойнтинга $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ и, если речь идет о потерях энергии зарядом, находят поток этого вектора через замкнутую поверхность. Именно так получаются, в частности, стандартные формулы (3.6) и (3.1). Разумеется, использованием таких формул дело не ограничивается, поскольку они справедливы лишь в вакууме. Если же заряд движется в среде, то получаются, вообще говоря, совсем другие результаты. Достаточно сказать, что в среде может излучать даже равномерно движущийся заряд — именно это и наблюдается в случае излучения Вавилова — Черенкова или переходного излучения (см. ниже гл. 6—8). Вычисление вектора Пойнтинга и его потока через поверхность остается, тем не менее, вполне корректным способом определения излученной энергии и при движении заряда в среде (точнее, в среде без пространственной дисперсии, так как при наличии такой дисперсии плотность потока энергии не сводится к вектору Пойнтинга; см. ниже гл. 11). Потери энергии зарядом или излучаемую энергию вычисляют также двумя другими способами: путем определения производной по времени от энергии поля

$\frac{d}{dt}\int \frac{\mathbf{ED}+H^2}{8\pi}\,dV$ или в результате нахождения работы $e\mathbf{vE}' = \mathbf{vf}$, совершаемой зарядом против создаваемого им же самим поля (иными словами, вычисляется работа силы радиационного трения $\mathbf{f}$, которая при наличии среды, конечно, уже не определяется выражениями (3.10), (3.11)). Для часто встречающегося случая (ниже ясно какого) все три указанных способа приводят к одному и тому же результату; в качестве одного из многих примеров укажем на вычисление энергии излучения Вавилова — Черенкова *). Вообще же полный поток энергии, изменение энергии поля и работа радиационной силы не равны друг другу. Забвение этого обстоятельства приводило, например, к неточности в теории синхротронного излучения при винтовом (некруговом) движении частиц (см. ниже гл. 5).

Парадокс, возникающий в связи с излучением равномерно ускоренного заряда, также связан с незаконным отождествлением потока энергии с работой радиационной силы в единицу времени.

Из уравнений электромагнитного поля хорошо известным способом (см., например, гл. 11 и 13) получается соотношение (теорема Пойнтинга)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \tag{3.13}$$

Здесь и ниже в этой главе ограничиваемся случаем вакуума и будем рассматривать движение одного точечного заряда, когда $\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))$. После интегрирования (3.13) по некоторому объему V, ограниченному поверхностью σ, имеем

$$\frac{d\mathcal{H}_{em}}{dt} = -e\mathbf{vE} - \oint S_n\,d\sigma, \quad \mathcal{H}_{em} = \int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV, \tag{3.14}$$

где, очевидно, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_e(t))$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_e(t), t)$.

С другой стороны, из уравнения движения (3.12) получаем

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\mathbf{vE}_0 + \mathbf{vf}, \quad \mathscr{E} \equiv \mathcal{H}_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{3.15}$$

В (3.14) по смыслу фигурирует полное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$, где $\mathbf{E}'$ — поле самого заряда или, точнее, часть его поля, существенная при вычислении силы $\mathbf{f}$; в месте, где находится заряд $e\mathbf{E}' = \mathbf{f}$ и, следовательно, в (3.14) член $e\mathbf{vE} = e\mathbf{vE}_0 + \mathbf{vf}$. Поэтому, как и следовало ожидать, из (3.14) и (3.15) приходим к закону сохранения

$$\frac{d(\mathcal{H}_{em}+\mathscr{E})}{dt} = -\oint S_n\,d\sigma. \tag{3.16}$$

*) В оригинальной работе Тамма и Франка [43] вычислялся поток энергии, в [12] определялось изменение энергии поля в единицу времени (см. также гл. 6) и, например, в [44] находилась работа силы радиационного трения, отвечающая черенковскому излучению (см. также гл. 8).

Энергия поля $\mathcal{H}_{em}$ включает энергию внешних полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, например энергию поля в конденсаторе, через который пролетает и ускоряется рассматриваемый заряд. Поэтому, исключительно для упрощения задачи будем сейчас считать, что заряд ускоряется каким-то внешним полем неэлектромагнитного характера (влияние этого поля в уравнении (3.11) не учтено; то же относится и к соотношениям (3.15) и (3.16)).

Тогда, в силу (3.15) и (3.16), закон сохранения (3.14) принимает вид

$$\frac{d\mathcal{H}_{em}}{dt} = -\mathbf{vf} - \oint S_n \, d\sigma, \tag{3.17}$$

где $\mathcal{H}_{em}$ — энергия поля заряда (все остальные электромагнитные поля, как сказано, считаются отсутствующими); подчеркнем, что в (3.13)—(3.17) везде в качестве невыписанных аргументов фигурирует одно время — время наблюдения t.

Уравнение (3.17), имеющее вполне ясный смысл, показывает, что работа радиационной силы $\mathbf{vf}$, изменение энергии поля $d\mathcal{H}_{em}/dt$ и полный поток энергии $\oint S_n \, d\sigma$ связаны одним соотношением и в общем случае отнюдь не равны друг другу *). Если же рассматривается стационарное движение, с $d\mathcal{H}_{em}/dt = 0$, то $-\mathbf{vf} = \oint S_n \, d\sigma$. Далее, можно вычислять энергию $\mathcal{H}_{em}$ во всем пространстве, отодвигая поверхность σ на бесконечность, в силу чего $\oint S_n \, d\sigma = 0$ (считается, что излучение до поверхности σ еще не дошло). Тогда $d\mathcal{H}_{em}/dt = -\mathbf{vf}$. Сказанное поясняет почему, скажем, потери энергии частицей $\mathbf{vf}$ в стационарном режиме можно определить, вычисляя $\oint S_n \, d\sigma$ или $d\mathcal{H}_{em}/dt$.

Стационарное излучение в точном смысле этого слова осуществить нелегко (примером стационарного процесса может служить черенковское излучение), и обычно речь идет о периодическом процессе, когда энергия поля в фиксированном объеме удовлетворяет соотношению $\mathcal{H}_{em}(t_1) = \mathcal{H}_{em}(t_1 + T)$. Именно так обстоит дело в случае, например, неподвижного осциллятора или синхротронного излучения заряда, движущегося по круговой орбите (здесь существенно, что через период T излучающая частица возвращается в ту же точку). Для периодического процесса

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \mathbf{v}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_1+T} \oint S_n(t)\,d\sigma\,dt. \tag{3.18}$$

*) Чтобы не усложнять изложения, не обращаем внимания на знаки, т. е. имеем в виду абсолютные значения величин $\mathbf{vf}$, $d\mathcal{H}_{em}/dt$ и $\oint S_n \, d\sigma$.

Очевидно, здесь несущественно несовпадение времени наблюдения t и времени излучения t', поскольку для периодического процесса выбор момента t' не играет роли. Если же рассматривается движение, при котором энергия поля $\mathscr{H}_{em}(t < t_1) = \mathscr{H}_{em}(t > t_2) = \mathscr{H}^{(0)}_{em}$, то опять справедливо соотношение (3.18), но с заменой $t_1 + T$ на любое время $t > t_2$. Как раз таково (или практически мало отличается от него) положение в случае излучения заряда, «отражающегося» от электрического поля в конденсаторе (считается, что при $t < t_1' \leqslant t_1$ и $t > t_2 \geqslant t_2'$ скорость заряда постоянна). Нужно только иметь в виду, что энергия $\mathscr{H}_{em}(t)$ зависит от объема V, ограниченного поверхностью σ (так, временем t_1 можно считать время попадания заряда в конденсатор t_1', но время t_2 должно быть больше, чем время вылета частицы из конденсатора t_2', ибо поле излучения должно успеть покинуть объем V).

Как мы видели (см. (3.2)), в нерелятивистском случае сила радиационного трения $\mathbf{f}$ удовлетворяет указанному выше требованию (напомним, что в (3.2) по самому смыслу $\mathscr{P} = \oint S_n \, d\sigma$).

В релятивистском случае выпишем (после элементарных подстановок) временную компоненту уравнения (3.11)

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \frac{2e^2}{3}\left(\frac{dw^0}{dt'} + cw^i w_i\right). \tag{3.19}$$

С учетом соотношений (3.6) и (3.12) уравнение (3.19) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt'}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}\mathbf{f} = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0 + \frac{2c^2}{3}\frac{dw^0}{dt'} - \mathscr{P}, \\ &w^0 = \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{c^3(1 - v^2/c^2)^2}, \qquad \mathscr{P} = \frac{dW}{dt'} = -{}^2\!/_3 e^2 c w^i w_i. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

В (3.19), (3.20) время обозначено через t'; это время характеризует движение заряда и при рассмотрении излучения представляет собой время излучения. Между тем в (3.17) и в исходных выражениях (3.13), (3.14) фигурирует одно и то же время t для зарядов и поля. В этой связи мощность излучения $\mathscr{P} = dW/dt'$ отличается от $dW/dt = \oint S_n(t) \, d\sigma$.

Влетающий в конденсатор параллельно тормозящему полю заряд все время t' пребывания в поле (как указано $t_1' \leqslant t' \leqslant t_2'$) излучает электромагнитные волны, причем

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 = \frac{2e^4 E_0^2}{3m^2c^3} = \text{const}.$$

Это значит, что на достаточно большом расстоянии $R(t')$ от заряда в момент $t = t' + R(t')/c$ будет наблюдаться поле излучения с соответствующим значением потока энергии. Радиацион-

ная сила при $t' < t'_1$ и $t' > t'_2$ на заряд не действует, не действует она и в конденсаторе (при $t'_1 < t' < t'_2$), где заряд движется по закону

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}_0 = e\mathbf{E}_0.$$

Вместе с тем в моменты t'_1 и t'_2 на заряд действует сила трения и работа этой силы за все время ускоренного движения будет

$$\int\limits_{t'<t'_1}^{t'>t'_2} \mathbf{vf}\, dt' = -\int\limits_{t'<t'_1}^{t'>t'_2} \mathscr{P}\, dt' = -\frac{2e^2}{3c^3} w^2 (t'_2 - t'_1),$$

т. е. в точности равна излученной энергии.

В силу изложенного ясно, что равенство нулю радиационной силы в течение времени равномерно ускоренного движения заряда ни в какой мере не парадоксально, несмотря на наличие излучения. Действительно, отличный от нуля полный поток энергии через окружающую заряд поверхность при равной нулю радиационной силе в точности равен уменьшению энергии поля в охватываемом этой поверхностью объеме. В общем же случае отличны от нуля все три величины $d\mathscr{H}_{em}/dt$, $\mathbf{vf}$ и $\oint S_n\, d\sigma$ (см. соотношение (3.17)). Ожидать обязательно равенства работы радиационной силы $\mathbf{vf}$ и потока энергии $dW/dt = \oint S_n\, d\sigma$ или потока $dW/dt' = \mathscr{P}$ тем более нет оснований, так как сила приложена к заряду, а поток вычисляется через сферу радиуса R. В полном соответствии с духом теории поля поток энергии через поверхность непосредственно определяется полем вблизи этой поверхности, а не полем на траектории заряда, находящегося внутри поверхности.

Все приведенные выше пояснения могут показаться слишком детальными. Но сделано это потому, что, например, в подробной статье [34], специально посвященной излучению равномерно ускоренного заряда, совсем не используется закон сохранения (3.17). Вместо этого, как и в целом ряде других работ, вводится понятие об «энергии ускорения» (acceleration energy)

$$Q = \frac{2e^2 w^0}{3} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{(1-v^2/c^2)^2}.$$

Как ясно из (3.20), $\mathbf{vf} = dQ/dt' - \mathscr{P}$ и уравнения (3.15), (3.19) и (3.20) записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathscr{E}}{dt'} - \mathbf{vf} = \frac{d\mathscr{E}}{dt'} - \left(\frac{dQ}{dt'} - \mathscr{P}\right) = e\mathbf{v}\mathbf{E}_0, \\ &\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad Q = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{(1-v^2/c^2)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Как очевидно из (3.21) и, например, из (3.2), «энергию ускорения» Q можно ввести уже в нерелятивистском пределе.

Величина Q иногда интерпретируется как часть «внутренней энергии заряженной частицы», а иногда считается частью энергии поля, непосредственно окружающего частицу, но не вносящего вклада в ее электромагнитную массу. С этой точки зрения при равной нулю радиационной силе можно считать, что излучаемая энергия в единицу времени $\mathscr{P}$ черпается из «энергии ускорения» Q или «внутренней энергии» $\mathscr{E} - Q$. Если же считать Q частью энергии поля, то энергия излучения $\mathscr{P}$ черпается из энергии поля. Формально последнее совершенно верно, ибо $\mathscr{P} = dW/dt'$ представляет собой отнесенный к единице времени t' поток энергии поля через некоторую охватывающую заряд поверхность.

Нам представляется, однако, что введение какой-то «энергии ускорения» или «внутренней энергии» заряда ничего не прибавляет к пониманию баланса энергии и, скорее, даже запутывает вопрос. Заряд обладает лишь энергией $\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; разделение действующей на заряд радиационной силы $\mathbf{f}$ или работы этой силы $\mathbf{vf}$ на две или любое другое число частей не однозначно, и уже поэтому не может иметь особого смысла. Точнее, если такой смысл приписывается, то это возможно в связи с отождествлением части работы $\mathbf{vf}$ с выражением для $\mathscr{P}$, определяемым из независимых соображений. Разумеется запись работы $\mathbf{vf}$ в виде суммы двух членов (см. (3.21)) также удобна и естественна, но нет нужды придавать этим членам какой-то новый смысл по крайней мере пока речь идет об уравнении движения для частицы.

Глава 4

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ И РЕЛЯТИВИСТСКОМ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА

Характерные особенности излучения нерелятивистских и релятивистских частиц, движущихся в вакууме. Движение и излучение в ондуляторе. Движение в магнитном поле. Реакция излучения и пределы применимости классической теории. Радиационные (магнитотормозные) потери при движении заряженной частицы в магнитном поле.

Излучение нерелятивистских частиц ($v \ll c$) весьма существенно и уже в качественном отношении отличается от излучения релятивистских частиц ($v \sim c$). Ниже нам неоднократно придется сталкиваться с соответствующими особенностями и поэтому целесообразно их напомнить.

Если заряженная частица движется в вакууме (только этот случай обсуждается в настоящей главе и в гл. 5), то она излучает лишь при наличии ускорения, причем в нерелятивистском случае, когда скорость $v \ll c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, излучение чаще всего носит дипольный характер. Точнее, интенсивность более высокого мультипольного излучения по сравнению с дипольным пропорциональна дополнительным множителям порядка $(v/c)^{2n} \sim (a/\lambda)^{2n}$, где a — размер излучающей системы и $\lambda \equiv \equiv \lambda_0 = 2\pi c/\omega = cT$ — длина волны излучения, $T \sim a/v$ — характерный период или квазипериод движения частицы и для квадруполя $n = 1$, для октуполя $n = 2$ и т. д. Поэтому, например, квадрупольное излучение обычно существенно лишь, если дипольный момент системы равен нулю или аномально мал *). Для диполя (осциллятора) с моментом $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$, изменяющимся лишь по величине, электрическое поле в волновой зоне изменяется по закону $E \propto \sin\theta$, а интенсивность (поток энергии, отнесенный к телесному углу $d\Omega$)

$$I = \frac{dW_s}{d\Omega\, dt} = \frac{(\ddot{p})^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta, \tag{4.1}$$

*) Конечно, это лишь наиболее простая возможность. Квадрупольное излучение может превосходить дипольное также в том случае, если частота изменения квадрупольного момента больше частоты изменения дипольного момента. Существенной может оказаться и различная угловая зависимость (или, как говорят, полярная диаграмма) дипольного и квадрупольного излучений.

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ (рис. 4.1); формула (4.1) для гармонического движения, когда $\mathbf{p} = e\mathbf{a}_0 \sin \omega_0 t$, приводит к формуле (1.85), в которой произведено также усреднение по времени.

Излучение нерелятивистского электрона при его движении в магнитном поле часто называют циклотронным излучением *). Частота этого излучения (оно является дипольным) равна, естественно, частоте вращения электрона в поле H_0, т. е.

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc} = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0. \qquad (4.2)$$

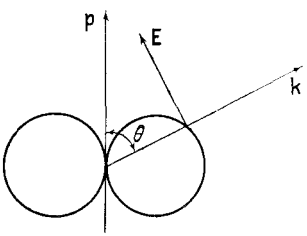


Рис. 4.1. Напряженность электрического поля неподвижного диполя как функции угла θ между осью $\mathbf{p}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$.

В простейшем случае кругового движения (скорость по полю $v_z = 0$) радиус орбиты равен

$$r_H = \frac{v}{\omega_H} = \frac{mc^2}{eH_0}\frac{v}{c} = \frac{\lambda_H}{2\pi}\frac{v}{c}. \qquad (4.3)$$

Очевидно, при $v/c \ll 1$ всегда $2\pi r_H/\lambda_H \ll 1$, что и обеспечивает справедливость дипольного приближения ($\lambda_H = 2\pi c/\omega_H$ — длина волны циклотронного излучения).

Излучение при нерелятивистском круговом движении заряда в магнитном поле такое же, как для двух взаимно перпендикулярных гармонических осцилляторов, сдвинутых по фазе на $^1/_2\pi$, или, что то же, для перпендикулярного магнитному полю постоянного электрического диполя с моментом er_H, вращающегося с частотой ω_H. Средняя за период интенсивность циклотронного излучения при движении заряда по окружности.

$$I = \frac{dW_s}{d\Omega\, dt} = \frac{e^2\omega_H^4 r_H^2}{8\pi c^3}(1 + \cos^2\alpha), \qquad (4.1a)$$

где α — угол между $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k}$ и $d\Omega = \sin\alpha\, d\alpha\, d\varphi$; полярная диаграмма для этого случая показана на рис. 4.2.

Для винтового движения, пока параллельная полю компонента скорости $v_z \equiv v_H = \mathbf{v}\mathbf{H}_0/H_0 \ll c$, распределение интенсивности в качественном отношении мало отличается от указанного, если не говорить о некоторой несимметрии (характер ее ясен из дальнейшего).

*) Вполне установившейся терминологии в отношении излучения частиц, движущихся в магнитном поле, еще не существует. Нам представляется, что при учете уже сложившегося словоупотребления целесообразно называть такое излучение в общем случае магнитотормозным, для нерелятивистских частиц — циклотронным и для ультрарелятивистских частиц — синхротронным излучением. Другими словами, в рамках этой терминологии циклотронное и синхротронное излучение суть предельные, частные случаи магнитотормозного излучения соответственно в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях.

Релятивистские частицы или, правильнее сказать, ультрарелятивистские частицы (именно такой случай обычно и называем ниже релятивистским), для которых

$$\xi \equiv \frac{1}{\gamma} \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1, \tag{4.4}$$

излучают уже совсем иначе (вводим, помимо ξ, также обозначение $1/\gamma$, поскольку оно очень часто встречается в литературе). В этом случае дипольное излучение в общем не преобладает, а характер излучения проще всего выяснить с помощью формул перехода от одних инерциальных систем координат к другим.

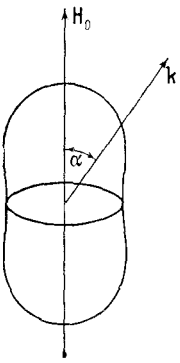


Рис. 4.2. Полярная диаграмма циклотронного излучения.

Зависимость интенсивности циклотронного излучения от угла α между вектором магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и волновым вектором **k**.

Конкретно, пусть в системе координат, в которой частица в данный момент времени покоится или движется с нерелятивистской скоростью, излучение имеет дипольный характер и происходит на частоте ω_{00}. Тогда в лабораторной системе отсчета, в которой излучатель как целое движется со скоростью v, частота определяется хорошо известной формулой для эффекта Доплера (см., например, [2])

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_{00}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\theta}. \tag{4.5}$$

Важно подчеркнуть, что угол θ между **v** и **k** измеряется здесь в лабораторной системе. При выполнении (4.4)

$$\omega(0) = \omega_{00}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \approx 2\omega_{00}\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \equiv 2\gamma\omega_{00}, \tag{4.6}$$

и частота $\omega(\theta)$ велика по сравнению с ω_{00} для углов

$$\theta \lesssim \xi \equiv \frac{1}{\gamma} \equiv \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1. \tag{4.7}$$

Если же $\theta > \xi$, то частота излучения с ростом угла θ довольно резко уменьшается (кстати, наглядный смысл и, можно сказать, содержание эффекта Доплера мы еще поясним в гл. 5).

Излучение, аналогичное излучению быстро движущегося диполя, реализуется в целом ряде случаев: для быстро летящих возбужденных атомов, молекул и ядер (отвлекаемся здесь от необходимости в этих случаях квантовомеханического описания самой излучающей системы), при движении заряда в магнитном поле с очень малым «питч-углом» (углом χ между **H** и **v**) и, наконец, при движении в различных «ондуляторах». Под ондулятором здесь понимается устройство, обеспечивающее периодическое движение заряда на пути L по траектории, близкой к прямой. В электрическом ондуляторе движение частицы такое же, как, например, в конденсаторе под действием одно-

родного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$, перпендикулярного к невозмущенной (большой) скорости частицы $\mathbf{v}_0$. В магнитном ондуляторе имеется неоднородное статическое магнитное поле с пространственным периодом l, что приводит к колебаниям частицы с циклической частотой $\omega_0 \equiv 2\pi c/\lambda_0 = 2\pi v_0/l$ (практически такой случай реализуется, если частица пролетит последовательно над магнитами с полюсами NS NS NS ...; N — северный полюс, S — южный полюс).

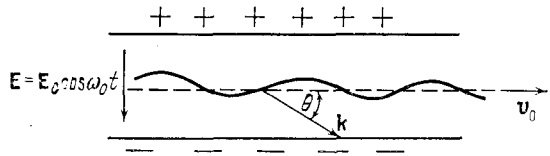


Рис. 4.3. Движение заряда в электрическом ондуляторе.

Уравнение движения частицы в электрическом ондуляторе (рис. 4.3) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t, \tag{4.8}$$

причем скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, $v' \ll v_0$, $v_0 = \text{const}$, $\mathbf{v}_0\mathbf{E}_0 = 0$. Поэтому в хорошем приближении можно написать *)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dt^2} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t; \qquad \mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \\ &\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{v}_0 t; \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{a}_0 \cos \omega_0 t; \quad \mathbf{a}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0^2}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

где $\mathscr{E}/c^2$ играет роль «поперечной» массы.

Дипольный момент, возникающий под действием поля $\mathbf{E}$, равен $\mathbf{p} = e\mathbf{r}_\perp$. Излучение является излучением движущегося диполя (при $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$), если

$$a_0 \ll \frac{\lambda_0}{2\pi\gamma} = \frac{c}{\gamma\omega_0}, \tag{4.10}$$

т. е. при условии, что

$$eE_0\lambda_0 \ll 2\pi mc^2. \tag{4.10а}$$

Соблюдение этого условия заведомо обеспечивает малость скорости $v' \infty a_0\omega_0$ по сравнению со скоростью света c (в самом деле, $v' \infty (eE_0\lambda_0/2\pi\mathscr{E})c$). В (4.10) входит длина волны λ_0/γ, поскольку в системе координат, движущейся со средней скоростью частицы $v_0 \approx c$, длина элемента периодичности в ондуляторе $l' = l/\gamma \approx \lambda_0/\gamma$, а амплитуда колебаний по-прежнему равна a_0.

*) Имеется в виду приближение, достаточное для вычисления излучения в рассматриваемом ниже дипольном приближении (наиболее полно теория излучения в ондуляторе изложена в статье [45]).

Излучаемая частота равна

$$\omega(\theta)=\frac{\omega_0}{1-(v/c)\cos\theta},\qquad \lambda(\theta)=\frac{2\pi c}{\omega(\theta)}, \tag{4.11}$$

где индекс нуль у v опущен (так же будем поступать и в дальнейшем). Отличие первой из формул (4.11) от (4.5) связано с тем, что в (4.8), (4.9) частота ω_0 измеряется в лабораторной системе, тогда как в (4.5) она измеряется в системе покоя. В релятивистском случае, согласно (4.11), имеем

$$\omega(0)=\frac{\omega_0}{1-v/c}\approx 2\omega_0\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\equiv 2\omega_0\gamma^2,\quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2}\gg 1, \tag{4.12}$$

что отличается от (4.6) лишним множителем $\mathscr{E}/mc^2$.

Ондулятор можно рассматривать как преобразователь частоты внешнего поля ω_0 в частоты $\omega(\theta)$, причем вполне достижимы огромные «коэффициенты трансформации». Например, для обычной в современных электронных ускорителях энергии $\mathscr{E}\sim 5$ ГэВ фактор $\gamma^2\sim 10^8$, ибо $mc^2=5{,}1\cdot 10^5$ эВ. Поэтому при $\omega_0\sim 10^{10}$ с$^{-1}$ ($\lambda_0\sim 20$ см, радиодиапазон) частота $\omega(0)\sim$ $\sim 10^{18}$ с$^{-1}$ ($\lambda(0)\sim 10^{-7}$ см $=10$ Å, рентгеновские лучи). Очевидно, ондулятор можно в принципе использовать как генератор излучения в области частот, где другие методы недостаточно эффективны, а также применять возникающее в ондуляторе излучение для детектирования пролетающих частиц (см. [45, 46] и указанную там литературу; об изменениях, которые появляются при внесении в ондулятор некой прозрачной среды, речь пойдет ниже в гл. 6). Теория движения и излучения в ондуляторах широко используется при построении теории «лазера на свободных электронах» (free-electron laser; см., например, [47]).

Движению в ондуляторе родственно также движение быстрых частиц в кристалле при так называемом каналировании (движении вдоль плоскостей или цепочек атомов в кристалле, не сопровождающемся рассеянием на значительные углы). Возникающее при каналировании электромагнитное излучение также, естественно, родственно излучению в ондуляторах (см., например, [48]).

Выражения для напряженности полей и интенсивности излучения, так же как формулы (4.5) и (4.11) для эффекта Доплера, содержат характерный знаменатель $(1-(v/c)\cos\theta)$ взятый в некоторой степени. Ограничимся здесь ссылкой на, пожалуй, наиболее важные в теории излучения выражения (3.3), (3.4) для поля точечного заряда или на исходные выражения для потенциалов Лиенара — Вихерта (см. § 63 в [2])

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{cR\,(1-(v/c)\cos\theta')},\qquad \varphi=\frac{e}{R\,(1-(v/c)\cos\theta')}, \tag{4.13}$$

где θ' — угол между скоростью $\mathbf{v}$ и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, проведенным из точки нахождения заряда в точку наблюдения;

в волновой зоне угол θ' и угол θ между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$, очевидно, тождественны друг другу. Наконец, в формуле (3.5) для $dW_s = I\,d\Omega\,dt$ в знаменателе стоит фактор $(1 - (v/c)\cos\theta)^6$. Отсюда очевидно, что в релятивистском случае излучение направлено главным образом вперед — оно сосредоточено в основном в пределах углов $\theta \lesssim \xi \equiv 1/\gamma \equiv mc^2/\mathscr{E}$. На квантовом (или, скорее, корпускулярном) языке этот результат особенно нагляден — фотоны с наибольшей энергией $\hbar\omega$ излучаются именно вперед. Полярная диаграмма излучения для диполя, движущегося по некоторой траектории со скоростью, сравнимой со скоростью света c, показана на рис. 4.4.

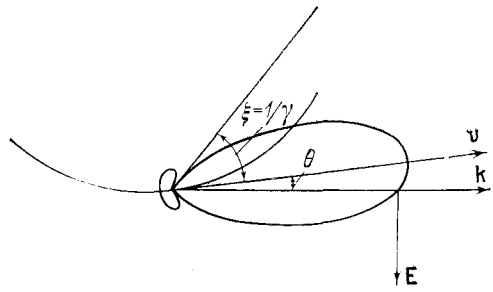


Рис. 4.4. Полярная диаграмма излучения диполя.

Проекция электрического поля в плоскости, проходящей через ось диполя, как функция угла θ между поступательной скоростью $\mathbf{v}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$. Диполь движется перпендикулярно своей оси. Распределение поля показано для случая $v = {}^2/_3 c$.

При движении частицы в ондуляторе, как и во многих других случаях, интерес обычно представляет полная энергия излученная на всем пути (на длине ондулятора L), причем наблюдение ведется на расстояниях $R \gg L$, т. е. вдали от излучателя. В таких условиях интерес представляет величина (см. (3.5))

$$\frac{dU_s}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\int [\mathbf{EH}]\,\mathbf{s}R^2\,dt = \int \frac{d^2W_s}{d\Omega\,dt}\left(1 - \frac{\mathbf{sv}}{c}\right)dt' =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3}\int \frac{[\mathbf{s}[(\mathbf{s} - \mathbf{v}/c)\,\dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1 - \mathbf{sv}/c)^5}\,dt' =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3}\int \left\{\frac{2\,(\mathbf{s}\dot{\mathbf{v}})\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\,(1 - (\mathbf{sv}/c))^4} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(1 - (\mathbf{sv})/c)^3} - \frac{(1 - v^2/c^2)\,(\mathbf{s}\dot{\mathbf{v}})^2}{(1 - (\mathbf{sv})/c)^5}\right\}dt'. \quad (4.14)$$

Эта формула, если не говорить об обозначениях, совпадает с формулой (73.11) в [2] и, как сказано, прямо следует из выражения (3.5). Для ондулятора $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = 0$, $\dot{\mathbf{v}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$, $\mathbf{sv} = v\cos\theta$. Кроме того, по самому смыслу в (4.9) фигурирует как раз «время источника» t', хотя штрих там и был опущен. Результат интегрирования по dt' сводится к замене $\cos^2\omega_0 t'$ на ${}^1/_2$ и умножению на все время полета частицы в ондуляторе $T = L/v_0 = L/v$. В результате в дипольном приближении имеем

$$\frac{dU_s}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^4 a_0^2 L\left\{(1 - (v/c)\cos\theta)^2 - (1 - v^2/c^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi\right\}}{8\pi c^3 v\,(1 - (v/c)\cos\theta)^5} =$$

$$= \frac{e^4 E_0^2 L\left\{(1 - (v/c)\cos\theta)^2 - (mc^2/\mathscr{E})^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right\}}{8\pi c^3 v m^2\,(1 - (v/c)\cos\theta)^5}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad (4.15)$$

где φ — угол между полем $\mathbf{E}_0$ и проекцией $\mathbf{s} = (\mathbf{k}/k)$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{v}$.

В релятивистском (фактически в ультрарелятивистском) случае (4.4), когда $1/(1 - v/c) \approx 2(\mathscr{E}/mc^2)^2$, имеем

$$\frac{dU_s}{d\Omega} \approx \frac{e^4 E_0^2 L (mc^2/\mathscr{E})^2}{8\pi m^2 c^4 (1 - (v/c)\cos\theta)^3},$$

$$U = \int \frac{dU_s}{d\Omega} d\Omega \approx \frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 E_0^2 L; \quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1. \quad (4.16)$$

Излучение при этом, как указывалось выше и ясно из (4.15), сконцентрировано в пределах углов $\theta \sim mc^2/\mathscr{E}$ и имеет характерную частоту $\omega \sim \omega(0) \sim \omega_0 (\mathscr{E}/mc^2)^2$. Полная излученная энергия пропорциональна фактору $\frac{e^4\mathscr{E}^2}{m^4} = \frac{e^4 c^4}{m^2(1 - v^2/c^2)}$, т. е. при данном заряде зависит и от полной энергии $\mathscr{E}$, и от массы покоя m (или от m и скорости v). В то же время ускорение заряда в рассматриваемом случае зависит только от $\mathscr{E}$ (см. (4.9)).

В гл. 5 подробно обсуждается также излучение заряда, движущегося с релятивистской скоростью в магнитном поле. Сейчас же остановимся на радиационной силе, действующей на релятивистские частицы.

Релятивистское уравнение движения с учетом радиационной силы уже было приведно в гл. 3 (см. (3.11), (3.12), (3.19) и (3.20)). Удобно, однако, как и в нерелятивистском случае, сразу учесть приближенный характер формулы для радиационной силы, выразив ее через напряженности поля. Такая операция проделана в § 76 книги [2], но ее удобно здесь провести вновь, начав с уравнения движения

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k + g^i, \quad g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \quad (4.17)$$

В первом приближении

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k; \quad \frac{d^2u^i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_k u^l + \frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l. \quad (4.18)$$

Подставляя d^2u^i/ds^2 из (4.18) в выражение для g^i, запишем (4.17) в виде

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k +$$

$$+\frac{2e^3}{3mc^3}\left\{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_k u^l - \frac{e}{mc^2}F^{il}F_{kl}u^k + \frac{e}{mc^2}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)u^i\right\}. \quad (4.19)$$

В ультрарелятивистском случае везде, кроме выражений типа $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, можно положить $v = c$. Поэтому в (4.19) главным радиационным членом является последний и

трехмерное уравнение движения при $v \to c$ можно записать в виде *)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right) + \mathbf{f}, \\ &\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,\mathbf{v} = \\ &\qquad = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - v^2/c^2}\,\frac{\mathbf{v}}{v}, \\ &\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \gg 1, \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

где в последнем выражении для $\mathbf{f}$, чтобы явно выписать компоненты полей, направление $\mathbf{v}$ выбрано за ось x. Тот факт, что при $\gamma \gg 1$ сила $\mathbf{f}$ направлена по $\mathbf{v}$, ясен также из уравнения (3.12), но оно, однако, менее удобно, чем (4.20).

Сделаем теперь несколько замечаний, которые представляются существенными и иногда не принимаются во внимание. В релятивистском случае излучение в основном происходит вперед, по направлению скорости. Поэтому отдача, реакция, должна быть направлена назад (направленное излучение несет импульс). Этим и объясняется, почему сила $\mathbf{f}$ антипараллельна $\mathbf{v}$. Отсюда также следует, казалось бы, что реакция излучения будет приводить к уменьшению проекций скорости на все направления. Но такой вывод, вообще говоря, ошибочен.

Рассмотрим для примера движение в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$. Поскольку этот случай будет нас неоднократно интересовать в дальнейшем, остановимся на нем несколько подробнее в применении к частице с зарядом eZ и массой M.

Уравнение движения тогда имеет вид (реакцию излучения пока не учитываем)**)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{eZ}{c}[\mathbf{vH}_0]. \tag{4.21}$$

*) Для удобства напомним также связь любой четырехмерной силы g^i с соответствующей трехмерной силой $\mathbf{f}_i$. Именно,

$$g^i = (g^0, \mathbf{g}) = \left\{\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\},$$

причем

$$\frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds} = g^i, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f},$$

так как

$$u^i = \left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}, \quad ds = c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

**) Для применения уравнения (4.21) даже этой оговорки, строго говоря, недостаточно, и нужно еще заметить, что мы будем считать также постоянными заряд eZ и массу M. Разумеется, подобное допущение почти всегда неявно подразумевается, но оно не обязательно, ибо для ионов при учете ядерных расщеплений и (или) «обдирки» атомарных электронов заряд и масса не являются постоянными величинами.

Это уравнение легко интегрируется, причем выясняется, что частица движется по винтовой линии: ее скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$; $\mathbf{v}_\parallel = \text{const}$ — постоянная скорость вдоль поля (ось z), а $\mathbf{v}_\perp$ — скорость в плоскости (x, y), перпендикулярной к $\mathbf{H}_0$ (рис. 4.5); имеем

$$\left.\begin{aligned} &v_{\perp,x} = v_\perp \cos\omega_H^* t, \quad v_{\perp,y} = -v_\perp \sin\omega_H^* t, \quad v_\parallel = \text{const}, \\ &v_\parallel = v\cos\chi, \quad v_\perp = v\sin\chi, \quad v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2, \\ &\omega_H^* = \frac{eZH_0}{Mc}\frac{Mc^2}{\mathscr{E}} = \omega_H \frac{Mc^2}{\mathscr{E}}, \quad r_H = \frac{v\sin\chi}{\omega_H^*}. \end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

Здесь χ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}_0$, r_H — радиус окружности, которую описывает проекция радиуса-вектора частицы на плоскость (x, y); этот радиус будем, как обычно называть радиусом кривизны, но его не нужно смешивать с r_H^* — радиусом кривизны пространственной траектории частицы, равным

$$r_H^* = \frac{r_H^2 + (v_\parallel/\omega_H^*)^2}{r_H} = \frac{v}{\omega_H^* \sin\chi}. \quad (4.23)$$

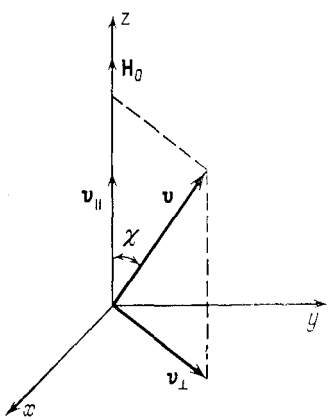


Рис. 4.5. К определению величин $\mathbf{v}_\parallel$, $\mathbf{v}_\perp$ и χ.

Как уже отмечалось, мы будем под e понимать абсолютную величину заряда электрона, а частоты ω_H и ω_H^* считать положительными. В ультрарелятивистском случае для электронов имеем

$$r_H = \frac{\mathscr{E}\sin\chi}{eH_0} = \frac{\mathscr{E}\,(\text{эВ})\sin\chi}{300H_0},$$
$$\mathscr{E} \gg mc^2 = 5{,}1\cdot 10^5 \text{ эВ}. \quad (4.24)$$

Поле H_0 всегда выражаем в эрстедах (гауссах), а r_H, как и другие длины, — в сантиметрах. Энергию $\mathscr{E}$ часто удобнее, однако, выражать в электронвольтах, что и записано в виде $\mathscr{E}\,(\text{эВ}) = \mathscr{E}/(1{,}6\cdot 10^{-12})$, где $\mathscr{E}$ — энергия в эргах.

Гирочастота ω_H^* в релятивистском случае при данном поле H_0 ниже нерелятивистской гирочастоты ω_H по очевидной причине — в силу возрастания «динамической» массы $\mathscr{E}/c^2 = M/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Для электронов

$$\omega_H^* = \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 1{,}76\cdot 10^7 H_0 \frac{mc^2}{\mathscr{E}}. \quad (4.25)$$

Вернемся теперь к учету реакции излучения.

Поскольку сила реакции (4.20) антипараллельна $\mathbf{v}$, кажется, как уже отмечалось, что при движении заряда в магнитном поле должны уменьшаться обе проекции скорости $v_\perp$ и $v_\parallel$. Ме-

жду тем очевидно, что в рассмотренном приближении (4.19) (а только такое приближение и оправдано, см. гл. 2 и ниже) и при учете радиационной силы в постоянном и однородном магнитном поле $v_\parallel = \text{const}$. Действительно, поскольку в постоянном магнитном поле без учета реакции излучения $v_\parallel = \text{const}$ или $dv_\parallel/ds = 0$, то при итерировании (при переходе от (4.17) к (4.19)) можно убедиться, что по-прежнему $dv_\parallel/ds = 0$. Кажущееся противоречие с уравнением (4.20) разрешается, если учесть, что само это уравнение справедливо лишь при $v \to c$, и с его помощью допустимо рассматривать изменение импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, но не скорости. Импульс же частицы под влиянием излучения действительно уменьшается, причем это относится и к $\mathbf{p}_\parallel$ и к $\mathbf{p}_\perp$.

Через достаточно длительное время $\mathbf{p}_\perp \to 0$ и

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_\parallel^2/c^2}}, \quad p_\parallel = \frac{mv_\parallel}{\sqrt{1 - v_\parallel^2/c^2}}, \quad p_\perp \to 0, \ t \to \infty. \tag{4.26}$$

Отсюда ясно, что частица остается релятивистской (при $t \to \infty$) только при очень малом начальном «питч-угле» χ_0, так что $v_\parallel = v \cos \chi_0 \sim c$.

В нерелятивистском случае, как мы видели в гл. 2, реакцию излучения нужно рассматривать как возмущение — она должна быть мала по сравнению с другими силами. Переход к релятивистскому случаю и в особенности конкретный переход от уравнения (4.17) к (4.19) могут побудить сделать аналогичное заключение. Но такой вывод о необходимости требовать малости радиационной силы по сравнению с лоренцевой силой (в частности, в уравнении (4.20)) был бы ошибочным. В самом деле, исходными являются условия (2.5) и (2.6), полученные в гл. 2 и обеспечивающие малость радиационной силы в системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится. В лабораторной системе, где скорость частицы равна v, условие (2.6а) принимает вид

$$H_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 6 \cdot 10^{15}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\ \text{Э}, \tag{4.27}$$

где H_0 — поле в лабораторной системе (это поле в системе покоя частицы по порядку величины в $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз больше, учет чего и приводит не к (2.6а), а к (4.27); речь идет здесь по существу о составляющей силе Лоренца, перпендикулярной к скорости $\mathbf{v}$, а радиационная сила при $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$ направлена по $-\mathbf{v}$ и, следовательно, как и проекция $\mathbf{E}$ на $\mathbf{v}$, одинакова в лабораторной системе и системе покоя частицы) *).

*) Для удобства приведем здесь формулы, связывающие компоненты данного электромагнитного поля, относящиеся к различным инерциальным системам отсчета. Если в лабораторной (в рассматриваемой) системе отсчета поля равны $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}$ и $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$, то в другой системе отсчета,

В физическом отношении ситуация становится яснее, если рассуждать в терминах длин волн или частот излучения (т. е. аналогично переходу от условия (2.6а) к эквивалентному условию (2.6б)). Если $\omega = 2\pi c/\lambda$ есть частота излучения в лабораторной системе, то в системе покоя частицы в силу эффекта Доплера частота $\omega_{00} \sim \omega/\gamma = \omega mc^2/\mathscr{E}$ и $\lambda_{00} \sim \lambda\mathscr{E}/mc^2$ (см. (4.6); по смыслу в качестве ω берется максимальная частота $\omega(0)$). Поэтому условие (2.5) принимает вид

$$\lambda_{00} \sim \lambda\mathscr{E}/mc^2 \gg r_e$$

или

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg r_e \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = \frac{e^2}{mc^2}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \omega \ll \frac{c}{r_e}\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \frac{c\mathscr{E}}{e^2}. \tag{4.28}$$

Тот же результат получается, если потребовать, чтобы длина волны λ была больше «размера» электрона $r_e mc^2/\mathscr{E}$ в лабораторной системе (речь идет об учете релятивистского сжатия движущегося объекта).

Применим теперь условие (4.28) к случаю излучения в магнитном поле. Как будет показано в гл. 5, характерная частота излучения в этом случае $\omega \sim (eH_0/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$. Подстановка такой частоты в (4.28) и приводит к условию (4.27).

Итак, если оставаться в рамках классической теории, то действие радиационной силы можно учитывать на базе уравнений (4.17), (4.19), (4.20) при условиях (4.27) и (4.28). Учет квантовых эффектов приводит, как уже отмечалось в гл. 2 (см. (2.7)), к возможности пользоваться классической теорией лишь для длин волн $\lambda \gg \hbar/mc = r_e/\alpha$, $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Но это неравенство относится лишь к системе покоя. В лабораторной системе условие применимости классической теории получается из (4.28) путем замены r_e на $\hbar/mc$, т. е. оно имеет вид

$$\lambda \gg \frac{\hbar}{mc}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \hbar\omega \ll \mathscr{E}. \tag{4.29}$$

Это неравенство (обе его формы по сути дела эквивалентны), выраженное через ω, совершенно естественно — если частица излучает фотоны с энергией $\hbar\omega$, сравнимой с энергией частицы

движущейся относительно лабораторной со скоростью V (вдоль совпадающих осей x, x'), поля равны

$$\mathbf{E}' = \{E'_{x'}, E'_{y'}, E'_{z'}\}, \quad \mathbf{H}' = \{H'_{x'}, H'_{y'}, H'_{z'}\},$$

причем

$$E_x = E'_{x'}, \quad E_y = \frac{E'_{y'} + (V/c)H'_{z'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_{z'} - (V/c)H'_{y'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$H_x = H'_{x'}, \quad H_y = \frac{H'_{y'} - (V/c)E'_{z'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad H_z = \frac{H'_{z'} + (V/c)H'_{y'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Очевидно, поля $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ выражаются через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ такими же формулами, но с заменой V на $-V$.

$\mathscr{E}$, то классический подход становится явно неприменимым (достаточно сказать, что при классическом подходе не исключено и излучение волны с частотой $\omega \gg \mathscr{E}/\hbar$, что, однако, противоречит закону сохранения энергии) *).

Для случая движения в магнитном поле и синхротронного излучения квантовое ограничение на поле и энергию, обеспечивающее возможность использовать классическую теорию, имеет вид

$$H_0 \ll \frac{e^2}{\hbar c}\frac{m^2c^4}{e^3}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = \frac{m^2c^3}{e\hbar}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 4{,}4\cdot 10^{13}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}. \qquad (4.30)$$

К этому ограничению приходим, применяя условие (4.29) к синхротронному излучению с характерной частотой $\omega \sim (eH_0/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$.

Разумеется, в «хвосте» (в менее интенсивной высокочастотной части спектра) синхронного излучения присутствуют и значительно более высокие частоты $\omega \gg \omega_m$; естественно, для таких частот ограничение будет более жестким, чем условие (4.30).

Характерное «квантовое» поле $m^2c^3/e\hbar$ имеет и такой смысл: электрическое поле $E_0 \sim m^2c^3/e\hbar$ на пути $\hbar/mc$ производит над зарядом e работу порядка mc^2. Физически отсюда следует, что в таких (и, разумеется, более сильных) полях уже могут рождаться электронно-позитронные пары (для этого нужна энергия, не меньшая $2mc^2 \approx 10^6$ эВ). Частица с энергией $\mathscr{E}$ может порождать пары уже в полях $F_0 \gtrsim (m^2c^3/e\hbar)(mc^2/\mathscr{E})$, поскольку в ее системе покоя поле достигает как раз критического значения $m^2c^3/e\hbar$. Несколько замечаний о квантовых эффектах в сильных электромагнитных полях еще будет сделано в конце гл. 6.

Обращаясь теперь к уравнению (4.20), видим, что сила реакции излучения мала по сравнению с лоренцевой силой при условии (полагаем, что $H_\perp \sim H_0$ и т. п.; см. также ниже (4.44) и замечание, сделанное в связи с неравенством (4.27))

$$F_0 \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 = 6\cdot 10^{15}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad F_0 \sim E_0 \text{ или } H_0. \qquad (4.31)$$

В силу наличия в (4.31) дополнительного множителя $mc^2/\mathscr{E}$ (по сравнению с критерием (4.27) и (4.30)) вполне может оказаться, что сила реакции излучения даже велика по сравнению с силой Лоренца, а классическое уравнение (4.20) вместе с тем применимо — выполнен критерий (4.30). Область полей, в ко-

*) Фактически ситуация несколько сложнее. Если, как часто полагают в классике, движение частицы задано, то она в принципе может излучать сколь угодно высокие частоты — реакция излучения (отдача) при такой постановке задачи компенсируется внешними силами, обеспечивающими движение с заданными параметрами. Но свободная частица с энергией $\mathscr{E}$ никак, конечно, не может излучать фотоны с энергией $\hbar\omega > \mathscr{E}$.

торой имеет место такая ситуация, определяется, очевидно, неравенствами

$$\frac{m^2c^4}{e^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \ll H_0 \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right) \sim 4\cdot 10^{13}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right). \quad (4.32)$$

При заданном поле H_0 условие (4.32) удобно записать также в виде

$$\sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3H_0}} \ll \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar H_0} \sim \frac{4\cdot 10^{13}}{H_0}. \quad (4.33)$$

Для полей порядка 10^9—10^{13} Э (поверхность пульсаров) ограничение на параметр $\mathscr{E}/mc^2$ сверху (т. е. ограничение «классичности») является довольно сильным и имеет вполне реальное значение. Вместе с тем сила реакции преобладает над лоренцевой силой для энергии

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg \sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3H_0}} \sim \frac{10^8}{\sqrt{H_0}}. \quad (4.34)$$

Как ясно из вывода и уже отмечалось выше при обсуждении условия (4.27), относительная малость силы реакции в системе покоя частицы не сохраняется в лабораторной системе в связи с разной зависимостью силы реакции и лоренцевой силы от энергии. Вывод формулы (4.10) из (4.17) остается корректным и в случае (4.34), так как он проводится инвариантным образом, а значит, справедлив при малости компонент одного четырех-вектора (вектора g^i) по сравнению с другим четырехвектором (вектором $(e/c)F^{ik}u_k$) уже в одной какой-нибудь системе отсчета (здесь мы повторили соответствующее пояснение, имеющееся в § 76 книги [2]).

Выражение для силы реакции (4.20) очень удобно для нахождения радиационных потерь — потерь энергии на излучение. Например, в постоянном магнитном поле радиационные потери

$$\mathscr{R}(\mathscr{E}) = \frac{2e^4}{3m^2c^3}H_\perp^2\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2, \quad \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1, \quad (4.35)$$

где $\mathbf{H}_\perp \equiv \mathbf{H}_{0\perp}$ — проекция поля $\mathbf{H}_0$ на плоскость, перпендикулярную к скорости $\mathbf{v}$. При произвольной скорости v для частицы с зарядом eZ и массой M имеем

$$\mathscr{R} = \frac{2(eZ)^4H_\perp^2v^2}{3M^2c^5(1-v^2/c^2)} = \frac{2(eZ)^4H_\perp^2}{3M^2c^3}\left\{\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 - 1\right\}. \quad (4.36)$$

Наиболее последовательный путь получения этого выражения состоит в использовании уравнения (4.19). Часто для определения радиационных потерь вычисляют излученную энергию, но известная ограниченность такого подхода уже отмечалась в гл. 3, и она может приводить к недоразумениям (см. [49]

и обсуждение в гл. 5 особенностей синхротронного излучения при винтовом движении). Однако для движения в магнитном поле по окружности вычисление излученной энергии (см. § 74 в [2]) приводит к правильному выражению — формуле (4.36) с $H_\perp = H_0$; обобщение этой формулы на случай винтового движения последовательно производится уже упомянутым образом, но происходящую замену $H_0 \to H_\perp \equiv H_{0\perp}$ можно в общем обосновать и иначе. Так, при $H_\perp = 0$ потерь нет, при $H_\perp = H_0$ потери будем считать известными, и, наконец, при $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$ справедливо выражение (4.35); поэтому формула (4.36), дающая правильный результат в трех предельных случаях, представляется достаточно естественной даже до ее подтверждения путем строгого расчета.

При движении в магнитном поле и неучете радиационной силы энергия частицы $\mathscr{E} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ сохраняется (для доказательства достаточно умножить уравнение (4.21) скалярно на v). Поэтому при учете радиационной силы сразу имеем

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\mathscr{R} \tag{4.37}$$

или в ультрарелятивистском случае

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{2(eZ)^4 H_\perp^2}{3M^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 = \\ = -0{,}98 \cdot 10^{-3} H_\perp^2 \left(\frac{Z^2 m}{M}\right)^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2 \text{ эВ/с}. \tag{4.38}$$

Для электронов ($Z = 1$, $M = m$)

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^4 H_\perp^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = -0{,}98 \cdot 10^{-3} H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \text{ эВ/с} = \\ = -1{,}58 \cdot 10^{-15} H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \text{ эрг/с}. \tag{4.39}$$

Запишем это уравнение еще и в таком виде:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\beta\mathscr{E}^2, \quad \beta = \frac{2e^4 H_\perp^2}{3m^4c^7} = 1{,}95 \cdot 10^{-9}\frac{H_\perp^2}{mc^2} \text{ эрг}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \tag{4.40}$$

Отсюда

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{1 + \beta\mathscr{E}_0 t}, \quad \mathscr{E}_0 = \mathscr{E}(0). \tag{4.41}$$

Энергия электрона уменьшается, таким образом, вдвое за время

$$T_m = \frac{1}{\beta\mathscr{E}_0} = \frac{5{,}1 \cdot 10^8}{H_\perp^2}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_0}\right) \text{ с}. \tag{4.42}$$

Далее, из (4.41) очевидно, что при любой начальной энергии $\mathscr{E}_0$ энергия электрона в момент t не превышает значения

$$\mathscr{E}_{\max}(t) = \frac{1}{\beta t} = \frac{5{,}1 \cdot 10^8}{H_\perp^2 t} mc^2 = \frac{2{,}6 \cdot 10^{14}}{H_\perp^2 t} \text{ эВ}, \qquad (4.43)$$

где t измеряется в секундах.

Результат (4.43), т. е. существование некоторой максимальной (предельной) энергии $\mathscr{E}_{\max}$ при движении заряда в магнитном поле, обобщается на случай неоднородного поля (см. § 76 в [2]). Впервые, насколько нам известно, вопрос о предельной энергии был обсужден на примере космических лучей, достигающих Земли [50]. В этом случае частица должна пройти земное магнитное поле $H \sim 0{,}2$—$0{,}5$ Э, т. е. пройти путь $L \sim R_\oplus \sim 10^9$ см ($R_\oplus \approx 6360$ км — радиус Земли), для чего нужно время $t \sim R_\oplus/c \sim 3 \cdot 10^{-2}$ с. В результате для электронов $\mathscr{E}_{\max} \sim 10^{17}$ эВ (в (4.43) полагаем $H_\perp \sim H_0 \sim 0{,}2$ Э, что отвечает попаданию частиц в экваториальный район; расчеты [50] приводят для попадания на магнитный экватор Земли к значению $\mathscr{E}_{\max} = 4 \cdot 10^{17}$ эВ).

Формулы (4.38)—(4.43) выписаны в разных формах и с численными коэффициентами, так как они широко используются, в частности, в астрофизике (см. гл. 16).

При движении в постоянном и однородном магнитном поле радиационная сила мала по сравнению с лоренцевой силой, если за один оборот (т. е. за период $T = 2\pi/\omega_H^* = (2\pi Mc/eZH_0) \times (\mathscr{E}/Mc^2)$) частица теряет энергию $\Delta\mathscr{E}$, малую по сравнению с $\mathscr{E}$. Отсюда приходим к условию (при $M = m$ и $Z = 1$)

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \sqrt{\frac{m^2c^4H_0}{e^3H_\perp^2}} \sim 10^8 \sqrt{\frac{H_0}{H_\perp^2}} = \frac{10^8}{\sqrt{H_0 \sin^2\chi}}. \qquad (4.44)$$

Это условие, как и следовало ожидать, совпадает с полученным ранее, но несколько уточняет его (см. (4.34), где рассматривалось обратное неравенство и полагалось $H_\perp \sim H_0$). В космосе неравенство (4.44) часто хорошо выполняется. Так, в межзвездном поле $H_0 \sin^2\chi \sim 10^{-6}$ Э и (4.44) соблюдается для электронов с энергией $\mathscr{E} \ll 10^{17}$ эВ. Но при $H_0 \sim 10^4$ Э (солнечные пятна, магнитные звезды, ускорители) приходим уже к более жесткому требованию $\mathscr{E} \ll 10^{12}$ эВ; однако с электронами с энергией $\mathscr{E} \gtrsim 10^{11}$ эВ в упомянутых сейчас случаях встречаться практически не приходится. Для магнитных белых карликов ($H_0 \sim 10^7 - 10^8$ Э) и пульсаров ($H_0 \sim 10^9 - 10^{13}$ Э) неравенство (4.44) уже нарушается для сравнительно небольших энергий. Но, вместе с тем, чем больше потери, тем труднее ускорить частицы до высоких энергий и, вообще говоря, имеется меньше таких частиц. Поэтому практически условие малости радиационной силы (4.44) нарушается, по-видимому, лишь в

исключительных случаях. В таких случаях частица движется, конечно, не по окружности или винтовой линии, а по кривой с быстро уменьшающимся радиусом (некоторые расчеты для этого случая см., например, в [51]). Вместе с тем синхротронное излучение и при нарушении условия (4.44) не меняет своего характера (интенсивности, спектрального состава, поляризации), поскольку за излучение при $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$ ответственна лишь небольшая часть траектории, и оно изменилось бы лишь при несоблюдении условия классичности (см. (4.33))

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar H_0} \sim \frac{4 \cdot 10^{13}}{H_0}. \qquad (4.45)$$

Сказанное будет еще пояснено в гл. 5. В дальнейшем условие (4.45) всегда будет считаться выполненным *), а условие (4.44) — хотя в большинстве случаев оно и не используется при расчетах — для простоты обычно также будет предполагаться справедливым.

Из выражения (4.38) для потерь ясно, что в данном поле $H_\perp$ и при одной и той же энергии $\mathscr{E}$ протоны излучают в $(M/m)^4 \sim$ $\sim 10^{13}$ раз меньше, чем электроны. Поэтому синхротронные (магнитотормозные) потери для протонов, а также других ядер, обычно не играют роли. Но в очень сильных полях, когда электроны с высокой энергией «не выживают», протонное синхротронное излучение может в принципе оказаться существенным. Заметим, что заряженная частица, движущаяся в магнитном поле (и вообще с ускорением), излучает не только электромагнитные волны, но и кванты всех тех полей, с которыми она взаимодействует. Так, для всех заряженных частиц существует магнитотормозное гравитационное излучение. Далее протоны должны в магнитном поле излучать π^+- и π^0-мезоны (процессы $p \to n + \pi^+$, $p \to p + \pi^0$, где n — нейтрон), а также позитроны и нейтрино (процесс $p \to n + e^+ + \nu$, где ν — нейтрино). Однако интенсивность синхротронного неэлектромагнитного излучения в реальных условиях обычно ничтожно мала [52], и само оно не играет роли. Тем не менее, имея в виду методическую сторону дела, а также какие-то новые возможности (о них никогда не следует забывать), о неэлектромагнитном синхротронном излучении следует помнить. Кстати, если мы применяем термин синхротронное (и вообще магнитотормозное) только к излучению частиц, движущихся в магнитном поле, то в литературе

*) При несоблюдении неравенства (4.45) мы попадаем в квантовую область и рассмотрение нужно проводить методами квантовой электродинамики [9, 37]. Как уже отмечалось, для квантовой области характерно рождение электронно-позитронных пар, а при еще бо́льших полях или энергиях — также рождение пар частиц других типов (мезонов, барионов). Несомненно, квантовая область (сильные поля, высокие энергии) представляет очень большой интерес, который только возрастает с течением времени в связи с открытием пульсаров, получением более сильных полей в лабораториях и появлением новых ускорителей (см. также конец гл. 6).

говорят о синхротронном излучении и в более широком смысле, например в применении к излучению гравитационных, электромагнитных и других волн (скажем, волн скалярного поля) при движении релятивистских частиц в сильном гравитационном поле [53]. Во всех этих случаях излучение имеет некоторые общие черты с обычным синхротронным электромагнитным излучением, но в целом его характер (интенсивность как функция энергии, полярная диаграмма и т. д.) существенно меняется в зависимости от типа (сорта) ускоряющего и излучаемого полей. Памятуя, что «нельзя объять необъятное», ниже в гл. 5 мы будем, однако, в явном виде говорить только о синхротронном излучении электронов или, подробнее, об излучении электромагнитных волн ультрарелятивистскими электронами, движущимися в постоянном и однородном магнитном поле.

Глава 5

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Особенности синхротронного излучения. Некоторые применения теории синхротронного излучения в астрофизике. Границы применимости теории.

Характер и в особенности спектр синхротронного излучения существенно меняются в зависимости от соотношения между углом θ между волновым вектором излучения $\mathbf{k}$ и скоростью частицы $\mathbf{v}$ и углом χ между $\mathbf{v}$ и внешним магнитным полем $\mathbf{H}_0$ (ограничиваемся здесь рассмотрением движения в магнитном поле, хотя речь фактически идет о весьма общем результате; см., например, § 77 в [2]). Дело просто в том, что излучение сконцентрировано в основном в пределах углов $\theta \sim mc^2/\mathscr{E} \ll 1$ и, если угол $\chi \lesssim mc^2/\mathscr{E}$, то в данном направлении $\theta \lesssim mc^2/\mathscr{E}$ излучение «собирается» со всей траектории или, во всяком случае, со значительной ее части. Если же

$$\chi \gg \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1, \tag{5.1}$$

то синхротронное излучение приходит к наблюдателю лишь с небольшого участка траектории (подробнее см. ниже).

Излучение при

$$\chi \lesssim \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1 \tag{5.2}$$

вполне аналогично излучению в ондуляторе, так как в этом случае (см. (4.22))

$$\left.\begin{aligned} r_H = \frac{v \sin\chi}{\omega_H^*} \approx \frac{c\chi}{\omega_H^*} \lesssim \frac{c}{\omega_H} = \frac{\lambda_H}{2\pi}, \\ \omega_H = \frac{eH}{mc}, \quad \omega_H^* = \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}}; \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

здесь и ниже мы опускаем индекс нуль у $\mathbf{H}_0$, поскольку везде фигурирует только внешнее поле.

Точнее, излучение подобно излучению быстро летящего диполя (осциллятора) с моментом $er_H = ec\chi/\omega_H^* = \mathscr{E}\chi/H \ll mc^2/H$, если (см. (4.10))

$$\chi \ll \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \quad r_H \ll \frac{\lambda_H}{2\pi}. \tag{5.4}$$

На этом случае мы подробнее здесь останавливаться не будем, поскольку в качественном отношении картина уже была выяснена в гл. 4 (подробнее см. с. 275 в [2], а также [54]).

В связи с обсуждением механизмов излучения вблизи пульсаров привлекло к себе внимание излучение, возникающее при движении заряда вдоль силовых линий неоднородного (скажем, дипольного) магнитного поля. Такое излучение называют магнитодрейфовым или изгибным (curvature radiation). Заметим, что строго вдоль силовой линии неоднородного магнитного поля заряд двигаться не может, поскольку в этом случае сила Лоренца $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]$ равнялась бы нулю и заряд двигался бы прямолинейно, а не по искривленной силовой линии (здесь предполагается, конечно, что другие силы на заряд не действуют). Фактически в неоднородном («искривленном») поле заряд действительно двигается не строго вдоль силовой линии, но также дрейфует в направлении, перпендикулярном к плоскости, в которой лежит рассматриваемая линия [55, 56]. В результате появляется сила Лоренца, искривляющая его траекторию так, что в первом приближении заряд можно считать движущимся вдоль искривленной силовой линии. Возникающее при этом изгибное излучение обладает в основном теми же характерными особенностями, как и синхротронное излучение, но роль радиуса $r_H = \frac{v \sin \chi}{\omega_H^*}$ играет радиус кривизны силовой линии R_H (см. [56, 57]).

Остановимся теперь довольно подробно на синхротронном излучении при соблюдении условия (5.1). При этом целесообразно начать с важного частного случая движения по окружности, когда $\chi = {}^1/_2\pi$.

Тогда все *излучение сконцентрировано вблизи плоскости* орбиты в пределах углов $\theta \lesssim mc^2/\mathscr{E}$. На большом расстоянии от орбиты «наблюдатель» (считаем его расположенным в плоскости орбиты или близ нее в пределах углов $\theta \lesssim mc^2/\mathscr{E}$) зафиксирует импульсы излучения, следующие друг за другом через промежутки времени, равные периоду обращения заряда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_H^*} = \frac{2\pi mc}{eH}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right). \tag{5.5}$$

Форму импульсов излучения (рис. 5.1) легко выяснить, если рассмотреть электрическое поле быстро движущегося осциллятора — диполя (см. рис. 4.4), которое поворачивается относительно наблюдателя в результате вращения частицы в магнитном поле (вектор ускорения, который отвечает оси диполя, все время перпендикулярен полю $\mathbf{H}$ и вращается вокруг него с частотой ω_H^*). Продолжительность каждого импульса

$$\Delta t \sim \frac{r_H \xi}{c}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \approx \frac{mc}{eH}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \tag{5.6}$$

где $r_H = v/\omega_H^* \approx \mathscr{E}/eH$ — радиус кривизны траектории частицы, а множитель $(mc^2/\mathscr{E})^2$ появляется вследствие эффекта Доплера. В самом деле, в пределах угла $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ электрон движется в направлении наблюдателя в течение времени $\Delta t' \sim r_H \xi/c \approx \approx mc/eH$. За то же время электрон проходит путь $v\Delta t'$, и излучаемый им импульс поэтому сжимается также на величину $v\Delta t'$ (в этом и состоит эффект Доплера). В результате наблюдаемая длина импульса порядка $(c - v)\Delta t'$, а для его продолжительности имеем

$$\Delta t = \Delta t' \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \approx 2\,\Delta t' \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2,$$

что эквивалентно (5.6).

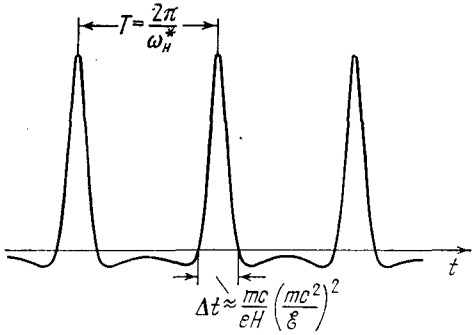


Рис. 5.1. Зависимость электрического поля в волновой зоне от времени для частицы, вращающейся в магнитном поле по окружности.

Эта картина получается, если вращать с угловой скоростью ω_H^* поле быстро движущегося диполя (см. рис. 4.4).

Спектр излучения, имеющего форму импульсов, повторяющихся через интервалы времени $T = 2\pi/\omega_H^*$, будет, очевидно, состоять из обертонов частоты ω_H^*. Фактически же, поскольку $T \gg \Delta t$, в области высоких гармоник спектр можно считать непрерывным, причем максимум в спектре отвечает частоте

$$\omega_m \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{eH}{mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (5.7)$$

Здесь существенно, что поле излучения меняет знак (см. рис. 5.1). Именно поэтому в спектре имеется максимум (см. ниже). Эффективная ширина спектра излучения также порядка ω_m, и поэтому среднюю спектральную плотность синхротронного излучения можно оценить, если разделить полную мощность этого излучения $\mathscr{P} = \mathscr{R} = (2e^4H^2/3m^2c^3)(\mathscr{E}/mc^2)^2$ (см. формулу (4.39)) *) на ω_m. В результате находим

$$\bar{p} \sim \frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\omega_m} \sim \frac{e^3H}{mc^2}. \qquad (5.8)$$

Одной из характерных особенностей синхротронного (и вообще магнитотормозного) излучения является его поляризация.

*) При движении по окружности (и вообще когда излучатель в целом не приближается к удаленному источнику) мощность излучения $\mathscr{P}$ и радиационные потери $\mathscr{R}$ равны друг другу (см. гл. 3 и приводимые ниже замечания).

Преимущественное направление электрического вектора в излучаемых волнах лежит в той же плоскости, что и направление ускорения и луч зрения (вектор $\mathbf{k}$). Поскольку при движении частицы в магнитном поле направление ускорения все время изменяется, волны будут, вообще говоря, эллиптически поляризованными. Действительно, если осциллятор (см. рис. 4.4) движется на наблюдателя, то поляризация излучения, распространяющегося в направлении скорости поступательного движения, не изменится. Отсюда ясно, что магнитотормозное излучение отдельного электрона в общем случае поляризовано по эллипсу, причем электрическое поле $\mathbf{E}$ в волне максимально в плоскости, проходящей через направление ускорения. Это значит, что преимущественное направление поля $\mathbf{E}$ в волне перпендикулярно к проекции магнитного поля на картинную плоскость (как обычно, под картинной плоскостью понимается плоскость, перпендикулярная к лучу зрения).

Рассмотрим теперь излучение при движении по винтовой линии (но при выполнении условия (5.1)). В отношении каждого отдельного импульса ситуация здесь такая же, как и при движении по окружности, но с заменой поля H на его перпендикулярную к скорости составляющую $H_\perp = H \sin\chi$. В самом деле, теперь для продолжительности импульса имеем

$$\Delta t \sim \frac{r_H^* \xi}{c}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \approx \frac{mc}{eH_\perp}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad (5.9)$$

где $r_H^* = v/(\omega_H^* \sin\chi) \approx \mathscr{E}/eH_\perp$ — радиус кривизны пространственной траектории частицы (см. (4.23)). В (5.9) учтено, что электрон движется в направлении наблюдателя в пределах угла $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ в течение времени $\Delta t' \sim r_H^* \xi/c \approx mc/eH$ переход же от $\Delta t'$ к Δt нужно сделать так же, как и для кругового движения.

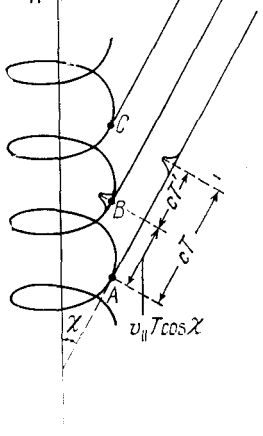


Рис. 5.2. Излучение при винтовом движении.

Время между импульсами T' отличается от периода $T = (2\pi mc/eH)(\mathscr{E}/mc^2)$ в силу эффекта Доплера.

Вместе с тем, если при круговом движении импульсы следуют друг за другом через период T (см. (5.5)), то при винтовом движении импульсы излучения следуют через время T', которое отличается от T вследствие эффекта Доплера.

Время T' легко найти элементарным путем, пользуясь рис. 5.2. Для выбранного наблюдателя вспышки излучения приходят тогда, когда электрон находится в точках A, B, C, ... (для простоты здесь и ниже считаем, что излучение строго «игольчатое»). Другими словами, именно в этих точках элек-

трон «смотрит» на наблюдателя. Интервал времени между моментами, когда электрон проходит точки A и B равен, конечно, периоду $T = 2\pi/\omega_H^*$. Расстояние между точками A и B равно $v_\parallel T = vT\cos\chi$ (χ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$), а импульс, испущенный в точке A, за это время пройдет путь cT. Из рис. 5.2 ясно, что импульс, испущенный в точке B, пойдет к наблюдателю с отставанием от первого импульса на время

$$T' = T\left(1 - \frac{v_\parallel \cos\chi}{c}\right) = T\left(1 - \frac{v\cos^2\chi}{c}\right) \approx T\sin^2\chi = \frac{2\pi}{\omega_H^*}\sin^2\chi, \tag{5.10}$$

где при переходе к предпоследнему выражению учтено, что весь расчет ведется для предельного случая $v \to c$. Напомним еще раз, что использованная картина, в которой излучение приходит к наблюдателю в виде отдельных импульсов, пригодна лишь при $\chi \gg \xi = mc^2/\mathscr{E}$. Фактически, однако, выражение типа $T' = T(1 - v_\parallel \cos\chi/c)$ имеет общий характер, и его появление не обязательно связано с допущением об «игольчатости» излучения и с возможностью разделять его на дискретные импульсы (подробнее см. [49]).

Итак, спектр излучения ультрарелятивистского электрона в волновой зоне состоит из обертонов частоты

$$\Omega_H = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\omega_H^*}{\sin^2\chi}. \tag{5.11}$$

Само по себе это обстоятельство не очень существенно, если учесть, что в интересующих нас случаях обертоны не разрешаются и дело приходится иметь со сплошным спектром. Однако изменение интервала между импульсами сказывается не только на спектре, но и на всех характеристиках поля излучения, в частности на его интенсивности, фиксируемой в точке наблюдения. Действительно, пусть электрон за каждый оборот (за время $T = 2\pi/\omega_H^*$) теряет на излучение энергию $\Delta\mathscr{E} = \mathscr{R}T$, где $\mathscr{R} = \left(2e^4H_\perp^2/3m^2c^3\right)\left(\mathscr{E}/mc^2\right)^2$, как это ясно из (4.37) и (4.39). Тогда в силу сказанного очевидно, что к наблюдателям, расположенным на некоторой фиксированной сфере на расстоянии R от электрона, эта энергия поступит за время T', и, следовательно, средняя наблюдаемая мощность излучения (полный поток энергии) будет равна

$$\mathscr{P} = \frac{\Delta\mathscr{E}}{T'} = \frac{\mathscr{R}T}{T'} = \frac{\mathscr{R}}{\sin^2\chi}. \tag{5.12}$$

На первый взгляд может показаться, что здесь имеется какое-то противоречие с законом сохранения энергии. Электрон теряет в единицу времени энергию $\mathscr{R}$. Вся эта энергия переходит в излучение и, казалось бы, должна равняться полному

потоку излучения через рассматриваемую сферу. Так часто и поступают — вычисляют радиационные потери, испытываемые частицей, и приравнивают их полному потоку излучения. В стационарном случае и для излучателя с неподвижным центром тяжести подобным образом, конечно, действительно можно поступать. Вообще же, как мы напомнили в гл. 3, работа, совершаемая излучателем в единицу времени (мощность потерь $\mathscr{R}$), равна полному потоку через некоторую поверхность плюс изменение энергии поля $\frac{d}{dt}\int \frac{E^2+H^2}{8\pi} dV$ в объеме, охватываемом этой поверхностью. В интересующем нас случае область пространства, занимаемая излучением и расположенная между движущимся электроном и фиксированной в пространстве поверхностью, на которой проводятся наблюдения, все время уменьшается. Уменьшается и заключенная в этой области энергия, а поэтому мощность принимаемого излучения $\mathscr{P}$ больше мощности потерь $\mathscr{R}$. Между тем в ряде работ при переходе к спектральным величинам для интенсивности использовалась мощность потерь $\mathscr{R}$. Такой подход не может, конечно, при учете перемещения излучателя привести к правильным выражениям для интенсивности излучения, фиксируемой на некоторой неподвижной поверхности. Вместе с тем если излучающие частицы находятся в фиксированном объеме (например, оболочке сверхновой звезды) или, точнее, функция распределения излучающих частиц не меняется со временем, то интенсивность излучения совокупности частиц совпадает со спектральной мощностью потерь. Такое заключение ясно из закона сохранения энергии и, конечно, подтверждается прямым расчетом (см. [49] и ниже).

Как мы полагаем, тот факт, что весь этот совершенно элементарный по существу вопрос не был так долго полностью выяснен и привел к использованию не вполне или не всегда верных формул *), оправдывает столь подробное изложение и, по сути дела, неоднократное повторение соответствующих замечаний.

Приведенные элементарные соображения и формулы делают картину в качественном отношении совершенно ясной, а также позволяют оценивать характеристики (интенсивность, спектр, поляризацию) синхротронного излучения для конкретных случаев. Для получения количественных формул нужны, напротив, довольно громоздкие вычисления. Эти вычисления проводятся на основе хорошо известных формул для запаздывающих потенциалов, и их можно найти, например, в [49, 60] (для кругового движения, т. е. при $\sin\chi = 1$, ряд расчетов содержится

*) Сказанное относится, в частности, к некоторым формулам, приведенным в [58, 59]. К счастью, в [58, 59] эти формулы применялись только к случаям (или в условиях), когда соответствующих различий между выражениями для интенсивности можно не учитывать (см. [49] и ниже).

в § 74 книги [2])*). Поэтому ниже ограничимся тем, что приведем некоторые окончательные результаты, а также остановимся на их применении в астрофизике. Имея в виду такие применения, мы несколько отступим от характера изложения, принятого в целом в настоящем курсе. Именно, будет приведено, в соответствии с [58, 59], довольно большое количество формул, носящих по сути дела вспомогательный характер или же удобных при расчетах. Разумеется, читатели, не интересующиеся применением синхротронной теории, могут не вникать в эти детали. Таким образом, последующая часть настоящей главы (вплоть до формулы (5.66) включительно) носит в известном отношении вспомогательный характер. Теория синхротронного излучения освещена, помимо [49, 58, 60], также, например, в [54, 56, 61].

Поле синхротронного излучения заряда, поскольку оно имеет период T', можно разложить в ряд Фурье по обертонам частоты $\Omega_H = 2\pi/T' = \omega_H^*/\sin^2\chi$. Другими словами, поле излучения на большом расстоянии R от заряда можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n \exp\left[i\omega_n\left(\frac{R}{c} - t\right)\right], \\ &\omega_n = n\Omega_H = n\,\frac{\omega_H^*}{\sin^2\chi}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

В рассматриваемом ультрарелятивистском случае с точностью до членов порядка $\xi^3 = (mc^2/\mathscr{E})^3$ для электрона имеем

$$\mathbf{E}_n = \frac{2e\omega_H^*}{\sqrt{3}\,\pi cR}\,\frac{n}{\sin^5\chi}\left\{(\xi^2+\psi^2)K_{2/3}(g_n)\,\mathbf{1}_1 + i\psi(\xi^2+\psi^2)^{1/2}K_{1/3}(g_n)\,\mathbf{1}_2\right\}, \tag{5.14}$$

$$\psi \ll 1, \quad \xi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \ll 1,$$

где $\psi = \chi - \alpha$ — разность углов между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ и между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$; угол ψ есть, очевидно, угловое расстояние между образующими конуса, описываемого вектором $\mathbf{v}$, и направлением волнового вектора $\mathbf{k}$ (если векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$ лежат в одной плоскости, как это бывает в соответствующий момент времени, то угол ψ по абсолютной величине равен углу θ). В (5.14) e — абсолютная величина заряда (заряда электрона) и, по определению $\omega_H^* > 0$. Для положительно заряженной частицы (позитрона) амплитуда поля является комплексно сопряженной по отношению к $\mathbf{E}_n$ согласно (5.14), что отвечает противоположному направлению вращения электрического вектора. Далее в (5.14) $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ — два

*) Необходимо помнить об использовании различных обозначений. Так, в [49] угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ обозначен через θ, а здесь — через χ (у нас θ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$).

взаимно ортогональных единичных вектора в картинной плоскости, из которых $\mathbf{l}_2$ направлен по $\mathbf{H}_\perp$, а $\mathbf{l}_1 = [\mathbf{l}_2\mathbf{k}]/k$ (рис. 5.3). Наконец, $K_{1/3}(g_n)$ и $K_{2/3}(g_n)$ — бесселевы функции второго рода от мнимого аргумента g_n (функции Макдональда; см., например, §§ 8.4, 8.5 в [62]),

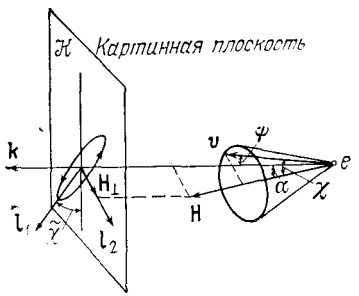


Рис 5.3. Эллипс колебаний электрического вектора в волне, излучаемой частицей, движущейся в магнитном поле

Заряд считается отрицательным (электрон); для положительно заряженной частицы (позитрона) направление вращения противоположно указанному, $\mathcal{K}$ — картинная плоскость (плоскость, перпендикулярная к направлению излучения, или, что то же, к направлению наблюдения), $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ — два взаимно ортогональных единичных вектора в картинной плоскости, из которых $\mathbf{l}_2$ направлен вдоль $\mathbf{H}_\perp$ — проекции магнитного поля $\mathbf{H}$ на картинную плоскость.

$$g_n = \frac{n}{3\sin^3\chi}(\xi^2+\psi^2)^{1/2} = \frac{\nu^2}{2\nu_c}\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}. \quad (5.15)$$

Во втором из равенств (5.15) мы перешли от номера гармоники к частоте $\nu = \omega/2\pi = n\omega_H^*/2\pi\sin^2\chi$ и ввели обозначение

$$\nu_c = \frac{3\omega_H^*\sin\chi}{4\pi\xi^3} = \frac{3eH_\perp}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \quad (5.16)$$

Присутствие в выражении (5.14) мнимой единицы перед вторым членом в фигурных скобках соответствует эллиптической поляризации излучения. Одна из осей эллипса колебаний электрического вектора направлена вдоль $\mathbf{H}_\perp$, а вторая (бóльшая) — перпендикулярна к $\mathbf{H}_\perp$. Отношение осей, которое обозначим через $\operatorname{tg}\beta$, в силу (5.14) равно

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\psi K_{1/3}(g_n)}{(\xi^2+\psi^2)^{1/2}K_{2/3}(g_n)}. \quad (5.17)$$

При $\psi > 0$ направление вращения — левое (для наблюдателя — против часовой стрелки), а при $\psi < 0$ — правое, причем угол ψ считается положительным, если $\chi > \alpha$, т. е. вектор $\mathbf{k}$ лежит внутри конуса скоростей (см. рис. 5.3).

Поляризация вырождается в линейную только при $\psi = 0$, т. е. если волновой вектор лежит строго на поверхности конуса скоростей. При больших ψ поляризация стремится к круговой, поскольку для больших значений аргумента $K_{1/3}(x) \approx K_{1/3}(x) \approx \approx (\pi/2x)^{1/2}e^{-x}$; однако интенсивность излучения при этом становится пренебрежимо малой (см. ниже рис. 5.4).

Поле излучения можно охарактеризовать «тензором поляризации излучения», по определению равным

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(n) = \frac{c}{8\pi}E_{n,\alpha}E^*_{n,\beta}, \quad (5.18)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$ и $E_{n,\alpha}$ — компоненты электрического вектора, фигурирующего в (5.13), (5.14), причем средняя за период плотность потока энергии (вектора Пойнтинга) в n-й гармонике равна

$$\tilde{p}_n = \mathrm{Sp}\,\tilde{p}_{\alpha\beta}(n) \equiv \tilde{p}_{11} + \tilde{p}_{22} = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_n|^2. \qquad (5.19)$$

В области высоких гармоник спектр излучения практически непрерывен, $\nu = \omega/2\pi = n\omega_H^*/2\pi \sin^2\chi$ и вместо $\tilde{p}_n$ удобно вести «спектральную плотность тензора поляризации»

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(\nu) = \tilde{p}_{\alpha\beta}(n)\frac{dn}{d\nu} = \frac{2\pi \sin^2\chi}{\omega_H^*}\tilde{p}_{\alpha\beta}(n). \qquad (5.20)$$

Для поля ультрарелятивистского электрона введем функции (здесь $g_\nu = g_n$; см. (5.15)):

$$\tilde{p}_\nu^{(1)} \equiv \tilde{p}_{11}(\nu) = \frac{3e^2\omega_H^*}{4\pi^2R^2c\xi^2\sin^2\chi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K_{2/3}^2(g_\nu), \qquad (5.21)$$

$$\tilde{p}_\nu^{(2)} \equiv \tilde{p}_{22}(\nu) = \frac{3e^2\omega_H^*}{4\pi^2R^2c\xi^2\sin^2\chi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2\left(\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)K_{1/3}^2(g_\nu), \qquad (5.22)$$

$$\tilde{p}_{12}(\nu) = \tilde{p}_{21}(\nu) =$$

$$= -i\frac{3e^2\omega_H^*}{4\pi^2R^2c\xi^2\sin^2\chi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2\left(1+\frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}\left(\frac{\psi}{\xi}\right)K_{1/3}(g_\nu)\,K_{2/3}(g_\nu). \qquad (5.23)$$

Очевидно, $\tilde{p}_\nu^{(1)}\,d\nu$ есть поток излучения в интервале частот $d\nu$, причем электрический вектор в волне направлен по $\mathbf{l}_1$; аналогично направление 2 характеризуется вектором $\mathbf{l}_2$. Спектральная плотность потока излучения для обеих поляризаций $\tilde{p}_\nu = \tilde{p}_\nu^{(1)} + \tilde{p}_\nu^{(2)}$.

Если на основе выражений (5.21) и (5.22) вычислить полный поток энергии излучения через фиксированную поверхность, т. е. вычислить интеграл от плотности потока по всем частотам и направлениям, то он в согласии с (5.12) оказывается равным $\mathcal{P} = \mathcal{R}/\sin^2\chi$, где $\mathcal{R}$ — обусловленные синхротронным излучением потери энергии ультрарелятивистским электроном (см. (4.37), (4.39)); для удобства приводим выражение для $\mathcal{R}$ еще раз:

$$\mathcal{R} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4H_\perp^2}{3m^2c^3}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 = {}^2/_3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 cH_\perp^2\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (5.24)$$

Различие между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$, как уже подчеркивалось, связано с нестационарностью (при $\chi \neq {}^1/_2\pi$) поля излучения, усредненного за период обращения электрона. Действительно, при винтовом движении электрон приближается к наблюдателю, и лишь при $\chi = {}^1/_2\pi$ (круговое движение) центр его орбиты

остается неподвижным. В силу закона сохранения энергии полный поток энергии через фиксированную поверхность σ равен

$$\mathscr{P} = \int\limits_{\sigma} \tilde{p}_\nu \, d\nu \, d\sigma = \mathscr{R} - \frac{d}{dt} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \, dV. \qquad (5.25)$$

При приближении электрона к «наблюдателю» (т. е. к поверхности σ) энергия поля, локализованного между излучателем и поверхностью σ, изменяется — этим и объясняется различие между $\mathscr{P}$ и $\mathscr{R}$.

В большинстве приложений теории синхротронного (магнитотормозного) излучения, во-первых, приходится иметь дело не с отдельными частицами, а с их совокупностью. Во-вторых, обычно эта совокупность стационарна или, во всяком случае, изменяется как целое очень медленно. Конкретно, если речь идет о релятивистских электронах в оболочках сверхновых звезд или в других туманностях, длину излучающей области вдоль луча зрения можно считать неизменной за время, необходимое электромагнитным волнам для прохождения этой длины. Иными словами, скорость оболочки (границы туманности и т. п.) вдоль луча зрения V_r мала по сравнению со скоростью света. При пренебрежении членами порядка V_r/c объем оболочки можно считать постоянным, и из закона сохранения энергии ясно, что в среднем по всей совокупности излучающих частиц в оболочке, как уже упоминалось, $\mathscr{P} = \mathscr{R}$ (см. (5.25)). Детальный расчет [49], разумеется, подтверждает это заключение. Принимая его во внимание, для стационарных излучателей вместо величин $\tilde{p}_\nu^{(1)}$ и $\tilde{p}_\nu^{(2)}$ можно пользоваться величинами

$$p_\nu^{(1)} = \tilde{p}_\nu^{(1)} \sin^2\chi = \frac{3}{4\pi^2 R^2} \frac{e^3 H}{mc^2 \xi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K_{2/3}^2(g_\nu), \qquad (5.26)$$

$$p_\nu^{(2)} = \tilde{p}_\nu^{(2)} \sin^2\chi = \frac{3}{4\pi^2 R^2} \frac{e^3 H}{mc^2 \xi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(\frac{\psi^2}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right) K_{1/3}^2(g_\nu), \qquad (5.27)$$

где по-прежнему

$$g_\nu = \frac{\nu}{2\nu_c} \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}, \qquad \nu_c = \frac{3eH_\perp}{4\pi mc} \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (5.15a)$$

Угловое распределение для потоков излучения $p_\nu^{(1)}$ и $p_\nu^{(2)}$ изображено на рис. 5.4. За единицу масштаба по вертикальной оси выбран коэффициент $\{3e^3H/(4\pi^2R^2mc^2\xi)\}(\nu/\nu_c)^2$ в выражениях (5.26) и (5.27). Кривые построены для $\nu/\nu_c = 0{,}29$, что соответствует, как мы увидим ниже, максимуму в частотном спектре глобального (по всем направлениям) излучения электрона. Рис. 5.4 показывает, что в области малых углов ψ основной вклад в излучение дают колебания с направлением электрического поля поперек проекции $\mathbf{H}_\perp$ на картинную плоскость, т. е. в этой области $p_\nu^{(1)} \gg p_\nu^{(2)}$.

Как ясно из сказанного выше, для источников синхротронного излучения, которые движутся с релятивистской скоростью, нужно опираться не на выражения (5.26), (5.27), а на формулы (5.21)—(5.23). При этом, если источник движется как целое со скоростью V_r вдоль луча зрения в направлении «наблюдателя», интенсивность излучения повышается в $(1 - V_r/c)^{-1}$ раз по сравнению со случаем неподвижного источника с той же функцией распределения электронов (см. [49]). В последние годы начинает выясняться, что в космических условиях источники

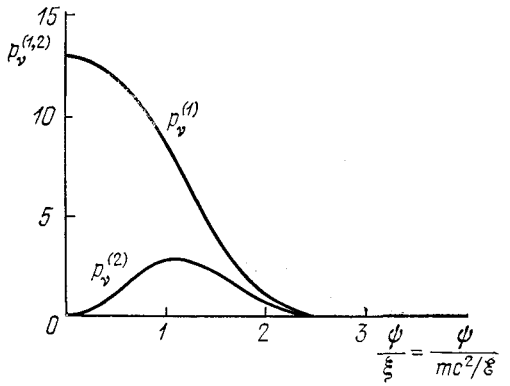


Рис. 5.4. Угловое распределение потоков синхротронного излучения отдельного электрона с двумя главными направлениями поляризации.

$p_\nu^{(1)}$ — поток с поляризацией поперек проекции магнитного поля на картинную плоскость и $p_\nu^{(2)}$ — вдоль этой проекции при $\nu/\nu_c = 0.29$. За единицу масштаба по вертикальной оси взят коэффициент $\frac{3e^4H}{4\pi^2R^2mc^2\xi}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2$ в выражениях (5.26) и (5.27). Угол $\psi = 0$ отвечает направлению мгновенной скорости электрона.

синхротронного излучения могут иметь релятивистские скорости. Так, при взрывах галактических ядер, приводящих к образованию радиогалактик, излучающие «радиооблака» в ряде случаев движутся со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Возможно, что оболочки, струи и выбросы, движущиеся с релятивистскими скоростями, существуют также в случае других объектов, в первую очередь в квазарах. Тем самым интерес несомненно представляют не только стационарные, но и нестационарные (релятивистские) источники синхротронного и вообще магнитотормозного излучения [49, 63]. В дальнейшем, однако, мы сосредоточим внимание на стационарных (точнее, на квазистационарных) источниках, для которых в области (5.1) можно использовать формулы (5.26), (5.27).

Прежде чем продвигаться дальше, рассмотрим величины, характеризующие излучение, так как этот вопрос в курсах электродинамики обычно не затрагивается.

Произвольный поток излучения, помимо частотной зависимости, характеризуется, вообще говоря, четырьмя независимыми параметрами, например положением главной оси эллипса поляризации, интенсивностями по двум главным направлениям и направлением вращения электрического вектора. В качестве таких параметров удобнее, однако, использовать параметры Стокса (см., также, например, [56, 58, 60, 64, 65]). Для излучения отдельной частицы эти параметры I_e, Q_e, U_e и V_e выражаются через плотности потоков излучения с двумя основными направлениями поляризации $p_\nu^{(1)}$ и $p_\nu^{(2)}$, а также через $\operatorname{tg}\beta$ — отношение малой и большой осей эллипса колебаний электрического вектора (см. (5.17)) и угол $\tilde{\chi}$ между некоторым произвольным фиксированным направлением в картинной плоскости и большой осью этого эллипса (т. е. направлением, перпендикулярным к проекции **H** на картинную плоскость) *). Соответствующие выражения таковы:

$$\left.\begin{aligned} I_e &= p_\nu^{(1)} + p_\nu^{(2)}, \\ Q_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \cos 2\tilde{\chi}, \\ U_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \sin 2\tilde{\chi}, \\ V_e &= (p_\nu^{(1)} - p_\nu^{(2)}) \operatorname{tg} 2\beta. \end{aligned}\right\} \quad (5.28)$$

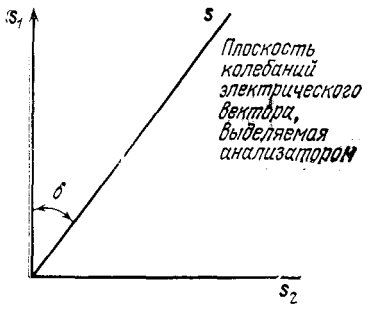


Рис. 5.5. К определению параметров Стокса.

В направлении s_2 вводится дополнительное запаздывание фазы ε относительно колебаний в перпендикулярном направлении s_1. Угол δ определяет положение плоскости анализатора. Измеряемый поток излучения направлен на читателя.

Параметры Стокса (5.28), как и $p_\nu^{(1)}$, $p_\nu^{(2)}$, имеют размерность плотности потока энергии в единичном интервале частот; индекс e означает, что эти параметры относятся к излучению одного электрона.

Параметры Стокса обладают двумя важными преимуществами: они являются непосредственно измеримыми величинами и аддитивны для независимых (некогерентных) потоков излучения, т. е. потоков излучения со случайными фазами, по которым производится усреднение. Экспериментально параметры Стокса можно определить обычными методами исследования поляризованного излучения [65], а именно, посредством введения некоторой разности фаз ε между одной из проекций электрического вектора колебаний в волне (например, на направление s_1 на рис. 5.5) и другой — проекцией на перпендикулярное направление (s_2 на рис. 5.5). Последующий анализ сводится к установлению зависимости интенсивности результирующего

*) Угол $\tilde{\chi}$ отсчитывается в направлении часовой стрелки и, очевидно, определен в интервале $0 \leqslant \tilde{\chi} < \pi$. Здесь введено обозначение $\tilde{\chi}$, чтобы не путать угол $\tilde{\chi}$ с углом χ между **v** и **H**.

излучения от положения анализатора, выделяющего проекцию колебаний на некоторое произвольное направление $\mathbf{s}$ (см. рис. 5.5). Если угол в картинной плоскости между направлениями $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}$ обозначить через δ, то интенсивность излучения на выходе анализатора будет следующей функцией ε и δ (см., например, [64]):

$$I_e(\varepsilon, \delta) = {}^1/_2 \{I_e + Q_e \cos 2\delta + (U_e \cos\varepsilon - V_e \sin\varepsilon) \sin 2\delta\}. \quad (5.29)$$

Подбирая соответствующим образом запаздывание фазы ε и положение анализатора δ, можно измерить значения всех параметров Стокса.

Заметим, что первый параметр Стокса I_e определяет полную плотность потока излучения (или интенсивность в случае пространственно распределенных источников; см. ниже), а степень поляризации излучения и угол $\tilde{\chi}$ выражаются как

$$\Pi = \frac{\sqrt{Q_e^2 + U_e^2 + V_e^2}}{I_e} \quad (5.30)$$

и

$$\operatorname{tg} 2\tilde{\chi} = \frac{U_e}{Q_e}. \quad (5.31)$$

Из двух значений угла $\tilde{\chi}$ ($0 \leqslant \tilde{\chi} \leqslant \pi$), определяемых уравнением (5.31), выбирается то, которое лежит в первой четверти, если $U_e > 0$, и во второй — если $U_e < 0$. При этом по определению угол $\tilde{\chi}$ характеризует направление в картинной плоскости, в котором интенсивность поляризованной компоненты максимальна, и отсчитывается по часовой стрелке от выбранного направления (в рассматриваемом случае — от направления $\mathbf{s}_1$). В отсутствие эллиптической (и круговой) поляризации $V_e = 0$ и

$$\Pi = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Рассмотрим теперь излучение системы частиц. Пусть $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathscr{E}\, dV\, d\Omega_\tau$ — число частиц в элементе объема $dV = R^2\, dR\, d\Omega$, энергии которых заключены в интервале $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$, а скорости — внутри телесного угла $d\Omega_\tau$ вблизи направления $\boldsymbol{\tau}$. Если излучение отдельных электронов некогерентно, параметры Стокса в этом случае аддитивны и интенсивность излучения такой системы в направлении наблюдения *) $\mathbf{k}$ равна

$$I_\nu \equiv I(\nu, \mathbf{k}) = \int I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi)\, N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau})\, d\mathscr{E}\, d\Omega_\tau\, R^2\, dR. \quad (5.32)$$

Здесь $I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi)$ определяется первым из выражений (5.28), а интегрирование по dR производится по лучу зрения

*) В дальнейшем под направлением наблюдения (направлением луча зрения) понимается направление волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. направление прихода наблюдаемого излучения.

в направлении $\mathbf{k}$. Аналогичным образом выражаются остальные параметры Стокса.

Подчеркнем, что, в отличие от параметров Стокса для излучения отдельного электрона (5.28), имеющих размерность спектральной плотности потока энергии излучения, выражение (5.32) определяет интенсивность излучения, т. е. поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к направлению наблюдения, отнесенный к единичному телесному углу и единичному интервалу частот. Интенсивность излучения в радиоастрономии измеряется в единицах $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{Гц}^{-1}\cdot\text{ср}^{-1} = 10^3$ эрг$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}\cdot$Гц$^{-1}$ ср$^{-1}$. В качестве единицы потока при этом часто используется «единица потока» = 1 янский (Ян), равная 10^{-26} Вт$\cdot$м$^{-2}\cdot$Гц$^{-1} = 10^{-23}$ эрг$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}\cdot$Гц$^{-1}$.

Если источник (излучающая система электронов) обладает малыми угловыми размерами, то измеряемой на опыте величиной служит (как и в случае отдельной частицы) спектральная плотность потока излучения

$$\Phi_\nu = \int I_\nu \, d\Omega = \int I_e(\nu, \mathscr{E}, \mathbf{R}, \chi, \psi) N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \tau) \, d\mathscr{E} \, d\Omega_\tau \, dV, \quad (5.33)$$

где $dV = R^2 \, dR \, d\Omega$ и интегрирование производится по всему объему источника.

В (5.32), (5.33) и в аналогичных выражениях для остальных параметров Стокса в применении к синхротронному излучению можно в общем виде провести интегрирование по $d\Omega_\tau$ для произвольного распределения электронов $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \tau)$. В самом деле, подынтегральное выражение отлично от нуля практически только в малом интервале углов $\Delta\psi \sim mc^2/\mathscr{E}$, и поэтому при интегрировании по $d\Omega_\tau$ существен лишь вклад узкого кольцевого сектора $\Delta\Omega_\tau = 2\pi \sin\alpha \Delta\psi$, где $\alpha = \chi - \psi \approx \chi$ — угол между направлением наблюдения $\mathbf{k}$ и магнитным полем $\mathbf{H}$ *). В пределах малого телесного угла $\Delta\Omega_\tau$ распределение электронов по направлениям обычно практически не меняется, и можно положить $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \tau) \approx N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ есть направление излучения (направление по лучу зрения от источника к наблюдателю), а интегрирование по ψ можно распространить на всю область от $-\infty$ до ∞. Тогда, учитывая соотношения [66]

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu^{(1)} \, d\psi &= \frac{\sqrt{3}\, e^3 H}{2\pi m c^2 R^2} \frac{\nu}{2\nu_c} \left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta) \, d\eta + K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \right], \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu^{(2)} \, d\psi &= \frac{\sqrt{3}\, e^3 H}{2\pi m c^2 R^2} \frac{\nu}{2\nu_c} \left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta) \, d\eta - K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \right], \end{aligned}\right\} \quad (5.34)$$

*) В дальнейшем не делается различия между углами α и χ; это, очевидно, допустимо, поскольку ультрарелятивистская частица излучает практически только в направлении движения.

из (5.28) и (5.32) получим

$$I_\nu = I(\nu, \mathbf{k}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, e^3}{mc^2} \int d\mathscr{E}\, dR\, N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})\, H \sin\chi \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta. \quad (5.35)$$

Здесь в общем случае напряженность поля $\mathbf{H}$, угол $\alpha \approx \chi$ между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$, а также плотность (концентрация) частиц $N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})$ зависят от $\mathbf{R}$.

Аналогичным образом можно выразить остальные параметры Стокса, например

$$Q(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{mc^2} \int d\mathscr{E}\, dR N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k})\, H \sin\chi \cos 2\tilde{\chi} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \quad (5.36)$$

Параметр Стокса $U(\nu, \mathbf{k})$ отличается от $Q(\nu, \mathbf{k})$ только заменой $\cos 2\tilde{\chi}$ в подынтегральном выражении (5.36) на $\sin 2\tilde{\chi}$. Что касается параметра $V(\nu, \mathbf{k})$, который характеризует присутствие эллиптически поляризованного излучения, то он в рассматриваемом ультрарелятивистском приближении оказывается равным нулю. Действительно, как легко убедиться из (5.17) и (5.28)

$$V_e \sim 2\frac{\psi}{\xi}\left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2} K_{1/3}(g_\nu)\, K_{2/3}(g_\nu).$$

В силу нечетности этой функции интеграл от нее по всем ψ обращается в нуль и, следовательно, $V(\nu, \mathbf{k}) = 0$. Таким образом, излучение системы электронов оказывается линейно поляризованным. Этот результат справедлив с точностью до членов порядка $mc^2/\mathscr{E}$, и его легко понять, если вспомнить, что знак ψ определяет направление вращения электрического вектора в волне, излучаемой отдельным электроном. Поскольку мощность излучения (см. (5.21) и (5.22) или (5.26) и (5.27)) не зависит от знака ψ, а распределение частиц по направлениям движения в пределах очень малых углов $|\psi| \leqslant mc^2/\mathscr{E}$ практически постоянно, то вклад в излучение в данном направлении от частиц с положительными и отрицательными ψ одинаков, и поляризация будет линейной.

Заметная эллиптическая поляризация в ультрарелятивистском случае могла бы возникать лишь при резко анизотропном распределении скоростей электронов. Для этого необходимо, чтобы распределение существенно изменялось в пределах очень малого угла $|\psi| \sim mc^2/\mathscr{E}$ и притом как раз в направлении наблюдения. Если кроме того учесть возможные флуктуации направления магнитного поля, то ясно, что для реализации такой возможности нужны весьма специальные условия (в этом плане особенно интересны пульсары).

Приведем теперь выражения для интенсивности и поляризации излучения в некоторых конкретных случаях, в частности важных при астрономических применениях.

Если все электроны обладают одной и той же энергией (моноэнергетический спектр), а магнитное поле однородно, то интенсивность излучения, согласно (5.35), равна

$$I_1(\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{3}\,e^3}{mc^2} N_e(\mathbf{k})\, H \sin\chi \frac{\nu}{\nu_c} \int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta \equiv N_e(\mathbf{k})\, p(\nu), \quad (5.37)$$

где $N_e(\mathbf{k}) = \int N_e(\mathbf{R}, \mathbf{k})\, dR$ — отнесенное к единичному телесному углу число электронов вдоль луча зрения, скорости которых направлены в сторону наблюдателя.

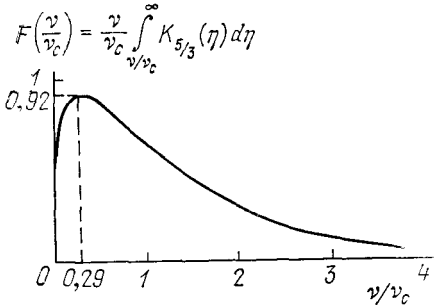


Рис. 5.6. Спектральное распределение мощности полного (по всем направлениям) излучения заряженной частицы, движущейся в магнитном поле (см. (5.39)).

Степень поляризации в этом случае, как можно видеть из (5.30) и (5.36), равна

$$\Pi = \frac{K_{2/3}(\nu/\nu_c)}{\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } \nu \ll \nu_c, \\ 1 - 2/3\,(\nu_c/\nu) & \text{при } \nu \gg \nu_c. \end{cases} \quad (5.38)$$

Поскольку в рассматриваемом приближении интегрирование по угловому распределению электронов равносильно интегрированию мощности излучения отдельного электрона по всем направлениям, то выражение (5.37) лишь множителем $N_e(\mathbf{k})$ отличается от спектрального распределения мощности полного (по всем направлениям) излучения отдельного электрона:

$$p(\nu) = \sqrt{3}\frac{e^3 H \sin\chi}{mc^2}\frac{\nu}{\nu_c}\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta = \sqrt{3}\,\frac{e^3 H_\perp}{mc^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \quad (5.39)$$

График функции $F(x) = x\int\limits_x^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta$, отражающей спектральное распределение излучаемой мощности, представлен на рис. 5.6, а ее значение вместе с значениями функции $F_p(x) = xK_{2/3}(x)$ даны, например, в приложении 4 в конце книги

[59] (как ясно из (5.38), поляризация $\Pi = F_p(x)/F(x)$). Отметим, что максимум в спектре синхротронного излучения отдельного электрона приходится на частоту

$$\nu_m \approx 0{,}29\nu_c = 0{,}07\frac{eH_\perp}{mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = 1{,}2\cdot 10^6 H_\perp\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 =$$

$$= 1{,}8\cdot 10^{18} H_\perp (\mathscr{E}\,(\text{эрг}))^2 = 4{,}6\cdot 10^{-6} H_\perp (\mathscr{E}\,(\text{эВ}))^2. \qquad (5.40\text{а})$$

Здесь частота ν выражена в герцах.

Для максимальной частоты (5.40а) спектральная плотность мощности полного излучения отдельного электрона равна

$$p_m = p(\nu_m = 0{,}29\nu_c) \approx 1{,}6\frac{e^3 H_\perp}{mc^2} = 2{,}16\cdot 10^{-22} H_\perp \text{ эрг}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Гц}^{-1}. \qquad (5.40\text{б})$$

Если не говорить о численном коэффициенте, т. е. иметь в виду лишь оценку по порядку величины, то к последнему соотношению легко прийти следующим образом. Как ясно из качественных соображений или из рис. 5.6, ширина спектра излучения электрона $\Delta\nu \sim \nu_c \sim (eH_\perp/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$. Полная мощность синхротронного излучения с учетом сделанных выше замечаний может быть положена равной потерям (5.24). Очевидно, средняя спектральная плотность мощности излучения

$$\overline{p(\nu)} \sim \frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\Delta\nu} \sim \frac{\mathscr{P}(\mathscr{E})}{\nu_c} \sim \frac{e^3 H_\perp}{mc^2},$$

что согласуется с (5.8), и эта оценка здесь повторена для удобства.

Энергетический спектр электронов вдоль луча зрения часто можно аппроксимировать в ограниченном интервале энергий степенной функцией вида

$$N_e(\mathscr{E}, \mathbf{k})\,d\mathscr{E} = K_e(\mathbf{k})\,\mathscr{E}^{-\gamma}\,d\mathscr{E}, \quad \mathscr{E}_1 \leqslant \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_2. \qquad (5.41)$$

Здесь $N_e(\mathscr{E}, \mathbf{k})$ — число электронов на луче зрения, движущихся в направлении наблюдателя, отнесенное к единичному телесному углу и единичному интервалу энергий.

Для ответственных за космическое радиоизлучение электронов такая аппроксимация обычно бывает пригодна в достаточно широком интервале энергий, причем границы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ спектра (5.41) часто можно считать такими, чтобы в интересующем нас интервале частот излучение электронов с энергиями $\mathscr{E} < \mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E} > \mathscr{E}_2$ было несущественным. В этом предположении в интегралах (5.35) и (5.36) функцию (5.41) можно использовать во

всем интервале энергий, и поэтому (при $\gamma > 1/3$) применить соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathscr{E}^{-\gamma} \frac{\nu}{\nu_c} K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) d\mathscr{E} = {}^1/_4 \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right) \left[\frac{3eH \sin\chi}{2\pi m^2 c^5 \nu}\right]^{1/2(\gamma-1)}, \\
&\int_0^\infty \mathscr{E}^{-\gamma}\left(\frac{\nu}{\nu_c} \int_{\nu/\nu_c}^\infty K_{5/3}(\eta)\, d\eta\right) d\mathscr{E} = \\
&\qquad = {}^1/_4 \frac{\gamma + {}^7/_3}{\gamma+1} \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right) \left[\frac{3eH \sin\chi}{2\pi m^3 c^5 \nu}\right]^{1/2(\gamma-1)},
\end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда (см. (5.35)) получим следующее выражение для интенсивности излучения системы электронов с энергетическим спектром (5.41) в однородном магнитном поле **H**:

$$I_0(\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{3}}{\gamma+1} \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right) \frac{e^3}{mc^2} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)} \times$$
$$\times K_e(\mathbf{k}) (H \sin\chi)^{1/2(\gamma+1)} \nu^{-1/2(\gamma-1)}, \tag{5.43}$$

где $K_e(\mathbf{k})$ — коэффициент в (5.41).

Допустим, что распределение электронов можно считать однородным и изотропным, т. е.

$$N(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi} N_e(\mathscr{E}),$$

где

$$N_e(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} = K_e \mathscr{E}^{-\gamma}\, d\mathscr{E} \tag{5.44}$$

есть число электронов в единице объема с произвольными направлениями движения и с энергиями в интервале $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$. Тогда

$$K_e(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi} K_e L, \tag{5.45}$$

где K_e — коэффициент в (5.44), а L — протяженность излучающей области по лучу зрения. Заметим, что в общем случае $K_e(\mathbf{k})$ зависит от угла χ между направлением магнитного поля и лучом зрения.

В случае однородного поля степень поляризации излучения зависит только от показателя γ в спектре (5.41) и, как можно убедиться с помощью (5.30) и (5.42), равна

$$\Pi_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma + {}^7/_3}, \tag{5.46}$$

что составляет 75% при $\gamma = 3$ и 69% при $\gamma = 2$.

В применении к синхротронному излучению космических электронов формулы (5.43) и (5.46), вообще говоря, непри-

годны, так как наблюдаемое излучение собирается из большой области пространства, в различных участках которого магнитное поле ориентировано по-разному. Скорее можно считать, что на луче зрения направления магнитных полей в среднем хаотичны. В этом случае поляризация излучения отсутствует, а интенсивность легко найти, усредняя (5.43) по всем направлениям магнитного поля. Поскольку

$$ {}^1/_2 \int_0^{\pi} (\sin\chi)^{{}^1/_2(\gamma+1)} \sin\chi \, d\chi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma({}^1/_4(\gamma+5))}{\Gamma({}^1/_4(\gamma+7))}, \qquad (5.47) $$

то указанное усреднение приводит к следующему выражению для интенсивности излучения в случае однородного и изотропного распределения электронов с энергетическим спектром (5.44) в хаотическом магнитном поле:

$$ I_\nu \equiv I = a(\gamma) \frac{e^3}{mc^2} \left(\frac{3e}{4\pi m^3 c^5}\right)^{{}^1/_2(\gamma-1)} H^{{}^1/_2(\gamma+1)} L K_e \nu^{-{}^1/_2(\gamma-1)} = $$

$$ = 1{,}35 \cdot 10^{-22} a(\gamma) L K_e H^{{}^1/_2(\gamma+1)} \left(\frac{6.26 \cdot 10^{18}}{\nu}\right)^{{}^1/_2(\gamma-1)} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{с} \cdot \text{Гц}}. \qquad (5.48) $$

Здесь K_e — коэффициент в (5.44), отвечающем единице объема, под $H^{{}^1/_2(\gamma+1)}$ следует понимать среднее значение этой величины в излучающей области и $a(\gamma)$ — коэффициент, зависящий от показателя энергетического спектра γ:

$$ a(\gamma) = \frac{2^{{}^1/_2(\gamma-1)} \sqrt{3}\, \Gamma((3\gamma-1)/12)\, \Gamma((3\gamma+19)/12)\, \Gamma((\gamma+5)/4)}{8\sqrt{\pi}\,(\gamma+1)\,\Gamma((\gamma+7)/4)}. \qquad (5.49) $$

Значения коэффициента $a(\gamma)$ наряду со значениями приводимых ниже других величин сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

γ	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$a\ (\gamma)$	0,283	0,149	0,103	0,083	0,074	0,073	0,087
$a'\ (\gamma)$	0,31	0,22	0,15	0,11	0,074	0,036	0,018
$y_1\ (\gamma)$	0,70	1,29	1,80	2,26	2,70	3,50	4,28
$y_2\ (\gamma)$	0,0005	0,013	0,049	0,106	0,178	0,347	0,534

Как видно из выражений (5.43) и (5.48), степенному энергетическому спектру излучающих частиц с показателем степени γ соответствует степенной частотный спектр излучения

$$ I_\nu \sim \nu^{-\alpha}, \quad \alpha = {}^1/_2(\gamma-1). \qquad (5.50) $$

Ввиду большой роли, которую играет формула (5.50), получим ее также простым приближенным способом. Именно, пренебрежем шириной спектра излучения одного электрона, полагая, что все излучение происходит на частоте $\nu = \nu_m$, отвечающей максимуму в спектре (см. (5.40)). Тогда энергия электрона

выразится через частоту ν, причем $\mathscr{E}^2 = (\nu/0{,}29)\,(4\pi m^3c^5/3eH_\perp)$. Далее полная мощность излучения ультрарелятивистского электрона равна известному выражению (см. (5.24))

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \mathscr{P} = {}^2/_3 c \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 H_\perp^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2.$$

При сделанных предположениях для электронного спектра (5.44) интенсивность излучения, собираемого с пути L, равна

$$I_\nu d\nu = \frac{L}{4\pi}\mathscr{P}K_e\mathscr{E}^{-\gamma}d\mathscr{E} = \\ = a'(\gamma)\frac{e^3}{mc^2}\left(\frac{3e}{4\pi m^3c^5}\right)^{{}^1/_2(\gamma-1)} H^{{}^1/_2(\gamma+1)} LK_e\nu^{-{}^1/_2(\gamma-1)}d\nu, \quad (5.51)$$

где $a'(\gamma) = 0{,}31\,(0{,}24)^{{}^1/_2(\gamma-1)}$ и учтено, что для хаотического поля в среднем $H_\perp^2 = {}^2/_3H^2$. Формула (5.51) отличается от (5.48) лишь заменой множителя $a(\gamma)$ на $a'(\gamma)$, причем для значений $1 < \gamma < 4$ эти множители различаются не более чем в два раза (см. табл. 5.1).

Помимо интенсивности I_ν, часто используется излучательная способность ε_ν, равная энергии, излучаемой в единицу времени из единицы объема в единичном телесном угле. Легко видеть, что для изотропного (в среднем) излучения, собираемого на пути L,

$$\varepsilon_\nu = I_\nu/L. \quad (5.52)$$

Иногда используется также излучательная способность единицы объема для всех направлений излучения. Для изотропного излучения она равна $4\pi\varepsilon_\nu$. В случае синхротронного излучения электронов со степенным спектром фигурирующая здесь интенсивность I_ν определяется выражением (5.48). Для моноэнергетических электронов, очевидно,

$$\varepsilon_\nu = \frac{p(\nu)}{4\pi}N_e, \quad (5.53)$$

где $p(\nu)$ — мощность полного излучения (см. (5.39)) и N_e — концентрация излучающих электронов (см. также (5.37) с $N_e(\mathbf{k}) = N_eL/4\pi$).

Максимальная излучательная способность, т. е. излучение на частоте ν_m (см. (5.40)), равна

$$\varepsilon_{\nu,m} = \frac{p_m}{4\pi}N_e \approx 0{,}13\frac{e^3H_\perp}{mc^2}N_e = 1{,}7\cdot10^{-23}H_\perp N_e\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\cdot\text{с}\cdot\text{ср}\cdot\text{Гц}}. \quad (5.54)$$

Максимальная интенсивность, получаемая от изотропно распределенных моноэнергетических электронов, равна

$$I_{\nu,m} = \int \varepsilon_{\nu,m}\,dR = 1{,}7\cdot10^{-23}H_\perp\int N_e(\mathbf{R})\,dR\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}\cdot\text{Гц}} = \\ = 1{,}7\cdot10^{-26}H_\perp\int N_e(\mathbf{R})\,dR\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{ср}\cdot\text{Гц}}. \quad (5.55)$$

В тех случаях, когда формулы (5.54) или (5.55) используются для оценки концентрации N_e по измеряемым значениям I_ν, по самому смыслу такого расчета получается минимальное значение N_e.

Выше предполагалось, что энергетический спектр электронов является степенным (см. (5.41) и (5.44)) в некотором достаточно широком интервале энергий. Приведем теперь количественную оценку этого интервала. Ошибка, вносимая в результате замены в (5.35) и (5.36) пределов интегрирования соответственно на 0 и ∞, при заданной частоте ν не превышает 10% для каждого из пределов, если выполнены условия

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &\leqslant mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu}{3eHy_1(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu}{y_1(\gamma)\,H}\right]^{1/2} \text{эВ},\\ \mathscr{E}_2 &\geqslant mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu}{3eHy_2(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu}{y_2(\gamma)\,H}\right]^{1/2} \text{эВ}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.56)$$

Значения множителей $y_1(\gamma)$ и $y_2(\gamma)$ для различных γ приведены в табл. 5.1. Как видно, интервал энергий, дающих основной вклад в излучение на данной частоте, существенно зависит от показателя степени γ. При $\gamma \geqslant 1{,}5$ ($\alpha \geqslant 0{,}25$) более 80% излучения на данной частоте дают электроны с энергиями, различающимися не более чем в 10 раз. При $\gamma < 1{,}5$ этот интервал энергий быстро возрастает и при $\gamma \to {}^1/_3$ ($\alpha \to -{}^1/_3$) становится бесконечным. Дело в том, что в области частот ν, меньших частоты ν_m, интенсивность излучения отдельной частицы $p_\nu \equiv p(\nu, \mathscr{E}) \sim (\nu/\nu_c)^{1/3} \sim \nu^{1/3}\mathscr{E}^{-2/3}$ и для спектра (5.41) суммарная интенсивность $I_\nu \sim \int p(\nu, \mathscr{E})\, N(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} \sim \int d\mathscr{E}/\mathscr{E}^{\gamma+2/3}$ не ограничена, если энергетический спектр частиц с показателем $\gamma \leqslant {}^1/_3$ простирается до сколь угодно больших энергий.

Значение $\alpha = -{}^1/_3$ является, очевидно, минимальным для синхротронного излучения в вакууме, поскольку уже спектр излучения отдельной частицы не содержит участков с более быстрым ростом интенсивности с частотой.

При применении теории в астрофизике часто возникает задача оценить интервал энергий электронов ($\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$), дающих излучение со степенным спектром (5.50) в интервале частот ν_1, ν_2. Если этот интервал достаточно велик ($\nu_2/\nu_1 \gtrsim y_1(\gamma)/y_2(\gamma)$), то из приведенных результатов можно сделать вывод, что электроны должны иметь степенной энергетический спектр по крайней мере в интервале энергий $\mathscr{E}_1 < \mathscr{E} < \mathscr{E}_2$, где

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &= mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu_1}{3eHy_1(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu_1}{y_1(\gamma)\,H}\right]^{1/2} \text{эВ},\\ \mathscr{E}_2 &= mc^2\left[\frac{4\pi mc\nu_2}{3eHy_2(\gamma)}\right]^{1/2} \approx 2{,}5\cdot 10^2\left[\frac{\nu_2}{y_2(\gamma)\,H}\right]^{1/2} \text{эВ}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.57)$$

Если же интервал частот мал или мало α (практически $\alpha < 0{,}25$, т. е. $\gamma < 1{,}5$), то можно сделать лишь грубую оценку

энергий электронов, считая, что все излучение электрона с энергией $\mathscr{E}$ происходит на частоте $\nu_m = 0{,}29\,\nu_c$ (с учетом связи $H_\perp = \sqrt{\frac{2}{3}}\,H$). При этом в (5.57) нужно положить $y_1(\gamma) = y_2(\gamma) = 0{,}24$.

Выше мы привели выражения для интенсивности синхротронного излучения в двух обычно рассматриваемых предельных случаях: для однородного и для полностью хаотического полей. Первый из них характеризуется максимальной возможной поляризацией, во втором поляризация отсутствует. Вопрос о применимости того или иного выражения решается в первую очередь на основании измерений поляризации. Однако в тех известных случаях, когда поляризация космического синхротронного излучения наблюдается, она оказывается, как правило, значительно меньшей, чем в случае однородного поля (см. (5.46)). Это прежде всего может означать, что магнитное поле в излучающей области не строго однородно. Расчет степени поляризации в таком «промежуточном» случае для двух моделей магнитного поля см. в [67] (результат приведен также в [58, 59]).

В большинстве случаев радиоастрономические наблюдения сводятся к измерению интенсивности I. Однако все большую и большую роль играют также измерения поляризации, и нам представляется несомненным, что общая тенденция состоит в стремлении измерять все параметры Стокса как для радиоизлучения, так и для излучения в других диапазонах. Тем не менее интенсивность I остается главной характеристикой космического излучения. В случае синхротронного космического радиоизлучения, которое по спектру и некоторым другим признакам (например, очень высокой интенсивности) удается отличить от теплового радиоизлучения, измерения интенсивности служат для оценки концентрации и энергии релятивистских электронов (электронной компоненты космических лучей) вдали от Земли.

Угловые размеры галактических и внегалактических туманностей — дискретных источников нетеплового радиоизлучения, как правило, малы и измеряемой величиной обычно служит не интенсивность I_ν, а спектральная плотность потока излучения Φ_ν (см. (5.33)). Эта величина определяется как поток энергии излучения в единичном интервале частот, падающий по нормали на единичную площадку:

$$\Phi_\nu = \int I_\nu d\Omega, \tag{5.58}$$

где интегрирование ведется по всему телесному углу, отвечающему источнику. Если линейный размер источника L мал по сравнению с расстоянием до него R, а абсолютную величину напряженности магнитного поля и концентрацию релятивистских электронов можно приближенно считать постоянными по

объему источника, то из (5.48) и (5.58) имеем

$$\Phi_\nu = a(\gamma)\frac{e^3}{mc^2}\left(\frac{3e}{4\pi m^3c^5}\right)^{1/2(\gamma-1)}\frac{K_V H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2}\nu^{-1/2(\gamma-1)} =$$

$$= 1{,}35\cdot 10^{-22}a(\gamma)\frac{K_V H^{1/2(\gamma+1)}}{R^2}\left(\frac{6{,}26\cdot 10^{18}}{\nu}\right)^{1/2(\gamma-1)}\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Гц}}, \quad (5.59)$$

где $K_V = K_e V$ — коэффициент в энергетическом спектре электронов, отнесенный к полному объему источника $V = \pi L^3/6$. Здесь предполагается, что энергетический спектр электронов имеет вид

$$N(\mathscr{E})\,d\mathscr{E} = K_V \mathscr{E}^{-\gamma} d\mathscr{E} \quad (5.60)$$

в интервале энергий

$$2{,}5\cdot 10^2\left(\frac{\nu_1}{H y_1(\gamma)}\right)^{1/2} \leqslant \mathscr{E}\,(\text{эВ}) \leqslant 2{,}5\cdot 10^2\left(\frac{\nu_2}{H y_2(\gamma)}\right)^{1/2} \quad (5.61)$$

(ср. (5.57)), где ν_1 и ν_2 — частоты, соответствующие границам рассматриваемого радиодиапазона, в котором спектральный индекс $\alpha = {}^1/_2(\gamma - 1)$ имеет постоянное значение.

Выражая K_V через наблюдаемую на некоторой частоте спектральную плотность потока излучения Φ_ν, получим

$$K_V = K_e V = \frac{7{,}4\cdot 10^{21}R^2}{a(\gamma)\,H}\Phi_\nu\left(\frac{\nu}{6{,}26\cdot 10^{18}H}\right)^{1/2(\gamma-1)}. \quad (5.62)$$

Отсюда можно определить полное число релятивистских электронов в указанном интервале энергий:

$$N_e = \int_{\mathscr{E}_1}^{\mathscr{E}_2} K_V \mathscr{E}^{-\gamma} d\mathscr{E} =$$

$$= \frac{7{,}4\cdot 10^{21}R^2\Phi_\nu}{(\gamma-1)\,a(\gamma)\,H}\left[\frac{y_1(\gamma)\,\nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-1)}\left\{1 - \left(\frac{y_2(\gamma)\,\nu_1}{y_1(\gamma)\,\nu_2}\right)^{1/2(\gamma-1)}\right\}. \quad (5.63)$$

Эта формула имеет, конечно, приближенный характер, так как при переходе от $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ к ν_1, ν_2 использованы неравенства (5.61), определяющие каждый из пределов лишь с точностью до 10%. Поскольку обычно $\nu_1 \ll \nu_2$ и $y_2(\gamma) < y_1(\gamma)$, то при $\gamma > 1$ число электронов определяется практически только нижней границей частотного интервала и равно

$$N_e(>\mathscr{E}_1) = \frac{7{,}4\cdot 10^{21}R^2\Phi_\nu}{(\gamma-1)\,a(\gamma)\,H}\left[\frac{y_1(\gamma)\,\nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-1)}. \quad (5.64)$$

Значения множителей $a(\gamma)$ и $y_1(\gamma)$ приведены в табл. 5.1.

Аналогичным образом можно представить полную энергию электронов в источнике, ответственных за излучение в наблюдаемом интервале частот $\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$, в виде

$$W_e = \int_{\mathscr{E}_1}^{\mathscr{E}_2} K_V \mathscr{E}^{-\gamma+1}\,d\mathscr{E} = A(\gamma,\,\nu)\frac{R^2\Phi_\nu}{H^{1/2}}, \quad (5.65)$$

где

$$A(\gamma, \nu) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2{,}96 \cdot 10^{12}}{(\gamma-2)\, a(\gamma)}\, \nu^{1/2} \left[\dfrac{y_1(\gamma)\, \nu}{\nu_1}\right]^{1/2(\gamma-2)} \left\{1 - \left[\dfrac{y_2(\gamma)\, \nu_1}{y_1(\gamma)\, \nu_2}\right]^{1/2(\gamma-2)}\right\}, & \gamma > 2, \\ 1{,}44 \cdot 10^{13} \nu^{1/2} \ln\left[\dfrac{y_1(\gamma)\, \nu_2}{y_2(\gamma)\, \nu_1}\right], & \gamma = 2, \\ \dfrac{2{,}96 \cdot 10^{12}}{(2-\gamma)\, a(\gamma)}\, \nu^{1/2} \left[\dfrac{y_2(\gamma)\, \nu}{\nu_2}\right]^{1/2(\gamma-2)} \left\{1 - \left[\dfrac{y_2(\gamma)\, \nu_1}{y_1(\gamma)\, \nu_2}\right]^{1/2(2-\gamma)}\right\}, & 1/3 < \gamma < 2. \end{cases} \tag{5.66}$$

При $\gamma < 1{,}5$ ($\alpha < 0{,}25$) приведенной формулой для $A(\gamma, \nu)$ можно фактически пользоваться лишь для грубых оценок, причем мы вправе положить $y_2(\gamma) = y_1(\gamma) = 0{,}24$; это отвечает предположению, что электрон с энергией $\mathscr{E}$ излучает лишь на частоте $\nu = \nu_m = 0{,}29\nu_c$ (см. (5.40а)).

Выражение (5.65) позволяет по известным расстоянию до источника R и потоку излучения Φ_ν на некоторой частоте определить полную энергию релятивистских электронов в источнике, если известна напряженность магнитного поля H. К сожалению, пока нет надежных независимых методов оценки напряженности магнитного поля в источниках (об этом см., однако, ниже), и поэтому при вычислении W_e приходится делать некоторые дополнительные предположения.

В качестве основного такого предположения обычно принимается, что энергия магнитного поля в источнике W_H и энергия релятивистских частиц (космических лучей) $W_{к.л}$ одинаковы по порядку величины или в первом приближении просто равны друг другу. Фактически это предположение соответствует минимальной полной энергии системы поля и частиц при заданной мощности синхротронного излучения *). Кроме того, магнитное поле с плотностью энергии, существенно меньшей плотности энергии релятивистских частиц, не смогло бы удерживать релятивистские частицы в ограниченном объеме источника и в результате их утечки система сама собой пришла бы к состоянию, близкому к состоянию энергетического квазиравновесия между магнитным полем и релятивистскими частицами. Здесь, конечно, предполагается, что система вообще может в интересующих нас условиях находиться в квазистационарном состоянии. Если речь идет, например, о выбросе облака релятивистских частиц при взрыве ядра галактики, то может осуществляться и сугубо неравновесное состояние, при котором энергия

*) Полная энергия частиц и магнитного поля в источнике как функция напряженности поля при заданной мощности излучения, равна $W = W_H + W_{к.л} = C_1 H^2 + C_2 H^{-3/2}$, где C_1 и C_2 — не зависящие от H коэффициенты (см. (5.65) и ниже (5.68)). Определяя минимум этого выражения по H, найдем, что полная энергия минимальна при условии $W_H = {}^3/_4 W_{к.л}$.

космических лучей в облаке в интересующий нас период времени значительно больше энергии магнитного поля. Можно думать, что длительность существенно неравновесной фазы разлета все же относительно невелика. Во всяком случае, имеются основания считать, что в большом числе случаев

$$W_H = \varkappa_H W_{\text{к. л}}, \quad \varkappa_H \sim 1, \tag{5.67}$$

где $\varkappa_H$ — численный коэффициент, $W_H = (H^2/8\pi)V$ — полная энергия магнитного поля, а $W_{\text{к. л}}$ — полная энергия релятивистских частиц (космических лучей и электронов) в радиоизлучающей туманности.

Данные радионаблюдений позволяют судить только о количестве и энергии электронов в источнике; поэтому для определения полной энергии всех релятивистских частиц $W_{\text{к. л}}$ нужно далее установить связь между этой величиной и энергией релятивистских электронов W_e. Каких-либо надежных методов оценки доли W_e в полной энергии $W_{\text{к. л}}$ в настоящее время не существует (см., однако, ниже), и поэтому в качестве второго существенного предположения обычно принимается, что энергия всех космических лучей в источнике просто пропорциональна энергии релятивистских электронов:

$$W_{\text{к. л}} = \varkappa_e W_e, \tag{5.68}$$

где $\varkappa_e$ — численный коэффициент.

В гл. 16 мы еще остановимся на астрофизике космических лучей, или, как чаще говорят, на проблеме происхождения космических лучей. Однако удобно уже здесь указать, что $\varkappa_e \sim 10^2$ для космических лучей в Галактике ($\varkappa_e \sim 10^2$ вблизи Земли и, вероятно, в большей части Галактики, но не обязательно везде). При генерации космических лучей на Солнце $\varkappa_e \gg 1$. К заключению, что $\varkappa_e \gg 1$, приводят и теоретические соображения. Так, при ускорении частиц в релятивистских ударных волнах все частицы приобретают одинаковую скорость, и, следовательно, их энергия пропорциональна массе. В дальнейшем энергия электронов может «подтягиваться» к энергии протонов и ядер. Но, с другой стороны, электроны претерпевают синхротронные и комптоновские потери энергии, практически отсутствующие в случае тяжелых частиц. При статистическом (фермиевском) ускорении энергия электронов в m/M раз меньше энергии частиц с массой M. Наконец, при ускорении в электрическом поле электроны и протоны, вообще говоря, приобретают одинаковый импульс. Однако и в этом случае в результате дополнительных потерь в конечном итоге средняя энергия электронов, вообще говоря, меньше средней энергии тяжелых частиц. Таким образом, в космических условиях соблюдение неравенства

$$\varkappa_e \gg 1 \tag{5.69}$$

представляется нормой, хотя это и не обязательно.

При определенных предположениях о значениях $\varkappa_H$ и $\varkappa_e$ по наблюдаемому потоку радиоизлучения можно непосредственно определить как напряженность магнитного поля, так и полную энергию космических лучей и электронов в источнике, если известны спектр источника, его угловые размеры и расстояние до него. Как следует из (5.65), (5.67) и (5.68)

$$W_H \equiv \frac{H^2}{8\pi} V = \varkappa_H \varkappa_e A(\gamma, \nu) \frac{R^2 \Phi_\nu}{H^{3/2}}, \tag{5.70}$$

откуда

$$H = \left[48 \varkappa_H \varkappa_e A(\gamma, \nu) \frac{\Phi_\nu}{R\varphi^3}\right]^{2/7}, \tag{5.71}$$

где $A(\gamma, \nu)$ определено выражениями (5.66), $V = {}^1/_6 \pi L^3$ — объем, $\varphi = L/R$ — угловой размер источника. Тогда полная энергия космических лучей в источнике равна

$$W_{\text{к. л}} = \varkappa_e W_e = \varkappa_H^{-1} W_H = 0{,}19 \varkappa_H^{-3/7} \left[\varkappa_e A(\gamma, \nu) \Phi_\nu R^2\right]^{4/7} (R\varphi)^{9/7}. \tag{5.72}$$

С помощью приведенных формул в предположении, что $\varkappa_H \sim 1$ и $\varkappa_e \sim 10^2$, и получены оценки $W_{\text{к. л}}$, W_e и W_H в Галактике, галактических источниках нетеплового радиоизлучения (в первую очередь в оболочках сверхновых звезд), в других нормальных галактиках, радиогалактиках и квазарах. Значение всех этих результатов трудно переоценить (см., в частности, [58, 68, 69] и ниже гл. 16—18). Вместе с тем для дальнейшего развития астрофизики космических лучей настоятельно необходимо найти способы независимого определения всех величин $W_{\text{к. л}}$, W_e и W_H или в некоторых случаях хотя бы одной из них без предположений о значениях другой (или, что почти одно и то же, без задания коэффициентов $\varkappa_H$ и $\varkappa_e$). В принципе возможности для этого имеются. Так, энергию протонно-ядерной компоненты космических лучей в удаленных источниках можно определить гамма-астрономическим методом и конкретно по интенсивности гамма-лучей, образующихся при распаде π^0-мезонов, которые в свою очередь генерируются в источнике в результате соударений космических лучей (протонов и ядер) с ядрами межзвездного газа. Можно надеяться на то, что такой метод в близком будущем даст свои плоды и, более того, некоторые результаты здесь уже получены (подробнее см. ниже гл. 18). Одновременное определение W_e и W_H (или H) в принципе также возможно, например, путем комбинирования радио- и рентгеновских измерений. Точнее, речь идет о том случае (вполне возможном), когда радиоизлучение объекта (скажем, радиогалактики) носит синхротронный характер, а ее рентгеновское излучение обусловлено обратным комптоновским рассеянием релятивистских электронов на известном поле оптического, инфракрасного или радиоизлучения. Тогда, если за радио- и рентгеновское излучение ответственны одни и те же релятивистские электроны (другими словами, при соответствую-

щем выборе диапазонов частот), из значения потока рентгеновского излучения (при известных расстоянии до источника, его размерах и плотности энергии рассеивающего электроны излучения, скажем, инфракрасного излучения) определяются характеристики релятивистских электронов в источнике (см. ниже гл. 17). Далее из данных о потоке и спектре синхротронного излучения можно найти также поле H в источнике. Такой метод уже удалось применить [70] в случае ближайшей к нам (расстояние $R \approx 5$ Мпк) радиогалактики Центавр А (Cen A). При этом оказалось, что среднее значение поля $H \approx 7 \cdot 10^{-7}$ Э и если $W_{к.л} \sim W_H$ (т. е. $\varkappa_H \sim 1$), то $\varkappa_e \sim 1$. Нужно вместе с тем отметить, что эти данные относятся к радиоизлучающим облакам радиогалактики, где, вероятно, электроны и ускоряются [70]. Поэтому особого противоречия с данными для Галактики, где у Земли $\varkappa_e \sim 10^2$, здесь нет. Кроме того, оценка для коэффициента $\varkappa_e$ в Cen A изменится, если учитывать возможную сильную неоднородность магнитного поля в радиоизлучающей области. В общем проблема нуждается в дальнейшем анализе на основе более полных измерений. В целом, однако, указанный способ представляется многообещающим.

В заключение сделаем еще несколько замечаний о границах применимости изложенной теории синхротронного излучения, а также о синхро-комптоновском излучении.

Выше предполагалось, что рассматриваются только ультрарелятивистские электроны, причем угол χ между $\mathbf{k}$ (или $\mathbf{v}$, что в данном случае одно и то же) и $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_0$ достаточно велик (условие (5.1)) и применима классическая теория излучения, т. е. считалось выполненным условие *)

$$H \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar} \cdot \frac{mc^2}{\mathscr{E}} = 4{,}4 \cdot 10^{13} \frac{mc^2}{\mathscr{E}}. \tag{4.30}$$

В ряде случаев принималось также, что радиационная сила мала по сравнению с лоренцевой силой, т. е. использовалось условие

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \ll \sqrt{\frac{m^2c^4}{e^3 H \sin^2\chi}} \sim \frac{10^8}{\sqrt{H \sin^2\chi}}. \tag{4.44}$$

Если последнее условие не выполнено, то электрон движется не по окружности, а по достаточно четко выраженной спиралевидной кривой с уменьшающимся радиусом (см., например, [51]). Это сказывается, однако, лишь на расстоянии между последующими импульсами (см. рис. 5.1; то же относится к движению по винтовой линии). Форма же каждого импульса при

*) Условие (4.30) с необходимой в общем случае заменой H на $H_\perp = H \sin\chi$ эквивалентно неравенству $\hbar\omega_m \ll \mathscr{E}$, где $\omega_m \sim (eH_\perp/mc)(\mathscr{E}/mc^2)^2$ — частота, отвечающая максимуму в спектре синхротронного излучения. Отсюда ясно, как отмечалось в гл. 4, что для «хвоста» синхротронного излучения, т. е. в области частот $\omega \gg \omega_m$, условие (4.30) должно быть заменено более жестким.

нарушении условия (4.44), но соблюдении (4.30), не изменяется. Дело в том, очевидно, что электрон излучает в данном направлении лишь в течение времени $\Delta t' \sim mc/eH_\perp$. За это время потери малы при условии

$$\mathscr{R}\Delta t' \sim \frac{e^4 H_\perp^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \frac{mc}{eH_\perp} \ll \mathscr{E},$$

что приводит к неравенству

$$H_\perp = H\sin\chi \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \qquad (4.27a)$$

по сути дела совпадающему с условием (4.27), при получении которого не делалось различия между полями H и $H_\perp$; то же, как уже отмечалось в примечании к стр. 101, можно сказать об условии (4.30). В результате, если соблюдается неравенство (4.30), то заведомо выполнено и неравенство (4.27а), правая часть которого в $1/\alpha = \hbar c/e^2 \approx 137$ раз больше. Таким образом, и при нарушении условия (4.44), но соблюдении (4.30), форма непрерывного синхротронного спектра (т. е. при усреднении по гармоникам) не изменяется.

Выше полностью игнорировалось, кроме того, возможное влияние среды (плазмы), в которой движутся излучающие электроны. В некоторых случаях влияние среды весьма существенно и может полностью изменить картину (см. ниже гл. 6).

При рассмотрении излучения совокупности релятивистских электронов считалось, что они излучают совершенно независимо друг от друга и находятся в заданном магнитном поле **H**. Между тем при *большой* концентрации излучающих частиц они могут, во-первых, изменить внешнее поле (в случае магнитного поля речь идет о диамагнитном эффекте и взаимной индукции; см. раздел 6 в [49а]). Во-вторых, и это обычно более существенно, при достаточно большой концентрации излучающих частиц нужно учитывать реабсорбцию, т. е. в случае синхротронного механизма поглощение излучения самими релятивистскими электронами. Об этом эффекте речь пойдет в гл. 10.

Итак, изложенную синхротронную теорию можно применять лишь при выполнении целого ряда условий, что отнюдь не обесценивает теорию, ибо все эти условия часто соблюдаются. Но необходимость помнить об ограничениях и условиях применимости как в обсуждаемом конкретном случае, так и в физике вообще, является весьма важным обстоятельством. Многие ошибки, встречающиеся в литературе (а, так сказать, неопубликованных ошибок, конечно, было сделано еще несравненно больше!), связаны именно с забвением границ применимости тех или иных используемых формул и выражений. Не менее важно, что в результате отказа от одного или нескольких ограничений нередко можно выявить интересные возможности, найти новые механизмы и эффекты.

К числу условий справедливости синхротронной теории принадлежит предположение о том, что излучение происходит в однородном и постоянном магнитном поле. Это условие мы выше вновь не упоминали, поскольку оно собственно является исходным и может считаться определением — синхротронным излучением мы назвали излучение ультрарелятивистских частиц (зарядов), движущихся в однородном в пространстве и постоянном во времени магнитном поле $\mathbf{H}$. Естественно возникает, однако, вопрос об излучении в поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ или электромагнитном поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Уже из общих соображений очевидно, и это подчеркивалось еще в начале гл. 4, что многие характерные черты излучения релятивистских частиц не связаны с типом внешнего электромагнитного поля, в котором движется частица. Это уже отмечалось, когда речь шла об изгибном излучении, возникающем при движении заряда почти вдоль силовой линии постоянного во времени, но неоднородного магнитного поля (см. начало настоящей главы).

Помимо движения в постоянном поле $\mathbf{H}$ и соответственно (для однородного поля) магнитотормозного излучения, особенно большой интерес представляет излучение заряда, движущегося в поле электромагнитной волны, с некоторой частотой $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Возникающее излучение с частотами ω обычно называют при этом рассеянным излучением, так как в данном случае можно говорить о рассеянии волны с частотой ω_0 на движущейся частице (заряде). При больших энергиях, когда фигурируют частоты ω или ω_0, сравнимые с энергией покоя частицы mc^2, деленной на $\hbar$, обычно говорят о комптоновском или обратном комптоновском рассеянии*). Этот процесс будет рассмотрен ниже в гл. 17. Сейчас же упомянем об интересном частном случае, который в плане астрофизических применений привлек к себе внимание лишь в последние годы и конкретно после открытия пульсаров. Речь идет о движении и излучении (рассеянии) частиц в поле весьма низкочастотной электромагнитной волны, скажем, волны с частотой $\Omega \equiv \omega_0$, излучаемой вращающейся магнитной нейтронной звездой — пульсаром (для известных пульсаров $\Omega \lesssim 200$ с$^{-1}$ и в большинстве случаев $\Omega = 2\pi/T_0 \approx 1 - 10$ с$^{-1}$; см. [30, 31]). Специфику этого случая можно понять, по крайней мере частично, рассматривая движение заряда в переменном магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \Omega t$ (как известно, в определенных условиях индукционное электрическое

*) Комптоновским называют чаще всего рассеяние фотона на покоящейся частице. Обратным же комптоновским рассеянием называют рассеяние мягкого фотона на быстро движущейся частице, т. е. частице, обладающей большой энергией. Совершенно очевидно, что речь в обоих случаях идет по существу об одном и том же процессе рассеяния, но разных «начальных условиях» в данной системе отсчета или о рассмотрении одного и того же процесса рассеяния в разных системах отсчета, движущихся друг относительно друга с произвольной скоростью $v < c$.

поле может быть мало́ по сравнению с магнитным полем). Тогда очевидно, что частица движется практически так же, как в постоянном поле, пока

$$\frac{\omega_H^*}{\Omega} = \frac{eH_0}{mc}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)\frac{1}{\Omega} \gg 1. \tag{5.73}$$

Излучать же частица будет приблизительно так же, как в постоянном поле при условии

$$f = \frac{eH_{0,\perp}}{mc\Omega} \gg 1. \tag{5.74}$$

Достаточно отметить, что при этом условии характерное время излучения в направлении наблюдателя $\Delta t' \sim mc/eH_{0,\perp}$ мало по сравнению с периодом волны $T_0 = 2\pi/\Omega$.

В волновой зоне излучателя (скажем, пульсара) электрическое поле в волне $E = H$, и даже при условиях (5.73) или (5.74), движение и излучение отличны от имеющих место в чисто магнитном поле. Но все равно при условии (5.74) и даже при $f \gtrsim 1$ характер излучения во многом близок к синхротронному, и такое излучение иногда называют «синхро-комптоновским излучением» (см. [71, 72]). Наиболее существенное отличие синхро-комптоновского излучения от синхротронного связано с появлением в первом случае циркулярной поляризации, степень которой, вообще говоря, порядка $1/f$ (степень циркулярной поляризации излучения зависит от характера поляризации низкочастотной волны; точнее см. [71, 72]); вместе с тем для синхротронного излучения циркулярная поляризация, вообще говоря, характеризуется параметром $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ (см. выше; речь идет об излучении совокупности частиц). Синхро-комптоновское излучение, несомненно, заслуживает подробного анализа, но мы здесь ограничимся сделанными замечаниями и ссылками на литературу.

Синхротронное излучение было впервые довольно подробно рассмотрено еще в опубликованной в 1912 г. книге Шотта [73]. Но к этой теории вернулись вновь и, естественно, она была развита далее лишь в конце 40-х и начале 50-х годов в связи с возможностью наблюдать синхротронное излучение, испускаемое в ускорителях (синхротронах и др.) и в космических условиях. Казалось бы трудно сделать здесь еще что-либо новое. Но, как мы видели, такое заключение не вполне верно. Развитие продолжается как в направлении различных приложений, так и в отношении исследования синхротронного излучения в очень сильных полях, в квантовой области [74], а также анализа родственных синхротронному изгибного излучения и синхро-комптоновского излучения. Возникают и будут возникать и другие задачи (упомянем, например, о синхро-переходном излучении при движении заряда в неоднородной плазме, находящейся в магнитном поле [75]) (см. также гл. 8).

Глава 6

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Гамильтоновский метод. Фотоны в среде. Излучение осциллятора в изотропной и анизотропной средах. Черенковское излучение. Эффект Доплера. Ондулятор в среде. Характерные особенности излучения частиц, движущихся в среде. Синхротронное излучение в плазме. Вакуум в сильном электромагнитном поле как двоякопреломляющая среда.

Если излучатель, например заряд, движется не в вакууме, а в среде, то вся картина излучения может радикально измениться. Достаточно сказать, что при заданном движении заряда он может, излучая в вакууме, вообще не излучать в среде и, наоборот, в отсутствие излучения в вакууме излучать в среде (в последнем случае мы в первую очередь имеем в виду излучение равномерно движущегося заряда). Теорию излучения в среде (при учете влияния среды) логичнее всего излагать на базе общей электродинамики сплошных сред или, по другой терминологии, макроскопической электродинамики. Но в плане настоящего курса представляется еще более естественным остановиться на теории излучения в среде сразу же после теории излучения в вакууме. Что же касается основ электродинамики сплошных сред, то они предполагаются известными читателям, хотя основные формулы мы сейчас напомним. Наконец, здесь нас будут интересовать в основном некоторые принципиальные вопросы и физическая сущность дела. Поэтому мы не будем стремиться к максимальной общности и в частности будем обычно пренебрегать пространственной дисперсией, часто считать среду изотропной и прозрачной и т. п. Вопросы же электродинамики сплошных сред в более общем плане будут еще освещены в дальнейшем (см. ниже гл. 11, 13, а также [76]).

Уравнения поля в среде запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Эти уравнения отличаются от (1.1) заменой в первых двух уравнениях электрического поля $\mathbf{E}$ на электрическую индукцию $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Среда считается немагнитной (поэтому магнитная индукция $\mathbf{B} = \mathbf{H}$; при учете пространственной дисперсии так обычно можно поступать и для магнитной среды, см. [76] и гл. 11). Кроме того, как и везде в этой книге, мы рассматриваем лишь покоящуюся среду (в используемой лабораторной системе отсчета скорость среды тождественно равна нулю). Наконец, если в (1.1) плотность тока была записана в виде $\rho\mathbf{v}$, то в (6.1) введена плотность тока $\mathbf{j}$. Из первых двух уравнений (6.1) следует соотношение (закон сохранения заряда)

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{6.2}$$

Система (6.1), как известно, становится достаточно определенной, лишь если выразить $\mathbf{D}$ через $\mathbf{E}$ (или в принципе через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$). В изотропной среде без пространственной и частотной дисперсии

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{6.3}$$

Если среда однородна в пространстве и неизменна во времени, то $\varepsilon = \text{const}$. Пространственная дисперсия для оптических и более низких частот обычно мала и сейчас учитываться не будет. Частотная же дисперсия, вообще говоря, всегда более или менее существенна. Это значит, что для изотропной среды

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t, t')\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')\,dt', \tag{6.4}$$

где интегрирование по t отражает требование принципа причинности; если свойства среды не меняются со временем, то ядро $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t, t') = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t - t')$. Тогда, вводя компоненты Фурье

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\exp(i\omega t)\,dt, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

и аналогично для $\mathbf{D}$, получаем

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \int_{0}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau. \tag{6.6}$$

В однородной среде $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)$. В анизотропной среде (без пространственной дисперсии и в случае независимости свойств среды от времени)

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega)\,E_j(\mathbf{r}, \omega), \tag{6.7}$$

где ε_{ij} — тензор второго ранга и, как всегда, предполагается, что суммирование производится по дважды встречающимся индексам.

При использовании связей (6.6) или (6.7) нужно, естественно, и в (6.1) перейти к представлению Фурье. Но это не всегда удобно, поскольку, например, в используемом ниже гамильтоновском методе явно фигурируют производные по времени. Вместе с тем оказывается, что при применении гамильтоновского метода можно, вообще говоря, сначала совсем не учитывать частотную дисперсию (т. е. зависимость ε_{ij} или ε от ω), а затем в окончательном результате заменить показатель преломления n (в изотропном случае $n = \sqrt{\varepsilon}$) на $n(\omega)$ и тем самым полностью учесть частотную дисперсию. На этом мы еще остановимся ниже в данной главе, но в остальном в уравнениях поля будем полагать $\varepsilon = \text{const}$ (или $\varepsilon_{ij} = \text{const}$), что непосредственно относится лишь к однородной среде без дисперсии. Кроме того, считаем величину ε вещественной и положительной (отсутствие поглощения и полного внутреннего отражения; см. также ниже).

Вводя обычным образом потенциалы

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{6.8}$$

из (6.1) для изотропной среды получаем

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right) &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\rho. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Если использовать связь (калибровку)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{6.10}$$

то

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{6.11}$$

Для калибровки $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ получаем

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \tag{6.12}$$

и

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{tr} + \mathbf{E}_l, \ \operatorname{div}\mathbf{E}_{tr} = 0, \ \mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \ \mathbf{E}_l = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{6.13}$$

Гамильтоновский метод в электродинамике сплошных сред развивается вполне аналогично тому, как это делается для вакуума (см. гл. 1). Именно, будут использоваться выражения

(6.12), (6.13) и разложения (считаем, что $\varepsilon \neq 0$)

$$\left.\begin{gathered}\mathbf{A}=\sum_{\lambda,\ i=1,2} q_{\lambda i}\mathbf{A}_{\lambda i},\quad \mathbf{A}_{\lambda 1}=\sqrt{8\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda\cos(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}),\\ \mathbf{A}_{\lambda 2}=\sqrt{8\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda\sin(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}),\quad \mathbf{e}_\lambda\mathbf{k}_\lambda=0,\ e_\lambda=1,\quad n=\sqrt{\varepsilon}.\\ \int \mathbf{A}_{\lambda i}\mathbf{A}_{\mu j}\,dV=\frac{4\pi c^2}{\varepsilon}\,\delta_{\lambda\mu}\delta_{ij},\end{gathered}\right\} \tag{6.14}$$

или

$$\left.\begin{gathered}\mathbf{A}=\sum_{\lambda}(q_\lambda\mathbf{A}_\lambda+q_\lambda^*\mathbf{A}_\lambda^*),\ \mathbf{A}_\lambda=\sqrt{4\pi}\,\frac{c}{n}\,\mathbf{e}_\lambda\exp(i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}).\\ \mathbf{e}_\lambda\mathbf{k}_\lambda=0,\quad n=\sqrt{\varepsilon},\quad \int \mathbf{A}_\lambda\mathbf{A}_\mu^*\,dV=4\pi\frac{c^2}{\varepsilon}\,\delta_{\lambda u}.\end{gathered}\right\} \tag{6.15}$$

Разумеется, оба разложения эквивалентны; в разных случаях несколько удобнее применять то или иное из них. Некоторые оговорки, сделанные в гл. 1, например, касающиеся наличия двух векторов поляризации $\mathbf{e}_\lambda$, относятся и к разложениям (6.14), (6.15).

Как легко убедиться, энергия поперечного поля

$$\mathscr{H}_{tr}=\int\frac{\varepsilon E_{tr}^2+H^2}{8\pi}\,dV=\tfrac{1}{2}\sum_{\lambda,\ i}(p_{\lambda i}^2+\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2)=\sum_{\lambda}(p_\lambda p_\lambda^*+\omega_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^*), \tag{6.16}$$

где

$$p_{\lambda i}=\dot{q}_{\lambda i},\quad p_\lambda=\dot{q}_\lambda,\quad \omega_\lambda^2=\frac{c^2}{\varepsilon}\,k_\lambda^2\equiv\frac{c^2}{n^2}\,k_\lambda^2. \tag{6.17}$$

Далее, уравнения движения для $q_{\lambda i}$ или q_λ получаются из (6.12) так же, как в случае вакуума, и имеют вид

$$\ddot{q}_{\lambda i}+\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}=\frac{1}{c}\int\mathbf{j}\mathbf{A}_{\lambda i}\,dV, \tag{6.18}$$

$$\ddot{q}_\lambda+\omega_\lambda^2 q_\lambda=\frac{1}{c}\int\mathbf{j}\mathbf{A}_\lambda^*\,dV. \tag{6.19}$$

Наиболее общий случай, рассматриваемый ниже, отвечает частице с зарядом e, электрическим моментом $\mathbf{p}(t)$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}(t)$. При этом, если частицу можно считать точечной, что обычно допустимо при вычислении излучаемой энергии и вообще поля излучения, то

$$\mathbf{j}=\rho_e\mathbf{v}+c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{M}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}=$$

$$=e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_t)+c\,\mathrm{rot}\{\boldsymbol{\mu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_t)\}+\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_t)\}, \tag{6.20}$$

где $\mathbf{r}_i(t)$ — радиус-вектор частицы и $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$. Для заряда (в отсутствие моментов, т. е. полагая в (6.20) $\mathbf{p} = 0$ и $\mu = 0$), получаем из (6.18), (6.19)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i), \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i), \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \sqrt{4\pi}\,\frac{e}{n}\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i). \tag{6.22}$$

По сравнению со случаем вакуума здесь не столь важно появление дополнительного множителя $1/n$ в правых частях, сколько изменение связи ω_λ с k_λ, т. е. появление множителя $\varepsilon^{-1} = n^{-2}$ в соотношении $\omega_\lambda^2 = (c^2/n^2)\,k_\lambda^2$ (см. (6.17)). Смысл такой замены очевиден — электромагнитные волны в среде с вещественной проницаемостью $\varepsilon > 0$ распространяются с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}. \tag{6.23}$$

Этот результат, несомненно, известен читателям, но все же напомним, что он непосредственно ясен из однородных уравнений (6.11) или (6.12), т. е. из уравнений без зарядов и токов. Так, например, (6.22) в этом случае представляет собой уравнение свободных колебаний осциллятора

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = 0,\ \omega_\lambda = \frac{c}{n}\,k_\lambda,\ q_\lambda = c_1 \exp(i\omega_\lambda t) + c_2 \exp(-i\omega_\lambda t); \tag{6.24}$$

отсюда очевидно, что разложение (6.15), в отсутствие зарядов и токов, есть разложение по плоским волнам типа $\exp\left[i\left(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r} \pm \frac{c}{n}\,k_\lambda t\right)\right]$, т. е. волнам, распространяющимся с фазовой скоростью (6.23).

Для свободного поля излучения в среде функция Гамильтона имеет вид (6.16) и квантование проводится так же, как в вакууме (последнее, впрочем, относится и к поперечному полю в среде при наличии токов и зарядов — квантование отвечает замене $p_{\lambda i}$ и $q_{\lambda i}$ операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям (1.45)). В результате при разложении свободного поля в среде по волнам типа $\exp(\pm i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ (см. (6.15)) приходим к понятию о «фотонах в среде», обладающих энергией E_λ и импульсом $\mathbf{p}_\lambda$

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda,\quad \mathbf{p}_\lambda = \hbar\mathbf{k}_\lambda,\quad p_\lambda = \frac{\hbar\omega_\lambda n}{c}. \tag{6.25}$$

В отношении энергии этот вывод очевиден (см. (1.43), (1.49) и (6.16)). В случае импульса нужно было бы найти собственное значение оператора импульса электромагнитного поля, но соответствующее выражение долгое время писали в разных

формах, причем шла дискуссия о том, какая из них правильна (речь идет о тензорах энергии — импульса Минковского и Абрагама). В настоящее время этот вопрос в достаточной мере выяснен и будет освещен в гл. 13. К счастью, его решение (требующее во всяком случае специального рассмотрения) не нужно для решения задач, возникающих обычно в квантовой теории излучения в среде [77]. Дело в том, что при вычислении матричных элементов перехода, определяющих вероятность тех или иных радиационных процессов, оператор векторного потенциала вносит, очевидно, множители типа $q_\lambda \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$; эти множители фигурируют наряду с множителями, отвечающими волновым функциям частицы, т. е. для свободных частиц с множителями $\exp(i\mathbf{pr}/\hbar)$. Отсюда ясно, что в законах сохранения импульса излучение в среде, как и в вакууме, вносит вклад, равный $\hbar\mathbf{k}_\lambda$. В среде, как мы видели, $\hbar k_\lambda = \hbar\omega_\lambda n/c$, что и приводит к (6.25). Таким образом, совершенно независимо от анализа вопроса о виде тензора энергии — импульса в среде ясно, что «фотоны в среде», фигурирующие в общем на тех же основаниях, что и фотоны в вакууме, имеют энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\omega n/c$ (несколько подробнее см. [78]; речь выше шла об изотропной среде, но обобщение на случай анизотропной среды также очевидно — в этом случае $n = n_l$ представляет собой показатель преломления для соответствующей «нормальной» волны; см. ниже)*). Использование квантовых представлений или, точнее, квантового языка оказывается довольно удобным при решении целого ряда вопросов теории излучения в среде. Об этом еще пойдет речь в гл. 7.

Сейчас же используем гамильтоновский метод (т. е. по сути дела разложение по плоским волнам) для решения ряда задач теории излучения в среде.

Начнем с излучения осциллятора в дипольном приближении, рассмотренного в случае вакуума в гл. 1. Полагая в (6.21)

$$\mathbf{r}_l \equiv \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 \sin\omega_0 t, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 \cos\omega_0 t = \mathbf{a}_0\omega_0 \cos\omega_0 t,$$

$$a_0 \ll \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{n\omega_0},$$

где $\lambda = 2\pi c/n\omega_0$ — длина волны испускаемого осциллятором излучения, получаем уравнение (см. (1.80))

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda l} = \sqrt{8\pi}\,\frac{c}{n}(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_0)\cos\omega_0 t. \tag{6.26}$$

*) Здесь речь непосредственно идет о бесконечной среде, подобно тому, как при квантовании поля в вакууме (см. гл. 1) мы имели в виду все пространство. Вместе с тем достаточно очевидно, что аналогичным образом можно поступать и в случае поля в волноводах, в частности заполненных какой-либо прозрачной средой. Роль плоских волн типа (1.19) или (1.53) будут играть при этом собственные функции (моды), отвечающие решению задачи о свободном электромагнитном поле в рассматриваемом волноводе (см., например, [79], где проводится квантование поля в пустом волноводе с прямоугольным сечением и идеально отражающими стенками).

Все дальнейшие вычисления также производятся вполне аналогично случаю вакуума, но число состояний теперь равно

$$\frac{k^2\,dk\,d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{n^3\omega^2\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi c)^3}, \tag{6.27}$$

и в результате *)

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} = \frac{\mathcal{H}_{tr}}{t} \equiv \frac{dW_s}{dt} = \frac{e^2 a_0^2 \omega_0^4 n}{8\pi c^3} \sin^2\theta\, d\Omega. \tag{6.28}$$

Единственное отличие от формулы (1.85) для вакуума состоит здесь в появлении множителя n (в (6.27) стоит по сравнению со случаем вакуума дополнительный множитель n^3, но, как ясно из (6.26), значение q_λ^2 будет содержать дополнительный множитель $1/n^2$). При учете частотной дисперсии нужно положить $n = n(\omega_0)$. Это заключение можно обосновать, во-первых, несколько косвенным образом, а именно, сравнивая результаты, полученные гамильтоновским методом и другими методами. Во-вторых, если $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, то уравнения поля можно записать в прежней форме, скажем, (6.11) или (6.12), но считать ε таким оператором $\hat{\varepsilon}$, что $\hat{\varepsilon}\exp(-i\omega t) = \varepsilon(\omega)\exp(-i\omega t)$. Далее, до интегрирования уравнений (6.18), (6.19), в них фигурирует волновой вектор $\mathbf{k}_\lambda$, и можно считать, что $n = n(k_\lambda)$, $\omega_\lambda = ck_\lambda/n(k_\lambda)$. Только для поля излучения частота $\omega = \omega_\lambda = ck/n$, т. е. ω и k связаны обычным дисперсионным соотношением. К излучению же мы переходим лишь в самом конце, вычисляя энергию $\mathcal{H}_{tr}$ при больших t (см. гл. 1 и (6.28)). Поэтому-то, как можно проследить (см. § 25 в [83] и [80—82]), учет частотной дисперсии должен производиться в окончательных выражениях.

Полезно, однако, и здесь остановиться на этом вопросе, по крайней мере в важнейшем его аспекте. Именно, нужно напомнить, что исходное для недиспергирующей среды выражение для энергии поперечного поля $\mathcal{H}_{tr} = \int \frac{\varepsilon E_{tr}^2 + H^2}{8\pi} dV$ (см. (6.16)) уже непригодно при наличии частичной дисперсии. В этом последнем случае для квазимонохроматического поля с несущей частотой ω средняя по времени энергия равна

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{1}{16\pi}\int \left\{ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^* \right\} dV, \tag{6.29}$$

*) В разложениях (6.14), (6.15), как уже подчеркивалось в гл. 1, суммирование ведется по полусфере направлений $\mathbf{k}_\lambda$. Поэтому при переходе к интегрированию по углам нужно ввести дополнительно множитель $^1/_2$ (если, как обычно в сферической системе координат, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, что отвечает всей сфере направлений; разумеется, это обстоятельство учитывалось уже в гл. 1).

где поле $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}\right)$ и аналогично для $\mathbf{H}$; амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ считаются медленно (за время порядка $2\pi/\omega$) меняющимися функциями, и упомянутое усреднение по времени представляет собой усреднение по высокой (несущей) частоте ω (подробнее см., например, [44], § 61, [76], § 3 и [84], § 22). Далее, в среде с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ для свободного электромагнитного поля вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}$$

в силу уравнений поля (6.1), (6.7) имеем

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\,\mathbf{E}_0\right], \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}\,n^2, \tag{6.30}$$

$$\frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*\right\} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \varepsilon\right\}\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* =$$

$$= \frac{\varepsilon}{16\pi}\left\{\frac{\omega}{\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\omega} + 2\right\}\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*.$$

Таким образом, по сравнению с недиспергирующей средой, когда $d\varepsilon/d\omega = 0$, в выражении для плотности энергии одной волны появляется дополнительный множитель

$$\sum = \left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right) = \frac{1}{2\omega\varepsilon}\,\frac{d(\omega^2\varepsilon)}{d\omega}. \tag{6.31}$$

Если мы хотим теперь использовать разложения типа (6.14), (6.15) и представить энергию (6.29) в виде энергии осциллятора с координатой $q_{\lambda i}$ или q_λ (см. (6.16)), то величины $\mathbf{A}_{\lambda i}$ или $\boldsymbol{A}_\lambda$ нужно нормировать, вводя в знаменатель дополнительный множитель $\Sigma^{1/2}$ (тогда, например, $\int \mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\mu^*\, dV = 4\pi\,\frac{c^2}{\varepsilon\Sigma}\,\delta_{\lambda\mu}$). Дальнейший расчет квантовым методом в рамках теории возмущений проще классического. Дело в том, как мы подчеркивали, что в квантовой электродинамике электромагнитное поле считают обычно свободным, к чему и относится выражение (6.30). Поэтому, как легко проследить, квадрат матричного элемента энергии взаимодействия $\mathscr{H}_1' = -\frac{e}{mc}\,\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$ (см. (1.65)) при учете дисперсии умножается на фактор Σ^{-1}. Но при вычислении вероятности перехода нужно еще учесть влияние дисперсии на число состояний, которое теперь равно

$$\frac{k^2\,dk\,d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{k^2\,\frac{dk}{d\omega}\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{k^2\sqrt{\varepsilon}\;\Sigma\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi)^3\,c} = \frac{n^3\omega^2\Sigma\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi c)^3}, \tag{6.32}$$

поскольку $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\,n$,

Число состояний (6.32) отличается от (6.27) как раз множителем Σ, который сокращается с упомянутым множителем Σ^{-1} в выражении для квадрата матричного элемента. В результате и получается, что вероятность и мощность излучения для спонтанного перехода при учете дисперсии остаются такими же, как для недиспергирующей среды, но с использованием показателя преломления для излучаемой частоты. Аналогично в рамках теории возмущений легко учесть влияние дисперсии и на другие процессы (в отношении рассеяния света см. [76], § 16). При классическом расчете излучаемой мощности проследить, как сокращаются множители, несколько сложнее (см. [83], § 25), но суть дела та же. Например, для осциллятора, грубо говоря, можно считать, что в правой части уравнения (6.26) появляется множитель Σ^{-1}, а в (6.27) — множитель Σ (такое рассуждение недостаточно аккуратно потому, что в классическом расчете и, в частности, при интегрировании уравнения (6.26) к полю излучения переходят лишь в конце).

Тот факт, что учет дисперсии при использовании гамильтоновского метода требует дополнительного анализа, является известной слабостью этого метода.

В известном отношении то же можно сказать и о вычислении не энергии, а самих полей — сделать это гамильтоновским методом иногда сложнее, чем другими способами (см. [81], где учтено также поглощение). Последнее, однако, справедливо, вообще говоря, лишь для изотропной среды, где «другие способы» действительно хорошо известны. Для анизотропной же среды гамильтоновский метод, по крайней мере по своей простоте и общности, вряд ли уступает какому-либо другому, во всяком случае, в применении к точечным источникам. Впрочем, понятие простоты довольно условно и часто определяется лишь привычкой. Вообще, мы вовсе не собираемся противопоставлять различные методы.

Прежде чем перейти к анизотропной среде, остановимся еще на излучении в изотропной среде колеблющегося электрического и магнитного диполя. В первом случае задача совпадает с только что рассмотренной для осциллятора в дипольном приближении, но мы хотим сейчас воспользоваться выражением (6.20). Если считать в нем, что заряд частицы равен нулю и она покоится при $\mathbf{r}_i = 0$, то после подстановки (6.20) в (6.18) получаем уравнение ($\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$)

$$\ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} = \frac{\sqrt{8\pi}}{n} (\mathbf{e}_\lambda \dot{\mathbf{p}}), \tag{6.33}$$

$$\ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} = \frac{\sqrt{8\pi}\, c}{n} \mathbf{e}_\lambda [\boldsymbol{\mu} \mathbf{k}_\lambda]. \tag{6.34}$$

Если положить $\mathbf{p} = e\mathbf{r} = e\mathbf{a}_0 \sin \omega_0 t$, то, как и следовало ожидать, уравнение (6.33) совпадает с (6.26). Уравнение (6.34) при $n = 1$ совпадает с (2.19). Положим $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \sin \omega_0 t$ и вполне аналогично

тому, как делалось для осциллятора, найдем излучаемую мощность *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} &\equiv \frac{dW_s}{dt} = \frac{\mu_0^2\omega_0^4 n^3}{8\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega, \\ \frac{dW}{dt} &= \int \frac{dW_s}{dt}\, d\Omega = \frac{\mu_0^2\omega_0^4 n^3}{3c^3}. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Для вакуума эти выражения получаются сразу из хорошо известных формул для дипольного (электрического и магнитного) излучения (см. §§ 67, 71 в [2], а также (2.23)). Вычисления можно, конечно, обычным способом провести и для изотропной среды.

Результат (6.35) приведен в частности для того, чтобы подчеркнуть появление множителя n^3, тогда как в случае электрического диполя фигурирует множитель n. Влияние этих множителей может быть колоссально. Например, в плазме, находящейся в магнитном поле (последнее обстоятельство приводит к анизотропии, что сейчас неважно), показатель преломления $n_l(\omega)$ для некоторых нормальных волн (индекс l) и частот ω может достигать $n \sim 10^2 - 10^3$, а формально и еще больших значений (подробнее см. [84] и гл. 12). Для пульсара, если рассматривать его магнитодипольное излучение в среде, в связи с отмеченным обстоятельством и появлением фактора n^3 в (6.35), учет влияния среды существенно меняет всю картину (см. [30]; нужно иметь в виду, что обсуждаемое линейное приближение — использование линейной связи (6.4), (6.6) между **D** и **E** вблизи пульсаров, вообще говоря, непригодно, но это особый вопрос). Другой, не менее разительный пример влияния среды — излучение диполя в изотропной плазме, когда $n(\omega) = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$ (N — концентрация электронов в рассматриваемой нерелятивистской плазме). Очевидно, в этом случае $n < 1$ и на частоте осциллятора $\omega_0 \sim \omega_p$ показатель n может быть близок к нулю; в последнем случае мощность излучения (6.28) и (6.35) резко снижается. Более того, в изотропной плазме проницаемость $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ при частоте осциллятора $\omega_0 < \omega_p$ оказывается отрицательной. Это значит, что волны с частотой $\omega_0 < \omega_p$ вообще не могут распространяться — они затухают в пространстве по закону $E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{|\varepsilon|}\, z\right)$ (подробнее см. [84] и гл. 12). Естественно, в таких условиях источник вообще не излучает.

В связи с формулой (6.28) и ее возможным применением нужно сделать еще одно существенное замечание. Из приведен-

*) Очевидно, $\mathbf{e}_{\lambda 1}[\mu\mathbf{k}_\lambda] = -\mu[\mathbf{e}_{\lambda 1}\mathbf{k}_\lambda] = -[\mu\mathbf{e}_{\lambda 2}]\mathbf{k}_\lambda$, где $\mathbf{e}_{\lambda 1,2}$ — векторы поляризации ($\mathbf{e}_{\lambda 1}\mathbf{e}_{\lambda 2} = 0$, $\mathbf{e}_{\lambda 1,2}\mathbf{k}_\lambda = 0$; см. гл. 1).

ного расчета ясно, что электрическое поле в точке, где расположен осциллятор (диполь), считается равным среднему микроскопическому полю $\mathbf{E}$, фигурирующему в уравнениях поля (6.1). Между тем, как хорошо известно (см., например, § 28 в [85]) в месте нахождения точечного диполя поле равно так называемому действующему или эффективному полю $\mathbf{E}_{эфф}$, вообще говоря, отличному от среднего поля $\mathbf{E}$. В изотропной среде $\mathbf{E}_{эфф} = a\mathbf{E}$, где коэффициент a зависит от типа среды и характеризующих ее параметров. Для не слишком плотной плазмы (т. е. для так называемой газовой плазмы, а не плазмы в конденсированных средах) в хорошем приближении $a = 1$, т. е. не нужно делать различия между действующим и средним полями [84]. Однако в достаточно плотной среде и конкретно в обычных жидкостях и твердых диэлектриках, разница между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_{эфф}$ может быть весьма существенна. Для изотропной по своим электрическим свойствам среды (в аморфном теле или кубических кристаллах) или, точнее, для моделей такой среды, оперирующих с точечными диполями $a = (\varepsilon(\omega) + 2)/3$ (отсюда получаются известные формулы Клаузиуса — Масотти и Лоренц — Лорентца) *). В той мере, в какой источник (диполь) можно считать точечным, как ясно из сказанного, в уравнениях (6.26) или (6.33) нужно в правую часть ввести дополнительно множитель a. Следовательно, в формуле (6.28) появится множитель $a^2(\omega)$, т. е. в случае справедливости соотношения Лоренц — Лорентца, множитель

$$a^2(\omega) = \left(\frac{\varepsilon(\omega) + 2}{3}\right)^2. \qquad (6.28а)$$

Именно такое изменение и вводится, например, при рассмотрении коэффициента поглощения света молекулами примесей, находящимися в изотропной конденсированной среде [86]. Для анизотропной среды также, конечно, нужно учитывать отличие действующего поля от среднего и соответственно вводить «поправку» типа (6.28а), отвечающую рассматриваемой среде.

Рассмотрим теперь вопрос об излучении в анизотропной среде, причем для простоты будем считать тензор ε_{ij} вещественным и приведенным к фиксированным главным осям. Тогда ($x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$)

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2, \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3; \qquad (6.36)$$

*) Речь, собственно, идет об одной и той же формуле $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}\alpha N$, где α — поляризуемость диполя (молекулы), а N — концентрация. В статическом случае это соотношение называют формулой Клаузиуса — Масотти, а для высоких частот (в оптике) то же соотношение носит название формулы Лоренц — Лорентца, причем используется также связь $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$, где $n(\omega)$ — показатель преломления на частоте ω.

будет использоваться также обозначение $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — оператор, смысл которого ясен из (6.36) или более общей связи (6.7). Связь (6.7) справедлива и при наличии частотной дисперсии, но ниже рассматривается недиспергирующая среда, однако, как было указано, дисперсия корректно учитывается в окончательном результате.

Для анизотропной среды после введения потенциалов (6.8) уравнения поля принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \operatorname{div}\left(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\hat{\varepsilon}}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \quad (6.37)$$

Из (6.37) очевидно, что ни калибровка типа (6.10), т. е. калибровка $\operatorname{div}\mathbf{A} + (1/c)(\partial\hat{\varepsilon}\varphi/\partial t) = 0$, ни калибровка $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ не вносят никаких упрощений, и поэтому хорошо разработанные методы интегрирования уравнения Д'Аламбера (волнового уравнения) неприменимы. К тому же нужно добавить, что релятивистски ковариантная форма записи (стремление сохранить ее приводит в случае вакуума к особенно широкому использованию лоренцевой калибровки $\partial A^i/\partial x^i = 0$; см. (1.7а)) при наличии среды значительно менее существенна. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев среда считается (и действительно является) покоящейся в лабораторной системе отсчета. Тогда система отсчета, связанная со средой, физически явно выделена и как раз в ней естественно работать.

Мы применим калибровку $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\hat{\varepsilon}\mathbf{A} = 0$ или для случая (6.36) и пренебрежения дисперсией положим

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = 0, \quad \mathbf{C} = \hat{\varepsilon}\mathbf{A}, \quad C_1 = \varepsilon_1 A_1, \quad C_2 = \varepsilon_2 A_2, \quad C_3 = \varepsilon_3 A_3. \quad (6.38)$$

Тогда уравнения (6.37) принимают вид

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi) = -\frac{4\pi}{c}\sum_i e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (6.39)$$

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (6.40)$$

где для определенности рассматриваются точечные заряды $\mathbf{e}_i$ (радиус-вектор заряда $\mathbf{r}_i(t) = \{x_i, y_i, z_i\}$, причем $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$).

Уравнение (6.40) имеет такой же вид, как в электростатике, и его решение записывается следующим образом:

$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{(x-x_i)^2/\varepsilon_1 + (y-y_i)^2/\varepsilon_2 + (z-z_i)^2/\varepsilon_3}}. \quad (6.41)$$

Легко показать также, что энергия поля во всем пространстве (при условии, что само поле должным образом убывает на бесконечности) равна

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{ED} + H^2)\,dV = \mathcal{H}_{tr} + \mathcal{H}_l, \\ \mathcal{H}_{tr} &= \frac{1}{8\pi}\int \left\{\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\right\} dV, \\ \mathcal{H}_l &= \frac{1}{8\pi}\int (\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi)\operatorname{grad}\varphi\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

Здесь

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{8\pi}\int \left(\varepsilon_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) dV = \\ = {}^1/_2 \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\,\sqrt{(x_i-x_j)^2/\varepsilon_1 + (y_i-y_j)^2/\varepsilon_2 + (z_i-z_j)^2/\varepsilon_3}} \tag{6.43}$$

представляет собой сумму энергий мгновенного кулоновского взаимодействия зарядов (собственную энергию зарядов не учитываем). Энергия $\mathcal{H}_{tr}$ есть аналог энергии поперечного поля и может быть записана также в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_{tr} &= -\frac{1}{8\pi c}\int \mathbf{D}_{tr}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,dV + \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\,dV, \\ \mathbf{D}_{tr} &= -\frac{\hat{\varepsilon}}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv -\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D}_{tr} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Произведем теперь разложения в ряды

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\lambda,\, l}\left[q_{\lambda l}(t)\,\mathbf{A}_{\lambda l}(\mathbf{r}) + q^*_{\lambda l}(t)\,\mathbf{A}^*_{\lambda l}(\mathbf{r})\right], \\ \mathbf{C} &= \hat{\varepsilon}\mathbf{A} = \sum_{\lambda,\, l}\left[q_{\lambda l}(t)\,\mathbf{C}_{\lambda l}(\mathbf{r}) + q^*_{\lambda l}(t)\,\mathbf{C}^*_{\lambda l}(\mathbf{r})\right], \\ \mathbf{A}_{\lambda l} &= \sqrt{4\pi}\; c\mathbf{a}_{\lambda l}\exp(i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}), \\ \mathbf{C}_{\lambda l} &= \sqrt{4\pi}\; c\mathbf{b}_{\lambda l}\exp(i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}), \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

где индекс $l = 1, 2$ отвечает двум возможным поляризациям нормальных волн в анизотропной среде без пространственной дисперсии (в условиях (6.36) эта поляризация линейна). В силу первого соотношения (6.38) имеем $(\mathbf{b}_{\lambda l}\mathbf{k}_\lambda) = 0$, и можно положить $(\mathbf{b}_{\lambda 1}\mathbf{b}_{\lambda 2}) = 0$; поэтому из (6.38) и (6.45) получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{k}_\lambda\hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda l} \equiv k_{\lambda 1}\varepsilon_1 a_{\lambda l,1} + k_{\lambda 2}\varepsilon_2 a_{\lambda l,2} + k_{\lambda 3}\varepsilon_3 a_{\lambda l,3} = 0, \\ \hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 1}\hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.46а}$$

Кроме того, наложим на $\mathbf{a}_{\lambda l}$ еще два условия (суммирование по дважды встречающемуся индексу $l = 1, 2$ не производится)

$$\hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{a}_{\lambda l} = 1, \quad \hat{\varepsilon}\mathbf{a}_{\lambda 1}\mathbf{a}_{\lambda 2} = 0. \tag{6.46б}$$

Первое из этих условий есть условие нормировки, второе же отвечает выбору поляризации, соответствующей нормальным волнам; как ясно из (6.46), векторы $\mathbf{k}_\lambda$, $\mathbf{a}_{\lambda l}$ и $\mathbf{b}_{\lambda l}$ компланарны (соответственно при $l = 1$ и при $l = 2$).

Подставим теперь (6.45) в (6.39); тогда после умножения на $\mathbf{A}^*_\mu$, учета соотношений (6.46) и условия нормировки

$$\int \mathbf{A}_{\lambda l}\mathbf{A}^*_{\mu m}\, dV = 4\pi c^2 (\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{a}_{\mu m})\, \delta_{\lambda\mu} \tag{6.47}$$

получаем (несколько подробнее см. [80])

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega^2_{\lambda l} q_{\lambda l} = \sqrt{4\pi} \sum_i e_i (\mathbf{v}_i \mathbf{a}_{\lambda l}) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}_i), \tag{6.48}$$

$$\omega^2_{\lambda l} = \frac{k^2_\lambda c^2}{n^2_{\lambda l}} = [\mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l}]^2 c^2 = \{k^2_\lambda a^2_{\lambda l} - (\mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l})^2\} c^2. \tag{6.49}$$

Таким образом, уравнение для осцилляторов поля (6.48) получается по форме таким же, как в вакууме, и все отличие заключено в выражении (6.49) для частот $\omega_{\lambda l}$ и соотношениях (6.46) для векторов поляризации $\mathbf{a}_{\lambda l}$.

Мы уже упоминали, что речь идет о разложении по нормальным волнам, и приведенные соотношения для $\omega_{\lambda l}$ и $\mathbf{a}_{\lambda l}$ как раз и представляют собой уравнения, определяющие связь ω с $\mathbf{k}$ и поляризацию для нормальных волн. Точнее, в отсутствие зарядов, когда рассматриваются однородные уравнения поля, как очевидно из (6.48), $\omega^2 = \omega^2_{\lambda l}$ и тогда (6.49) есть дисперсионное уравнение (уравнение Френеля), связывающее $\omega_l = kc/n_l$ с $\mathbf{k}$ в нормальных волнах (очевидно, $n_l = ck/\omega_l$ — показатель преломления; подробнее см. [76] и гл. 11).

Легко показать (см. (6.44), (6.45), (6.47) и др.), что в переменных $q_{\lambda l}$

$$\mathscr{H}_{tr} = \sum_{\lambda, l} (p_{\lambda l} p^*_{\lambda l} + \omega^2_{\lambda l} q_{\lambda l} q^*_{\lambda l}), \quad p_{\lambda l} = \dot{q}_{\lambda l}. \tag{6.50}$$

Дальнейшие расчеты при решении задач об излучении зарядов производятся так же, как для вакуума или изотропной среды. Например для осциллятора в дипольном приближении вместо (6.26) получаем

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega^2_{\lambda l} q_{\lambda l} = \sqrt{4\pi}\, e\, (\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{v}_0) \cos \omega_0 t. \tag{6.51}$$

Дальнейший расчет проводится, как и для изотропной среды, но

$$\frac{k^2\, dk\, d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{n^3_l \omega^2\, d\omega\, d\Omega}{(2\pi c)^3}. \tag{6.52}$$

В результате получим

$$\frac{d\mathscr{H}_{tr,\, l}}{dt} \equiv \frac{dW_{s,\, l}}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^4 (\mathbf{a}_l \mathbf{a}_0)^2 n^3_l}{8\pi c^3}\, d\Omega, \quad l = 1,\ 2, \tag{6.53}$$

где, как и везде выше, $n_l = n_l(\omega, \theta, \varphi)$, т. е. зависит не только от частоты, но и от направления — фактически от ориентации волнового вектора $\mathbf{k}$ относительно осей симметрии среды (в случае (6.36) при различных ε_1, ε_2 и ε_3 этими осями являются оси x, y, z). От направления и частоты, не говоря уже о типе волны (индекс $l = 1, 2$), зависят также векторы поляризации $\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_l(\omega, \theta, \varphi)$. В изотропной среде $\mathbf{a}_{\lambda l} = \mathbf{e}_{\lambda l}/\sqrt{\varepsilon} = \mathbf{e}_{\lambda l}/n$ и один из векторов $\mathbf{e}_{\lambda l}$ можно считать ортогональным к $\mathbf{a}_0$, и тогда (6.53) переходит в (6.28). Результат (6.53) очень естественен — осциллятор «накачивает» излучение в каждую из нормальных волн, причем интенсивность накачки пропорциональна $(\mathbf{a}_\lambda \mathbf{a}_0)^2$, т. е. квадрату проекции амплитуды $\mathbf{a}_0$ на вектор поляризации (электрический вектор) в соответствующей волне.

Заметим, что для свободного поля излучения в анизотропной среде энергия поперечного поля (в данном случае она совпадает с полной энергией поперечного поля системы) легко преобразуется от вида (6.50) к каноническому виду (см. переход от (1.54) к (1.58)) и поэтому квантуется стандартным образом. В результате можно ввести понятия о «фотонах в анизотропной среде», для которых

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p}_l = \hbar\mathbf{k}_l, \quad p_l = \frac{\hbar\omega n_l(\omega, \theta, \varphi)}{c}, \tag{6.54}$$

где θ и φ — углы, характеризующие ориентацию вектора $\mathbf{k}_l$ относительно осей симметрии среды (при заданной частоте ω дисперсионное уравнение определяет значения $k_l = (\omega/c) n_l(\omega, \theta, \varphi)$ для нормальных волн, могущих распространяться в среде в данном направлении; при неучете пространственной дисперсии и строго продольных колебаний имеются две такие волны, т. е. $l = 1, 2$). Этот результат обобщает (6.25). О том, как учесть частотную дисперсию, а также возможное отличие среднего поля от действующего, уже упоминалось — наличие анизотропии усложняет соответствующие выражения, но не вносит чего-либо принципиально нового. С другими методами рассмотрения излучения в анизотропной среде можно познакомиться в [87].

Весьма важной и характерной особенностью электродинамики в среде является возможность появления излучения уже для равномерно движущегося заряда. Здесь следует упомянуть два явления: эффект Вавилова — Черенкова (черенковское излучение) и переходное излучение*). Переходное излучение

*) Литература, посвященная черенковскому и переходному излучению, огромна. Так, согласно библиографическому справочнику [88], только переходному излучению, которое изучается сравнительно недавно (см. гл. 8), посвящено около 560 статей. Поэтому ссылки, которые мы можем привести, либо непосредственно относятся к излагаемому материалу, либо преимущественно служат для ориентировки. Имея в виду последнее, укажем здесь на книги и обзоры [4, 5, 8, 44, 56, 57, 89—94], в большинстве из которых имеются многочисленные ссылки на оригинальную литературу (отметим, что цитированные обзоры [89, 92] посвящены черенковскому излучению, а обзоры [93, 94] — переходному излучению).

обсуждается в гл. 8. Сейчас же, а также в гл. 7 остановимся на черенковском излучении, которое возникает в однородной и изотропной среде при условии

$$v > v_\Phi = \frac{c}{n(\omega)}, \tag{6.55}$$

т. е. если скорость частицы $v = \text{const}$ больше фазовой скорости волн в среде $v_\Phi = c/n(\omega)$. При этом волны частоты ω излучаются под углом θ_0 к скорости $\mathbf{v}$, причем (рис. 6.1)

$$\cos\theta_0 = \frac{v_\Phi}{v} = \frac{c}{vn(\omega)}. \tag{6.56}$$

Разумеется, условие (6.55) следует из (6.56), поскольку $\cos\theta_0 \leqslant 1$ (значение $\cos\theta_0 = 1$ отвечает порогу излучения, когда в реальных условиях интенсивность излучения равна нулю [92]). Результат (6.56) носит, так сказать, кинематический характер (условие интерференции; подробнее см., например, [89, 94, 95]) и относится к волнам любого типа. В этом смысле условие (6.56) было давно известно в применении к звуку (конус Маха). Для электромагнитных волн в анизотропной среде, очевидно, под $v_\Phi = c/n(\omega)$ нужно понимать фазовую скорость соответствующей нормальной волны, и тогда $n = n_l(\omega, \theta_0, \theta, \varphi)$, где θ_0 угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$, а углы θ и φ определяют ориентацию вектора $\mathbf{k}$ относительно осей симметрии среды (в случае движущейся среды, изотропной в системе покоя, роль оси симметрии играет скорость среды $\mathbf{u}$). Ниже для простоты ограничимся случаем изотропной среды.

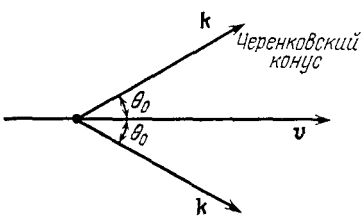


Рис. 6.1. Черенковский конус.

Условие черенковского излучения (6.56) можно получать не только из интерференционных соображений или в результате вычислений поля излучения (при этом, конечно, условие излучения автоматически появляется в формулах)*), но и из зако-

*) Собственно, для получения условия (6.56) нет нужды идти дальше исходного выражения для потенциалов Лиенара — Вихерта (4.13), обобщенных на случай наличия среды путем замены c на $v_\Phi = c/n$ (замену нужно производить, правда, только там, где c играет роль скорости волн, а не коэффициента при плотности тока в правой части, скажем, в уравнениях (1.8) или (6.11)). В результате такой замены получим, например,

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR(1 - (vn/c)\cos\theta')},$$

и ясно, что в волновой зоне, где $\theta' = \theta$, у потенциала появляется особенность как раз при угле $\theta = \theta_0$, причем $\cos\theta_0 = c/nv$. (Не путать угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ с фактически неиспользуемым в расчетах углом θ, который вместе с углом φ определяет ориентацию вектора $\mathbf{k}$ относительно осей симметрии среды!)

нов сохранения энергии и импульса (см. ниже гл. 7) или как условие резонанса [12]. Последнее возникает при решении задачи о черенковском излучении гамильтоновским методом, к чему мы и перейдем. Будем исходить из уравнений в форме (6.21), подставив в них для равномерно движущегося заряда радиус-вектор $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}t$, $\mathbf{v} = \text{const}$. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda 1} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 1} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\cos(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v})\,t, \\ \ddot{q}_{\lambda 2} + \omega_\lambda^2 q_{\lambda 2} &= \sqrt{8\pi}\,\frac{e}{n}(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})\sin(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v})\,t. \end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

Условие резонанса, а следовательно, существования нарастающего со временем решения для энергии $\mathscr{H}_{tr}$ имеет вид

$$\omega_\lambda \equiv \frac{c}{n}k_\lambda = \mathbf{k}_\lambda \mathbf{v} = k_\lambda v\cos\theta_0, \tag{6.58}$$

что совпадает с (6.56).

Решение уравнений (6.57) с начальными условиями $q_{\lambda 1,\,2} = \dot{q}_{\lambda 1,\,2} = 0$ таково *):

$$\left.\begin{aligned} q_{\lambda 1} &= \frac{\sqrt{8\pi}\,e\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})}{n\omega_\lambda^2\left(1-(v^2/c^2)\,n^2\cos^2\theta_\lambda\right)}\left\{\cos\left(\frac{nv\omega_\lambda t}{c}\cos\theta_\lambda\right)-\cos(\omega_\lambda t)\right\}, \\ q_{\lambda 2} &= \frac{\sqrt{8\pi}\,e\,(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v})}{n\omega_\lambda^2\left(1-(v^2/c^2)\,n^2\cos^2\theta_\lambda\right)}\left\{\sin\left(\frac{nv\omega_\lambda t}{c}\cos\theta_\lambda\right)-\frac{nv}{c}\cos\theta_\lambda\sin\omega_\lambda t\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

где θ_λ — угол между $\mathbf{k}_\lambda$ и $\mathbf{v}$.

Подставляя (6.59) в (6.16) и переходя от суммирования к интегрированию (см. (6.27)), получаем

$$\mathscr{H}_{tr} = \frac{8\pi e^2 v^2}{(2\pi c)^3}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{\omega_{\max}}\left\{\frac{n\sin^2\theta\,(1+(v^2/c^2)\,n^2\cos^2\theta)\,[1-\cos(1-(v/c)\,n\cos\theta)\,\omega t]}{(1+(v/c)\,n\cos\theta)^2\,(1-(v/c)\,n\cos\theta)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{n\sin^2\theta\sin(\omega t)\sin((v/c)\,n\cos\theta\,\omega t)}{(1+(v/c)\,n\cos\theta)^2}\right\}\sin\theta\,d\omega. \tag{6.60}$$

Здесь учтено, что $(\mathbf{e}\lambda_1)^2+(\mathbf{e}\lambda_2)^2 = v^2\sin^2\theta_\lambda \equiv v^2\sin^2\theta$, или, что эквивалентно, вектор поляризации $\mathbf{e}_{\lambda 1}$ можно выбрать лежащим в плоскости, определяемой векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}_\lambda$. Очевидно, излучение поляризовано в этой плоскости (т. е. в ней лежит электрический вектор волны). Второй член в (6.60) не дает нарастающих со временем решений, первый же при больших t носит

*) Разумеется, для получения черенковского излучения при больших t характер начальных условий несуществен, а выбранные начальные условия лишь проще других.

характер δ-функции (см. (1.84)). Поэтому в результате интегрирования по θ с применением формулы (1.84) легко получить формулу Тамма — Франка [43] для мощности черенковского излучения (проведено также тривиальное интегрирование по φ)

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \omega \, d\omega = \frac{e^2 v}{c^2} \int \sin^2 \theta_0 \omega \, d\omega \quad (6.61)$$

(интегрирование здесь производится по области $vn(\omega)/c \geqslant 1$).

Если речь идет об излучении на пути L, то в (6.61) нужно, очевидно, заменить v (путь, проходимый в единицу времени) на L.

Дисперсия в (6.61) учтена в результате того, что положено $n = n(\omega)$, об основаниях для такого приема речь была выше. Даже в изотропной среде приведенный расчет весьма прост и в этом смысле может конкурировать с другими способами [43, 44]. В анизотропной же среде гамильтоновский метод (разложение по нормальным волнам) представляется нам самым простым. Нужно иметь в виду, что роль показателя преломления $n(\omega)$ играют в данном случае показатели $n_l(\omega, \theta, \varphi)$ и при интегрировании в выражении типа (6.60) по углам это обстоятельство нужно, конечно, учитывать (в работе [96] оно не было учтено, что и привело к ошибке; правильные выражения для мощности черенковского излучения в кристаллах см. в [89]).

В качестве следующей весьма важной иллюстрации роли среды в теории излучения остановимся на эффекте Доплера при движении источника со скоростью $\mathbf{v}$ в среде с показателем преломления $n(\omega)$. Приведем сразу же результат — обобщение формул (4.5) и (4.11):

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_{00}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{|1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|} = \frac{\omega_0}{|1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|}, \quad (6.62)$$

где ω_{00} — частота в «собственной» системе отсчета излучателя (в этой системе скорость центра тяжести излучателя $v = 0$), ω_0 — частота излучателя в лабораторной системе (скажем, частота внешнего электрического поля в ондуляторе) и, как обычно у нас, θ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$.

К (6.62) приходим, во-первых, по общему правилу перехода от теории излучения в вакууме к теории излучения в среде — путем замены в (4.5) и (4.11):

$$c \to v_\Phi = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (6.63)$$

Разумеется, в анизотропной среде роль $n(\omega)$ играет $n_l(\omega, \theta, \varphi)$. Замена (6.63) все же не может выполняться совершенно автоматически — достаточно сказать, что в случае (4.5) ее нужно производить в знаменателе, но не в числителе; в числителе (6.62) по-прежнему стоит $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Это, разумеется, вполне понятно, так как переход от ω_{00} к ω_0 в (6.62) связан с релятви-

вистским изменением хода времени, значение же знаменателя определяется перемещением излучателя, и его мы вполне последовательно получаем из выражения для поля излучения. Каким бы методом ни работать (см., например, (6.22)) в выражениях для потенциалов (а значит, и для полей) появляются фазовые множители типа $\exp[i(\mathbf{kr} - \mathbf{kr}_i - \omega_0 t)]$; для излучателя в дипольном приближении $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}t$ и, следовательно, появляется частота $\omega = \omega_0 + \mathbf{kv} = \omega_0 + (\omega/c)n(\omega)\cos\theta$, откуда и приходим к (6.62). Другой вывод этой формулы, основанный на использовании законов сохранения, приведем в гл. 7.

Отметим важную особенность формулы (6.62) — наличие в ее знаменателе модуля [97], что существенно при движении со «сверхсветовой» скоростью $v > v_\phi = c/n$ (см. условие (6.55)). То обстоятельство, что в (6.62) при

$$\frac{v}{c} n(\omega)\cos\theta > 1 \tag{6.64}$$

нужно брать знаменатель по модулю, ясно уже из необходимости получить положительное значение для частоты ω. Область углов, удовлетворяющих условию (6.64), называется областью аномального или «сверхсветового» эффекта Доплера. Разумеется, эта область существует лишь при сверхсветовых скоростях (6.55). Если же

$$\frac{v}{c} n(\omega)\cos\theta < 1, \tag{6.65}$$

то мы имеем дело с нормальным (обычным) эффектом Доплера. Области нормального и аномального эффекта Доплера разделены черенковским конусом (рис. 6.2). Фактически эффект Доплера в среде довольно сложен [97], поскольку нужно учитывать дисперсию — зависимость n от ω. Ограничимся здесь замечанием, что при пренебрежении дисперсией, на самом черенковском конусе, когда $(v/c)n\cos\theta = 1$ (см. (6.56)), частота $\omega(\theta = \theta_0)$ обращалась бы в бесконечность. Фактически же при $\omega \to \infty$ показатель преломления $n(\omega) \to 1$ и строго на черенковском конусе вообще нет излучения (считаем, что $v < c$, и черенковское излучение сейчас не рассматриваем). Тенденция же — рост частоты при приближении угла θ к $\theta_0 = \arccos(c/n(\omega)v)$, конечно, сохраняется и при учете дисперсии.

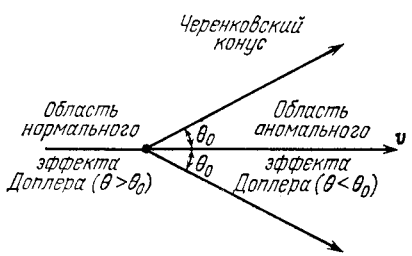


Рис. 6.2. Области нормального и аномального эффектов Доплера.

Роль черенковского конуса при излучении в среде еще полнее выявляется при рассмотрении не только изменений частоты,

но и распределения интенсивности. Сделаем это на примере ондулятора в среде [45, 46, 98], т. е. обобщим сказанное в гл. 4 об ондуляторе на случай, когда заряд движется в прозрачной среде с показателем преломления $n(\omega)$. Движение заряда будем считать таким же, как в вакууме, так как для частиц с достаточно большой энергией потери (речь в первую очередь идет об ионизационных потерях) можно считать малыми (мы уже не говорим о возможности сделать в среде щель или канал (см. гл. 7). Поэтому учет среды связан просто с заменой c на c/n (см. (6.63)) в формуле (4.14). В результате вместо (4.15) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_s}{d\Omega} &= \frac{e^2\omega_0^4 a_0^2 L\left\{(1-(v/c)\,n\cos\theta)^2-(1-(v^2/c^2)\,n^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi\right\}}{8\pi c^3 v\,|\,1-(v/c)\,n\cos\theta\,|^5}, \\ a_0^2 &= \frac{e^2E_0^2}{m^2\omega_0^4}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad \omega(\theta) = \frac{\omega_0}{|\,1-(v/c)\,n(\omega)\cos\theta\,|}. \end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

Отсюда ясно, что мощность излучения максимальна вблизи черенковского конуса (считаем здесь, что $n > 1$ и черенковское условие (6.56) может выполняться в достаточно широкой области частот). Допустим, например, что

$$\left.\begin{aligned} n(\omega) &= n = \text{const}, \quad \omega \leqslant \omega_m, \\ n(\omega) &= 1, \quad \omega > \omega_m. \end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

Вместо условия $n(\omega > \omega_m) = 1$ можно в дальнейшем с таким же успехом предполагать, что при $\omega > \omega_m$ излучение вообще отсутствует в силу сильного поглощения. В случае (6.67) и $v/c \to 1$ в (6.66) можно считать основным второй член, пропорциональный $(1-(v^2/c^2)n^2) \approx (1-n^2)$. Производя далее интегрирование по $d\Omega$, получаем (напомним, что $\sin^2\theta_0 = 1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)\,v^2}$)

$$U(n>1) = \int \frac{dU_s}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{e^2\omega_0^4 a_0^2 L\,(n^2-1)\sin^2\theta_0}{16c^4}\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4 = \\ = \frac{(n^2-1)^2}{16n^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4 E_0^2 L. \tag{6.68}$$

Сравнивая это выражение с (4.16) для вакуума, мы видим сколь велико в обсуждаемых условиях различие между соответствующими выражениями

$$\frac{U(n>1)}{U(n=1)} = \frac{3(n^2-1)^2}{16n^2}\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^4\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^4. \tag{6.69}$$

Кстати, в случае (6.67) энергия черенковского излучения на пути L равна (см. (6.61))

$$U_{\text{чр}} = \frac{dW}{dt}\frac{L}{v} = \frac{e^2(1-c^2/v^2n^2)\,\omega_m^2 L}{2c^2}. \tag{6.70}$$

Здесь, однако, необходимо сделать существенное уточнение и пояснение. В условиях, когда возможно черенковское излучение, ондуляторное излучение заряда нельзя рассматривать отдельно от черенковского. Действительно, колебания заряда при его движении через ондулятор приводят не только к ондуляторному излучению, но и изменяют черенковское излучение. При этом, как показывает расчет, при достаточно малой амплитуде колебаний интенсивность суммарного излучения на черенковском конусе и вблизи от него с хорошей точностью постоянна (не зависит от азимутального угла и т. д.) и равна интенсивности черенковского излучения при отсутствии колебаний, т. е. без ондулятора (см. [45, 98б—д]; к аналогичному выводу можно прийти, рассматривая работу радиационной силы над зарядом, как это сделано ниже, в гл. 7). Другими словами, ондуляторное излучение как бы «черпается» из черенковского. Поэтому непосредственно использовать «ондулятор в среде» для измерения энергии частиц [98а] не представляется возможным. В самом деле, в [98а] автор опирался на формулы типа (6.66)—(6.69), но без учета изменений черенковского излучения. По последней причине казалось, что измерения поляризации позволят отделить ондуляторное излучение от черенковского в непосредственной близости от черенковского конуса. На самом же деле, в силу отмеченного постоянства суммарного излучения, его поляризация практически не будет меняться по азимуту (т. е. для разных образующих конуса). Разумеется, на некотором угловом расстоянии от черенковского конуса присутствует одно только ондуляторное излучение, и только там, по сути дела, применима формула (6.66). В этой области, однако, ондуляторное излучение в среде мало отличается от такого излучения в вакууме (имеем здесь в виду, что множитель $|1-(v/c)n\cos\theta|^5$ в знаменателе формулы (6.66) не слишком мал). Дальнейшее осложнение и вместе с тем «смазывание» картины вносит реалистический учет дисперсии, а не просто использование «ступеньки» (6.67). Тем не менее, как нам представляется, более детальное исследование совместно черенковского и ондуляторного излучения в среде (в общем случае — анизотропной и диспергирующей) представляет интерес и, в частности, в плане возможного в принципе использования анализа частотных, угловых и поляризационных характеристик излучения для изучения движения источника (заряда) в ондуляторе.

Сказанное не означает, что формулы (6.66)—(6.69) вблизи черенковского конуса лишены смысла. Напротив, они вполне разумны, если речь идет не о заряде, а о незаряженном точечном осцилляторе (диполе, колеблющемся с собственной частотой $\omega_{00}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). В этом случае ea_0 нужно заменить на p_0 — амплитуду колебаний диполя в лабораторной системе

отсчета. Таким образом, несмотря на сделанные замечания, выражение (6.66) или более общее, получающееся из (4.14) путем замены (6.63), отражает характерные особенности излучения частиц, движущихся в среде. Если $n > 1$, то, грубо говоря, черенковский угол $\theta_0 = \arccos(c/vn)$ играет роль угла $\theta = 0$, около которого (в интервале углов $\theta \sim mc^2/\mathcal{E}$) концентрируется излучение ультрарелятивистских частиц в вакууме (рис. 6.3).

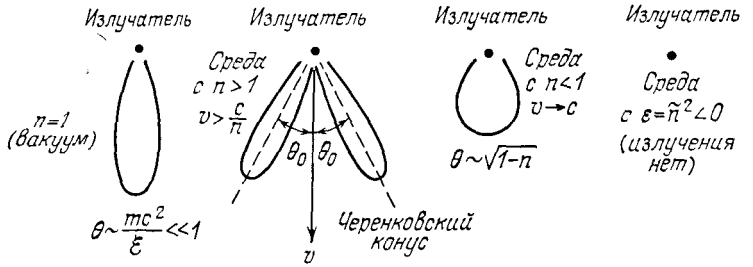


Рис. 6.3. Схематическое изображение полярных диаграмм для излучателей в вакууме и в среде.

Вблизи черенковского конуса и часто́ты излучаемых волн максимальны, и интенсивность максимальна. Нужно лишь помнить о роли дисперсии, в силу которой черенковских конусов много (действительно $\theta_0(\omega) = \arccos(c/vn(\omega))$. Для непрозрачной среды *) излучения нет независимо от характера излучателя и его движения (речь, конечно, идет о частотах, на которых среда непрозрачна).

Наконец, нужно особо остановиться на случае

$$0 < n(\omega) < 1, \tag{6.71}$$

который очень важен, поскольку в изотропной нерелятивистской плазме

$$\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}, \tag{6.72}$$

где пренебрежено поглощением (соударениями) и N — электронная концентрация.

В космических условиях область применимости формулы (6.72) весьма широка (см. [49, 58, 84] и гл. 12), и поэтому влияние среды на излучение чаще всего нужно учитывать, пользуясь именно выражением (6.72), согласно которому в области прозрачности как раз выполняются условия (6.71).

В области (6.71) даже ультрарелятивистская частица может излучать, как нерелятивистская. Формально это ясно из выра-

*) Непрозрачная среда может быть непоглощающей, например, в случае вещественной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = \tilde{n}^2(\omega) < 0$ (через $\tilde{n}$ обозначен комплексный показатель преломления, см. гл. 11, 12).

жений (6.62) и (6.66) для частоты и интенсивности, а по существу является прямым следствием того, что для излучения в среде определяющую роль играет отношение скорости излучателя v к фазовой скорости света $v_\phi = c/n$. Поэтому, если не касаться несколько экзотических источников излучения, движущихся со скоростью $v > c$ (см. ниже гл. 9), при $n < 1$ всегда $v < v_\phi$ и, если разность $v_\phi - v$ достаточно велика, то исчезает вся специфика излучателей, движущихся в вакууме с релятивистскими скоростями. Конкретно, в среде с $n < 1$ максимальная частота (см. (6.62); для простоты считаем, что $n(\omega) = \text{const}$ или во всяком случае, что дисперсия несущественна) равна

$$\omega(0) = \frac{\omega_0}{1 - (v/c)\, n} \approx \frac{\omega_0}{1 - n}, \tag{6.73}$$

где, очевидно, последнее выражение относится к случаю $v \to c$; излучение при этом, если $(1 - n) \ll 1$, сконцентрировано в области углов $\theta \sim \sqrt{1 - n}$ (см. рис. 6.3).

Найдем условия, при которых среда с $n < 1$ не влияет на излучение релятивистских частиц. Для этого достаточно подробнее выписать знаменатель в формуле (6.62) для эффекта Доплера при $v/c \to 1$, $\theta \to 0$

$$1 - \frac{v}{c}\, n \cos\theta = 1 - \frac{v}{c}\cos\theta + (1 - n)\,\frac{v}{c}\cos\theta \approx$$

$$\approx 1 - \frac{v}{c} + (1 - n) \approx {}^1/_2 \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 - (n - 1).$$

Отсюда ясно, что роль среды несущественна, если

$$2\{1 - n(\omega)\}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \ll 1. \tag{6.74}$$

В случае синхротронного излучения в среде, как легко проследить [49, 58, 60], например, формула (5.39) заменяется такой:

$$\left.\begin{aligned} p(\nu) &= \sqrt{3}\,\frac{e^3 H \sin\chi}{mc^2}\left[1 - (1 - n^2)\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-1/2} \frac{\nu}{\nu_{c,\,n}} \int\limits_{\nu/\nu_{c,\,n}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta, \\ \nu_{c,\,n} &= \nu_c\left[1 + (1 - n^2)\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}, \quad \nu_c = \frac{3eH\sin\chi}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.75}$$

Все используемое здесь приближение (оно ясно из изложенного в гл. 5) пригодно лишь при $(1 - n) \ll 1$, когда можно положить $1 - n^2 = 2(1 - n)$. Очевидно, поэтому условие малости влияния среды, следующее из (6.75), в точности совпадает с (6.74). Применим это последнее условие к плазме, когда

$$1 - n^2 = 2(1 - n) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \tag{6.76}$$

Тогда роль среды (плазмы) несущественна при условии

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 \gg \omega_p^2 \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \frac{16\pi^2 ecN}{3H_\perp}\,\nu_c \qquad (6.77)$$

или для основной части синхротронного излучения (частоты $\nu \sim \nu_c$) при условии

$$\nu \sim \nu_c \gg \frac{4ecN}{3H_\perp} \approx 20\,\frac{N}{H_\perp}. \qquad (6.78)$$

В межзвездной среде, где $N \approx 1$ и $H_\perp \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ Э условие (6.78) хорошо выполняется в большей части диапазона, используемого в радиоастрономии. В более плотных объектах (некоторые галактики, оболочки сверхновых звезд и др.) условие (6.78) является более жестким. На достаточно длинных волнах с возможностью его нарушения всегда нужно считаться, если только еще бóльшую роль не играют другие факторы, например реабсорбция (см. ниже гл. 10).

Анализ влияния среды на излучение релятивистских частиц и, в частности, на синхротронное излучение является весьма многогранной задачей и, естественно, продолжается (см., например, [99], а также упоминаемые ниже ссылки [103]).

В заключение кратко остановимся на поведении вакуума в сильном электромагнитном поле. Связь этой проблемы с электродинамикой сплошных сред определяется тем, что в присутствии достаточно сильного электромагнитного поля вакуум ведет себя в определенных условиях подобно двоякопреломляющей, т. е. анизотропной, среде. Например, слабая электромагнитная волна, распространяющаяся поперек постоянного и однородного магнитного поля, имеет разные показатели преломления в зависимости от того, поляризована ли волна по полю или перпендикулярно ему. Очевидно, подобный эффект обусловлен тем, что уравнения электромагнитного поля уже в вакууме (т. е. при отсутствии какой-либо среды) фактически становятся нелинейными. Так оно и есть, причем это обстоятельство известно уже более 40 лет [100]. Однако лишь в последние годы вопрос о нелинейности вакуума стал актуален в том смысле, что выяснилась реальная возможность наблюдать соответствующие эффекты в космических условиях (пульсары), а также в лабораторных условиях в особенности для ультрарелятивистских частиц.

Сила магнитного поля в плане учета нелинейности определяется в первую очередь его отношением к характерному полю

$$B_c = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 4{,}4 \cdot 10^{13}\ \text{Гс} \qquad (6.79)$$

или в случае электрического поля к полю $E_c = B_c$ (напомним, что в настоящей книге используется исключительно гауссова си-

стема единиц, в которой все поля **E**, **B**, **D** и **H** обладают одинаковой размерностью, как ясно, в частности, из уравнений поля (6.1); в этой связи совпадение значений E_c и B_c не должно вызывать удивления).

Магнитное поле мы здесь описываем его индукцией **B**, поскольку вакуум обладает и магнитными свойствами, в силу чего напряженность магнитного поля **H** отлична от **B**. В то же время именно **B**, а не **H**, является основной величиной, характеризующей магнитное поле в вакууме.

Поле может считаться слабым, если

$$B \ll B_c, \quad E \ll E_c. \tag{6.80}$$

Для сильного поля величина B (или E) сравнима либо превосходит B_c (или E_c).

Ниже будем считать поле слабым, но все же не очень слабым, так что поправки порядка $(B/B_c)^2$ и $(E/E_c)^2$ нужно учитывать. Точнее, даже малые члены такого порядка существенны тогда, когда определяют рассматриваемые эффекты (например, двоякопреломление) и в этом смысле не являются собственно поправками. Для слабого статического электромагнитного поля рассматривать нелинейные эффекты проще всего, по-видимому, используя функцию Лагранжа для электромагнитного поля с учетом членов порядка E^4 и B^4 или, другими словами, с учетом поправок (по сравнению с линейным случаем) порядка $(B/B_c)^2$ и $(E/E_c)^2$. Соответствующая функция Лагранжа или, точнее, ее плотность имеет вид (см. [9], § 129)

$$\left.\begin{aligned} &L = L_0 + L', \quad L_0 = \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2), \\ &L' = \frac{1}{2}\varkappa\{(E^2 - B^2)^2 + 7(\mathbf{EB})^2\}, \\ &\varkappa = \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha}{45B_c^2} \approx \frac{1{,}3\cdot 10^{-4}}{B_c^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \end{aligned}\right\} \tag{6.81}$$

Лагранжиан L_0 отвечает линейной электродинамике вакуума, а нелинейность учитывается членом L'; при этом предполагается, что соблюдается условие (6.80). Поскольку отношение $L'/L_0 \sim 10^{-4}(B/B_c)^2$ и аналогично при наличии поля E, малость нелинейности вакуума в обычных условиях очевидна. Например, в лабораторных условиях $B \lesssim 10^6$ Гс и, следовательно, $L'/L_0 \lesssim 10^{-19}$. В атоме водорода на расстоянии боровского радиуса $a_0 = \hbar^2/me \approx 5\cdot 10^{-9}$ см от протона электрическое поле $E = e/a_0^2 \approx 2\cdot 10^7 \approx 6\cdot 10^9$ В/см и $L'/L_0 \sim 10^{-4}(E/E_c)^2 \sim$ $\sim 10^{-17}$. Но для пульсаров поле может достигать значения 10^{13} Гс, когда $L'/L_0 \sim 10^{-5}$. Вблизи поверхности ядра урана $E \sim eZ/r^2 \sim 5\cdot 10^{16}$ ($Z = 92$, $r \sim 10^{-12}$ см) и поле является уже сильным.

Поляризация и намагничение вакуума имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}&=\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}=\varkappa\{2(E^2-B^2)\mathbf{E}+7(\mathbf{EB})\mathbf{B}\},\\ \mathfrak{M}&=\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{B}}=\varkappa\{-2(E^2-B^2)\mathbf{B}+7(\mathbf{EB})\mathbf{E}\}.\end{aligned}\right\}\tag{6.82}$$

Поскольку $\mathbf{P}$ и $\mathfrak{M}$ зависят от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ нелинейным образом, можно вводить разные тензоры проницаемости. Ограничимся здесь частным случаем, когда

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1,\quad \mathbf{E}=\mathbf{E}_1,\quad B_1\ll B_0,\quad E_1\ll B_0,\tag{6.83}$$

т. е. имеется слабое (в смысле соблюдения условия (6.80)) магнитное поле $\mathbf{B}_0$, на которое наложено очень слабое электромагнитное поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$; термин «очень слабое поле» понимается здесь в том смысле, что это поле можно рассматривать в линейном приближении. Конкретно речь может идти, например, о распространении некоторой достаточно мало интенсивной электромагнитной волны (поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$) в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{P}=\mathbf{P}_1=\varkappa\{-2B_0^2\mathbf{E}_1+7(\mathbf{E}_1\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0\},\\ &\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0+\mathfrak{M}_1,\quad \mathfrak{M}_0=2\varkappa B_0^2\mathbf{B}_0,\quad \mathfrak{M}_1=2\varkappa\{B_0^2\mathbf{B}_1+2(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1)\mathbf{B}_0\}\end{aligned}\right\}\tag{6.84}$$

и удобно ввести тензоры проницаемости для очень слабого поля

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}+\delta\varepsilon_{ij},\quad \mu_{ij}=\delta_{ij}+\delta\mu_{ij},\\ &P_{1,\,i}=\frac{\delta\varepsilon_{ij}}{4\pi}E_{1,\,j},\quad \mathfrak{M}_{1,\,i}=\frac{\delta\mu_{ij}}{4\pi}B_{1,\,j}.\end{aligned}\right\}\tag{6.85}$$

Здесь нужно заметить, что, согласно обычному определению,

$$\mathfrak{M}_{1,\,i}=\frac{\delta\mu_{ij}}{4\pi}H_{1,\,j},\quad \mathbf{H}_1=\mathbf{B}_1-4\pi\mathfrak{M}_1.$$

Однако нас интересует лишь случай, когда

$$|\delta\varepsilon_{ij}|\ll 1,\quad |\delta\mu_{ij}|\ll 1.\tag{6.86}$$

В таких условиях в (6.85) действительно можно написать $\mathbf{B}$ вместо $\mathbf{H}_1$. Считая для удобства, что поле $\mathbf{B}_0$ направлено по оси z, согласно (6.84) и (6.85) имеем

$$\left.\begin{aligned}&\delta\varepsilon_{xx}=\delta\varepsilon_{yy}\equiv\delta\varepsilon=-8\pi\varkappa B_0^2=-\frac{2\alpha}{45\pi}\frac{B_0^2}{B_c^2},\quad \varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}\equiv\varepsilon=1+\delta\varepsilon,\\ &\delta\varepsilon_{zz}\equiv\delta\tilde{\varepsilon}=20\pi\varkappa B_0^2=\frac{5\alpha}{45\pi}\frac{B_0^2}{B_c^2},\quad \varepsilon_{zz}\equiv\tilde{\varepsilon}=1+\delta\tilde{\varepsilon},\\ &\delta\mu_{xx}=\delta\mu_{yy}\equiv\delta\mu=8\pi\varkappa B_0^2=-\delta\varepsilon,\ \mu_{xx}=\mu_{yy}\equiv\mu=1+\delta\mu,\\ &\delta\mu_{zz}\equiv\delta\tilde{\mu}=24\pi\varkappa B_0^2=\frac{6\alpha}{45\pi}\frac{B_0^2}{B_c^2},\quad \mu_{zz}\equiv\tilde{\mu}=1+\delta\tilde{\mu}\end{aligned}\right\}\tag{6.87}$$

(все компоненты $\delta\varepsilon_{ij}$ и $\delta\mu_{ij}$, кроме выписанных, равны нулю).

Таким образом, можно считать, что очень слабое поле (поле волны) $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ действует (распространяется) в «среде» (вакууме) с проницаемостями (6.87). Эта «среда» анизотропна, что обусловлено наличием выделенного направления — направления поля $\mathbf{B}_0$, и является одновременно и диэлектрической ($\delta\varepsilon_{ij} \neq 0$) и магнитной ($\delta\mu_{ij} \neq 0$). В случае распространения плоской волны

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1,0} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1,0} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{6.88а}$$

очевидно, поле волны подчиняется обычным уравнениям Максвелла (уравнениям линейной электродинамики в среде)

$$\varepsilon_{ij} E_{ij} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{H}_1]_i, \quad B_{1,i} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}_1]_i, \quad B_{1,i} = \mu_{ij} H_{1,j} \tag{6.88б}$$

(i и j — векторные индексы; разумеется, уравнения (6.88б) справедливы и для амплитуд $\mathbf{E}_{1,0}$ и $\mathbf{B}_{1,0}$).

Подставляя в (6.88б) тензоры (6.85), (6.87), получаем дисперсионное уравнение, связывающее ω с $\mathbf{k}$. Из этого уравнения находим показатель преломления $n(\theta) = ck/\omega$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (имеем здесь в виду конкретный случай, которому отвечают тензоры (6.87)). Нормальные волны поляризованы (речь идет о направлении векторов $\mathbf{E}_{1,0}$) соответственно перпендикулярно $\mathbf{B}_0$ и в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{B}_0$, причем направление $\mathbf{B}_0$ (ось z) является оптической осью. Для этого направления показатель преломления, как легко убедиться, равен (см. также (6.86))

$$n(\theta = 0) = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx 1 + \frac{1}{2}(\delta\varepsilon + \delta\mu) = 1. \tag{6.89}$$

Для волн (6.88а), распространяющихся поперек поля $\mathbf{B}_0$,

$$\left.\begin{aligned} n_{\parallel}(\theta = \pi/2) &= \sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu} \approx 1 + \frac{\delta\tilde{\varepsilon} + \delta\mu}{2} = 1 + \frac{7\alpha}{90\pi}\frac{B_0^2}{B_c^2}, \\ n_{\perp}(\theta = \pi/2) &= \sqrt{\varepsilon\tilde{\mu}} \approx 1 + \frac{\delta\varepsilon + \delta\tilde{\mu}}{2} = 1 + \frac{4\alpha}{90\pi}\frac{B_0^2}{B_c^2}, \end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

где знак $\parallel$ отвечает волне, поляризованной по $\mathbf{B}_0$, а знак $\perp$ — волне, поляризованной в перпендикулярном направлении *).

Выше в качестве условия применимости исходной функции Лагранжа (6.81) упоминалось лишь неравенство (6.80) — условие слабости поля. Но этого неравенства достаточно лишь, если имеется в виду статическое поле. Для поля общего типа

*) В одноосных немагнитных кристаллах нормальные волны называют обыкновенной и необыкновенной, причем первая из них характеризуется независимостью n от θ. В средах с двойной (электрической и магнитной) анизотропией показатели преломления обеих нормальных волн зависят от θ (см., например, [101]). Поэтому термин «обыкновенная волна» становится необоснованным и — если им все же пользоваться — весьма условным.

функцией (6.81), и разумеется, полученными с ее помощью выражениями можно пользоваться только при некоторых дополнительных условиях. Отсылая за подробностями к [37, 102] и цитированной там литературе, ограничимся обсуждением двух частных случаев (условия (6.80) считаются при этом выполненными).

Допустим, что имеется квазиоднородное поле, но не постоянное, а переменное — с частотой Ω. Тогда выражение (6.81) справедливо лишь при соблюдении условия

$$\hbar\Omega \ll mc^2 \frac{E}{E_c} = \frac{\hbar}{mc} eE \tag{6.91}$$

(поле здесь для простоты считается чисто электрическим, но для магнитного случая критерий остается тем же). Условие (6.91) фактически не содержит $\hbar$ и является, таким образом, классическим. Его можно переписать в виде $eE\lambda \gg mc^2$, $\lambda = 2\pi c/\Omega$, т. е. работа поля на длине волны должна быть велика по сравнению с энергией покоя электрона. С другой стороны, тот же критерий в форме (6.91) означает, что работа поля на комптоновской длине $\hbar/mc$ велика по сравнению с энергией квантов рассматриваемого поля $\hbar\Omega$. Понятно, что в таких условиях квантовая структура (атомизм) поля и вакуума несущественны, несмотря на чисто квантовый характер самого нелинейного эффекта. Может, правда, вызвать удивление тот факт, что условие (6.91) соблюдается все хуже при уменьшении поля E (или B). Однако при таком уменьшении и весь нелинейный эффект тоже уменьшается и при $E, B \to 0$ полностью исчезает. Если неравенство (6.91) нарушается, то часть лагранжиана L' (см. (6.81)) нуждается в обобщении (например, в чисто электрическом поле в L' к члену E^4 добавляется член порядка $\frac{\hbar^2 E_c^2}{m^2c^4}\left(\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - 2E\frac{d^2E}{dt^2}\right)$; см. [102г], требование малости этой добавки и приводит к (6.91)).

Совсем иное (помимо, конечно, (6.80)) условие применимости выражения (6.81) получается, если в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ распространяется очень слабая волна (6.88а) с частотой ω. В этом важном случае приведенные выше выражения, в частности для показателей преломления (см. (6.90)), справедливы лишь при условии

$$\hbar\omega \ll mc^2 \frac{B_c}{B_0} |\sin\theta| = \frac{m^2c^4 |\sin\theta|}{(\hbar/mc)\, eB_0}, \tag{6.92}$$

где, напомним, θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$.

Неравенство (6.92) носит квантовый характер (квантовая постоянная $\hbar$ не выпадает) и является частным случаем более общего требования, возникающего при движении в поле $\mathbf{B}_0$ ча-

стиц с неравной нулю массой покоя (см. [37]). Если $\frac{B_c}{B_0}|\sin\theta| \sim 1$, то неравенство (6.92) имеет очевидный смысл — волна не только не может порождать реальные пары электрон — позитрон, но даже далека по частоте от соответствующей границы $\hbar\omega = 2mc^2$. Появление множителя $\frac{B_c}{B_0}|\sin\theta|$ связано с применением только что упомянутого условия и в некоторых других системах отсчета, на чем останавливаться не будем (см. [37]).

Вообще необходимо лишний раз подчеркнуть, что проблема нелинейности вакуума, особенно при наличии среды, составляет в настоящее время целую область исследований, и, по сути дела, мы о ней лишь упоминаем. Тем не менее нельзя не остановиться на физической природе нелинейности вакуума. В квантовой теории (или, правильнее сказать, принимая во внимание квантовые эффекты) вакуум не является пустотой или с точки зрения общей теории относительности некоторым состоянием гравитационного поля, а представляет собой основное (нижнее) энергетическое состояние для всех полей. В таком состоянии энергия задана (и обычно считается равной нулю), но имеются нулевые колебания полей или, на корпускулярном языке, все время рождаются и исчезают виртуальные фотоны, виртуальные пары электрон — позитрон и т. д. Во внешнем и конкретно в электромагнитном поле виртуальные пары приобретают энергию или, во всяком случае, движутся иначе, чем в отсутствие поля. В результате, как и в среде (скажем, в плазме), появляется поляризация — в рассмотренных выше условиях поляризация вакуума (6.82).

Несмотря на то, что от такой чисто качественной и в значительной мере лишь словесной картины до количественных формул еще крайне далеко, она очень важна и полезна для понимания сути дела. Последнее можно продемонстрировать, если нужно ответить на такой вопрос: почему вакуум в магнитном поле становится двоякопреломляющим (анизотропным), но не магнитоактивным? Известно ведь, что плазма, а до какой то степени и любая среда, в магнитном поле является именно магнитоактивной (см. гл. 12). Ответ ясен, если учесть, что плазма, состоящая из равного числа электронов и позитронов, тоже не будет магнитоактивной — магнитное поле закручивает электроны и позитроны в разные стороны, и легко видеть, что магнитная активность (гиротропия) не возникает. В случае вакуума, очевидно, ситуация точно такая же, хотя речь и идет о виртуальных парах электрон — позитрон. Важно лишь, что концентрации электронов и позитронов при этом строго одинаковы. Отсюда ясно также, что одновременный учет нелинейности вакуума и влияния плазмы приводит уже к качественному изменению картины, характерной для вакуума без плазмы или

плазмы без учета нелинейности вакуума. Анализу поведения плазмы в достаточно сильном магнитном поле с учетом нелинейности вакуума было посвящено в последнее время большое число работ, но здесь мы должны ограничиться лишь некоторыми ссылками (см. [103]). Разумеется, в связи с астрономическими приложениями (пульсары) нужно, вообще говоря, учитывать одновременно и влияние плазмы, и нелинейность вакуума.

Нелинейные эффекты в вакууме представляется возможным изучать — хотя и с большим трудом — и в лабораторных условиях как с использованием частиц с высокой энергией (см. [37], а также гл. 4), так и с помощью оптического интерферометра [104].

Поскольку вакуум ведет себя в нелинейном приближении подобно некоторой среде, ясно, что в достаточно сильном внешнем поле равномерно движущийся заряд может излучать уже в вакууме — могут испускаться как черенковское [37, 94, 103а, 105], так и переходное излучения [94, 105]. Разумеется, во внешнем поле заряженная частица не движется равномерно и, следовательно, черенковское и переходное излучения будут происходить не в чистом виде, а сопровождаться, например, синхротронным излучением. Если же иметь в виду формулы, то черенковское и переходное излучения для частицы с массой M отделяются от излучения всех других типов при $M \to \infty$ (это, очевидно, отвечает как раз постоянству скорости). Далее, в однородном поле при $M \to \infty$ остается только черенковское излучение.

С развитием физики и астрономии с нелинейностью вакуума постепенно приходится считаться все чаще и чаще. Трудно сомневаться в том, что в обозримом будущем эта тенденция сохранится.

В заключение во избежание недоразумений подчеркнем, что нелинейные процессы в среде происходят уже в несравненно более слабых полях, чем в вакууме. Поэтому, например, нелинейные явления при распространении радиоволн в ионосфере давно изучаются с помощью достаточно мощных радиопередатчиков [84, 106а]. Большое внимание уделяется и другим нелинейным эффектам в плазме [106а, б]. Очень широко исследуются после появления лазеров различные оптические нелинейные эффекты в конденсированной среде (см., например, [107]). В настоящей книге мы нелинейной электродинамики сред не касаемся как за отсутствием места, так и по той причине, что эта проблема достаточно широко освещается в различных курсах и в литературе. Что же касается нелинейной электродинамики вакуума, то она еще не может считаться полностью вошедшей в обиход.

Глава 7

ЭФФЕКТЫ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА И ДОПЛЕРА

Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Доплера с квантовой точки зрения. Реакция излучения в среде. Черенковское излучение и поглощение волн в изотропной и магнитоактивной плазме. Черенковское излучение диполей. Излучение в каналах и щелях. Применение теоремы взаимности.

При анализе различных вопросов, связанных с излучением, поглощением и усилением электромагнитных волн при движении зарядов или различных «систем» (атомы, сгустки, антенны) в среде, весьма плодотворными оказываются элементарные квантовые представления (в настоящей главе мы следуем статье [92]). Существенно, что это справедливо и в условиях, когда задача является по существу классической и, следовательно, в рамках рассматриваемого приближения окончательные формулы не зависят от квантовой постоянной $\hbar$.

Исходным при использовании квантовых представлений служит понятие о квантах, или фотонах в среде, энергия которых равна $\hbar\omega$, а импульс

$$\hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega n_l(\omega, s)}{c}\,\mathbf{s},$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ — волновой вектор и $n_l(\omega, \mathbf{s})$ — показатель преломления для нормальной волны данного типа l, распространяющейся в рассматриваемой среде (в общем случае — анизотропной и гиротропной). Общая схема квантования электромагнитного поля в среде была очерчена в гл. 6 (подробнее см. [77, 78]). Разумеется, такой подход корректен лишь в области применимости феноменологической теории. Нужно также иметь в виду, что вводимый импульс фотона в среде есть полный его импульс, включающий как импульс поля, так и импульс, сообщаемый среде при излучении волны (см. несколько ниже; подробнее и точнее см. гл. 13).

С квантовой точки зрения кинематика излучения, т. е. условия, налагаемые на частоты и направление излучения, определяется законами сохранения энергии и импульса (то же относится к условиям поглощения). Если, например, до излучения «система» (электрон, атом, антенна) имела энергию E_0, после излучения ее энергия равнялась E_1, а соответствующие

импульсы равны $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_1$, то при излучении фотона должны соблюдаться законы сохранения

$$E_0 - E_1 = \hbar\omega, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 = \hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} \equiv \frac{\hbar\omega n}{c}\mathbf{s}, \tag{7.2}$$

где для простоты считаем среду изотропной, в силу чего опускаем индекс l у n.

Для «системы», равномерно движущейся в вакууме (т. е. при $n = 1$), излучение без изменения ее внутреннего состояния невозможно (например, равномерно движущийся электрон в вакууме излучать не может; см. гл. 1). Этот хорошо известный факт следует в частности и из уравнений (7.1), (7.2), так как при $n = 1$ для частицы без внутренних степеней свободы они имеют лишь решение $\omega = 0$. Если же $n \neq 1$, то, подставляя в (7.1), (7.2) выражения $E_{0,1} \equiv \mathscr{E}_{0,1} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_{0,1}^2}$; $\mathbf{p}_{0,1} = m\mathbf{v}_{0,1}/\sqrt{1 - v_{0,1}^2/c^2}$, в качестве условия излучения при неизменном внутреннем состоянии получаем [61]

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_0 &= \frac{c}{n(\omega)\,v_0}\left(1 + \frac{\hbar\omega(n^2-1)}{2mc^2}\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}\right), \\ \hbar\omega &= \frac{2(mc/n)(v_0\cos\theta_0 - c/n)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2\,(1 - 1/n^2)}}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

где θ_0 — угол между $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{k}$.

При $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$ это условие переходит в классическое условие излучения (6.56), что и естественно (если $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$, то «отдача», связанная с испусканием кванта, достаточно мала)*). Из (7.3) ясно, конечно, что излучение возможно (т. е. $\cos\theta_0 < 1$ и $\omega > 0$) только при сверхсветовом движении, т. е. при соблюдении неравенства $v_0 n/c > 1$ (см. (6.55)).

В условиях, когда результат не содержит $\hbar$, квантовый расчет имеет лишь методическое значение, но часто оказывается удобнее. По существу же дело сводится к использованию законов сохранения, которые имеют более широкое значение в том смысле, что могут применяться и без привлечения квантовых представлений. Именно, учтем, что из классической теории электромагнитного поля в среде в качестве связи между энергией $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{em}$ и полным импульсом излучения и среды $\mathbf{G}$ получается соотношение $\mathbf{G} = (\mathscr{H}n/c)\mathbf{s}$ **).

*) Как ясно из (7.3), при стремлении к большей точности условие классичности нужно записывать несколько иначе, а именно, в виде

$$(\hbar\omega(n^2-1)/2mc^2)\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \ll 1.$$

**) Как будет показано в гл. 13, импульс поля равен $G_{em} = \mathscr{H}/nc$, а импульс силы, сообщаемой при излучении диэлектрику, $G^{(c)} = (n^2-1)G_{em} = \mathscr{H}(n^2-1)/nc$. Отсюда полный импульс, который отдает излучатель $G = G_{em} + G^{(c)} = \mathscr{H}n/c$.

Далее для свободного движения заряда при достаточно малом изменении энергии и импульса имеем $\Delta\mathscr{E} = \mathbf{v}\,\Delta\mathbf{p}$, так как

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\mathbf{p}} = \frac{d}{d\mathbf{p}}\left(\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}\right) = \frac{c^2\mathbf{p}}{\mathscr{E}} = \mathbf{v}. \tag{7.4}$$

В силу предполагаемой малости изменения $\Delta\mathscr{E}$ различия между v_0 и v_1 делать уже не нужно и скорость источника $v_0 \approx v_1$ обозначается через v.

Из (7.4) и законов сохранения (7.1), (7.2) с заменой $\hbar\omega$ на $\mathscr{H}$ находим

$$\Delta\mathscr{E} = \mathscr{H} = \mathbf{v}\,\Delta\mathbf{p} = \frac{\mathscr{H}n}{c}\,\mathbf{sv}$$

или $\cos\theta_0 = c/nv$, т. е. получаем черенковское условие (6.56). Однако введение сразу же квантов $\hbar\omega$ проще и это вполне естественно делать не только в квантовом, но и в классическом случае. Так мы и будем поступать.

Если движется не «бесструктурная» частица, а «система», внутреняя энергия которой может изменяться, то

$$\mathscr{E}_0 = \sqrt{(m + m_0)^2 c^4 + c^2p_0^2},\quad \mathscr{E}_1 = \sqrt{(m + m_1)^2 c^4 + c^2p_1^2},$$

где $(m + m_0)c^2 = mc^2 + w_0$ — полная энергия в нижнем состоянии и $(m + m_1)c^2 = mc^2 + w_1$ — полная энергия в верхнем состоянии. Очевидно, $w_1 - w_0 = \hbar\omega_i > 0$ есть разность энергий двух рассматриваемых уровней системы (атома и т. п.).

Применяя теперь законы сохранения (7.1), (7.2) при $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$, получаем в точности доплеровское соотношение (6.62) с $\omega_{00} \equiv \omega_i$. Если же не пренебрегать членами порядка $\hbar\omega/mc^2$, то приходим, как и в случае черенковского излучения (см. (7.3)), к несколько более сложному выражению [108]. Практически, однако, можно ограничиться формулой для эффекта Доплера в ее обычном виде (6.62). При квантовом расчете вместе с тем выясняется также одно важное обстоятельство, которое совершенно ускользает из поля зрения при классическом выводе формулы (6.62). Именно, в области нормального эффекта Доплера, т. е. когда (см. (6.65))

$$\frac{v}{c}\,n(\omega)\cos\theta < 1, \tag{7.5}$$

излучению соответствует переход системы с верхнего уровня с энергией w_1 на нижний уровень с энергией w_0 (направление перехода определяется из требования положительности энергии излучаемого кванта, т. е. формально из требования $\omega > 0$). Если же квант излучается внутри черенковского конуса, т. е. имеет место аномальный эффект Доплера и (см (6.64))

$$\frac{v}{c}\,n(\omega)\cos\theta > 1, \tag{7.6}$$

то излучение кванта сопровождается переходом системы с нижнего уровня w_0 на верхний уровень w_1. Энергия кванта, а также

энергия, идущая на возбуждение излучающей системы, черпается при этом из кинетической энергии ее поступательного движения.

На этом примере видно, что в квантовой теории, в отличие от классической, при нахождении самих условий излучения определяется одновременно направление процесса (переход вниз или вверх). Именно это обстоятельство, наряду с возможностью столь же простого учета индуцированного испускания (см. ниже), обусловливает ценность квантовых расчетов для получения условий излучения, условия усиления (неустойчивости) волн в пучках и т. д.

Если система имеет только два дискретных уровня 0 и 1, то при $(v/c)n < 1$ (досветовое движение) стационарное состояние излучателя отвечает его нахождению на нижнем уровне 0 (предполагается, что система движется, скажем, в канале в среде и никаких посторонних источников возбуждения нет). Другими словами, если возбужден уровень 1, то через некоторое время система высветится с переходом на уровень 0. Если же $(v/c)n > 1$ (сверхсветовое движение), то и в стационарных условиях имеется ненулевая вероятность найти систему на уровне 1 и она все время излучает как нормальные, так и аномальные доплеровские волны. Населенность уровней 0 и 1, а также интенсивность излучения нормальных и аномальных волн определяются, очевидно, отношением суммарных вероятностей излучения этих волн. Для системы с многими уровнями [108б] излучение аномальных доплеровских волн с переходом системы вверх приводит к возможности раскачки «поперечных колебаний» и, например, к ионизации атома.

Точнее, здесь возможны два случая [108в]. В первом средняя энергия поперечных колебаний системы по мере движения понижается. Это значит, что для волнового пакета, составленного из волновых функций с разными, но близкими энергиями (имеются в виду, например, энергии поперечного осцилляторного движения электрона, движущегося вдоль магнитного поля), центр тяжести пакета в шкале энергий понижается. Различие между досветовым и сверхсветовым движениями в данном случае состоит в разной скорости изменения средней энергии, а также в характере расплывания пакета. Так, при досветовой скорости состояния с энергией, большей, чем представленная в начальном спектре пакета, никогда не окажутся занятыми. При сверхсветовой же скорости, несмотря на уменьшение средней энергии, имеется конечная вероятность найти систему (предполагается, конечно, что мы имеем ансамбль систем) на сколь угодно высоком уровне, который может быть достигнут с соблюдением условия (7.6).

Во втором из упомянутых случаев система неустойчива уже в «среднем», т. е. ее средняя энергия (речь идет об энергии ко-

лебаний, т. е. энергии возбуждения) повышается со временем и, кроме того, изменяется характер расплывания пакета.

Выяснение того, с какой из возможностей мы имеем дело, требует конкретных расчетов вероятностей переходов. В этом отношении для классической системы квантовый расчет лишен, вообще говоря, каких бы то ни было преимуществ и естественно воспользоваться классической теорией излучения, на чем мы еще остановимся ниже.

Сейчас же отметим, что квантовые соображения типа приведенных не менее полезны и при анализе уже упоминавшихся вопросов о поглощении и усилении волн в пучках (потоках) частиц (в случае усиления волн пучок по сути дела становится неустойчивым). На таком пути легко получить критерий неустойчивости пучка частиц, движущихся в изотропной плазме (см. ниже). Далее ясно, что при сверхсветовом движении потоков «систем» с двумя или многими уровнями, как правило, должно происходить не поглощение (реабсорбция), а усиление (отрицательное поглощение) аномальных доплеровских волн [109]. Это связано с тем, что при поглощении кванта, соответствующего области аномальных доплеровских волн (т. е. летящего под углом $\theta < \theta_0$ к скорости системы), система будет переходить не снизу вверх (как при нормальном эффекте), а сверху вниз *). Переход же системы снизу вверх отвечает теперь индуцированному испусканию, которое в области нормального эффекта соответствует переходу системы сверху вниз. Поэтому, если все системы (атомы, электроны в магнитном поле) в сверхсветовом пучке находятся, например, на нижнем уровне, то нормальные доплеровские волны, излучаемые одной из систем, будут поглощаться в этом пучке, а аномальные — усиливаться: они будут на своем пути переводить другие системы снизу вверх с индуцированным испусканием, т. е. с излучением еще одного аномального доплеровского кванта.

В гл. 10 мы подробнее остановимся на использовании коэффициентов Эйнштейна для вероятностей спонтанного испускания и поглощения. Однако уже сейчас удобно воспользоваться этими коэффициентами для некоторой конкретизации сказанного выше.

Если заселены и нижний и верхний уровни 0 и 1, то коэффициент поглощения в пучке для нормальных доплеровских волн равен (см. [56, 83, 84, 110] и гл. 10)

$$\mu_n = -\frac{dI_\omega}{I_\omega\, dz} = A_1^0 \frac{8\pi^3 c^2 N_1 (N_0/N_1 - 1)}{\omega^2 n^2},$$

$$I_\omega = I_\omega(0)\, e^{-\mu z}, \quad \omega = 2\pi\nu, \tag{7.7}$$

*) Поглощение есть процесс, обратный испусканию, и поэтому сказанное сразу же следует из расчетов, проведенных для испускания. Термины «верх» и «низ» употребляются здесь везде в применении к шкале энергий возбуждения уровней излучающей системы.

где $A_1^0(\theta)$ — отнесенная к единице телесного угла вероятность спонтанного перехода $1 \leftrightarrow 0$ с излучением кванта под углом θ к скорости, N_1 и N_0 — концентрации частиц в пучке соответственно на уровнях 1 и 0, n — показатель преломления среды для рассматриваемой частоты ω при распространении волны под углом θ (для простоты считаем, что дипольный момент для перехода $1 \leftrightarrow 0$ для всех частиц параллелен скорости). Для того чтобы происходило усиление нормальных доплеровских волн, число частиц на верхнем уровне 1 должно превосходить их число на нижнем уровне 0 (в этом случае $N_0/N_1 < 1$ и $\mu_n < 0$). Подобное распределение по уровням не имеет места при тепловом равновесии, и создание его связано, вообще говоря, с определенными затруднениями. Положение меняется в случае аномальных доплеровских волн, когда излучение волн (фотона в среде) происходит с переходом $0 \to 1$, а поглощение с переходом $1 \to 0$. В этом случае

$$\mu_{an} = A_1^0 \frac{8\pi^3 c^2 N_0 (N_1/N_0 - 1)}{\omega^2 n^2} \tag{7.8}$$

и $\mu_{an} < 0$ при $N_1/N_0 < 1$. Отсюда, конечно, также ясно, что при наличии аномального эффекта Доплера (т. е. если $(v/c)n > 1$) пучок частиц, находящихся на одном только нижнем уровне 0, обладает отрицательным поглощением и излучаемые отдельными частицами волны усиливаются. Это обстоятельство, возможно, весьма благоприятно при использовании пучков частиц, движущихся в диэлектрической щели или замедляющей системе, для генерации и усиления микрорадиоволн [46].

Роль системы (частицы), излучающей аномальные доплеровские волны, могут, как упоминалось, играть электроны, колеблющиеся под действием наложенного поля или движущиеся по винтовой линии вдоль магнитного поля, параллельного оси пучка. При малых амплитудах такие электроны (если не говорить о черенковском излучении) излучают так же, как соответствующие осцилляторы, движущиеся со скоростью v, равной $v_\parallel$ — проекции скорости электрона на ось пучка.

В электронном пучке поперечные скорости $v_\perp$ распределены обычно так, что функция распределения $f(v_\perp)$ убывает с ростом $v_\perp$ (это имеет место, например, при распределении $f(v_\perp) = \text{const} \exp\{-(mv_\perp^2)/2\varkappa T\}$). В подобных условиях нормальные доплеровские волны будут в результате реабсорбции в пучке затухать; аномальные же доплеровские волны будут, напротив, усиливаться. Усиление волн в электронном пучке означает, что амплитуда колебаний нарастает и пучок теряет устойчивость. При этом, вообще говоря, происходит группировка электронов и возникает когерентное излучение. Квантовое условие неустойчивости пучка (условие $(v_\parallel/c)n(\omega) > 1$) совпадает с условием, которое можно получить путем

решения классической задачи об устойчивости пучка электронов в магнитном поле [109]. Отмеченная неустойчивость электронных потоков, возможная в частности в магнитоактивной плазме, представляет интерес для теории спорадического радиоизлучения Солнца [83].

Условие черенковского излучения (6.56) на классическом языке носит интерференционный характер, и поэтому является универсальным для волн любого типа (конечно, с заменой фазовой скорости света $c/n(\omega)$ на v_ϕ — фазовую скорость рассматриваемых волн, например звуковых, капиллярных и т. п.). То же относится и к изложенным результатам, полученным на основе законов сохранения энергии и импульса как при квантовом, так и при классическом подходе к ним. При этом квантовый подход (введение квантов) значительно проще не только для света, но и для плазменных (продольных) волн *) и звука. В последнем случае энергия кванта звука (фонона) равна $E = \hbar\omega$, а его импульс $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = (E/u)\,\mathbf{s}$, где u — скорость звука (для звука дисперсия обычно несущественна, и можно не делать различия между фазовой и групповой скоростями). Разумеется, как и в электродинамике, при сверхзвуковом движении излучающая акустическая система в области аномального эффекта Доплера будет переходить «вверх» (т. е. возбуждаться) и, таким образом, в какой-то мере «раскачиваться» [111].

Остановимся теперь на одном интересном моменте, связанном с несовпадением направлений фазовой и групповой скоростей волн, которое может иметь место в анизотропной среде или при учете пространственной дисперсии (см. [76]). Если проекция групповой скорости $d\omega/d\mathbf{k}$ на направление, перпендикулярное к скорости частицы (т. е. величина $d\omega/dk_r$, где k_r — перпендикулярная к $\mathbf{v}$ проекция $\mathbf{k}$) отрицательна, то энергия, казалось бы, не уходит от излучателя, а поглощается им. В подобных условиях, однако, нужно пользоваться не запаздывающими, а опережающими потенциалами [112]. Если выбирать вектор $\mathbf{k}$ направленным всегда по фазовой скорости, то при $d\omega/dk_r < 0$ этот вектор в черенковских и доплеровских волнах будет направлен к траектории частицы, а энергия, как и должно быть, будет уходить от траектории. В случае черенковского излучения различие между случаями $d\omega/dk_r > 0$ и $d\omega/dk_r < 0$ ясно из рис. 7.1. Угол θ_0 при $d\omega/dk_r < 0$ по-прежнему определяется черенковским условием (6.56), как ясно при сделанном выборе направления $\mathbf{k}$ из интерференционных соображений, а также из законов сохранения (7.1), (7.2). Последнее следует из того, что мы пользуемся плоскими волнами типа

*) Кванты плазменных волн часто называются плазмонами. Если под фотонами в среде понимать кванты произвольного электромагнитного поля в среде (речь, строго говоря, идет о свободном поле, т. е. о поле в отсутствие зарядов и токов), то плазмоны являются частным случаем фотонов в среде.

$\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$, для которых импульс соответствующего кванта в среде равен $(\hbar\omega n/c)(\mathbf{k}/k)$; при использовании таких волн между направлениями $\mathbf{k}$ на рис. 7.1, *а* и 7.1, *б* нет никакого различия, поскольку в терминах плоских волн расположение волновых фронтов в обоих случаях одинаково (имеются в виду фронты с вектором $\mathbf{k}$, лежащим на черенковском конусе). Формула (6.62) для эффекта Доплера при $d\omega/dk_r<0$ также остается в силе. Физическое же различие между рассматриваемыми случаями, конечно, весьма значительно и связано с разным направлением групповой скорости. Так, в изотропной среде в обычном случае (см. рис, 7.1, *а*) групповая скорость параллельна $\mathbf{k}$. В случае же, изображенном на рис. 7.1, *б*, групповая скорость $d\omega/d\mathbf{k}$ антипараллельна $\mathbf{k}$, и, следовательно, вектор $d\omega/d\mathbf{k}$ направлен под тупым углом $\theta_1=\pi-\theta_0$ к скорости частицы. В таких условиях при прохождении частицей пластинки конечной толщины, черенковское свечение будет исходить от задней поверхности пластинки, а также необычным образом преломляться на этой поверхности (последнее ясно из [112а]).

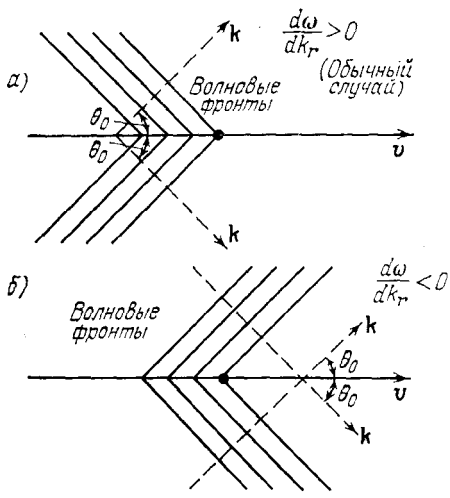


Рис. 7.1. Черенковское излучение при $d\omega/dk_r>0$ и $d\omega/dk_r<0$.
k_r — проекция волнового вектора, перпендикулярная скорости частицы v.

На квантовом языке для сред с отрицательной групповой скоростью (векторы $\mathbf{v}_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ и $\mathbf{k}$ антипараллельны) можно сказать, что масса фотона в среде m_ϕ отрицательна [113]. При этом масса m_ϕ определяется соотношением $\mathbf{p}=\frac{\hbar\omega n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k}=m_\phi\mathbf{v}_{\text{гр}}$. В изотропной среде без дисперсии $\mathbf{v}_{\text{гр}}=\frac{c}{n}\frac{\mathbf{k}}{k}$ и $m_\phi=\frac{n^2}{c^2}\hbar\omega$, т. е. речь не идет о массе покоя (так, в вакууме $m_\phi=\hbar\omega/c^2$, в то время как масса покоя фотона равна нулю). Если ввести массу покоя для фотона в среде $m_{\phi,0}$ с помощью обычной для частиц связи $E^2=m_{\phi,0}^2c^4+c^2p^2$, $E=\hbar\omega$, $p=\hbar\omega n/c$, то $m_{\phi,0}^2=\frac{1-n^2}{c^4}(\hbar\omega)^2$. Поскольку как масса m_ϕ, так и масса $m_{\phi,0}$ зависят от ω, т. е. от E или p, использование таких величин не представляется целесообразным.

Для электронов, движущихся со сверхсветовой скоростью в плазме или замедляющей системе в присутствии магнитного поля, а также в аналогичных случаях осцилляторного движения электронов, интерес обычно представляет лишь классическая область (квантовые числа, соответствующие поперечному движению велики). В подобных условиях вопрос об излучении волн и о затухании или раскачке поперечных колебаний электронов может и практически должен решаться путем классических расчетов. Соответствующие расчеты по существу сводятся к вычислению силы реакции излучения при движении заряда в среде.

Рассмотрим эту проблему в несколько более широком плане.

Поскольку наличие среды может радикально изменять характер излучения электромагнитных волн движущейся частицей (см. гл. 6), ясно, что сила реакции излучения в среде также изменяется, причем иногда самым существенным образом. Так, диполь с частотой ω в изотропной плазме с показателем преломления $n = \sqrt{1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2}$ вообще не излучает при $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m > \omega^2$, когда $\varepsilon = \tilde{n}^2 < 0$; в магнитоактивной плазме отсутствует в нерелятивистском приближении излучение электрона, вращающегося в магнитном поле $\mathbf{H}_0$ с частотой $\omega_H = eH_0/mc$ (см. [84, 114]). В обоих этих случаях радиационная сила, конечно, обращается в нуль, тогда как в вакууме она равна $\mathbf{f} = (2e^2/3c^3)\dddot{\mathbf{r}}$. С другой стороны, при равномерном движении в среде, если для некоторых частот скорость $v > c/n(\omega)$, появляется черенковская радиационная сила $\mathbf{f}_{\text{чр}}$, работа которой за единицу времени $\mathbf{f}_{\text{чр}}\mathbf{v} = -dW/dt$. Поэтому из (6.61) ясно, что

$$\mathbf{f}_{\text{чр}} = -\frac{e^2\mathbf{v}}{c^2 v}\int\limits_{c/n(\omega)\leqslant v}\left[1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right]\omega\, d\omega. \qquad (7.9)$$

Уже в свете сказанного естественно возникает задача о вычислении силы реакции излучения при произвольном движении заряда в произвольной среде. Эта задача в прошлом не привлекала к себе особого внимания. Дело, по-видимому, в том, что радиационная сила при движении в среде обычно значительно меньше силы торможения, связанной с ионизационными потерями. Так, потери на черенковское излучение, которые можно считать радиационными, даже в прозрачной, но плотной среде составляют лишь небольшую долю полных потерь. При неравномерном движении заряда положение, вообще говоря, не меняется. Существуют, однако, интересные и практически важные случаи, когда учет радиационных сил при движении в среде все же существен (движение в магнитоактивной плазме, движение в каналах, щелях и вблизи поверхности среды).

Приведем здесь схему вычисления радиационной силы в среде [108в], причем, как обычно, не будем бояться повторений

Для точечного заряда с плотностью $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, $\int \delta\, d\mathbf{r} = 1$ уравнения поля и уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}), \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) =$$

$$= e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\} + e\int\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}(\mathbf{r})]\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\, d\mathbf{r}. \tag{7.11}$$

Здесь $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор положения заряда ($\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} \equiv d\mathbf{R}/dt$), $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ — *внешние поля*; $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — *поля*, создаваемые самим зарядом (для простоты среда считается немагнитной).

Для произвольной среды единственным эффективным методом решения задачи представляется разложение полей на нормальные плоские волны, т. е. метод который мы называли гамильтоновским. В результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \tilde{D}_\alpha(\omega) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\tilde{E}_\beta(\omega), \\ n_{\lambda j}^2 &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)(a_{\lambda j})_\beta (a_{\lambda j}^*)_\alpha, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \sqrt{4\pi}\, c \sum_{\lambda,\, j=1,2} \frac{q_{\lambda j}(t)\,\mathbf{a}_{\lambda j}}{n_{\lambda j}} \exp(i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}), \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta} + \text{к. с.} = 0, \tag{7.13}$$

где условие (7.13) выбрано по соображениям удобства, к. с. — комплексно сопряженная величина, по дважды встречающимся индексам (кроме j) проводится суммирование, аргумент ω указывает на то, что берутся фурье-компоненты, вещественные поля равны $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}^* \equiv \tilde{\mathbf{D}} + \text{к. с.}$, $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}^*$ и т. д. В уравнениях (7.12), (7.13) $n_{\lambda j}$ — показатель преломления и $\mathbf{a}_{\lambda j}$ — комплексный вектор поляризации, отвечающий j-й нормальной волне.

Уравнения для потенциалов, получающиеся из (7.10), (7.12) и (7.13), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{A}}_\beta}{\partial t^2}\mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t\, \partial x_\beta}\mathbf{e}_\alpha + \text{к. с.} = \\ = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e = -\frac{4\pi}{c} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}), \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \text{к. с.} = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}), \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — орт оси α и $\mathbf{j}_e = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ — плотность тока, отвечающая рассматриваемой частице; некоторое отличие принятых обозначений и другое определение отдельных величин по сравнению с использованным в гл. 6 объясняется соображениями удобства и возможностью отослать читателя к статьям [108в, 115], где вычисления проведены подробнее и в тех же обозначениях.

Подстановка разложения (7.12) в (7.14) дает для амплитуд поля $q_{\lambda j}$ систему осцилляторных уравнений, интегрирование которых элементарно. Определенные таким образом поля необходимо подставить в уравнение движения (7.11). В результате получаем *)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}_0 - \frac{e^2}{2\pi^2}\sum_{j=1,2}\int_0^t\int_0^{k_{\max}}\left\{\frac{\mathbf{a}_j(\mathbf{v}'\mathbf{a}_j^*)}{n_j^2}\cos\omega_j(t-t') - \right.$$
$$\left. - i[\mathbf{v}[\mathbf{k}\mathbf{a}_j]]\frac{(\mathbf{v}'\mathbf{a}_j^*)}{n_j^2\omega_j}\sin\omega_j(t-t')\right\}\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')]\,dt'\,d\mathbf{k} + \text{к.с.} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}, \tag{7.15}$$

где $\mathbf{R}' = \mathbf{R}(t')$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(t')$ и $\mathbf{F}_0 = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right\}$.

Применяемый метод вычисления силы реакции излучения удобен в ряде случаев даже для изотропной среды или вакуума. В последнем можно было убедиться в гл. 2. Кроме того, для частицы, равномерно движущейся в изотропной среде с показателем преломления $n > c/v$, из (7.15) получается формула для силы торможения черенковским излучением (7.9).

Рассмотрение сверхсветового движения осциллятора произведено в [108в]. В изотропной среде для осциллятора, колеблющегося параллельно поступательной скорости $\mathbf{v}_0$, имеем

$$\left.\begin{gathered}\mathbf{R} = \{0, 0, v_0 t + R_0\sin\Omega t\};\quad \mathbf{v} = \{0, 0, v_0 + v_\sim\cos\Omega t\},\\ v_\sim = R_0\Omega,\quad \mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0\},\quad \mathbf{a}_2 = \{0, \cos\theta, -\sin\theta\},\\ \mathbf{k} = \{0, k\sin\theta, k\cos\theta\},\end{gathered}\right\} \tag{7.16}$$

причем ниже будет идти речь только о дипольном приближении — случае, когда

$$kR_0 = \frac{\omega}{c}n(\omega)R_0 \ll 1. \tag{7.17}$$

Разумеется, это ограничение (а значит, и дипольное приближение) не имеет отношения к чисто черенковской части излучения.

*) Заметим, что в ходе вычислений заряд нужно считать не точечным, а имеющим некоторый радиус r_0. Однако вместо явного введения форм-фактора достаточно при интегрировании по $\mathbf{k}$ ввести верхний предел $k_{\max} \sim 2\pi/r_0$. К тому же интересующая нас радиационная сила (в отличие от электромагнитной массы) от r_0 не зависит.

В подобных условиях из (7.15) получается следующее выражение для работы поля излучения над частицей:

$$A = \int_0^T \mathbf{vf}\, dt = v_0 \int_0^T f_z\, dt + v_\sim \int_0^T \cos \Omega t f_z\, dt = A_0 + A_\sim, \tag{7.18}$$

$$A = -\frac{e^2 R_0^2 T}{4c^3 \beta_0} \left\{ \int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta < 1} \omega^3 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\beta_0 n \cos\theta > 1} \omega^3 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega \right\}, \tag{7.19}$$

где

$$\omega = \frac{\Omega}{|1 - \beta_0 n(\omega) \cos\theta|}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}. \tag{7.20}$$

Если дисперсионная зависимость имеет характер «ступеньки», т. е.

$$\left.\begin{aligned} n(\omega) = n = \text{const} \quad &\text{при} \quad \omega \leqslant \omega_m, \\ n(\omega) = 1 \quad &\text{при} \quad \omega > \omega_m, \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

то результат (7.19) можно записать в виде

$$A = -\frac{e^2 \Omega^4 R_0^2 n T}{4c^3} \int \frac{\sin^3\theta\, d\theta}{|1 - \beta_0 n \cos\theta|^5}, \tag{7.22}$$

где для аномального эффекта Доплера

$$0 \leqslant \theta \leqslant \arccos \frac{1 + \Omega/\omega_m}{\beta_0 n},$$

а для нормального эффекта Доплера

$$\arccos \frac{1 - \Omega/\omega_m}{\beta_0 n} \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Величина $U = \int_0^T \frac{dW}{dt}\, dt = -A > 0$ равна энергии, излучаемой частицей за время T. Выражение (7.22) является аналогом формулы (6.66), которая относится к осциллятору, колеблющемуся перпендикулярно к скорости поступательного движения.

Работа поля излучения, затрачиваемая на увеличение или уменьшение энергии колебаний частицы, в соответствии с (7.19), равна

$$A_\sim = A - A_0 = \frac{e^2 \Omega R_0^2 T}{4c^3 \beta_0} \left\{ \int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta > 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\beta_0 n(\omega)\cos\theta < 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\beta_0^2 n^2(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega \right\}. \tag{7.23}$$

В случае (7.21)

$$A_{\sim} = \frac{e^2\Omega^4 R_0^2 nT}{4c^3}\left\{\int_0^{\mathscr{A}} \frac{\sin^3\theta\, d\theta}{(1-\beta_0 n\cos\theta)^4} - \int_{\mathscr{B}}^{\pi} \frac{\sin^3\theta\, d\theta}{(1-\beta_0 n\cos\theta)^4}\right\} \quad (7.24)$$

$$\left(\mathscr{A} \equiv \arccos\frac{1}{\beta_0 n}\left(1+\frac{\Omega}{\omega_m}\right),\quad \mathscr{B} \equiv \arccos\frac{1}{\beta_0 n}\left(1-\frac{\Omega}{\omega_m}\right)\right).$$

Таким образом, излучение, распространяющееся вне черенковского конуса, которому отвечают вторые интегралы в (7.23) и (7.24), приводит к затуханию колебаний, тогда как излучение внутри этого конуса (аномальный эффект Доплера), которому отвечают первые интегралы в (7.23) и (7.24), раскачивает колебания *). Этот результат находится в полном согласии с квантовыми соображениями (см. выше). Легко видеть, что вторые интегралы в (7.23), (7.24) больше первых. Отсюда следует, что в изотропной среде всегда происходит затухание колебаний осциллятора и $A_{\sim} \to 0$, только если в существенной области интегрирования $\beta_0 n(\omega) \to \infty$.

В [108в, 115] рассмотрено кроме того движение осциллятора, колеблющегося перпендикулярно к его поступательной скорости $\mathbf{v}_0$, а также винтовое движение заряда в магнитном поле. Показано, что в изотропной среде, так же, как и в предыдущем случае, всегда имеет место затухание колебаний (этот вывод не обязателен для других излучающих систем, например антенн достаточно большой длины).

Приведенная здесь методика (вычисление работы поля) позволяет, конечно, рассмотреть и обсуждавшийся в гл. 6 вопрос о распределении энергии между черенковской энергией (на черенковском конусе) и энергией, излучаемой в силу колебаний заряда и распространяющейся в основном в направлениях, очень близких к черенковскому конусу.

Для выяснения некоторых особенностей сверхсветового движения зарядов в анизотропных средах удобно рассмотреть движение осциллятора вдоль оптической оси одноосного негиротропного кристалла, причем электрон считается колеблющимся в том же направлении. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R} = \{0,\ 0,\ v_0 t + R_0\sin\Omega t\},\quad \mathbf{k} = \{0,\ k\sin\theta,\ k\cos\theta\},\\ &\mathbf{a}_1 = \{0,\ \cos\theta + K_1\sin\theta,\ -\sin\theta + K_1\cos\theta\},\quad \mathbf{a}_2 = \{1,\ 0,\ 0\},\\ &K_1 = \frac{(n_1^2-\varepsilon_\perp)\cos\theta}{\varepsilon_\perp\sin\theta},\quad \frac{1}{n_1^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp},\quad kR_0 \ll 1, \end{aligned}\right\} \quad (7.25)$$

где n_1 — показатель преломления для необыкновенной волны, которая в данном случае только и излучается. Величина K_1 есть отношение параллельной и перпендикулярной к вектору $\mathbf{k}$

*) Положительная работа $A_{\sim}$ или ее часть отвечают раскачке колебаний, так как $A_{\sim}$ есть работа радиационной силы над частицей.

компонент вектора напряженности электрического поля в необыкновенной волне; этот электрический вектор параллелен вектору поляризации $\mathbf{a}_1$ (см. гл. 6).

Теперь можно получить выражения, соответствующие формулам (7.19) и (7.23)

$$A = -\frac{e^2R_0^2T}{4c^3\beta_0}\int\limits_{L_1+L_2}\omega^3\,\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{ctg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta)\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta]^2},$$

$$A_\sim = \frac{e^2R_0^2\Omega T}{4c^3\beta_0}\left\{-\int\limits_{L_1}\omega^2\,\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{ctg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta)\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel(\omega)\cos^2\theta]^2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{L_2}\omega^2\,\frac{\varepsilon_\perp^2(\omega)\sin^2\theta\,|\,1-(\operatorname{ctg}\theta/n_1)(\partial n_1/\partial\theta)\,|^{-1}\,d\omega}{[\varepsilon_\perp(\omega)\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel(\omega)\cos^2\theta]^2}\right\}. \qquad (7.26)$$

Здесь области интегрирования L_1 и L_2 определяются соотношениями Доплера

$$1-\beta_0 n(\omega,\theta)\cos\theta=\Omega/\omega \qquad (7.27)$$

для нормальных доплеровских частот (область L_1) и

$$\beta_0 n(\omega,\theta)\cos\theta-1=\Omega/\omega \qquad (7.28)$$

для аномальных доплеровских частот (область L_2). Легко видеть, что оба интеграла в выражении (7.26) для $A_\sim$ всегда положительны. Это значит, что излучению нормальных доплеровских частот (первый интеграл в (7.26)) соответствует затухание колебаний, тогда как излучению аномальных доплеровских частот — раскачка колебаний.

Пока речь идет о движении самого заряда, смысл имеет, конечно, только результирующая сила, равная разности указанных интегралов. Вместе с тем каждый из них характеризует отдельно энергию, излученную соответственно в области нормальных и аномальных доплеровских частот.

В отличие от изотропного случая в рассматриваемой задаче может происходить не только затухание колебаний, но и их раскачка (имеется в виду знак всей работы $A_\sim$, а не ее частей). Пусть например, $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ не зависят от частоты, причем $\varepsilon_\parallel<0$, $\varepsilon_\perp>0$; тогда $n_1^2(\theta_\infty)\to\infty$ при угле, определяемом из условия (см. выражение (7.25) для n_1^2)

$$\varepsilon_\perp\sin^2\theta_\infty+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta_\infty=0. \qquad (7.29)$$

В такой среде необыкновенные волны могут распространяться под углом $|\theta|<|\theta_\infty|$, но для углов $^1/_2\pi>\theta>\theta_\infty$ уже $\tilde{n}_1^2<0$, и распространение волн невозможно. Далее n_1^2 минимально и равно $\varepsilon_\perp$ при $\theta=0$. Если теперь $\beta_0\varepsilon_\perp>1$, то всегда можно так подобрать $\varepsilon_\parallel$, чтобы черенковский угол θ_0 был больше θ_∞ (здесь

$\beta_0 n \cos\theta_0 = 1$). В подобных условиях, очевидно, черенковское излучение вообще отсутствует (углу θ_0 отвечают значения $\tilde{n}_1^2 < 0$), и вперед (при $\theta < {}^1/_2\pi$, а фактически при $\theta < \theta_\infty$) излучаются только аномальные доплеровские волны. Назад (при $\pi < \theta < \theta_\infty$) излучаются нормальные доплеровские волны, но здесь $(1 - \beta_0 n_1 \cos\theta) = (1 + \beta_0 n_1 |\cos\theta|)$ и полная работа $A_\sim$ положительна. В этом можно убедиться, переходя в (7.26) с учетом (7.27) и (7.28) к интегрированию по θ, в результате чего для рассматриваемого случая находим

$$A_\sim = \frac{e^2\Omega^4 R_0^2 T}{4c^3\beta_0}\left\{\int_0^{\mathscr{A}} \frac{n_1^5(\theta)\sin^3\theta\, d\theta}{\varepsilon_\parallel^2\left[\beta_0 n_1(\theta)\cos\theta - 1\right]^4} - \int_0^{\mathscr{A}} \frac{n_1^5(\theta')\sin^3\theta'\, d\theta'}{\varepsilon_\parallel^2\left[\beta_0 n_1(\theta')\cos\theta' + 1\right]^4}\right\}$$

$$\left(\mathscr{A} \equiv \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{|\varepsilon_\parallel|}{\varepsilon_\perp}}\right), \qquad (7.30)$$

где $\theta' = \pi - \theta$. Здесь $A_\sim > 0$ в силу того, что первый интеграл в (7.30) всегда больше второго. Итак, в рассматриваемом случае происходит раскачка колебаний.

Вопрос о движении зарядов в магнитоактивной плазме исследован в [115], где показано, что и в этом случае в определенных условиях имеет место раскачка колебаний или, точнее, «раскрутка» винтовой линии, по которой движется частица в магнитном поле. Так, раскачка происходит, например, если

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} = \beta_0 \ll 1, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m},$$

где H_0 — однородное магнитное поле, в которое помещена плазма, N — концентрация электронов плазмы. Раскачка возникает и при следующих значениях параметров (они найдены в результате численного интегрирования) $\beta_0 = 0{,}01$, $\omega_p^2/\omega_H^2 = 10$ и $\beta_0 = 0{,}99$, $\omega_p^2/\omega_H^2 = 10$. Если же, например, $\beta_0 = 0{,}99$ и $\omega_p^2/\omega_H^2 = 0{,}01$, поперечное движение частицы затухает.

В случае раскачки колебаний энергия поступательного движения (в данном случае движения вдоль поля) переходит в энергию поперечного движения. В результате скорость поступательного движения v_0 уменьшится и раскачка заведомо прекратится, когда скорость v_0 достигнет минимальной в данной среде скорости света $c/n_{\max}$.

Различие в знаках силы, действующей на колебательное движение частицы, в случае нормального и аномального доплеровского излучения, очевидно, полностью соответствует выводам, сделанным из законов сохранения (см. выше). В изотропном случае это различие, как уже подчеркивалось, приводит к ослаблению «трения» или даже его практическому исчезновению, но не может вызвать раскачку колебаний осциллятора (квантовый эффект раскачки колебаний, связанный с расплыванием

пакета в «пространстве энергии», конечно, имеет место для сверхсветового излучения и в изотропной среде). В анизотропной среде и в частности в магнитоактивной плазме, возможна раскачка колебаний.

Совершенно ясно, что неустойчивость «сверхсветовых» пучков частиц, появляющаяся в классическом приближении уже в случае изотропной среды, тесно связана с рассмотренной реакцией излучения для одной частицы.

Заметим также, что выше среда считалась равновесной или, во всяком случае, такой, что нормальные волны в ней при учете затухания (проводимости) поглощаются — по мере распространения в среде их амплитуда уменьшается.

В средах с отрицательной проводимостью (их иногда называют инвертированными средами) происходит усиление нормальных волн (мазерный эффект), и вопрос о реакции излучения нуждается в специальном рассмотрении [82, 116]. При этом уже для движения с досветовой скоростью ($v < c/n$), например в случае движения нерелятивистского осциллятора, может возникать раскачка колебаний.

В связи с большим вниманием, уделяемым в настоящее время физике плазмы, кратко остановимся на некоторых относящихся сюда моментах, связанных с теорией излучения при сверхсветовых скоростях ($v > c/n$).

В изотропной плазме, т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$, для поперечных волн

$$n^2_{1,2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\left(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}}\right)} < 1$$

(фазовая скорость волн $v_\Phi = c/n > c$), и, следовательно, черенковское излучение невозможно (см., однако, гл. 9; выше предполагается, что $v < c$). Однако при учете теплового движения в изотропной плазме могут распространяться продольные плазменные волны *), для которых показатель преломления равен (см. [84] и гл. 12)

$$n^2_3 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2}{3\beta_T^2}, \quad \beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \qquad (7.31)$$

Здесь e, m — заряд и масса электрона, N — электронная концентрация, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Соотношение (7.31) эквивалентно дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\frac{\varkappa T}{m}k^2$$

*) Движения ионов не учитываем и, таким образом, оставляем без внимания квазиакустические (низкочастотные) продольные волны (см. [84] и гл. 12). Поглощение, связанное с соударениями, также не учитываем, полагая число соударений $\nu_{\text{эфф}} = 0$.

и приводит к следующим выражениям для фазовой и групповой скоростей

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{ф}} &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_{\text{з}}} = \frac{\sqrt{3\varkappa T/m}}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}, \\ v_{\text{гр}} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{3\varkappa T}{m\omega} k = \sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}} \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

Плазменные волны образуют одну из трех равноправных ветвей нормальных волн в плазме. Фазовая скорость плазменных волн может быть меньше скорости света в вакууме c, и, следовательно, для этих волн возможно появление эффекта Вавилова — Черенкова при «обычном» движении источника (частицы) со скоростью $v < c$. Такое излучение и возникает при движении в плазме заряженных частиц — энергия, которую они теряют в результате «далеких» соударений, идет именно на «черенковское» излучение плазменных волн. За счет этого излучения частица с зарядом e и скоростью v, существенно бо́льшей тепловой скорости $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$, теряет в единицу времени энергию [117]:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{e^2\omega_p^2}{2v} \ln\left(1+\frac{2v^2}{v_T^2}\right). \qquad (7.33)$$

Излучение движущейся частицей плазменных волн обычно не называют эффектом Вавилова — Черенкова. Вопрос о названии, конечно, не очень важен и кроме того является делом вкуса или привычки. Нам представляется тем не менее, что в случае излучения плазменных волн (в отличие, скажем, от излучения звука) говорить именно об эффекте Вавилова — Черенкова весьма целесообразно. Во-первых, как уже упоминалось, в изотропной плазме высокочастотные продольные (плазменные) волны выступают равноправным образом с электромагнитными (поперечными) волнами. Во-вторых, и это важнее, в магнитоактивной плазме (т. е. при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$) в общем случае возникают три нормальных волны, не являющиеся ни продольными, ни поперечными. Выделение в таких условиях плазменных волн становится уже совершенно условным [84]; условно обычно и разделение волн, излучаемых при движении заряда в магнитоактивной плазме, на черенковские электромагнитные волны и волны плазменного типа. К тому же при стремлении внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ к нулю (переход к изотропии) излучение волн, которые называют черенковскими, не исчезает, а непрерывным образом переходит в указанное выше излучение плазменных волн [114].

Заметим, что сказанное относится не только к газовой плазме, но и к другим средам, в которых в известном приближении можно говорить о распространении плазменных волн.

Аналогом магнитоактивной плазмы в этом отношении являются оптически анизотропные среды (кристаллы).

В твердых телах и жидкостях плазменные частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ весьма велики (они лежат в ультрафиолетовой части спектра). Поэтому оказывается уже существенным учет квантования и вводится упомянутое выше понятие о квантах плазменных волн — плазмонах [118] с энергией $\hbar\omega \approx \hbar\omega_p$ (среда здесь считается изотропной). Очевидно, отличие плазмонов от квантов электромагнитного поля в среде — «фотонов в среде», — соответствует лишь различию между поперечными и продольными волнами (см. выше). В анизотропной среде эта разница, вообще говоря, отсутствует, и так называемые дискретные потери энергии при прохождении электронов через тонкие слои [118] можно с полным основанием считать результатом эффекта Вавилова — Черенкова [119], а также переходного излучения. При исследовании дискретных потерь оказывается существенным учет также и импульса фотонов или плазмонов [118].

В случае газовой (разреженной) плазмы, когда частоты ω_p относительно невелики (имеется в виду условие $\hbar\omega_p \ll {}^1/_2 Mv^2$, $\hbar\omega_p \ll \varkappa T$, где M — масса и v — скорость излучающей частицы, T — температура плазмы), использование квантовых представлений не необходимо. Однако и в этих условиях, как и в случае электромагнитных волн, применение квантовой теории излучения и поглощения плазменных волн и самого понятия о плазмонах может оказаться весьма удобным и эффективным. В качестве примера укажем на расчет реабсорбции плазменных волн и нахождение критерия неустойчивости пучка частиц, движущихся в плазме [110].

Неустойчивость пучка возникает, если образовавшиеся в нем возмущения (волны) нарастают. С квантовой точки зрения это означает, что коэффициент поглощения для волн (квантов) в пучке должен быть отрицательным (т. е. $\mu < 0$), что и имеет место, если частицы пучка, во-первых, вообще могут излучать волны и, во-вторых, функция распределения частиц в пучке по скоростям обеспечивает превалирование индуцированного испускания над поглощением. Достаточно быстрая частица $\left(v \gg \sqrt{\varkappa T/m}\right)$, движущаяся в изотропной плазме, как сказано, излучает черенковские плазменные волны. Коэффициент же поглощения μ отрицателен (происходит больше актов индуцированного испускания, чем актов поглощения), если на «верхних» уровнях в пучке больше частиц, чем на «нижних» (см. (7.7), (7.8) и подробнее гл. 16). Для частиц без внутренних степеней свободы (т. е. для свободных электронов, протонов и т. п.) или в пренебрежении изменением внутреннего состояния верхний уровень отвечает просто бóльшей скорости. Отсюда сразу же следует, что неустойчивым будет поток, в котором для какого-

то интервала скоростей имеется больше быстрых частиц, чем медленных, т. е. функция распределения частиц в пучке по скоростям $f_s(v)$ имеет положительную производную. Такое же условие неустойчивости $df_s/dv > 0$ получается и классически [120], но в результате специального исследования. Не менее, а в известном смысле и более эффективен (в связи с большей сложностью задачи) квантовый метод получения критерия устойчивости в уже упоминавшемся случае движения пучка заряженных частиц в магнитоактивной плазме (здесь нужно учитывать изменение перпендикулярной магнитному полю проекции скорости частицы или, на квантовом языке, учитывать переходы между уровнями энергии для перпендикулярного к полю движения, которое квантуется [83, 109]).

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим для простоты излучение в направлении скорости **v** одномерного потока частиц (в общем случае роль $f_s(v)$ играет функция $f_s(v_k)$, где $v_k = v\cos\theta$ — проекция скорости частиц потока на направление волнового вектора излучаемых волн **k**). Для функции распределения типа

$$f_s(v_k) = \text{const} \cdot \exp\left\{-\frac{M}{2\varkappa T_s}(v_k - v_0\cos\theta)^2\right\},$$

изображенной на рис. 7.2, коэффициент $\mu > 0$ в области *II*, где $df_s(v_k)/dv_k < 0$, и $\mu < 0$ в области *I* с $df_s(v_k)/dv_k > 0$. В силу черенковского условия $v\cos\theta_0 = v_k = c/n_3(\omega)$ и волны, испускаемые частицами с разными значениями v_k (в частности, значениями, отвечающими областям *I* и *II* на рис. 7.2), имеют разную частоту, а значит, не могут погасить друг друга и обеспечить устойчивость, даже если $\mu < 0$ только для небольшой части значений v_k. Заметим, что для любой изотропной трехмерной функции распределения электронов по скоростям $f = f(v^2)$ функция $f(v_k) = \int f(v^2)\,dv_\perp$ ($v_\perp$ — проекция скорости на направление, перпендикулярное **k**) не имеет положительной производной и распределение устойчиво.

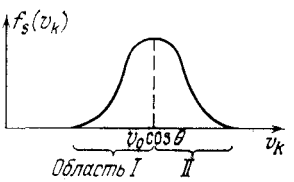


Рис. 7.2. Функция распределения $f_s(v_k)$ для частиц в пучке.

Возможность излучения черенковских волн приводит, разумеется, и к возможности поглощения частицей таких же волн любого происхождения. Отсюда ясно, что в плазме, помимо поглощения волн, связанного с соударениями *), должно происходить поглощение черенковского типа. В изотропной плазме для

*) При соударениях частиц возникает тормозное излучение. Обратный процесс и состоит в поглощении волн в результате соударений.

поперечных волн такого поглощения, конечно, нет (так как нет и черенковского излучения)*).

Но плазменные волны должны поглощаться и в отсутствие соударений. Необходимость появления такого поглощения была уже довольно давно выяснена совсем на другом пути [121] без привлечения соображений о черенковском излучении.

Именно, рассмотрим линеаризованное кинетическое уравнение для плазменных электронов (см., например, [84] и гл. 12)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f_1 + \frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0, \quad f = f_0 + f_1, \quad |f_0| \gg |f_1| \tag{7.34}$$

(здесь пренебрегается соударениями, а $f_0(\mathbf{v})$ — функция распределения в нулевом приближении, т. е. при равновесии — максвелловское распределение). Тогда использование метода Фурье (т. е. подстановки $f_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = g(\mathbf{v})\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$) приводит к выражению

$$i(\omega - \mathbf{kv}) f_1 = \frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}} f_0. \tag{7.35}$$

Если $\omega \neq \mathbf{kv}$, то отсюда делением на $(\omega - \mathbf{kv})$ получается определенное выражение для f_1; подставляя затем f_1 в уравнения поля

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}_t}{\partial t}, \quad \mathbf{j}_t = e\int \mathbf{v} f_1\, d\mathbf{v},$$

получаем дисперсионное уравнение связывающее ω с $\mathbf{k}$; это уравнение можно записать в виде $c^2k^2/\omega^2 = n^2_{1,2,3}$, где $n_{1,2,3}$ — использованные выше показатели преломления для волн рассматриваемого типа — поперечных ($n_{1,2}$) и продольной (n_3). Если, однако, возможно равенство $\omega = \mathbf{kv}$, то уравнение (7.35) делить на $(\omega - \mathbf{kv})$ уже нельзя, и, как можно показать [121], распространяющаяся в плазме продольная волна затухает. Но условие

$$\omega = \mathbf{kv} = \frac{\omega n v}{c}\cos\theta, \quad k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \tag{7.36}$$

есть как раз черенковское условие (6.56), (6.58). Как сказано, в изотропной плазме оно может выполняться лишь для плазменных волн, поглощение которых в данном случае и представляет собой именно обратной эффект Вавилова — Черенкова (при этом волна ослабляется, а плазменные электроны, скорость которых удовлетворяет условию (7.36), получают дополнительную энергию)**).

---

*) При использовании обычного максвелловского распределения скоростей формально можно прийти к выводу о наличии хотя бы очень слабого, но все же отличного от нуля поглощения. Подобный вывод, однако, ошибочен и связан с тем, что нерелятивистское максвелловское распределение не обеспечивает полного отсутствия частиц со скоростью $v > c$.

**) Физическая интерпретация не связанного с соударениями затухания плазменных волн, была по существу дана еще в работе [120], где не было, однако, явных ссылок на черенковское излучение.

При наличии внешнего магнитного поля — в магнитоактивной плазме — излучение волн происходит в результате соударений (тормозное излучение), в силу эффекта Вавилова — Черенкова и вследствие ускорения частицы в магнитном поле (магнитотормозное излучение). В соответствии с этим имеются и три механизма поглощения. Нужно, впрочем, оговориться, что разделение излучения и поглощения на черенковское и магнитотормозное несколько условно. Частица (электрон) в магнитном поле движется, как мы знаем, по винтовой линии, вращаясь с частотой $\omega_H^* = \omega_H mc^2/\mathscr{E} = (eH_0/mc)(mc^2/\mathscr{E})$ ($\mathscr{E}$ — полная энергия). В вакууме такое движение приводит к излучению с частотами $s\omega_H^*$ ($s = 1, 2, \ldots$; доплеровского смещения частоты для простоты сейчас не учитываем). При наличии же плазмы характер излучения (его интенсивность, направленность и поляризация) изменяется и помимо частот $s\omega_H^*$ может появиться излучение с непрерывным спектром, которое явно является черенковским (при движении частицы строго по полю, магнитотормозное излучение вообще пропадает). Вместе с тем, например, при движении частицы по кругу в плоскости, перпендикулярной к полю $\mathbf{H}_0$, излучаются лишь дискретные частоты $s\omega_H^*$, т. е. по принятой терминологии речь идет только о магнитотормозном излучении. Физически же очевидно, что и в этом случае, если радиус окружности достаточно велик и $\mathscr{E}/mc^2 \gg 1$, спектр излучения практически непрерывен, а его характер в соответствующей области частот близок к спектру черенковского излучения. В силу сказанного в общем случае последовательно только единое рассмотрение магнитотормозного и черенковского излучений [122] и поглощения.

Остановимся на определении излучаемых (и поглощаемых) в магнитоактивной плазме частот несколько подробнее. Для этой цели выпишем здесь уравнение для амплитуд поля $q_{\lambda l}$, введенных ранее (см. (7.12)),

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega_{\lambda l}^2 q_{\lambda l} = \sqrt{4\pi}\,\frac{e}{n_{\lambda l}}\,(\mathbf{v}\mathbf{a}_{\lambda l}^*)\exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{R}) \equiv f(t), \qquad (7.37)$$

где $\omega_{\lambda l}^2 = c^2 k_\lambda^2 / n_{\lambda l}^2$, а $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ — радиус-вектор и скорость излучающей частицы.

Уравнение (7.37) получается в результате подстановки разложения (7.12) в уравнение для векторного потенциала (7.14), умножения этого уравнения на $\mathbf{a}_{\lambda l}^* \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})$ и интегрирования по пространству. Если не говорить о постоянном множителе, то вид «силы» $f(t)$ в (7.37) ясен сразу же, поскольку

$$\int (\mathbf{j}_e \mathbf{a}_{\lambda l}^*) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r})\, d\mathbf{r} = e\,(\mathbf{v}\mathbf{a}_{\lambda l}^*) \exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{R})$$

при $\mathbf{j}_e = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ (см. (7.14)).

Уравнение (7.37) имеет нарастающие во времени решения для $q_{\lambda j}$, отвечающие излучению, только на частотах $\omega_{\lambda j}$, представленных в спектре «силы» $f(t)$. Если, например, электрон движется равномерно, то $\mathbf{R} = \mathbf{v}t$ и в спектре «силы» f представлена лишь частота $\omega = \mathbf{kv}$. Поэтому условие излучения принимает вид $\omega_{\lambda j} = \omega = \mathbf{kv}$, т. е. сразу же получается черенковское условие (7.36), как об этом уже упоминалось в гл. 6.

Для электрона в магнитном поле $\mathbf{H}_0$, направленном по оси z,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{R} = \{R_0 \cos \omega_H^* t,\ R_0 \sin \omega_H^* t,\ v_z t\}, \\ &\mathbf{v} = \{-v_\perp \sin \omega_H^* t,\ v_\perp \cos \omega_H^* t,\ v_z\}, \\ &v_\perp = R_0 \omega_H^*, \\ &f(t) = \text{const}\,(-a_x^* v_\perp \sin \omega_H^* t + a_y^* v_\perp \cos \omega_H^* t + a_z^* v_z) \times \\ &\qquad \times \exp\{-i(kR_0 \sin \alpha \sin \omega_H^* t + k v_z t \cos \alpha)\}, \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

где для простоты положено $k_x = 0$, α — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$ (осью z). Используя разложение плоской волны по бесселевым функциям

$$\exp\{-ik_\lambda R_0 \sin \alpha \sin \omega_H^* t\} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(k_\lambda R_0 \sin \alpha) \exp(-is\omega_H^* t),$$

без труда получаем условие резонанса

$$\omega = |s\omega_H^* + k v_z \cos \alpha|; \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{7.39}$$

При $s = 0$ это условие тождественно черенковскому условию (7.36) с $v = v_z$; вместе с тем все члены с $s \neq 0$ отсутствуют только при движении строго вдоль поля, когда $R_0 = 0$. При $s \neq 0$ вместо (7.39) можно написать ($n = ck/\omega$)

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{s\omega_H^*}{1 - (v_z n/c)\cos \alpha}, \quad s > 0, \\ \omega &= \frac{s\omega_H^*}{(v_z n/c)\cos \alpha - 1}, \quad s < 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

причем частота, как и везде раньше, положительна (разумеется, черенковское условие (7.36) и условие (7.40) с $s < 0$ могут соблюдаться только при $n > 1$).

Если скорость $v_\perp \ll v_z = v \cos \theta$, то электрон в магнитном поле излучает подобно двум соответствующим образом выбранным диполям, движущимся вдоль поля со скоростью $v_z \approx v$, чему отвечают значения $s = \pm 1$ (точнее, интенсивность более высоких обертонов мала, если $kR_0 \sin \alpha = (\omega n/c)(v_\perp/\omega_H^*) \times \sin \alpha \ll 1$). Формулы (7.40) при $s = \pm 1$ по существу совпадают с формулой (6.62) для эффекта Доплера в среде (очевидно, при рассматриваемом движении в магнитном поле $\omega_{00}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \omega_{00} mc^2/\mathscr{E} = \omega_H mc^2/\mathscr{E} = \omega_H^*$, поскольку ω_H есть

частота в системе, в которой центр тяжести излучателя покоится).

Переходя от излучения к поглощению, видим, что в магнитоактивной плазме должны поглощаться волны с частотами (7.39), отвечающими магнитотормозному и черенковскому излучениям (с учетом эффекта Доплера). Заметим, что к тому же результату можно прийти [123], рассматривая (при движении электрона в магнитном поле) частотный спектр силы, действующей на этот электрон в поле волны (частота силы не равна частоте поля **E**, так как электрон перемещается и в разные моменты находится в поле разной напряженности).

Выше речь шла только об условиях излучения и поглощения. Вычисление интенсивности излучения и коэффициента поглощения составляет уже самостоятельную и иногда весьма громоздкую задачу. Она решается как методом кинетического уравнения, так и другими методами. Сводка соответствующих результатов для нерелятивистской плазмы приведена в [84] (см. также гл. 12). Не лишним здесь будет, быть может, отметить, что не связанное с соударениями поглощение волн в магнитоактивной плазме играет большую роль, причем не только при сверхвысоких температурах (в установках для использования термоядерных реакций), но и, например, в солнечной короне (температура $T \sim 10^6$ К; см. [83, 84]).

Обычно рассматривается только черенковское излучение точечных зарядов или заряженных сгустков (пакетов). Вместе с тем, конечно, совершенно ясно, что черенковское излучение может испускаться любым источником, движущимся со скоростью v, большей фазовой скорости света в среде $v_\Phi = c/n$. Другими словами, условие излучения (6.56) сохраняется и для любого мультиполя, в частности для электрического и магнитного диполей (литературу см. в [89—92]); интенсивность же излучения существенно изменяется и уже для диполей (не говоря уже о более высоких мультиполях) она обычно значительно меньше, чем для заряда. Так, по порядку величины при $v \sim c$ и $n \sim 1$ интенсивность излучения электрического диполя с моментом $p = ed$ меньше интенсивности излучения заряда e в $p^2\omega^2/e^2c^2 \sim (d/\lambda)^2$ раз; в случае магнитного диполя μ это отношение порядка $\mu^2\omega^2/e^2c^2$ (появление множителя $(d/\lambda)^2$ особенно легко понять, рассматривая диполь как два расположенных на расстоянии d заряда $+e$ и $-e$; см. [124]).

Для элементарных частиц (электрон, нейтрон и т. д.) или атомных ядер магнитодипольное черенковское излучение очень слабо и не представляет интереса. Положение меняется, когда рассматриваются сгустки частиц, в определенных условиях излучающие подобно точечным частицам с зарядом и мультипольными моментами, отвечающими всему сгустку. Именно с такой ситуацией можно встретиться при движении сгустков или токовых колец в магнитоактивной плазме или по оси каналов и ще-

лей, а также вблизи замедляющей системы и т. п. Кроме того, вычисление интенсивности черенковского излучения диполей является известным методическим приемом, в частности позволяющим получить некоторые сведения о магнитном моменте частиц с различными спинами (литературу см. в [92]). Далее, в вопросе о черенковском излучении магнитного диполя долгое время имелись известные неясности. Наконец, довольно любопытно выяснить, как изменяется черенковское излучение диполей при их движении в каналах и щелях. По указанным причинам мы и остановимся здесь на черенковском излучении диполей (следуем [92, 125а]).

Рассмотрим точечную частицу с зарядом e, электрическим дипольным моментом $\mathbf{p}$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$, движущуюся со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$. Тогда плотность тока, связанного с частицей, равна (ρ_e — плотность заряда, $\mathfrak{M}$ — намагничение, $\mathbf{P}$ — поляризация; см. также (6.20))

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} =$$

$$= e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + c \operatorname{rot} \{\boldsymbol{\mu}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\} + \frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\}. \quad (7.41)$$

Среду будем для простоты считать изотропной и немагнитной (магнитная проницаемость $\mu = 1$; не путать магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ и проницаемость μ!). Тогда, считая, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, получаем уравнения (см., например, (7.14) при $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$ и гл. 6)

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (7.42)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \sum_{\lambda, l}(q_{\lambda l}\mathbf{A}_{\lambda l} + q^*_{\lambda l}\mathbf{A}^*_{\lambda l}), \quad \mathbf{A}_{\lambda l} = c\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon}}\,\mathbf{a}_{\lambda l}\exp i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}, \\ &\mathbf{a}_{\lambda i}\mathbf{a}_{\lambda l} = \delta_{il}, \quad \mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l} = 0, \quad i, j = 1, 2, \\ &\mathscr{H}_{tr} = \int \frac{\varepsilon E_{tr}^2 + H^2}{8\pi}\,dV = \sum_{\lambda, l}(p_{\lambda l}p^*_{\lambda l} + \omega^2_{\lambda l}q_{\lambda l}q^*_{\lambda l}), \\ &\mathbf{E}_{tr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad p_{\lambda l} = \frac{dq_{\lambda l}}{dt} \equiv \dot{q}_{\lambda l}, \\ &\omega^2_{\lambda l} = \omega^2_\lambda = \frac{c^2 k^2_\lambda}{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \quad (7.43)$$

Здесь, очевидно, φ — скалярный потенциал, $\mathscr{H}_{tr}$ — энергия поперечного поля и $\mathbf{a}_{\lambda l}$ — векторы поляризации. Подставляя в (7.42) выражение (7.41) и интегрируя по объему после умножения на $\mathbf{A}^*_{\lambda l}$, имеем

$$\ddot{q}_{\lambda l} + \omega^2_\lambda q_{\lambda l} = \frac{1}{c}\int (\mathbf{j}\mathbf{A}^*_{\lambda l})\,dV =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon}}\{e(\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{v}) - ic\mu[\mathbf{k}_\lambda \mathbf{a}_{\lambda l}] - i(\mathbf{a}_{\lambda l}\mathbf{p})(\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v})\}\exp(-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{v}t). \quad (7.44)$$

Интегрируя уравнения (7.44), например, с начальными условиями $q_{\lambda j}(0) = \dot{q}_{\lambda j}(0) = 0$, находим энергию $\mathcal{H}_{tr}$. Эта энергия содержит часть, которая нарастает со временем и связана с возникновением резонанса при черенковском условии $\omega_\lambda = \mathbf{kv}$. Нарастающая во времени часть $\mathcal{H}_{tr}$, о которой только и будет речь ниже, не зависит от начальных условий и ее легко вычислить путем введения плотности состояний

$$dZ_i(\omega) = \frac{\varepsilon^{3/2}\omega^2\, d\omega\, d\Omega}{(2\pi c)^3}$$

и интегрирования по углу θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ (выше $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$). Все эти операции уже проводились в гл. 1 и 6.

Из (7.44) ясно, что излучение заряда e и диполей с моментами $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\mu}$ сдвинуто по фазе на $\pi/2$, в силу чего не возникает интерференции между излучением заряда и диполей. Другими словами, излучаемая в единицу времени энергия равна сумме выражения (6.61) для заряда и выражения для энергий черенковского излучения диполей

$$\frac{d\mathcal{H}_{tr}}{dt} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2\pi v c^2} \sum_{j=1,2} \int d\omega \int_0^{2\pi} n^2\omega^3 \left\{ \boldsymbol{\mu}[\mathbf{sa}_j] + \frac{1}{n}(\mathbf{a}_j\mathbf{p}) \right\}^2 d\varphi, \quad (7.45)$$

где $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость среды,

$$\cos\theta = \cos\theta_0 = c/vn(\omega), \quad \mathbf{s} = \mathbf{k}/k,$$

θ и φ — полярный и азимутальный углы в системе координат с осью z, направленной по скорости $\mathbf{v}$. Интегрирование по частотам в (7.45) ведется по области, где $vn(\omega)/c \geqslant 1$. Как подчеркивалось в гл. 6, приведенный расчет учитывает дисперсию (зависимость n от ω), хотя это и не очевидно на первый взгляд.

Для магнитного диполя с моментом $\boldsymbol{\mu}$, направленным по скорости, из (7.45) получаем [77а]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2}{vc^2} \int n^2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2n^2}\right) \omega^3\, d\omega. \quad (7.46)$$

Для электрического диполя из (7.45) также сразу получаются уже известные выражения [97, 124]. Упомянутые же выше неясности возникали при рассмотрении магнитного диполя, движущегося перпендикулярно оси диполя. Если в системе покоя частицы его моменты равны $\boldsymbol{\mu}_0$ и $\mathbf{p}_0 = 0$, то в лабораторной системе, как известно, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ и $\mathbf{p} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\boldsymbol{\mu}]$. Для этого случая (при $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\mu}$) находим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2}{2vc^2} \int n^2\omega^3 \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{n^2c^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{n^2v^2}\right) \right\} d\omega. \quad (7.47)$$

Это выражение совпадает с полученным в [97], но отличается от результата других расчетов. Так, в [124] вместо формулы

(7.47) приводится соотношение

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2 v}{2c^4} \int n^4 \omega^3 \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right)^2 d\omega. \tag{7.48}$$

Причина расхождения заключается в том, что в [124] и некоторых других статьях используются «истинные» магнитные диполи, образованные магнитными полюсами (расчет вначале ведется для магнитных полюсов, из которых затем образуется диполь). Однако движущиеся «истинные» магнитные диполи эквивалентны токовому моменту только в вакууме. Действительно, при использовании магнитных полюсов с плотностью магнитного заряда $\rho_m(\mathbf{r})$ уравнения поля имеют вид (см., например, [126])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}, & \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\mathbf{H})}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\rho_m\mathbf{v}, & \operatorname{div}\mu\mathbf{H} &= 4\pi\rho_m, \end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

где считается, что $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (мы вынуждены еще раз напомнить о необходимости различать обозначенные одной и той же буквой μ магнитную проницаемость и магнитный момент).

Отсюда

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\varepsilon\frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho_m\mathbf{v}).$$

В присутствии же электрических зарядов и токов (но при $\rho_m = 0$) имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho\mathbf{v}),$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}.$$

Таким образом, уравнения для магнитных полюсов получаются из уравнения для электрических зарядов в результате замен

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \quad \rho \to \rho_m, \quad \mu \to \varepsilon.$$

Поэтому, на самом деле, токовый момент при $\mu = 1$ эквивалентен «истинному» магнитному моменту только в вакууме, когда $\varepsilon = 1$. В среде же с $\varepsilon \neq 1$ движущийся «истинный» магнитный момент обладает электрическим моментом, равным $\frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{v}\mu]$, а не $\frac{1}{c}[\mathbf{v}\mu]$. Такая замена эквивалентна учету электрической поляризации среды, увлекаемой самим диполем [125б]. Иначе говоря, «истинный» магнитный диполь эквивалентен токовому моменту, «сделанному» из материала с проницаемостью ε и по-

тому поляризующемуся. Любопытно, что подобный случай для сгустков можно осуществить; для этого, как сказано, нужно, чтобы (для рассматриваемой частоты) диэлектрическая проницаемость ε в самом сгустке равнялась проницаемости окружающей среды (например, плазмы, находящейся в магнитном поле).

При квантовом расчете (см. [77а] и литературу, указанную в [92]), исходя из уравнений Паули или Дирака (а также уравнений для частиц со спином 1, $^3/_2$ и 2), находим, в частности, выражения типа (7.46) и (7.47). Если спин при этом направлен по или против скорости $\mathbf{v}$, выражение типа (7.47) получается лишь для переходов с перебросом спина, так как только при таком перебросе существенны перпендикулярные $\mathbf{v}$ компоненты оператора спина. На самом же деле, черенковское излучение магнитного диполя не обладает никакой квантовой спецификой.

Характерная особенность выражения (7.47) по сравнению с (6.61) и (7.46) состоит в том, что в нем подынтегральное выражение не исчезает на пороге эффекта (при $\cos\theta_0 = c/nv = 1$), когда

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu^2}{vc^2}\int n^2\omega^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 d\omega. \qquad (7.47а)$$

Этот результат не может, однако, считаться парадоксальным, так как сама мощность dW/dt на пороге равна нулю и затем плавно нарастает. Действительно, с ростом скорости излучение при учете дисперсии начинается на частоте, отвечающей максимальному значению $n(\omega)$. Далее при учете отдачи, что автоматически достигается при квантовом расчете, получается формула (7.3), в которой в случае сгустка роль массы m играет, очевидно, масса всего сгустка. В силу (7.3) даже при $n = \text{const}$ излучение с ростом скорости $\mathbf{v}$ начинается на одной частоте, в данном случае на частоте $\omega = 0$; таким образом, область интегрирования и сама мощность излучения (7.47) с возрастанием v увеличиваются постепенно.

Заметим, что при квантовом расчете можно получить также и выражение типа (7.48), для чего нужно к уравнению Дирака для заряженной частицы добавить соответствующий член, пропорциональный $\gamma_i\gamma_k G_{ik}$, а для частицы с некинематическим магнитным моментом заменить $\gamma_i\gamma_k F_{ik}$ на $\gamma_i\gamma_k H_{ik}$ (здесь $F_{ik} = \{\mathbf{H}, i\mathbf{E}\}$, $H_{ik} = \{\mathbf{H}, i\mathbf{D}\}$ и $G_{ik} = F_{ik} - H_{ik}$; γ_i — известные матрицы Дирака). Однако в применении к отдельным частицам вводить такие изменения нет оснований, а применять подобный квантовый расчет в случае сгустков было бы бессмысленно.

Заканчивая изложение теории черенковского излучения остановимся на случае движения источника (заряда, диполя) в каналах и щелях (для простоты примем, что в канале или щели $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$). Этот вопрос важен, во-первых, при изыскании возможностей уменьшить ионизационные потери, которые, грубо говоря, сосредоточены в непосредственной близости

от траектории частицы. В то же время черенковское излучение формируется в области с размерами порядка длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega n = \lambda_0/n$. Во-вторых, рассмотрение излучения в каналах и щелях представляет известный методический интерес.

В случае черенковского излучения заряда, как следует из расчета (см. [127] и ниже), интенсивность излучения при $a/\lambda \ll 1$ такая же, как в сплошной среде (a — радиус канала или ширина щели). Этот результат находится в согласии с упомянутым интуитивным представлением, что канал или щель с размерами $a \ll \lambda$ не должны оказывать влияния на излучение, формирующееся в области с размерами порядка λ. Фактически же такой вывод уже для диполей и других мультиполей верен лишь в частных случаях.

Для выяснения влияния тонких каналов (щелей) на черенковское излучение удобно воспользоваться теоремой взаимности

$$\int\limits_{(1)} \mathbf{j}_\omega^{(1)} \mathbf{E}_\omega^{(2)}\, dV = \int\limits_{(2)} \mathbf{j}_\omega^{(2)} \mathbf{E}_\omega^{(1)}\, dV, \tag{7.50}$$

где $\mathbf{j}_\omega^{(1,\,2)} \equiv \mathbf{j}^{(1,\,2)}(\omega)$ — компоненты Фурье плотности стороннего тока в областях 1 и 2; поле $\mathbf{E}_\omega^{(2)}$ создается током 2 в области 1 и поле $\mathbf{E}_\omega^{(1)}$ — током 1 в области 2 (см., например, [84, 86, 126])*).

Записывая ток в виде $\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{M} + \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$, получаем

$$\int\limits_{(1)} \left[(\rho_e \mathbf{v})_\omega^{(1)}\, \mathbf{E}_\omega^{(2)} - i\omega\left(\mathbf{P}_\omega^{(1)} \mathbf{E}_\omega^{(2)} - \mu_1 \mathfrak{M}_\omega^{(1)} \mathbf{H}_\omega^{(2)}\right)\right] dV =$$

$$= \int\limits_{(2)} \left[(\rho_e \mathbf{v})_\omega^{(2)}\, \mathbf{E}_\omega^{(1)} - i\omega\left(\mathbf{P}_\omega^{(2)} \mathbf{E}_\omega^{(1)} - \mu_2 \mathfrak{M}_\omega^{(2)} \mathbf{H}_\omega^{(1)}\right)\right] dV, \tag{7.51}$$

где $\mu_{1,\,2}$ — магнитная проницаемость среды в точках 1 и 2. В случае черенковского излучения точечного заряда, движущегося по оси z,

$$(\rho_e \mathbf{v})_\omega^{(1)} = \frac{e}{2\pi}\, \mathbf{v} \exp(i\omega z/v)\, \delta(x)\, \delta(y) \tag{7.52}$$

и, помещая в удаленной от траектории точке 2 некоторый электрический диполь с моментом $\mathbf{p}^{(2)} = \int \mathbf{P}^{(2)}\, dV$, имеем

$$\frac{e}{2\pi} \int \mathbf{v} \mathbf{E}^{(2)}(0,\, 0,\, z) \exp\left(i\,\frac{\omega}{v}\, z\right) dz = -i\omega \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{E}(2), \tag{7.53}$$

где $\mathbf{E}(2) \equiv \mathbf{E}^{(1)}(2)$ — интересующее нас поле излучения в точке 2 (индекс ω опускаем).

*) В указанной форме теорема взаимности справедлива для любой линейной неподвижной среды, но в отсутствие внешнего магнитного поля. При наличии магнитного поля, когда тензоры проницаемостей ε_{ij} и μ_{ij} несимметричны, справедлива лишь обобщенная теорема взаимности (см. § 29 в [84]).

При движении заряда в тонком канале или узкой щели (т. е. при $a/\lambda \ll 1$) величина $\mathbf{vE}^{(2)}(0, 0, z)$ остается такой же, как для сплошной среды, поскольку тангенциальные компоненты поля $\mathbf{E}^{(2)}$ непрерывны. Поэтому, как ясно из (7.53), и поле излучения остается таким же, как в случае сплошной среды.

Для излучающего электрического диполя $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{p}\delta(z - vt) \times \times \delta(x)\delta(y)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{pE}^{(2)}(0, 0, z)\exp\left(i\frac{\omega z}{v}\right)dz = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{E}(2). \qquad (7.54)$$

Если диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(1)}$ параллелен оси канала или лежит в плоскости щели, в которой он движется, то при $a/\lambda \ll 1$ поле излучения опять остается таким же, как для сплошной среды. Для диполя, перпендикулярного плоскости щели, в связи с непрерывностью нормальной к границе раздела составляющей $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, имеем

$$\mathbf{pE}^{(2)}(0, 0, z) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{pE}_0^{(2)}(0, 0, z), \qquad (7.55)$$

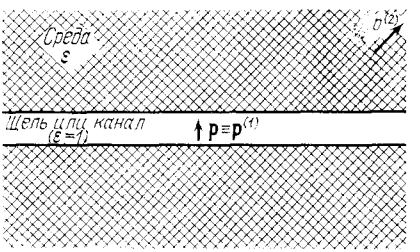


Рис. 7.3. К расчету излучения диполя в канале или щели.

где $\mathbf{E}_0^{(2)}$ — поле, создаваемое диполем 2 в сплошной среде (рис. 7.3). Если поле черенковского излучения диполя 1 (с моментом $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}$) в сплошной среде обозначить через $\mathbf{E}_0$, то по теореме взаимности

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{pE}_0^{(2)}\exp\left(\frac{i\omega z}{v}\right)dz = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{E}_0(2). \qquad (7.56)$$

При наличии щели, в силу (7.55) и теоремы взаимности,

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{pE}^{(2)}\exp\left(i\frac{\omega z}{v}\right)dz = \frac{1}{2\pi}\varepsilon\int \mathbf{pE}_0^{(2)}\exp\left(i\frac{\omega z}{v}\right)dz = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{E}(2). \qquad (7.57)$$

Из последних двух соотношений следует, что для диполя, ориентированного перпендикулярно его скорости, а тем самым и перпендикулярно плоскости пустой щели, поле черенковского излучения $\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}_0$, т. е. в ε раз больше, чем для такого же диполя, движущегося в сплошной среде.

Для диполя, направленного перпендикулярно оси тонкого канала, имеющего форму круглого цилиндра, $\mathbf{E} = (2\varepsilon/(\varepsilon + 1))\,\mathbf{E}_0$. Поскольку магнитное поле в волновой зоне пропорционально электрическому, излучаемая энергия в рассмотренных случаях щели и канала возрастает соответственно в ε^2 и $(2\varepsilon/(\varepsilon + 1))^2$

раз *). Произвольно ориентированный диполь можно считать состоящим из диполей, параллельного и перпендикулярного оси канала (щели) и, таким образом, в силу принципа суперпозиции эта задача сводится к предыдущим. Для магнитного диполя с моментом μ, как ясно из (7.51), при магнитной проницаемости $\mu = 1$ наличие узкого канала на излучении не сказывается. Если одновременно имеются электрический и магнитный диполи, то излучаемые ими поля (но, конечно, не энергии) складываются, т. е. задача также легко решается.

Движущийся токовый момент и «истинный» магнитный момент, помещенные в пустой полости, разумеется, должны давать одинаковое излучение. Это заключение было проверено также прямым расчетом [128] для излучения различных диполей, движущихся в круглом канале; в частном случае тонкого канала получился, как и должно быть, приведенный выше результат, т. е. увеличение поля электрического диполя в $2\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ раз.

В связи с тем, что черенковское излучение движущегося электрического диполя, а при магнитной проницаемости $\mu \neq 1$ также и магнитного диполя, зависит от формы сколь угодно узкой полости, возникает вопрос о справедливости формул (7.45), (7.46) и (7.47) при движении диполей в сплошной среде. Из теоремы взаимности ясно, что речь здесь идет о возможности считать действующее на диполи поле $\mathbf{E}_{эфф}$ средним макроскопическим полем $\mathbf{E}$. Для внесенных в среду неподвижных диполей это, вообще говоря, не так (т. е. $\mathbf{E}_{эфф} \neq \mathbf{E}$). Однако для движущейся по заданной траектории частицы с зарядом или дипольными моментами среднее поле как раз и является макроскопическим полем. К тому же выводу о справедливости исходных выражений (7.42)—(7.44) при движении частицы в сплошной среде, приходим при их получении в результате усреднения уравнений микроскопической электродинамики. Таким образом, справедливость формул (7.45)—(7.47) для черенковского излучения точечных диполей в сплошной среде, на наш взгляд, не вызывает сомнений.

Выше можно было убедиться в высокой эффективности метода, основанного на использовании теоремы взаимности, при вычислении черенковского излучения в узких каналах. Этот ме-

*) При вычислении излучаемой энергии с помощью формулы (7.45) нужно при наличии канала или щели заменить $\mathbf{p}$ на соответствующее выражение, определяемое с помощью (7.54), т. е., например, для диполя, перпендикулярного оси круглого канала, на $(2\varepsilon/(\varepsilon + 1))\mathbf{p}$. Фигурирующий здесь множитель $2\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ появляется при решении электростатической задачи об электрическом поле в пустом канале, проделанном в среде с проницаемостью ε и имеющем форму круглого цилиндра. Если поле вдали от канала $\mathbf{E}_0$ однородно и перпендикулярно оси канала, то поле в канале однородно и равно $\mathbf{E} = \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}\mathbf{E}_0$ (более известна аналогичная задача не для канала, а для пустой сферы, когда $\mathbf{E} = \dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\mathbf{E}_0$; см. например, [4], с. 137).

тод применялся и при рассмотрении переходного излучения [129], он полезен при решении целого ряда других задач теории черенковского и переходного излучения при наличии границ, не говоря уже об исследовании многих других электродинамических вопросов (обзор результатов решения задач теории черенковского излучения при наличии границ см. в [89, 91]).

В заключение подчеркнем еще раз, что эффект Вавилова — Черенкова — многогранное явление, имеет различные аналоги и т. д. Неудивительно поэтому, что все время появляются новые приложения или родственные задачи. В качестве примера укажем на черенковское излучение в холестерических жидких кристаллах [130] и на аналог эффекта Вавилова — Черенкова при прохождении быстрых адронов через ядерноактивную среду (атомное ядро, нуклоны), причем испускаются в основном пионы [131]. Упомянем и о вопросах теории черенкового излучения, которых мы выше не касались: черенковского излучения в поглощающей среде [132] и возможной интерференции черенковского излучения с излучением других типов, например с переходным излучением [101, 133].

Глава 8

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ПЕРЕХОДНОЕ РАССЕЯНИЕ

Природа переходного излучения и переходного рассеяния. Переходное излучение на границе раздела двух сред. Переходное излучение в нестационарной среде. Зона формирования излучения. Энергетический баланс при переходном излучении. Переходное рассеяние.

Рассмотрим источник излучения, не обладающий собственной частотой (заряд, постоянный электрический или магнитный диполь и т. д.) и движущийся в среде прямолинейно и с постоянной во времени скоростью **v**. Тогда излучение Вавилова — Черенкова является единственно возможным (разумеется, при условии (6.55)) только для среды, однородной в пространстве и неизменной во времени. В случае же среды неоднородной и (или) изменяющейся во времени, а также вблизи нее, ситуация изменяется. Именно, в таких условиях имеет место переходное излучение, понимаемое в широком смысле этого понятия и представляющее собой излучение, возникающее при равномерном и прямолинейном движении заряда (или других источников, не обладающих собственной частотой) в неоднородных условиях — в неоднородной среде, в переменной во времени среде или вблизи таких сред.

Разумеется, переходное излучение в общем случае может сосуществовать и интерферировать с черенковским излучением и излучением, возникающим в результате ускорения заряда (т. е. тормозным излучением, синхротронным излучением и т.д.). Однако для понимания физики дела естественно по крайней мере сначала выделить одно переходное излучение.

Рассмотрим поэтому заряд, движущийся с постоянной скоростью *)

$$v < c/n, \tag{8.1}$$

*) При наличии излучения (черенковского, переходного) энергия заряда, вообще говоря, изменяется, и в связи с этим приходится сталкиваться с вопросом — можно ли считать скорость заряда строго постоянной. Ответ здесь безусловно положителен. Например, если массу излучающей частицы можно считать сколь угодно большой, то изменения ее скорости в результате излучения стремятся к нулю. Далее, потери энергии можно компенсировать за счет работы внешних источников. Таким образом, предположение о строгом постоянстве скорости источника вполне допустимо. Другое дело, что в некоторых задачах нужно учитывать также изменение скорости источника, но это совсем другой вопрос.

когда излучение Вавилова — Черенкова не возникает. Если, кроме того, речь идет о вакууме ($n = 1$), то вообще нет никакого излучения. Для его появления в вакууме заряд (или мультиполь) должен ускоряться или, другими словами, должен изменяться характеризующий излучение параметр v/c. При наличии среды этот параметр уже имеет вид $v/v_\phi = vn/c$ — он равен отношению скорости частицы v к фазовой скорости света $v_\phi = c/n$.

Но, и в этом суть дела, при наличии среды параметр vn/c может изменяться не только в результате изменений скорости v, но и в силу изменения вдоль траектории источника фазовой скорости света $v_\phi = c/n$ за счет соответствующего изменения показателя преломления. Излучение, возникающее при изменении параметра vn/c за счет изменения n при $v = \text{const}$, и называется переходным излучением.

Простейшая задача такого типа возникает при рассмотрении пересечения зарядом границы раздела двух сред (или, в частности, вакуума со средой). Именно возникающий при этом простейший тип переходного излучения был рассмотрен в 1944 г. [129]. Заметим, что приведенное выше пояснение, касающееся природы переходного излучения и связывающее его появление с изменением параметра vn/c, все же несколько формально и фактически требует понимания теории излучения в среде. Поэтому не лишним, вероятно, будет и здесь напомнить о наиболее наглядном объяснении причины появления переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела. Как известно, электромагнитное поле в первой среде (в среде, в которой в рассматриваемый момент движется заряд) можно представить как поле самого заряда и поле его «изображения», движущегося во второй среде навстречу заряду. При пересечении границы заряд и его изображение, «с точки зрения» первой среды, как бы частично «аннигилируют», или «перестраиваются», что и приводит к излучению. Особенно прост, конечно, случай нормального падения заряда из вакуума на идеальное зеркало — при пересечении границы зеркала заряд и его изображение полностью «аннигилируют» или, лучше сказать, останавливаются на границе (в том смысле, что возникающее в вакууме излучение такое же, как излучение падающего заряда q и его изображения — q, одновременно резко останавливающихся на границе раздела, рис. 8.1).

Совершенно очевидно, что обсуждаемое переходное излучение имеет место при пересечении границы любых сред с различными «электрическими» параметрами (диэлектрической проницаемостью, показателем преломления и т. п.). В статье [129], однако, внимание было сосредоточено на падении заряда на металл и соответственно на переходном излучении (в основном оптическом) в направлении «назад», т. е. наблюдаемом в вакууме. Для релятивистских частиц с достаточно высокой энер-

гией вполне реален, однако, и вариант, при котором частица проходит через среду и выходит в вакуум. В чисто теоретическом отношении эта задач эквивалентна предыдущей, а соответствующая формула для интенсивности излучения получается просто заменой скорости v на скорость $-v$ (см. ниже формулу (8.37) и пояснения к ней). Вместе с тем, конечно, при вычислении поля в этих случаях симметрия отсутствует и интенсивности излучения при замене v на $-v$ (или, другими словами, при влете или вылете из среды и наблюдении соответственно «назад» или «вперед») различны и в некоторых условиях сильно отличаются друг от друга. При излучении вперед и, в частности, при вылете из среды в вакуум в спектре представлены

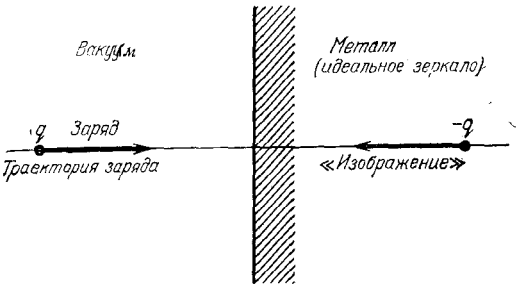


Рис. 8.1. Возникновение переходного излучения при прохождении заряда q через границу вакуум — металл.

более высокие частоты и, конкретно, в конденсированной среде переходное излучение релятивистских частиц может простираться в рентгеновскую часть спектра. Соответственно возрастает и интегральная (по всем углам и частотам) интенсивность излучения, которая в простейшем случае оказывается пропорциональной $1/\sqrt{1-v^2/c^2} = \mathscr{E}/Mc^2$ ($\mathscr{E}$ — полная энергия излучающего заряда с массой M). Это важное обстоятельство было выяснено лишь в 1959 г. [134]. Тем самым открылись более широкие перспективы создания эффективных «переходных счетчиков», предназначенных для детектирования или, точнее, определения скорости релятивистских частиц. Правда, вопрос о переходных счетчиках, связанный с рассмотрением многих границ раздела, был поднят еще ранее [135а], но предполагавшееся использование переходного излучения в оптической области спектра, по-видимому, не может привести к цели.

Как это часто бывает, появление возможности «практического» применения, в данном случае в физике высоких энергий, резко повысило интерес к переходному излучению. Если с 1945 по 1958 г. включительно переходному излучению было посвящено не более 15 статей, то за следующие 13 лет (с 1959 по 1971 г.) было опубликовано уже примерно 250 статей, а с 1972 по 1978 г. появилось около 300 статей (см. [88]).

Заметим также, что первые опубликованные результаты экспериментов, в которых исследовалось переходное излучение, относятся к 1959 г. (см. [135б] и указанную там литературу). В общем, около 15 лет переходное излучение, этот достаточно простой и ясный эффект из области классической электродинамики, не привлекало к себе почти никакого внимания, сейчас же оно весьма популярно, но в основном в плане разработки и применений переходных счетчиков. Этот аспект проблемы освещен даже в ряде обзоров, не говоря уже о большом числе статей (см. [88] и, например, литературу, цитируемую в [94]).

Ни в какой мере не отрицая важности исследований, связанных с переходными счетчиками, подчеркнем, что переходное излучение, понимаемое в достаточно широком смысле, имеет несомненное общефизическое значение, формирует определенные представления и «язык», а тем самым способствует дальнейшему развитию в ряде направлений. Ситуация здесь, в общем, аналогична имеющей место в отношении эффекта Вавилова — Черенкова, который непосредственно (и, можно сказать, в чистом виде) используется в первую очередь в черенковских счетчиках.

Переходное излучение, таким образом, это многогранное явление. Однако до недавнего времени внимание сосредоточивалось на переходном излучении, возникающем при пересечении одной или ряда границ раздела между средами. В последнем случае речь идет либо об упорядоченной последовательности границ, т. е. системе с определенным периодом, либо о хаотически расположенных границах (неоднородностях) *). Другое давно развивающееся направление определяется тем, что всякое излучение и, в частности, переходное излучение с длиной волны λ формируется не в точке, а в некоторой области («зоне формирования»), размер которой пропорционален λ, но может и значительно ее превосходить. Поэтому, например, эффект Вавилова — Черенкова возникает и при движении частицы в вакууме, но вблизи среды (в канале, в щели или вблизи границы среды; см. гл. 7). Совершенно аналогичным образом переходное излучение (в этом случае его обычно называют дифракционным) возникает при пролете источника (заряда), равномерно движущегося в вакууме (или в однородной среде), вблизи каких-то препятствий — металлических или диэлектрических шариков, диафрагм, дифракционной решетки и т. п. (см. [136]). Не говоря уже о сделанном выше замечании общего характера,

*) Переходное излучение в периодически неоднородной среде обладает, разумеется, своей спецификой. Быть может, поэтому его иногда называют резонансным излучением. Нам, однако, представляется, что использование для всех различных видов переходного излучения разных терминов вряд ли целесообразно и приводит лишь к недоразумениям. Ниже переходное излучение в периодической среде будем, в качестве некоторого компромисса, называть резонансным переходным излучением, а также переходным рассеянием.

появление такого переходного излучения легко понять и на основе метода изображений.

Еще один тип переходного излучения, который начали рассматривать, однако, лишь сравнительно недавно [137], возникает уже в однородной среде, но при изменении ее свойств во времени. Суть дела здесь легче всего понять в терминах, использующих параметр vn/c. Как уже упоминалось, при $v = \text{const}$ для появления переходного излучения на траектории заряда или вблизи нее должен изменяться показатель преломления n. Но это изменение будет, очевидно, иметь место и в условиях, когда показатель n изменяется во времени, например в какой-то момент более или менее резко возрастает или уменьшается.

Подобно излучению типа Вавилова — Черенкова переходное излучение носит весьма общий характер и в том смысле, что может иметь место для волн различной природы. В качестве примера упомянем о переходном излучении акустических волн, возникающем при переходе движущейся дислокации через границу зерен в поликристалле. Вероятно, в акустике представляют интерес и другие задачи, связанные с переходным излучением (несколько ссылок на соответствующую литературу см. в [94]). Любопытно, а может быть, и имеет реальное значение в применении к магнитосферам пульсаров, переходное излучение, возникающее уже в вакууме, но при наличии сильного магнитного поля, приводящего к появлению нелинейных электродинамических эффектов [94, 105].

Явление, родственное переходному излучению, а иногда тождественное ему — это переходное рассеяние.

Если переходное излучение происходит при движении заряда в среде с периодически (скажем, синусоидально) изменяющимся показателем преломления, то можно не только говорить о переходном излучении или резонансном переходном излучении, но и называть соответствующий процесс переходным рассеянием. Действительно, в этом случае волна диэлектрической проницаемости (показателя преломления), которая может быть стоячей или бегущей, как бы рассеивается на движущемся заряде, порождая электромагнитное (переходное) излучение. В таких условиях не стоило бы, однако, применять термин переходное рассеяние вместо переходного излучения, если бы эффект не сохранялся и в предельном случае покоящегося заряда. Тогда говорить о переходном излучении по меньшей мере неестественно, в то время как термин переходное рассеяние отражает суть дела. Действительно, речь идет, например, о падении на неподвижный (фиксированный) заряд волны проницаемости, причем от заряда расходится электромагнитная волна. Подобную волну можно считать рассеянной в таком же смысле, как и при других типах рассеяния, например при рассеянии электромагнитной волны на покоящемся электроне

(в данном случае, конечно, имеется в виду покой только при неучете действия падающей волны). Переходное рассеяние играет видную роль в физике плазмы, а в целом представляет собой явление весьма общего типа и, например, должно иметь место в вакууме при падении электромагнитной или гравитационной волны на область с сильным статическим электромагнитным полем [138]. При этом происходит преобразование падающей (соответственно электромагнитной или гравитационной) волны в расходящуюся электромагнитную волну.

Переходному излучению посвящено, как уже указывалось, весьма большое число работ (см. [88]), а также ряд обзоров [8, 93, 94]. Ниже будет освещено лишь несколько основных вопросов теории переходного излучения и переходного рассеяния, причем мы следуем статье [94]. Как и в ряде других мест книги, не будем при этом бояться повторений, что позволяет читать текст не обращаясь на каждом шагу к другим главам.

Рассмотрим вначале основную и простейшую в известном смысле задачу теории переходного излучения о пересечении движущимся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ зарядом q границы раздела двух сред. Для простоты считаем, что падение на границу раздела нормально. Изотропные среды *1* и *2* характеризуются

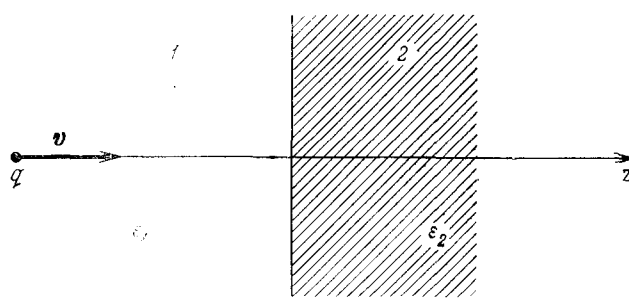


Рис. 8.2. К расчету переходного излучения при пересечении зарядом q границы раздела двух сред.

значениями диэлектрической проницаемости ε_1 и ε_2, которые в общем случае могут быть комплексными (рис. 8.2). Исходными являются, разумеется, уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^q,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\quad \mathbf{B}=\mathbf{H}, \tag{8.2}$$

в которых плотность тока равна

$$\mathbf{j}^q=q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\equiv q\mathbf{v}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt). \tag{8.3}$$

В силу того, что задача однородна по времени и по направлениям в каждой из сред, параллельным границе раздела, удобно

все величины разложить по Фурье во времени и по компоненте $\mathbf{r}$, перпендикулярной скорости заряда (обозначаемой здесь через $\mathbf{r}_\perp$; ось z перпендикулярна границе). Тогда

$$\left.\begin{aligned} j_z^q(\mathbf{r}, t) &= \int j_{\varkappa,\omega}(z)\exp\left(i\varkappa\mathbf{r}_\perp - i\omega t\right) d\varkappa\, d\omega, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\varkappa,\omega}(z)\exp\left(i\varkappa\mathbf{r}_\perp - i\omega t\right) d\varkappa\, d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{H}_{\varkappa,\omega}(z)\exp\left(i\varkappa\mathbf{r}_\perp - i\omega t\right) d\varkappa\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Вектор $\varkappa$ имеет две компоненты $\varkappa_x$ и $\varkappa_y$. Для компоненты фурье-проекции j_z^q плотности тока $\mathbf{j}^q$ из (8.2) получаем

$$j^q_{\varkappa,\omega}(z) = q\exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right)/(2\pi)^3. \tag{8.5}$$

Удобно также выделить компоненту $\mathbf{E}$ по направлению скорости заряда, обозначаемую просто через E, и перпендикулярную компоненту $\mathbf{E}_\perp$. По определению

$$E = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{v})}{v}, \quad \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{E}\mathbf{v})}{v^2}. \tag{8.6}$$

Вектор $\mathbf{E}_\perp$ имеет две компоненты E_x и E_y.

Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться только уравнениями для компонент Фурье в разложении (8.4), то для сокращения будем опускать индексы $\varkappa$, ω у соответствующих величин. Для указанных компонент, проектируя уравнения (8.2) на направление скорости заряда $\mathbf{v}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_x H_y - \varkappa_y H_x = -\frac{\omega}{c}\varepsilon E - \frac{4\pi i}{c} j^q, \\ H_y = -\frac{c}{\omega}&\left(\varkappa_x E + i\frac{\partial E_x}{\partial z}\right), \quad H_x = \frac{c}{\omega}\left(\varkappa_y E + i\frac{\partial E_y}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Отсюда (вводим обозначение $\varkappa^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$) находим

$$\left(\varkappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)E + i\frac{\partial}{\partial z}(\varkappa\mathbf{E}_\perp) = \frac{4\pi i\omega}{c^2(2\pi)^3} q\exp\left[i\frac{\omega}{v}z\right]. \tag{8.8}$$

При проектировании уравнений Максвелла на направление, перпендикулярное скорости частицы $\mathbf{v}$, ток частицы, естественно, не вносит вклада, и мы имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)(\varkappa\mathbf{E}_\perp) = i\varkappa^2\frac{\partial E}{\partial z}. \tag{8.9}$$

Действуя оператором $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon$ на обе части уравнения (8.8) и используя (8.9), можно исключить $\varkappa\mathbf{E}_\perp$ и получить одно уравнение для E

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varepsilon E + \varepsilon\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2\right)E = -\frac{4\pi i\omega q}{c^2(2\pi)^3}\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2}\right)\exp\left[i\frac{\omega}{v}z\right]. \tag{8.10}$$

Здесь учтено, что в пределах каждой из сред *1* и *2* диэлектрическая проницаемость ε является постоянной величиной и не зависит от z. Однако на границе раздела сред она испытывает скачок. Поэтому уравнение (8.10) нужно решать в каждой из сред и сшивать решения, используя граничные условия — равенство на границе нормальных компонент индукции и тангенциальных компонент электрического поля

$$\varepsilon_1 E_1|_{z=0} = \varepsilon_2 E_2|_{z=0},$$
$$(\varkappa \mathbf{E}_\perp)_1|_{z=0} = (\varkappa \mathbf{E}_\perp)_2|_{z=0}. \tag{8.11}$$

Рассмотрим вначале решение уравнения (8.10) для однородной среды (в качестве которой может служить каждая из двух сред). Такое решение будет суммой вынужденного решения — поля заряда q в среде

$$E^q = -\frac{4\pi i q\,(1 - c^2/v^2\varepsilon)}{\omega\,(2\pi)^3\,(\varepsilon - c^2/v^2 - \varkappa^2 c^2/\omega^2)} \exp\left[i\frac{\omega}{v}z\right] \tag{8.12}$$

и — свободного поля (поля излучения)

$$E^R = \frac{4\pi i q}{\omega\,(2\pi)^3}\, a \exp\left[\pm i\frac{\omega}{c} z \sqrt{\varepsilon - \frac{\varkappa^2 c^2}{\omega^2}}\right]. \tag{8.13}$$

Напомним, что $E = E^q + E^R$ — компонента поля $\mathbf{E}$ в направлении скорости заряда $\mathbf{v}$. Выделение множителя $4\pi i q/\omega(2\pi)^3$ в амплитуде *поля излучения сделано только в целях удобства* рассмотрения. Амплитуда a оказывается тогда безразмерной. Далее, знак плюс в (8.13) соответствует волне, распространяющейся в направлении $z > 0$, а знак минус — соответственно в направлении $z < 0$. Поле E^R в волновой зоне представляет собой поле, описывающее переходное излучение. Оно должно распространяться от границы раздела сред, т. е. в среде *2* нужно в (8.13) выбрать знак $+$, а в среде *1* — знак $-$.

Следует, впрочем, сделать две оговорки. Строго говоря, поле (8.13) представляет собой поле излучения только в том случае, когда оно описывает распространяющуюся волну, т. е. если

$$\varepsilon > \frac{\varkappa^2 c^2}{\omega^2}. \tag{8.14}$$

При $\varepsilon < \varkappa^2 c^2/\omega^2$ поле (8.13) будет экспоненциально затухать от границы, т. е. при обоих знаках $+$ и $-$ необходимо положить

$$\sqrt{\varepsilon - \frac{\varkappa^2 c^2}{\omega^2}} = i\frac{\omega}{|\omega|}\sqrt{\frac{\varkappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon}. \tag{8.15}$$

Такие затухающие от границы волны обязательно присутствуют при рассмотрении переходного излучения, так как соответствующие волны могут на границе испытывать полное внутреннее

отражение. Строго говоря, существует и переходное излучение поверхностных волн, которое мы здесь не рассматриваем.

Вторая оговорка касается возможности существования решения однородного уравнения (8.10) при условии $\varepsilon = 0$. Оно отвечает излучению продольных волн, характеристики которых существенно зависят от пространственной дисперсии, а следовательно, и свойств среды вблизи поверхности. Здесь их также рассматривать не будем.

Прежде чем использовать граничные условия (8.11) для сшивки решений в интересующей нас здесь задаче, отметим по ходу дела, что из (8.12) легко получается формула Тамма — Франка (6.61) для излучения Вавилова — Черенкова в однородной среде. Такое излучение возникает, если выполнено условие $c^2/v^2\varepsilon < 1$. Мощность излучения равна со знаком минус работе, совершаемой в единицу времени полем E^q над током j^q (эти величины коллинеарны) *)

$$\frac{dW}{dt} = -qv\int\limits_{-\infty}^{\infty} E^q(vt)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\,d\varkappa =$$

$$= \frac{iq^2v}{\pi c^2}\int\limits_0^{\infty}\omega\,d\omega\int\limits_0^{\infty}\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon}\right)\frac{d\,(\varkappa^2c^2/\omega^2)}{(\varepsilon - c^2/v^2 - \varkappa^2c^2/\omega^2)} =$$

$$= \frac{q^2v}{c^2}\int\limits_0^{\infty}\omega\,d\omega\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon}\right)\int\limits_0^{\infty}\delta\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}\right)d\,\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2} =$$

$$= \frac{q^2v}{c^2}\int\limits_{c^2/v^2\varepsilon\leqslant 1}\omega\,d\omega\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon}\right).$$

При рассмотрении переходного излучения, как уже говорилось выше, мы будем считать условие черенковского излучения не выполненным (т. е. полагаем, что $c^2/v^2\varepsilon > 1$; см. (8.1)). Для использования граничных условий (8.11) необходимо знать тангенциальные компоненты электрического поля. Они легко находятся из (8.9) для поля заряда (индекс q) и поля излучения (индекс R)

$$(\varkappa\mathbf{E}_\perp)^q = -\frac{\varkappa^2c^2E^q}{v\omega\,(\varepsilon - c^2/v^2)}, \quad (\varkappa\mathbf{E}_\perp)^R = \mp\frac{\omega}{c}E^R\sqrt{\varepsilon - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\,. \quad (8.16)$$

Теперь можно воспользоваться граничными условиями (8.11) для получения двух уравнений, определяющих амплитуды поля

*) При интегрировании здесь используется известный прием, связанный с введением сколь угодно малого затухания (см. ниже формулу (12.34)).

излучения a_1 и a_2:

$$\frac{\varkappa^2c^2/\omega^2}{\varepsilon_1 - c^2/v^2 - \varkappa^2c^2/\omega^2} - \varepsilon_1 a_1 = \frac{\varkappa^2c^2/\omega^2}{\varepsilon_2 - c^2/v^2 - \varkappa^2c^2/\omega^2} - \varepsilon_2 a_2, \tag{8.17}$$

$$\frac{\varkappa^2c^2/\omega^2}{v\varepsilon_1(\varepsilon_1 - c^2/v^2 - \varkappa^2c^2/\omega^2)} + \frac{a_1}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{\varkappa^2c^2/\omega^2}{v\varepsilon_2(\varepsilon_2 - c^2/v^2 - \varkappa^2c^2/\omega^2)} - \frac{a_2}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}. \tag{8.18}$$

Даже не решая уравнений (8.17), (8.18), можно сразу сделать ряд выводов, касающихся излучения ультрарелятивистской частицы, когда $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \mathscr{E}/Mc^2 \gg 1$. Действительно, из (8.17) видно, что заметное излучение возникает в том случае, когда собственные поля частицы существенно различны в двух средах или, другими словами, в двух средах отличаются факторы $-\varepsilon + c^2/v^2 + \varkappa^2c^2/\omega^2$. Рассмотрим теперь область высоких частот, когда использование плазменной формулы для диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$$

оправдано для любых сред. Тогда

$$\left(-\varepsilon + \frac{c^2}{v^2}\right) + \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}. \tag{8.19}$$

При $\omega \gg \omega_p$, т. е. $\varepsilon \approx 1$ и величине $\varkappa^2c^2/\omega^2 \approx \theta^2 \ll 1$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$, в (8.19) все слагаемые будут величинами одинакового порядка, если

$$\omega \sim \omega_p\mathscr{E}/Mc^2, \quad \theta \sim Mc^2/\mathscr{E}. \tag{8.20}$$

Будем поэтому рассматривать излучение в основном вперед и на высоких частотах, считая выполненными условия (8.20). Соотношения (8.17), (8.18) тогда принимают вид

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} + a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} + a_2, \tag{8.21}$$

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} - a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} + a_2, \tag{8.22}$$

где ω_{p1}^2 и ω_{p2}^2 — значения плазменной частоты в средах *1* и *2* соответственно. Из (8.21), (8.22) следует, что $a_1 = 0$, т. е. излучение назад отсутствует, а излучение вперед определяется амплитудой

$$a_2 = \frac{\theta^2(\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)}{\omega^2[\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2][\theta^2 + (\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2]}. \tag{8.23}$$

Интенсивность излучения пропорциональна $|a_2|^2$ (см. ниже). Обращение в нуль излучения назад является лишь следствием принятого приближения, определяемого условиями (8.20). При

выполнении условий (8.20) излучение назад в действительности не отсутствует, но оно будет более высокого порядка малости по параметрам разложения θ^2 и $(Mc^2/\mathscr{E})^2$.

В общем случае также нетрудно разрешить систему (8.17), (8.18) относительно амплитуд a_1 и a_2. В результате получаем

$$a_2 = \frac{v}{c}\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2\varepsilon_2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_2-\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_1-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_2+\frac{\varkappa^2v^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_1-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\right]^{-1}, \quad (8.24)$$

$$a_1 = \frac{v}{c}\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2\varepsilon_1}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1+\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1+\frac{\varkappa^2v^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)\right]^{-1}. \quad (8.25)$$

В приближении (8.20) из (8.24) получим (8.23), тогда как для излучения назад имеем

$$a_1 \approx \frac{\theta^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{4\left[\theta^2+(\omega_{p1}/\omega)^2+(Mc^2/\mathscr{E})^2\right]} = \frac{\theta^2\left(\omega_{p1}^2-\omega_{p2}^2\right)}{4\omega^2\left[\theta^2+(\omega_{p1}/\omega)^2+(Mc^2/\mathscr{E})^2\right]}. \quad (8.26)$$

Для нерелятивистского заряда $v \ll c$ излучения вперед и назад оказываются примерно одинаковыми (если ε_1 и ε_2 одного порядка величины).

Получим теперь формулы для энергии переходного излучения, выразив ее через амплитуды a_1 и a_2. Для этого совсем не обязательно вычислять поток вектора Пойнтинга, а достаточно рассчитать энергию радиационного поля E^R асимптотически при $t \to \infty$, когда радиационное поле и собственное поле оказываются разделенными (при этом среда, в которой рассматривается переходное излучение, считается прозрачной). Такой метод расчета соответствует гамильтоновскому методу, изложенному в гл. 1 и 6.

Простоты ради будем в выражении для энергии пренебрегать дисперсией и учтем, что в этом случае в плоской волне (8.13) магнитная и электрическая энергии равны друг другу. Тогда излученная энергия

$$W_2^R = \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon_2\left\{\left(E_\perp^R(\mathbf{r},t)\right)^2+\left(E^R(\mathbf{r},t)\right)^2\right\}d\mathbf{r}_\perp\, dz, \quad (8.27)$$

где рассматривается поле в среде *2* (излучение вперед).

В действительности полученный ниже результат справедлив и для диспергирующей среды — в этом случае в (8.27) вместо ε_2

появляется множитель $\frac{1}{2\omega}\frac{d(\omega^2\varepsilon_2)}{d\omega}$, который в дальнейшем сокращается (см. гл. 6).

Поскольку нас интересует полная энергия, излученная в среду *2*, то поле излучения нужно считать уже отошедшим от границы сред и образующим некоторый цуг (пакет) волн, целиком находящийся в среде *2*. Поэтому интегрировать по z можно в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, не заботясь о границах и не принимая во внимание затухающие волны (т. е. полагая $\varepsilon_2 > \varkappa^2c^2/\omega^2$; см. (8.14)). Далее, согласно (8.16),

$$|\mathbf{E}^R_{\perp,2}|^2 = \frac{\omega^2}{\varkappa^2c^2}\left(\varepsilon_2 - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}\right)|E^R_2|^2, \tag{8.28}$$

где учтена также коллинеарность векторов $\mathbf{E}_\perp$ и $\varkappa$, обусловленная аксиальной симметрией задачи.

Подставим теперь в (8.27) разложения (8.4) с учетом (8.28) и проведем интегрирование по dz, $d\mathbf{r}_\perp$, $d\omega'$ и $d\varkappa'$ с использованием хорошо известных формул

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\,d\omega \tag{8.29}$$

и

$$\int \varphi(x)\,\delta(f(x) - y)\,dx = \left[\frac{\varphi(x)}{|df/dx|}\right]_{f(x)=y}. \tag{8.30}$$

В результате имеем

$$W^R_2 = \frac{q^2}{\pi c}\int\limits_0^\infty \frac{d\varkappa^2}{\varkappa^2}\,d\omega\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\,|a_2|^2. \tag{8.31}$$

Удобно ввести угол θ_2 между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ (частица по нормали переходит из среды *1* в среду *2*), причем $\sin^2\theta_2 = \varkappa^2c^2/\omega^2\varepsilon_2$. Тогда для излучения вперед (в среду *2*), учитывая (8.24), получим

$$W^R_2 = \int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_0^{\pi/2} 2\pi\sin\theta_2\,d\theta_2\,W^R_2(\omega,\,\theta_2), \tag{8.32}$$

$$W^R_2(\omega,\,\theta_2) = \frac{q^2v^2}{\pi^2c^3}\sqrt{\varepsilon_2}\cos^2\theta_2\sin^2\theta_2\,|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \times$$
$$\times\left|\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_2 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_2\cos^2\theta_2\right)\left(1 - \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2}\right)\left(\varepsilon_1\cos\theta_2 + \sqrt{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2)}\right)}\right|^2. \tag{8.33}$$

Стоит сказать несколько слов об областях, соответствующих волнам, испытывающим полное внутреннее отражение в среде *2*, когда $\sqrt{\varepsilon_2 - \varkappa^2c^2/\omega^2}$ принимает комплексное (мнимое) значение. Можно показать, что такие волны не вносят вклада в W^R_2,

и, таким образом, в (8.32) фактически фигурируют только распространяющиеся волны. Физически это заключение совершенно прозрачно, так как при $t \to \infty$ поле излучения практически отошло от границы и волны, испытывающие полное внутреннее отражение, не дают вклада в излучение. Последнее не означает, что в излучении, распространяющемся от границы, нет таких волн, которые при изменении $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$ (т. е. обращении направления распространения) не испытывали бы на границе полного внутреннего отражения. Такие волны соответствуют условию $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2\theta_2 = \varepsilon_1 \cos^2\theta_1 < 0$ (используем закон преломления $\varepsilon_1 \sin^2\theta = \varepsilon_2 \sin^2\theta_2$). Этим волнам в (8.33) соответствует мнимое значение $\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2\theta_2}$, а при расчете интенсивности с помощью (8.33) нужно взять квадрат модуля получающегося комплексного выражения, что и указано в (8.33).

Аналогичным образом находится энергия, излучаемая назад (в среду *1*)

$$W_1^R = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, W_1^R(\omega, \theta_1), \tag{8.34}$$

где θ_1 — угол между $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{v}$,

$$W_1^R(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_1 \sqrt{\varepsilon_1}\, |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \times$$

$$\times \left| \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1 + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_1}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\varepsilon_1 \cos^2\theta_1\right)\left(1 + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_1}\right)\left(\varepsilon_2 \cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_1)}\right)} \right|^2 . \tag{8.35}$$

В составе излучения назад также присутствуют волны, которые в среде *2* не распространяются ($\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\theta_1 < 0$).

В случае ультрарелятивистских энергий для излучения вперед можно получить результат не только из (8.33), но и сразу, используя (8.23):

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 \, d\theta^2 \left\{ \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} - \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2} \right\}^2 . \tag{8.36}$$

Если частица влетает в среду с $\varepsilon_2 = \varepsilon$ из вакуума ($\varepsilon_1 = 1$), то формула (8.35) дает результат, полученный в [129] для излучения назад (индекс 1 у θ_1 опускаем).

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \left| (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right)\right|^2}{\pi^2 c^3 \left| \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)\left(1 + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right)\left(\varepsilon\cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right)\right|^2} . \tag{8.37}$$

Естественно, что для получения выражения для энергии излучения при вылете частицы из среды в вакуум можно воспользоваться формулой (8.37), заменив $\mathbf{v}$ на $-\mathbf{v}$. Тот же результат получится, если в (8.33) положить $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$.

Остановимся на простейшем и в то же время важном частном случае, когда среду *2* можно считать идеальным проводником. Это значит, что в формуле (8.37) нужно перейти к пределу $|\varepsilon| \to \infty$. В результате получим

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sin^2\theta}{\pi^2 c^3 (1 - (v/c)^2 \cos^2\theta)^2},$$

$$W_1^R(\omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} W_1^R(\omega, \theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{4q^2v^2}{3\pi c^3} \left\{ \frac{3\,(1 + (v/c)^2)}{8\,(v/c)^3} \ln\frac{1 + v/c}{1 - v/c} - \frac{3}{4\,(v/c)^2} \right\} =$$

$$= \frac{q^2}{\pi c} \left\{ \frac{1 + (v/c)^2}{2v/c} \ln\frac{1 + v/c}{1 - v/c} - 1 \right\}. \quad (8.37а)$$

В нерелятивистском случае (т. е. при $v \ll c$)

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sin^2\theta}{\pi^2 c^3}, \quad W_1^R(\omega) = \frac{4q^2v^2}{3\pi c^3}. \quad (8.37б)$$

Итак, при влете заряда q из вакуума в идеальный проводник (практически для частот не выше оптических роль такого идеального проводника играет хороший металл, например медь) в вакууме появляется переходное излучение со спектральной плотностью энергии (8.37а), (8.37б).

Для получения формул (8.37а), (8.37б) нет, однако, нужды исходить из общей формулы (8.37). Для этой цели значительно проще воспользоваться выражением для энергии тормозного излучения зарядов при их резкой остановке (см. § 69 в [2], где величина dU_s обозначена через $d\mathscr{E}_{n\omega}$)

$$\frac{d^2U_s}{d\Omega\, d\omega} \equiv W(\omega, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum_i e_i \left(\frac{[\mathbf{v}_{i2}\mathbf{s}]}{1 - \mathbf{s}\mathbf{v}_{i2}/c} - \frac{[\mathbf{v}_{i1}\mathbf{s}]}{1 - \mathbf{s}\mathbf{v}_{i1}/c} \right) \right\}^2, \quad (8.37в)$$

где e_i — заряд i-й частицы, скорость которой резко изменяется от значений $\mathbf{v}_{i1}$ до $\mathbf{v}_{i2}$, а $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — направление волнового вектора; резкость изменения $\mathbf{v}$ означает, что это изменение происходит за время $\tau \ll 2\pi/\omega$, где ω — рассматриваемая частота (об излучении при резком изменении движения источника см. также [136в, г]).

Если в вакууме (в отсутствие препятствий, границ и т. д.) один заряд $e_1 = q$ резко останавливается или резко ускоряется

из состояния покоя до скорости v, то

$$W(\omega, \theta, \varphi) = \frac{q^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \frac{\sin^2\theta}{(1-(v/c)\cos\theta)^2}, \qquad (8.37г)$$

$$W(\omega) = \int W(\omega, \theta, \varphi)\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} W(\omega, \theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{q^2}{\pi c}\left(\frac{1}{v/c} \ln \frac{1+v/c}{1-v/c} - 2\right).$$

В случае переходного излучения при влете заряда q из вакуума в идеальный проводник (см. рис. 8.1) в (8.37в) нужно, очевидно, считать, что заряд $e_1 = q$ со скоростью $\mathbf{v}$ и заряд $e_2 = -q$ со скоростью $-\mathbf{v}$ останавливаются на границе. Поэтому вместо энергии (8.37г), относящейся к одному заряду, получаем выражение (8.37а), причем нужно учесть также изменение пределов интегрирования по θ. По последней причине энергия (8.37б) в 4 раза больше энергии, излучаемой при мгновенной остановке одним зарядом q в полусферу направлений (при нерелятивистской скорости поля останавливающихся заряда и его изображения просто складываются, т. е. удваиваются). В ультрарелятивистском случае (при $v/c \to 1$) выражения (8.37а) и (8.37г) для $W(\omega) \equiv W_1^R(\omega)$ совпадают. Объясняется это тем, что излучение направлено в основном по скорости заряда (т. е. по $\mathbf{v}$ или для изображения по $-\mathbf{v}$). Но излучение заряда, «уходящего» в металл при влете заряда из вакуума в металл, или излучение изображения, «уходящее» в металл при вылете заряда в вакуум, не наблюдается. Другими словами, в вакууме излучение оказывается таким же, как при резкой остановке (ускорении) одного заряда. Кстати, в нерелятивистском приближении величина $W(\omega)$, определяемая из (8.37г), вдвое меньше, чем согласно (8.37б), так как излучает один заряд (уменьшение в четыре раза), но во все пространство (увеличение в два раза).

Вернемся, однако, к общей формуле (8.37) и рассмотрим излучение ультрарелятивистской частицы назад в интервале углов (8.20). Тогда получаем

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2}{\pi^2 c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \frac{\theta}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2]^2}. \qquad (8.38)$$

В спектральной плотности излучения назад имеется резкий максимум при $\theta \sim Mc^2/\mathscr{E}$. Однако в интегральную по углам интенсивность вносят вклад в равной степени и углы с $\theta \sim 1$. Это видно из логарифмической расходимости интеграла $\int_0^{\infty} W_1^R(\omega, \theta)\, d\theta^2$ при больших θ^2. Естественно, при больших углах уже нельзя использовать выражение (8.38), а надо пользо-

ваться точной формулой (8.37). Однако при $\ln(\mathscr{E}/Mc^2) \gg 1$ можно пренебречь вкладом больших углов и получить

$$W_1^R(\omega) \approx \int_0^{\theta_{\max} \sim 1} \pi\, d\theta^2 W_1^R(\omega, \theta) \approx 2\frac{q^2}{\pi c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \ln\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (8.39)$$

В некотором смысле похожая ситуация возникает и с частотной зависимостью. Для больших частот, когда можно пользоваться плазменной формулой согласно (8.39) $W_1^R(\omega) \propto 1/\omega^4$, т. е. основной вклад дают малые частоты. Следовательно, плазменной формулой для произвольных изотропных сред пользоваться нельзя (за исключением случая, когда средой является плазма).

Для плазмы интегрирование по частотам ограничено условием $\omega > \omega_p$. Тогда (8.39) дает

$$W_1^R = \int_{\omega_p}^{\infty} W_1^R(\omega)\, d\omega = \frac{q^2}{15\pi c}\omega_p \ln\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (8.40)$$

Как уже отмечалось, для ультрарелятивистской частицы основная часть излученной энергии приходится на излучение вперед — по движению частицы. При этом можно воспользоваться формулой (8.36), которая показывает, что не только угловое распределение излучения вытянуто по движению частицы, но и основная доля энергии излучается в углах порядка $\theta \sim Mc^2/\mathscr{E}$. Оказывается, что использование плазменного приближения для диэлектрической проницаемости при расчете интегральной по частотам интенсивности (излученной энергии) оправданно также для любых сред, так как основная энергия излучения приходится на высокие частоты. Рассмотрим два примера: 1) изменение концентрации частиц $\Delta N = |N_1 - N_2|$ на границе раздела сред мало $\Delta N/N \ll 1$; 2) имеется резкий скачок концентрации $\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$. В первом случае интегрирование по углам дает

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{1}{\left[\omega_p^2/\omega^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2\right]^2}. \quad (8.41)$$

Спектральная плотность излучения постоянна до частоты $\omega \approx \omega_p\mathscr{E}/Mc^2$, а затем падает пропорционально $1/\omega^4$. Это показывает, что характерная частота существенно превосходит плазменную (при $\mathscr{E}/Mc^2 \gg 1$) и, следовательно, плазменное приближение является оправданным. Полная энергия излучения будет равной

$$W_2^R = \int_0^{\infty} W_2^R(\omega)\, d\omega = \frac{q^2\omega_p}{24c}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2. \quad (8.42)$$

Сравнивая энергию излучения вперед с энергией излучения назад, убеждаемся в том, что доминирующим действительно является излучение вперед. В случае $\Delta N/N_1 = 1$ получаем

$$W_2^R(\omega) = \frac{2q^2}{\pi c}\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\right]\ln\left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2\right] - 1\right\}. \tag{8.43}$$

При малых частотах $\omega \ll \omega_p \mathscr{E}/Mc^2$ спектральная плотность не постоянна, а имеет логарифмическую зависимость от частоты и энергии частицы

$$W_2^R(\omega) \approx \frac{2q^2}{\pi c}\left\{\ln\frac{\omega_p \mathscr{E}}{\omega Mc^2} - 1\right\}, \qquad \omega \ll \omega_p \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}, \tag{8.44}$$

тогда как при больших частотах $\omega \gg \omega_p \mathscr{E}/Mc^2$ она по-прежнему падает как $1/\omega^4$:

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c}\frac{\omega_p^4}{\omega^4}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^4, \qquad \omega \gg \omega_p \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \tag{8.45}$$

Интегральная по частотам энергия излучения оказывается равной

$$W_2^R = \int_0^\infty W_2^R(\omega)\, d\omega = \frac{q^2}{3c}\omega_p \frac{\mathscr{E}}{Mc^2} \tag{8.46}$$

и растет пропорционально энергии частицы [134].

Выше среды *1* и *2* считались изотропными и немагнитными. Представляет интерес обобщение задачи на анизотропные и магнитные среды. В частности, как мы видели в конце гл. 6, такой «средой» является вакуум в присутствии не слишком слабого электромагнитного поля. Переходное, а также черенковское излучение в анизотропных и магнитных средах было рассмотрено в целом ряде статей (см., в частности, [89, 91, 94, 101]). Поскольку в оптической части спектра, не говоря уже об области еще более высоких частот, магнитную проницаемость μ можно (а в известном смысле даже нужно) считать равной единице, получение формул для магнитной среды представляется обычно излишним. Собственно, и мы в настоящей книге поступаем именно так. Вместе с тем следует заметить, что проведение расчетов сразу для более общего случая магнитной среды (скажем, изотропной среды с $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$; $\mu = 1$) оказывается полезным и в применении к немагнитной среде, но для источников — магнитных полюсов и магнитных диполей. Дело в том, что уравнения поля для магнитных полюсов (плотность магнитного заряда ρ_m) получаются из уравнений для электрических зарядов (плотность заряда ρ) путем замен $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$, $\rho \to \rho_m$, $\mu \to \varepsilon$ (произведение $\varepsilon\mu$ сохраняется; см.

гл. 7). Поэтому, например, излучение Вавилова — Черенкова для магнитного полюса (с магнитным зарядом $g = \int \rho_m dV$) не нужно вычислять заново, а достаточно в соответствующей формуле $\frac{dW}{dt} = \frac{q^2 v}{c^2} \int \mu\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon\mu}\right) d\omega$ (см., например, [94]) заменить q на g и μ на ε (произведение $\varepsilon\mu$ остается без изменений). Ситуация аналогична и в случае переходного излучения (переходное излучение магнитного заряда детально рассмотрено в статье [139]).

Перейдем к переходному излучению, возникающему при резком изменении свойств среды во времени. Как уже отмечалось, такая возможность ясна из общих соображений, приводящих к выводу о возникновении переходного излучения: для его появления существенно изменение параметра vn/c в месте, занимаемом зарядом (или другим излучателем), а это изменение возможно как из-за пересечения зарядом границы раздела, так и из-за изменения n во времени.

Будем считать простоты ради, что среда изотропна и характеризуется значением диэлектрической проницаемости ε, которая в момент $t = 0$ скачком меняется от значения ε_1 до значения ε_2. (Изменения такого типа можно создать, например, путем резкого изменения давления в среде.) В среде имеется заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Исходными служат те же уравнения Максвелла (8.2) с плотностью тока (8.3). В силу того, что рассматриваемая задача полностью пространственно однородна, удобно все величины разлагать по пространственным компонентам Фурье

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}^q(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{j}^q_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{8.47}$$

Для плотности тока имеем

$$\mathbf{j}^q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \exp\left[-i(\mathbf{kv})t\right]. \tag{8.48}$$

Уравнения Максвелла (8.2) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{k}(\mathbf{kE}_{\mathbf{k}}(t)) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q \mathbf{v}(\mathbf{kv})}{c^2 (2\pi)^3} \exp\left[-i(\mathbf{kv})t\right], \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = -ic\left[\mathbf{kE}_{\mathbf{k}}(t)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

Необходимо решить уравнения (8.49) для $t < 0$ и $t > 0$ и сшить решения при $t = 0$. Условия сшивки непосредственно следуют

из уравнений Максвелла (8.2), а именно *)

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,1}(0) = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,2}(0); \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k},\,1}(0) = \mathbf{B}_{\mathbf{k},\,2}(0). \tag{8.50}$$

В данном случае удобно проектировать уравнение (8.49) на направление, перпендикулярное $\mathbf{k}$. Это связано с тем, что задача пространственно симметрична, а поля в изотропной среде естественно разделяются на продольные и поперечные относительно вектора $\mathbf{k}$. Однако продольное поле в силу непрерывности индукции не излучает. Уравнение для поперечной к вектору $\mathbf{k}$ составляющей (компоненты) поля $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{tr}(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) - \frac{\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t))}{k^2} \tag{8.51}$$

имеет вид

$$k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{tr}(t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{tr}(t) = \frac{4\pi i q\,(\mathbf{kv})\,\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{tr}}{c^2\,(2\pi)^3}\exp\left[-i\,(\mathbf{kv})\,t\right], \tag{8.52}$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{tr} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}\,(\mathbf{kv})}{k^2}.$$

Здесь мы использовали индекс tr для обозначения поперечных компонент по отношению к $\mathbf{k}$, чтобы отличить их от компонент, перпендикулярных скорости заряда, которые снабжают индексом $\perp$. Уравнение (8.52) осталось векторным. Однако можно получить одно уравнение для скалярной величины, если учесть, что в однородной среде обе линейные поляризации поперечного поля независимы, и, следовательно, поляризация, для которой $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{tr}$ направлено по $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{tr}$, не зависит от поляризации, перпендикулярной $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{tr}$. Для последней получим однородное уравнение без источника и, следовательно, можем заключить, что излучение с такой поляризацией не будет возбуждаться зарядом. Другими словами, возникающее излучение поляризовано в плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$ (аналогичная ситуация имеет место для черенковского излучения и понятна уже по соображениям симметрии). Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{tr}(t) = E_{\mathbf{k}}(t)\,\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{tr}}{v}, \tag{8.53}$$

и задача сводится к одному уравнению для $E_{\mathbf{k}}(t)$

$$k^2 E_{\mathbf{k}}(t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon E_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q v\,(\mathbf{kv})}{c^2\,(2\pi)^3}\exp\left[-i\,(\mathbf{kv})\,t\right]. \tag{8.54}$$

*) Для получения условий (8.50) нужно, очевидно, проинтегрировать уравнение (8.2) по времени по области скачка — между моментами $t_1 = -\delta t$ и $t_2 = \delta t$, а затем устремить длительность скачка $2\delta t$ к нулю. При этом величины rot $\mathbf{H}$, rot $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}^q$ считаются конечными, что, вообще говоря, и имеет место.

Его решение равно сумме решений неоднородного уравнения (поля частицы E^q) и однородного уравнения (поля излучения E^R)

$$E_{\mathbf{k}}(t) = E^q_{\mathbf{k}}(t) + E^R_{\mathbf{k}}(t), \tag{8.55}$$

причем

$$E^q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q v\,(\mathbf{kv})\exp[-i\,(\mathbf{kv})\,t]}{c^2\,(2\pi)^3\,(k^2 - (\mathbf{kv})^2\,\varepsilon/c^2)}, \tag{8.56}$$

$$E^R_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q}{k\,(2\pi)^3}\left(a_+ \exp\left(-i\,\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}}\,t\right) + a_- \exp\left(i\,\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}}\,t\right)\right). \tag{8.57}$$

Если ε является функцией частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, то в (8.56) фигурирует $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{kv})$. Комплексные коэффициенты a_+ и a_- описывают амплитуды двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях по $\mathbf{k}$ (амплитуда $a_+(\mathbf{k})$) и против $\mathbf{k}$ (амплитуда $a_-(\mathbf{k})$). При $t < 0$ поле излучения отсутствует, а при $t > 0$ сразу возникают две волны.

Магнитное поле находится из (8.49)

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = -\frac{ic}{v}\,[\mathbf{kv}]\,E_{\mathbf{k}}(t), \tag{8.58}$$

$$\mathbf{B}^q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q\,[\mathbf{kv}]\exp[-i\,(\mathbf{kv})\,t]}{c\,(2\pi)^3\,(k^2 - \varepsilon\,(\mathbf{kv})^2/c^2)}, \tag{8.59}$$

$$\mathbf{B}^R_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i q\,\sqrt{\varepsilon}\,[\mathbf{kv}]}{vk^2\,(2\pi)^3}\left(a_+ \exp\left(-i\,\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}}\,t\right) - a_- \exp\left(\frac{ikc}{\sqrt{\varepsilon}}\,t\right)\right). \tag{8.60}$$

Граничные (начальные) условия (8.50) сразу дают

$$\frac{\varepsilon_1 kv\,(\mathbf{kv})/c^2}{k^2 - (\mathbf{kv})^2\,\varepsilon_1/c^2} = \frac{\varepsilon_2 kv\,(\mathbf{kv})/c^2}{k^2 - (\mathbf{kv})^2\,\varepsilon_2/c^2} + \varepsilon_2(a_+ + a_-), \tag{8.61}$$

$$\frac{k^2 v/c}{k^2 - (\mathbf{kv})^2\,\varepsilon_1/c^2} = \frac{k^2 v/c}{k^2 - (\mathbf{kv})\,\varepsilon_2/c^2} + \sqrt{\varepsilon_2}(a_+ - a_-). \tag{8.62}$$

Здесь надо иметь в виду, что, вообще говоря, $a_+(\mathbf{k})$ и $a_-(-\mathbf{k})$ описывают одну и ту же волну, так как в силу вещественности поля $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, t)$ и определения a_+ и a_- (см. (8.57))

$$a_-(-\mathbf{k}) = -a^*_+(\mathbf{k}). \tag{8.63}$$

Именно (8.63) и указывает на то, что для заданного $\mathbf{k}$ амплитуда a_- описывает волну, распространяющуюся в противоположном $\mathbf{k}$ направлении. Соотношение (8.61) особенно просто использовать для вывода, касающегося излучения ультрарелятивистской частицы с $(Mc^2/\mathscr{E})^2 \ll 1$ под малым углом $\theta^2 \ll 1$ к скорости частицы $\mathbf{v}$, в условиях, когда $1 - \varepsilon \approx \omega_p^2/\omega^2 \ll 1$. Тогда (8.61), (8.62) сразу приводят к соотношениям

$$\frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p1}/kc)^2 + (Mc^2)^2/\mathscr{E}^2} = \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p2}/kc)^2 + (Mc^2)^2/\mathscr{E}^2} + a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}), \tag{8.64}$$

$$\frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p1}/kc)^2 + (Mc^2)^2/\mathscr{E}^2} = \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p2}/kc)^2 + (Mc^2)^2/\mathscr{E}^2} + a_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k}). \tag{8.65}$$

Они фактически сводятся к уже обсуждавшимся выражениям (8.21), (8.22) для переходного излучения ультрарелятивистской частицы на границе раздела сред. В этом можно убедиться, если учесть, что в силу $|\varepsilon - 1| \ll 1$, $\omega \approx kc$ амплитуда $a_+(\mathbf{k})$ соответствует a_2, а $a_-(\mathbf{k}) = -a_+^*(-\mathbf{k})$ соответствует $-a_1$. Отсюда ясно, что для ультрарелятивистской частицы излучение назад будет малым, а излучение вперед сходно с излучением, возникающим при пересечении границы раздела сред.

В общем случае из (8.61), (8.62) следует

$$a_\pm(\mathbf{k}) = \frac{k^2 v}{2c\varepsilon_2}\left\{\frac{\varepsilon_1(\mathbf{kv})/kc \pm \sqrt{\varepsilon_2}}{k^2 - \varepsilon_1(\mathbf{kv})^2/c^2} - \frac{\varepsilon_2(\mathbf{kv})/kc \pm \sqrt{\varepsilon_2}}{k^2 - \varepsilon_2/(\mathbf{kv})^2/c^2}\right\}. \quad (8.66)$$

Интенсивность излучения можно подсчитать как энергию радиационного поля при $t \to \infty$. Опять-таки можно воспользоваться формулой (8.27), в которой, однако, интегрирование должно распространяться на все пространство:

$$W^R = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{t\to\infty} d\mathbf{r}\varepsilon_2(\mathbf{E}^R)^2 = 2\pi^2 \int\limits_{t\to\infty} d\mathbf{k}\varepsilon_2 \frac{[\mathbf{kv}]^2}{k^2v^2} E^R_{\mathbf{k}} E^R_{-\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{q^2}{2\pi^2}\int \frac{d\mathbf{k}}{k^2}\varepsilon_2 \frac{[\mathbf{kv}]^2}{k^2v^2}|a_+(\mathbf{k})|^2 = \int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_0^\pi 2\pi \sin\theta\, d\theta\, W^R(\omega, \theta). \quad (8.67)$$

Здесь мы использовали соотношение (8.63) и учли, что при $t \to \infty$ осциллирующие во времени слагаемые должны быть отброшены. Мы снова использовали метод, близкий к гамильтоновскому, и то обстоятельство, что собственное поле заряда и поле излучения при $t \to \infty$ разделяются. В (8.67) не учтена также дисперсия ε_2 (окончательный результат с учетом дисперсии тот же самый). Поэтому $|\mathbf{k}| = \sqrt{\varepsilon_2}\,\omega/c$ и можно перейти к интегрированию по частотам. Наконец, мы ввели угол излучения θ как угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$. С учетом всего этого находим

$$W^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 \sin^2\theta\cos^2\theta\,|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2}\,|1 - \varepsilon_1(v/c)^2\cos^2\theta|^2 |1 - (v/c)\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta|^2}. \quad (8.68)$$

Для сравнения с переходным излучением на границе раздела двух сред заметим, что в (8.67) интегрирование проводится по всем углам. В пределах углов $(0, \pi/2)$ выражение (8.68) описывает излучение вперед, тогда как в пределах $(\pi/2, \pi)$ — излучение назад.

Для нерелятивистских частиц оба типа переходного излучения (на резкой границе раздела двух сред и при резком изменении во времени свойств среды) разнятся не только в количественном отношении, но и в отношении функциональной зависимости. Так, (8.68) дает

$$W^R(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 v^4 \sin^2\theta\cos^2\theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2}}|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2, \qquad \frac{v^3}{c^2} \ll 1, \quad (8.69)$$

тогда как из (8.23) получаем

$$W_2^R(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 v^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \,|\, \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \,|^2 \sqrt{\varepsilon_2}}{\pi^2 c^3 \,|\, \varepsilon_1 \cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\,\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2\theta}\,|^2}; \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (8.70)$$

Таким образом, энергия излучения (8.69) при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени оказывается более высокого порядка по малому параметру $v^2/c^2 \ll 1$.

Для ультрарелятивистской частицы излучение вперед практически одинаково в случае переходного излучения на границе раздела и в случае резкого изменения ε во времени. Действительно, из (8.68) в этом случае получаем

$$W^R(\omega) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 \, d\theta^2 \left\{ \frac{1}{\theta^2 + (1 - \varepsilon_1) + (Mc^2/\mathscr{E})^2} - \frac{1}{\theta^2 + (1 - \varepsilon_2) + (Mc^2/\mathscr{E})^2} \right\}^2, \quad (8.71)$$

что совпадает с (8.36). Отсюда следует, в частности, что и спектральное распределение интенсивности и полная излученная энергия будут таким же (см. (8.41)—(8.46)).

Однако излучение назад оказывается несколько иным. В угловом распределении по-прежнему имеется резкий максимум при углах $\pi - \theta'$, $\theta' \sim Mc^2/\mathscr{E}$:

$$W^R(\omega, \pi - \theta') \approx \frac{q^2 \theta'^2 \,|\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2(\omega)\,|^2}{16\pi^2 c \,|\, \theta'^2 + (1 - \varepsilon_1(\omega)) + (Mc^2/\mathscr{E})^2\,|^2}. \quad (8.72)$$

Слагаемое $(1 - \varepsilon_1(\omega))$ в знаменателе отличает (8.72) от (8.38). Однако такое же слагаемое возникнет и в (8.38), если рассматривать излучение не в пустоту, а в среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$. В случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени считать, что при $t < 0$ был вакуум кажется весьма искусственным. Наличие слагаемого $(1 - \varepsilon_1(\omega))$ в (8.72) меняет оценки следующим образом. Основная интенсивность приходится на малые частоты, при которых разность $1 - \varepsilon_1(\omega)$ не мала. В этой области частот пропадает и резкая угловая зависимость, и логарифмическая зависимость от энергии.

В случае анизотропных сред, в частности, при движении ультрарелятивистской частицы поперек кристаллической оси или вдоль нее резкое изменение свойств среды во времени приводит к излучению, совпадающему с излучением при пересечении зарядом границы раздела двух сред (см. [94]). В ответ входит разность значений показателя преломления волн, распространяющихся по направлению скорости частицы. Заметим, что в случае анизотропной среды или, конкретно, при превращении (на «скачке» при $t = 0$) изотропной среды в анизотропную электромагнитное излучение возникает уже для покоящегося заряда [137г].

Рассмотренными типами переходного излучения, а именно, излучением при пересечении зарядом резкой границы раздела сред и при резком изменении свойств среды во времени, не исчерпываются, естественно, все возможности появления переходного излучения. Так, возможны изменение свойств среды и в пространстве и во времени, генерация переходного излучения другими излучателями — дипольными моментами, различными токами, а также большим ансамблем (сгустком) зарядов или токов. При этом нужно, в частности, определить, что понимается под термином резкая граница раздела сред или резкое изменение свойств среды во времени. Между тем до сих пор этот термин уточнен не был.

Очевидно, чтобы полностью выяснить поставленный вопрос, нужно рассмотреть переходное излучение для нерезкой границы раздела или нерезкого изменения свойств среды во времени. Тогда можно указать точные условия, при соблюдении которых изменение среды можно считать резким (скачкообразным). При этом, как и для понимания ряда других моментов, существенную роль играет понятие о зоне формирования или о времени формирования переходного излучения. Качественно излучение можно считать таким же, как для резкой границы раздела, если характерная ширина переходного слоя Δz (резкой границе отвечает условие $\Delta z \to 0$) достаточно мала по сравнению с длиной зоны формирования L_f, а резкость изменения во времени должна соответствовать временам, меньшим времени формирования излучения t_f. Естественно, что $L_f = vt_f$.

Длину зоны формирования можно оценить следующим образом. Необходимо найти ту длину $L = L_f$ вдоль траектории источника, которую последний должен пройти для того, чтобы полная энергия поля $\mathbf{E}^q + \mathbf{E}^R$ (пропорциональная $(E^q + E^R)^2$) стала практически равной сумме энергий поля $\mathbf{E}^q$ (пропорциональной $(E^q)^2$) и поля излучения $\mathbf{E}^R$ (пропорциональной $(E^R)^2$), т. е. поле, увлекаемое частицей, и поле излучения оказались бы отделены друг от друга. Другими словами, должен быть малым (по крайней мере в среднем) интерференционный член, пропорциональный $\mathbf{E}^q\mathbf{E}^R$. Поскольку согласно (8.12) $E^q \propto \exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right)$, а согласно (8.13)

$$E^R \propto \exp\left[\pm i\frac{\omega}{c}z\sqrt{\varepsilon - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right],$$

интерференционный член мал при условии

$$\left(\frac{\omega}{v} \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \frac{\varkappa^2c^2}{\omega^2}}\right)z \gg 2\pi. \qquad (8.73)$$

Точнее, при этом условии интерференционный член быстро осциллирует и мал в среднем по пространству. В силу сказанного

длину L_f можно определить так:

$$L_f = \frac{2\pi}{|\,\omega/v \pm (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_{2,1} - \varkappa^2 c^2/\omega^2}\,|}. \tag{8.74}$$

Знаки $\pm$ отвечают зонам формирования соответственно в средах *1* или *2* (частица летит из среды *1* в среду *2*). В случае резкого изменения характеристик среды во времени собственное поле заряда пропорционально $\exp(-i(\mathbf{kv})t)$, тогда как поле излучения пропорционально $\exp\left(\pm i\left(kc/\sqrt{\varepsilon}\right)t\right)$ (см. (8.56), (8.57)) и интерференционный член между ними в выражении для энергии поля становится малым (быстро осциллирует) при

$$\left|\mathbf{kv} \pm \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}}\right| t \gg 2\pi. \tag{8.75}$$

Соответственно полагаем

$$t_f = \frac{2\pi}{|\,\mathbf{kv} \pm kc/\sqrt{\varepsilon}\,|}. \tag{8.76}$$

Учитывая, что в (8.74) $\varkappa^2 c^2/\omega^2\varepsilon_2 = \sin^2\theta$ и $kc/\sqrt{\varepsilon_2} = \omega$, для излучения вперед получаем

$$L_f = vt_f = \frac{2\pi v}{|\,\omega - \sqrt{\varepsilon_2}\,(v/c)\,\omega\cos\theta\,|}. \tag{8.77}$$

Для ультрарелятивистской частицы, полагая $\sqrt{\varepsilon_2} \approx 1 - \omega_p^2/2\omega^2$, имеем

$$L_f \approx \frac{4\pi c}{\omega}\,\frac{1}{(\theta^2 + (\omega_p/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2)}. \tag{8.78}$$

Если считать, что $\theta \approx Mc^2/\mathscr{E}$, то для $\omega \ll \omega_p\mathscr{E}/Mc^2$ длина зоны формирования растет с ростом частоты $L_f \approx 4\pi c\omega/\omega_p^2$ и при частотах порядка $\omega_p\mathscr{E}/Mc^2$, соответствующих максимуму функции $W^R(\omega)\omega$, достигает максимальной величины

$$L_{f,\,\max} \approx \frac{4\pi c}{\omega_p}\,\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \tag{8.79}$$

В определении размеров зоны формирования L_f имеется, конечно, известная условность. Так, часто в качестве L_f выбирается значение вдвое меньшее, чем используемое нами. Более важно, что, согласно (8.74), (8.77), длина $L_f \to 0$ при $v \to 0$ (т. е. для покоящегося заряда). Между тем понятие об отличной от нуля длине зоны формирования имеет известный смысл и для неподвижного излучателя — в этом случае (в простейших ситуациях)

$$L_f \approx \frac{2\pi c}{\omega n} = \lambda.$$

Так, для черенковского излучения заряда, как мы видели в гл. 7, влияние канала или щели определяется как раз отношением a/λ, где a — радиус канала или ширина щели (при

$a/\lambda \ll 1$ наличие канала или щели интенсивности излучения практически не изменяет). Можно, таким образом, сказать, что зона формирования в этом случае порядка λ. Но по смыслу здесь все же речь идет не о той зоне формирования, которую мы ввели выше как некоторое существенное для формирования излучения расстояние, проходимое источником вдоль его траектории. Ниже зона формирования упоминается именно в последнем смысле.

Ряд замечаний о понятии зоны формирования (в частности, в историческом плане) можно найти в [8, 14, 95]. Ввиду важности вопроса мы, однако, и здесь приведем еще один вывод выражения (8.77). Именно, чтобы найти длину зоны формирования L_f в случае источника, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ и излучающего волны под углом θ к $\mathbf{v}$, обратимся к рис. 8.3. Пусть в момент $t = 0$ источник находится в точке A и фаза волны, излучаемой им в направлении $\mathbf{k}$, равна φ_A. Длину зоны формирования L_f определим как такое расстояние вдоль траектории источника (расстояние между точками A и B), при котором фаза волн φ_B, излучаемых в точке B в том же направлении $\mathbf{k}$, отличается на 2π от фазы φ_A волн, излученных в точке A. Тогда

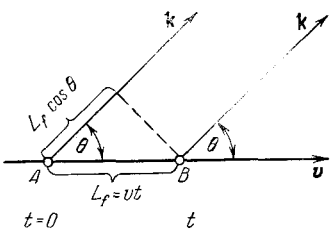


Рис. 8.3. К определению зоны формирования L_f.

$$|\varphi_A - \varphi_B| = |kL_f \cos\theta - \omega t| = \left|\frac{\omega n}{c} L_f \cos\theta - \omega \frac{L_f}{v}\right| = 2\pi,$$

откуда

$$L_f = \frac{2\pi v}{\omega |1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|} = \frac{(vn/c)\,\lambda}{|1 - (v/c)\, n(\omega) \cos\theta|}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{n\omega}. \tag{8.80}$$

Разумеется, для черенковского угла $\theta_0 = \arccos(c/nv)$ волны, излучаемые вдоль траектории, находятся в фазе, и поэтому излучаемая энергия пропорциональна длине траектории L (и формально бесконечна при $L \to \infty$, как предполагается при пренебрежении излучением в начале и конце пути). В применении к переходному излучению размер зоны формирования играет роль размера тех областей, которые ответственны за излучение. Разумеется, выражение (8.80) по существу совпадает с (8.77), поскольку для прозрачной среды 2 как раз $n = \sqrt{\varepsilon_2}$.

Из приведенного вывода особенно, быть может, ясна отмеченная условность введения разности фаз 2π вместо, скажем, π. Пожалуй, использование разности фаз, равной π, даже естественнее, но все количественные результаты не зависят, конечно, от определения L_f..

Как мы видим из (8.79), величина $L_{f,\max}$ растет пропорционально энергии частицы $\mathscr{E}$. Критерий резкости границы $\Delta z \ll L_f$ для переходного излучения при пролете заряда через границу раздела сред, так же как и критерий резкости скачка диэлектрической проницаемости во времени $\Delta t \ll t_f$, оказываются, следовательно, выполненными тем лучше, чем выше энергия частицы. Практически для обычных плотностей, отвечающих плотности твердого тела, частота ω_p соответствует примерно значению $\lambda/2\pi = c/\omega_p \approx 10^{-6}$ см и при большой энергии частицы длина L_f будет вполне макроскопической величиной. Так, для примера, при максимальной зафиксированной энергии космических лучей около $\mathscr{E} \sim 10^{20}$ эВ, если эту энергию приписать протону (для чего, впрочем, еще нет достаточных оснований), получим $L_f \sim 10$ км. Этот пример явно экзотический, но приведен он для того, чтобы подчеркнуть и другую сторону дела. Именно, если речь идет о пластинке конечной толщины, то для образования вполне сформировавшегося переходного излучения необходимо, чтобы ее толщина была не меньше (8.79). Последнее существенно, например, для возможности возникновения переходного излучения космических лучей на межзвездной пыли (обычный размер пылинок порядка 10^{-3}—10^{-4} см). Из (8.79) видно, что высокоэнергичные космические лучи заметного переходного излучения на пыли создавать не могут.

Если речь идет о переходном излучении сгустков зарядов, то для того, чтобы сгусток излучал как единый заряд, его продольный размер Δz_b должен быть меньше длины минимальной излучаемой волны $\frac{2\pi c}{\omega_p}\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}$. Поскольку размер сгустка в собственной системе l связан с Δz_b известной формулой $\Delta z_b = l Mc^2/\mathscr{E}$, то приходим к условию $l \ll 2\pi c/\omega_p$, что в свою очередь при $\mathscr{E}/Mc^2 \gg 1$ всегда жестче условия $l \ll L_f = \frac{4\pi c}{\omega_p}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}$.

Оценка величины зоны формирования позволяет качественно ответить на вопрос о роли пространственной и частотной дисперсий. До сих пор мы формально вводили проницаемости ε_1 и ε_2, а также пользовались плазменной формулой в области больших частот. Вместе с тем задача о переходном излучении при пролете заряда через границу раздела сред с учетом пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости (см. гл. 11), вообще говоря, требует более тщательного рассмотрения. Дело в том, что при наличии пространственной дисперсии нельзя, строго говоря, вводить ε вблизи границы раздела, так как задача не является пространственно однородной. Это касается фактически только некоторой области $\Delta z_d = 2\pi/k_d$ около границы, где k_d — характерное волновое число, соответствующее размеру, на котором сказывается пространственная дисперсия. Таким образом, в некотором смысле речь идет о «размытии» границы. Критерий малости эффектов пространственной

дисперсии, очевидно, будет таким:

$$\Delta z_d \ll L_f \approx \frac{4\pi c}{\omega_p}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \tag{8.81}$$

Точно так же в задаче о переходном излучении при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени, нельзя строго ввести зависящую от частоты диэлектрическую проницаемость, поскольку задача не является однородной во времени. В результате скачок ε как бы «размывается» во времени на $\Delta t_d = 2\pi/\omega_d$, где ω_d — частота, характеризующая частотную дисперсию. Для ультрарелятивистской частицы для характерной частоты имеем $\omega_d \approx \omega_{\max} \approx \omega_p \mathscr{E}/Mc^2$ (см. (8.44)—(8.46)). Критерий малости эффектов частотной дисперсии

$$\Delta t_d \approx \frac{2\pi}{\omega_p}\frac{Mc^2}{\mathscr{E}} \ll t_f = \frac{L_f}{c} \approx \frac{4\pi}{\omega_p}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2} \tag{8.82}$$

для ультрарелятивистских энергий $\mathscr{E}/Mc^2 \gg 1$, очевидно, хорошо выполняется. Если через Δz обозначить характерное реальное размытие границы, а через Δt — реальную длительность «скачка» во времени, то в рассматриваемых задачах обе величины Δz_d и Δz или Δt_d и Δt должны быть соответственно меньше L_f и t_f. Если эти критерии выполнены, то между Δz_d и Δz или Δt_d и Δt могут иметь место различные соотношения, от которых будет зависеть интенсивность относительно слабого излучения назад (см. [137б]), но не будет зависеть основная энергия излучения, приходящаяся на направления, близкие к направлению скорости частицы.

Анализ времени и длины формирования излучения важен и для выяснения энергетического баланса при переходном излучении, который не является тривиальным. Такой баланс целесообразно подвести для энергии частицы и других величин (энергии поля, работы и излученной энергии), отвечающих расстоянием, существенно превосходящим длину зоны формирования излучения, или моменту времени, существенно превосходящему время формирования излучения. При этом на первый взгляд казалось бы, что излученная энергия будет равна работе, совершаемой полем излучения над зарядом. Такой вывод, однако, был бы ошибочным. Более того, работа поля над зарядом может иметь даже другой порядок величины, чем излученная энергия, хотя эта работа и совершается полем излучения $\mathbf{E}^R$, причем до того, как поле излучения и поле заряда разделятся, т. е. на длинах, меньших размеров зоны формирования.

Работа поля излучения над зарядом в единицу времени равна

$$\frac{dW^F}{dt} = q(\mathbf{v}\mathbf{E}^R)|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}, \quad W^F = q\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{v}\mathbf{E}^R)|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}\,dt. \tag{8.83}$$

В случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени интеграл по времени в (8.83) распространен на область $t > 0$, так как $\mathbf{E}^R \neq 0$ только при $t > 0$ (черенковское излучение считается отсутствующим). Из (8.57) получаем

$$q\int_0^\infty (\mathbf{v}\mathbf{E}^R)|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}\,dt = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{k}\,\frac{4\pi i q^2}{(2\pi)^3 k}\,\frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2}\times$$

$$\times\left[a_+(\mathbf{k})\exp\left(i(\mathbf{k}\mathbf{v})t - i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}}t\right) - a_+^*(\mathbf{k})\exp\left(-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t + i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}}t\right)\right], \tag{8.84}$$

Интеграл по времени можно взять, считая, что у ω имеется бесконечно малая положительная мнимая часть. Учитывая, что $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon_2}$, находим

$$W^F = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi 2\pi \sin\theta\, d\theta W^F(\omega, \theta), \tag{8.85}$$

где

$$W^F(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^3 \sin^2\theta\cos\theta\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi^2 c^4 (1 - \varepsilon_1 (v/c)^2\cos^2\theta)(1 - \sqrt{\varepsilon_2}\,(v/c)\cos\theta)^2}. \tag{8.86}$$

Если $\varepsilon_{1,2}$ не являются вещественными, то нужно взять реальную часть (Re) правой части (8.86).

При сравнении (8.85), (8.86) с излучаемой энергией (8.68) бросаются в глаза следующие различия: 1) работа сил зависит от знака $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, в отличие от энергии излучения (8.68), которая от этого знака не зависит; 2) сомножитель $(1 - \varepsilon_1 (v/c)^2\cos^2\theta)$ в знаменателе формулы (8.86), который особенно мал в ультрарелятивистском пределе, стоит в первой, а не во второй степени, как в (8.68); 3) различаются и зависимости от v и угла θ. Все это указывает на то, что работа сил поля излучения над зарядом может заметно, а в ряде случаев весьма сильно отличаться от излученной энергии.

Чтобы яснее выявить соответствующую разницу остановимся на ультрарелятивистском случае (т. е. при $v \to c$). Тогда, полагая $|\varepsilon - 1| \approx \omega_p^2/\omega^2 \ll 1$ и $\theta^2 \approx (Mc^2/\mathscr{E})^2 \ll 1$, из (8.86) получаем следующие оценки относительной величины работы сил и энергии излучения. В энергии излучения (8.68) содержится дополнительный множитель $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ в числителе, который имеет порядок $(\omega_p/\omega)^2(\Delta N/N)$ и дополнительный множитель $(1 - \varepsilon_1 (v/c)^2\cos^2\theta)$ в знаменателе, который имеет порядок $(\omega_p/\omega)^2 + \theta^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2$. Считая θ^2, $(Mc^2/\mathscr{E})^2$ и $(\omega_p/\omega)^2$ величинами одного порядка, получим, что энергия излучения примерно в $\Delta N/N$ раз меньше работы сил. Таким образом, при $\Delta N/N \ll 1$ она много меньше работы сил, тогда как в случае $\Delta N/N = 1$ излучаемая энергия

того же порядка величины, что и работа W^F (однако может отличаться по знаку и значению численного коэффициента). Точный расчет подтверждает эти оценки. Из (8.86) имеем

$$W^F(\omega, \theta) \approx \frac{2q^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{[\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2][\theta^2 + (\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2]}. \quad (8.87)$$

Спектральное распределение работы сил получится из (8.87) при интегрировании по углам θ

$$W^F(\omega) = \int_0^\infty \pi\, d\theta^2 W^F(\omega, \theta) = \frac{q^2}{\pi c}\left\{1 + \frac{\omega^2}{(\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(\omega_{p1}/\omega)^2 + \left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\right] \ln\left[\frac{(\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2}{(\omega_{p2}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2}\right]\right\}. \quad (8.88)$$

Если $|N_2 - N_1|/N = \Delta N/N \ll 1$, т. е. $|\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2|/\omega_p^2 \ll 1$, то

$$W^F(\omega) \approx \frac{q^2}{\pi c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{(N_2 - N_1)}{N} \frac{1}{[(\omega_p/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2]}. \quad (8.89)$$

При $\omega \ll \omega_p \mathscr{E}/Mc^2$ величина $W^F(\omega)$ постоянна и падает как $1/\omega^2$ при больших частотах. Сравнивая (8.89) с (8.41), мы убеждаемся в том, что, как и указывалось выше, работа сил в единицу времени может намного (примерно в $N/\Delta N$ раз) превосходить мощность излучения. Полная работа сил (8.85) в рассматриваемом случае (8.89) равна

$$W^F = \int_0^\infty W^F(\omega)\, d\omega = \frac{q^2 \omega_p (N_2 - N_1)}{2cN} \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (8.90)$$

Если изменение N велико, то для переходов из вакуума в среду ($|\Delta N|/N_2 = 1$, $N_1 = 0$) из (8.88) получаем

$$W^F = \frac{2}{3} q^2 \frac{\omega_p}{c} \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (8.91)$$

В то же время при переходе из среды в вакуум ($\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$) находим

$$W^F = -\frac{4}{3} \frac{q^2 \omega_p}{c} \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \quad (8.92)$$

В этом случае работа сил по абсолютной величине имеет тот же порядок, что и энергия излучения (8.46), однако численные коэффициенты иные. Если же не считать скорость частицы постоянной, а учитывать реакцию излучения на частицу, то отрицательный знак работы сил (8.92) при вылете частицы из среды означает, что, излучая, частица ускоряется, а не тормозится, причем ускорение производится именно полем излучения. Никакого парадокса здесь все же нет. Для того чтобы это по-

нять, нужно учесть, что в балансе энергий должна фигурировать еще одна величина, а именно энергия собственного поля частицы или, как часто говорят, нужно учесть макроскопическую *перенормировку массы частицы*.

Дело в том, что энергии собственного поля частицы оказываются в среде *1* и в среде *2* неодинаковыми, в силу чего существует дополнительная масса частицы, связанная с наличием среды. С изменением этой части массы при переходе из среды *1* в среду *2* связано изменение энергии, которое естественно необходимо учитывать при рассмотрении баланса энергий.

Энергия собственного поля заряда равна

$$W^q = \int \frac{1}{8\pi} (\varepsilon (\mathbf{E}^q)^2 + (\mathbf{B}^q)^2)\, d\mathbf{r}, \tag{8.93}$$

а ее изменение при переходе из среды *2* в среду *1* при $v = \text{const}$, т. е. энергия макроскопической перенормировки массы, равно

$$W^M = W_2^q - W_1^q. \tag{8.94}$$

В простейшем случае ультрарелятивистских частиц свойства переходного излучения становятся универсальными (одинаковыми при изменениях в пространстве или во времени). Основной вклад в W^M вносит тогда поперечное поле, которое описывается выражениями (8.56) и (8.69). При этом

$$W^q = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \int d\mathbf{k} \frac{(1 + \varepsilon\, (\mathbf{kv})^2/k^2c^2)}{(k^2 - \varepsilon\, (\mathbf{kv})^2/c^2)^2}. \tag{8.95}$$

Для ультрарелятивистских частиц $|\mathbf{k}| \approx \omega/c$, $|\varepsilon - 1| \ll 1$, $(\mathbf{kv})^2/k^2v^2 \approx 1 - \theta^2$ и, как легко видеть,

$$W^q \approx \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2\, d\theta^2 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{[\theta^2 + (\omega_p/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2]^2}. \tag{8.96}$$

Энергия перенормировки массы в этом случае равна

$$W^M = \frac{q}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \theta^2\, d\theta^2 \frac{(\omega_{p1}^2 - \omega_{p2}^2)}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \theta^2 + 2\left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\right] \times$$

$$\times \left[\theta^2 + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\right]^{-2} \left[\theta^2 + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2\right]^{-2}. \tag{8.97}$$

Как видно, энергия перенормировки массы, так же, как и работа сил, зависит от знака $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, и при $\Delta N/N \ll 1$ пропорциональна $\Delta N/N$:

$$W^M \approx \frac{q^2}{2c} \omega_p \frac{(N_2 - N_1)}{N} \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}. \tag{8.98}$$

Сравнивая (8.98) с (8.89), убеждаемся в том, что работа поля излучения над частицей идет в основном на перенормировку массы, а на излученную энергию приходится только малая доля,

около $\Delta N/12N$ от (8.98). Если $\Delta N = N = 1$, то из (8.97) при влете в среду ($\Delta N/N_2 = 1$, $N_1 = 0$) получаем

$$W^M = -\frac{q^2\omega_p}{c}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right), \tag{8.99}$$

а при вылете из среды ($\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$)

$$W^M = \frac{q^2\omega_p}{c}\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right). \tag{8.100}$$

Легко убедиться в соблюдении энергетического баланса при влете (см. (8.46), (8.91), (8.99)):

$$W^R + W^F = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\frac{q^2\omega_p}{c}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2} = -W^M. \tag{8.101}$$

Аналогично при вылете (см. (8.46), (8.92) и (8.100))

$$W^R + W^F = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{q^2\omega_p}{c}\frac{\mathscr{E}}{Mc^2} = -W^M. \tag{8.102}$$

Таким образом, эффект перенормировки массы полностью объясняет, почему излучение может сопровождаться ускорением частицы. Таким же путем составляется баланс и для переходного излучения ультрарелятивистской частицы при пересечении границы раздела двух сред. При этом в пределе ультрарелятивистских скоростей частицы перенормировка массы и работа сил излучения описываются теми же формулами (8.90)—(8.92), (8.98)—(8.100). Это значит, что в ультрарелятивистском случае универсально не только переходное излучение, но и величина сил и перенормировка массы. Кстати, из приведенного анализа видно, что для ультрарелятивистской частицы в балансе энергий играет основную роль только излучение вперед, в перенормировке массы — только изменение энергии поперечного поля, а в работе сил — только работа поля излучения вперед в области прозрачности среды. Баланс энергии может быть рассмотрен и для произвольных скоростей [137б], но при этом анализ несколько различен для переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела сред и при скачке проницаемости во времени. Дело в том, что при наличии границы раздела задача пространственно неоднородна и необходимо рассматривать не только перенормировку энергии поперечного поля, но и перенормировку энергии продольного поля. В этой связи возникают вопросы об учете пространственной дисперсии и некоторые другие. Пониманию здесь способствует решение задачи для размытой границы раздела [140].

Наконец, еще одно замечание о переходном излучении.

Всякий механизм излучения связан с соответствующим механизмом поглощения волн (этот факт на классическом языке следует из инвариантности уравнений относительно изменения знака времени; на квантовом языке связь прямого и обратного

процессов ясна из равенства модулей матричных элементов для таких переходов). Переходное излучение в этом отношении, разумеется, не составляет исключения. Конкретно, в неоднородной среде действует и переходный механизм поглощения электромагнитных волн, как можно сказать, обратный переходному излучению электромагнитных волн такого же типа, возникающему при движении источника в этой среде [141].

В заключение главы остановимся на переходном рассеянии. Уместно раньше всего заметить, что термин «переходное рассеяние» еще не очень хорошо известен, так как был введен сравнительно недавно в связи с рассмотрением задачи о рассеянии волны диэлектрической проницаемости на неподвижном («закрепленном») заряде [138]. Переходное рассеяние, как уже подчеркивалось в начале настоящей главы, является процессом весьма общего типа. Довольно естественно поэтому, что в частных случаях переходное рассеяние фактически неоднократно рассматривалось и ранее, но обычно без достаточно ясной физической интерпретации или без упоминания о том, что рассматриваемый эффект имеет отношение к процессам рассеяния. Задача дальнейшего изложения — выявление не всегда ясных с первого взгляда связей с переходным рассеянием таких процессов, как резонансное переходное излучение — переходное излучение в периодической среде, излучение частиц в среде со случайными неоднородностями, нелинейное взаимодействие волн в плазме и нелинейные эффекты в вакууме при наличии сильных электромагнитных полей. Для того чтобы перебросить мостик с теорией переходного излучения и выявить соотношение между переходными излучением и переходным рассеянием, начнем с вопроса о резонансном переходном излучении [8].

Переходное излучение, как было выяснено, происходит как при изменении диэлектрических свойств среды в пространстве, так и при изменении их во времени. Одной из возможных комбинаций является случай, когда диэлектрическая проницаемость по синусоидальному закону меняется и во времени, и в пространстве. Конкретно, положим

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \qquad \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0). \tag{8.103}$$

В этом случае можно говорить о волне диэлектрической проницаемости, распространяющейся по $\mathbf{k}_0$ и имеющей фазовую скорость $\omega_0(\mathbf{k}_0)/k_0$.

При движении заряда относительно волны проницаемости возникает переходное излучение, которое, разумеется, отлично от переходного излучения на одной границе раздела. Главное различие связано, очевидно, с тем, что проницаемость (8.103) является периодической функцией и излучение происходит во всем пространстве, а не в одной области, локализованной вблизи границы раздела. В этом отношении к переходному излучению в волне (8.103) особенно близко переходное излучение на

стопке пластинок, т. е. в среде с многими границами раздела, находящимися на одинаковом расстоянии друг от друга. Наличие периодичности приводит, естественно, к когерентности волн, образующихся вблизи разных границ и, как следствие, к резонансным эффектам. Поэтому переходное излучение в периодической среде можно назвать резонансным переходным излучением. Вместе с тем переходное излучение в периодической среде можно считать переходным рассеянием. В самом деле, представляется вполне правильным описывать процесс таким образом: при падении волны проницаемости (8.103) на заряд в его окрестности возникает дополнительная переменная поляризация и, следовательно, образуется уходящая от заряда электромагнитная волна — продукт переходного рассеяния. Подчеркнем, что такое рассеяние коренным образом отличается от обычного, связанного с колебанием частицы в поле падающей волны, поскольку переходное рассеяние возникает и для частицы с бесконечной массой $M \to \infty$. Правда, распространение в среде различных возмущений обычно сопровождается как волнами проницаемости типа (8.103), так и волнами электрического поля, которое для частиц с конечной массой вызывает обычное томсоновское рассеяние (см. также гл. 15). Отделить переходное рассеяние от томсоновского в некоторых случаях (например, в плазме) не столь просто, поскольку имеет место интерференция обоих типов рассеяния. Эта интерференция, например, для плазменных волн, столь существенна, что меняет порядок величины полного сечения рассеяния (см. [94, 106б] и гл. 15).

В дальнейшем переходное рассеяние мы будем в основном рассматривать как самостоятельный процесс, учитывая, что в ряде случаев обычное рассеяние оказывается пренебрежимо малым (для очень тяжелых частиц) или вообще отсутствует (например, для акустических волн, которые не сопровождаются волнами электрического поля). Естественно, рассеянной волной может быть не только электромагнитная волна, но любая другая волна в среде, в частности и волна проницаемости типа (8.103), но с другими значениями $\mathbf{k}_0$ и ω_0. Таким образом, общая теория рассеяния произвольных волн в средах должна обязательно строиться с учетом переходного рассеяния. Вообще говоря, только в пределе очень высоких частот падающей (рассеиваемой) и рассеянной волн (частот, намного превышающих оптические частоты или характерные плазменные частоты среды) можно рассматривать одни лишь процессы обычного рассеяния.

Возможность считать (и называть) переходное излучение переходным рассеянием не ограничивается случаем волны проницаемости типа (8.103). Действительно, если рассмотреть волны проницаемости, имеющие вид импульса или «ступеньки» в пространстве и (или) во времени, то любое переходное излу-

чение можно считать процессом рассеяния (трансформации) возмущения или импульса волны проницаемости с образованием электромагнитных, а в принципе и других волн. В подобной ситуации, вероятно, было бы нецелесообразно говорить о переходном рассеянии наряду с переходным излучением, если бы не существовало переходного рассеяния на покоящемся («закрепленном») заряде. В самом деле, в этом случае вводить понятие о переходном излучении было бы явной натяжкой, так как нет движущегося заряда и имеет место типичное рассеяние волны проницаемости с ее превращением в электромагнитную волну (рис. 8.4). Сказанное уже отмечалось в начале главы, но

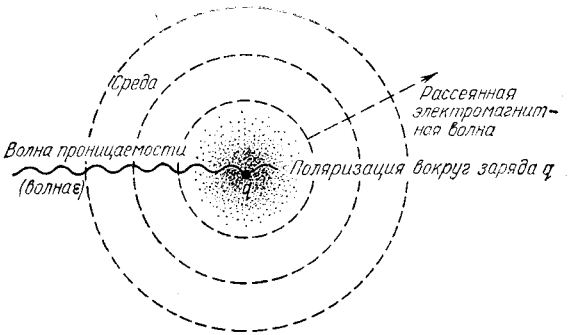


Рис. 8.4. Схематическое изображение процессов переходного рассеяния на покоящемся заряде ($\mathbf{v} = 0$).

здесь трудно совсем избежать повторений. Дополнительно отметим, что случай покоящегося заряда может показаться невыделенным, поскольку в другой инерциальной системе отсчета этот заряд будет уже двигаться с постоянной скоростью $\mathbf{v} \neq 0$. В этой системе, однако, будет двигаться и среда, в силу чего для решения задач нужно пользоваться электродинамикой движущихся сред. Таким образом, в условиях, когда скорость среды постоянна (не зависит от координат и времени), связанная со средой система отсчета физически выделена и ее использование наиболее удобно. Ниже, как и раньше, будем пользоваться только такой системой отсчета и соответственно электродинамикой покоящихся сред; разумеется, в этой системе отсчета движущийся заряд имеет скорость $\mathbf{v} \neq 0$ относительно среды.

Переходное рассеяние на покоящемся заряде происходит только при $\omega_0 \neq 0$ и $\mathbf{k}_0 \neq 0$ *). Если же скорость заряда $\mathbf{v} \neq 0$,

*) Обусловленная наличием волны проницаемости (8.103) дополнительная поляризация среды в поле покоящегося заряда $\delta\mathbf{P} = \frac{\varepsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0)}{4\pi} \mathbf{E}^q$, $\mathbf{E}^q = \frac{q\mathbf{r}}{\varepsilon^{(0)} r^3}$. При $\mathbf{k}_0 = 0$ поляризация $\delta\mathbf{P}$ сферически симметрична и поэтому не приводит к излучению рассеянной электромагнитной волны.

то излучение электромагнитных волн имеет место уже при $\omega_0 = 0$, $\mathbf{k}_0 \neq 0$ (пространственно-периодическая структура) или при $\omega_0 \neq 0$, $\mathbf{k}_0 = 0$ (среда, проницаемость которой периодически изменяется только во времени). В связи с таким различием задача о переходном рассеянии на покоящемся заряде также в известном смысле выделена, хотя и может, конечно, быть исследована на основе общего решения, справедливого при $\omega_0 \neq 0$, $\mathbf{k}_0 \neq 0$ (именно известная нетривиальность предельного перехода от переходного рассеяния на движущемся заряде к такому рассеянию на неподвижном заряде, видимо, и привела к тому, что переходное рассеяние на покоящемся заряде было рассмотрено лишь сравнительно недавно).

В принятых предположениях о бесконечно большой массе заряженной частицы рассеяние на ней происходит без изменения частоты

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(\mathbf{k}_0). \tag{8.104}$$

Эффект отдачи при рассеянии существен только при учете квантовых эффектов и конечности массы частицы M (так же, как и для обычного рассеяния). Для движущегося заряда равенство частот рассеянной и рассеиваемой волн имеет место только в системе отсчета, в которой заряд покоится, тогда как в используемой системе отсчета, в которой покоится среда, из-за эффекта Доплера вместо (8.104) имеем

$$\omega - \mathbf{kv} = \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}. \tag{8.105}$$

Здесь и в дальнейшем $\omega > 0$ и $\omega_0 > 0$ (очевидно, ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор рассеянной волны). Волна (8.103) содержит как член с $\exp[-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r})]$, так и с $\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r})]$, т. е. как положительные, так и отрицательные частоты. Поэтому, строго говоря, помимо (8.105), следует учесть возможность выполнения равенства

$$\omega - \mathbf{kv} = -(\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}). \tag{8.106}$$

Если (8.105) соответствует процессу излучения волны с частотой ω и поглощению волны с частотой ω_0 (или наоборот) *), то процесс (8.106) соответствует одновременному излучению или поглощению двух волн. При этом, если мы интересуемся ультрарелятивистскими частицами и излучением высоких частот $\omega \gg \omega_p$, то левые части равенства (8.105), (8.106) всегда поло-

*) Как мы уже видели в гл. 7, «направление» процессов (испускание, поглощение) удобно проследить при квантовом описании, когда вводятся кванты с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и используются законы сохранения энергии и импульса $\mathscr{E}_0 + \hbar\omega_0 = \mathscr{E}_1 + \hbar\omega$, $\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}$ (здесь $\mathscr{E}_{0,1}$ и $\mathbf{p}_{0,1}$ — соответственно энергия и импульс частицы в начальном и конечном состояниях). В классическом приближении, т. е. при пренебрежении отдачей, $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0 + \dfrac{\partial\mathscr{E}}{\partial\mathbf{p}}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) = \mathscr{E}_0 + \hbar\mathbf{v}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, и мы приходим к (8.105).

жительны. Действительно, считая угол θ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ малым (излучение ультрарелятивистской частицы концентрируется в направлении, близком к ее скорости), получаем

$$\omega - \mathbf{kv} = \frac{\omega}{2}\left[\theta^2 + \left(\frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right] > 0,$$

где положено $k = (\omega/c)\, n = (\omega/c)\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} \approx (\omega/c)\,(1 - \omega_p^2/2\omega^2)$. Для релятивистской частицы $|\mathbf{k}_0\mathbf{v}| \lesssim k_0 c$, т. е. для быстрых волн диэлектрической проницаемости с $\omega_0/k_0 > c$ разрешен только процесс (8.105). Для медленных волн с $\omega_0/k_0 < c$ возможны оба процесса (8.105) и (8.106); при этом выбор между процессами (8.105) и (8.106) в пределе $\omega_0/k_0 \ll c$ определяется углом между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{v}$, поскольку в этом случае

$$\omega - (\mathbf{kv}) \approx \mp (\mathbf{k}_0\mathbf{v}). \tag{8.107}$$

Если релятивистская частица распространяется по или против направления волны (8.103), то из приведенных выражений следует, что

$$\omega \approx \frac{2k_0 c}{\theta^2 + (\omega_p/\omega)^2 + (Mc^2/\mathscr{E})^2}. \tag{8.108}$$

При $\omega_0/k_0 \ll c$, $\omega_0 \neq 0$ излучение ультрарелятивистской частицы происходит фактически так же, как и на статических неоднородностях с длиной волны $d_0 = 2\pi/k_0$. Если $\omega \gg \omega_p\mathscr{E}/Mc^2$, $\theta \lesssim Mc^2/\mathscr{E}$, то излучаются весьма высокие частоты, быстро растущие с энергией частицы:

$$\omega \approx 2k_0 c\left(\frac{\mathscr{E}}{Mc^2}\right)^2. \tag{8.108а}$$

Одно из основных довольно очевидных отличий переходного рассеяния от переходного излучения на одной границе состоит в том, что рассеяние приводит к непрерывному излучению частицы, тогда как переходное излучение имеет конечную длительность. Следовательно, в случае переходного рассеяния нужно интересоваться энергией, излученной на единицу пути частицы или в единицу времени. Естественно, такая же ситуация возникнет, если имеется последовательность границ раздела или стопка пластинок, каждая из которых дает переходное излучение на своих границах. Однако простая сумма излучений на границах не эквивалентна переходному рассеянию — интенсивность излучения будет определяться числом границ на единицу длины, если излучение от отдельных границ некогерентно. Переходное же рассеяние соответствует когерентной интерференции полей, возникающих на различных границах. Условие когерентности совпадает с (8.107). Переходное рассеяние в общем случае $\omega_0 \neq 0$ — явление более богатое, чем когерентное (резонансное) переходное излучение, описываемое резонансным условием (8.107).

Условие резонанса (8.108) можно записать в форме

$$L_f = \frac{4\pi c}{\omega} \frac{1}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathscr{E}^2) + (\omega_p/\omega)^2]} = \frac{2\pi}{k_0} = d_0, \qquad (8.109)$$

т. е. длина зоны формирования излучения (см. (8.78)) равна пространственному периоду модуляции диэлектрической проницаемости. Физически это объясняется тем, что на длине L_f набегает фаза поля излучения, равная 2π, и если в этом месте возникнет новое излучение из-за наличия следующей «границы», то оно будет как раз в фазе с полем, возникшим на предыдущей границе. Условие (8.109) записано для отдельной синусоидальной волны. Для сравнения с переходным излучением полезно рассмотреть стопку слоев, в которой попеременно диэлектрическая проницаемость меняется от $\varepsilon^{(0)} - \varepsilon^{(1)}$ до $\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}$, с пространственным периодом $2\pi/k_0$. Соответствующий расчет проведен в [94б], там же указана дополнительная литература. Здесь ограничимся на этот счет лишь несколькими замечаниями.

Интерес к переходному излучению в стопке пластинок был связан с проблемой переходных счетчиков. Хотя полная излучаемая энергия при прохождении частицей одной границы раздела и растет с ростом ее энергии (и это могло бы быть использовано для измерения энергии частицы), однако на отдельной границе в среднем излучается не более $1/137$ кванта, т. е. необходимо более 137 границ для получения 1 кванта. Такая оценка справедлива в том случае, если излучение от отдельных границ не интерферирует между собой (интенсивность излучения пропорциональна полному числу слоев S). Интерференция излучений, испущенных отдельными слоями, должна привести к тому, что полная интенсивность на данной частоте будет пропорциональна квадрату числа пластинок S^2 в стопке. Казалось бы, в этом случае суммарная по частотам и углам интенсивность может быть существенно бóльшей, чем в случае отсутствия интерференции. В действительности, однако, суммарная интенсивность меняется не очень сильно. Дело в том, что в результате интерференции подавляются одни частоты и усиливаются другие, которые удовлетворяют резонансным условиям типа (8.105), (8.106) соответственно. Возникающее же излучение представляет собой не что иное, как переходное рассеяние, но не от синусоидальной волны, а от «волны» с крутыми фронтами. Результаты вычислений позволяют выявить зависимость интенсивности излучения от энергии частицы и параметров слоев, что важно при конструировании и использовании переходных счетчиков. Вместе с тем до сих пор остаются несколько в тени физические вопросы, а именно связь между когерентными и некогерентными процессами, а также тот факт, что когерентные процессы это не что иное, как переходное рассеяние. При этом в качественном отношении особенно интересны две возможности: а) когда период модуляции (период структуры)

больше размера зоны формирования на частоте $\omega_p \mathscr{E}/Mc^2$; б) когда этот период меньше размера зоны формирования (случаи $2\pi/k_0 \gtrless (2\pi c/\omega_p)(\mathscr{E}/Mc^2)$). В первом случае интенсивности излучения от разных границ суммируются независимо или почти независимо. Во втором случае происходит чисто переходное рассеяние, т. е. резонансное переходное излучение. Анализ рассеяния на стопке пластинок позволяет особенно ясно проследить связь между переходным излучением и переходным рассеянием. Для исследования же переходного рассеяния как такового естественно обратиться к простейшему случаю синусоидальной модуляции плотности (8.103), учитывая не только пространственную, но и временную модуляцию, т. е. рассматривать волну диэлектрической проницаемости с $\omega_0 \neq 0$ и $\mathbf{k}_0 \neq 0$.

В общем случае при рассмотрении переходного рассеяния плотность тока $\mathbf{j}^q$ можно считать заданной (для заряда — равной (8.3)) и использовать уравнения Максвелла (8.2) с некоторой периодической диэлектрической проницаемостью. При этом удобно все величины разлагать в полные интегралы Фурье по времени и по пространству

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\, d\mathbf{k}\, d\omega; \quad \mathbf{j}^q = \int \mathbf{j}^q_{\mathbf{k},\,\omega} \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\, d\mathbf{k}\, d\omega \tag{8.110}$$

и т. д. Для среды с проницаемостью (8.103) связь индукции $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ с электрическим полем $\mathbf{E}$ (простоты ради здесь положено $\varphi_0 = 0$, сечение рассеяния от φ_0 не зависит) для компонент Фурье принимает вид

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k},\,\omega} = \varepsilon^{(0)}(\omega)\, \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} + \frac{1}{2i} \varepsilon^{(1)}(\omega)\, (\mathbf{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0,\,\omega+\omega_0} - \mathbf{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\,\omega-\omega_0}). \tag{8.111}$$

Для проницаемости (8.103) величины $\varepsilon^{(0)}$ и $\varepsilon^{(1)}$, разумеется, от частоты не зависят, однако в общем случае $\varepsilon^{(1)}$ может зависеть как от ω и $\mathbf{k}$, так и от ω_0 и $\mathbf{k}_0$ (см. [94б] и конец гл. 15). Точно так же при учете пространственной дисперсии $\varepsilon^{(0)}$ зависит не только от ω, но и от $\mathbf{k}$. Чтобы не усложнять изложение, мы рассмотрим здесь простейший случай, когда $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(0)}$ зависят только от ω. Далее, в случае (8.3) имеем

$$\mathbf{j}^q_{\mathbf{k},\,\omega} = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3}\, \delta(\omega - (\mathbf{kv})). \tag{8.112}$$

Уравнения (8.2) приобретают тогда вид

$$[\mathbf{kB}_{\mathbf{k},\,\omega}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}_{\mathbf{k},\,\omega} - \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^q_{\mathbf{k},\,\omega}, \quad [\mathbf{kE}_{\mathbf{k},\,\omega}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\,\omega}. \tag{8.113}$$

Отсюда с учетом (8.111) получаем

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega)\, \delta_{ij}\right) E_{j,\,\mathbf{k},\,\omega} = \frac{4\pi i \omega q v_i}{(2\pi)^3\, c^2}\, \delta(\omega - (\mathbf{kv})) + \\ + \frac{\omega^2}{2ic^2} \varepsilon^{(1)}(\omega)\, (E_{i,\,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0,\,\omega+\omega_0} - E_{i,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\,\omega-\omega_0}). \tag{8.114}$$

Будем считать, что $\varepsilon^{(1)}(\omega) \ll \varepsilon^{(0)}(\omega)$, и рассматривать последний член (8.114) как возмущение; тогда при $\varepsilon^{(1)}(\omega) \to 0$ получим поле равномерно движущегося заряда как сумму поперечного и продольного (по отношению к вектору $\mathbf{k}$) полей

$$\mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{E}^{q\,(l)}_{\mathbf{k},\omega} + \mathbf{E}^{q\,(tr)}_{\mathbf{k},\omega}, \tag{8.115}$$

где

$$E^{q\,(l)}_{i,\mathbf{k},\omega} = -\frac{4\pi i q k_i}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}\,\delta(\omega - \mathbf{kv}) = G^{l}_{ij,\mathbf{k},\omega} j^{q}_{j,\mathbf{k},\omega}, \tag{8.116}$$

$$E^{q\,(tr)}_{i,\mathbf{k},\omega} = \frac{4\pi i q\omega\,(v_i - k_i(\mathbf{kv})/k^2)\,\delta(\omega - \mathbf{kv})}{(2\pi)^3 c^2 (k^2 - \omega^2\varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)} = G^{tr}_{ij,\mathbf{k},\omega} j^{q}_{j,\mathbf{k},\omega}. \tag{8.117}$$

Здесь введены функции Грина для продольного $G^{l}_{ij,\mathbf{k},\omega}$ и поперечного $G^{tr}_{ij,\mathbf{k},\omega}$ полей. Они равны

$$G^{l}_{ij,\mathbf{k},\omega} = -\frac{4\pi i k_i k_j}{\omega k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}, \quad G^{tr}_{ij,\mathbf{k},\omega} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\frac{4\pi i\omega}{c^2(k^2 - \omega^2\varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)}. \tag{8.118}$$

Рассеянные волны будем для конкретности считать поперечными. Тогда их поле определится из (8.114) в следующем приближении (подставляем в член, содержащий $\varepsilon^{(1)}$, поле (8.115)):

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}(\omega)\right)\mathbf{E}^{R\,(tr)}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{\omega^2}{2c^2 i}\varepsilon^{(1)}(\omega)\Big[\mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0,\,\omega+\omega_0} - \mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\,\omega-\omega_0} - \frac{\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0,\,\omega+\omega_0}) + \frac{\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\,\omega-\omega_0})\Big]. \tag{8.119}$$

Здесь уместно остановиться на одной особенности членов, входящих в правую часть (8.119), которая в данном случае служит как бы эффективным источником (током), возбуждающим рассеянную волну. Этот ток ортогонален $\mathbf{k}$ и может показаться, что только поперечное поле заряда — поле (8.117), будет вносить свой вклад в поле $\mathbf{E}^{R\,(tr)}_{\mathbf{k},\omega}$. В действительности, однако, в (8.119) входят поля $\mathbf{E}^{q}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_0,\,\omega\pm\omega}$ т. е. для этих полей индексы l и tr в (8.116), (8.117) указывают на продольность или поперечность поля по отношению к вектору $\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_0$, а не к $\mathbf{k}$. Поэтому, если только $\mathbf{k}_0 \neq 0$, то нужно учитывать как продольное, так и поперечное поля. Более того, легко видеть, что поперечная компонента (8.117) при $\mathbf{v} \to 0$ стремится к нулю и для покоящегося заряда основным будет продольное поле (8.116). Далее, из сравнения (8.116) с (8.117) следует, что продольное поле будет основным и при $v \ll \frac{ck}{\omega\varepsilon^{(0)}(\omega)} \sim \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega)}}$, т. е. при скоростях частиц, много меньших скорости света в среде, а значит, при $\varepsilon^{(0)}(\omega) \gg 1$ для любых нерелятивистских частиц. Впрочем, это

утверждение не очень точно, поскольку при $k_0 \to 0$, $v \neq 0$ становится существенным уже поперечное поле (8.117) и, следовательно, оно играет роль и при достаточно малых k_0. Строго говоря, вывод о преимущественной роли продольного или поперечного поля может быть получен только при сравнении окончательных выражений для сечений рассеяния.

Частоты $\omega \pm \omega_0$ и волновые векторы $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$ для функций Грина $G^{l}_{ij,\,\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_0,\,\omega\pm\omega_0}$ и $G^{tr}_{ij,\,\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_0,\,\omega\pm\omega_0}$ чаще всего не соответствуют волнам, которые могут распространяться в среде, поэтому поля с такими частотами и волновыми векторами называют виртуальными. Рассеяние при учете продольного поля частицы $\mathbf{E}^{q(l)}$ часто называют поэтому рассеянием через виртуальную продольную волну, а при учете $\mathbf{E}^{q(tr)}$ — рассеянием через виртуальную поперечную волну (или, на квантовом языке, виртуальный поперечный фотон). Такие названия связываются также с диаграммным изображением переходного рассеяния (рис. 8.5). Кружок на рис. 8.5 соответствует взаимодействию

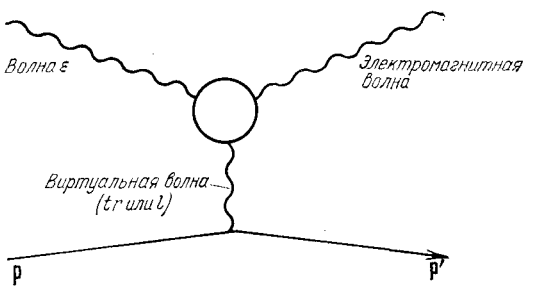


Рис. 8.5. Графическое изображение процесса переходного рассеяния.
p и p′ — импульсы частицы до и после рассеяния; при переходном рассеянии на частице с массой $M \to \infty$ импульсы p и p′ всегда можно считать одинаковыми.

трех волн, описываемому константой (вершиной) $\varepsilon^{(1)}$. Разумеется, при $\mathbf{v} = \text{const}$ (масса частицы $M \to \infty$) импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ можно считать одинаковыми.

Ниже рассмотрим лишь один предельный случай — случай нерелятивистской частицы, когда основную роль играет рассеяние через виртуальную продольную волну. Случай ультрарелятивистской частицы, когда наиболее существенно рассеяние через виртуальную поперечную волну, освещен в [94].

Для простоты положим сразу $\mathbf{v} = 0$; тогда частота рассеянной волны равна частоте падающей волны. После подстановки (8.116) в (8.119) можно найти [138] рассеянное поле $\mathbf{E}^R_{\mathbf{k}}(t) = \int \mathbf{E}^R_{\mathbf{k},\,\omega} e^{-i\omega t}\, d\omega$. Для вычисления мощности излучения удобно воспользоваться тем, что вдали от заряда поле $\mathbf{E}^R$ отделяется от собственного поля заряда, и поэтому мощность

излучения dW^R/dt будет равна среднему (по времени) изменению энергии W^R поля $\mathbf{E}^R$ в единицу времени

$$\frac{dW^R}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\mathbf{E}^R(\mathbf{r},\,t)\,\hat{\varepsilon}^{(0)}\,\frac{\partial \mathbf{E}^R(\mathbf{r},\,t)}{\partial t} + \mathbf{B}^R(\mathbf{r},\,t)\frac{\partial \mathbf{B}^R(\mathbf{r},\,t)}{\partial t}\right]d\mathbf{r} =$$

$$= 2\pi^2\int d\mathbf{k}\left[\mathbf{E}^R_{-\mathbf{k}}(t)\,\hat{\varepsilon}^{(0)}\,\frac{\partial \mathbf{E}^R_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \mathbf{B}^R_{-\mathbf{k}}\,\frac{\partial \mathbf{B}^R_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{q^2\omega_0^3}{4\pi c^2}\int\left|\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)}\right|^2\frac{2\,[\mathbf{k}\mathbf{k}_0]^2}{k^2\,(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^4}\,\delta\left(k^2-\omega_0^2\,\frac{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}{c^2}\right)d\mathbf{k} \qquad (8.120)$$

(здесь при учете частотной дисперсии $\hat{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon^{(0)}\left(i\,\frac{\partial}{\partial t}\right)$). В соответствии со сказанным ранее мощность излучения обращается в нуль как при $\omega_0 \to 0$, так и при $\mathbf{k}_0 \to 0$. Напомним, что в общем случае $\varepsilon^{(1)}$ зависит от ω_0, $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ (в данном случае $\omega = \omega_0$). Сечение рассеяния может существенно зависеть от пространственной дисперсии $\varepsilon^{(1)}$. Здесь мы, однако, пренебрежем пространственной дисперсией, полагая $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(1)}(\omega)$. Тогда интегрирование по k^2 и углу θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ дает

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW^R}{dt} &= \frac{q^2\omega_0^2}{8c}\left|\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)}\right|^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}\left\{\frac{1}{\Lambda}\ln\frac{1+\Lambda}{1-\Lambda}-2\right\},\\ \Lambda &= \frac{2}{\frac{k}{k_0}+\frac{k_0}{k}}.\end{aligned}\right\} \qquad (8.121)$$

В предельных случаях имеем $\left(k = (\omega_0/c)\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}\right)$,

$$\frac{dW^R}{dt} = \frac{q^2\omega_0^4\,|\,\varepsilon^{(1)}(\omega_0)\,|^2\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3k_0^2\,|\,\varepsilon^{(0)}(0)\,|^2}, \qquad k \ll k_0, \qquad (8.122\text{а})$$

$$\frac{dW^R}{dt} = \frac{q^2ck_0^2\,|\,\varepsilon^{(1)}(\omega_0)\,|^2}{3\,|\,\varepsilon^{(0)}(0)\,|^2\left[\varepsilon^{(0)}(\omega_0)\right]^{3/2}}, \qquad k \gg k_0. \qquad (8.122\text{б})$$

Следует отметить, что $k/k_0 = (\omega_0/ck_0)\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}$, и если $\omega_0/k_0 \ll c/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega)}$, т. е. фазовая скорость волны проницаемости (8.103) много меньше скорости света в среде, то $k \ll k_0$. Для оценки сечения рассеяния можно сравнить (8.122) с известной мощностью излучения электрического диполя (осциллятора), находящегося в среде

$$\frac{dW_d}{dt} = \frac{q^2a_0^2\omega_0^4\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3}. \qquad (8.123)$$

Эта формула получается из выражения (6.28) после интегрирования по углам (кроме того, заряд частицы в (8.123) обо-

значен через q. Согласно (8.122а) и (8.123) имеем *)

$$\frac{dW^R}{dt}\Big/\frac{dW_d}{dt}=\left|\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)}\right|^2\left(\frac{\lambda_0}{2\pi a_0}\right)^2,\qquad \lambda_0=\frac{2\pi}{k_0}. \tag{8.124}$$

Томсоновское рассеяние (рассеяние на свободном заряде) пропорционально q^4 и обратно пропорционально квадрату массы M^2, поскольку в этом случае (см. также гл. 15)

$$\mathbf{a}_0=-\frac{q\mathbf{E}_0}{M\dot{\omega}_0^2},\qquad \frac{dW_d}{dt}=\frac{dW_{T,\,M}}{dt}=\frac{q^4\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}\,E_0^2}{3M^2c^3}. \tag{8.125}$$

Переходное рассеяние не зависит от массы частицы и имеет место и для тяжелых частиц (а в принципе и при $M\to\infty$). При этом роль амплитуды a_0 играет λ_0 — длина падающей волны. При $\lambda_0\gg a_0$ переходное рассеяние может намного превосходить томсоновское. Эти выводы, касающиеся переходного рассеяния особенно важны для плазмы (см. гл. 15), где количественные оценки будут несколько иными из-за эффектов пространственной дисперсии проницаемости. Поскольку рассеяние на покоящемся заряде происходит без изменения частоты ($\omega=\omega_0$), то *для низкочастотных волн диэлектрической проницаемости* рассеяние возможно только в том случае, если частота ω_0 лежит в окне прозрачности среды для электромагнитных волн. Возможно также переходное рассеяние с образованием любых других типов волн с частотой ω_0, которые способны распространяться в среде.

Как сказано, особенно важную роль, если иметь в виду реальные физические задачи, переходное рассеяние играет в плазме. На этом вопросе мы остановимся в конце гл. 15. Сейчас же ограничимся еще лишь несколькими замечаниями, причем не

---

*) В связи с сопоставлением формул (8.122а) и (8.123) уместно заметить, что с точностью до численного множителя формулу (8.122а) можно получить из (8.123) и путем следующих соображений. Амплитуда дополнительной поляризации вокруг рассматриваемого рассеивающего заряда q, возникающей под действием волны поляризации, равна

$$\delta\mathbf{P}_0=\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{4\pi}\,\mathbf{E}^q=\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)\,q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon^{(0)}(0)\,r^3}.$$

Отсюда сразу же ясно, что возникающий дипольный момент $\mathbf{p}=\int\delta\mathbf{P}_0\,dV$ пропорционален $q\varepsilon^{(1)}(\omega_0)/\varepsilon^{(0)}(0)$. Для перехода от (8.123), где $p=qa_0$ к (8.122а) нужно считать, что $p^2=\dfrac{q^2\,|\,\varepsilon^{(1)}(\omega_0)|^2}{|\,\varepsilon^{(0)}(0)\,|^2\,k_0^2}$. Таким образом, эффективная длина диполя равна $1/k_0=\lambda_0/2\pi$, что весьма естественно (достаточно сказать, что в нашем распоряжении в обсуждаемой задаче, кроме λ_0, нет других параметров с размерностью длины; длина электромагнитной волны $\lambda=2\pi/k$ в случае (8.122а) велика по сравнению с λ_0 и размер источника определять не может).

будем приводить дополнительных ссылок на литературу, поскольку их можно найти в легко доступной статье [94а].

Весьма распространенный вид среды — это среда с теми или иными случайными (т. е. не регулярно расположенными) неоднородностями. Переходное излучение и рассеяние в таких средах представляет интерес и в теории, и в эксперименте. Другая большая проблема, которой мы практически не касались, — интерференция и, можно сказать, сосуществование переходного излучения и переходного рассеяния с другими типами излучения и рассеяния (в применении к переходному рассеянию в плазме об этом еще будет речь в гл. 15). Далее следует упомянуть о различных эффектах высшего порядка и нелинейных эффектах в среде, проявляющихся при движении источников с постоянной скоростью (т. е. без ускорения) и поэтому по своей природе связанных с черенковским и переходным излучением.

В качестве простейшего примера нелинейного черенковского излучения можно указать на излучение, возникающее при движении в среде (скажем, в прозрачной среде с показателем преломления $n(\omega)$) некоторого достаточно хорошо локализованного пакета (цуга, импульса) волн с отвечающей этому пакету групповой скоростью $\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}$. В том хорошо известном приближении, когда расплывание пакета не играет роли (и поэтому групповая скорость имеет точный смысл), пакет волн в кинематическом плане вполне аналогичен любому другому излучателю (заряду, мультиполю и т. п.), движущемуся в среде с постоянной скоростью. Таким образом, ясно, что пакет может, вообще говоря, излучать черенковские волны (с частотой $\omega = kc/n$) при условии $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{гр}}$. Однако в линейном приближении, когда соблюдается принцип суперпозиции, интенсивность излучения электромагнитных волн пакетом из электромагнитных же волн, разумеется, равна нулю. Но в нелинейной среде (в частности, в вакууме в сильном поле; см. гл. 6) черенковское излучение уже может возникнуть. В случае же движения в среде заряда, помимо тока $\mathbf{j}^q = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, возникает также некоторый нелинейный ток $\mathbf{j}^{NL}$, вносящий вклад, в частности, в черенковское излучение (этот вклад, правда, обычно весьма мал).

Рассмотрим теперь два заряда q_α и q_β, движущиеся со скоростями $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\beta$ и пролетающие достаточно близко друг к другу. Тогда, если заряды движутся в вакууме, поляризация которого не учитывается, излучение (тормозное излучение) возникает только при учете ускорения зарядов или по крайней мере одного из них. При наличии же среды указанное «столкновение» зарядов приводит к излучению (переходному тормозному излучению) даже в том случае, когда скорость обоих зарядов строго постоянна (это имеет место для свободных зарядов, если их массы $M_{\alpha,\beta} \to \infty$). Природа эффекта, очевидно, такая же, как и в случае переходного рассеяния, причем переменная (дополнительная) поляризация среды вблизи одного из зарядов

создается волнами проницаемости, связанными с другим зарядом. Разумеется, волны проницаемости или даже разложенное на плоские волны изменение проницаемости, бегущее вместе с зарядом, появляются только при учете нелинейности (это значит, очевидно, что проницаемость ε_{ij} должна зависеть от напряженности электрического поля). Сравнение интенсивностей переходного тормозного излучения и обычного тормозного излучения, причем нужно учитывать интерференцию обоих эффектов, свидетельствует о том, что интенсивность первого может даже превосходить интенсивность второго.

Наконец, нужно остановиться на переходном рассеянии, которое должно происходить уже в вакууме, но в достаточно сильном электромагнитном поле или если учитывать действие гравитационного поля. В простейшем варианте суть дела такая же, как при переходном рассеянии волны проницаемости на фиксированном заряде. В самом деле, такой заряд с учетом нелинейности вакуума (см. гл. 6) создает вокруг себя некоторую поляризацию. Падающая на заряд даже очень слабая электромагнитная волна также создает дополнительную электрическую и магнитную поляризации вокруг заряда (при условии (6.92) эти поляризации можно найти, опираясь на формулы (6.82)). Но переменная поляризация является источником электромагнитных волн, и, следовательно, образуется рассеянная электромагнитная волна. Собственно, такое рассеяние на фиксированном заряде (бесконечно тяжелом кулоновском центре) давно известно и носит название дельбруковского рассеяния. В этом случае, однако, основную роль играют малые расстояния порядка $\hbar/mc$ и использование изложенного в гл. 6 приближения оказывается недопустимым. Напротив, это приближение пригодно, когда падающая на заряд волна с частотой ω_0 превращается (трансформируется, рассеивается) в волну с частотой $2\omega_0$. На квантовом языке такое переходное рассеяние отвечает поглощению двух фотонов с энергией $\hbar\omega_0$ с испусканием одного фотона с энергией $2\hbar\omega_0$. Другой процесс, который можно рассматривать макроскопически (т. е. на основе макроскопической электродинамики в нелинейной среде), это рассеяние на фиксированном заряде уже без изменения частоты, но в присутствии также не очень слабого постоянного магнитного поля $\mathbf{B}_0$.

Роль падающей электромагнитной волны может играть и гравитационная волна. Известно, что под действием гравитационного поля вакуум ведет себя подобно среде, характеризуемой некоторыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей (см. [2], § 90). Уже отсюда ясно, что гравитационная волна вызовет вблизи заряда дополнительную электрическую и магнитную поляризации, в связи с чем появится рассеянная электромагнитная волна. Таким образом, на заряде или, что более интересно, на магнитном моменте (скажем, на

намагниченной нейтронной звезде, в частости на пульсаре) гравитационные волны должны частично трансформироваться в рассеянные электромагнитные волны.

В отношении только что затронутых задач, как уже упоминалось, соответствующие ссылки на литературу, а главное схему расчетов и окончательные формулы, читатель может найти в статье [94]. Вместе с тем казалось полезным и здесь хотя бы кратко и на качественном уровне, но продемонстрировать на примере ряда процессов как в среде, так и в вакууме плодотворность и известную универсальность представлений о переходном рассеянии.

Глава 9

О СВЕРХСВЕТОВЫХ ИСТОЧНИКАХ ИЗЛУЧЕНИЯ

Кажущиеся и реальные сверхсветовые скорости источников излучения. Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью, большей скорости света в вакууме.

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с является предельной, самой большой скоростью, встречающейся в природе. Так можно было бы сформулировать «в нулевом приближении» вывод, следующий из теории относительности и подтвержденный на опыте. Давным давно известно, однако, что уже «в первом приближении» приведенное утверждение неверно или, во всяком случае, нуждается в уточнении. Простейший пример — фазовая скорость света $v_ф = c/n$, которая может быть сколь угодно велика при $n \to 0$ (среды с $n < 1$, разумеется, вполне реальны — достаточно вспомнить о плазме, где в определенных условиях $n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$). В связи с этим и некоторыми другими примерами уточняют, что меньше скорости света должна быть скорость сигналов, возмущений, частиц, источников излучения и т. д., а не, скажем, скорость «перемещения» постоянной фазы (т. е. фазовая скорость). Но и такие утверждения нуждаются в уточнении, а неверно понятые ведут к парадоксам и противоречиям. Скорость сигнала, например, считается обычно равной групповой скорости

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}$$

(ограничиваемся сейчас исключительно для простоты случаем изотропной среды, где $k = (\omega/c)n(\omega)$ и скорость $\mathbf{v}_{гр}$ направлена по $\mathbf{k}$). Но эта скорость $v_{гр}$ вполне может оказаться превосходящей c, например, в области аномальной дисперсии, где $dn/d\omega < 0$. Разрешение такого кажущегося противоречия было достигнуто уже много десятилетий назад [142] на основе анализа распространения сигнала в диспергирующей среде. Дело в том, что понятие о групповой скорости $v_{гр} = d\omega/dk$ имеет точный смысл, вообще говоря, лишь при пренебрежении расплыванием сигнала и его поглощением (подробнее см. [84, 86, 143]). Поэтому в частности в области ярко выраженной аномальной дисперсии, где всегда имеется поглощение, скорость основной части сигнала отлична от $d\omega/dk$. Далее, как можно показать, скорость пе-

реднего фронта сигнала строго равна c. Если не говорить о вычислении поля за фронтом (область «предвестника»), то сам сделанный вывод о скорости фронта ясен и без вычислений. В самом деле, разложение поля сигнала (цуга волн) в интеграл Фурье всегда будет содержать также весьма высокие частоты. Но при $\omega \to \infty$ (а практически уже в рентгеновской области) показатель преломления $n \to 1$, так как частицы среды не успевают реагировать на поле волны. Такие высокие частоты и образуют «предвестник» сигнала, движущийся со скоростью c. Другое дело, что для сигналов со сравнительно низкой несущей частотой ω_0 энергия, заключенная в «предвестнике», ничтожно мала. Основная часть, или «тело», сигнала при пренебрежении поглощением обычно движется как раз с групповой скоростью $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$, но в тех случаях, когда $d\omega/dk > c$ (хотя и не только в них), сигнал сильно деформируется, понятие о групповой скорости становится неприменимым и во всяком случае передачи энергии со скоростью, большей c, не происходит. Как мы специально подчеркивали, сказанное давно и хорошо известно. Но любопытно, что какое-то гипнотическое влияние утверждения о невозможности превзойти скорость света в вакууме c продолжает действовать и в наше время. Примером может служить широко распространенное мнение о невозможности наблюдать эффект Вавилова — Черенкова и аномальный эффект Доплера в вакууме или средах с $n < 1$ (в частности, для поперечных волн в изотропной плазме). Другой пример связан с продолжающейся дискуссией о расстоянии до квазаров. Определить это расстояние действительно не легко, ибо единственный известный прямой метод в таких случаях связан с измерением красного смещения спектральных линий. Считая это смещение космологическим (связанным с расширением Вселенной), мы получаем соответствующее расстояние, но противники такой интерпретации опираются на отсутствие доказательства космологической природы красного смещения для квазаров. По нашему мнению, в космологической природе красного смещения для квазаров всегда было трудно сомневаться, а в настоящее время космологическая интерпретация общепринята, но не в этом сейчас дело. Интересно, что в качестве аргумента против использования космологического расстояния до квазаров в литературе упоминались данные об изменениях структуры квазаров (радиоисточников) со скоростью $u > c$. Схематизируя, представим себе источник излучения (скажем, радиоизлучения), угловой размер которого возрастает со временем с угловой скоростью $\Omega = d\varphi/dt$. Именно угол φ, под которым виден источник с Земли, и угловая скорость Ω являются наблюдаемыми величинами. Если расстояние до источника равно R, то скорость изменения границ источника на небесной сфере $u_\perp = \Omega R$. Как раз эта перпендикулярная лучу зрения скорость иногда оказывается превосходящей скорость c при использовании космологического

расстояния R (см. [144]). Исходя из предположения, что обязательно $u < c$, отсюда и делали заключение об относительной близости квазаров (в этом случае красное смещение в их спектрах могло бы обусловливаться гравитационным эффектом или большой скоростью квазара относительно находящихся вблизи него галактик).

Фактически, однако, наблюдаемая «кажущаяся» скорость $u_\perp = \Omega R$ может быть сколь угодно большой и никакие ограничения на R отсюда без дальнейшего не следуют. Действительно, полностью опираясь на теорию относительности и отвлекаясь от всяких гипотетических (и, по всей вероятности, недопустимых) возможностей движения объектов со скоростью $v > c$ (тахионы и т. п.), мы вместе с тем не имеем оснований отождествлять скорость объекта v и упомянутую скорость $u_\perp$. Рассмотрим, например, какой-то экран (им может быть оболочка сверхновой звезды, оболочка квазара и т. п.), освещаемый источником излучения и видимый (наблюдаемый) в рассеянном излучении или излучении люминесценции. Совершенно ясно тогда, что экран может «вспыхнуть» одновременно во всех точках, а в этом случае скорость $u \to \infty$. Освещая экран заданным образом, начиная с какой-то его точки, можно получить и любое другое значение «скорости» расширения светящегося участка экрана. Менее тривиальным примером получения «кажущихся» сверхсветовых скоростей u может служить наблюдаемая скорость расширения некоторой оболочки (см. [49б, 145]).

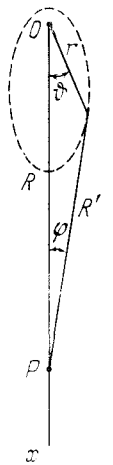


Рис. 9.1. К вычислению «кажущейся» (наблюдаемой) скорости расширяющейся оболочки.

Так, пусть наблюдается снаружи поверхность некоторой сферической оболочки (скажем, продуктов взрыва), движущейся со скоростью v. Взрыв пусть произошел в точке O (рис. 9.1) в момент t'_0, а сигнал о взрыве принимается в точке наблюдения P в момент $t=0$. Очевидно, $t'_0 = -R/c$, где R — расстояние между точками O и P, а влиянием среды на распространение сигнала (свет, радиоволны) считается возможным пренебречь. Найдем теперь геометрическое место точек («видимую» оболочку), от которых излучение достигает наблюдателя в какой-то момент $t > 0$. Точки на этой «видимой» оболочке характеризуем их расстоянием r от точки O и углом ϑ между $\mathbf{r}$ и линией OP (см. рис. 9.1). Время излучения t', отвечающее точке (r, ϑ), и время наблюдения t связаны соотношением

$$t' = t - \frac{R'}{c} \approx t - \frac{R}{c} + \frac{r}{c}\cos\vartheta,$$

где $R' \approx R - r\cos\vartheta$, поскольку предполагается, что $R \gg r$. С другой стороны, $t' - t'_0 = t' + R/c = r/v$, так как путь r обо-

лочка проходит со скоростью v. Комбинируя оба выписанных выражения для t', получаем

$$r = \frac{vt}{1 - (v/c)\cos\vartheta}. \tag{9.1}$$

Множитель $(1-(v/c)\cos\vartheta)^{-1}$ здесь такой же, как в формуле для эффекта Доплера, и имеет ту же природу — он связан с конечностью скорости распространения света c. Вследствие конечной скорости света в обсуждаемом случае в момент наблюдения t свет (радиоволны) приходит в точку наблюдения от точек оболочки, которым соответствует разное время $t' - t'_0$, прошедшее после момента взрыва $t'_0 = -R/c$. Ситуация здесь аналогична имеющей место при наблюдении (фотографировании) быстро движущегося объекта, когда также нужно различать форму объекта в момент его наблюдения (прихода лучей) в данном месте и форму объекта при данном времени излучения, соответствующем, скажем, одновременным событиям в рассматриваемой (лабораторной) системе отсчета (см., например, [5, 146]). Возвращаясь к расширяющейся оболочке, найдем «кажущуюся» (видимую) скорость ее расширения в направлении, перпендикулярном к лучу зрения. Очевидно (см. (9.1)),

$$u_\perp = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta = \frac{v\sin\vartheta}{1-(v/c)\cos\vartheta}, \quad \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_\perp}{R}. \tag{9.2}$$

Скорость $u_\perp$ максимальна при $du_\perp/d\vartheta = 0$ для некоторого угла $\vartheta_{\max} = \arccos(v/c)$, причем

$$u_{\perp,\max} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \Omega_{\max} = \frac{v}{R\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{9.3}$$

Сама скорость

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{v}{1-(v/c)\cos\vartheta}$$

максимальна при $\vartheta = 0$, причем $u_{\max} = v/(1-v/c)$. Ясно, что кажущаяся скорость $u_{\perp,\max}$ может быть больше c, хотя скорость оболочки $v < c$. Правда, это имеет место, только если скорость v достаточно велика, т. е. эффект является релятивистским.

Может ли не только кажущаяся (в указанном смысле), но и реальная скорость источника излучения превосходить скорость света c? На этот вопрос также следует дать положительный ответ (ниже следуем статье [147]). В качестве доказательства достаточно, собственно, привести пример бегущего по удаленному экрану «зайчика» от вращающегося источника. Скорость зайчика равна

$$v = \Omega R, \tag{9.4}$$

где Ω — угловая скорость источника («маяка») и R — расстояние от источника до экрана. Модель маяка является сейчас

общепринятой для пульсаров (см., например, [30, 31]), причем в этом случае скорость зайчика на Земле для всех известных пульсаров превосходит скорость света c. Для наиболее известного пульсара PSR 0532 в Крабовидной туманности $\Omega \approx \approx 200$ с$^{-1}$ и $R \approx 6 \cdot 10^{21}$ см (1500 пк), откуда $v = \Omega R \approx \approx 1{,}2 \cdot 10^{24}$ см/с (!) Если вращать луч лазера или электронный пучок с угловой скоростью $\Omega = 10^5$ с$^{-1}$, то $v = \Omega R > c$ уже для расстояний $R > 3$ км.

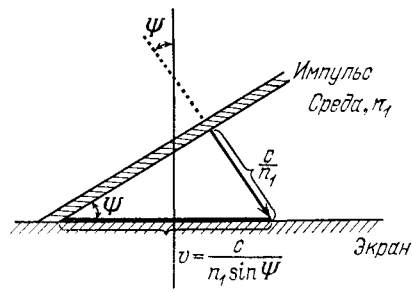


Рис. 9.2. Падение импульса на плоский экран.

Самой простой в известном отношении моделью или примером движения со сверхсветовой скоростью может служить световой импульс из плоских волн, наклонно падающий на некоторую плоскую границу раздела (экран) [97]. Если угол падения волны на экран обозначить через Ψ (очевидно, Ψ есть угол между волновым вектором в импульсе $\mathbf{k}$ и нормалью к экрану; рис. 9.2), то сечение импульса экраном (т. е. световое пятно на экране — зайчик) перемещается по этому экрану со скоростью

$$v = \frac{c}{n_1 \sin \Psi}, \tag{9.5}$$

где $n_1 > 1$ — показатель преломления среды над экраном, которая для простоты считается недиспергирующей (по сути дела для нас существенно лишь, что скорость светового импульса считается равной c/n_1). Очевидно, скорость светового пятна (или, точнее, полоски) при уменьшении угла падения Ψ всегда можно сделать больше c, а в вакууме она вообще превышает c при всех углах Ψ, так как в этом случае

$$v = \frac{c}{\sin \Psi}. \tag{9.6}$$

Роль светового импульса может, конечно, играть поток электронов, движущихся нормально к фронту потока со скоростью $u < c$; тогда

$$v = \frac{u}{\sin \Psi} \tag{9.7}$$

и сверхсветовая скорость пятна также всегда в принципе достижима. Более того, скорость v во всех случаях (9.5) — (9.7) можно сделать сколь угодно большой — при приближении к нормальному падению (при $\Psi \to 0$) скорость $v \to \infty$. Последнее вполне понятно, так как при нормальном падении импульс пересекает экран одновременно по всей его поверхности. Механи-

ческим аналогом импульса, падающего на экран, служат ножницы (роль зайчика в этом случае играет точка пересечения образующих ножницы двух лезвий).

Для вращающегося источника, упомянутого выше, как и для пересекающего экран импульса, большая скорость зайчика достигается за счет уменьшения угла между поверхностью постоянной фазы (волновым фронтом) и экраном. В самом деле, рассматривая для простоты цилиндрический источник в вакууме, вращающийся с угловой скоростью Ω, запишем поле в волновой зоне в виде *)

$$E = \sum_{s=1}^{\infty} E_s \frac{\exp is\{(\Omega/c)\, r + \varphi - \Omega t\}}{\sqrt{r}}. \tag{9.8}$$

Поверхность постоянной фазы определяется уравнением

$$\frac{\Omega}{c} r + \varphi - \Omega t = \text{const} \tag{9.9}$$

или

$$r = \text{const} + c\left(t - \frac{\varphi}{\Omega}\right). \tag{9.10}$$

Уравнение (9.10) есть уравнение спирали. На удаленном цилиндрическом экране радиуса R поверхность равной фазы пересекается с экраном по образующей цилиндра, для которой

$$R = \text{const} + c\left(t - \frac{\varphi_0}{\Omega}\right), \tag{9.11}$$

причем угол φ_0, определяющий рассматриваемую образующую, меняется со временем по закону $d\varphi_0/dt = \Omega$. Иными словами, линия пересечения (зайчик) бежит по экрану со скоростью

$$v = R\frac{d\varphi_0}{dt} = \Omega R. \tag{9.12}$$

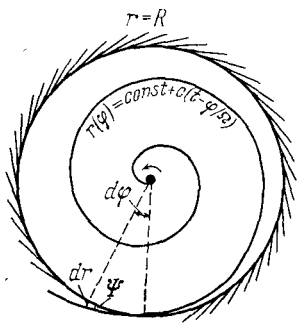


Рис. 9.3. Зайчик от вращающегося источника (маяка) на удаленном сферическом или цилиндрическом экране.

Таким образом, мы более формально получили очевидный (или, во всяком случае, хорошо известный) результат (9.4). Существенно, что угол Ψ между поверхностью равной фазы и экраном определяется из условия (рис. 9.3)

$$\operatorname{tg}\Psi = -\frac{1}{R}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c}{\Omega R} = \frac{c}{v}. \tag{9.13}$$

*) Эта формула дает решение скалярной задачи. Функция E удовлетворяет волновому уравнению при $r > r_0$ и граничному условию $E = f(\varphi - \Omega t)$ на поверхности цилиндра $r = r_0$. Таким образом, в системе координат, вращающейся вокруг оси z со скоростью Ω, поле является статическим.

Для малых углов Ψ, разумеется, $\operatorname{tg}\Psi \approx \sin\Psi \approx \Psi$ и $v \approx c/\sin\Psi$ в согласии с (9.6). Другими словами, как и отмечалось выше, большая скорость зайчика обусловлена (например, при $v \gg c$) малостью угла Ψ между волновым фронтом и экраном.

Выше фактически не делалось предположений о природе рассматриваемого поля и лишь (да и то для простоты) скорость его распространения считалась равной c. Отсюда ясно, что зайчики со скоростью $v > c$ можно получить не только в случае электромагнитных волн, но и для гравитационных волн. Пользуясь лучевой трактовкой, приходим к возможности иметь зайчики произвольной скорости как для нейтрино (скорость c), так и для любых других частиц (скорость $u < c$) *). То обстоятельство, что появление скорости $v > c$ для зайчиков не противоречит теории относительности, не может вызывать и тени сомнений. Достаточно сказать, что этот результат получается для вполне реальных примеров, например при падении импульса света или электронов на экран (см. рис. 9.2). В качестве дополнения все же отметим, что применение скорости света для синхронизации часов, обычно используемое при изложении теории относительности, во-первых, является не единственным, а лишь одним из возможных методов. Во-вторых, такой метод действительно в большинстве случаев наиболее удобен и целесообразен, но не в связи с тем, что скорость света является максимально возможной, а потому, что эта скорость универсальна — одинакова во всех инерциальных системах отсчета (разумеется, при условии выбора во всех системах одинаковых масштабов и часов). Наконец, когда все же говорят о скорости света в вакууме c как о максимально возможной, то имеют в виду скорость передачи возмущений, взаимодействий или «сигналов». Подобное утверждение действительно справедливо (по крайней мере в рамках теории относительности и всей известной нам физики). Световые и иные пятна и зайчики, о которых мы говорили, хотя и могут двигаться со скоростью $v > c$, но никак не нарушают сделанного утверждения, т. е. их нельзя использовать для передачи сигнала со скоростью $v > c$. В самом деле, рассмотрим импульс (света, электронов), сечение которого экраном (зайчик) движется по экрану вдоль оси x со скоростью $v > c$ и достигает точек *1* и *2* с координатами x_1 и x_2 в моменты t_1 и t_2 (рис. 9.4). Очевидно, $x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$ и при $v = u/\sin\Psi > c$ события 1 и 2 разделены пространственноподобным интервалом, т. е. $(x_2 - x_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2$. Возмущение («зарубка»), которое в точке *1* «наносится» на движущийся импульс в момент t_1, окажется в момент t_2 в точке *3* с координа-

*) При испускании вращающимся источником частиц со скоростью u траектория частиц такова: $r = r_0 + u(t - t_0)$, $\varphi = \Omega t_0$, откуда $r = r_0 + u(t - \varphi/\Omega)$, причем t_0 — момент испускания.

тами $x_3 = x_1 + u \sin \Psi (t_2 - t_1)$, $y_3 = u \cos \Psi (t_2 - t_1)$, причем $(x_3 - x_1)^2 + y_3^2 = u^2 (t_2 - t_1)^2 \leqslant c^2 (t_2 - t_1)^2$. В точку же *2* это возмущение не попадает. Тем не менее, конечно, сверхсветовая скорость пятна (зайчика) ни в какой мере не является кажущейся, она столь же реальна, как и любая другая скорость макроскопического образования или тела.

Подчеркнем также, что сверхсветовые скорости зайчиков имеют другую природу, чем кажущиеся скорости типа $u_{\perp, \max}$ (см. (9.3)); скорость $u_{\perp, \max}$ может превосходить c в связи с тем, что речь идет о наблюдении в данный момент t сигналов,

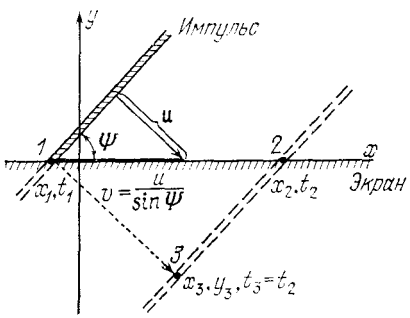


Рис. 9.4. Пересечение импульсом плоского экрана.

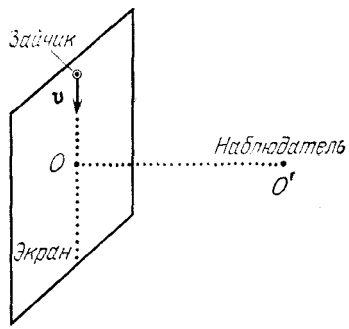


Рис. 9.5. Наблюдение зайчика на экране.

испущенных неодновременно (см. выше). При этом важно запаздывание, обусловленное конечностью скорости распространения света. Учет запаздывания существенно сказывается и на поведении зайчиков при их наблюдении в какой-либо точке. В качестве простейшего примера ограничимся здесь случаем светового зайчика, бегущего с постоянной скоростью v по плоскому экрану и наблюдаемому в точке O' (рис. 9.5). Под наблюдением здесь понимается прием света, испускаемого зайчиком в результате шероховатости экрана (т. е. в результате рассеяния) или вследствие люминесценции экрана при его освещении. Если $v \leqslant c$, то зайчик будет наблюдаться «обычным» образом, как бегущее по экрану сверху вниз пятно. Допустим теперь, что $v \to \infty$, т. е. весь след зайчика прочеркивается мгновенно. Тогда зайчик раньше всего будет замечен в точке O, ближайшей к O' (прямая OO' перпендикулярна к экрану). Затем наблюдатель увидит, очевидно, два зайчика, разбегающиеся от точки O в противоположных направлениях. При $c < v < \infty$ определенное время также могут наблюдаться два зайчика.

Существование сверхсветовых скоростей и упомянутого типа сверхсветовых источников (так для кратности мы будем в даль-

нейшем называть источники, движущиеся со скоростью $v > c$) *) давно и хорошо известно. В тени долго оставалось лишь то обстоятельство, что такие источники в рамках макроскопической теории и всего макроскопического подхода «ничем не хуже» досветовых источников. Макроскопичность здесь понимается в том смысле, что сверхсветовой источник не является одной точечной (сколь угодно малой) частицей, а всегда должен быть связан с совокупностью таких (микроскопических) частиц **). Более того, в сколько-нибудь реальной постановке задачи число частиц, ответственных за движение сверхсветового источника (зайчика), оказывается очень большим. Адекватным теоретическим аппаратом для рассмотрения излучения сверхсветовых источников служит обычная теория поля и конкретно уравнения (6.1), где плотность тока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ может в принципе изменяться и перемещаться с любыми частотой и скоростью.

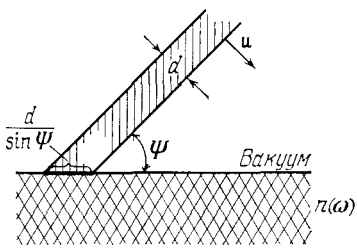


Рис. 9.6. Падение заряженной нити на экран.

Рассмотрим заряженную нить, падающую со скоростью u под углом Ψ к границе некоторой прозрачной среды с показателем преломления $n(\omega)$. Другими словами, мы имеем ситуацию, схематически изображенную на рис. 9.6 и аналогичную представленной на рис. 9.2. До пересечения границы среды со-

*) Сверхсветовыми источниками, вообще говоря, называют источники, движущиеся со скоростью $v > v_\Phi = c/n$. Такая терминология разумна, но, называя в настоящей главе сверхсветовыми лишь источники, скорость которых $v > c$, мы вряд ли внесем путаницу, особенно после того как это оговорено.

**) Макроскопичность, о которой здесь идет речь, довольно относительна и значительно «слабее» условий, связанных с переходом к макроскопической электродинамике от уравнений микроскопической электродинамики (или, по старой терминологии, от уравнений электронной теории). В самом деле, из уравнений электродинамики следует лишь уравнение непрерывности, а в остальном движение зарядов может быть задано «извне» (совместимо ли такое движение с уравнением движения для частиц — другой вопрос). Отсюда ясно, что уже в рамках электронной теории можно непротиворечивым образом считать плотность тока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ в широких пределах произвольной и в частности полагать $v > c$. В этом смысле расчеты Зоммерфельда [148], проводившиеся еще в 1904 г., в которых рассматривалось излучение заряда, движущегося со скоростью $v > c$, были вполне корректны. Правда, Зоммерфельд имел в виду движение одного заряда, когда в действительности $v < c$ (такой вывод, если не упоминать о тахионах, следует из специальной теории относительности, созданной Эйнштейном в 1905 г.). В своих работах 1904—1905 гг. [148] Зоммерфельд по существу предвосхитил теорию эффекта Вавилова — Черенкова. Весьма любопытно, что более 30 лет, вплоть до работы Тамма и Франка [43], никто не догадывался в задаче об излучении равномерно движущегося источника либо заменить скорость c на фазовую скорость c/n, либо рассматривать источник типа пятна, движущийся со скоростью $v > c$.

ставляющие нить заряды (скажем, электроны или протоны) движутся равномерно. Но после пересечения границы заряды тормозятся, в силу чего появляется некоторый ток (поляризация), бегущий со скоростью $v = u/\sin\Psi$, отвечающей скорости перемещения сечения нити границей среды. Такой ток появляется и без учета торможения зарядов в силу переходного эффекта (изменения параметров среды на пути заряда), приводящего к испусканию переходного излучения. Наглядно можно представлять себе дело так, что, достигая среды, заряды останавливаются, а затем, например, нейтрализуются токами в среде. В результате по поверхности среды бежит со скоростью v некоторый заряд q. Будем для простоты считать, что нить имеет квадратное сечение (сторона квадрата d) и состоит из зарядов e с концентрацией N. Тогда площадь сечения нити границей среды, т. е. площадь зайчика равна $S = d^2/\sin\Psi$, и на эту площадь приходится заряд $q = eNd^3 \operatorname{ctg}\Psi$ (границу среды за единицу времени пересекает заряд $eNd^2v\cos\Psi$, на единицу длины вдоль скорости приходится заряд $eNd^2\cos\Psi$, и, следовательно, длине зайчика $d/\sin\Psi$ отвечает как раз заряд q). Решение задачи об излучении заряда, движущегося на границе вакуума и среды, известно [89]. Результат для излучаемой энергии можно записать в виде

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2v}{c^2}\int\left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)\,v^2}\right)F\omega\,d\omega. \qquad (9.14)$$

Очевидно, при $F = 1$ эта формула переходит в выражение (6.61) для однородной среды. Фактор $F(\omega, \ldots)$ учитывает влияние границы, размер источника и т. д. Из общих соображений можно думать, что и для сверхсветового источника с $v > c$ применима та же формула, причем $F = F(\omega, \Psi, d \ldots)$, а также зависит от распределения заряда в вакууме *). Конкретизировать вид фактора F можно лишь в результате точного расчета, а также, конечно, использования вполне определенной модели источника. Это будет сделано ниже. Сейчас же заметим, что в любом случае интегрирование в (9.14) проводится по области частот, удовлетворяющих черенковскому условию (6.56). При этом в вакууме, разумеется, нужно положить $n = 1$ (выше предполагалось, что среда граничит с вакуумом). Поэтому при $v > c$ в вакууме (над средой) излучение возникает всегда, если

*) Точнее было бы записать правую часть выражения (9.14) в виде суммы двух членов

$$\int\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)F_1\omega\,d\omega + \int\left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)\,v^2}\right)F_2\omega\,d\omega,$$

где первый член отвечает мощности излучения в вакууме, а второй член — мощности излучения в среде. Однако до тех пор, пока фактор F не конкретизируется, выражение (9.14) носит символический характер и поэтому может быть сохранено.

только $F \neq 0$. Практически же фактор F заведомо должен быть весьма мал для волн с длиной $\lambda = 2\pi c/\omega$, меньшей проекции размеров зайчика на направление волнового вектора $\mathbf{k}$. В среде при $v > c$ и $n(\omega) > 1$ ситуация такая же, но при $n(\omega) < 1$ роль обрезающего фактора может играть также условие $v > v_\Phi = c/n$ — излучение в среде возможно только при его соблюдении. В общем случае можно также утверждать, что излучение характеризуется углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$ в вакууме и углом $\theta_{02} = \arccos(c/n(\omega)v)$ в среде (угол θ есть угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$; рис. 9.7). Поскольку скорость переднего фронта электромагнитных волн в любой среде при учете дисперсии равна c, излучение сверхсветового источника в среде характеризуется не только углом θ_{02}, но и углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$, который в этом случае определяет раствор конуса, соответствующего переднему фронту волны. Таким образом, при $\theta > \theta_{01}$ поле в среде равно нулю. Если говорить об основной части излучения, а не о переднем фронте, то аналогичная ситуация имеет место и для эффекта Вавилова — Черенкова в диспергирующей среде, где групповая скорость $v_{\text{гр}} = \dfrac{d\omega}{dk} = c \Big/ \dfrac{d(\omega n)}{d\omega}$ меньше фазовой скорости $v_\Phi = c/n$. Здесь нет поэтому особой необходимости специально обсуждать эту сторону проблемы (см. [149]).

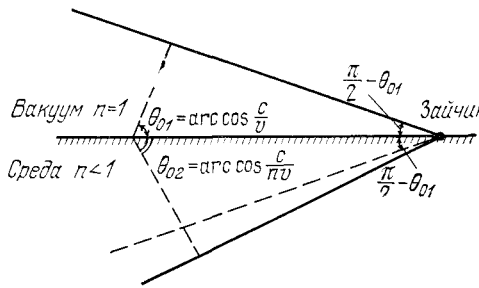


Рис. 9.7. Черенковское излучение зайчика.

Остановимся теперь на точном решении задачи о падении нити на идеально проводящую плоскость. Геометрия задачи такая же, как на рис. 9.6, но среда с показателем преломления $n(\omega)$ заменена идеальным проводником. Попадая на проводник (пересекая его границу), заряд для внешнего наблюдателя исчезает, т. е. если говорить о механизме излучения, то мы имеем дело с переходным излучением; нас, однако, интересует результат интерференции такого излучения от движущейся нити, причем заранее известно, что результирующее излучение будет направлено под углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$. Поле нити в вакууме представляет собой сумму полей самой нити и ее изображения, т. е. генерируется током с плотностью

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= Q\delta(z)\{\mathbf{u}_1\delta(\mathbf{b}_1\mathbf{r} - ut)\}, \qquad y > 0, \\ \mathbf{j} &= -Q\delta(z)\,\mathbf{u}_2\delta(\mathbf{b}_2\mathbf{r} - ut), \qquad y < 0. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Здесь Q — заряд единицы длины нити, $\mathbf{u}_1 = u\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{u}_2 = u\mathbf{b}_2$ — скорости нити и ее изображения ($b_1 = b_2 = 1$, $b_{1x} = b_{2x}$, $b_{1y} = -b_{2y}$, $b_{1z} = b_{2z} = 0$; нить лежит в плоскости x, y и для про-

стоты считается бесконечно тонкой). Кроме того, в (9.15) нужно, разумеется, считать первое слагаемое отличным от нуля в вакууме, а второе — в металле. Компонента Фурье плотности тока равна

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{j}\exp(i\omega t)\,dt = \frac{Q\delta(z)}{2\pi}\left\{\mathbf{b}_1\exp\left(i\frac{\omega}{u}\mathbf{b}_1\mathbf{r}\right) - \mathbf{b}_2\exp\left(i\frac{\omega}{u}\mathbf{b}_2\mathbf{r}\right)\right\}.$$

На больших расстояниях от экрана для фурье-компоненты векторного потенциала имеем

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\exp(ikR)}{cR}\int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' =$$

$$= i\frac{Q\exp(ikR)}{cR}\left\{\frac{\mathbf{b}_1}{(\omega/u)\,b_{1y}-k_y} - \frac{\mathbf{b}_2}{(\omega/u)\,b_{2y}-k_y}\right\}\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right), \tag{9.16}$$

где $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{s} = k\mathbf{s}$ — волновой вектор излучаемой волны (очевидно, $s^2 = 1$, $k = \omega/c$). Далее, легко найти магнитное поле $\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]$, а затем интеграл

$$\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H^2\,dt = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\mathbf{H}_\omega\mathbf{H}_{\omega'}\exp[i(\omega+\omega')t] =$$

$$= {}^1/_2 c\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\mathbf{H}_\omega\mathbf{H}_{\omega'}\delta(\omega+\omega') =$$

$$= {}^1/_2 c\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathbf{H}_\omega|^2\,d\omega = c\int_0^{\infty}|\mathbf{H}_\omega|^2\,d\omega.$$

Будем считать ось x, по которой бежит зайчик, полярной осью, и пусть волновой вектор излучения $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{s}$ составляет с полярной осью угол θ; азимутальный угол обозначим через φ (рис. 9.8), причем в вакууме — ${}^1/_2\pi \leqslant \varphi \leqslant {}^1/_2\pi$.

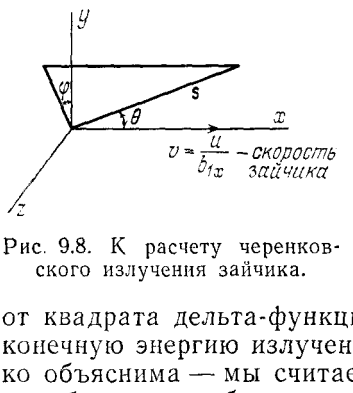


Рис. 9.8. К расчету черенковского излучения зайчика.

Из формулы (9.16) видно, что $\mathbf{A}_\omega$ пропорционально дельта-функции от аргумента $(\omega/u)\,b_{1x} - k_x$. Очевидно, что и магнитное поле $\mathbf{H}_\omega$ будет пропорционально дельта-функции, а энергия излучения — квадрату дельта-функции. Интеграл от квадрата дельта-функции расходится, что указывает на бесконечную энергию излучения. Эта бесконечность физически легко объяснима — мы считаем, что нить пересекает экран в течение бесконечно большого времени. Чтобы получить конечный результат, можно рассмотреть движение нити в течение большого, хотя и конечного времени T. Очевидно, энергия излучения

будет пропорциональна T. К тому же результату приводит следующая формальная процедура. Запишем

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right)=\frac{u}{b_{1x}}\delta\left(\omega-\frac{k_xu}{b_{1x}}\right)\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right).$$

Теперь первый сомножитель разложим в интеграл Фурье

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{ix}-k_x\right)=\frac{u}{2\pi b_{1x}}\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(\omega-\frac{k_xu}{b_{1x}}\right)t\right]dt.$$

Из-за наличия в этом произведении дельта-функции мы можем показатель в экспоненте под интегралом положить равным нулю, в силу чего имеем

$$\delta^2\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right)=\frac{vT}{2\pi}\delta\left(\frac{\omega}{u}b_{1x}-k_x\right),$$

где T — полное время движения нити и $v=u/b_{1x}$ — скорость источника (зайчика). Действуя таким образом, получаем для энергии, излученной в телесный угол $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ в интервале частот $d\omega$ за единицу времени, следующее выражение:

$$\frac{dW_\omega(\theta,\varphi)}{dt}=\frac{1}{T}c\,|\,\mathbf{H}_\omega\,|^2R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\omega=$$

$$=\frac{Q^2v}{2\pi\omega}\left\{\frac{[\mathbf{sb}_1]}{(c/u)\,b_{1y}-s_y}-\frac{[\mathbf{sb}_2]}{(c/u)\,b_{1y}+s_y}\right\}^2\delta\left(\frac{c}{v}-s_x\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\omega.$$

В результате наличия соответствующей дельта-функции отсюда ясно, что происходит излучение волн только с волновым вектором $\mathbf{k}$, удовлетворяющим условию $s_x=\cos\theta=c/v=\cos\theta_{01}$, как это и должно быть. После интегрирования по θ находим

$$\left.\begin{gathered}\frac{dW_\omega(\varphi)}{dt}=\frac{Q^2v}{2\pi\omega}\left\{\frac{[\mathbf{sb}_1]}{(c/u)\,b_{1y}-s_y}-\frac{[\mathbf{sb}_2]}{(c/u)\,b_{1y}+s_y}\right\}^2d\varphi\,d\omega,\\ \mathbf{s}=\{\cos\theta_{01},\ \sin\theta_{01}\cos\varphi,\ \sin\theta_{01}\sin\varphi\},\\ \mathbf{b}_1=\{\sin\Psi,\ -\cos\Psi,\ 0\},\qquad \mathbf{b}_2=\{\sin\Psi,\ \cos\Psi,\ 0\},\\ \cos\theta_{01}=\frac{c}{v},\qquad v=\frac{u}{\sin\Psi},\end{gathered}\right\}\tag{9.17}$$

где Ψ — угол между скоростью частиц $\mathbf{u}$ и осью x.

Наконец, получаем

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2Q^2v}{\pi}\frac{c^2}{u^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\,\frac{\{(1-u^2/v^2)^2-(1-c^2/v^2)\,(1-u^4/c^2v^2)\cos^2\varphi\}}{[\,(c^2/u^2)\cos^2\Psi-(1-c^2/v^2)\cos^2\varphi]^2}.\tag{9.18}$$

Заряд q, движущийся в однородной среде, как ясно из (6.61), излучал бы «на интервал» $d\omega\, d\varphi$ с мощностью

$$\frac{dW_\omega(\varphi)}{dt} = \frac{q^2 v}{2\pi c^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)\omega\, d\varphi\, d\omega,$$

где положено $n = 1$. Сравнивая это выражение с (9.17), мы видим, что нить эквивалентна заряду

$$q = Q\left|\frac{[\mathbf{s}\mathbf{b}_1]}{(c/u)\, b_{1y} - s_y} - \frac{[\mathbf{s}\mathbf{b}_2]}{(c/u)\, b_{1y} + s_y}\right| \frac{c}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1 - c^2/v^2}}. \qquad (9.19)$$

Поскольку Q есть заряд единицы длины нити, то множитель при Q в (9.19) представляет собой эффективную длину нити, ответственную за излучение в направлении $\mathbf{k}$. Эта длина есть не что иное, как длина формирования переходного излучения в направлении $\mathbf{k}$. Интегралы (9.17), (9.18) расходятся при $\omega \to 0$, что просто связано с предположением о бесконечной протяженности нити. Мощность излучения падает с ростом ω, очевидно, в силу происходящего при этом уменьшения длины формирования переходного излучения. В других задачах аналогичного типа частотная зависимость может быть иной (см. ниже).

Как отмечалось, механизмом излучения отдельных частиц или нити как целого при пересечении границы проводника можно считать переходное излучение. Однако с таким же успехом (и конечным результатом) можно предполагать, что происходит тормозное излучение в результате мгновенной остановки зарядов и их изображений на границе (в случае идеального проводника обе эти возможности неразличимы при вычислении поля в вакууме; см. гл. 8). Вообще, механизм «элементарного акта» излучения, приводящего в конечном счете к черенковскому эффекту, в известном отношении несуществен — характер черенковского излучения (в первую очередь речь идет об условии $\cos\theta_0 = c/vn(\omega)$) определяется интерференцией волн, испускаемых вдоль пути источника. Сказанное находится, разумеется, в полном соответствии с принципом Гюйгенса. Таким образом, рассмотренное излучение заряженной нити, падающей на экран, представляет собой именно эффект Вавилова — Черенкова при $v > c$ и к тому же возникающий в вакууме (правда, наличие какой-то границы со средой здесь необходимо)*). Интенсивность излучения и его угловое распределение по φ будут изменяться в зависимости от свойств сред *1* и *2* (разумеется, для наблюдения черенковского излучения по крайней мере одна из этих сред должна быть прозрачной; выше среду *1* мы считали вакуумом). Для анизотропной среды в условии (6.56) показатель преломления $n(\omega)$ нужно брать для каждой нормальной волны в отдельности, причем значение n зависит также от

*) Впрочем, роль такой границы может играть поле, возмущающее движение заряда (для этого, физически экран нужно заменить тонким заряженным конденсатором и т. п.).

углов с осями симметрии (осями кристалла, направлением внешнего магнитного поля и т. д.). Особо отметим излучение волн в волноводах. В общем, здесь возникает большое число задач, аналогичных тем, которые встречаются в теории черенковского излучения при $v < c$. Очевидно также, что рассматриваемые источники (зайчики) излучают и в досветовом режиме, т. е. когда $c/n < v < c$. Такие источники представляют интерес и при рассмотрении возбуждения, например, поверхностных волн разных типов в результате эффекта Вавилова — Черенкова или переходного излучения на неоднородной поверхности (в последнем случае требование $v > c/n$, конечно, отпадает). Сказанное справедливо и в случае волн неэлектромагнитной природы; в качестве примера укажем на возможность генерации второго звука в гелии II движущимся источником (скажем, движущимся по поверхности гелия лучом лазера).

Излучение сверхсветового источника ни в коей мере не сводится к эффекту Вавилова — Черенкова. Так, уже при равномерном движении, но с «модуляцией» источника некоторой частотой ω_0 будет наблюдаться излучение с доплеровской частотой $\omega = \frac{\omega_0}{|1 - (v/c)\, n \cos\theta|}$ (см. (6.62)). Модуляцию можно осуществить разными способами — дополнительным качанием луча, изменением его плотности (вдоль луча), нанесением «решетки» (периодических неоднородностей) на экран и т. д. Наконец, особенности сверхсветового излучения с $v > c$, как и в случае $c/n < v < c$, проявляются и при неравномерном движении источника. Примером может служить синхротронное (или, лучше, квазисинхротронное) излучение, возникающее при движении источника по окружности. Такой случай реализуется, когда частицы или фотоны, испускаемые вращающимся источником, падают на сферический или цилиндрический экран. Более конкретная модель такова [150]: вращающийся источник (скажем, пульсар) испускает направленный поток γ-лучей, которые падают на «экран», состоящий из более или менее плотного вещества (плазмы) и находящийся на расстоянии R от источника. Попадая на экран, γ-лучи рассеиваются на электронах, которые в силу отдачи приобретают импульс и поэтому создают некоторую радиальную поляризацию, «бегущую» по экрану со скоростью $v = \Omega R$. В результате по экрану бежит ток с плотностью

$$\mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t}\,[\mathbf{p}\,(t)\,\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{R}\,(t))],$$
$$\mathbf{p}\,(t) = p\,\{\cos\,\Omega t,\ \sin\,\Omega t,\ 0\}, \qquad \mathbf{R}\,(t) = R\,\{\cos\,\Omega t,\ \sin\,\Omega t,\ 0\}, \tag{9.20}$$

где $\mathbf{p}$ — электрический дипольный момент, отвечающий созданной поляризации, которая считается точечной; последнее возможно, если рассматривать излучение с длиной волны λ, значительно превосходящей размеры источника l.

Возникающее излучение при $v = \Omega R > c$ по своему характеру аналогично синхротронному излучению в среде при условиях, когда $v > c/n$ (см. гл. 6); полная излучаемая мощность равна

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{p^2(1 + v^2/c^2)}{2v^3} \int\limits_{\Omega \ll \omega \ll c/l} \omega^3 \, d\omega. \qquad (9.21)$$

Интеграл обрезается на высоких частотах в связи с конечными размерами диполя, что не было учтено в (9.20), (9.21); кстати, в расчете [150] дипольный момент $\mathbf{p}$ в (9.20) считался направленным не по радиусу, а по оси z (т. е. полагалось $\mathbf{p} = p\{0, 0, 1\}$), что в формуле (9.21), вероятно, сказывается лишь на численном коэффициенте. В моделях пульсаров бегущее со скоростью $v > c$ возмущение в плазме может создаваться также магнитодипольным излучением или потоками частиц, исходящими от пульсара.

В связи с развитием лазерной техники приобретает особый интерес возможность создания сверхсветового источника с помощью света. Использование вращающегося луча не так уж легко даже при применении лазера, если требовать, чтобы напряженность поля в зайчике при $v = \Omega R > c$ была достаточно большой. Поэтому проще осуществить падение импульса на экран — границу раздела (см. выше рис. 9.2 и формулы (9.5), (9.6)). Если экран является идеально плоской границей раздела двух сред, а задача может рассматриваться в линейном приближении (слабое поле), то мы имеем дело с обычной задачей об отражении и преломлении света. Поэтому сразу ясно (и, конечно, следует из уравнений поля), что импульс, падающий под углом Ψ_1, отразится также под углом $\Psi_1' = \Psi_1$, а угол преломления Ψ_2 определится из закона преломления (рис. 9.9)

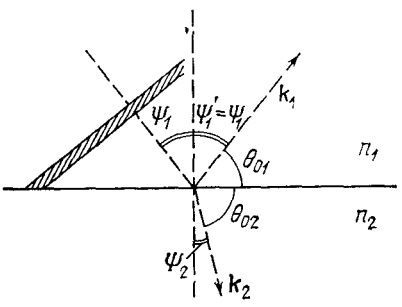


Рис. 9.9. Отражение и преломление светового импульса на границе раздела двух сред.

$$\frac{\sin \Psi_2}{\sin \Psi_1} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad \Psi_1' = \Psi_1. \qquad (9.22)$$

Любопытно, что, как было уже давно отмечено Франком [97], условия (9.22) совпадают с условиями появления эффекта Вавилова — Черенкова для рассматриваемого импульса, сечение которого экраном движется со скоростью $v = c/(n_1 \sin \Psi_1)$ (см. (9.5)). В самом деле, черенковский угол в среде *1* определяется условием $\cos \theta_{01} = c/n_1 v = \sin \Psi_1$, откуда $\Psi_1 = \Psi_1' = {}^1/_2\pi - \theta_{01}$, как и должно быть (см. рис. 9.9). Для среды *2* имеем $\cos \theta_{02} =$

$= c/n_2 v = (n_1/n_2)\sin\Psi_1$, что совпадает с (9.22), поскольку $\cos\theta_{02} = \sin\Psi_2$. Можно буквально сказать, что мы очень долго «не знали, что говорим прозой», — черенковское условие (и более общее при $n_1 < 1$) известно уже несколько столетий. Сказанное о соответствии между законами отражения и преломления и черенковским условием вместе с тем естественно, поскольку все эти соотношения получаются из принципа Гюйгенса одинаковым образом. Для получения каких-либо новых результатов нужно рассмотреть задачу с учетом нелинейности для различных сред (в частности, для пьезоэлектриков).

Еще одно замечание, которое мы хотим здесь сделать, касается световых пятен и зайчиков в случае шероховатых или люминесцирующих экранов. В последнем случае излучение, исходящее от зайчика, вообще говоря, некогерентно. То же практически справедливо и для шероховатых экранов, поскольку речь идет при этом обычно о достаточно больших световых пятнах (размеры значительно больше длины волны света). Если излучение некогерентно, то интерференция невозможна и такие специфические черты, как резкая направленность черенковского излучения пропадают. Упомянем также о посвященных сверхсветовым «зайчикам» статьях [151] и пионерских работах [152б].

Историческая судьба исследований излучения источников, движущихся со скоростью, бóльшей фазовой скорости света, весьма своеобразна. Речь идет о классических эффектах, качественно ясных уже в рамках простейших оптических представлений (принцип Гюйгенса, интерференция), а количественно описываемых с помощью уравнений Максвелла. Как мы видели, элементарные законы отражения и преломления света на плоской границе раздела двух сред по сути дела совпадают с условием излучения Вавилова — Черенкова от бегущего вдоль границы источника. Черенковское условие для заряда — сверхсветового источника (скорость $v > c$) было получено в 1904 г. [148]. Впрочем, это было сделано даже еще раньше Хевисайдом [152] (см. также статью Кельвина [153]). Тем не менее эффект Вавилова — Черенкова оказался экспериментально обнаруженным лишь в 1934 г., да и то случайно (в том смысле, что исследовался совсем другой вопрос), а создание теории [43] этого эффекта потребовало больших и довольно длительных усилий [95]. Любопытно также, что на первом этапе возможности применения эффекта Вавилова — Черенкова в физике как для измерительных целей, так и для понимания различных явлений, казались весьма скромными. В действительности же эффект Вавилова — Черенкова и родственные явления сейчас широко используются, и можно сказать, что их изучение составляет целую главу физики, которой посвящено огромное число статей и ряд обзоров [89—92]. Казалось бы, проблема, если не исчерпана, то, во всяком случае, уже достаточно полно и

всесторонне исследована. Но и это оказалось не вполне верным, о чем свидетельствуют статьи [147] и настоящая глава. В самом деле, широко было распространено мнение (в частности, автор сам его придерживался), что эффект Вавилова — Черенкова и аномальный эффект Доплера могут наблюдаться лишь для волн, которым отвечает показатель преломления $n(\omega) > 1$ (условие $c/n < v < c$). В согласии с этим в вакууме соответствующие явления считались невозможными. Между тем существуют сверхсветовые источники, движущиеся со скоростью $v > c$. Эти источники могут рассматриваться в широких пределах на тех же основаниях, что и «обычные» источники, движущиеся со скоростью $v < c$. Конкретно, сверхсветовые источники способны порождать излучение Вавилова — Черенкова в любой среде, в том числе в вакууме или при условии $n(\omega) < 1$. Сверхсветовые источники общего типа обладают в целом теми же особенностями, что и источники, движущиеся со скоростью $c/n < v < c$ (аномальный эффект Доплера и т. д.). С точки зрения теории излучения существенное отличие сверхсветовых источников ($v > c$) от досветовых ($v < c$) заключается в том, что сверхсветовой источник не может представлять собой отдельную «элементарную» частицу и поэтому всегда является протяженным. Именно размеры сверхсветового источника в первую очередь и определяют, особенно при излучении в вакууме, коротковолновую границу излучаемого спектра. В этой связи трудно надеяться на использование сверхсветовых источников, например, для генерации рентгеновских лучей (подобная возможность могла бы показаться соблазнительной, поскольку стремление на высоких частотах показателя $n(\omega)$ к единице, препятствующее для источников с $v < c$ использованию эффекта Вавилова — Черенкова в рентгеновской области, не играет столь критической роли при $v > c$). Мы не были бы удивлены, однако, если бы в будущем нашлись те или иные интересные применения и для сверхсветовых источников. Кроме того, сверхсветовые источники могут встретиться в астрономии. Независимо от этого, изучение таких источников (с $v > c$) электромагнитных и гравитационных волн (а, возможно, и нейтрино) и вся совокупность возникающих здесь вопросов представляет, по нашему мнению, несомненный физический интерес.

Глава 10

РЕАБСОРБЦИЯ И ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

Реабсорбция и мазерный эффект (усиление волн). Уравнения переноса излучения. Метод коэффициентов Эйнштейна и его применение в случае поляризованного излучения. Реабсорбция и усиление синхротронного излучения в вакууме и при наличии холодной плазмы.

При рассмотрении синхротронного излучения совокупности частиц (см. гл. 5) мы считали, что различные релятивистские электроны излучают независимо друг от друга (или, как говорят, *излучают некогерентно*). Это относится не только к излучению в вакууме, но и к излучению при учете влияния нерелятивистской (холодной) плазмы (см. гл. 6). Между тем, если на луче зрения находится достаточно большое количество излучающих частиц, то начинает сказываться поглощение и вынужденное (индуцированное) излучение самими излучающими частицами. Этот процесс обычно называют реабсорбцией. Реабсорбция может в принципе существенно изменить интенсивность и поляризацию излучения. Более того при некоторых условиях возможна отрицательная реабсорбция, т. е. усиление излучения. Такое усиление, или отрицательную реабсорбцию, называют также мазерным эффектом. Разумеется, характер реабсорбции тесно связан с природой самого рассматриваемого излучения, т. е. в случае реабсорбции синхротронного излучения излучающими считаются заряженные релятивистские частицы, движущиеся в магнитном поле. Не только такое излучение, но и его реабсорбция могут существенно изменяться, если помимо релятивистских электронов в излучающей области имеется также холодная плазма. Например, в случае излучения в вакууме реабсорбция в любой системе релятивистских электронов, изотропной по направлению их скорости, положительна (т. е. в этих условиях имеет место поглощение). При наличии же холодной плазмы реабсорбция синхротронного излучения уже может стать отрицательной. Это означает, что соответствующая система (например, слой или облако) релятивистских электронов с изотропным распределением скоростей будет действовать подобно мазеру.

В явном виде ниже будет обсуждаться лишь реабсорбция синхротронного излучения (при этом мы в значительной мере

следуем статье [49б]), но фактически многое относится к излучению любой природы. Перенос и реабсорбция излучения довольно подробно рассматриваются в легко доступных монографиях [56, 154], что позволяет нам ниже почти не приводить ссылок на оригинальную литературу, а также опустить ряд подробностей и пояснений.

При исследовании реабсорбции часто используются усредненные по всем направлениям выражения для интенсивности излучения отдельной частицы. Условия применимости и даже сам характер такого подхода заранее неясны, а для определения изменений поляризации он вообще непригоден. Достаточно сказать, что синхротронное излучение имеет все же не дельтаобразное угловое распределение, причем его поляризационные свойства существенно зависят от угла $\psi = \chi - \alpha$ между направлением скорости и направлением излучения (см. (5.21)—(5.23)). Поэтому при исследовании реабсорбции (и особенно отрицательной реабсорбции) с учетом поляризации излучения необходим более строгий анализ угловых и поляризационных свойств синхротронного излучения. Нужно еще добавить, что холодная плазма, находящаяся в магнитном поле, анизотропна (магнитоактивна) и далеко не всегда даже в слабом поле ее можно в достаточно хорошем приближении считать изотропной с показателем преломления $n \approx 1 - \omega_p^2/2\omega^2$. Особенно чувствительны в этом отношении поляризационные характеристики, ибо вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея) является интегральным эффектом — нарастает с длиной проходимого волной пути (см., например, [84] и гл. 12).

Общая задача, подлежащая обычно исследованию в отдельных частных случаях, такова. В некоторой области («источнике») заданы функция распределения релятивистских электронов $N_e(\mathbf{p}, \mathbf{R})$, концентрация холодной плазмы $N(\mathbf{R})$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{R})$. Нужно определить поле излучения как в рассматриваемой области (в источнике), так и в особенности вдали от него. Обычно речь идет при этом об излучении самого источника, но может встретиться необходимость определить влияние такого «источника» на проходящее через него излучение от другого источника, расположенного дальше от места приема (именно поэтому термин источник приобретает условный характер).

Выше мы уже считали источник стационарным, и поэтому время t нигде не фигурирует. От такого ограничения приходится отказаться уже для движущихся или расширяющихся источников. Практически обычно, помимо предположения о стационарности, возможны и другие упрощения. Так, в космических условиях в силу существования целого ряда неустойчивостей анизотропия распределения электронов по скоростям довольно быстро исчезает или, во всяком случае, сильно уменьшается (см. ниже гл. 16). Поэтому чаще всего можно считать, что функция рас-

пределения релятивистских электронов зависит лишь от их энергии, т. е. пользоваться величиной $N_e(\mathscr{E}, \mathbf{R})$. Далее, изменение N_e, N и $\mathbf{H}$ в зависимости от координат в космических условиях всегда происходит очень медленно, если речь идет о расстояниях порядка длины волны излучения. Следовательно, вообще говоря, применимо приближение геометрической оптики, а часто можно просто считать все величины постоянными на луче зрения в некоторой области с длиной L. Другая возможность — считать на длине L концентрации N_e и N постоянными, но поле $\mathbf{H}$ — в среднем хаотическим и имеющим напряженность H.

Для описания излучения в общем случае нужно пользоваться параметрами Стокса I, Q, U и V, которые можно объединить в тензоре $I_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$

$$I_{\alpha\beta} = {}^1/_2 \begin{pmatrix} I+Q & U+iV \\ U-iV & I-Q \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} I = I_{11} + I_{22},\ V = i(I_{21} - I_{12}), \\ Q = I_{11} - I_{22},\ U = I_{21} + I_{12}. \end{matrix} \tag{10.1}$$

Индексы 1, 2 отвечают здесь осям x, y, перпендикулярным к лучу зрения. Связь между параметрами Стокса и интенсивностью излучения I, степенью поляризации Π, отношением осей эллипса поляризации p и углом $\tilde{\chi}$, определяющим ориентацию этого эллипса, такова

$$\begin{matrix} I = I, \quad \Pi = \dfrac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}, \quad \beta = \operatorname{arctg} p, \\ \sin 2\beta = \dfrac{V}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}, \quad \operatorname{tg}(2\tilde{\chi}) = \dfrac{U}{Q}. \end{matrix} \tag{10.2}$$

Отсюда ясно, конечно, что параметр Стокса I совпадает с интенсивностью.

Используемые параметры Стокса (и любые величины, которые через них выражаются) относятся к излучению в некотором частотном интервале $\Delta\nu \ll \nu$ и отвечают усреднению квадратичных по полям выражений за время $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. В анизотропной и в частности в магнитоактивной среде электрическое поле $\mathbf{E}$, вообще говоря, не перпендикулярно $\mathbf{k}$, тогда как вектор индукции $\mathbf{D}$ всегда ортогонален волновому вектору $\mathbf{k}$. Потому в анизотропной среде удобнее определять тензор $I_{\alpha\beta}$ как $\tilde{I}_{\alpha\beta} = \frac{c}{8\pi}\overline{D_\beta D_\beta^*}$ (α, $\beta = 1$, 2; см. [56]), где чертой обозначено усреднение за время Δt. Здесь вектор $\mathbf{D}$ представляет собой фурье-компоненту разложения поля по частотам и направлениям излучения (амплитуда этой компоненты характеризует величину электрической индукции, отнесенной к единичному интервалу частот и телесных углов). Параметры Стокса и величины (10.2) теперь также будут относиться к вектору $\mathbf{D}$, а не к $\mathbf{E}$. Нужно иметь в виду, что величина

$$\tilde{I} = \operatorname{Sp} \tilde{I}_{\alpha\beta} = \frac{c}{8\pi}\left(\overline{D_1 D_1^*} + \overline{D_2 D_2^*}\right)$$

в общем случае анизотропной среды уже не пропорциональна потоку энергии в единичном телесном угле и единичном интервале частот, т. е. величине, отождествляемой обычно с интенсивностью излучения. При приеме излучения вдали от источника (в вакууме) определенная указанным выше образом величина I совпадает с интенсивностью излучения; при приеме излучения в изотропной среде с показателем преломления n величина I отличается от интенсивности I дополнительным множителем $n^3(\omega)$.

Для определения тензора $I_{\alpha\beta}$ служит уравнение переноса, которое исследовалось или обсуждалось в целом ряде работ, указанных в [56, 154]; см., в частности, [155, 156]. В однородной среде для стационарного случая ($\tilde{I}_{\alpha\beta}$ не зависит от t) уравнение переноса имеет вид

$$\frac{d\tilde{I}_{\alpha\beta}}{dz} = \varepsilon_{\alpha\beta} + (\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta})\,\tilde{I}_{\gamma\delta}. \tag{10.3}$$

Здесь

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \int R^2 p_{\alpha\beta} N_e(\mathscr{E}, \mathbf{R}, \tau)\, d\mathscr{E}\, d\Omega_\tau \tag{10.4}$$

— тензор излучательной способности, характеризующий вклад источников излучения в среде в изменение $I_{\alpha\beta}$ вдоль оси z. В (10.4) тензор $p_{\alpha\beta} = \frac{c}{8\pi}\overline{D_{l\alpha} D^*_{l\beta}}$ и задается индукцией $\mathbf{D}_l$ в волновой зоне (расстояние $R \gg \lambda$ — длины волны), создаваемой излучением электронов, движущихся в анизотропной среде (в вакууме это выражение отвечает определению (5.18)). При этом значения $D_{l\alpha}$ и $D_{l\beta}$ берутся на расстояниях от точки z (для которой вычисляется тензор $I_{\alpha\beta}$), много меньших периода биений $2\pi|k_e - k_o|^{-1}$ между обыкновенными и необыкновенными волнами; в противном случае тензор $p_{\alpha\beta}$ может существенно измениться за счет эффектов, связанных с распространением волн в анизотропной среде и в результате перестанет характеризовать локальные свойства источников излучения. Величина $p = \mathrm{Sp}\, p_{\alpha\beta}$ при излучении в вакууме совпадает с обычной излучательной способностью, т. е. представляет собой мощность излучения из единицы объема, отнесенную к единичному интервалу частот и телесных углов. В изотропной плазме такое p, как и $\tilde{I} = \mathrm{Sp}\, I_{\alpha\beta}$ (см. выше), отличается от излучательной способности множителем $n^3(\omega)$. Для синхротронного излучения в вакууме величины $p_{\alpha\beta}$ определяются формулами (5.21)—(5.23) и (5.26), (5.27); при этом выражение (5.23) для p_{12} может оказаться необходимым дополнить членами более высокого порядка по $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ (знак $\sim$ над p здесь и ниже опускаем). При наличии разреженной изотропной плазмы, когда $(1 - n) \ll \ll 1$, в этих формулах нужно также произвести замену

$$\xi = mc^2/\mathscr{E} \quad \text{на} \quad \eta = \sqrt{\xi^2 + (\omega_p/\omega)^2} \approx \sqrt{1 - n^2 v^2/c^2}$$

(см. [49]). Далее тензоры $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в (10.3) характеризуют изменения $I_{\alpha\beta}$ соответственно за счет фарадеевского вращения и поглощения излучения. Тензоры $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражаются через параметры, характеризующие «нормальные» волны, могущие распространяться в рассматриваемой среде.

В анизотропной среде при пренебрежении пространственной дисперсией могут распространяться две нормальные волны, которые в случае одноосных кристаллов и магнитоактивной плазмы называются обыкновенной (o или индекс 2) и необыкновенной (e или индекс 1) волнами. В нормальных волнах в однородной среде все величины (поля **E**, **D**, **H**) зависят от t и **R** по экспоненциальному закону и, например,

$$\mathbf{D}_{o,\,e} = A_{o,\,e}\boldsymbol{\gamma}_{o,\,e}\exp(-\varkappa_{o,\,e}z)\exp[-i(\omega t - \delta_{o,\,e} - k_{o,\,e}z)]. \quad (10.5$$

Здесь, как и в (10.3), волны считаются распространяющимися по оси z, $\varkappa_{o,\,e}$ — коэффициенты поглощения по амплитуде (коэффициенты поглощения по мощности $\mu_{o,\,e}$ равны $2\varkappa_{o,\,e}$; часто через $\varkappa$ обозначают показатель поглощения $c\mu/2\omega$), $\omega = 2\pi\nu$ и $\mathbf{k}_{o,\,e}$ — волновые векторы ($k_{o,\,e} = (\omega/c)n_{o,\,e}$, где $n_{o,\,e}$ — показатели преломления). Комплексные векторы $\boldsymbol{\gamma}_{o,\,e}$ характеризуют поляризацию нормальных волн ($A_{o,\,e}$ и $\delta_{o,\,e}$ — произвольные амплитуды и фазы этих волн). В магнитоактивной плазме при пренебрежении поглощением (т. е. практически при достаточно слабом поглощении) можно положить

$$\gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\alpha o} = \gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\alpha e} = 1, \qquad \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\alpha e} = \gamma^*_{\alpha o}\gamma_{\alpha e} = 0, \qquad (10.6)$$

где по $\alpha = 1, 2$, как и везде по дважды встречающимся греческим индексам, производится суммирование (иными словами, например, $\gamma_{\alpha o}\gamma_{\alpha o} = \mathrm{Sp}\,\gamma_{\alpha o}\gamma_{\beta o}$; подробнее о нормальных волнах в магнитоактивной плазме см. гл. 12).

Компонента индукции произвольного поля излучения в интервале частот $\Delta\omega$ имеет вид

$$D_\alpha(z,\,t) = \int\limits_{\Delta\omega} A_e\gamma_{\alpha e}\exp\{-\varkappa_e z - i(\omega t - \delta_e - k_e z)\}\,d\omega + \\ + \int\limits_{\Delta\omega} A_o\gamma_{\alpha o}\exp\{-\varkappa_o z - i(\omega t - \delta_o - k_o z)\}\,d\omega.$$

Образуя из таких компонент тензор $D_\alpha D^*_\beta$, а также вычисляя производную $\frac{d}{dz}(D_\alpha D^*_\beta)$, после усреднения по времени при достаточно узком интервале частот $\Delta\omega$, как раз и можно прийти к уравнению (10.3), причем (не путать индекс γ с вектором поляризации $\boldsymbol{\gamma}$!)

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -i(k_e - k_o)(\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta o} - \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta e}), \qquad (10.7)$$

$$\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\varkappa_e + \varkappa_o)(\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta o} + \gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta e}) + \\ + 2\varkappa_e\gamma_{\alpha e}\gamma^*_{\beta e}\gamma^*_{\gamma e}\gamma_{\delta e} + 2\varkappa_o\gamma_{\alpha o}\gamma^*_{\beta o}\gamma^*_{\gamma o}\gamma_{\delta o}. \qquad (10.8)$$

Если поглощение достаточно значительно, то нормальные волны нельзя считать ортогональными (см. (10.6)) и формулы (10.7), (10.8) уже неточны. Последнее имеет место в частности в условиях, когда релятивистские частицы (горячая плазма) и холодная плазма вносят сравнимый вклад в вещественную и (или) мнимую анизотропную части тензора диэлектрической проницаемости. Уравнение переноса (10.3) без предположения (10.6) рассмотрено в [155], но лишь в условиях, когда влияние плазмы может считаться не слишком сильным.

Если в среде имеются волны лишь одного типа (обыкновенные или необыкновенные), т. е. в тензор $\tilde{I}_{\alpha\beta}$ входят только поля типа e или типа o, то $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{I}_{\gamma\delta} = 0$. Этот результат легко получить формально, но он ясен и с самого начала, ибо по определению нормальных волн в однородной среде их поляризация неизменна. Очевидно также, что для одной нормальной волны $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{I}_{\gamma\delta} = 2\varkappa_{e,\,o}\tilde{I}_{\alpha\beta}$, и уравнение переноса (10.3) в отсутствие источников излучения принимает вид

$$\frac{d\tilde{I}^{(e,\,o)}_{\alpha\beta}}{dz} = -2\varkappa_{e,\,o}\tilde{I}^{(e,\,o)}_{\alpha\beta} \equiv -\mu_{e,\,o}(\mathbf{k})\,\tilde{I}^{(e,\,o)}_{\alpha\beta}. \qquad (10.9)$$

Соотношение (10.9) очевидно с самого начала, ибо оно отражает тот факт, что в нормальных волнах векторы поля (в частности вектор $\mathbf{D}$) в силу влияния поглощения изменяются по закону $\exp(-\varkappa_{e,\,o}z)$ (см. (10.5)). Величины $2\varkappa_{e,\,o} = \mu_{e,\,o}(\mathbf{k})$ представляют собой коэффициенты поглощения по мощности (интенсивности) вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$. Если направления фазовой и групповой скоростей (направления векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}$) одинаковы, то, разумеется, величины $2\varkappa_{e,\,o}$ совпадают с коэффициентами поглощения вдоль лучей $\mu_{e,\,o}$. В общем случае $\mu_{e,\,o} = 2\varkappa_{e,\,o}\cos\varphi_{e,\,o}$, где $\varphi_{e,\,o}$ — углы между $\mathbf{k}_{e,\,o}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр},\,e,\,o}$. В условиях, когда можно пользоваться (10.9), изменяться вдоль $\mathbf{k}$ (т. е. вдоль оси z) будет лишь интенсивность излучения $\tilde{I} = \tilde{I}_{xx} + \tilde{I}_{yy}$, для которой $d\tilde{I}^{(e,\,o)}/dz = -2\varkappa_{e,\,o}\tilde{I}^{(e,\,o)}$. Что же касается величин Π, p (или β) и $\tilde{\chi}$, то, как сказано, для нормальных волн они остаются неизменными. Формально то же следует из (10.2) и (10.9) и связано с тем, что величины Π, p и $\tilde{\chi}$ зависят лишь от отношения параметров Стокса. Очевидно также, что постоянство Π, p и $\tilde{\chi}$ сохраняется и в том случае, когда в среде имеются источники излучения только одного типа. При этом

$$\frac{d\tilde{I}^{(e,\,o)}}{dz} = \varepsilon_{e,\,o} - 2\varkappa_{e,\,o}\tilde{I}^{(e,\,o)} \equiv \varepsilon_{e,\,o} - \mu_{e,\,o}(\mathbf{k})\,\tilde{I}^{(e,\,o)}. \qquad (10.10)$$

Это уравнение можно обобщить на случай неоднородной среды, если справедливо приближение геометрической оптики и, следовательно, допустимо пользоваться понятием о лучах

(возможность лучевой трактовки ограничена также условием слабости поглощения [84]). Соответствующее уравнение переноса для интенсивности $I^{(e,\,o)}$ волн одного типа, имеет вид

$$\frac{1}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{n^2}{|\cos\varphi|}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{I\,|\cos\varphi|}{n^2}\right)=\varepsilon-\mu I. \qquad (10.11)$$

Здесь учтена возможная нестационарность задачи (зависимость I от t). Вместе с тем интенсивность I и излучательная способность ε в (10.11) отличаются от значений, определенных выше при обсуждении уравнения (10.3), а именно: $I=\tilde{I}^{(o,\,e)}n_{o,\,e}^{-3}$, $\varepsilon=\varepsilon_o$, $n_{o,\,e}^{-3}$. Далее, в (10.11) $v_{\text{гр}}$ — величина групповой скорости, φ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр}}$, $n(\omega)$ — показатель преломления, $\mu=2\varkappa\cos\varphi$ — коэффициент поглощения вдоль луча (элемент длины луча есть ∂l). Все эти величины относятся к волнам одного типа (o или e). Как можно видеть, фигурирующая в (10.11) величина I представляет собой уже обычную интенсивность — поток энергии через единичную площадку, отнесенный к единичным интервалам частот и телесных углов вдоль направления $\mathbf{k}$ (такие телесные углы следует отличать от телесных углов вдоль направлений групповых скоростей $\mathbf{v}_{\text{гр}}$; см. [56], § 2). Разумеется, появление множителя n^{-3} при переходе от обычной интенсивности I к $\tilde{I}$ объясняется просто тем, что «интенсивность» $\tilde{I}$ пропорциональна $D^2=\varepsilon^2E^2=n^4E^2$, в то время как интенсивность I пропорциональна $EH=nE^2$ (здесь мы пользуемся несколько символической записью, но надеемся, что ситуация достаточно ясна). В дальнейшем, имея в виду применение к среде с $|n-1|\ll 1$, не будем различать величины типа I и $\tilde{I}$, в силу чего знак $\sim$ над I опускается.

Обобщение уравнения (10.11) на случай одновременного присутствия излучения двух типов, насколько нам известно, еще не производилось (точнее, это относится к среде с произвольной степенью анизотропии; для сред с достаточно слабой анизотропией и близкими значениями n_o и n_e уравнение (10.11) обобщено авторами [156в]). В однородной и стационарной среде такое обобщенное уравнение, разумеется, сводится к (10.3). Это уравнение, несомненно, справедливо и для достаточно медленно меняющихся в зависимости от координат функций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Но, как ясно из сопоставления (10.11) и (10.3), уравнение (10.3) в неоднородной среде может быть справедливо только при пренебрежении рефракцией (искривлением лучей) и производными dn/dz по сравнению с $dI_{\alpha\beta}/dz$. Кроме того, конечно, должно быть справедливо обычное приближение геометрической оптики, т. е. все величины должны мало изменяться на длине волны в среде $\lambda=2\pi c/n\omega$. Например, должно соблюдаться условие

$$\lambda\frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dz}\ll\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Но должно, вообще говоря, соблюдаться и более жесткое условие

$$\left|\frac{d\gamma_{ae,\,o}}{dz}\right| \ll |\gamma_{ae,\,o}||k_e - k_o|, \qquad (10.12а)$$

имеющее смысл такого требования: характер поляризации нормальных волн должен мало изменяться на расстоянии порядка периода биений между волнами.

Выше мы попытались осветить проблему переноса излучения с довольно общей точки зрения. При этом ясно видно, что могут встретиться весьма сложные или во всяком случае громоздкие и трудно обозримые решения для $I_{\alpha\beta}$ или параметров Стокса. Ситуация еще более усложняется, если холодная плазма достаточно плотна, а магнитные поля достаточно сильны. В подобных условиях учет влияния плазмы уже нельзя проводить путем замены величины $\xi = mc^2/\mathscr{E}$ на $\eta = \sqrt{\xi^2 + \omega_p^2/\omega^2}$. Своя специфика появляется также, если распределение релятивистских электронов по скоростям оказывается анизотропным [155, 156]. Далее, даже для изотропного распределения электронов по скоростям в особом анализе нуждается случай, когда функция $N_e(\mathscr{E})$ быстро изменяется с энергией. Однако функцию $N_e(\mathscr{E})$ можно считать достаточно гладкой и использовать приводимые ниже выражения для коэффициента реабсорбции, если $N_e(\mathscr{E})$ мало меняется на интервале энергий $\Delta\mathscr{E}$, отвечающем излучению соседних обертонов частоты

$$\Omega_H = \frac{\omega_H^*}{\sin^2\chi} = \frac{eH}{mc}\frac{mc^2}{\mathscr{E}\sin^2\chi}.$$

Излучаемая частота $\omega = n\Omega_H$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и, следовательно,

$$|\Delta\omega| = n\frac{eH}{mc}\frac{mc^2}{\mathscr{E}\sin^2\chi}\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} \sim \Omega_H$$

при

$$\Delta\mathscr{E} \sim \frac{\mathscr{E}}{n} = \frac{\Omega_H\mathscr{E}}{\omega} = \frac{eH}{mc\omega\sin^2\chi}mc^2 = \frac{eH\lambda}{2\pi\sin^2\chi},$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны (рассматривается излучение в вакууме). Упомянутое условие плавности изменения функции $N_e(\mathscr{E})$, таким образом, имеет вид

$$\frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\Delta\mathscr{E} \sim \frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\frac{eH}{mc\omega\sin^2\chi}mc^2 = \frac{dN_e}{d\mathscr{E}}\frac{eH\lambda}{2\pi\sin^2\chi} \ll N_e. \qquad (10.12б)$$

Это условие необходимо при $\chi \approx {}^1/_2\pi$, а при $\chi < {}^1/_2\pi$ оно достаточно, но не необходимо в силу зависимости Ω_H от χ.

Условие (10.12б) вряд ли может нарушаться в большинстве случаев, встречающихся в астрофизике (интервал энергий $\Delta\mathscr{E} = \frac{eH}{2\pi}\lambda_0$ даже в метровом диапазоне меньше или порядка $10^5\,H$ эВ и может быть достаточно значителен лишь в областях с сильным полем $H \gg 1$ Э).

Обсуждение всего затронутого круга вопросов потребовало бы по крайней мере специального обзора. К тому же целый ряд относящихся сюда задач еще не рассмотрен. Ниже мы ограничимся поэтому только обсуждением двух более узких задач о реабсорбции синхротронного излучения в вакууме и в плазме при квазипродольном распространении. Эти случаи, однако, являются, по всей вероятности, наиболее существенными в применении к радиоастрономии. Прежде чем останавливаться на соответствующих вычислениях, целесообразно сделать также несколько замечаний, касающихся метода коэффициентов Эйнштейна и его применения для поляризованного излучения.

При исследовании уравнения переноса (10.3) и других аналогичных уравнений для интенсивности нормальных волн или параметров Стокса необходимо вычислить коэффициенты $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathscr{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в (10.3), коэффициенты $\varepsilon_{e,\,o}$ и $\mu_{e,\,o} = 2\varkappa_{e,\,o}$ в (10.10) и т. д. Для нахождения излучательной способности $\varepsilon_{\alpha\beta}$ опираться нужно на формулу (10.4). Другие величины в общем случае можно вычислить методом кинетического уравнения [155, 156], причем, если речь идет о классической области (условие $\hbar\omega \ll \mathscr{E}$), то использовать нужно классическое релятивистское кинетическое уравнение. Соответствующие расчеты довольно громоздки. Как по этой причине, так и в силу естественного стремления получать результаты простейшим и наиболее прозрачным способом, большую роль при анализе реабсорбции играет метод коэффициентов Эйнштейна. Этот метод в общем хорошо известен, но его применение к случаю среды и особенно анизотропной среды, а также при учете поляризации излучения имеет некоторую специфику.

Как было пояснено в гл. 6 (см. также гл. 13), в слабопоглощающей (формально прозрачной) среде можно считать, что кванты в нормальных волнах имеют энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\mathbf{k}_l = (\hbar\omega/c)\, n_l(\omega, \mathbf{s})\,\mathbf{s}$, где $\mathbf{k}_l = k_l\mathbf{s}$, $|\mathbf{s}| = 1$ и нижний индекс l отвечает данной волне (в магнитоактивной плазме речь идет об обыкновенной, необыкновенной и плазменной волнах). В классической области результаты расчетов не зависят от квантовой постоянной $\hbar = h/2\pi$, но против использования квантовых представлений, если они удобны, тоже нельзя привести никаких доводов. Поток энергии и плотность энергии в волнах типа l равны $I_l d\omega\, d\Omega$ и $\rho_l d\omega\, d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла и для удобства мы временно пользуемся спектральными плотностями, отнесенными к интервалу $d\omega = 2\pi\, d\nu$. Имеет место такая связь

$$I_l = \rho_l v_{\text{гр},\,l} = \rho_l \left|\frac{d\omega}{d\mathbf{k}_l}\right| = \rho_l \frac{c}{|\cos\varphi_l| \left|\dfrac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|} \qquad (10.13)$$

($\mathbf{v}_{\text{гр},\,l} = d\omega/d\mathbf{k}_l$ — групповая скорость для волн типа l).

Введем коэффициенты Эйнштейна A^n_m, B^n_m и B^m_n, причем $A^n_m\, d\omega\, d\Omega$ — вероятность спонтанного излучения в единицу времени при переходе между состояниями $m \to n$ с излучением кванта данной нормальной волны в интервалах $d\omega$ и $d\Omega$, $B^n_m \rho\, d\omega\, d\Omega$ — вероятность такого же индуцированного перехода и $B^m_n \rho\, d\omega\, d\Omega$ — вероятность поглощения кванта при переходе $n \to m$. Коэффициенты A^n_m, B^n_m и B^m_n связаны соотношениями

$$B^n_m = B^m_n;$$
$$B^n_m = \frac{(2\pi c)^3}{n_l^2 \hbar \omega^3 \left| \frac{\partial (\omega n_l)}{\partial \omega} \right|} A^n_m. \tag{10.14}$$

Отсюда для вакуума получается обычное соотношение (см., например, [1])

$$B^n_m = \frac{(2\pi c)^3}{\hbar \omega^3} A^n_m = \frac{2\pi c^3}{h\nu^3} A^n_m. \tag{10.15}$$

При этом под n и m понимаются два каких-либо состояния в импульсном пространстве, для которых разность энергий $\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n = \hbar\omega = h\nu$. Если бы речь шла о переходе между энергетическими уровнями, то нужно было бы учитывать статистические веса этих уровней. По смыслу связь (10.15) относится к волнам с одной поляризацией. Если определить вероятность индуцированного перехода в вакууме как $\tilde{B}^n_m I_\nu\, d\nu\, d\Omega$ (так сделано, например, в [58]), то $\tilde{B}^n_m = (c^2/h\nu^3)\, \tilde{A}^n_m$, где $\tilde{A}^n_m\, d\nu\, d\Omega = 2\pi A^n_m\, d\nu\, d\Omega$ — вероятность спонтанного испускания в интервалах $d\nu$ и $d\Omega$. Наконец, если под $\tilde{A}^n_m\, d\nu\, d\Omega$ понимать вероятность испускания волн с обеими возможными поляризациями, то можно воспользоваться связью $\tilde{B}^n_m = (c^2/2h\nu^3)\, \tilde{A}^n_m$, которая и применялась в [58]. Но здесь-то как раз и заложен источник недостаточной полноты и определенности соответствующих выражений. Во-первых, проведенный способ перехода к неполяризованному излучению не обоснован, хотя и можно ожидать, что так получается среднее значение μ для обеих возможных поляризаций. Во-вторых, в вакууме или в изотропной среде имеет место поляризационное вырождение (возможность выбора нормальных волн с любой поляризацией), в силу чего поляризационные соотношения можно получать лишь в результате дополнительного анализа.

Обозначим через N_n и N_m концентрации электронов в состояниях n и m с энергиями $\mathscr{E}_n$ и $\mathscr{E}_m$, так что $\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n = \hbar\omega \equiv h\nu$. Тогда, в силу (10.14), коэффициент поглощения μ_l вдоль

луча для волны типа l равен

$$\mu_l = -\frac{\Delta I_l}{I_l} = \frac{\hbar\omega \sum \left(N_n B_n^m \rho_l - N_m B_m^n \rho_l\right)}{\rho_l} \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}_l} \right|^{-1} =$$

$$= \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2 n_l^2} |\cos\varphi_l| \sum_{m \gtrless n} A_m^n (N_n - N_m). \qquad (10.16)$$

Для простоты будем в дальнейшем сразу считать, что $|n_l - 1| \ll 1$ и $|\cos\varphi_l| \approx 1$. Далее, рассматривая ультрарелятивистский случай («игольчатое» излучение, т. е. излучение лишь в направлении скорости частицы) и считая функцию распределения изотропной, можем положить

$$N_n - N_m = N_e(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) - N_e(\mathbf{p}) =$$

$$= N_e\left(p - \frac{h\nu}{c}\right) - N_e(p) = -\frac{h\nu}{c}\frac{dN_e}{dp}.$$

Здесь учтено, что в рассматриваемом классическом случае $h\nu \ll cp \approx \mathscr{E}$. Наконец, излучательная способность на интервал $d\nu$ равна $\varepsilon_l = \sum \tilde{A}_m^n N_m h\nu = \sum 2\pi A_m^n N_m h\nu$, и хотя бы из сопоставления с (10.4) ясно, что $A_m^n = \tilde{A}_m^n/2\pi$ в (10.16) нужно заменить на $(R^2/2\pi h\nu)\, p_l(\nu, \mathscr{E})$, где $p_l(\nu, \mathscr{E})$ — функция типа $p_{\alpha\beta}(\nu)$ в (5.26), (5.27), но относящаяся к волне типа l. Что это означает, будет уточнено ниже. Сейчас же приведем окончательное выражение для μ_l при сделанных предположениях

$$\mu_l = -\frac{c}{\nu^2}\int \frac{dN_e(p)}{dp} q_l(\nu, \mathscr{E})\, p^2\, dp =$$

$$= -\frac{c^2}{4\pi\nu^2}\int \mathscr{E}^2 \frac{d}{d\mathscr{E}}\left(\frac{N_e(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\right) q_l(\nu, \mathscr{E})\, d\mathscr{E}, \qquad (10.17)$$

где

$$q_l(\nu, \mathscr{E}) = \int R^2 p_l(\nu, \mathscr{E})\, d\Omega \qquad (10.18)$$

и использованы равенства $\mathscr{E} = cp$ и $N_e(p) 4\pi p^2 dp = N_e(\mathscr{E})\, d\mathscr{E}$; кроме того, нужно пояснить, что при замене в (10.16) суммирования интегрированием элемент фазового объема равен $p^2 dp\, d\Omega$, причем $d\Omega$ есть элемент телесного угла, в котором происходит спонтанное излучение (по предположению, угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ мал). Согласно (10.17), (10.18) задача вычисления μ_l заключается в уточнении смысла величины $p_l(\nu, \mathscr{E})$ или $q_l(\nu, \mathscr{E})$. В анизотропной среде такая процедура вполне ясна, ибо q_l есть спектральная плотность мощности, излучаемой электроном в виде нормальных волн типа l. Но в вакууме или в изотропной среде, где имеется поляризационное вырождение, необходимо выяснить, какие волны нужно считать нормальными при вычислении коэффициента реабсорбции μ_l.

На первый взгляд, правда, может показаться, что результат расчетов не должен зависеть от выбора поляризации нормальных волн, ибо в этой независимости и состоит поляризационное вырождение. Разумеется, при последовательном проведении расчетов методом кинетического уравнения так оно и есть: определенный выбор поляризации нормальных волн в случае вакуума, а в принципе и само использование нормальных волн в любой среде не обязательны. Но в методе коэффициентов Эйнштейна работают только с вероятностями (интенсивностями), а не с амплитудами вероятности (полями). Поэтому когерентность различных нормальных волн, вообще говоря, имеющая место в случае вырождения, в методе коэффициентов Эйнштейна учтена быть не может. Иными словами, по самому смыслу этого метода его использование, вообще говоря, связано с фиксацией типа волн, для которых вычисляется коэффициент поглощения.

Для «чистого» вакуума нельзя, конечно, однозначно указать какие волны являются нормальными. Но в этом случае не встает и вопрос о реабсорбции. Если же говорят о «реабсорбции в вакууме», то имеют в виду только возможность пренебречь влиянием холодной плазмы на излучение и реабсорбцию. Релятивистская же плазма в источнике по самому смыслу задачи о реабсорбции оказывает влияние на поглощение волн. Она должна оказывать какое-то влияние и на показатель преломления, причем среда является анизотропной. Последнее очевидно, поскольку речь идет о релятивистских частицах (плазме), находящихся в магнитном поле, и следовательно, в системе имеется физически выделенное направление — направление поля. Как было показано в гл. 5, если функция распределения ультрарелятивистских частиц не резко анизотропна, то их излучение линейно поляризовано, причем электрический вектор в волнах максимален в направлении, перпендикулярном проекции $\mathbf{H}_\perp$ вектора $\mathbf{H}$ на картинную плоскость (ниже для краткости такие волны будем называть поляризованными перпендикулярно полю, а волны с вектором $\mathbf{E}$, параллельным $\mathbf{H}_\perp$, именовать волнами, поляризованными по полю). В таких условиях естественно ожидать, что нормальные волны также будут поляризованы по полю и перпендикулярно полю (напомним, что мы ограничиваемся углами $\chi \gg mc^2/\mathscr{E}$, т. е. не рассматриваем излучения частиц, направление скорости которых составляет малый угол $\chi \leqslant mc^2/\mathscr{E}$ с направлением поля); в обсужденном случае линейная поляризация также имеет место только при условии $\chi \gg mc^2/\mathscr{E}$. Количественный расчет [155б] подтверждает это предположение. Таким образом, при применении формул (10.17), (10.18) для вычисления коэффициентов реабсорбции синхротронного излучения ультрарелятивистских частиц в вакууме нужно вычислять коэффициенты $\mu_\perp$ и $\mu_\parallel$ для поляризаций поперек поля и по полю (другими словами, индекс l заменяется на $\perp$ или $\parallel$). При этом в качестве $p_\perp(\nu, \mathscr{E})$ и $p_\parallel(\nu, \mathscr{E})$ в (10.18)

нужно, как ясно из всего изложенного, выбрать умноженные на $2\pi \sin\chi$ выражения (5.34). Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} q_\perp(\nu, \mathscr{E}) &= \frac{\sqrt{3}\, e^2 \omega_H^* \sin\chi}{2c\eta} \frac{\nu}{\nu_c} \left[\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\, dz + K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \right], \\ q_\parallel(\nu, \mathscr{E}) &= \frac{\sqrt{3}\, e^2 \omega_H^* \sin\chi}{2c\eta} \frac{\nu}{\nu_c} \left[\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\, dz - K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \right], \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_c &= \frac{3 \sin\chi}{4\pi} \frac{\omega_H^*}{\eta^3}, \quad \omega_H^* = \frac{eH}{mc} \frac{mc^2}{\mathscr{E}}, \\ \eta &= \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

Здесь для удобства приведены выражения, справедливые и при наличии изотропной плазмы $n = 1 - \omega_p^2/2\omega^2$, $|1 - n| \ll 1$, хотя ниже будет положено $\eta = \xi = mc^2/\mathscr{E}$. В рассматриваемом ультрарелятивистском случае с изотропным (или слабо анизотропным) распределением излучающих частиц по направлениям их скорости волны с эллиптической поляризацией не излучаются (с точностью до членов порядка $\eta = \sqrt{(mc^2/\mathscr{E})^2 + (\omega_p/\omega)^2}$). В силу этого обстоятельства при анализе собственного излучения источника можно ограничиться параметрами Стокса I и Q или интенсивностями $I_\perp = {}^1/_2(I + Q)$ и $I_\parallel = {}^1/_2(I - Q)$. Спектральная плотность мощности полного излучения равна

$$q(\nu, \mathscr{E}) = q_\perp + q_\parallel = p(\nu, \mathscr{E}) = \frac{\sqrt{3}\, e^2 \omega_H^* \sin\chi}{c\eta} \frac{\nu}{\nu_c} \int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\, dz. \tag{10.21}$$

В вакууме

$$p(\nu, \mathscr{E}) = \frac{\sqrt{3}\, e^3 H_\perp}{mc^2} \frac{\nu}{\nu_c} \int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(z)\, dz, \tag{10.22}$$

что, конечно, совпадает с (5.39).

Введем обозначения

$$\mu_\perp(\chi) = \mu(\chi) + \lambda(\chi), \qquad \mu_\parallel = \mu(\chi) - \lambda(\chi). \tag{10.23}$$

Выражение $\mu(\chi) = {}^1/_2(\mu_\perp + \mu_\parallel)$ в точности совпадает с выражением, которое получается (см., например, [58]), если воспользоваться упомянутой связью $\tilde{B}_m^n = (c^2/2h\nu^3)\, \tilde{A}_m^n$ сразу для волн с обеими поляризациями. Этот результат естествен, по-

скольку $\mu(\chi)$ есть среднее арифметическое $\mu_\perp$ и $\mu_\parallel$. Для степенного спектра $N_e(\mathscr{E}) = K_e \mathscr{E}^{-\gamma}$ имеем [49а]

$$\mu(\chi) = \frac{\gamma + {}^{10}/_3}{\gamma + 2}\lambda(\chi) = g(\gamma)\frac{e^3}{2\pi m}\left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{1/2\gamma} K_e H_\perp^{1/2(\gamma+2)} \nu^{-1/2(\gamma+4)}. \tag{10.24}$$

В табл. 10.1 мы приведем лишь численные значения $g(\gamma)$ (формулу для $g(\gamma)$ см. в [58]).

Таблица 10.1

γ	1	2	3	4	5
$g(\gamma)$	0,96	0,70	0,65	0,69	0,83
$\overline{g(\gamma)}$	0,69	0,47	0,40	0,44	0,46

Степень поляризации синхротронного излучения в вакууме без учета реабсорбции для случая степенного спектра электронов (см. (5.46)) равна

$$\Pi_0 = \frac{I_\perp^{(0)} - I_\parallel^{(0)}}{I_\perp^{(0)} + I_\parallel^{(0)}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + {}^7/_3}, \qquad \frac{I_\perp^{(0)}}{I_\parallel^{(0)}} = \frac{1 + \Pi_0}{1 - \Pi_0} = \frac{3\gamma + 5}{2}. \tag{10.25}$$

Вместе с тем, согласно (10.23) и (10.24),

$$\left.\begin{aligned} \mu_\perp = \mu + \lambda = \frac{6\gamma + 16}{3\gamma + 10}\mu, \qquad \mu_\parallel = \mu - \lambda = \frac{4}{3\gamma + 10}\mu, \\ \frac{\mu_\parallel}{\mu_\perp} = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} = \frac{2}{3\gamma + 8}. \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

Уравнение переноса типа (10.10) имеет, очевидно, в обсуждаемом случае вид

$$\frac{dI_{\perp,\parallel}}{dz} = \varepsilon_{\perp,\parallel} - \mu_{\perp,\parallel} I_{\perp,\parallel}, \tag{10.27}$$

где

$$\varepsilon_{\perp,\parallel}(\nu) = \int q_{\perp,\parallel}(\nu, \mathscr{E}) N_e(\mathscr{E})\, d\mathscr{E}. \tag{10.28}$$

Излучательную способность (10.28) легко вычислить для степенного спектра, используя выражения (10.19) и (5.42). Ограничимся здесь замечанием, что (как ясно из (10.25)) в отсутствие реабсорбции для собственного излучения однородного источника с размерами L имеем

$$I_{\perp,\parallel}^{(0)} = \varepsilon_{\perp,\parallel} L, \qquad \frac{I_\perp^{(0)}}{I_\parallel^{(0)}} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = \frac{3\gamma + 5}{2}. \tag{10.29}$$

При учете реабсорбции, интегрируя уравнение (10.27) при условии, что в начале слоя (при $z = 0$) $I_{\perp,\parallel} = 0$, получаем

$$I_\perp = \frac{\varepsilon_\perp}{\mu_\perp}(1 - \exp(-\mu_\perp z)), \qquad I_\parallel = \frac{\varepsilon_\parallel}{\mu_\parallel}(1 - \exp(-\mu_\parallel z)). \tag{10.30}$$

Для тонкого слоя (источника с размером L) $\mu_{\perp,\parallel}L \ll 1$ и

$$\frac{I_\perp}{I_\parallel} = \frac{I_\perp^{(0)}}{I_\parallel^{(0)}} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = \frac{3\gamma+5}{2}, \quad \Pi = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} = \Pi_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma+{}^7/_3}. \quad (10.31)$$

Для толстого слоя $\mu_{\perp,\parallel}L \gg 1$ и

$$\frac{I_\perp}{I_\parallel} = \frac{\varepsilon_\perp \mu_\parallel}{\varepsilon_\parallel \mu_\perp} = \frac{3\gamma+5}{3\gamma+8} < 1, \quad \Pi = \left|\frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}\right| = \frac{3}{6\gamma+13}. \quad (10.32)$$

Разумеется, те из выражений (10.31) и (10.32), которые не содержат показателя γ, имеют общее значение, а не относятся только к степенному спектру. Напомним, что при использовании степенного спектра в расчетах принимается, что $\gamma > {}^1/_3$ (см. гл. 5).

Допустим, что на луче зрения магнитное поле в среднем хаотично по направлениям. Допустим далее, что при распространении волн в таком поле поляризация волн не изменяется с изменением направления поля (это имеет место, если приближение геометрической оптики неприменимо для описания поляризации нормальных волн в силу несоблюдения условия типа (10.12а), упомянутого выше). В таких случаях при распространении волн в хаотическом поле анизотропия поглощения исчезает и волны с любой поляризацией будут поглощаться одинаково с некоторым коэффициентом поглощения μ. При данном угле χ средний коэффициент поглощения равен

$$^1/_2\,(\mu_\perp + \mu_\parallel) = \mu(\chi).$$

Для получения $\bar{\mu}$, т. е. среднего значения $\mu(\chi)$ по углам χ между полем $\mathbf{H}$ и лучом зрения (скоростью излучающих электронов), естественно вычислять выражение

$$\bar{\mu} = {}^1/_2 \int_0^\pi \mu(\chi) \sin\chi\, d\chi =$$

$$= \overline{g(\gamma)}\, \frac{e^3}{2\pi m} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{^1/_2\gamma} K_e H^{^1/_2(\gamma+2)} \nu^{-{}^1/_2(\gamma+4)}, \quad (10.33)$$

$$\overline{g(\gamma)} = \frac{\sqrt{3\pi}}{8} \frac{\Gamma({}^1/_4(\gamma+6))}{\Gamma({}^1/_2(\gamma+8))} \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right).$$

В [49а] показано, что выражение (10.33), к которому мы пришли выше не строго, действительно представляет собой коэффициент реабсорбции для хаотического поля. Численные значения функции $\overline{g(\gamma)}$ указаны в табл. 10.1. Для удобства приведем также такое выражение:

$$\bar{\mu} = \overline{g(\gamma)} \cdot 0{,}019\,(3{,}5 \cdot 10^9)^\gamma K_e H^{^1/_2(\gamma+2)} \nu^{-{}^1/_2(\gamma+4)} \text{ см}^{-1}. \quad (10.34)$$

О реабсорбции в неоднородном поле см., в частности, [157]. Формула для μ в случае моноэнергетического спектра электронов приведена ниже (см. (10.47)).

Естественно возникает вопрос об области применимости этих формул в плане возможности пренебречь влиянием холодной плазмы (электронная концентрация N). Для такого пренебрежения нужно, во-первых, чтобы холодная плазма не влияла на излучение релятивистских электронов. Отсюда приходим к условию (см. (6.78) и ниже в настоящей главе)

$$\nu \gg \frac{4ecN}{3H_\perp} = \frac{4\omega_p^2}{3\pi\omega_H \sin\chi} \approx 20\frac{N}{H_\perp} = 20\frac{N}{H\sin\chi}. \qquad (10.35)$$

Во-вторых, вращение плоскости поляризации холодной плазмой должно быть мало, откуда приходим к условию (см., например, [58]) *)

$$\nu \gg 10^2\sqrt{NHL\cos\chi}. \qquad (10.36)$$

Это условие, конечно, не нужно, если поляризация нормальных волн определяется релятивистскими частицами (последнее имеет место при соблюдении неравенства, обратного приводимому ниже неравенству (10.41)). В-третьих, нормальные волны линейно поляризованы только при соблюдении того же неравенства, обратного неравенству (10.41). Все три перечисленных условия в своей совокупности достаточны для полного пренебрежения влиянием плазмы. Но такое пренебрежение в тех или иных случаях возможно и при менее жестких требованиях.

При наличии в излучающей области холодной плазмы нужно учитывать ее влияние, во-первых, на процесс излучения и, во-вторых, на распространение волн. При условиях

$$\left.\begin{aligned} \omega \gg \omega_H &= \frac{eH}{mc} = 1{,}76\cdot 10^7 H, \\ \omega \gg \omega_p &= \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5.64\cdot 10^4\sqrt{N} \end{aligned}\right\} \qquad (10.37)$$

при вычислении излучения плазму можно, вообще говоря, считать изотропной, причем

$$n_e = n_0 = n = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \quad |1-n| \ll 1. \qquad (10.38)$$

В этом случае влияние плазмы на излучение уже отражено, например, в формулах (10.19)—(10.21).

Что касается распространения волн, то для пренебрежения анизотропией условий (10.37), конечно, недостаточно. Однако существенное упрощение при выполнении этих неравенств связано в первую очередь с возможностью в большинстве случаев

*) Здесь и ниже, поскольку имеется в виду синхротронное излучение, приравниваем угол α между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ углу χ между $\mathbf{H}$ и скоростью электрона $\mathbf{v}$.

считать распространение волн квазипродольным, причем *)

$$\left.\begin{aligned} n_e &= 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega-\omega_L)}, \qquad n_o = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega+\omega_L)}, \\ n_e - n_o &= \frac{\omega_p^2\omega_L}{\omega^3}, \qquad \omega_L = \omega_H\cos\chi. \end{aligned}\right\} \tag{10.39}$$

Здесь уже предположено, что $|n_{e,\,o}-1|\ll 1$. Волны e и o обе поляризованы по кругу с противоположным направлением вращения векторов поля, причем в необыкновенной волне эти векторы вращаются в том же направлении, что и находящийся в магнитном поле электрон. Условия применимости квазипродольного приближения (10.39) в интересующих нас условиях таковы:

$$\frac{\omega_H^2\sin^4\chi}{4\omega^2\cos^2\chi}\ll 1, \quad \frac{\omega_H^2}{2\omega^2}\sin^2\chi\ll 1. \tag{10.40}$$

Легко видеть, что в радиоастрономии формулы (10.39) применимы практически всегда, если влияние релятивистских частиц на показатель преломления мало по сравнению с учтенным в (10.39) влиянием холодной плазмы.

В результате влияния релятивистских частиц [155б, 156а]

$$|n-1|\sim\frac{c}{2\omega}\mu(\chi)=\frac{\lambda}{4\pi}\mu(\chi).$$

где $\mu(\chi)$ — коэффициент реабсорбции (10.24) или (10.33), (10.34). Следовательно, ролью релятивистских частиц при вычислении n можно пренебречь при условии $(n_o-n_e)\gg c\mu/2\omega$, что дает

$$N_e\gg mc^2\left(\frac{3e}{2\pi m^3c^5}\right)^{1/2\gamma}\frac{(\sin\chi)^{1/2(\gamma+2)}}{\cos\chi}K_eH^{1/2\gamma}\nu^{-1/2\gamma}\sim$$

$$\sim 10^{-6}(3{,}5\cdot 10^9)^{\gamma}\frac{(\sin\chi)^{1/2(\gamma+2)}}{\cos\chi}K_eH^{1/2\gamma}\nu^{-1/2\gamma}\ \text{см}^{-3}. \tag{10.41}$$

В условиях применимости формул (10.39) задача о переносе излучения сильно упрощается. Тензоры $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принимают в этих условиях очень простой вид, так что уравнение (10.3) с переходом к параметрам Стокса можно записать в виде [56]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= \varepsilon_I - {}^1\!/_2(\mu_e+\mu_o)I + {}^1\!/_2(\mu_e-\mu_o)V, \\ \frac{dV}{dz} &= \varepsilon_V - {}^1\!/_2(\mu_e+\mu_o)V + {}^1\!/_2(\mu_e-\mu_o)I, \\ \frac{dQ}{dz} &= \varepsilon_Q - {}^1\!/_2(\mu_e+\mu_o)Q + (k_e-k_o)U, \\ \frac{dU}{dz} &= \varepsilon_U - {}^1\!/_2(\mu_e+\mu_o)U - (k_e-k_o)Q. \end{aligned}\right\} \tag{10.42}$$

*) Все приводимые условия и формулы для n_e и n_o подробнее см. в [84].

Здесь $k_{e,\,o} = (\omega/c)n_{e,\,o}$ и $\varepsilon_{I,\,V,\,Q,\,U}$ — комбинации из $\varepsilon_{\alpha\beta}$ отвечающие переходу от тензора $I_{\alpha\beta}$ к параметрам Стокса (см. (10.1); например, $\varepsilon_I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$). Эффект Фарадея определяется разностью $n_e - n_o = (c/\omega)(k_e - k_o)$ и не сказывается на уравнениях для интенсивности I и степени круговой поляризации $\Pi_c = V/I$, но влияет на степень линейной поляризации $\Pi_l = \sqrt{Q^2 + U^2}/I$ и ориентацию эллипса χ (напомним, что $\operatorname{tg} 2\tilde{\chi} = U/Q$). Удобно ввести интенсивности необыкновенного и обыкновенного излучения

$$I_e = {}^1/_2 (I - V), \quad I_o = {}^1/_2 (I + V). \tag{10.43}$$

Согласно (10.42) и (10.43) можно написать

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dI_{e,\,o}}{dz} = \varepsilon_{e,\,o} - \mu_{e,\,o} I_{e,\,o}, \\ &\varepsilon_e = {}^1/_2 (\varepsilon_I - \varepsilon_V), \quad \varepsilon_o = {}^1/_2 (\varepsilon_I + \varepsilon_V). \end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

Результат (10.44) представляется довольно очевидным с самого начала: в рассматриваемой линейной среде интенсивность (поток энергии) каждой из нормальных волн не зависит от интенсивности другой волны. Последний вывод относится к любым нормальным волнам, но при произвольной (эллиптической) их поляризации интенсивности I_e и I_o сложным образом выражаются через параметры Стокса, и целесообразность их использования неясна. Впрочем, и для квазипродольного распространения для полной характеристики излучения нужно использовать все четыре параметра Стокса (решение уравнений (10.43) см. в [56]).

Тем не менее ограничимся ниже обсуждением лишь вопроса об изменении интенсивности волн e и o, т. е. будем опираться на уравнения (10.44). При наличии волн лишь одного типа поляризация задана и уравнение (10.44) полностью описывает излучение. Подобная ситуация имеет место в частности при отрицательной реабсорбции для достаточно толстого слоя. Действительно, при отрицательной реабсорбции интенсивность волн при прохождении слоя экспоненциально возрастает при увеличении его толщины. Поэтому на выходе толстого слоя будет доминировать излучение, состоящее из тех нормальных волн, для которых больше абсолютная величина коэффициента реабсорбции μ.

Как указывалось, в условиях (10.37) влияние плазмы на излучение учитывается формулами (10.19)—(10.21). При этом с точностью до членов порядка $mc^2/\mathscr{E}$ в каждую нормальную циркулярно поляризованную волну «переходит» половина полной мощности излучения $q(\nu, \mathscr{E}) \equiv p(\nu, \mathscr{E})$, определяемой формулой

(10.21). Таким образом, $q_{e,o} = {}^1/_2 p(\nu, \mathscr{E})$ и согласно (10.17) имеем

$$\left.\begin{aligned}
\mu_e = \mu_o = -\frac{c^2}{8\pi\nu}\int_0^\infty \mathscr{E}^2 \frac{d}{d\mathscr{E}}\left(\frac{N_e(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\right) p(\nu, \mathscr{E})\, d\mathscr{E} = \\
= \frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int_0^\infty \frac{N_e(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\frac{d}{d\mathscr{E}}\{\mathscr{E}^2 p(\nu, \mathscr{E})\}\, d\mathscr{E}, \\
p(\nu, \mathscr{E}) = \sqrt{3}\,\frac{e^3 H_\perp}{mc^2}\left[1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-1/2} \frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^\infty K_{5/3}(z)\, dz, \\
\nu_c = \frac{3e^3 H_\perp}{4\pi mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left[1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}, \\
\frac{\nu_p^2}{\nu^2} = 1 - n^2, \quad \nu_p^2 = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2} = \frac{e^2 N}{\pi m}.
\end{aligned}\right\} \quad (10.45)$$

Для лучшего понимания этих формул и их сопоставления с другими выражениями отметим, что

$$1 + \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left(\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \\ = \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \eta^2 \approx \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2\left(1 - n^2\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Из (10.45) ясно, что влияние плазмы на синхротронное излучение и его реабсорбцию несущественно при условии

$$\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \ll 1. \quad (10.46а)$$

Это условие приводит (см. (6.77)) к уже указанному неравенству (10.35). В области (10.46а) подынтегральное выражение в (10.45) для $\mu_{e,o}$ всегда положительно, откуда следует, что в этом случае всегда $\mu_{e,o} > 0$. Поскольку для вакуума условие (10.46а) всегда выполнено, в вакууме μ всегда положительно *). Если же

$$\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \gg 1, \quad (10.46б)$$

то влияние плазмы является определяющим, причем при соответствующем выборе спектра электронов $N_e(\mathscr{E})$ коэффициент

*) Это замечание справедливо только для достаточно плавной функции $N_e(\mathscr{E})$, когда справедливы используемые выражения для μ (см. (10.17) и (10.45)). Для очень «острых» функций $N_e(\mathscr{E})$ и анизотропных распределений по скоростям отрицательное значение μ может встретиться уже для вакуума (см. [156б] и указанную там литературу).

$\mu_{e,\,o}$ может оказаться отрицательным (см. [56], § 17). Для степенного спектра электронов $N_e(\mathscr{E}) = K_e\mathscr{E}^{-\gamma}$ непосредственно из (10.45) ясно, что отрицательные значения $\mu_{e,\,o}$ возможны лишь при $\gamma < -2$, т. е. для функции $N_e(\mathscr{E})$, растущей в некоторой области быстрее, чем $\mathscr{E}^2$. В противном случае подынтегральная функция в первом выражении (10.45) везде отрицательна (функция $p(\nu, \mathscr{E})$ положительна). Область, где функция $N_e(\mathscr{E})$ возрастает с увеличением $\mathscr{E}$, обычно не может быть очень большой и во всяком случае с дальнейшим ростом $\mathscr{E}$ должна сменяться областью, где $N_e(\mathscr{E})$ убывает. Поэтому степенной спектр не представляет в обсуждаемом случае отрицательной реабсорбции особого интереса (спектр вида $N_e(\mathscr{E}) = K_e\mathscr{E}^{-\gamma'}$, $\gamma' > 2$ при $\mathscr{E}_1 < \mathscr{E} < \mathscr{E}_2$ и $N_e(\mathscr{E}) = 0$ при $\mathscr{E} > \mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E} < \mathscr{E}_1$ рассмотрен в [56, 158]). Большее значение имеет спектр с довольно острым максимумом на некоторой энергии $\mathscr{E}_i$ (ширина спектра должна удовлетворять условию $\frac{\Delta\mathscr{E}}{mc^2} \ll \frac{3eH_\perp\nu^2}{4\pi mc\nu_p^3}$, что вполне совместимо с неравенством (10.12)). Для такого спектра

$$\mu = \mu^{\mathrm{I}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\frac{e}{H_\perp}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_i}\right)^5 N_{e,\,i}K_{5/3}(Z_i),\quad Z_i = \frac{4\pi mc\nu}{3eH_\perp}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_i}\right)^2 \tag{10.47}$$

при $\mathscr{E}_i^2 \ll \mathscr{E}_*^2 \equiv (mc^2\nu/\nu_p)^2$ (см. (10.45), (10.46)). Если же $\mathscr{E}_i^2 \gg \mathscr{E}_*^2$ (см. (10.46)), то

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \mu^{\mathrm{II}} = \frac{\sqrt{3}\,e^3H_\perp}{8\pi m\nu\nu_p}\frac{mc^2}{\mathscr{E}_i^2}N_{e,\,i}\Phi(Z_i),\\ &\Phi(Z) = 2Z\int\limits_Z^\infty K_{5/3}(u)\,du - Z^2K_{5/3}(Z),\quad Z_i = \frac{4\pi me\nu_p^3}{3eH_\perp\nu^2}\frac{\mathscr{E}_i}{mc^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.48}$$

В (10.47) и (10.48) $N_{e,\,i}$ есть концентрация электронов с рассматриваемой энергией $\mathscr{E}_i \gg mc^2$.

Выражение (10.47) всегда положительно; в отсутствие плазмы оно справедливо для всех энергий, что находится в согласии со сказанным ранее. Функция $\Phi(Z_i)$ может быть отрицательной, и в соответствующей области значений Z_i коэффициент $\mu^{\mathrm{II}} < 0$. Он отрицателен в области порядка $(0{,}7—1{,}3)\nu_{\max}$, где $\nu_{\max}$ — частота, на которой значение $|\mu^{\mathrm{II}}|$ максимально. На этой частоте

$$\left.\begin{aligned} &\mu^{\mathrm{II}}_{\max} \approx -10^{-2}\frac{e^2}{mc}\frac{\nu_p^3}{\nu_{\max}^4}N_{e,\,i} = -8{,}5\cdot10^{-5}\frac{\nu_p^3}{\nu_{\max}^4}N_{e,\,i}\ \text{см}^{-1},\\ &\nu_{\max} \approx \left(0{,}24\,\frac{2\pi mc\nu_p^3}{eH_\perp}\frac{\mathscr{E}_i}{mc^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.49}$$

Вместе с тем коэффициент μ^I в максимуме частотного спектра (на частоте ν_m; см. (5.40)) равен

$$\mu^I(\nu_m) \approx 2{,}4 \cdot 10^{-8} \frac{N_{e,i}}{H_\perp} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_i}\right)^5 \text{см}^{-1}, \quad \nu_m \approx 0{,}07 \frac{eH_\perp}{mc} \left(\frac{\mathscr{E}_i}{mc^2}\right)^2. \tag{10.50}$$

Ряд оценок отрицательного коэффициента реабсорбции в применении к различным космических источникам приведен в [56, 159].

Выше рассматривался только случай квазипродольного распространения, причем разностью коэффициентов $\mu_e - \mu_o$ пренебрегалось. В работе [156б] рассмотрено поперечное распространение (угол $\chi = {}^1/_2\pi$) в плазме, причем отрицательная реабсорбция тоже оказалась возможной. В [160] получены выражения для μ_e и μ_o при любом угле χ между полем и лучом зрения. Коэффициенты μ_e могут оказаться отрицательными при любом χ, но, конечно, лишь для спектров $N_e(\mathscr{E})$ определенного типа и не во всей области частот. Кроме того, в [160] получено выражение для разности $\mu_e - \mu_o$ при квазипродольном распространении волн. Эта разность мала, так как

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \left\{ a \frac{\omega_H \omega_p^2}{\omega^3 (1 - n^2 v^2/c^2)} + b \frac{\omega_H}{\omega} + d \sqrt{1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}} \right\} \mu_{e,o}, \tag{10.51а}$$

где a, b и d — коэффициенты порядка единицы. В максимуме излучения

$$\omega \sim \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \left(1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \approx \omega_H \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \eta^{-3},$$

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \sqrt{1 - n^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

и, следовательно, при этом

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \left\{ a \frac{\omega_p^2 \mathscr{E}}{\omega^2 mc} \eta + b \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \eta^3 + d\eta \right\} \mu_{e,o}. \tag{10.51б}$$

Как ясно из условий (10.46а) и (10.46б) в области, где влияние плазмы существенно, но еще не слишком велико $(\omega_p^2/\omega^2)(\mathscr{E}/mc^2)^2 \sim 1$, $\eta \sim mc^2/\mathscr{E}$ и, следовательно, $|\mu_e - \mu_o| \sim mc^2/\mathscr{E}$. В широкой и наиболее важной области значений параметров, где $\omega_p^2/\omega^2 \lesssim mc^2/\mathscr{E}$, имеем

$$|\mu_e - \mu_o| \sim \eta = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

В большинстве случаев множитель η мал, так что даже при $|\mu_{e,o}| L \gg 1$ нелегко ожидать соблюдения условия $|\mu_e - \mu_o| L \gtrsim 1$. Если, тем не менее, это условие будет выполнено при от-

рицательном $\mu_{e,o}$, то в синхротронном излучении источника будет превалировать одна из волн, т. е. в данном случае должна наблюдаться полная круговая поляризация.

В приближении, в котором $\mu_e = \mu_o$ и излучательные способности $\varepsilon_e = \varepsilon_o$, круговая поляризация появиться не может. Однако линейная поляризация может меняться и в том случае, когда наличие плазмы не сказывается на поглощении и излучении волн. Именно, если не выполнено условие (10.36), то наблюдается не только вращение плоскости поляризации, но и деполяризация излучения. Дело в том, что под влиянием только фарадеевского вращения степень линейной поляризации уменьшается на множитель

$$(\sin [1/2 (k_e - k_o) L]) \cdot [1/2 (k_e - k_o) L]^{-1},$$

где $k_{e,o} = (\omega/c) n_{e,o}$ и L — размер излучающей области вдоль луча зрения (см., например, [56]). Степень круговой поляризации излучения от толстого слоя с $\mu > 0$ равна

$$\Pi_c = \frac{V}{I} = \frac{\mu_e - \mu_o + (\mu_o + \mu_e)\,\Pi_c^{(0)}}{\mu_e + \mu_o + (\mu_e - \mu_o)\,\Pi_c^{(0)}} \approx \frac{\mu_e - \mu_o}{2\mu} + \Pi_c^{(0)}, \quad (10.52)$$

где при переходе к последнему выражению принято, что

$$|\mu_e - \mu_o| \ll \mu_{e,o} \approx \mu \quad \text{и} \quad \Pi_c^{(0)} = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_e}{\varepsilon_o + \varepsilon_e} \ll 1.$$

Оценка $|\mu_e - \mu_o|$ уже была приведена (см. (10.51)); как ясно из (10.17), (10.18) и (10.28), в области применимости этих формул $(\mu_e - \mu_o)/2\mu \sim \Pi_c^{(0)}$. Вместе с тем сама формула (10.17) для μ_e была получена в предположении об игольчатом характере излучения, т. е. в пренебрежении членами порядка $mc^2/\mathscr{E}$. Между тем известно, что уже в вакууме $\Pi_c^{(0)} \sim mc^2/\mathscr{E}$ (см. гл. 5). Комбинируя разные оценки, приходим к выводу, что обычно (при $\mu > 0$) степени круговой поляризации $\Pi_c^{(0)}$ или Π_c малы и порядка $mc^2/\mathscr{E}$ или $\eta = \sqrt{(mc^2/\mathscr{E})^2 + \omega_p^2/\omega^2}$. Таким образом, появление круговой или эллиптической поляризации синхротронного излучения знаменательно, поскольку в простейших случаях это излучение всегда линейно поляризовано. Круговая или эллиптическая поляризация синхротронного излучения для совокупности излучающих электронов с квазиизотропным распределением может возникнуть либо в случае не слишком больших релятивистских энергий, либо при учете влияния анизотропии плазмы. Положение изменяется, если речь идет о синхрокомптоновском излучении (см. конец гл. 5 и цитированную там литературу).

В условиях отрицательной реабсорбции может, помимо изменений поляризации, сильно сказываться зависимость коэффициентов реабсорбции $\mu_{\perp,\parallel}$ или $\mu_{e,o}$ от угла χ между полем и

лучом зрения. В результате, если поле в источнике неоднородно, но не полностью хаотично, то при $\mu < 0$ преимущественно будет усиливаться излучение в направлениях с максимальным $|\mu|$. Поэтому при $|\mu|L > 1$ и особенно при $|\mu|L \gg 1$ отдельные области неоднородного источника будут выглядеть аномально ярко.

Выше мы смогли остановиться лишь на сравнительно небольшой части проблемы влияния холодной плазмы на синхротронное излучение и его реабсорбцию. В этой области нужно проанализировать еще целый ряд вопросов и возможностей (в первую очередь речь идет об отрицательной реабсорбции и поляризационных соотношениях в разных условиях и в применении к источникам различных типов).

Реабсорбция изгибного излучения рассмотрена в статье [161].

Глава 11

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Об учете пространственной дисперсии. Нормальные волны в анизотропной среде. Некоторые эффекты пространственной дисперсии в кристаллооптике. О поляритонах.

При использовании электродинамики сплошных сред мы считали выше, что диэлектрическая проницаемость либо постоянна, либо зависит только от частоты (учет частотной дисперсии). Известен, однако, довольно широкий круг явлений (особенно в физике плазмы, но кроме того, в физике металлов и в оптике), для анализа которых нужно принимать во внимание также пространственную дисперсию — зависимость проницаемости от волнового вектора. В настоящей главе будут рассмотрены как общие вопросы электродинамики сред с пространственной дисперсией, так и некоторые эффекты пространственной дисперсии в оптике. Ниже мы в значительной мере следуем статье [162]. Более детально электродинамика и кристаллооптика сред с пространственной дисперсией освещена в монографии [76], возможность отослать к которой позволяет нам почти не приводить в этом вопросе других литературных ссылок. Роли пространственной дисперсии в плазме мы коснемся в гл. 12.

Пространственная дисперсия появляется потому, что индукция $\mathbf{D}$ в какой-либо данной точке $\mathbf{r}$ определяется электромагнитным полем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не только в той же точке, но и в некоторой ее окрестности. Подробнее это будет пояснено несколько позже — после того как будут вновь приведены для удобства исходные уравнения поля и записано общее соотношение, связывающее $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в линейной электродинамике.

Итак, исходные уравнения поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho_{\text{ext}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — индукции электрического и магнитного полей (поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ не различаем, но, в отличие от других разделов пользуемся обозначением $\mathbf{B}$,

как принято в электродинамике сред с пространственной дисперсией), $\mathbf{j}_{ext}$ и ρ_{ext} — плотность тока и плотность заряда внешних источников. Индукция $\mathbf{D}$ определяется соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j},$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока, индуцированного полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$; иногда удобно ввести также поляризацию $\mathbf{P}$, причем $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

При наличии достаточно резких границ раздела необходимо использовать граничные условия, получающиеся из (11.1) в результате предельного перехода. Эти условия имеют вид ($\mathbf{n}$ — нормаль к границе раздела, направленная из среды *1* в среду *2*; индексы n и t соответствуют нормальной и тангенциальной компонентам)

$$\left.\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t}, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{i} + \mathbf{i}_{ext}), \\ B_{1n} = B_{2n}, \qquad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{ext}). \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Здесь $\mathbf{i}_{ext}$ и σ_{ext} — соответственно поверхностные плотности внешних токов и зарядов, а плотности $\mathbf{i}$ и σ можно выразить, в частности, через $\mathbf{D}$ путем интегрирования по толщине поверхностного слоя. Конкретно (см. [163—165]),

$$\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi}\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, dl, \quad \sigma = \frac{1}{4\pi}\int_1^2 \operatorname{div}[\mathbf{n}[\mathbf{D}\mathbf{n}]]\, dl.$$

Плотности $\mathbf{i}$ и σ отличны от нуля, вообще говоря, как раз при учете пространственной дисперсии, когда связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ содержит производные по координатам (см. ниже). Поэтому, если при пренебрежении пространственной дисперсией обычно полагают $\mathbf{i} = 0$ и $\sigma = 0$, то при ее учете для подобного предположения нет особых оснований. Заметим также, что при выводе граничных условий (11.2) предполагалось, что физические поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ на границе раздела не могут обращаться в бесконечность, в то время как индукция $\mathbf{D}$ может стремиться к бесконечности (последнее возможно, например, когда значение $\mathbf{D}$ определяется производными от $\mathbf{E}$ по нормали к границе раздела). Если плотность $\mathbf{i}$ пропорциональна δ-функции, то нельзя считать конечными и поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, но этой возможности мы касаться не будем.

Для получения уравнений (11.1) из микроскопических уравнений Максвелла нужно провести в этих микроуравнениях статистическое усреднение. Тем самым векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в (11.1) являются статистическими средними. Такие средние имеют вполне ясный смысл для среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Однако усреднение может производиться и в более общем случае (например, для метастабильных состояний, отвечающих перегреву, переохлаждению и т. п.).

В силу усреднения в (11.1) не учтены флуктуации, но средние поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ могут как угодно изменяться в пространстве и во времени — какое-либо дополнительное (помимо статистического) усреднение полей по $\mathbf{r}$ не только не необходимо, но и, вообще говоря, неосуществимо в электродинамике сред, последовательно учитывающей пространственную дисперсию. Аналогично, усреднение по t, вообще говоря, невозможно при учете частотной дисперсии.

Система уравнений (11.1) не является полной и, если угодно, она бессодержательна до тех пор, пока не указано соотношение, позволяющее выразить величину $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ через $\mathbf{E}$. В рамках линейной электродинамики это соотношение (его иногда называют материальным уравнением или уравнением связи) можно записать в общем виде

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'). \tag{11.3}$$

В (11.3) учтен принцип причинности, в соответствии с которым индукция в момент времени t определяется только полем в прошлом и настоящем, т. е. в моменты $t' \leqslant t$. Если свойства среды неизменны во времени, то ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}$ может зависеть лишь от разности $\tau = t - t'$. Аналогично, если среда может считаться пространственно однородной, то $\hat{\varepsilon}_{ij}$ зависит только от разности $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. В таких средах соотношение (11.3) особенно просто записывается для полей, имеющих вид плоских волн, т. е. для полей вида

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]. \tag{11.4}$$

Подставляя (11.4) в (11.3), находим

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \tag{11.5}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \exp[-i(\mathbf{kR} - \omega\tau)] \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \mathbf{R}). \tag{11.6}$$

Очевидно, для полей, произвольным образом зависящих от $\mathbf{r}$ и t, величины $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$ имеют смысл соответствующих фурье-компонент, например,

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int E_i(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{kr} - \omega t)] d\mathbf{r}\, dt.$$

Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ полностью описывает не только электрические, но и магнитные свойства среды, т. е. учитывает влияние индукции $\mathbf{B}$ на $\mathbf{D}$ (или, что то же, на индуцированный ток $\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} - \mathbf{E})$). В самом деле, уравнение поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

для фурье-компонент имеет вид

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})];$$

поэтому можно считать, что в (11.3), а значит, и в (11.5), (11.6) при учете пространственной дисперсии принято во внимание также и влияние $\mathbf{B}$ на $\mathbf{D}$. Если же пространственной дисперсией пренебрегают, т. е. полагают $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k} \to 0) = \varepsilon_{ij}(\omega)$, то для неферромагнетиков в оптической части спектра нужно считать, что $B_i = \mu_{ij} H_j = H_i$, т. е. $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Для ферромагнетиков тензор $\mu_{ij}(\omega)$ даже в оптике, не говоря об области низких частот, уже не всегда сводится к δ_{ij}. На низких частотах при $k \to 0$ введение тензора магнитной проницаемости μ_{ij} при учете пространственной дисперсии необходимо и для пара- и для диамагнетиков.

При низких частотах (в частности, для статических полей) и длинных волнах (предел $k \to 0$ отвечает однородным полям) именно введение магнитной проницаемости $\mu_{ij}(\omega)$, наряду с $\varepsilon_{ij}(\omega)$, удобнее, чем использование одного тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Этого вопроса нам будет удобнее коснуться в гл. 12 в связи с формулой (12.39). Иногда вместо тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ удобнее использовать тензор, ему обратный, т. е. тензор $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$. В этом случае, очевидно,

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) D_j(\omega, \mathbf{k}). \tag{11.7}$$

В рамках феноменологической теории тензор комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ предполагается известным. Его вычисление для кристалла, равно как и для любой другой конденсированной среды, является задачей микротеории.

Как легко усмотреть из соотношений (11.3), (11.5) и (11.6), зависимость тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$, т. е. пространственная дисперсия, связана как раз с тем, что индукция в точке $\mathbf{r}$ определяется значением напряженности электрического поля не только в точке $\mathbf{r}$, но и в некоторой ее окрестности. Иными словами, пространственная дисперсия обусловлена нелокальностью связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Аналогично, зависимость $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от ω (временна́я или частотная дисперсия) обусловлена нелокальностью связи (11.3) во времени. Поскольку собственные частоты среды ω_i обычно попадают в рассматриваемый интервал частот ω, отношение ω_i/ω порядка единицы и временна́я дисперсия, вообще говоря, велика. Иное положение имеет место в случае пространственной дисперсии для диэлектриков. Это связано с тем, что для диэлектриков длины волн $\lambda = \lambda_0/n = 2\pi c/n\omega$ в оптическом диапазоне (не говоря уже о более низких частотах) значительно превосходят характерный размер окрестности точки $\mathbf{r}$, которая вносит основной вклад в интеграл (11.3). В самом деле, в диэлектриках этот размер порядка атомных размеров или постоянной решетки $a \sim 10^{-8}$—10^{-7} см, так что отношение $a/\lambda \sim$

$\sim 10^{-3}$, т. е. очень мало. Вместе с тем, например, в изотропной плазме характерным размером a, определяющим величину пространственной дисперсии, является дебаевский радиус $r_D = \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$, а в проводящей среде при учете соударений также длина свободного пробега l. Поэтому для этих сред пространственная дисперсия мала, вообще говоря, лишь при выполнении условий $r_D \ll \lambda$ и $l \ll \lambda$, которые могут не соблюдаться в ряде вполне реальных случаев (см., в частности, гл. 12). Малость пространственной дисперсии существенно упрощает анализ обусловленных ею оптических явлений, что и будет ниже использовано.

Сделаем теперь несколько замечаний относительно общих свойств тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Этот тензор является, вообще говоря, комплексным даже при вещественных ω и $\mathbf{k}$. Вместе с тем вещественное поле $\mathbf{E}$ в среде приводит к вещественной индукции $\mathbf{D}$. Отсюда следует, что ядро $\varepsilon_{ij}(\tau, \mathbf{R})$ в (11.6) вещественно и, следовательно, в общем случае (для комплексных ω и $\mathbf{k}$)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^*_{ij}(-\omega^*, -\mathbf{k}^*), \tag{11.8}$$

или, что то же

$$\varepsilon_{ij}(\omega^*, \mathbf{k}^*) = \varepsilon^*_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}). \tag{11.9}$$

Использование принципа симметрии кинетических коэффициентов (см. §§ 82, 88 в [44]) приводит к другому соотношению:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_{\text{ext}}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{B}_{\text{ext}}); \tag{11.10}$$

здесь $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ — постоянная во времени индукция магнитного поля, отличная от нуля при наличии внешнего магнитного поля или магнитной структуры (ферро- и антиферромагнетики). Для простоты будем в обоих этих случаях называть $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ индукцией внешнего магнитного поля, что и отражено в обозначениях.

Для тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{\text{ext}})$ доказательство соотношения (11.10) приведено в [44]. Обобщение на случай наличия пространственной дисперсии не связано с принципиально новыми моментами (поскольку векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ одинаковым образом ведут себя при изменении знака времени, переход от соотношения $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{\text{ext}}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{B}_{\text{ext}})$ к (11.10) может считаться почти очевидным). Заметим лишь, что обычно соотношения (11.10) доказываются только для вещественных ω и $\mathbf{k}$. Однако в области аналитичности, о которой речь пойдет ниже, эти соотношения сохраняются и при комплексных ω и $\mathbf{k}$.

Среда называется негиротропной, если при всех ω и $\mathbf{k}$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}). \tag{11.11}$$

Аргумент $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ в (11.11) опущен, так как во внешнем магнитном поле тензор ε_{ij}, строго говоря, всегда несимметричен (он равен ε_{ji} лишь при замене $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ на $-\mathbf{B}_{\text{ext}}$; здесь имеется в виду именно внешнее поле, и мы не касаемся случая антифер-

ромагнетиков в отсутствие внешнего поля, когда тензор ε_{ij} может оставаться симметричным даже без замены $\mathbf{B}_{ext}$ на $-\mathbf{B}_{ext}$). Поэтому можно было бы говорить о гиротропии, вызванной магнитным полем. Но чтобы не создавать путаницы, назовем такую гиротропию магнитной активностью, а соответствующую среду — магнитоактивной (см. гл. 12). Гиротропной же будем ниже называть только такую среду, для которой тензор ε_{ij} несимметричен лишь при учете пространственной дисперсии.

Из (11.10), (11.11) ясно, что для негиротропной среды

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}). \tag{11.12}$$

Таким образом, в гиротропной среде должно существовать по крайней мере одно направление, не эквивалентное прямо противоположному направлению. Другими словами, только среда без центра симметрии может быть гиротропной. Обратное заключение неверно — среда может не иметь центра симметрии, но быть негиротропной, поскольку соблюдение соотношения (11.12) может обеспечиваться в силу наличия других элементов симметрии.

В отсутствие пространственной дисперсии условие (11.12) выполняется автоматически и среда всегда негиротропна. Таким образом, гиротропия является эффектом пространственной дисперсии, причем наиболее важным и давно известным оптическим эффектом такой природы. Однако и в отсутствие пространственной дисперсии, но при $\mathbf{B}_{ext} \neq 0$, конечно, возникает магнитная активность, поскольку

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{B}_{ext}), \tag{11.13}$$

и тензор ε_{ij} при данных ω и $\mathbf{B}_{ext}$, вообще говоря, несимметричен (в некоторых случаях $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{B}_{ext}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{B}_{ext})$, что может иметь место в антиферромагнетиках в отсутствие внешнего магнитного поля; в антиферромагнетиках $\mathbf{B}_{ext}$ есть среднее статистическое намагничение в данном микрообъеме кристалла, исчезающее лишь в среднем по всей элементарной ячейке магнитной структуры кристалла).

Определение гиротропной среды как среды с несимметричным тензором $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, конечно, несколько формально. Из дальнейшего, однако, будет ясно, что именно несимметричность тензора ε_{ij} приводит к тем физическим особенностям (например, к вращению плоскости поляризации в нормальных волнах в отсутствие поглощения), которые отличают гиротропные среды от негиротропных.

Часто удобно разделить тензор ε_{ij} на вещественную и мнимую части $\operatorname{Re}\varepsilon_{ij}$ и $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}$, а также на два эрмитовых тензора ε'_{ij} и ε''_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \operatorname{Re}\varepsilon_{ij} + i \operatorname{Im}\varepsilon_{ij}, \tag{11.14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = (\varepsilon'_{ji})^*, \quad \varepsilon''_{ij} = (\varepsilon''_{ji})^*, \tag{11.15}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение; отметим, что вместо ε''_{ij} иногда вводят эрмитов тензор проводимости σ_{ij}, определяемый как

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}. \tag{11.16}$$

Используется, правда, и комплексный тензор проводимости $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij} = -i\omega(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})/4\pi$, и тогда в (11.16) должна фигурировать величина σ'_{ij}.

При неучете пространственной дисперсии и в отсутствие постоянного магнитного поля, как ясно из (11.12) и (10.13), тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ симметричен

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}(\omega). \tag{11.17}$$

Как в этом, так и в более общем случае (11.11), очевидно,

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\varepsilon_{ij} = \varepsilon''_{ij}.$$

Из требований, связанных с принципом причинности, следует, что функции $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в равновесной (или по крайней мере в устойчивой) среде не имеют особенностей в верхней *полуплоскости и на вещественной оси комплексной переменной* ω. В отношении тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ сказанное справедливо лишь при $k = 0$ и в окрестности этой точки, т. е. при малых k [166]. Последнее означает, что длина волны $\lambda = 2\pi/k$ велика по сравнению с характерным размером a, роль которого в диэлектрике играет межатомное расстояние. В результате в кристаллооптике, где соблюдается указанное ниже условие (11.20) аналитические свойства $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно считать одинаковыми. Возможное различие между $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при достаточно больших k физически обусловлено тем, что $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ определяет поле $\mathbf{E}$ по индукции $\mathbf{D}$ (см. (11.7)), которой можно управлять, изменяя плотность внешних зарядов ρ_{ext}. В результате индукцию $\mathbf{D}$ можно считать «причиной», а поле $\mathbf{E}$ — «следствием». Обратное же при больших k, вообще говоря, неверно, поскольку изменения ρ_{ext} и $\mathbf{j}_{\text{ext}}$, а также полей вне среды не позволяют произвольным образом изменять поле $\mathbf{E}$ в среде (подробнее см. [166]). Используя указанные аналитические свойства функций $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ (мы считаем их здесь одинаковыми), удается выявить ряд общих соотношений и свойств этих функций. Важнейшими из них являются дисперсионные соотношения, связывающие $\operatorname{Re}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ с $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Учет пространственной дисперсии вносит здесь мало нового — дело обычно сводится к тем же соотношениям, что и для функций $\varepsilon_{ij}(\omega)$, но с введением в них волнового вектора $\mathbf{k}$ в качестве

параметра. Поэтому мы не будем останавливаться на дисперсионных соотношениях — в отсутствие пространственной дисперсии в применении к изотропной среде это подробно сделано в [44]. Обобщение на анизотропные среды и среды с пространственной дисперсией можно найти в § 1 книги [76].

Важный раздел электродинамики сплошных сред посвящен исследованию распространения электромагнитных волн, созданных источниками, находящимися вне рассматриваемой среды. В частности в кристаллооптике обычно обсуждаются именно задачи такого типа, причем чаще всего речь идет даже о более узкой задаче — распространении плоских монохроматических волн, в которых электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]; \tag{11.18}$$

здесь $\mathbf{E}_0$ — комплексный вектор, не зависящий от координат $\mathbf{r}$ и времени t, $\mathbf{k}$ — волновой вектор и ω — частота.

Нужно иметь в виду, что выражение (11.18) с $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ не является самым общим — иногда нужно рассматривать также поля типа (11.18), но с $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{kr})\,\mathbf{E}_{00}$, $\mathbf{E}_{00} = \text{const}$. Необходимость в этом возникает, однако, лишь очень редко (случай сингулярных оптических осей в кристаллах низших сингоний и некоторые другие; см. § 2 в [76]). Поэтому ниже ограничимся выражениями вида (11.18).

Решения типа (11.18) удовлетворяют однородным уравнениям электромагнитного поля, т. е. уравнениям (11.1) без внешних (заданных) токов и зарядов $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ и ρ_{ext}, только если $\mathbf{k}$ и ω связаны между собой. Эта связь задается дисперсионным уравнением и позволяет, например, выразить $\mathbf{k}$ через ω:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\,\tilde{n}(\omega, \mathbf{s})\,\mathbf{s}. \tag{11.19}$$

Здесь $\tilde{n} = n + i\varkappa$ — комплексный показатель преломления, n — показатель преломления, $\varkappa$ — показатель поглощения ($\mu = (2\omega/c)\varkappa$ — коэффициент поглощения по интенсивности) и $\mathbf{s}$ — единичный вещественный вектор (рассматриваем сейчас только однородные плоские волны, в которых $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$ с коллинеарными векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$; кроме того, в соответствии с встречающейся в оптике постановкой задачи частота ω считается вещественной). Дисперсионное уравнение определяет функцию $\tilde{n}$ через коэффициенты, фигурирующие в уравнениях поля, т. е. через тензор проницаемости ε_{ij}, причем каждому значению ω и $\mathbf{s}$ отвечают несколько значений $\tilde{n} = \tilde{n}_l$, где индекс l соответствует тому или иному решению — нормальной волне. Нормальные волны (при заданных ω и $\mathbf{s}$, но разных l) различаются также своей поляризацией, т. е. вектором $\mathbf{E}_{0l}$ в (11.18), который определяется (с точностью до постоянного множителя) из уравнений поля.

Формально говоря, задача кристаллооптики*) заключается, таким образом, в первую очередь в исследовании функций $\tilde{n}_l(\omega, \mathbf{s})$ и $\mathbf{E}_{0l}(\omega, \mathbf{s})$. В свою очередь вся информация об этих функциях содержится, если не говорить об уравнениях поля, в комплексном тензоре диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Если при этом пренебречь пространственной дисперсией — считать, что $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$, то дело сводится к обычно излагаемой «классической» кристаллооптике. Тем самым, конечно, классическая кристаллооптика содержится в кристаллооптике с пространственной дисперсией как частный (или предельный) случай.

В оптике практически непоглощающих или слабопоглощающих кристаллов пространственная дисперсия слаба в том смысле, что ее величина определяется, как уже упоминалось, малым параметром

$$ka \sim \frac{a}{\lambda} = \frac{an}{\lambda_0} \ll 1. \tag{11.20}$$

Именно по этой причине пространственной дисперсией в кристаллооптике обычно можно пренебречь, если речь не идет о качественно новых эффектах (гиротропия, оптическая анизотропия кубических кристаллов, появление дополнительных нормальных волн, отличная от нуля групповая скорость для продольных волн и т. п.). Кроме того, наличие малого параметра позволяет сильно упростить и конкретизировать исследование влияния пространственной дисперсии.

Учет пространственной дисперсии в кристаллооптике и вообще в электродинамике не является чем-то принципиально новым и может быть прослежен вплоть до прошлого века. Однако лишь лет 15—20 назад кристаллооптика с пространственной дисперсией возникла в качестве некоторой более или менее самостоятельной области исследования. Одновременно и еще более ярко выраженным образом учет пространственной дисперсии стал органической составной частью современной электродинамики сплошных сред, физики плазмы, теории твердого тела, теории металлов и т. д. Тем самым современное построение и изложение кристаллооптики, не говоря уже о физике плазмы, должно базироваться на электродинамике с учетом пространственной дисперсии. Другими словами, нужно исходить из связей (11.5), получить целый ряд общих результатов, а затем уже в качестве частного (пусть и самого важного) случая переходить к изложению классической кристаллооптики. Но в оптической литературе поступают, как правило, все еще по-старому — развивают сначала, а часто даже исключительно, классическую кристаллооптику. Именно по этой причине на кри-

*) Пользуемся здесь этим термином для краткости и тогда, когда речь идет и о более общем случае — распространении волн в произвольной (вообще говоря, анизотропной) среде.

сталооптике с учетом пространственной дисперсии и представляется целесообразным остановиться в настоящей книге.

Перейдем к нахождению всех нормальных электромагнитных волн типа (11.18) в безграничной однородной среде, характеризуемой тензором $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Такие волны удовлетворяют уравнениям (11.1) с $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$, $\rho_{\text{ext}} = 0$, из которых получается волновое уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \tag{11.21}$$

Для плоских волн (11.18) уравнение (11.21) принимает вид

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{\omega^2}\{k^2\mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE})\}. \tag{11.22}$$

Подставляя сюда связь (11.5), получаем

$$\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2\delta_{ij} + k_i k_j\right\} E_j = 0. \tag{11.23}$$

Эта алгебраическая система уравнений имеет нетривиальное решение $\mathbf{E} \neq 0$, если ее детерминант равен нулю, т. е. при условии

$$\left|\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2\delta_{ij} + k_i k_j\right| = 0. \tag{11.24}$$

Уравнение (11.24) часто называют дисперсионным — оно устанавливает связь между ω и $\mathbf{k}$ для нормальных волн, и его решения можно записать в виде

$$\omega_l = \omega_l(\mathbf{k}); \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.25}$$

или же в форме (11.19), т. е. выражая $\mathbf{k}$ через ω,

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\tilde{n}_l(\omega, \mathbf{s})\,\mathbf{s}, \quad \tilde{n}_l^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2}, \tag{11.26}$$

где индекс l отвечает различным нормальным волнам. Уравнение (11.24) можно также записать в виде уравнения для $\tilde{n}^2(\omega, \mathbf{s})$

$$(\varepsilon_{ij}s_is_j)\,\tilde{n}^4 - \{(\varepsilon_{ij}s_is_j)\,\varepsilon_{kk} - (\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}s_is_j)\}\,\tilde{n}^2 + |\,\varepsilon_{ij}\,| = 0, \tag{11.27}$$

где $\varepsilon_{kk} = \operatorname{Sp}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, а различные решения этого уравнения как раз и отмечаем индексом l.

При неучете пространственной дисперсии, т. е. при $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$, уравнение (11.27) часто называют уравнением Френеля, и оно лежит в основе классической кристаллооптики. В этом случае уравнение (11.27) всегда имеет лишь два решения $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$, откуда ясно, что в среде при произвольных ω и $\mathbf{s}$ могут распространяться только две нормальные волны, у которых вектор $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{s})$ имеет поперечную составляющую $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - (\mathbf{sE})\mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$. Волны с $E_\perp = 0$, т. е. продольные волны,

могут в отсутствие пространственной дисперсии существовать лишь для дискретного набора частот ω. Действительно, для таких волн $\mathbf{D}=0$ (см. (11.22)), и так как имеет место связь $D_i=\varepsilon_{ij}E_j$, то приходим к выводу, что при $\mathbf{D}=0$ и $\mathbf{E}\neq 0$ для продольных волн величины ω и $\mathbf{k}$ в общем случае удовлетворяют уравнению

$$|\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})|=0. \tag{11.28}$$

Нужно иметь в виду, однако, что выполнение этого равенства лишь необходимо, но еще недостаточно для появления продольных волн. Уравнение (11.28), получающееся также из (11.24), при неучете пространственной дисперсии принимает вид

$$|\varepsilon_{ij}(\omega)|=0. \tag{11.29}$$

Частоты $\omega\equiv\omega_{\parallel}$, удовлетворяющие уравнению (11.29), суть частоты, которыми могут обладать продольные волны. Для изотропной среды из (11.29) получаем условие

$$\varepsilon(\omega)=0. \tag{11.30}$$

Разумеется, к этому весьма важному условию можно прийти сразу же, рассматривая изотропную среду без пространственной дисперсии, когда $\mathbf{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega)$. Поскольку в продольной волне по определению $\mathbf{E}_{\parallel}=E\mathbf{k}/k$, то в ней $\mathbf{D}=0$ (см. (11.22)) и поле $\mathbf{E}$ может быть отлично от нуля только при условии (11.30). При учете же пространственной дисперсии уравнение (11.28) дает для продольных волн дисперсионную зависимость $\omega_{\parallel}=\omega_{\parallel}(\mathbf{k})$.

В кристаллооптике основную роль играют волны с $\mathbf{E}_{\perp}\neq 0$, поскольку именно эти волны наиболее интенсивно возбуждаются светом. Для таких волн при учете пространственной дисперсии уравнение (11.27) может иметь в некоторых спектральных областях не два, а больше решений. Однако даже в том случае, когда новые решения («дополнительные волны») не возникают, пространственная дисперсия приводит к ряду новых явлений, среди которых наиболее важными являются естественная оптическая активность (гиротропия), а также оптическая анизотропия кубических кристаллов (при неучете пространственной дисперсии кубические кристаллы, как известно, оптически изотропны). Все эти явления уже упоминались и обсуждаются ниже, причем в рамках феноменологической теории для их анализа необходимо знание зависимости тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ при малых $\mathbf{k}$.

Прежде чем перейти к этому вопросу, сделаем ряд замечаний. Так, нужно напомнить, что при рассмотрении зависимости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ следует иметь в виду, что соотношение (11.5), связывающее величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ при одном и том же значении $\mathbf{k}$, было выше получено благодаря допущению о пространственной однородности среды. Кристаллы же в действительности не являются пространственно однородными средами, поскольку, на-

пример, узлы решетки не эквивалентны другим точкам. Поэтому использование тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, введенного в предположении об однородности среды, в применении к кристаллам заведомо должно быть ограничено. Анализ этого вопроса (см. [76]) позволяет сделать вывод о том, что в кристаллах использование соотношения (11.5) является обоснованным, если только волновой вектор $\mathbf{k}$ мал по сравнению с базисными векторами элементарной ячейки обратной решетки, т. е. если $k \ll 1/a$ или $\lambda \gg a$, где a — постоянная решетки. Эти неравенства, ясные уже и из чисто качественных соображений, заведомо выполняются в оптическом диапазоне длин волн, где $a/\lambda \sim 10^{-3}$. Поэтому ниже мы в кристаллооптике пользуемся тензором $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ без ограничений.

Другой и совершенно независимый вопрос об условиях применимости материального уравнения (11.5) при учете пространственной дисперсии возникает при переходе от кристаллов бесконечно протяженных, что, разумеется, является абстракцией (которая, однако, была использована при переходе от (11.3) к (11.5), (11.6)), к кристаллам конечных размеров. Поскольку соотношение (11.3) является интегральным, то в нем учтено наличие границ кристалла и содержатся точные граничные условия для полей. Если точка $\mathbf{r}$ удалена от поверхности кристалла на расстояния, значительно превышающие размер R окрестности, вносящей основной вклад в величину индукции, то ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}$ становится равным ядру $\hat{\varepsilon}_{ij}$ в (11.6), используемому для бесконечно протяженного кристалла. Для таких точек, очевидно, электрическое поле в виде (11.4) приводит к появлению индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\omega, \boldsymbol{k})\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, также имеющей вид плоской волны, причем соотношение между амплитудами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ определяется как раз выражением (11.5). Из сказанного, таким образом, следует, что использовать материальное уравнение в виде (11.5) можно, если толщина кристалла велика по сравнению с R. Обычно в диэлектриках величина $R \sim a$, где a — постоянная решетки.

Нужно заметить, кроме того, что при рассмотрении дополнительных волн и вместе с тем использовании тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, а не общей интегральной связи (11.3), граничных условий (11.2) недостаточно. Дополнительные граничные условия в принципе могут быть получены из (11.3), но обычно они вводятся менее строго из различных соображений (см. § 10 в [76]). В связи с вопросом о граничных условиях в электродинамике сред с пространственной дисперсией нужно сделать еще одно замечание, которое следует иметь в виду и при отсутствии дополнительных волн. Речь идет о необходимости при конкретизации граничных условий (11.2) учитывать возможную роль высших производных. Поясним это на примере уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. Для получения граничного условия на границе между средами 1 и 2 про-

изводят предельный переход — интегрируют уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial z} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

по направлению, перпендикулярному размытой границе раздела. Выбирая это направление за ось z и производя переход к резкой границе раздела, получаем условие

$$D_{2z} - D_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z} - \varepsilon_1 E_{1z} = 0, \tag{11.31}$$

где для перехода ко второму выражению положено $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, причем в первой среде $\varepsilon = \varepsilon_1$ и во второй среде $\varepsilon = \varepsilon_2$. Предположим теперь, что

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \delta_{\mathrm{I}} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} (\delta_{\mathrm{II}} \mathbf{E}), \tag{11.32}$$

причем в однородной среде, конечно, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\delta_{\mathrm{I}} + \delta_{\mathrm{II}}) \operatorname{rot} \mathbf{E}$; материальное уравнение (11.32) отвечает связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в случае простейшей (изотропной) гиротропной среды.

Поступая теперь как обычно, получаем граничное условие

$$D_{2n} - D_{1n} = \delta_{\mathrm{II},\,2} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_2 - \delta_{\mathrm{II},\,1} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_1 \tag{11.33}$$

или

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} + \delta_{\mathrm{I},\,2} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_2 - \delta_{\mathrm{I},\,1} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}_1 = 0, \tag{11.34}$$

где вместо индекса z поставлен более общий индекс n, характеризующий направление нормали. Появление в (11.33), (11.34) дополнительных членов (по сравнению с условием (11.31)) объясняется, очевидно, недопустимостью при использовании связи (11.32) пренебрегать интегралами $\int_0^l \frac{\partial D_x}{\partial x}\, dz$ и $\int_0^l \frac{\partial D_y}{\partial y}\, dz$ даже при толщине переходного слоя между средами $l \to 0$.

В оптическом диапазоне, где пространственная дисперсия мала (в (11.32) это означает, что $\delta \sim a \ll \lambda$), обобщение граничных условий типа (11.33), по-видимому, не представляет особого интереса в силу необходимости и при пренебрежении пространственной дисперсией несколько усложнить граничные условия (11.31) для учета нерезкости границы двух сред, присутствия на этой границе загрязнений и т. д. Однако в принципе, а на практике для сред с сильной пространственной дисперсией, нужно считаться с возможным изменением даже привычных граничных условий типа (11.31). Если граничные условия в электродинамике записываются в форме (11.2), то сказанное можно выразить в виде утверждения о необходимости уточнения выражений для поверхностных плотностей $\mathbf{i}$ и σ, поскольку при учете пространственной дисперсии никогда нельзя, вообще говоря, считать, что $i = 0$ и $\sigma = 0$ (см. (11.2) и (11.33), (11.34)).

Сделаем еще одно замечание методического характера, связанное со следующим вопросом, который часто задают. Дисперсионное уравнение связывает $\mathbf{k}$ с ω и, следовательно, $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$

фактически зависит только от ω. Как же отличить пространственную дисперсию от частотной? Ответ заключается в том, что тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ вводится (скажем, в (11.5)) отнюдь не для нормальных волн, для которых $\mathbf{k}$ и ω связаны между собой, а для произвольного электромагнитного поля, имеющего источники (см. (11.1)). В таком поле волновой вектор $\mathbf{k}$ и частота ω совершенно независимы. Рассмотрим, например, среду в поле типа $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr})$ с произвольным $\mathbf{k}$ и частотой $\omega = 0$. Такое поле порождает индукцию $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(i\mathbf{kr})$, которая связана с полем $\mathbf{E}$ соотношением (11.5), где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})$. Ситуация аналогична для любой частоты ω. Отсюда, между прочим, ясно также, что именно тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, а не показатель преломления $\tilde{n}(\omega, \mathbf{s})$ является фундаментальной величиной, определяющей электродинамические свойства среды.

Энергетические соображения в кристаллооптике обычно не используются или, во всяком случае, имеют второстепенное значение. Поэтому не будем здесь сколько-нибудь подробно останавливаться на этой стороне дела (см. § 3 в [76]; см. также гл. 13 настоящей книги) и ограничимся только обсуждением одного вопроса.

Из уравнений поля (11.1) обычным образом следует теорема Пойнтинга:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EB}] - \mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E}. \qquad (11.35)$$

При учете частотной и особенно пространственной дисперсии, а также поглощения использование и интерпретация соотношения (11.35), вообще говоря, отнюдь не очевидны. Та же простота, к которой привыкли при пренебрежении дисперсией и поглощением (когда полагают, скажем, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и получают выражение для плотности энергии $\varepsilon E^2/8\pi$), весьма обманчива, поскольку при учете дисперсии и (или) поглощения ситуация изменяется. Более подробный разбор этого вопроса можно найти, как указывалось выше, в § 3 монографии [76] (см. также, например, [44, 84]). Сейчас же приведем пример среды без частотной дисперсии. Именно, рассмотрим гиротропную среду, в которой $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ связаны соотношением (11.32), причем ε и $\delta_{\text{I, II}}$ не зависят от частоты. Тогда (11.35) принимает вид ($\delta = \delta_{\text{I}} + \delta_{\text{II}}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon E^2 + B^2 + \delta\,(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{8\pi}\right\} = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\left\{[\mathbf{EB}] - \frac{\delta}{2c}\left[\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]\right\} +$$
$$+ \operatorname{grad}(2\delta_{\text{II}} - \delta)\left[\frac{\mathbf{E}}{8\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] - \mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E}. \qquad (11.36)$$

Из этого выражения видно, во-первых, что учет пространственной дисперсии, когда $\delta \neq 0$, приводит к появлению добавочного члена $\frac{\delta\,(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{8\pi}$ в выражении для плотности энергии и

члена $-\frac{\delta}{2c}\left[\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$ в выражении для плотности потока энергии. Во-вторых, в (11.36) фигурирует член $A=\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}(2\delta_{II}-\delta)\times$ $\times\left[\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$, пропорциональный $\operatorname{grad}(2\delta_{II}-\delta)=\operatorname{grad}(\delta_{II}-\delta_{I})$ и, таким образом, отличный от нуля (локализованный) лишь близ границы раздела между средами. Если $A\neq 0$, что имело бы место при $\delta_I\neq\delta_{II}$, на границе раздела происходит выделение или поглощение энергии. Результат, конечно, необычный, но в принципе еще возможный, например при возбуждении каких-то поверхностных волн. Тем не менее появление члена A представляется подозрительным и возникает вопрос, не исчезает ли он в общем случае в силу соблюдения условия

$$\delta_I=\delta_{II}={}^1/_2\delta. \tag{11.37}$$

Условие (11.37) и условие, обобщающее его на случай анизотропной среды, считались иногда вытекающими из требования, чтобы соотношение Пойнтинга (11.36) имело вид закона сохранения энергии в обычной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{S}=0,$$

где w — плотность энергии и $\mathbf{S}$ — плотность потока энергии. Подобная аргументация, однако, недостаточна при учете дисперсии и поглощения. Тем не менее условие (11.37) справедливо в общем виде, ибо вытекает из принципа симметрии кинетических коэффициентов [167]. Этот пример представляется достаточно показательным и полезным (во всяком случае автор настоящей книги считал особенно уместным его привести, поскольку сам проявил здесь известное непонимание).

Анализ граничных задач и конкретных граничных условий в средах с пространственной дисперсией еще далеко не завершен. Это обстоятельство не препятствует, к счастью, возможности исследования целого ряда вопросов на основе использования тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ или же родственных тензоров. Так, поскольку для нормальных волн (и вообще в отсутствие источников) $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$, в кристаллооптике вместо тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ иногда пользуются так называемым поперечным тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\perp, ij}(\omega, \mathbf{k})$. Этот тензор связывает в нормальных волнах вектор индукции с поперечной составляющей $\mathbf{E}_\perp$ поля $\mathbf{E}$, т. е.

$$D_i(\omega, \mathbf{k})=\varepsilon_{\perp, ij}(\omega, \mathbf{k})E_{\perp, j}(\omega, \mathbf{k}). \tag{11.38}$$

Ниже мы тензором $\varepsilon_{\perp, ij}$ пользоваться не будем *); его связь с тензором ε_{ij} выяснена, например, в [76].

*) Продольность и поперечность величин мы здесь отмечаем соответственно индексам $\parallel$ и $\perp$. Столь же часто используются индексы l и tr (в частности, так будем поступать в гл. 12; в настоящей главе в связи с обилием индексов это было бы неудобно).

Благодаря тому, что в оптической области для кристаллов пространственная дисперсия слаба (соблюдается условие (11.20)), практически во всех известных случаях можно вместо сравнительно сложной функции от $\mathbf{k}$ (какой обычно является тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$) пользоваться разложением тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ или $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ в ряд по $\mathbf{k}$ с сохранением двух — трех членов. В теории оптической активности это обстоятельство было известно уже давно, причем в таком разложении в ряд достаточно, вообще говоря, сохранить лишь линейные по $\mathbf{k}$ слагаемые, так что *)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega) k_l. \tag{11.39}$$

При более общем рассмотрении можно вместо (11.39) использовать разложения

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega) k_l + \alpha_{ijlm}(\omega) k_l k_m \tag{11.40}$$

или аналогично для обратного тензора —

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) + i\delta_{ijl}(\omega) k_l + \beta_{ijlm}(\omega) k_l k_m, \tag{11.41}$$

где $\mathbf{k} = (\omega/c)\tilde{n}\mathbf{s}$, $\tilde{n} = n + i\varkappa$ — комплексный показатель преломления для волн с частотой ω, распространяющихся в направлении $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$.

Использование тензоров ε_{ij} и ε_{ij}^{-1} как в общем виде, так и в форме разложений (11.40) и (11.41) в широких пределах эквивалентно, и выбор одного из них определяется соображениями удобства. Исключение составляют случаи, когда некоторые компоненты тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega)$ или $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ стремятся к бесконечности (сильно возрастают). Например, если какая-то компонента $\varepsilon_{ij}(\omega)$ стремится к бесконечности, то разложение (11.40) для соответствующей компоненты $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ теряет смысл, если при этом обращаются в бесконечность также коэффициенты $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$ и т. д. В таком случае, очевидно, следует использовать разложение для тензора $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$, которое при уменьшении $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ становится особенно эффективным. Аналогично, в области сильного возрастания компонент $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ нужно пользоваться разложением (11.40), а не (11.41).

Проиллюстрируем сказанное на элементарном примере, выбирая тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\delta_{ij},$$

---

*) Для некоторых кристаллов (кристаллические классы C_{3v}, C_{4v}, C_{3h}, D_{3h}), несмотря на отсутствие центра инверсии, тензор $\gamma_{ijl} = 0$. В подобных случаях все вращение плоскости поляризации определяется членами разложения вида $i\gamma_{ijlmn}k_l k_m k_n$, опущенными в (11.39). Кроме того, вблизи частот квадрупольных линий поглощения коэффициенты $\gamma_{ijl}(\omega)$ не имеют резонансного характера, тогда как коэффициенты $\gamma_{ijlmn}(\omega)$ могут резонансным образом зависеть от ω. В этом случае роль опущенных в (11.39) слагаемых возрастает (см. [76], § 6.2).

где

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \frac{a}{\omega^2 - \omega_i^2 + \mu k^2}.$$

Если эту функцию $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ разложить в ряд по k^2, то фактически это будет разложением по степеням отношения $\mu k^2/(\omega^2 - \omega_i^2)$. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{a}{\omega^2 - \omega_i^2},$$

то при $\omega \to \omega_i$, когда $\varepsilon(\omega) \to \infty$, будут обращаться в бесконечность также и другие коэффициенты разложения (11.40). В то же время для тензора $\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ разложение (11.41) идет фактически по степеням отношения $\mu k^2/\{(\omega^2 - \omega_i^2)\varepsilon_0 - a\}$, так что при $\omega \to \omega_i$ коэффициенты разложения в (11.41) остаются конечными.

В дальнейшем будем рассматривать эффекты пространственной дисперсии в кристаллооптике, используя разложения (11.39)—(11.41). Поэтому, помимо сказанного об условиях их использования, заметим, что поскольку тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ для всех реальных сред зависит не только от ω, но и от $\mathbf{k}$, само наличие области применимости классической кристаллооптики базируется фактически на допущении о существовании при $\mathbf{k} \to 0$ предела, к которому в этом случае стремятся тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$, причем сами пределы (т. е. тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ соответственно) при $\mathbf{k} \to 0$ не зависят от направления $\mathbf{k}$. Иными словами, в основе кристаллооптики лежит допущение о том, что при малых $\mathbf{k}$ тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ являются аналитическими функциями $\mathbf{k}$. Справедливость этого допущения в значительной мере следует уже из того, что в рамках классической кристаллооптики удается объяснить огромную совокупность экспериментальных фактов. Строгое доказательство аналитичности тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ как функций от $\mathbf{k}$ при малых $\mathbf{k}$ может быть получено в рамках микротеории, позвляющей найти эти тензоры в явном виде для тех или иных кристаллов. Вычисление тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ для кристаллов производилось неоднократно (см., например, [76]). Во всех известных нам случаях как вне областей резонансов, так и в их окрестности, но при учете затухания тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ оказывались при $\mathbf{k} \to 0$ аналитическими функциями $\mathbf{k}$. По-видимому, нет никаких оснований сомневаться в аналитичности функций $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to 0$.

Наконец, еще одно замечание, касающееся наших исходных предположений.

Если не принимать во внимание затухание, то разложения типа (11.40) и (11.41) при сохранении в них лишь нескольких

выписанных членов могут оказаться недостаточными в следующей своеобразной ситуации. Пусть, например, $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\delta_{ij}$, причем

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) + \frac{\rho k^2}{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu k^2} \tag{11.42}$$

(индекс i у ω_i, разумеется, не имеет ничего общего с тензорными индексами i, j и т. д.). Такое выражение иногда приближенно описывает ход $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ вблизи частоты квадрупольной линии поглощения.

Пока член μk^2 в (11.42) несуществен, мы имеем здесь дело с разложением типа (11.40). Но в общем случае

$$[\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon(\omega)]^{-1} = \frac{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu k^2}{\rho k^2},$$

что не соответствует ни (11.40), ни (11.41). Легко, однако, обобщить выражение (11.42) для любого кристалла в духе феноменологического разложения (11.40):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)\, k_l + \alpha_{ijlm}(\omega, \mathbf{k})\, k_l k_m, \\ \alpha^{-1}_{ijlm}(\omega, \mathbf{k}) &= \xi_{ijlm}(\omega) + i\eta_{ijlmn}(\omega)\, k_n + \zeta_{ijlmnp}(\omega)\, k_n k_p. \end{aligned}\right\} \tag{11.43}$$

Аналогичным образом можно заменить в (11.40) $\gamma_{ijl}(\omega)$ на $\gamma_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$ и т. д. Для негиротропного кубического кристалла выражения (11.43) и (11.42) эквивалентны, причем

$$\alpha_{ijlm} k_l k_m = \frac{\rho(\omega)\, k^2}{(\omega - \omega_i)/\omega_i - \mu^2 k^2}\, \delta_{ij}.$$

Если несколько обобщить выражение (11.42) и записать его в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + \frac{\alpha_{ijlm}(\omega)\, k_l k_m}{(\omega - \omega_i)/\omega_i + i\nu + \mu_{lm} k_l k_m}, \tag{11.44}$$

то в резонансе (т. е. при $\omega \to \omega_i$) при $\nu = 0$ тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to 0$ становится, вообще говоря, зависящим от $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$, т. е. оказывается неаналитической функцией $\mathbf{k}$. В действительности, однако, всегда $\nu \neq 0$ и аналитичность зависимости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ при $\mathbf{k} \to 0$ сохраняется даже в резонансе. Таким образом, потребность в разложении типа (11.43) может возникнуть только в окрестности резонанса и при пренебрежении затуханием. При учете же затухания использование разложений вида (11.43) может быть оправдано, вообще говоря, лишь при изучении эффектов пространственной дисперсии более высокого порядка.

Тензоры, фигурирующие в формулах (11.39)—(11.41), удовлетворяют ряду соотношений, вытекающих из общих свойств

симметрии тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, обсуждавшихся выше. Так, в силу (11.10)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega) &= \varepsilon_{ji}(\omega), & \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) &= \varepsilon_{ji}^{-1}(\omega), \\ \gamma_{ijl}(\omega) &= -\gamma_{jil}(\omega), & \delta_{ijl}(\omega) &= -\delta_{jil}(\omega), \\ \alpha_{ijlm}(\omega) &= \alpha_{jilm}(\omega), & \beta_{ijlm}(\omega) &= \beta_{jilm}(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (11.45)$$

Кроме того, тензоры α_{ijlm} и β_{ijlm} всегда можно выбрать так, чтобы $\alpha_{ijlm} = \alpha_{ijml}$ и $\beta_{ijlm} = \beta_{ijml}$ (ниже предполагается, что сделан именно такой выбор). Напомним также, что магнитная индукция внешнего поля $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ везде, если не оговорено обратное, считается равной нулю.

При наличии центра симметрии и вообще для негиротропной среды из (11.12) следует, что

$$\gamma_{ijl} = 0, \quad \delta_{ijl} = 0. \qquad (11.46)$$

В отсутствие поглощения и при вещественном $\mathbf{k}$ тензор $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ и, следовательно, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ являются эрмитовыми. В этом случае в силу (11.45) все тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\delta_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$ и $\beta_{ijlm}(\omega)$ вещественны. Выше упоминалось о дипольных и квадрупольных линиях поглощения. Действительно, вблизи дипольных линий обычно достаточно использовать разложения (11.39), (11.40) или (11.41), а выражения (11.42)—(11.44) в первую очередь могут встретиться в случае квадрупольных линий. Вместе с тем нужно подчеркнуть, что сами упомянутые разложения в ряды по $\mathbf{k}$ не являются разложениями по мультиполям. Более того использование выражений (11.39)—(11.41) вовсе не ограничено областью каких-либо линий. Нужно также иметь в виду, что в произвольной оптически анизотропной среде и при произвольном направлении распространения света появление линии поглощения (или при пренебрежении поглощением — появление полюса у функции $\tilde{n}^2 = n^2$) не связано с резонансным возрастанием компонент $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, как ясно уже из формул классической кристаллооптики (см., например, (11.27)).

Тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ и, разумеется, фигурирующие в (11.40) и (11.41) тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, γ_{ijl}, δ_{ijl}, α_{ijlm} и β_{ijlm} существенно упрощаются при наличии у кристалла элементов симметрии. Так, при наличии центра симметрии $\gamma_{ijl} = \delta_{ijl} = 0$ (см. (11.46)), а в изотропной негиротропной среде тензор α_{ijlm} имеет лишь две независимые компоненты, так что в этом случае (см. также гл. 12)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij} + \alpha_{tr}(\omega)(\delta_{ij} - s_i s_j)k^2 + \alpha_l(\omega) s_i s_j k^2. \qquad (11.47)$$

Следствия, которые связаны с учетом симметрии кристаллов, для интересующих нас тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\gamma_{ijl}(\omega)$, $\alpha_{ijlm}(\omega)$ и других хорошо известны и подробно обсуждаются в [76, 168]. Поэтому ограничимся здесь лишь несколькими примерами.

Как следует из соотношения (11.45), тензор γ_{ijl} (и δ_{ijl}) обладает следующими свойствами:

$$\gamma_{xx,\,l} = \gamma_{yy,\,l} = \gamma_{zz,\,l} = 0, \quad \gamma_{xy,\,l} = -\gamma_{yx,\,l},$$
$$\gamma_{yz,\,l} = -\gamma_{zy,\,l}, \quad \gamma_{zx,\,l} = -\gamma_{xz,\,l} \quad (l = 1, 2, 3 \equiv x, y, z).$$

Таким образом, тензоры γ_{ijl} и δ_{ijl} в общем случае имеют девять независимых компонент, и их можно записать в виде

$$\gamma_{ijl} = e_{ijm} g'_{ml}, \quad \delta_{ijl} = e_{imj} f'_{ml}, \tag{11.48}$$

где e_{ijm} — единичный псевдотензор третьего ранга ($e_{123} = 1$, $e_{213} = -1$, $e_{112} = 0$ и т. д., при зеркальном отражении e_{ijl} не изменяются) и g'_{ml} и f'_{ml} — псевдотензоры второго ранга.

Наряду с тензорами g'_{ml} и f'_{ml} иногда вводят векторы гирации $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{f}'$, определяемые соотношениями

$$g'_m = g'_{ml} k_l, \quad f'_m = f'_{ml} k_l, \quad \mathbf{k} = k\mathbf{s}. \tag{11.49}$$

Если в (11.40) и (11.41) пренебречь членами, квадратичными по k, то эти соотношения с помощью векторов гирации можно представить в следующем виде:

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j - i[\mathbf{g}'\mathbf{E}]_i, \tag{11.50а}$$
$$E_i = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) D_j = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega) D_j - i[\mathbf{f}'\mathbf{D}]_i. \tag{11.50б}$$

В силу малости пространственной дисперсии использование для гиротропных сред соотношений (11.50) является в большинстве случаев вполне достаточным. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать не общие разложения (11.40), (11.41), а выражения (11.50) для гиротропных сред, а также следующие выражения для негиротропной среды:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \alpha_{ijlm}(\omega) \tilde{n}^2 s_l s_m, \tag{11.51а}$$

$$\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{-1}_{ij}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \beta_{ijlm}(\omega) \tilde{n}^2 s_l s_m. \tag{11.51б}$$

Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ всегда можно, разумеется, привести к диагональному виду, выбирая соответствующим образом главные оси*). Направление этих осей при произвольном $\mathbf{s}$ не совпадает ни с $\mathbf{s}$, ни с осями тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$; в тех случаях, когда оси тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$ фиксированы (т. е. в отсутствие вырождения, имеющего место в кубических и одноосных кристаллах), оси тензора

*) Если тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ не эрмитов, то нужно независимо рассматривать эрмитовы тензоры ε'_{ij} и ε''_{ij}, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$, причем главные оси (точнее, собственные векторы, которые в общем случае комплексны) этих тензоров могут не совпадать. Если не оговорено противное, мы в тексте имеем в виду только тензор ε'_{ij}, считая его вещественным.

$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ близки к осям $\varepsilon_{ij}(\omega)$ вследствие малости зависящих от $\mathbf{s}$ членов в (11.50) и (11.51).

В кристаллооптике с пространственной дисперсией, естественно, представляют большой интерес те главные оси $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, направление которых совпадает с $\mathbf{s}$. Для ромбических кристаллов такими осями являются оси x, y, z. Если, например, вектор $\mathbf{s}$ направлен по оси x, то главные значения тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ равны (здесь и ниже см. табл. III в [76])

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{xx}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{xxxx},$$

$$\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{yy}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{yyxx},$$

$$\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{zz}(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{zzxx}.$$

В тетрагональных кристаллах классов D_4, C_{4v}, D_{2d} и D_{4h} для вектора $\mathbf{s}$, направленного по осям x и y, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ оказывается приведенным к главным осям, причем главные значения различны. Если же вектор $\mathbf{s}$ направлен по оси z (по оси четвертого порядка), то

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{xxzz}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel(\omega) + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_{zzzz}.$$

Не останавливаясь на кристаллах других систем, перейдем к кубическим кристаллам. В этом случае (невыписанные коэффициенты α_{ijlm} все равны нулю)

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_{xxxx} = \alpha_{yyyy} = \alpha_{zzzz}, \quad \alpha_2 = \alpha_{xxzz} = \alpha_{yyxx} = \alpha_{zzyy},\\
&\alpha_3 = \alpha_{xyxy} = \alpha_{yzyz} = \alpha_{zxzx}, \quad \alpha_4 = \alpha_{zzxx} = \alpha_{xxyy} = \alpha_{yyzz},\\
&\varepsilon_{xx} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_1 s_x^2 + \alpha_4 s_y^2 + \alpha_2 s_z^2),\\
&\varepsilon_{xy} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_x s_y, \quad \varepsilon_{xz} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_x s_z,\\
&\varepsilon_{yy} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_2 s_x^2 + \alpha_1 s_y^2 + \alpha_4 s_z^2),\\
&\varepsilon_{zz} = \varepsilon + \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_4 s_x^2 + \alpha_2 s_y^2 + \alpha_1 s_z^2),\\
&\varepsilon_{yz} = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \alpha_3 s_y s_z
\end{aligned}\right\} \qquad (11.52)$$

(для классов O, T_d и O_h, кроме того, $\alpha_2 = \alpha_4$; двойка в выражениях для ε_{xy}, ε_{xz} и ε_{yz} появляется в связи с суммированием в (11.51) членов, пропорциональных $s_x s_y$ и $s_y s_x$). Отсюда очевидно, что оси куба x, y, z являются главными осями тензора, если вектор $\mathbf{s}$ направлен по любой из осей x, y, z. При этом соответствующая поверхность второго порядка при $\alpha_2 = \alpha_4$ вырождается в поверхность (эллипсоид или гиперболоид) вращения. Если

вектор $\mathbf{s}$ направлен по пространственным диагоналям куба ($|s_x| = |s_y| = |s_z| = 1/\sqrt{3}$), то

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon + {}^1/_3 \left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)$$

и

$$|\varepsilon_{xy}| = |\varepsilon_{xz}| = |\varepsilon_{yz}| = 2\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\right)^2 \frac{\alpha_3}{3}.$$

Остановимся теперь, наконец, на некоторых эффектах пространственной дисперсии в кристаллооптике. Уже отмечалось, что в силу малости пространственной дисперсии, например в оптике, интерес в таких случаях представляют в первую очередь только те задачи, в которых пространственная дисперсия приводит к качественно новым эффектам или во всяком случае не обусловливает появления лишь ничтожных поправок к формулам классической кристаллооптики. В соответствии со сказанным нижеследующее изложение носит фрагментарный характер и сводится в основном к обсуждению тех явлений, для анализа которых необходим учет пространственной дисперсии. Важнейшим эффектом такого типа, как уже подчеркивалось, является гиротропия (естественная оптическая активность). Феноменологическое рассмотрение гиротропии чаще всего без явного использования представлений о пространственной дисперсии*) производится, однако, очень давно и достаточно подробно освещено в литературе (см., например, [44, 76, 168а]). Другой важный эффект пространственной дисперсии — существование отличной от нуля групповой скорости продольных волн — особенно хорошо известен в применении к плазме и будет еще упомянут в гл. 12. Здесь поэтому речь пойдет лишь о двух эффектах пространственной дисперсии: об оптической анизотропии кубических кристаллов и появлении дополнительных (новых) нормальных волн вблизи резонанса (в области аномальной дисперсии).

Оптическая анизотропия кубических кристаллов была предсказана Лорентцем еще в прошлом веке, но была обнаружена впервые лишь в 1960 г. в области квадрупольного перехода с длиной волны $\lambda = 6125$ Å в Cu_2O (ссылки см. в [76]).

Появление оптической анизотропии у кубических кристаллов при учете пространственной дисперсии непосредственно следует из соотношений (11.51). Для кубических кристаллов, например, выражение (11.51а) принимает вид (11.52). Вне области резонанса функции $\varepsilon(\omega)$ с равным основанием может быть использовано любое из соотношений (11.51). Если же рассматривается область резонанса $\varepsilon(\omega)$, то пространственная дисперсия корректно учитывается лишь при использовании разложения для тензора $\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

*) Для описания гиротропной среды формально можно, игнорируя требования, связанные с симметрией кинетических коэффициентов, рассматривать несимметричный тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$.

Если не принимать во внимание пространственную дисперсию, то тензор $\varepsilon_{ij}(\omega)$ для кубических кристаллов сводится к скаляру, в силу чего для коэффициента преломления получаем $\tilde{n}^2 = \varepsilon(\omega)$, что отвечает полной независимости оптических свойств кристалла от направления распространения света и от его поляризации. При учете же пространственной дисперсии тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ уже не сводится к скаляру (см. (11.52)). Подстановка этого тензора в уравнение (11.27) приводит к значениям $\tilde{n}^2$, зависящим как от направления распространения света, так и от его поляризации, что и отвечает оптической анизотропии кристалла. Поскольку коэффициенты α_{ijlm} и β_{ijlm} порядка квадрата постоянной решетки $a \sim 10^{-8}$—10^{-7} см, анизотропия мала (при $\varepsilon_{ij} \sim 1$, $\tilde{n} \sim 1$ этот эффект порядка $(\omega a/c)^2 = (2\pi a/\lambda_0)^2 \sim 10^{-4}$—$10^{-5}$). Зависимость $\tilde{n}^2$ от направления $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ и от поляризации для кубических кристаллов различных классов подробно рассмотрена в [76].

Перейдем к вопросу о новых (дополнительных) волнах, возникающих при учете пространственной дисперсии. Возможность появления таких волн сразу же очевидна из общего дисперсионного уравнения (11.27). В самом деле, в пренебрежении пространственной дисперсией это уравнение представляет собой квадратное уравнение относительно показателя преломления $\tilde{n}^2$ (т. е. биквадратное уравнение для показателя $\tilde{n}$). Поэтому, как отмечалось, дисперсионное уравнение имеет только два решения $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$, отвечающие двум нормальным волнам (продольные колебания сейчас не учитываются; решения $\tilde{n}_{1,2}$ и $-\tilde{n}_{1,2}$ соответствуют двум противоположным направлениям распространения волн, но не различным типам волн). При учете же пространственной дисперсии коэффициенты в дисперсионном уравнении (11.27) сами зависят от $\tilde{n}$ через $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}(\omega))$, $\mathbf{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{n}(\omega)\mathbf{s}$, поскольку для нормальных волн ω и $\mathbf{k}$ как раз и связаны между собой дисперсионным уравнением. В результате это уравнение может, в принципе, иметь сколько угодно корней. Фактически, однако, число корней, по крайней мере не очень сильно затухающих (т. е. отвечающих не очень сильно затухающим волнам), обычно оказывается сравнительно небольшим. Сказанное заведомо справедливо в случае слабой пространственной дисперсии, когда приходится сталкиваться только с одной или двумя новыми волнами (корнями). Более того, даже такие новые волны в оптике наблюдать весьма трудно, и до сих пор это надежно удавалось сделать лишь косвенным методом — по комбинационному рассеянию света (см. [76], § 12.1). Тем не менее рассмотрение новых волн, возникающих при учете пространственной дисперсии, представляет несомненный интерес.

Имея в виду в дальнейшем исследовать распространение волн в частности в окрестности полос поглощения, используем

разложение для обратного тензора диэлектрической проницаемости, который в самом общем случае можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) + i\delta_{ijl}(\omega, \mathbf{k})\frac{\omega\tilde{n}}{c}s_l, \qquad (11.53)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\delta_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$ — тензоры, являющиеся четными функциями $\mathbf{k}$ ($\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, -\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, $\delta_{ijl}(\omega, -\mathbf{k}) = \delta_{ijl}(\omega, \mathbf{k})$, причем тензор $\delta_{ijl} \neq 0$ только в кристаллах без центра инверсии). В силу малости пространственной дисперсии (это предполагается), в разложении $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и δ_{ijl} в ряд по $\mathbf{k}$ удерживаются лишь первые члены. Таким образом, выражение (11.53) используется в форме, эквивалентной уже рассмотренной выше.

Для непродольных волн в среде вектор индукции $\mathbf{D} \neq 0$. Поэтому изучение свойств этих волн удобно проводить в такой системе координат, где ось z направлена вдоль $\mathbf{k}$, а для вектора индукции, в силу соотношения $(\mathbf{kD}) = 0$, справедливо равенство $D_z \equiv D_3 = 0$. В этой системе координат уравнения (эквивалентные основному векторному уравнению (11.22)), которым удовлетворяют отличные от нуля компоненты вектора индукции, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}\right) D_x - \tilde{\varepsilon}_{xy}^{-1} D_y = i\frac{\omega}{c}\tilde{n}\delta_{123}D_y, \\ -\tilde{\varepsilon}_{yx}^{-1} D_x + \left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}\right) D_y = -i\frac{\omega}{c}\tilde{n}\delta_{123}D_x. \end{aligned}\right\} \qquad (11.54)$$

Направления осей x и y выберем вдоль главных осей двумерного тензора $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{-1}(\omega, 0) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ и обозначим главные значения этого тензора через $1/\tilde{n}_{01}^2$ и $1/\tilde{n}_{02}^2$. При таком выборе осей компоненты $\tilde{\varepsilon}_{xy}^{-1}$ и $\tilde{\varepsilon}_{yx}^{-1}$ оказываются малыми величинами порядка k^2. Условие равенства нулю определителя системы (11.54) дает уравнение, служащее для определения возможных значений $\tilde{n}^2$. Это уравнение, если в нем опустить слагаемые порядка k^3, k^4 и т. д., имеет вид

$$\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}\right)\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}\right) = \delta_{123}^2(\omega, \mathbf{k})\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2. \qquad (11.55)$$

Если в уравнении (11.55) положить $\delta_{123} = 0$ и $\mathbf{k} = 0$, то его решения $\tilde{n}_{1,2}^2 = \tilde{n}_{01,2}^2$ совпадают, конечно, с решениями уравнения Френеля с $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$. Если же $\delta_{123} \neq 0$ и $\mathbf{k} \neq 0$, то уравнение (11.55) для заданного направления $\mathbf{s}$ уже при $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1} = \varepsilon_{xx}^{-1}(\omega)$ и $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1} = \varepsilon_{yy}^{-1}(\omega)$ определяет не два, а, вообще говоря, несколько значений коэффициента преломления (уравнение (11.55) для непродольных волн в рассматриваемом приближении совпадает с (11.27), как и должно быть).

Особенно прост анализ уравнения (11.55) для сред, являющихся при неучете пространственной дисперсии оптически изотропными.

Для изотропной среды $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, 0) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, 0) = 1/\varepsilon(\omega)$. В этом случае для гиротропной среды, когда $\delta_{123} \neq 0$, как легко видеть из (11.55), зависимостью величин $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}$, $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}$ и δ_{123} от $\mathbf{k}$ можно пренебречь, так что вместо (11.55) для определения величин $\tilde{n}^2$ получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\delta_{123}^2\tilde{n}^2. \qquad (11.56)$$

Это уравнение имеет, очевидно, три корня для $\tilde{n}^2$, т. е. мы находим три значения $\tilde{n}_1^2$, $\tilde{n}_2^2$, $\tilde{n}_3^2$. Может оказаться, что всем трем корням уравнения (11.56) отвечают относительно большие длины волн, и, значит, все три решения допустимо рассматривать в рамках макроскопического подхода. В частности, в окрестности резонанса (т. е. при $\omega \approx \omega_i$, где $\varepsilon(\omega_i) \to \infty$) зависимостью величины δ_{123} от ω можно пренебречь, а зависимость $\varepsilon(\omega)$ в этой области частот считать известной; тогда решение уравнения (11.56) позволяет найти в области резонанса зависимость $\tilde{n}^2(\omega)$ для всех трех решений, а тем самым и проконтролировать справедливость условия $an/\lambda_0 \ll 1$ (см. (11.20)). Анализ полученных результатов подробно изложен в § 6.3 книги [76]. Поэтому здесь мы приведем лишь некоторые результаты для того случая, когда поглощение волн не принимается во внимание. Тогда величины δ_{123} и $\varepsilon(\omega)$ вещественны, причем в области $\omega \approx \omega_i$ можно положить

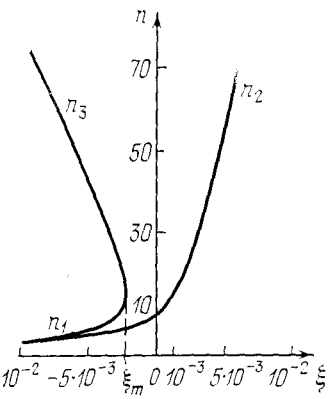


Рис. 11.1. Зависимость показателей преломления n_1, n_2, n_3 от $\xi = (\omega - \omega_i)/\omega_i$ вблизи резонансной частоты ω_i в случае гиротропной, но изотропной и непоглощающей среды.

В (11.56) и (11.57) выбраны значения $A = 0, 1$, $\varepsilon_0 = 3$, $(\omega_i/c)\,\delta_{123} = 10^{-3}$.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{2A\omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \approx \varepsilon_0 - \frac{A}{\xi}, \qquad (11.57)$$

где $\xi = (\omega - \omega_i)/\omega_i$, $A = 2\pi e^2 N_{\text{эфф}}/m\omega_i^2$; здесь e и m — заряд и масса свободного электрона, $N_{\text{эфф}}/N \equiv f_i$ — сила осциллятора, где N — полное число электронов в единице объема, а $N_{\text{эфф}}$ — та их часть, которая «эффективно» определяет оптические свойства среды в рассматриваемой области спектра (см. также ниже).

Для этого случая ход кривых $n(\xi)$, полученных в результате решения уравнения (11.56), представлен на рис. 11.1. Интересная особенность изображенных на нем кривых дисперсии со-

стоит в том, что правее точки поворота $\xi_m = (\omega_m - \omega_i)/\omega_i$ существует только одно вещественное решение, тогда как левее ее — три вещественных решения. Отметим, что кратным корням (т. е. точке поворота) отвечает значение частоты ω_m, которое удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon(\omega_m) = {}^1/_3 2^{2/3} \left(\frac{\omega_m}{c}\,\delta_{123}\right)^{-2/3}. \qquad (11.58)$$

В случае изотропной негиротропной среды решение уравнения (11.55) даже еще проще. Поскольку в этом случае наряду с равенством $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, 0) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, 0) = 1/\varepsilon(\omega)$ справедливо также условие $\delta_{123} = 0$, уравнение (11.55) принимает вид

$$\frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2}\beta\tilde{n}^2. \qquad (11.59)$$

Это уравнение получается из (11.55), если принять, что

$$\tilde{\varepsilon}_{xx}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{yy}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} + \beta k^2 \equiv \varepsilon^{-1}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\beta\tilde{n}^2.$$

Уравнение (11.59) определяет два значения показателя преломления $\tilde{n}^2_{1,2}$, отвечающие одной и той же поляризации света, причем

$$\tilde{n}^2_{1,2} = -\frac{1}{2\varepsilon(\omega)\beta'} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon(\omega)\beta'}\right)^2 + \frac{1}{\beta'}}, \qquad (11.60)$$

где $\beta' = (\omega^2/c^2)\beta$. Из (11.60) при $\beta' < 0$ следует, что на частоте $\omega = \omega_m$, определяемой из уравнения

$$\varepsilon(\omega_m) = {}^1/_2 |\beta'|^{-1/2}, \qquad (11.61)$$

корни $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$ равны. Следовательно, частоте ω_m отвечает точка поворота. Если же $\beta' > 0$, точка поворота не возникает. Зависимость корней $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$ от частоты в окрестности резонанса с использованием выражения (10.57) и значений $\beta' = \pm 10^{-5}$ приведены на рис. 11.2. Более ясной и наглядной картина становится при использовании простой модели (см. ниже рис. 11.4, *б* и пояснения к нему). Учет затухания, вообще говоря, существенно изменяет характер зависимости $\tilde{n}^2_{1,2}$ от ω. Отметим также, что в случае анизотропной негиротропной среды ситуация в отношении дисперсии качественно остается такой же, как и для изотропной среды. Единственное существенное различие здесь состоит лишь в том, что для анизотропной среды, где резонансы величин n_{01}^2 и n_{02}^2, удовлетворяющих уравнению (11.55) при $\delta_{123} = 0$ и $\mathbf{k} = 0$, вообще говоря, не совпадают, новая волна типа 1 появляется вблизи резонанса n_{01}, а новая волна типа 2 — вблизи резонанса n_{02}. Характер дисперсионных кривых и поляризация новых (дополнительных) волн в анизотропной среде (как гиротропной, так и негиротропной) рассмотрены в

[76]. Здесь нет оснований останавливаться на деталях, поскольку наблюдать новые волны довольно трудно, хотя на решение соответствующих экспериментальных задач в будущем все же можно рассчитывать (мы уже не говорим об упомянутом методе комбинационного рассеяния, позволившем наблюдать новую волну). Учет пространственной дисперсии в некоторых случаях существен в теории поверхностных волн оптического диапазона или, как чаще говорят, в теории поверхностных экситонов и поляритонов (см. [76], § 11).

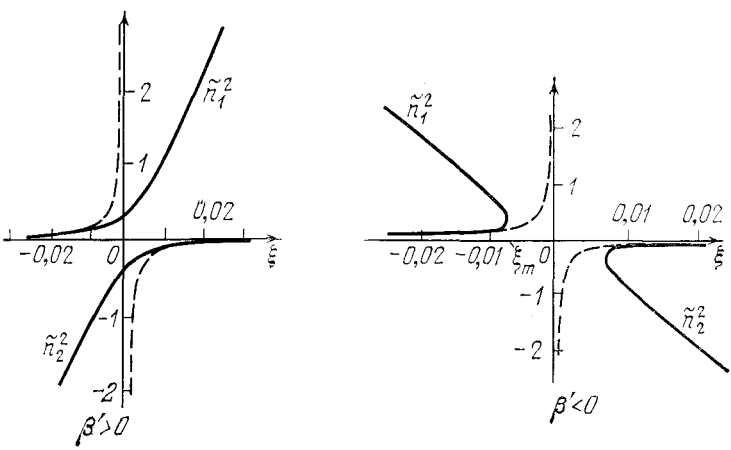


Рис. 11.2. Зависимость $\tilde{n}^2$ от $\xi=(\omega-\omega_i)/\omega_i$ вблизи частоты ω_i в случае изотропной и непоглощающей, но негиротропной среды.

Пунктирные кривые соответствуют $\beta'=0$. По оси ординат отложены величины $10^{-3}\,\tilde{n}^2$. В (11.57) и (11.60) выбраны значения $A=1$, $\varepsilon_0=0$, $|\beta'|=10^{-5}$.

Вместе с тем следует еще раз подчеркнуть слабость эффектов пространственной дисперсии в оптике — это обусловлено малостью коэффициентов $(\omega/c)\delta \sim 2\pi a/\lambda \sim 10^{-2}-10^{-3}$ и $\beta'=(\omega^2/c^2)\beta \approx 4\pi^2a^2/\lambda^2 \sim 10^{-4}-10^{-5}$. Поэтому понятна возможность пренебрежения пространственной дисперсией в большом числе задач. Столь же понятно, почему в настоящее время, когда усовершенствовалась техника измерений и расширился круг исследуемых явлений и объектов, значение учета пространственной дисперсии в оптике (не говоря уже о физике плазмы) все больше возрастает.

Довольно любопытно, что подлинный прогресс в области теории и эксперимента сопровождается иногда лишь кажущимися успехами, связанными в основном с введением новых терминов и забвением давно известного. Примером может, по нашему мнению, служить вопрос о поляритонах. Сделаем несколько замечаний на этот счет, поскольку они должны способствовать уяснению физической картины распространения волн в среде.

Напомним раньше всего классическую теорию дисперсии, для чего рассмотрим движение осциллятора с зарядом q и массой M под действием поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Уравнение движения и вынужденное его решение имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_i^2 \mathbf{r} = \frac{q}{M}\mathbf{E} = \frac{q}{M}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{r} = -\frac{q}{M(\omega^2 - \omega_i^2)}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (11.62)$$

Если не отличать действующее поле от среднего и считать, что среда состоит из независимых осцилляторов (11.62) с концентрацией N, то поляризация $\mathbf{P}$ равна

$$\mathbf{P} = qN\mathbf{E} = -\frac{q^2 N}{M(\omega^2 - \omega_i^2)}\mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}. \quad (11.63)$$

В случае кубических решеток, состоящих из двух колеблющихся друг относительно друга подрешеток, роль $\mathbf{r}$ играет относительное смещение зарядов в подрешетках, а q и M — соответственно эффективный заряд и приведенная масса в расчете на одну ячейку или один ион. Если ввести обозначения $\frac{4\pi q^2 N}{M} = \frac{4\pi e^2}{m} f_i = \Omega_i^2$ (f_i — сила осциллятора) и добавить к ε некоторую постоянную ε_0—1, то из (11.57) получаем

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (11.64)$$

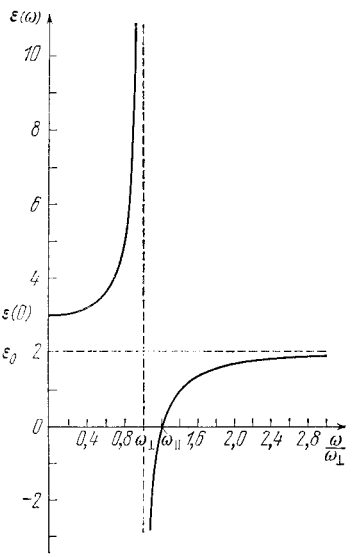


Рис. 11.3. Зависимость диэлектрической проницаемости от $\omega/\omega_\perp$.

График построен в предположении, что $\varepsilon_0 = 2$, $\Omega_i/\omega_i \equiv \Omega_i/\omega_\perp = 1$. Это значит, что $\varepsilon(\omega) = 2 + \left(1 - \omega^2/\omega_\perp^2\right)^{-1}$.

Это выражение, очевидно, эквивалентно формуле (11.57), которая применима в весьма широком числе случаев, но лишь вблизи резонанса $\omega \approx \omega_i$. Вид функции (11.64) ясен из рис. 11.3. Очевидно, $\varepsilon(\omega) = \infty$ при $\omega = \omega_i \equiv \omega_\perp$ и $\varepsilon(\omega) = 0$ при $\omega = \omega_\parallel = \sqrt{\omega_\perp^2 + \Omega_i^2/\varepsilon_0}$, причем в области частот $\omega_\perp < \omega < \omega_\parallel$ функция $\varepsilon(\omega) < 0$.

Как мы знаем, для поперечных волн, распространяющихся в изотропной среде, $c^2k^2/\omega^2 \equiv n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)$. Эту связь можно рассматривать как уравнение для функции $\omega(k)$ в нормальных волнах. Из (11.64) и из рис. 11.3 сразу же ясен вид зависимости $\omega(k)$, которая и изображена на рис. 11.4, *а*. На частоте $\omega_\parallel$ могут существовать также продольные волны. Верхняя ветвь $\omega_+(k)$ кривой $\omega(k)$ с ростом k асимптотически приближается к прямой

$\omega = ck/\sqrt{\varepsilon_0}$, поскольку при $\omega \to \infty$ проницаемость $\varepsilon(\omega) \to \varepsilon_0$. Нижняя ветвь $\omega_-(k)$ кривой $\omega(k)$ при $k \to 0$ стремится к прямой

$$\omega = ck/\sqrt{\varepsilon(0)}, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \Omega_i^2/\omega_\perp^2.$$

Совершенно очевидно, что переход от графика 11.3 к 11.4, *а* не выводит нас за пределы классической теории дисперсии. Эго

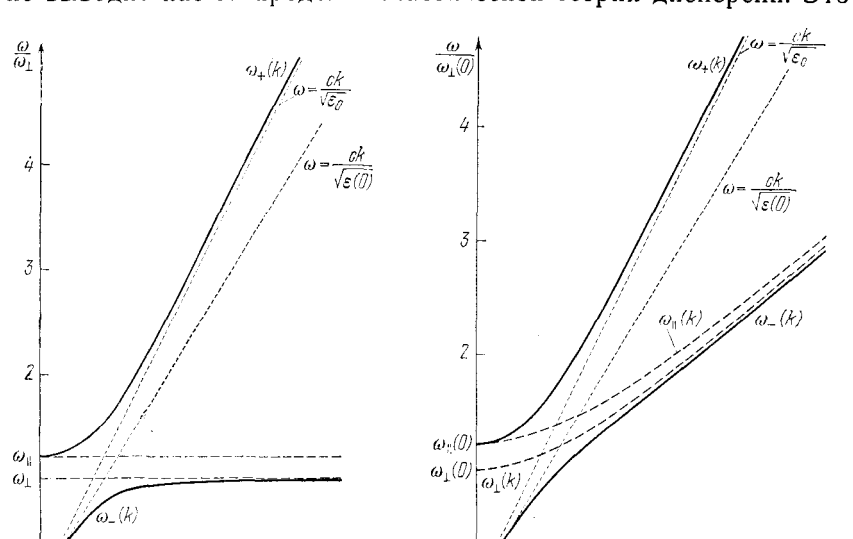


Рис. 11.4. Зависимость частоты ω от волнового числа (длины волнового вектора) k для нормальных волн (поляритонов), могущих распространяться в изотропной среде с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ типа (11.64):

а) Без учета пространственной дисперсии, т. е. $\omega_i = \omega_\perp = \text{const}$. При расчете положено $c^2k^2/\omega^2 = \varepsilon(\omega) = 2 + \left(1 - \omega^2/\omega_\perp^2\right)^{-1}$. *б*) При учете пространственной дисперсии, когда $\omega_\perp = \omega_\perp(k)$. При расчете положено $\varepsilon(\omega, k) = 2 + \left[\omega_\perp^2(k)/\omega_\perp^2(0) - \omega^2/\omega_\perp^2(0)\right]^{-1}$, т. е. $\varepsilon_0 = 2$, $\Omega_i^2/\omega_\perp^2(0) = 1$, причем $\omega_\perp^2(k) = \omega_\perp^2(0) + a^2k^2$, где $a^2 = c^2/5$.

Ветви $\omega_\pm(k)$ отвечают решению уравнения $c^2k^2/\omega^2 = \varepsilon(\omega, k)$, а ветвь для продольной волны $\omega_\parallel(k)$ представляет собой решение уравнения $\varepsilon(\omega, k) = 0$. Фактически, как ясно из выражения (11.47) и выражения (12,36) (см. ниже), функции $\varepsilon(\omega, k)$ для поперечных и продольных волн, вообще говоря, различны и равны соответственно $\varepsilon_{tr}(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$, причем $\varepsilon_{tr}(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(0)$. *Однако при построении рис. 11.4, б для простоты положено* $\varepsilon_{tr}(\omega, k) = \varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k)$.

справедливо, конечно, и при распространении волн в твердом теле, где волны, отвечающие нижней и верхней ветвям на рис. 11.4, *а*, в последнее время как раз и называют обычно поляритонами. Таким образом, поляритоны в пределах классической картины тождественны с рассматривавшимися еще в

прошлом веке нормальными электромагнитными волнами в твердом теле. На квантовом языке поляритоны это «фотоны в среде», обладающие энергией $\hbar\omega(k)$. Разумеется, при учете пространственной дисперсии картина усложняется, но в простейшем, хотя и особенно важном частном случае, формально все сводится к замене в (11.64) постоянной $\omega_l \equiv \omega_\perp$ на функцию $\omega_\perp(k)$. В качестве иллюстрации, на рис. 11.4, *б* приведены кривые $\omega(k)$ для случая, когда $\omega_\perp^2(k) = \omega_\perp^2(0) + a^2k^2$ (подробнее см. в подписи к рис. 11.4).

Качественно новый элемент при учете пространственной дисперсии (на примере перехода от рис. 11.4, *а* к рис. 11.4, *б*) — появление (в некоторой области частот) двух решений — двух нормальных поперечных волн (поляритонов) с разными волновыми векторами $\mathbf{k}$ при данном значении частоты ω (и данной поляризации). Второе из этих решений, обладающее большим значением k (и обычно значительно бóльшим поглощением, которое здесь не учитывалось) и представляет собой упоминавшуюся выше «новую волну». Кроме того, при учете пространственной дисперсии вместо продольной волны лишь с одной частотой $\omega_\parallel$ появляется продольная ветвь с частотами $\omega_\parallel(\mathbf{k})$. Что собой представляют такие продольные волны особенно ясно на примере плазмы (см. гл. 12).

Полезно подчеркнуть, что «новые волны» в известном смысле не могут считаться действительно новыми. Дело в том, что в спектре кристалла никаких новых ветвей элементарных возбуждений при учете запаздывания и пространственной дисперсии не возникает, но существовавшие ветви «перепутываются», или, правильнее сказать, трансформируются. Так, в приведенном выше примере кристалла из двух подрешеток при отсутствии поперечного электромагнитного поля возможны колебания этих подрешеток друг относительно друга с частотой $\omega_l \equiv \omega_\perp$ (оптические колебания и соответственно оптические фононы). Даже без учета запаздывания (связи с поперечным полем) частота оптических колебаний $\omega_\perp$ зависит от $\mathbf{k}$, т. е. существует целая оптическая ветвь колебаний. При учете же запаздывания, что автоматически происходит при использовании полной системы уравнений поля, появляются единные ветви нормальных волн (см., в частности, рис. 11.4, *б*). Все это было осознано еще в рамках классической теории колебаний кристаллических решеток [169]. Новым, если не говорить о введении термина поляритонов, является дальнейшее развитие теории уже на квантовой основе и для ряда конкретных случаев (см. [76, 170]).

Глава 12

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Диэлектрическая проницаемость плазмы (элементарная и кинетическая теория). Распространение волн в однородной изотропной плазме и в однородной магнитоактивной плазме.

Типичной плазмой является сильно или полностью ионизированный газ. Плазмой часто называют также слабо ионизированный газ и электронный газ или электронную жидкость в полупроводниках и металлах (в последних двух случаях в применении к твердым телам говорят о твердотельной плазме). Несомненно, у плазмы разных типов много общего. Ниже, однако, будем иметь в виду лишь нерелятивистскую газовую плазму, для описания которой обычно достаточно ограничиться классическим приближением и конкретно можно использовать классическое нерелятивистское кинетическое уравнение. Именно с такой плазмой приходится в большинстве случаев сталкиваться в астрофизике, в физике ионосферы и при анализе проблемы термоядерного синтеза с использованием неплотной плазмы (при нагреве и сжатии пылинок из конденсированного тяжелого водорода с помощью излучения лазеров или интенсивных пучков частиц, ситуация может оказаться более сложной).

Изучению плазмы и, в частности, распространению волн в плазме посвящено огромное число работ — речь идет о десятках тысяч статей. Вопросов и различных частных случаев и задач в этой области так много, что их можно изложить только в большой серии книг. В значительной мере это сделано, но здесь ограничимся упоминанием лишь нескольких монографий [56, 83, 84, 106, 163—165, 171, 172], содержащих также обширную библиографию. Поэтому мы лишь коснемся в настоящей книге некоторых вопросов физики плазмы и сделаем это по двум причинам. Во-первых, на примере плазмы можно конкретизировать и пояснить ряд общих результатов, касающихся теории диспергирующих сред (см. гл. 11). Во-вторых, плазма представляет собой объект исключительной важности в астрофизике и физике ионосферы. Однако в классических курсах электромагнитной теории плазме все еще обычно уделяется совершенно недоста-

точное внимание, специальные же курсы физики плазмы читаются далеко не всем. Следовательно, даже изложение некоторых вопросов физики плазмы в настоящей главе может оказаться полезным или хотя бы удобным для читателей (несколько результатов и замечаний, касающихся физики плазмы, содержатся уже в предыдущих главах, особенно в гл. 7, но, как и в других случаях, мы не боимся повторений). Подробнее с затронутыми вопросами можно ознакомиться в уже указанных источниках (как по характеру изложения, так и по содержанию настоящая глава особенно близка, естественно, к монографиям [84, 164]).

Ниже рассматриваются только две проблемы: вычисляется тензор диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и изучается распространение в однородной плазме различных нормальных волн. В общем случае — при учете теплового движения и при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{B}_0$ — вычисление тензора ε_{ij} и последующее исследование нормальных волн довольно сложны или по крайней мере громоздки. Желая выявить физическую картину, суть дела, а не многочисленные детали, мы будем двигаться от простых задач к более сложным.

Самая простая постановка задачи такова: рассмотрим изотропную плазму (т. е. положим $\mathbf{H}_0 = 0$) и пренебрежем тепловым движением. Тогда (а также при $\mathbf{H}_0 \neq 0$, но по-прежнему при неучете теплового движения) для вычисления ε_{ij} достаточно воспользоваться так называемой «элементарной теорией», сводящейся к рассмотрению упорядоченного движения отдельных частиц (электронов и ионов) в электрическом поле частоты ω.

Будем для простоты считать ионы однократно заряженными (разумеется, в случае водорода, это условие выполняется автоматически), возможность присутствия отрицательных ионов учитывать не будем и, наконец, используем условие квазинейтральности $N \equiv N_e = N_i$ (здесь N_e и N_i — соответственно концентрации электронов и ионов; заряд электрона $e < 0$). В условиях квазинейтральности в плазме, очевидно, отсутствует объемный заряд, так как плотность заряда $\rho = e(N - N_i)$. Разумеется, условие квазинейтральности может нарушаться, но когда речь идет о больших объемах, что типично для астрофизических и ионосферных задач, разность $|N - N_i| \ll N$. В последнем можно убедиться на основании оценок, использующих уравнение поля

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi e(N - N_i) \tag{12.1}$$

и учитывающих, что при наличии поля в плазме возникает ток, в большинстве случаев достаточно быстро приводящий к исчезновению объемного заряда (это не относится к пространственному заряду вблизи внесенных в плазму внешних зарядов или к полям вблизи отдельных зарядов, составляющих плазму, см. ниже).

Плотность тока в изотропной плазме равна

$$\mathbf{j} = e\sum_{n=1}^{N}\left(\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}\right) = -\frac{i\omega\,(\mathbf{D}-\mathbf{E})}{4\pi} = \mathbf{j}_{\text{пров}} - i\omega\mathbf{P} =$$

$$= \left(\sigma - i\,\frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\,\omega\right)\mathbf{E} = -\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon-1)\,\mathbf{E}. \qquad (12.2)$$

Здесь $\mathbf{j}_{\text{пров}} = \sigma\mathbf{E}$ — плотность тока проводимости, $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\mathbf{E}$ — поляризация, $\varepsilon \equiv \varepsilon' + i\varepsilon'' \equiv \varepsilon' + i4\pi\sigma/\omega$ — комплексная проницаемость ($\varepsilon' = \operatorname{Re}\varepsilon$, σ — проводимость) и электрическое поле $\mathbf{E}$ считается монохроматическим ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(-i\omega t)$). Выражение (12.2) записано таким образом, чтобы пояснить встречающиеся в литературе обозначения*). Квазинейтральность в (12.2) учтена лишь при суммировании по числу частиц (в (12.2), очевидно, $\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор n-го электрона и $\mathbf{r}_n^{(i)}$ — радиус-вектор n-го иона).

В отсутствие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$, при неучете соударений и локальном рассмотрении (т. е. при пренебрежении пространственной дисперсией, когда поле $\mathbf{E}$ можно считать однородным) уравнения движения для электронов и ионов имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n = e\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t), \quad M\ddot{\mathbf{r}}_n^{(i)} = -e\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t), \qquad (12.3)$$

где m и M — масса электронов и ионов соответственно.

Отсюда, например,

$$\mathbf{r}_n = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2} + \mathbf{r}_n^{(0)}(t),$$

где $\mathbf{r}_n^{(0)}(t)$ — радиус-вектор электрона в отсутствие поля. В силу (12.2) и (12.3), как легко видеть,

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\,\mathbf{E} = -\frac{e^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)N\mathbf{E},$$

а члены с $\mathbf{r}_n^{(0)}$ и $\mathbf{r}_n^{(i,\,0)}$ выпадают, поскольку без поля по предположению $\mathbf{P} = 0$. Вклад от ионов является лишь поправкой порядка $m/M \lesssim 10^{-3}$ и будет опущен.

Таким образом,

$$\varepsilon = \varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} =$$

$$= 1 - 3{,}18\cdot 10^9\,\frac{N}{\omega^2} = 1 - 8{,}06\cdot 10^7\,\frac{N}{\nu^2}, \qquad (12.4)$$

где $\omega_{pe} \equiv \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — электронная плазменная частота,

*) Дополнительно нужно иметь в виду, что часто используются поля в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(i\omega t)$, что приводит к появлению комплексно сопряженных величин. Кроме того, ток проводимости $\mathbf{j}_{\text{пров}}$ чаще обозначается через $\mathbf{j}$, а полный ток — $i\omega\mathbf{D}/4\pi$ или не вводится или обозначается через $\mathbf{j}'$ (см. [84]).

$\nu = \omega/2\pi$ и подставлены известные значения для электрона ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г).

Равенство нулю проводимости σ при сделанных предположениях вполне понятно: в силу отсутствия соударений электроны и ионы не передают своей энергии другим электронам, ионам или молекулам, а лишь колеблются под влиянием поля. В рамках элементарной теории влияние соударений можно учесть путем введения некоторой силы трения $m\nu_{эфф}\dot{\mathbf{r}}_n$, равной среднему изменению импульса частицы в единицу времени. Если считать, что при каждом соударении с ионом или с молекулой электрон в среднем теряет весь импульс упорядоченного движения $m\dot{\mathbf{r}}_n$, то $\nu_{эфф}$ есть число соударений в секунду. Фактически, конечно, при разных соударениях изменения импульса также различны, и поэтому $\nu_{эфф}$ играет роль некоторого эффективного числа (частоты) соударений. Строго говоря, величина $\nu_{эфф}$, таким образом, еще не определена и делается только предположение о том, что средняя сила трения пропорциональна $\dot{\mathbf{r}}_n$. Фактически же из основ кинетической теории газов известно, что, скажем, при соударениях с молекулами, $\nu_{эфф} = \pi a^2 N_m \bar{v}$, где a — эффективный радиус молекулы (их концентрация равна N_m) и $\bar{v}$ — некоторая средняя тепловая скорость электронов. Более определенные выражения для $\nu_{эфф}$ при соударениях электронов с молекулами и с ионами получают при кинетическом рассмотрении, но саму величину $\nu_{эфф}$ можно использовать уже в элементарной теории. Итак, при учете соударений

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + m\nu_{эфф}\dot{\mathbf{r}}_n = e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \tag{12.5}$$

и, поступая, как раньше, получаем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega(\omega + i\nu_{эфф})} \equiv \varepsilon' + i\varepsilon'' \equiv \varepsilon' + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \\ \varepsilon' &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\left(\omega^2 + \nu_{эфф}^2\right)}, \quad \sigma = \frac{1-\varepsilon'}{4\pi}\nu_{эфф} = \frac{e^2 N \nu_{эфф}}{m\left(\omega^2 + \nu_{эфф}^2\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

В важных предельных случаях имеем

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N \nu_{эфф}}{m\omega^2} = 2{,}53 \cdot 10^8 \frac{N\nu_{эфф}}{\omega^2}, \quad \omega^2 \gg \nu_{эфф}^2, \tag{12.7}$$

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\nu_{эфф}^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N}{m\nu_{эфф}}, \quad \omega^2 \ll \nu_{эфф}^2. \tag{12.8}$$

В низкочастотном пределе (12.8) проводимость совпадает, конечно, с получающейся в элементарной теории статической проводимостью ($1/\nu_{эфф} = \tau_{эфф}$, где $\tau_{эфф}$ — эффективное время свободного пробега, которое используется наряду с $\nu_{эфф}$).

При выводе выражения для ε мы выше считали, что действующее на электрон поле $\mathbf{E}_д$ равно макроскопическому (сред-

нему) полю $\mathbf{E}$, ибо именно такое поле подставляли в уравнения движения (12.3) и (12.5). Между тем, как хорошо известно из теории диэлектриков, поля $\mathbf{E}_д$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не равны друг другу и для простейших моделей диэлектрика (см. гл. 6 и, например, [85]) $\mathbf{E}_д = \mathbf{E} + {}^4/_3\pi\mathbf{P} = {}^1/_3(\varepsilon + 2)\mathbf{P}$. В плазме (и вообще в хорошо проводящей среде) подобная формула неприменима, и вместе с тем достаточно строгое выяснение связи между $\mathbf{E}_д$ и $\mathbf{E}$ является непростой задачей (см. [84] и указанную там литературу). В газовой плазме с большой точностью можно считать, что

$$\mathbf{E}_д = \mathbf{E}, \tag{12.9}$$

как это принималось выше и будет предполагаться в дальнейшем. Заметим, однако, что вопрос о действующем поле заслуживает более детального анализа в применении к плотной (металлической) плазме, а также при учете нелинейных эффектов. В связи с последним замечанием подчеркнем, что мы здесь везде ограничиваемся линейным приближением — линейной электродинамикой плазмы. В сильных полях (вопрос о том, когда поле можно считать сильным, требует особого анализа *)) картина значительно усложняется и до сих пор является предметом многочисленных исследований (см. [106, 165, 172]).

Быть может не будет излишним пояснить также, почему одно из уравнений поля записано выше в виде (12.1), а не в форме $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\rho_{ext}$ (см., например, (11.1)). Дело просто в том, что внешние заряды в (12.1) считаются отсутствующими и используется уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{E} + 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P} = 0$. Далее источником поляризации считаются как раз лишь рассматриваемые электроны и ионы, в силу чего $\operatorname{div}\mathbf{P} = e(N - N_i)$. Иными словами, отличие проницаемости ε от единицы обусловлено электронами и ионами, и если бы мы записали уравнение в виде $\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi e(N - N_i)$, как это может показаться естественным на первый взгляд, то дважды учли бы один и тот же эффект.

Поскольку элементарные формулы (12.6)—(12.8) имеют весьма широкую область применимости, приведем здесь некоторые выражения для эффективного числа соударений $\nu_{эфф}$ (см. [84]). Для соударений электронов с молекулами точное вычисление не представляется, вообще говоря, возможным, и широко используются данные экспериментов. Если же считать молекулу твердым шариком радиуса a, то

$$\nu_{эфф,\,m} = \frac{4}{3}\pi a^2\bar{v}N_m = 8{,}3\cdot 10^5\pi a^2\sqrt{T}\,N_m, \quad \omega^2 \gg \nu_{эфф}^2, \tag{12.10}$$

$$\nu_{эфф,\,m} = \frac{3\pi}{8}\pi a^2\bar{v}N_m, \quad \omega^2 \ll \nu_{эфф}^2, \tag{12.11}$$

*) Например, в отсутствие соударений линейное приближение в изотропной плазме пригодно, вообще говоря, пока скорость упорядоченного движения электронов мала по сравнению со скоростью теплового движения, т. е. $\dot{r} \sim eE_0/m\omega \ll \bar{v} \sim \sqrt{\varkappa T/m}$.

где $\bar{v} = \sqrt{8\varkappa T/\pi m}$ — средняя арифметическая скорость электронов при равновесном распределении скоростей с температурой T. Отличие выражений (12.10) и (12.11) незначительно ($^4/_3 = 1{,}33$, $3\pi/8 = 1{,}18$), особенно учитывая, что речь идет о «предельной» модели твердых шариков. Тем не менее уже на этом примере ясно, что формулы элементарной теории носят приближенный характер и эффективное число соударений фактически является функцией частоты.

Для соударений электронов с ионами (при $N = N_i$)

$$\nu_{\text{эфф},\, i} = \pi \frac{e^4}{(\varkappa T)^2} \bar{v} N \ln\left(0{,}37 \frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right) = \frac{5{,}5N}{T^{3/2}} \ln\left(220 \frac{T}{N^{1/3}}\right), \quad \omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2, \tag{12.12}$$

$$\nu_{\text{эфф},\, i} = \frac{1{,}6N}{T^{3/2}} \ln\left(324\gamma \frac{T}{N^{1/3}}\right), \quad \gamma \sim 1, \quad \omega^2 \ll \nu_{\text{эфф}}^2. \tag{12.13}$$

Значение (12.13) примерно втрое меньше величины (12.12), но столь большое различие между ними несколько иллюзорно. Дело в том, что при условии $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$ межэлектронные соударения не играют роли и выражение (12.12) сохраняет силу. В случае же $\omega^2 \ll \nu_{\text{эфф}}^2$ межэлектронные соударения влияют на $\nu_{\text{эфф},\, i}$ и при их учете выражение (12.13) нужно умножить на 1,73. В итоге при учете межэлектронных соударений эффективное число соударений электронов с ионами в высокочастотном случае примерно вдвое больше числа соударений в низкочастотном случае.

Если точные выражения (12.12) и (12.13) можно получить только в результате детального расчета, то их структуру нетрудно установить из простых соображений. Соударение электрона с ионом приводит к значительному изменению направления скорости электрона, если он пролетает от иона на прицельном расстоянии $p \sim e^2/\varkappa T$, когда кулоновская энергия $e^2/p \sim \varkappa T$, т. е. порядка кинетической энергии электрона. Отсюда соответствующее сечение для «близких» соударений $q \sim \pi p^2 \sim \pi e^4/(\varkappa T)^2$. Число соударений $\nu_{\text{эфф},\, i}$ определяется, однако, не только близкими, но и «далекими» соударениями, учет которых как раз и приводит к появлению в (12.12) и (12.13) логарифмического множителя, обычно обозначаемого через L. Этот множитель типичен для физики плазмы, его появление связано с тем, что кулоновское поле медленно (как $1/r$) спадает с расстоянием лишь вплоть до некоторого дебаевского радиуса экранирования, равного

$$r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} = 4{,}9 \sqrt{\frac{T\,(K)}{N}} \text{ см}. \tag{12.14}$$

Точнее, данный ион плазмы с зарядом e в результате отталкивания электронов и притяжения других ионов создает в плазме поле с потенциалом $(e/r)\exp(-r/r_D)$, которое совпадает с кулоновским полем e/r лишь в области $r \ll r_D$. При $r \gg r_D$ поле

практически отсутствует и, таким образом, при соударениях электрона с ионом в плазме именно радиус порядка r_D играет роль максимального прицельного параметра p_{max}. Кулоновский логарифм обычно записывается в виде

$$L = \ln\left\{\frac{p_{max}}{p_{min}}\right\} = \ln\left\{\frac{3\varkappa T}{2e^2}\left(\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}\right)^{1/2}\right\} \approx \frac{3}{2}\ln\left(220\,\frac{T}{N^{1/3}}\right), \quad (12.15)$$

где положено $p_{max} = r_D$ и $p_{min} = \frac{e^2}{3/2 \varkappa T}$; вопрос об экранировке и вывод выражения (12.14) рассматриваются ниже (другой метод см., например, в § 4 книги [84]).

Понятие о дебаевском экранировании, характеризуемом дебаевским радиусом r_D, имеет физический смысл лишь в условиях, когда радиус r_D заметно превосходит среднее расстояние между частицами $\bar{r} \sim N^{-1/3}$. Таким образом, мы приходим к условиям

$$r_D \gg N^{-1/3}, \quad \varkappa T \gg e^2 N^{1/3}. \quad (12.16)$$

Второе неравенство здесь, конечно, следует из первого и определения (12.14). Смысл этого условия очевиден: средняя кинетическая энергия частиц в равновесной плазме $\frac{3}{2}\varkappa T$ должна быть велика по сравнению со средней энергией кулоновского взаимодействия между частицами $e^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3}$. Газовой плазмой или просто плазмой (в отличие, скажем, от твердотельной плазмы) называют как раз систему заряженных частиц, в которой условие (12.16) соблюдается. Не нужно думать, однако, что в газовой плазме можно неограниченно пользоваться представлением о дебаевском экранировании. В частности, нужно заметить, что для расстояний и длин волн, сравнимых (или меньших) со средним расстоянием между частицами $\bar{r} \sim N^{-1/3}$, нельзя уже, конечно, считать плазму непрерывной средой или, точнее, флуктуации числа частиц или заряда становятся большими. Сказанное не препятствует использованию уравнений поля (11.1) для статистических средних величин при больших значениях волнового вектора $\mathbf{k}$; в этом смысле, например, приводимое ниже выражение (12.49) для $\varepsilon_l(0, k)$ формально пригодно и при $k \gtrsim N^{1/3}$ (т. е. при $\lambda = 2\pi/k \lesssim \bar{r} \sim N^{-1/3}$). Однако при вычислении флуктуаций и, вообще, если мы интересуемся не только средними статистическими выражениями, условие типа $\lambda \gg N^{-1/3}$ должно играть свою роль. Отметим также, что классическое описание частиц в обсуждаемых задачах предполагает соблюдение условия $\lambda \gg \lambda_Б = \hbar/mv$, где $\lambda_Б$ — длина волны де Бройля.

Помимо уже сделанных оговорок, определяющих область применимости полученных формул, нужно также указать на ограничения, связанные с использованием классической теории. В отсутствие соударений квантовое ограничение при рассмотре-

нии взаимодействия излучения со свободными электронами связано с условием

$$\hbar\omega \ll mc^2 = 0{,}51 \cdot 10^6 \text{ эВ}. \qquad (12.17)$$

При соблюдении этого требования рассеяние электромагнитных волн на свободных электронах при всех углах рассеяния можно описывать классически. Далее показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}$ (считаем, что $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$) определяется фактически рассеянием воли на частицах среды, откуда в конечном счете следует справедливость выражения (12.4). В том же можно убедиться и другими способами. При учете соударений и вычислении поглощения (т. е. проводимости $\sigma = \omega\varepsilon''/4\pi$) нужно также иметь в виду условие

$$\hbar\omega \ll \varkappa T = 1{,}38 \cdot 10^{-16} T\,(K). \qquad (12.18а)$$

Смысл этого условия — малость энергии фотонов по сравнению с кинетической энергией электронов (подробнее о таком требовании см., например, в § 3 в [84]). Поскольку речь сейчас идет о нерелятивистской плазме, когда

$$\varkappa T \ll mc^2, \qquad (12.18б)$$

неравенство (12.18а) значительно жестче условия (12.17), но требование (12.18а), как сказано, не играет роли при вычислении величины ε' (при $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$).

Для неограниченной применимости классической теории нужно также, чтобы электронный газ оставался невырожденным; это эквивалентно требованию

$$T \gg T_0 \sim \hbar^2 N^{2/3}/m\varkappa. \qquad (12.19)$$

Смысл температуры вырождения T_0 таков: при этой температуре энергия $\varkappa T_0$ порядка нулевой энергии

$$\frac{\hbar^2}{m\bar{r}^2} \sim \frac{\hbar^2}{m} N^{2/3},$$

связанной с локализацией электрона в объеме порядка $\bar{r}^3 \sim 1/N$. Другая интерпретация температуры T_0, разумеется, совершенно эквивалентная упомянутой, состоит в том, что при этой температуре длина волны де Бройля $\lambda_{\text{Б}} = \hbar/mv_0$, $v_0 \sim \sqrt{\varkappa T_0/m}$ порядка расстояния между частицами $\bar{r} \sim N^{-1/3}$ (как часто бывает, полное совпадение различных по форме условий имеет место, если пользоваться вместо λ длиной $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi = \hbar/mv_0$).

В большинстве встречающихся случаев (хотя и далеко не всегда) условия (12.16)—(12.19) выполняются и значительно более существенными оказываются ограничения, связанные с тем,что выше не учитывалась пространственная дисперсия. По самому смыслу пространственной дисперсии (см. гл. 11) она

несущественна лишь в том случае, когда поле (скажем, поле волны с частотой ω и длиной волны $\lambda = 2\pi/k$) мало изменяется на расстоянии, ответственном за формирование «отклика» среды, например на создание поляризации $\mathbf{P}$ под влиянием поля $\mathbf{E}$. В плазме при учете теплового движения электрон за период $\tau = 2\pi/\omega$ проходит расстояние $\xi \sim \tau\bar{v} \sim \sqrt{\varkappa T/m}\,\tau$. Пространственной дисперсией можно, как ясно из сказанного, пренебречь при условии, что $\xi \ll \lambda$, т. е. при

$$\omega \gg k\bar{v} \sim \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}. \tag{12.20}$$

Для волны, распространяющейся в среде,

$$E \sim \exp i\,(kz - \omega t) \sim \exp i\omega\,(z/v_\phi - t),$$

и, очевидно, фазовая скорость волн равна

$$v_\phi = \omega/k. \tag{12.21}$$

Отсюда и из (12.20) ясно, что для волн, свободно распространяющихся в плазме, пространственной дисперсией можно пренебречь, если

$$v_\phi \gg \bar{v} \sim \sqrt{\varkappa T/m}. \tag{12.22}$$

При использовании уравнения (12.3) пренебрежение пространственной дисперсией нашло отражение в том, что поле записано в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, а не в форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i\,(\mathbf{k}\mathbf{r}_n(t) - \omega t)].$$

Поскольку игнорирование пространственной дисперсии эквивалентно, таким образом, неучету теплового движения частиц плазмы, говорят о приближении «холодной» плазмы. Иными словами, плазму, рассматриваемую без учета теплового движения, называют холодной плазмой.

Забегая несколько вперед, заметим, что для волн поперечного поля требование (12.22) в рассматриваемой нерелятивистской плазме всегда хорошо выполняется. Для продольного поля, напротив, это неравенство легко нарушается. Лучший способ детально и надежно выяснить условия, когда можно пренебречь пространственной дисперсией, состоит, разумеется, в анализе конкретной ситуации на основе общих выражений, в которых эта дисперсия принята во внимание. Здесь мы остановимся лишь на наиболее распространенном и общем методе, позволяющем учитывать частотную и пространственную дисперсию, — на методе кинетического уравнения.

Будем описывать состояние плазмы с помощью функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, определяемой таким образом, что среднее число частиц dN в объеме $d\mathbf{r}\,d\mathbf{v} = dx\,dy\,dz\,dv_x\,dv_y\,dv_z$ равно $dN = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор и $\mathbf{v}$ — скорость частиц.

Тогда по определению (это есть условие нормировки)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = N(t, \mathbf{r}) \tag{12.23}$$

где N — концентрация частиц (для простоты мы здесь и ниже имеем в виду электроны, т. е. $f \equiv f_e$ и $N \equiv N_e$; в случае ионов или молекул индекс e нужно заменить соответственно на i или m).

Кинетическое уравнение, определяющее функцию f, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)\nabla_{\mathbf{v}} f + \mathscr{S} = 0, \tag{12.24}$$

где e и m — заряд и масса рассматриваемых частиц, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности действующих на частицы электрического и магнитного полей (практически эти поля можно обычно считать средними макроскопическими полями) и

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{\partial f}{\partial v_x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial v_y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x_z}\mathbf{k}$$

(разумеется, можно пользоваться не только декартовыми координатами, и здесь они выбраны лишь для конкретности); величина $\mathscr{S}$ в (12.24) представляет собой так называемый интеграл столкновений (соударений), учитывающий изменение функции f в результате столкновений частиц данного сорта (например, электронов) в области $d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$ с частицами всех других сортов, а также с другими частицами данного сорта (т. е. с частицами данного сорта, находящимися в других областях фазового пространства). В $\mathscr{S}$ можно также включать члены, определяющие изменение функции f за счет ионизации, рекомбинации и т. п.

В отсутствие полей в равновесном состоянии функции распределения для электронов и ионов являются максвелловскими (то же можно сказать о молекулах, но сейчас они не рассматриваются)

$$\left.\begin{aligned} f_e \equiv f = f_{00}(v) &= N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right), \\ f_i = f_{i,\,00}(v) &= N_i\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{Mv^2}{2\varkappa T}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

Здесь температуры электронов и ионов считаются одинаковыми. При полном равновесии так оно, конечно, и будет *).

*) При полном равновесии не только частицы должны иметь одинаковую температуру T, но электромагнитное излучение также должно быть тепловым (излучением черного тела) с той же температурой T. Последнее требование тем не менее обычно не выполняется; однако это часто не играет роли вследствие относительной слабости взаимодействия частиц с излучением. Но,

Нужно, однако, иметь в виду, что обмен импульсом (релаксация по импульсу) в плазме происходит значительно быстрее обмена энергией (все дело в малости параметра $m/M \lesssim 10^{-3}$, подробнее см. [84]). Поэтому иногда можно рассматривать неизотермическую плазму с максвелловским распределением (12.25), но соответственно электронной и ионной температурами T_e и T_i (в некоторых случаях даже $T_e \gg T_i$).

Если мы интересуемся задачами, относящимися к области линейной теории (в частности, линейной электродинамики), то электрическое поле $\mathbf{E}$ можно считать слабым *) и, в согласии с этим, изменение функции распределения рассматривать в качестве возмущения. Иными словами, будем искать функцию распределения в виде

$$f = f_{00}(\mathbf{v}) + f'(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad |f'| \ll f_{00}, \tag{12.26}$$

где при нахождении тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в равновесной плазме в качестве невозмущенной функции f_{00} выбирается максвелловское распределение (12.25); ниже ограничимся этим случаем.

Тогда в отсутствие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ в первом приближении получаем

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f' + \frac{e}{m}\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} + \mathscr{S} = 0. \tag{12.27}$$

Вопрос о виде интеграла соударений $\mathscr{S}$ вообще и в плазме в частности явился объектом детального анализа (см. [164] и указанную там литературу). Здесь ограничимся простейшим случаем, когда в уравнении для функции распределения электронов можно положить $\mathscr{S} = \{\nu_m(v) + \nu_i(v)\}f'$, где ν_m отвечает вкладу от соударений электронов с молекулами и ν_i — от соударений с ионами (простую интерпретацию такого выражения для $\mathscr{S}$ см. в § 4 книги [84]). Рассматривая далее поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ и функцию $f' = f'_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, получаем из (12.27)

$$-i(\omega - \mathbf{kv})f' + \frac{e}{m}(\mathbf{Ev})\frac{1}{v}\frac{\partial f_{00}(v)}{\partial v} + \nu(v)f' = 0, \tag{12.28}$$

разумеется, в каждом конкретном случае нужно контролировать возможность пренебречь влиянием излучения на функцию распределения частиц. В качестве примера ситуации, в которой функция распределения частиц не будет равновесной в условиях неравновесности излучения, приведем газ релятивистских электронов в сильном магнитном поле (например, вблизи пульсаров). Тогда в результате больших магнитотормозных потерь функция распределения электронов должна быть, вообще говоря, сильно анизотропной (см., например, гл. 4).

*) В постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ равновесная функция распределения остается максвелловской, несмотря на то, что траектории движения отдельных частиц в поле и без поля различны (см. также ниже). Кроме того, член с магнитным полем в (12.24) содержит множитель v/c. Поэтому ограничения на магнитное поле уже иные, чем на электрическое.

где учтено, что $\nabla_{\mathbf{v}} f_{00} = \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \frac{\mathbf{v}}{v} = -\frac{mv}{\varkappa T} f_{00} \frac{\mathbf{v}}{v}$ и положено $\nu = \nu_m + \nu_i$. Отсюда находим

$$f' = -i \frac{e}{m} \frac{(\mathbf{Ev})}{(\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v))} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} = i \frac{e}{\varkappa T} \frac{(\mathbf{Ev}) f_{00}}{(\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v))}. \quad (12.29)$$

Далее, по определению для плотности тока или, точнее, соответствующей фурье-компоненты имеем

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi} (\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = e \int v_i f'_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (12.30)$$

Подставляя (12.29) в (12.30), получаем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int \frac{v_i v_j}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu(v)} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} d\mathbf{v}. \quad (12.31)$$

При учете же как электронов (заряд $e = e_1$, масса $m = m_1$), так и ионов разных сортов (заряды e_α, массы m_α, $\alpha = 2, \ldots, l$) находим

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega} \int \frac{v_i v_j}{\omega - \mathbf{kv} + i\nu_\alpha(v)} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00,\alpha}}{\partial v} d\mathbf{v}. \quad (12.32)$$

Из (12.28)—(12.32) сразу же очевидно, что пренебрежение пространственной дисперсией, т. е. зависимостью от $\mathbf{k}$, эквивалентно пренебрежению членом с $\mathbf{kv}$ по сравнению с $\omega + i\nu(v)$. Тем самым при неучете соударений мы приходим к условию (12.20), как этого и следовало ожидать.

Для установления соответствия с элементарной теорией пренебрежем в знаменателе (12.31) членами $-\mathbf{kv} + i\nu(v)$ по сравнению с ω. Тогда сразу же находим результат (12.4)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2,$$

поскольку

$$\int v_i v_j \frac{m}{\varkappa T} f_{00} d\mathbf{v} = \delta_{ij} N.$$

При пренебрежении же членом $\mathbf{kv}$, но с учетом члена $i\nu(v)$ получаются уже приводившиеся выше выражения элементарной теории с соответствующими значениями эффективного числа соударений $\nu_{\text{эфф}}$ (подробные расчеты см. § 6 в книге [84]). Будем теперь считать соударения несущественными, но учтем пространственную дисперсию. Тогда, правда, возникает вопрос о том, как вычислить интегралы в (12.31) и (12.32) вблизи полюса

$$\omega = \mathbf{kv}. \quad (12.33)$$

Проще всего обойти эту трудность, считая вначале, что число соударений ν хотя и очень мало, но все же не равно нулю. Тогда полюс на плоскости комплексной переменной $u = \mathbf{kv}/k$ смещается в точку $u_0 = (\omega + i\nu)/k$, лежащую выше контура интегрирования (здесь существенно, что $\nu > 0$), т. е. выше вещественной оси u (интегрирование по $d\mathbf{v}$ в (12.31) и (12.32) сводится к интегрированию по du и по проекциям скорости, перпендикулярным вектору $\mathbf{k}$). В результате интегрирование можно производить, пользуясь соотношением

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{1}{x + i\nu} = \frac{\mathscr{P}}{x} - i\pi\delta(x), \tag{12.34}$$

где $\mathscr{P}$ — означает, что интеграл по области вблизи особенности $x = 0$ берется в смысле главного значения. Используя такой прием, из (12.31) при $\nu \to +0$ получаем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int v_i v_j \frac{1}{v} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \left\{ \frac{\mathscr{P}}{\omega - \mathbf{kv}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{kv}) \right\} d\mathbf{v}. \tag{12.35}$$

Отсюда следует, что и в отсутствие столкновений имеется некоторое поглощение (мнимая часть ε_{ij} отлична от нуля), причем за это поглощение ответственны лишь частицы, скорость которых удовлетворяет условию (12.33). Но условие (12.33) представляет собой не что иное, как условие черенковского излучения (см. (6.58)). Тем самым сразу же становится ясной физическая причина поглощения даже в отсутствие соударений (на первый взгляд такой результат может показаться парадоксальным, например, в свете излагавшейся выше элементарной теории). В самом деле, при условии (12.33) частица (скажем, электрон) излучает черенковские волны (для них $\omega/k = v_\phi = v \cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$). Но всякий процесс излучения может быть обращен и, следовательно, при том же условии, налагаемом на ω и $\mathbf{k}$, волна должна вызывать обратный эффект — черенковское поглощение, связанное с передачей от волны к частице соответствующих энергии и импульса. Сказанное является, разумеется, лишь повторением интерпретации бесстолкновительного затухания в изотропной плазме, на которой мы останавливались в гл. 7. Бесстолкновительное поглощение плазменных волн часто называют затуханием Ландау, поскольку оно впервые было выявлено в работе [121] при решении кинетической задачи с начальными условиями. Помимо указанной «черенковской интерпретации», бесстолкновительное поглощение можно трактовать и иначе, причем это особенно просто сделать при $\cos\theta = 1$, когда $\omega/k = v_\phi = v$; тогда волна и частица движутся в одном направлении, а фаза волны «на частице» неизменна, в силу чего частица все время ускоряется и, значит, получает энергию от волны.

В изотропной (и негиротропной) среде общее выражение для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon_{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_l(\omega, k). \quad (12.36)$$

Действительно, в нашем распоряжении в этом случае имеются лишь два тензора δ_{ij} и $k_i k_j$, группировка же членов определяется из требования, чтобы для продольного поля «работал» лишь тензор $\varepsilon_l(\omega, k)$. Для продольного поля, по определению, вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{E}_l \equiv \mathbf{E}_\parallel = E\mathbf{k}/k$. Для такого поля в случае (12.36)

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l(\omega, k)\,\mathbf{E}_l. \quad (12.37)$$

Напротив, для поперечного поля $\mathbf{E}_{tr} \equiv \mathbf{E}_\perp$, удовлетворяющего условию $(\mathbf{k}\mathbf{E}_{tr}) = 0$,

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{tr}(\omega, k)\,\mathbf{E}_{tr}. \quad (12.38)$$

Как из общих соображений (см. гл. 11), так и из конкретных выражений для ε_{ij} (см. ниже) ясно, что для немагнитной среды *)

$$\varepsilon_{tr}(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(\omega), \quad (12.39)$$

где $\varepsilon(\omega)$ — проницаемость изотропной среды при неучете пространственной дисперсии (см., скажем, (12.4) или (12.6)). Общие выражения для ε_{tr} и ε_l в плазме, получающиеся на основе (12.31), (12.32), приведены, например, в монографии [164]. Здесь укажем лишь некоторые формулы, отвечающие важным предельным случаям (плазма считается сильно ионизированной).

Для «высоких» частот, когда

$$\omega \gg k v_{Te,\,i}, \quad \omega \gg \nu_{\text{эфф}}, \quad (12.40)$$

---

*) Как подчеркивалось в гл. 11, при введении тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ могут быть учтены и магнитные свойства среды, и тогда использовать тензор магнитной проницаемости μ_{ij} не нужно. Для магнитной среды, однако, равенство (12.39) уже несправедливо, ибо оно означало бы, что среда описывается лишь проницаемостью ε, а магнитная проницаемость $\mu = 1$. Как показано в § 2 монографии [163], для изотропной среды с $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$ и $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$ при введении проницаемости μ имеют место связи (фактически относящиеся к области малых ω и k)

$$\frac{1}{\mu(\omega, k)} = 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\left[\varepsilon_{tr}(\omega, k) - \varepsilon_l(\omega, k)\right], \quad \varepsilon(\omega, k) = \varepsilon_l(\omega, k).$$

При $\omega \to 0$, $k \to 0$ в таком выражении для μ нужно делать предельный переход. В этой связи, несомненно, при малых ω и k, когда пространственная дисперсия несущественна, удобнее пользоваться тензорами $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\mu_{ij}(\omega)$, а не вводить $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

имеем *)

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left[1 - i\frac{\nu_{эфф}}{\omega} - i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega}{kv_{Te}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)\right], \quad (12.41)$$

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left[1 - i\frac{\nu_{эфф}}{\omega} + 3\frac{k^2v_{Te}^2}{\omega^2} - \right.$$
$$\left. - i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega^3}{k^3v_{Te}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)\right]. \quad (12.42)$$

Появление здесь экспоненциальных факторов обусловлено использованием максвелловской функции распределения (12.25); уже отсюда ясно, что для неравновесной плазмы соответствующие части величин ε_{tr} и ε_l могут радикально отличаться от выражений (12.41) и (12.42).

При $k \to 0$ эти выражения (при условии $\omega \gg \nu_{эфф}$) совпадают с (12.6), как и должно быть. Пусть теперь

$$kv_{Te} \gg (\omega,\ \nu_e), \quad kv_{Ti} \gg (\omega,\ \nu_i), \quad (12.43)$$

где ν_e — число соударений электронов и ν_i — число соударений ионов (учитывать нужно все существенные соударения данной частицы с другими; запись $kv_{Ti} \gg (\omega, \nu_i)$ означает, что $kv_{Ti} \gg \omega$ и $kv_{Ti} \gg \nu_i$ и т. п.). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{tr} &= 1 + i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega kv_{Te}}, \\ \varepsilon_l &= 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2v_{Ta}^2}\left(1 + i\sqrt{1/2\pi}\,\frac{\omega}{kv_{Ta}}\right) \approx 1 + \frac{1}{k^2r_D^2}. \end{aligned}\right\} \quad (12.44)$$

Здесь

$$\omega_{pa}^2 = \frac{4\pi e^2N_a}{m_a}, \quad a = e,\ i \quad (12.45)$$

и, при $T_e = T_i = T$, r_D — дебаевский радиус (12.14); в более общем случае вводятся радиусы

$$r_{Da} = \sqrt{\frac{\varkappa T_a}{4\pi e_a^2 N_a}} = \frac{v_{Ta}}{\omega_{pa}}. \quad (12.46)$$

При $T_e = T_i$ (изотермическая плазма) и $N_i = N_e \equiv N$

$$\frac{1}{r_D^2} = \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}, \quad r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}}. \quad (12.47)$$

*) Здесь использованы обозначения $v_T = v_{Te} = \sqrt{\varkappa T/m}$ и $v_{Ti} = \sqrt{\varkappa T/M}$, где M — масса ионов (считаем, что имеются ионы одного сорта). Если $T_e \neq T_i$, то нужно писать $v_{Ta} = \sqrt{\varkappa T_a/m_a}$, $a = e, i$ и т. п. Членами порядка m/M пренебрегаем, и поэтому, например, в (12.41) и (12.42) вклад ионов явно не фигурирует (в выражении для $\nu_{эфф}$ соударения с ионами нужно, конечно, принимать во внимание).

Рассмотрим некоторый «внешний» покоящийся заряд с плотностью $\rho_{ext} = e\delta(\mathbf{r})$, внесенный в плазму. Потенциал φ поля заряда определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_l = -\nabla\varphi, \\ &\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned}\right\} \tag{12.48}$$

откуда в случае (12.44) следуют соотношения *)

$$\varphi(0, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e}{k^2\varepsilon_l(0, \mathbf{k})}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(0, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\,d\mathbf{k} =$$

$$= \frac{e\cdot\exp(-r/r_D)}{r}, \quad \varepsilon_l(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \tag{12.49}$$

Каждый ион и электрон в плазме можно в известных пределах считать внешним по отношению ко всем другим частицам и, следовательно, формула (12.49) отражает и тот факт, что кулоновское поле каждой частицы в плазме экранируется другими частицами. Такое экранирование, как уже указывалось, существенно при рассмотрении соударений. Поэтому вопрос об учете экранирования частиц плазмы друг другом сводится к нахождению выражения для интеграла соударений $\mathscr{S}$ и последующему решению кинетического уравнения (см. [164, 171]).

На примере предельного случая (12.43) или, грубо говоря, в статическом пределе $\omega \to 0$ особенно ясно видна роль пространственной дисперсии в плазме. Если бы мы воспользовались в этом случае формулой элементарной теории $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, то пришли бы просто к результату $\varepsilon \to -\infty$, $E_l \to 0$, между тем как в действительности поле проникает в плазму на расстояния порядка r_D.

Другая не менее важная особенность плазмы как среды с пространственной дисперсией — появление продольных волн. К вопросу об этих и других нормальных волнах, могущих распространяться в изотропной плазме, сейчас и перейдем.

Общее дисперсионное уравнение, определяющее связь между ω и $\mathbf{k}$ в волнах, распространяющихся в среде (в отсутствие внешних зарядов и токов), как мы видели в гл. 11, имеет вид

$$\left|\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2\delta_{ij} + k_i k_j\right| = 0. \tag{11.24}$$

*) Фурье-компоненты потенциала φ чаще всего вводят (нормируют) так, как это сделано в (12.49). Для других величин широко используется, в частности в настоящей книге, и другая нормировка, при которой множитель типа $(2\pi)^{-3}$ включается в фурье-компоненты (в случае потенциала это отвечает определению $\varphi(\mathbf{r}) = \int \varphi(0, \mathbf{k})\,e^{i\mathbf{kr}}d\mathbf{r}$ в силу чего компоненты $\varphi(0, \mathbf{k})$ отличаются множителем $(2\pi)^{-3}$ от (12.49)). Сказанное необходимо, конечно, всегда помнить при вычислениях.

В *изотропной среде, когда* ε_{ij} *определяется выражением* (12.36), дисперсионное уравнение распадается на уравнение для продольных волн (при $\omega \neq 0$)

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0 \tag{12.50}$$

и уравнение для поперечных волн

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{tr}(\omega, k). \tag{12.51}$$

Здесь $\tilde{n}(\omega) \equiv \tilde{n}_{tr}(\omega)$ — комплексный показатель преломления для поперечных волн. В изотропной среде в силу вырождения двум возможным независимым состояниям поляризации поперечных волн отвечает одно и то же значение $\tilde{n}_{tr}(\omega)$; вместе с тем уравнение (12.51) может в принципе иметь несколько корней $\tilde{n}_{tr,\,j}(\omega)$. Нужно помнить, однако, что связь между k и $\tilde{n}$ представляет собой просто определение величины $\tilde{n}$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{n}(\omega) = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa),$$

смысл которого ясен из выражения для поля в плоской волне

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega\left(\frac{\tilde{n}}{c}z - t\right)\right\} =$$
$$= \mathbf{E}_0 \exp\left\{-\frac{\omega}{c}\varkappa z + i\omega\left(\frac{n}{c}z - t\right)\right\},$$

где *направление распространения волны выбрано за ось* z.

Разрешая уравнение (12.50) относительно k, мы также можем записать это соотношение в виде $k(\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{n}_l(\omega)$, где $\tilde{n}_l(\omega)$ — показатель преломления для продольной волны или продольных волн, поскольку уравнение (12.50) может в принципе при данной частоте ω иметь несколько корней.

Проще всего к результатам (12.50) и (12.51) прийти не непосредственно из уравнения (11.24) или (11.27), а отправляясь от исходного волнового уравнения (11.22), (11.23). Тогда, учитывая (12.36), *для продольного поля* $\mathbf{E}_l = E\mathbf{k}/k$ сразу же получаем уравнение (при $\omega \neq 0$)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_l(\omega, k)\,\mathbf{E}_l = 0, \tag{12.52}$$

откуда непосредственно следует условие (12.50) — иначе нетривиальные решения для E_l отсутствуют. Аналогично для поперечного поля

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{tr}(\omega, k)\,\mathbf{E}_{tr} = k^2\mathbf{E}_{tr}, \tag{12.53}$$

что приводит к условию (12.51).

При пренебрежении пространственной дисперсией выражение (12.51) приобретает хорошо знакомый вид (см. (12.39))

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \qquad (12.54)$$

причем имеется лишь один кратный корень $\tilde{n}(\omega) \equiv \tilde{n}_{tr}(\omega) \equiv \tilde{n}_{1,2}(\omega)$; как уже отмечалось, кратность корня связана с поляризационным вырождением в изотропной среде (корни $\pm\tilde{n}_{1,2}$ здесь не различаем — они соответствуют разным направлениям распространения волн).

В силу (12.54) и (12.2)

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon' = n^2 - \varkappa^2, \quad 4\pi\sigma/\omega = 2n\varkappa, \\ &n = \sqrt{{}^1/_2\varepsilon' + \sqrt{({}^1/_2\varepsilon')^2 + (2\pi\sigma/\omega)^2}}, \\ &\varkappa = \sqrt{-{}^1/_2\varepsilon' + \sqrt{({}^1/_2\varepsilon')^2 + (2\pi\sigma/\omega)^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.55)$$

где внутренний корень всегда считается положительным (например, при $\sigma = 0$ и $\varepsilon' < 0$ этот корень равен ${}^1/_2|\varepsilon'| = -{}^1/_2\varepsilon'$).

В качестве $\varepsilon(\omega)$ в (12.54) для поперечных волн в плазме нужно взять выражение (12.6), откуда в предельных случаях получаем простые формулы.

Так, при

$$|\varepsilon'| \gg 4\pi\sigma/\omega, \qquad (12.56)$$

имеем:

если $\varepsilon' > 0$, то

$$\left.\begin{aligned} &n \approx \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{эфф}^2}}, \\ &\varkappa \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\omega_p^2 \nu_{эфф}}{2\omega(\omega^2 + \nu_{эфф}^2)\sqrt{\varepsilon'}}, \\ &\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m, \end{aligned}\right\} \qquad (12.57)$$

если $\varepsilon' < 0$, то

$$\left.\begin{aligned} &n \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{-\varepsilon'}} = \frac{\omega_p^2 \nu_{эфф}}{\omega(\omega^2 + \nu_{эфф}^2)\sqrt{-\varepsilon'}}, \\ &\varkappa \approx \sqrt{-\varepsilon'} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{эфф}^2} - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (12.58)$$

если же

$$|\varepsilon'| \ll 4\pi\sigma/\omega, \qquad (12.59)$$

то

$$n \approx \varkappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 \nu_{эфф}}{2\omega(\omega^2 + \nu_{эфф}^2)}}. \qquad (12.60)$$

Согласно (12.57) показатель преломления $n < 1$; при малом числе соударений, когда $\omega^2 \gg \nu_{эфф}^2$, этот случай осуществляется практически при условии

$$\omega > \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}. \qquad (12.61)$$

Если $n < 1$, то $v_ф = c/n > c$ и черенковское излучение, а, значит, и поглощение отдельными частицами невозможно. Отсюда ясно, что для поперечных волн все затухание связано только с соударениями (имеем в виду волны, которые при $\nu_{эфф} \to 0$ распространяются, а не затухают в среде; см. условие (12.61) и нижеследующее замечание). Результат (12.41) не противоречит сказанному, поскольку он получен в нерелятивистском приближении и с использованием максвелловского распределения скоростей. В этом распределении формально имеются частицы и со скоростями $v > c$, что и ведет к появлению экспоненциально слабого затухания поперечных волн в (12.41). Релятивистский расчет приводит, конечно, к полному отсутствию бесстолкновительного затухания поперечных волн в плазме. Формула (12.41) тем не менее была выписана полностью, поскольку выражение для ε_{tr} годится не только для рассмотрения нормальных волн (еще раз подчеркнем это важное обстоятельство; см. гл. 11). Вместе с тем для поперечных волн множитель $\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_T^2}\right) = \exp\left(-\frac{c^2}{2n^2(\omega) v_T^2}\right)$ столь ничтожен, что соответствующее затухание все равно практически равно нулю.

Итак, для поперечных волн в изотропной плазме учет пространственной дисперсии не играет роли и пригодны формулы (12.57), широко используемые в радиоастрономии и теории распространения радиоволн в ионосфере.

Даже при слабом истинном поглощении, т. е. при условии (12.56) поле в плазме может сильно затухать — это имеет место при $\varepsilon' < 0$. Тогда, скажем, при $\nu_{эфф} \to 0$ (см. (12.58))

$$n = 0, \quad \varkappa = \sqrt{-\varepsilon'} = \sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1},$$
$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{|\varepsilon'|}\, z\right), \qquad (12.62)$$

где E_0 — поле при $z = 0$ (на внутренней границе плазмы), причем область вблизи границы здесь детальнее не рассматривается. Очевидно, случай (12.62) легко реализовать, и ему отвечает частота $\omega < \omega_p$. Физически в этом случае речь идет о полном внутреннем отражении волны от плазменного слоя (подробнее см. [84]). Вообще, как для плазмы, так и для сред более общего типа нужно помнить, что поглощение волн (переход энергии волн в тепло или упорядоченное движение частиц) и их затухание — разные вещи. В других терминах то же можно

выразить, заметив, что непоглощающие среды могут быть для данных волн как прозрачными (бесстолкновительная плазма для поперечных волн при $\omega > \omega_p$), так и непрозрачными (та же плазма при $\omega < \omega_p$).

Закон дисперсии для нормальных волн, т. е. связь в этих волнах k с ω часто выражают не в терминах показателя $\tilde{n}$, а непосредственно. Для поперечных волн в бесстолкновительной плазме

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

или

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \qquad (12.63)$$

Зависимость $\omega(k)$ удобно изобразить на графике; в случае (12.63) такой график приведен на рис. 12.1. Разумеется, при $\omega^2 \gg \omega_p^2$ влияние среды (плазмы) несущественно и, как и в вакууме, $\omega = ck$.

Перейдем к рассмотрению продольных волн. Еще сравнительно недавно возможность распространения в среде продольных электромагнитных или, точнее, электростатических волн не учитывалась. Причин здесь, по-видимому, было две. Во-первых, при производившемся обычно пренебрежении пространственной дисперсией условие существования продольных волн в изотропной среде имеет вид (см. (12.50) и (12.39))

$$\varepsilon(\omega) = 0. \qquad (12.64)$$

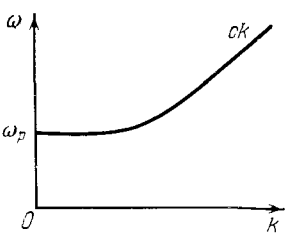


Рис. 12.1. Связь между ω и k (спектр, дисперсионная зависимость) для поперечных волн в изотропной бесстолкновительной плазме.

Это уравнение определяет дискретные частоты ω_l, не зависящие от $\mathbf{k}$, и, таким образом, продольные волны как-то в явном виде не выявляются. Во-вторых, практически во всех средах, кроме плазмы, корни ω_l уравнения (12.64) являются комплексными с довольно большой мнимой частью, т. е. соответствующие продольные колебания быстро затухают. Поэтому исследование продольных волн оказалось связанным с развитием физики газообразной плазмы, хотя сейчас такие волны рассматриваются и в конденсированных средах.

Поскольку учет пространственной дисперсии в случае продольных волн необходим для установления связи между ω и k даже в первом приближении, целесообразно сразу исходить из дисперсионного уравнения (12.50). Тогда в случае (12.40), т. е. для высокочастотных продольных волн *), используя (12.42) и

*) Такие волны называют также высокочастотными ленгмюровскими волнами.

полагая $\omega = \omega' + i\gamma$, имеем

$$\left.\begin{aligned} \omega'^2 &= \omega_p^2 + 3v_T^2 k^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 r_{D,e}^2), \\ \gamma &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{k^3 r_{D,e}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{D,e}^2} - {}^3/_2\right) - {}^1/_2 \nu_{\text{эфф}}, \end{aligned}\right\} \quad (12.65)$$

где затухание считается слабым, т. е., по предположению,

$$\operatorname{Im}\omega \equiv \gamma \ll \omega' = \operatorname{Re}\omega. \quad (12.66)$$

Для простоты ниже штрих у ω' будет опускаться и, таким образом, фактически не делается различия между ω и ω'.

Заметим, что условие $\omega^2 \gg (kv_T)^2$ (см. (12.40)) означает, что

$$k^2 r_{D,e}^2 = \left(\frac{2\pi r_{D,e}}{\lambda}\right)^2 \ll 1, \quad r_{D,e} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{4\pi e^2 N}}. \quad (12.67)$$

Следовательно, как ясно из (12.65), в условиях (12.67) в нулевом приближении $\omega^2 = \omega_p^2$ и бесстолкновительное затухание экспоненциально мало. Последнее связано с тем, что условие черенковского поглощения (12.33) выполняется в этом случае лишь на «хвосте» максвелловского распределения скоростей, где число частиц экспоненциально мало. Под влиянием волны распределение частиц меняется, причем в области «хвоста» распределения это происходит сравнительно легко. В результате бесстолкновительное поглощение изменяется и может вообще исчезнуть, если волна соответствующим образом изменит функцию распределения (поглощение исчезает, если функция распределения f_0 перестает зависеть от u — проекции скорости частиц $\mathbf{v}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$). Влияние волны на функцию распределения и связанное с этим изменение поглощения волны представляет собой, очевидно, нелинейный процесс. Здесь мы на нелинейной теории распространения продольных волн останавливаться не будем (см., например, [106б, 165, 172] и указанную там литературу).

В терминах показателя преломления соотношения (12.65) можно записать в виде (полагаем $\nu_{\text{эфф}} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c}\tilde{n}_3 = \frac{\omega}{c}(n_3 + i\varkappa_3), \quad n_3^2 = \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2}{3v_T^2/c^2}, \\ \varkappa &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c^5}{n_3^4 v_T^5} \exp\left(-\frac{c^2}{2n_3^2 v_T^2} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (12.68)$$

С увеличением k, т. е. с переходом ко все более коротким волнам, бесстолкновительное поглощение возрастает и при нарушении условия (12.67) или хотя бы (12.66) формулы (12.65) и (12.68) становятся уже непригодными. Можно утверждать,

однако, что во всей высокочастотной области (12.40) существует одна ветвь продольных плазменных волн, поведение которой при слабом затухании определяется формулами (12.65). Это верхняя ветвь на рис. 12.2, причем пунктир указывает на область сильного затухания колебаний. Нижняя ветвь на рис. 12.2 отвечает низкочастотным продольным волнам, которые в отсутствие столкновений слабо затухают (условие (12.66)) только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$ и в диапазоне длин волн $k^2 r_{D,\,i}^2 \ll 1$ (см. [164]). При этом в области $1/r_{D,\,e} \lesssim k \ll 1/r_{D,\,i}$ в нулевом приближении $\omega = \omega_{pi}$, где $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 N_i/M}$ — плазменная (ленгмюровская) частота для ионов. В области еще более длинных волн, когда $kr_{D,\,e} \ll 1$, для низкочастотных волн $\omega \approx \approx \sqrt{\varkappa T_e/M}\, k$, что отвечает изотермическому звуку в газе с температурой T_e, но с частицами с массой M (такие волны называют ионнозвуковыми). В изометрической плазме при неучете столкновений низкочастотные продольные волны всегда сильно затухают. Наличие столкновений и особенно большого количества нейтральных частиц (т. е. переход к слабо ионизированной плазме) меняет картину в области очень длинных волн (таких, что средняя длина свободного пробега $\bar{v}/\nu_{\text{эфф}}$ мала по сравнению с длиной волны, т. е. $k\bar{v} \ll \nu_{\text{эфф}}$). В этом случае речь идет уже о волнах, родственных обычному звуку, который может слабо затухать.

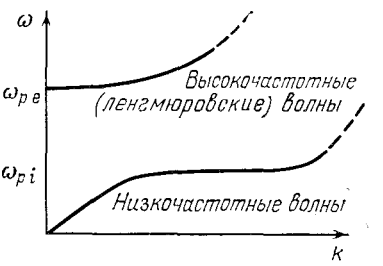


Рис. 12.2. Связь между ω и k для продольных волн в изотропной бесстолкновительной плазме.

Схематическое представление. Пунктир соответствует области сильного затухания волн, причем для низкочастотных волн слабозатухающая область существует лишь для неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$.

Перейдем к рассмотрению магнитоактивной плазмы и конкретно однородной плазмы, находящейся в однородном и постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0$.

В рамках элементарной теории учет влияния магнитного поля $\mathbf{H}_0$ сводится к добавлению в уравнение (12.5) лоренцевой силы, в силу чего

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + m\nu_{\text{эфф}}\dot{\mathbf{r}}_n = e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}_n \mathbf{H}_0]. \qquad (12.69)$$

Решая это уравнение и аналогичное уравнение для ионов, находим $\dot{\mathbf{r}}_n$ и $\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}$, а затем плотность тока $\mathbf{j} = e\sum_{n=1}^{N}(\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)})$. Вместе с тем, по определению, $j_i = -\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})E_j$, и из сравнения обоих выражений находим ε_{ij}. Соответствующие вычисления де-

тально проведены в § 10 книги [84], и здесь ограничимся лишь результатом:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}= \\
&=1-{}^1/_2\omega_p^2\left(\frac{1}{\omega^2+\omega\omega_H+i\omega\nu_{\text{эфф}}}+\frac{1}{\omega^2-\omega\omega_H+i\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)= \\
&\qquad =1-\frac{\omega_p^2(\omega+i\nu_{\text{эфф}})}{\omega\left\{(\omega+i\nu_{\text{эфф}})^2-\omega_H^2\right\}}, \\
&\varepsilon_{zz}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i\nu_{\text{эфф}})}, \\
&\varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}=i\frac{\omega_p^2\omega_H}{\omega(\omega+\omega_H+i\nu_{\text{эфф}})(\omega-\omega_H+i\nu_{\text{эфф}})}, \\
&\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=0, \quad \omega_p^2\equiv\omega_{pe}^2=\frac{4\pi e^2N}{m}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.70}$$

Существенно, что здесь выбрана правая декартова система отсчета с осью z, направленной по полю $\mathbf{H}_0$. Кроме того, гирочастота ω_H для электронов (заряд $e<0$) считается положительной

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_H=\frac{|e|H_0}{mc}=-\frac{eH_0}{mc}=1{,}76\cdot10^7H_0\ \text{с}^{-1}, \\
&\lambda_H=\frac{2\pi c}{\omega_H}=\frac{1{,}07\cdot10^1}{H_0}\ \text{см}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.71}$$

Наконец, в (12.70) роль ионов не учтена. Если в отсутствие магнитного поля это всегда возможно при пренебрежении членами порядка N_i/M по сравнению с N_e/m, то в магнитоактивной плазме роль ионов несущественна обычно только при условии

$$\omega\gg\Omega_H=\frac{|e|H_0}{Mc}=1{,}76\cdot10^7\frac{m}{M}H_0\text{с}^{-1}, \tag{12.72}$$

где Ω_H — гирочастота для ионов.

Неравенство (12.72) иногда оказывается недостаточным, и роль ионов может быть существенна даже при более высоких частотах. Например, при поперечном к полю распространении волн — при их распространении под углом α между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, равным ${}^1/_2\pi$, влиянием ионов можно пренебречь только при условии $\omega\gg\sqrt{\omega_H\Omega_H}=\sqrt{M/m}\,\Omega_H\gg\Omega_H$.

Волны, которые можно рассматривать без учета влияния ионов, называют высокочастотными. Низкочастотными будем именовать волны и вообще поля с частотой

$$\omega\ll\Omega_H. \tag{12.73}$$

Причина, в силу которой на низкой частоте (при условии (12.73)) магнитное поле $\mathbf{H}_0$ радикально изменяет «отклик» плазмы на внешнее поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t)$, ясна уже из урав-

нений движения. Последние в элементарной теории сводятся к (12.69) и уравнению

$$M\ddot{\mathbf{r}}_n^{(i)} + M\nu_{\text{эфф}}^{(i)}\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)} = -e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) - \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}\mathbf{H}_0], \qquad (12.74)$$

где член, пропорциональный $\nu_{\text{эфф}}^{(i)}$, учитывает соударения данного иона со всеми другими частицами (см. также ниже). Если, для простоты, не обращать внимания на соударения, то из (12.69) и (12.74) очевидно, что при условии (12.73) главным членом становится лорентцева сила. Но эта сила не содержит массы частицы и в соответствующем приближении вынужденные скорости электронов $\dot{\mathbf{r}}_n$ и ионов $\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}$ одинаковы и, значит, плотность тока $\mathbf{j} = e\sum_n (\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}) \to 0$. Вместе с тем при неучете вклада от ионов ток при $\omega \to 0$ к нулю не стремится (см. (12.70)). Более подробно проанализировать роль ионов особенно удобно, если написать выражение для ε_{ij}. Например, для смеси электронов и ионов с массой M и при пренебрежении соударениями можно написать

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}. \qquad (12.75)$$

Отсюда в высокочастотном и низкочастотном случаях (12.72) и (12.73) приближенно имеем:

при $\omega \gg \Omega_H$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad (12.76)$$

при $\omega \ll \Omega_H$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_H^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_H^2} = 1 + \frac{4\pi Nmc^2}{H_0^2} + \frac{4\pi NMc^2}{H_0^2} = 1 + \frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2}, \qquad (12.77)$$

где $\rho_M = (mN + MN) \approx NM$ — плотность массы рассматриваемой плазмы; разумеется, значение ρ_M определяется ионами и, очевидно, именно вклад ионов является определяющим.

Весьма часто

$$\frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2} \gg 1. \qquad (12.78)$$

В таких условиях можно написать

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{4\pi\rho_M c^2}{H_0^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_M}}, \qquad (12.79)$$

где v_A — магнитогидродинамическая (или альвеновская) скорость — такова скорость волн в среде с проницаемостью (12.79) в случае, когда эти волны поляризованы в плоскости xy, т. е. электрическое поле $\mathbf{E}$ в волнах перпендикулярно полю $\mathbf{H}_0$

(в сказанном легко убедиться хотя бы из общих выражений, приводимых ниже).

Низкочастотная область в случае магнитоактивной плазмы примыкает, а в определенных условиях совпадает с областью магнитной гидродинамики. Хотя и не строго, но по сути дела достаточно убедительно, к магнитогидродинамическим уравнениям можно прийти, просто складывая уравнения движения (12.69) и (12.74) для электронов и ионов. Нужно только учесть, что, например, в чистой электронно-ионной плазме средняя сила «трения» электронов о ионы в силу равенства действия и противодействия равна средней силе «трения» ионов об электроны (речь по сути дела идет об изменении средних импульсов электронов и ионов; поэтому соударения между электронами и между ионами в рассматриваемом приближении роли не играют). По этой причине при сложении уравнений движения сила трения выпадает, и после умножения на N находим

$$\rho_M \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}_0], \quad \mathbf{j} = e\sum_{n=1}^{N}(\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{r}}_n^{(i)}), \tag{12.80}$$

где под $\mathbf{v}$ можно понимать скорость плазмы «как целого» или практически скорость ионов (строго говоря, рассматривается режим, при котором $m\ddot{\mathbf{r}}_n \ll M\ddot{\mathbf{r}}^{(i)}$); делая некоторые достаточно ясные обобщения, из (12.80) приходим к более общему магнитогидродинамическому уравнению, содержащему градиент давления p,

$$\rho_M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}] - \nabla p. \tag{12.81}$$

Останавливаться подробнее на магнитной гидродинамике здесь представляется неуместным, и мы хотели лишь наметить ее связь с вопросом о вычислении тензора проницаемости в магнитоактивной плазме (подробнее см. [44, 84, 164, 172] и указанную там литературу).

Влияние магнитного поля на свойства плазмы, вообще говоря, мало при условии

$$\omega \gg \omega_H = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0 \ \text{с}^{-1} \tag{12.82}$$

Разумеется, в этом случае автоматически выполняется неравенство (12.72) и даже более жесткое условие $\omega \gg \sqrt{\omega_H \Omega_H}$ при котором роль ионов невелика. В случае (12.82) в первом приближении плазму можно считать изотропной и тензор (12.70) сводится к тензору $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$, где $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (12.6).

Нужно, однако, помнить, что и при соблюдении неравенства (12.82) роль магнитного поля может оказаться существенной,

особенно когда речь идет о новых эффектах, отсутствующих при $H_0 = 0$. В качестве примера укажем на вращение плоскости поляризации при распространении поперечных электромагнитных волн в плазме вдоль магнитного поля (эффект Фарадея; см. гл. 10 и ниже). Поскольку угол поворота вектора поляризации (т. е. электрического вектора поля волны) в магнитном поле с данным направлением увеличивается с ростом расстояния (является интегральным эффектом), вращение может оказаться значительным даже в поле, совершенно ничтожном с других точек зрения.

Элементарная теория в применении к магнитоактивной плазме справедлива только для холодной плазмы, т. е. при пренебрежении тепловым движением частиц, в первую очередь электронов. В бесстолкновительной плазме это значит, что должны соблюдаться неравенства

$$\frac{k_z v_T}{\omega} \ll 1, \quad \frac{k_\perp v_T}{\omega_H} \ll 1, \tag{12.83}$$

где k_z — проекция волнового вектора $\mathbf{k}$ на направление поля (ось z) и $k_\perp$ — проекция $\mathbf{k}$ на направление, перпендикулярное полю $\mathbf{H}_0$ (напомним, что $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$). Первое условие мы по существу уже обсуждали (см. (12.20) и (12.40)), поскольку поле $\mathbf{H}_0$ не изменяет движения электрона вдоль него. Проекция же траектории электрона на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{H}_0$, представляет собой окружность с радиусом $r_H = v_\perp/\omega_H$. В результате теплового движения $v_\perp \sim v_T$ и $\bar{r}_H \sim v_T/\omega_H$, откуда ясно, что второе из условий (12.83) имеет вид $2\pi v_T/\lambda_\perp \omega_H \ll 1$, где $\lambda_\perp = 2\pi/k_\perp$. Итак, применение элементарной теории, эквивалентное пренебрежению пространственной дисперсией, возможно при соблюдении двух требований: фазовая скорость волн $v_\Phi = \omega/k_z$ должна существенно превосходить тепловую скорость v_T, а длина волны $\lambda_\perp$ должна быть велика по сравнению с ларморовским радиусом $\bar{r}_H \sim v_T/\omega_H$. В земной ионосфере $T \sim 300$—1000 К, $v_T \sim 10^7$ см·с$^{-1}$, $\omega_H \sim 10^7$ с$^{-1}$, $\bar{r}_H \sim 1$ см и для диапазона коротких волн ($\omega \sim 10^8$ с$^{-1}$, $\lambda = 2\pi c/\omega \sim 20$ м) отношение $v_T/\omega \sim 0{,}1$ см. Отсюда достаточно ясно, что в радиодиапазоне роль пространственной дисперсии в ионосфере обычно невелика. Аналогичные оценки легко сделать и в применении к солнечной короне, межзвездной среде и т. д. и т. п. Нам, однако, подобная конкретизация здесь не кажется целесообразной, поскольку все возможности предусмотреть нельзя, а распространение волн в магнитоактивной плазме в общем случае отличается достаточной сложностью. Полезнее помнить, что при исследовании каждой конкретной задачи физики плазмы нужно с осторожностью относиться к используемым приближениям и оценивать их точность, в частности, с учетом теплового движения (а тем самым и пространственной дисперсии).

Выражение для тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в магнитоактивной плазме с учетом теплового движения или, как говорят, для «горячей» плазмы можно получить методом кинетического уравнения (12.24). В линейном приближении, когда используется теория возмущений (см. (12.26), (12.27)), сразу же приходим к уравнению, отличающемуся от (12.27) добавлением лишь члена $(e/m)[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\nabla_v f'$. Здесь учтено, что для изотропной невозмущенной функции распределения $f_{00}(v)$ градиент $\nabla_v f_{00} = (\partial f_{00}/\partial v)(\mathbf{v}/v)$ и $[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\nabla_v f_{00} = 0$. Отсюда ясно, кстати, что максвелловское распределение скоростей остается равновесным распределением и при наличии магнитного поля. На первый взгляд такое заключение может показаться подозрительным, поскольку в магнитном поле электрон движется по винтовой линии, а без поля — по прямой. Здесь тем не менее нет никакого противоречия, так как в обоих случаях для совокупности электронов одинакова вероятность найти данные значения скорости $\mathbf{v}$ (или, иными словами, число электронов со скоростями в интервале $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ в обоих случаях одинаково).

Выражение для тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в максвелловской (равновесной) плазме приведено, например, в монографии [164]. Если тепловым движением можно пренебречь (в простейшем случае для этого должны выполняться неравенства (12.83)), то, как и следует ожидать, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ сводится к тензору (12.70). Наиболее, пожалуй, специфической чертой кинетической теории является существование бесстолкновительного поглощения. Оно возникает при соблюдении условий (ось z направлена по $\mathbf{H}_0$)

$$\omega = |s\omega_H + k_z v_z|, \quad \omega = |s'\Omega_H + k_z v_z|, \quad s, s' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{12.84}$$

При $s, s' = 0$ речь идет о черенковском поглощении, а при $s \neq 0$ и $s' \neq 0$ — о магнитотормозном поглощении соответственно для электронов или ионов. Этот вопрос уже обсуждался в гл. 7 и сейчас подробнее рассматриваться не будет. Помимо бесстолкновительного поглощения, тепловое движение в магнитоактивной плазме, как и в изотропной, особенно важно учитывать в тех случаях, когда речь идет о волнах, распространяющихся со скоростью, сравнимой со скоростью теплового движения v_{Te} или v_{Ti}.

Анализ распространения различных волн в магнитоактивной плазме отличается известной громоздкостью уже для холодной плазмы (т. е. без учета теплового движения, а тем самым и пространственной дисперсии). Только на распространении волн в холодной плазме мы и остановимся, да и то очень кратко (подробнее распространение волн как в холодной, так и в горячей плазме рассмотрено в [84, 164, 165, 172] и в упомянутом там большом числе книг и статей). Впрочем, выражения, не требующие конкретизации вида тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, одинаково

справедливы, конечно, и для холодной, и для горячей плазмы. Так, дисперсионное уравнение (11.27), определяющее показатель преломления $\tilde{n}$ для нормальных волн в анизотропной среде, остается, конечно, правильным в общем случае (правда, в предположении о возможности ввести тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$). Но для магнитоактивной плазмы можно пойти дальше, воспользовавшись свойствами симметрии тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Например, в случае однородного поля $\mathbf{H}_0$, направленного по оси z, возникают упрощения, ясные из (12.70) и сохраняющиеся и для горячей плазмы (речь идет, например, о равенстве $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$).

Поскольку для холодной плазмы $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega)$ дисперсионное уравнение (11.27) является квадратным уравнением относительно $\tilde{n}^2$. Соответствующие корни $\tilde{n}^2_{1,\,2}$ отвечают обыкновенной (индекс 2) и необыкновенной (индекс 1) волнам, могущим распространяться в холодной плазме. Кроме того, в холодной магнитоактивной плазме может существовать продольная волна или, точнее, продольное колебание (при неучете пространственной дисперсии групповая скорость $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ для продольной волны равна нулю). Но если в изотропной плазме волновой вектор $\mathbf{k}$ в продольной волне направлен произвольным образом, то в магнитоактивной плазме этот волновой вектор может быть направлен только по полю $\mathbf{H}_0$. Все сводится, таким образом, просто к тому, что наличие магнитного поля не приводит к изменению выражения

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega + i\nu_{\text{эфф}})}$$

и не оказывает поэтому влияния на продольную волну (в этой волне $\mathbf{E} = \mathbf{E}_l = E\mathbf{k}/k$), распространяющуюся вдоль поля. Не лишен поучительности вопрос о предельном переходе от магнитоактивной плазмы к изотропной, в частности в связи с возможностью существования плазменной волны, распространяющейся лишь в одном направлении (магнитоактивная плазма) и в любом направлении (изотропная плазма). Последовательно проследить соответствующий предельный переход можно лишь с учетом пространственной дисперсии, хотя суть дела выясняется и без этого (см. § 12 в [84]).

Здесь ограничимся лишь еще одним замечанием, касающимся продольных волн. Нормальные волны в анизотропной среде, в частности в магнитоактивной плазме, не являются, вообще говоря, ни продольными, ни поперечными. Поэтому не должен вызывать особого удивления тот факт, что одна из нормальных волн (1 или 2) может в определенных условиях оказаться почти продольной. Более того в случае холодной плазмы волна 1 или 2 может быть даже строго продольной и формально является таковой при условии $\tilde{n}^2_{1,\,2} \to \infty$. Такие продольные волны можно назвать (см. [76]) фиктивными продольными волнами, так как

при учете пространственной дисперсии эти волны, вообще говоря, не являются строго продольными. Сказанного, конечно, недостаточно для понимания существа дела, но здесь мы хотим лишь пояснить, что когда в литературе речь идет о продольных волнах в магнитоактивной плазме, то обычно имеют в виду нормальные волны в районе полюсов $\tilde{n}^2_{1,\,2} \to \infty$ (см. также ниже). Поэтому нет никакого противоречия со сделанным выше утверждением о том, что «истинные» продольные волны в магнитоактивной плазме распространяются лишь по полю $\mathbf{H}_0$.

Приведем выражения для $\tilde{n}^2_{1,\,2}(\omega)$ для высокочастотных волн (условие (12.72)) в холодной плазме, т. е. при использовании тензора (12.70). Подставляя (12.70) в дисперсионное уравнение (11.27) или, проще, выписывая дисперсионное уравнение заново, но уже для рассматриваемого случая (см. § 11 в [84]), получаем

$$\tilde{n}^2_{1,\,2} = (n + i\varkappa)^2_{1,\,2} = \\ = 1 - \frac{2v\,(1 + is - v)}{2\,(1 + is)\,(1 + is - v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\,(1 + is - v)^2\cos^2\alpha}}, \tag{12.85}$$

где

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m^2 c^2 \omega^2}, \quad s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \tag{12.86}$$

и α — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$.

В отсутствии соударений

$$\tilde{n}^2_{1,\,2} = 1 - \frac{2v\,(1 - v)}{2\,(1 - v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\,(1 - v)^2\cos^2\alpha}} = \\ = 1 - \frac{2\omega_p^2\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)}{2\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)\omega^2 - \omega_H^2\omega^2\sin^2\alpha \pm \sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\alpha + 4\omega_H^2\omega^2\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)^2\cos^2\alpha}}. \tag{12.87}$$

Даже выражение (12.87), не говоря уже о (12.85), столь громоздко, что исследуется либо в частных случаях, либо графически. В случае продольного распространения $\alpha = 0$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_1^2 \equiv \tilde{n}_+^2 &= 1 - \frac{v}{1 - \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega - \omega_H)}, \\ \tilde{n}_2^2 \equiv \tilde{n}_-^2 &= 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega + \omega_H)}. \end{aligned}\right\} \tag{12.88}$$

Нормальные волны 1, 2 (или $\pm$) в этом случае являются поперечными, а их поляризация — циркулярной (круговой). Направление вращения электрического вектора $\mathbf{E}$ в волне $+$ сов-

падает с направлением вращения электрона в магнитном поле $\mathbf{H}_0$ (и не зависит от направления распространения, т. е. одинаково, если волновой вектор $\mathbf{k}$ в волне направлен по полю $\mathbf{H}_0$ или в направлении $-\mathbf{H}_0$). Естественно поэтому, что когда частота ω в волне $+$ приближается к электронной гирочастоте ω_H, возникает резонанс (см. (12.88), где было положено $\nu_{эфф}=0$; волна $+$, или 1 называется необыкновенной). Если на анизотропную среду падает волна произвольной поляризации, то в однородной среде без пространственной дисперсии она расщепляется на две нормальные волны, распространяющиеся независимо друг от друга. В частности, при продольном (вдоль поля $\mathbf{H}_0$) распространении волн в холодной плазме падающая (поперечная) линейно поляризованная волна расщепляется на две волны $\pm$ с циркулярной поляризацией. Поскольку $n_+ \neq n_-$, фазы волн $\pm$ вдоль луча меняются неодинаково и происходит поворот плоскости поляризации (эффект Фарадея). Очевидно, разность фаз между волнами $-$, или 2, и $+$, или 1, возникающая по прохождении пути L, равна

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}(n_2 - n_1)L.$$

Легко убедиться в том, что этому набегу фазы отвечает поворот плоскости поляризации на угол

$$\Psi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 - n_1)L \approx \frac{\omega_p^2 \omega_H L \cos\alpha}{2c\omega^2} = 0{,}93 \cdot 10^6 \frac{NH_0 L\cos\alpha}{\omega^2}; \quad (12.89)$$

здесь в качестве иллюстрации подставлены значения $n_{1,2}$ из (12.88) в часто встречающемся в космических условиях предельном случае $|n_{1,2}-1| \ll 1$, $\omega \gg \omega_H$. Разумеется, в случае (12.88) $\cos\alpha = 1$, но формула (12.89) пригодна и в некоторой области малых углов α (квазипродольное распространение; см. § 11 в [84]).

Для поперечного распространения ($\alpha = \pi/2$) из (12.87) получаем

$$\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{\omega_p^2\left(1-\omega_p^2/\omega^2\right)}{\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2}, \quad \tilde{n}_2^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (12.90)$$

В обыкновенной волне 2 вектор поляризации (вектор $\mathbf{E}$) направлен по $\mathbf{H}_0$, в силу чего ясно совпадение $\tilde{n}_2^2$ для этой волны со значением $\tilde{n}^2$ в изотропной плазме. В необыкновенной волне 1 вектор $\mathbf{E}$ описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{H}_0$, т. е. имеет и продольную, и поперечную составляющие относительно $\mathbf{k}$ (напомним еще раз, что в случае (12.90) сам вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен полю $\mathbf{H}_0$).

Если говорить о графиках функции $\tilde{n}_{1,2}(\omega, \omega_p, \omega_H, \alpha, \nu_{эфф}=0)$ в общем случае, то они в значительной мере характеризуются

нулями и полюсом этой функции:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{n}^2_{1,\,2}=0; \quad v_{20}\equiv\frac{\omega_p^2}{\omega_{20}^2}=1,\\ &v_{10}^{(\pm)}\equiv\frac{\omega_p^2}{\left(\omega_{10}^{\pm}\right)^2}=1\pm\sqrt{u}=1\pm\frac{\omega_H}{\omega_{10}^{\pm}},\\ &\tilde{n}^2_{1,\,2}=\infty; \quad v_{1\infty}\equiv\frac{\omega_p^2}{\omega_{1\infty}^2}=\frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}=\frac{\omega_{1\infty}^2-\omega_H^2}{\omega_{1\infty}^2-\omega_H^2\cos^2\alpha}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при } u<1, \end{aligned}\right\} \tag{12.91}$$

$$v_{2\infty}\equiv\frac{\omega_p^2}{\omega_{2\infty}^2}=\frac{u-1}{u\cos^2\alpha-1}=\frac{\omega_H^2-\omega_{2\infty}^2}{\omega_H^2\cos^2\alpha-\omega_{2\infty}^2} \quad \text{при } u>1. \tag{12.92}$$

Поскольку по определению $v=\omega_p^2/\omega^2>0$, корень v_{10} при $u=\omega_H^2/\omega^2>1$ является, конечно, фиктивным. По той же причине при $u>1$, но $u\cos^2\alpha<1$, функция $\tilde{n}_{1,\,2}$ полюса не имеет.

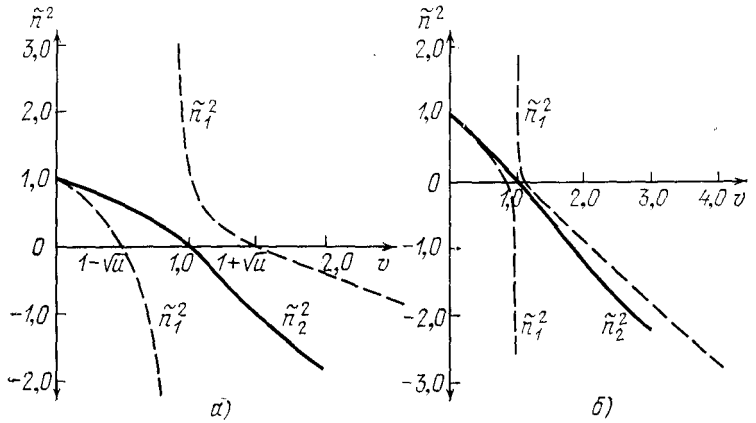


Рис. 12.3. Графики функций $\tilde{n}^2_{1,\,2}(v)$ при $\nu_{\text{эфф}}=0$ и $\alpha=45°$.
а) $u=\omega_H^2/\omega^2=1/4$; *б)* $u=0{,}01$.

Несколько графиков функций $\tilde{n}^2_{1,\,2}(v)$ при различных значениях u и α приведены в качестве иллюстрации на рис. 12.3 и 12.4. Использование в качестве переменной величины $v=\omega_p^2/\omega^2$ может показаться искусственным. На самом же деле такие графики очень удобны, когда речь идет о выяснении зависимости $\tilde{n}^2_{1,\,2}$ от электронной концентрации N (действительно, $v=4\pi e^2N/m\omega^2$). Удобны бывают и другие графики, скажем, график $\tilde{n}^2_{1,\,2}(\omega/\omega_p)$, примером которого является рис. 12.5. Поскольку на этом графике имеется область малых частот ω, не-

обходимо еще раз напомнить, что формула (12.85) и последующие относятся к высокочастотному случаю $\omega \gg \Omega_H$. С уменьшением частоты начинает сказываться влияние ионов и появляется еще одна ветвь колебаний. Ограничимся здесь тем, что приведем рис. 12.6, на котором показаны графики функций $\tilde{n}^2_{1,2}(\omega)$ с учетом влияния ионов.

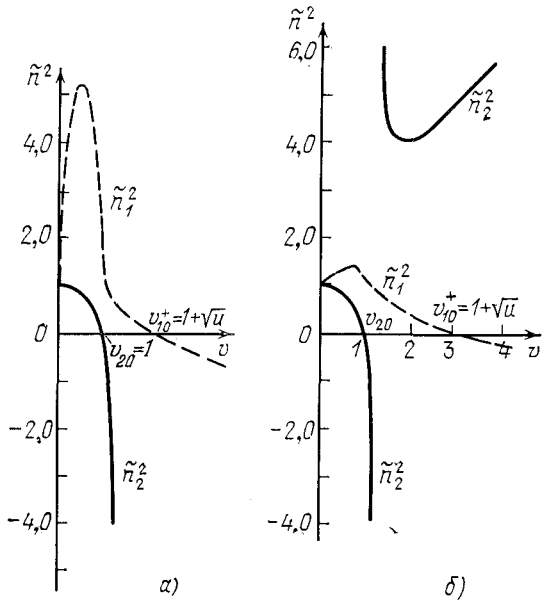


Рис. 12.4. Графики функций $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$ при $\nu_{эфф}=0$ и $\alpha=20°$.
а) $u=\omega_H^2/\omega^2=1{,}08$; *б)* $u=4$.

Остановимся еще на одном важном предельном случае

$$\omega_p^2 \gg \omega^2, \quad \omega_p^2 \gg \omega_H^2, \quad \omega^2 \ll \omega_H^2 \cos^2\alpha, \quad \omega \gg \Omega_H \qquad (12.93)$$

или

$$v \gg 1, \quad v \gg u, \quad u\cos^2\alpha \gg 1.$$

В условиях (12.93), согласно (12.87),

$$\tilde{n}_1^2 = -\frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}, \quad \tilde{n}_2^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} \approx \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha} = \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_H\cos\alpha} = \frac{4\pi c\,|e|\,N}{\omega H_0\cos\alpha} \qquad (12.94)$$

или

$$\omega = \frac{c^2k^2\omega_H\cos\alpha}{\omega_p^2} = \frac{cH_0k^2\cos\alpha}{4\pi\,|e|\,N}. \qquad (12.95)$$

Волна 1 в рассматриваемых условиях вообще не распространяется (эта волна затухает, так как $\tilde{n}_1^2 < 0$), а для волны 2 значение $\tilde{n}_2^2 \gg 1$. С такими волнами встречаются, например, в земной магнитосфере («свистящие атмосферики») и в твердотельной плазме («спиральные волны» в металлах, находящихся в магнитном поле).

Помимо всего прочего, пренебрежение пространственной дисперсией тем менее законно, чем меньше фазовая скорость

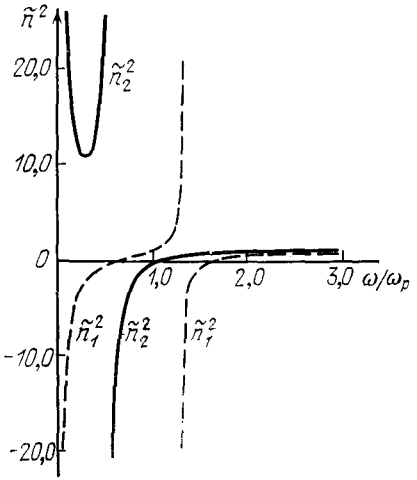


Рис. 12.5. График функции $\tilde{n}^2_{1,2}(\omega/\omega_p)$ при $\omega_H^2/\omega_p^2 = u/v = 1$ и $\alpha = 45°$.

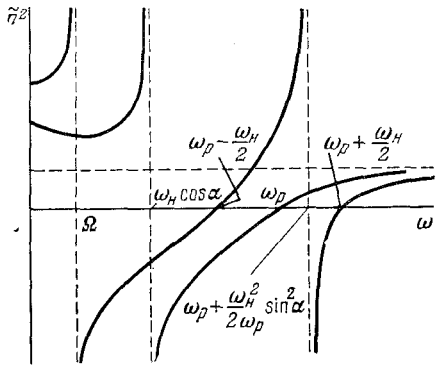


Рис. 12.6. Графики функций $\tilde{n}^2_{1,2}(\omega)$ для холодной плазмы без столкновений, но с учетом влияния ионов. Предполагается, что $\omega_p^2 \gg \omega_H^2$, а значения для корней и полюсов функции $\tilde{n}_{1,2}(\omega)$ указываются приближенно.

рассматриваемых волн $v_\Phi = \omega/k$. Если же $v_\Phi \lesssim v_T$, то эффекты пространственной дисперсии велики. В этой связи ясно, что пространственную дисперсию в первую очередь нужно учитывать в районе полюсов функции $\tilde{n}^2_{1,2}(\omega)$, полученных для холодной плазмы. Для «свистящих атмосфериков» и «спиральных волн» в силу условия $\tilde{n}_2^2 \gg 1$ роль пространственной дисперсии также выше, чем для волн с высокой фазовой скоростью.

И, наконец, последнее замечание — напоминание о том, что выше рассматривалась только однородная и к тому же нерелятивистская плазма. Между тем в реальных условиях плазма всегда неоднородна — либо имеются границы, либо свойства плазмы (например, электронная концентрация) меняются от точки к точке. Поэтому много внимания уделяется распространению волн в неоднородной плазме. Большое значение для фи-

зики плазмы представляет также рассмотрение релятивистской плазмы, неравновесной плазмы (например, холодной плазмы, пронизываемой пучками электронов или ионов), исследование различных нелинейных явлений и эффектов, изучение поведения плазмы (в общем случае, содержащей также позитроны) в сильном магнитном поле с учетом нелинейности вакуума [103], и т. д.

Таким образом, в настоящей главе, даже если говорить не о физике плазмы в широком плане, а только о вычислениях диэлектрической проницаемости плазмы и рассмотрении распространения волн в ней, затронута лишь весьма небольшая часть вопросов.

Глава 13

О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА И СИЛАХ В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. ЭНЕРГИЯ И ВЫДЕЛЯЮЩЕЕСЯ ТЕПЛО В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

О тензоре энергии — импульса в макроскопической электродинамике. Применение законов сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде. Силы, действующие на среду. Плотность энергии и выделяющееся тепло в диспергирующей поглощающей среде.

На теореме Пойнтинга и законе сохранения энергии в макроскопической электродинамике (в применении к простой модели среды) мы уже останавливались в гл. 11. При учете в широких пределах произвольной частотной и пространственной дисперсии закон сохранения энергии для прозрачной среды рассмотрен в [76] и вообще довольно часто обсуждается в литературе. Этого нельзя сказать о плотности энергии и выделяющемся тепле в диспергирующей поглощающей среде и о законе сохранения импульса в макроскопической электродинамике. Ниже мы остановимся на этих вопросах, причем начнем с закона сохранения импульса, тензора энергии — импульса и сил, действующих на среду в электромагнитном поле.

С импульсом электромагнитного поля приходится сталкиваться значительно реже, чем с энергией. Кроме того, вопрос об импульсе поля в среде оказался в известной мере запутанным — он связан с выбором выражения для тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде. Эта проблема дискутируется уже около 70 лет и вплоть до последнего времени (см. [78, 173—177] и указанную там литратуру; статья [176] непосредственно использована ниже). Поэтому как раз и представляется уместным остановиться на обсуждении закона сохранения импульса в макроскопической электродинамике.

Чтобы избежать усложнений, не имеющих прямого отношения к тем вопросам, которые мы сейчас хотим выяснить, будем рассматривать покоящуюся немагнитную, непоглощающую среду без дисперсии. Тогда уравнения поля имеют хорошо известный читателям вид, но удобнее их здесь еще раз выписать

($\mathbf{B} = \mathbf{H}$, ε не зависит от ω и $\mathbf{k}$):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{13.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{13.2}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\rho\,\text{ext} \tag{13.3а}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{13.3б}$$

Умножим уравнение (13.1) скалярно на $\mathbf{E}$, а уравнение (13.2) — на $\mathbf{H}$. Вычитая получающиеся выражения одно из другого и используя тождество $\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{EH}]$, имеем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2 + H^2) = -\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E} - \operatorname{div}\mathbf{S}, \tag{13.4}$$

т. е. приходим к теореме Пойнтинга, которую в данном случае без особых осложнений можно интерпретировать как закон сохранения энергии (плотность энергии $w = (\varepsilon E^2 + H^2)/8\pi$, плотность потока энергии $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{EH}]$).

При этом учитывается, что среда считается непоглощающей, в силу чего проницаемость ε — вещественная величина, а заряды и ток с плотностями ρ_{ext} и $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ создаются внешними источниками. О теореме Пойнтинга и ее следствиях для диспергирующей и поглощающей среды речь пойдет во второй части настоящей главы.

Умножив теперь уравнение (13.1) векторно на $\mathbf{H}$, уравнение (13.2) также векторно на $\varepsilon\mathbf{E}$ и сложив получающиеся выражения, находим

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] + \varepsilon[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]\} = -\frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{H}] - \frac{\varepsilon}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}].$$

Прибавим далее к правой и левой частям этого соотношения выражение $-\rho_{\text{ext}}\mathbf{E}$, причем в левой части преобразуем его с помощью (13.3а) к виду $-\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})$. В результате получим

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] + \varepsilon[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}] - \mathbf{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}\} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}] =$$

$$= -\left\{\rho_{\text{ext}}\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{H}] + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\}. \tag{13.5}$$

В правой части здесь фигурирует плотность лоренцевой силы

$$\mathbf{f}^{\text{Л}} = \rho_{\text{ext}}\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{H}]$$

и плотность объемной силы

$$\mathbf{f}^{\text{А}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}], \tag{13.6}$$

которую иногда называют силой Абрагама. Знак минус в правой части (13.5) связан с тем, что сумма $\mathbf{f}^{\text{Л}} + \mathbf{f}^{\text{А}}$ представляет

собой силу, действующую на среду, уравнение же (13.5) определяет баланс сил и импульса в применении к полю, причем

$$\mathbf{g}^{\Lambda} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \tag{13.7}$$

есть плотность импульса поля (именно такое выражение, одинаковое и для вакуума и для покоящейся среды, отвечает выбору тензора энергии — импульса в форме Абрагама; см. ниже).

Будем сначала для простоты считать среду однородной (при этом $\varepsilon = \text{const}$; *случай неоднородной среды и возможная зависимость* ε от плотности среды рассмотрены ниже). Тогда уравнение (13.5) особенно легко преобразовать к стандартному виду (при переходе от (13.5) к (13.8) удобно воспользоваться тождеством $[\mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}] = {}^1/_2\nabla a^2 - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}$)

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha^{\mathrm{A}}}{\partial t} = f_\alpha, \quad f_\alpha = f_\alpha^{\mathrm{Л}} + f_\alpha^{\mathrm{A}}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{13.8}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — максвелловский тензор напряжений:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\{\varepsilon E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - {}^1/_2(\varepsilon E^2 + H^2)\delta_{\alpha\beta}\}. \tag{13.9}$$

Итак, закон сохранения импульса (13.8) следует из уравнений поля без дополнительных предположений. Объединяя этот закон и закон сохранения энергии (13.4) в одно четырехмерное соотношение — закон сохранения энергии — импульса, приходим вместе с тем к выражению для тензора энергии — импульса T_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} T_{(\mathrm{A})}^{ik} &= \begin{pmatrix} w & c\mathbf{g}^{\mathrm{A}} \\ \frac{1}{c}\mathbf{S} & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad w = \frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi}, \\ \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = c^2\mathbf{g}^{\mathrm{A}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_{(\mathrm{A})}^{ik}}{\partial x^k} = f^i, \quad f^i = \{f^0, \mathbf{f}\}, \quad f^0 = \frac{1}{c}(\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{E}), \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^{\mathrm{Л}} + \mathbf{f}^{\mathrm{A}}, \\ &i, k = 0, 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad x^i = \{ct, \mathbf{r}\}. \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

Тензор (13.10) представляет собой тензор энергии — импульса, предложенный Абрагамом для однородной покоящейся среды; для движущейся среды этот тензор выглядит несколько сложнее (см. ниже).

Тензор энергии — импульса, использованный Минковским в тех же предположениях, что и в случае (13.10), (13.11), имеет вид

$$T_{(\mathrm{M})}^{ik} = \begin{Vmatrix} w & c\mathbf{g}^{\mathrm{M}} \\ \frac{1}{c}\mathbf{S} & \sigma_{\alpha\beta} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon}{4\pi c}[\mathbf{EH}] = \varepsilon\mathbf{g}^{\mathrm{A}}, \tag{13.12}$$

$$\frac{\partial T_{(\mathrm{M})}^{ik}}{\partial x^k} = f^{\mathrm{Л},\,i}, \quad f^{\mathrm{Л},\,0} = f^0 = \frac{1}{c}(\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{E}), \quad \mathbf{f}^{\mathrm{Л}} = \rho_{\mathrm{ext}}\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{H}]. \tag{13.13}$$

Совершенно очевидно, что по крайней мере с формальной точки зрения законы сохранения (13.11) и (13.13) тождественны — они отличаются лишь разным разбиением одной и той же суммы на слагаемые. Конкретно, если силу Абрагама (13.6) перенести из правой в левую часть равенства (13.11) и объединить с $\partial T^{ik}_{(\text{А})}/\partial x_k$, то как раз получится выражение $\partial T^{i\,k}_{(\text{М})}/\partial x_k$ и тензором энергии — импульса можно будет считать тензор Минковского. Подобная неоднозначность в выборе выражения для тензора энергии — импульса тем менее удивительна, что она носит весьма общий характер и имеет место уже в случае теории поля в вакууме (см., например, § 32 в [2]). К тому же поле в среде является незамкнутой системой — «замкнута» лишь система, состоящая из поля и среды, причем последняя характеризуется своим тензором энергии — импульса $T^{ik}_{(\text{с})}$. Для суммарного тензора $T^{ik} = T^{ik}_{(\text{с})} + T^{ik}_{(\text{эм})}$, где $T^{ik}_{(\text{эм})}$ — тензор энергии — импульса поля (например, тензор (13.10)), справедлив закон сохранения $\partial T^{ik}/\partial x^k = 0$, но ни тензор T^{ik}, ни тем более его части $T^{ik}_{(\text{с})}$ и $T^{ik}_{(\text{эм})}$ в общем виде однозначно не определяются. Совсем другое дело — плотность силы, которая является, по крайней мере в принципе, однозначной и измеримой величиной. В этой связи и судьба «спора» о тензорах Абрагама и Минковского в конечном счете решается в результате выбора выражения для силы. Сила Абрагама (13.6) генетически связана с силой магнитного поля (силой Лоренца), действующего на ток смещения. В реальности этой силы невозможно сомневаться, хотя измерена она была лишь недавно (см. [177], где указана оригинальная литература). Тем самым вопрос однозначно решается «в пользу» тензора Абрагама. Встречающиеся в литературе возражения против выбора этого тензора не обоснованы (см. [174—177]). Ограничимся здесь упоминанием одного такого возражения и соответственно аргумента в пользу применения тензора Минковского. Именно, при выборе тензора Минковского для квазимонохроматического цуга волн в любой системе отсчета поток энергии поля в прозрачной среде $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{\text{гр}}$, где w — плотность энергии и $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ — групповая скорость. Аналогично именно для тензора Минковского $\sigma_{\alpha\beta} = -g^{\text{M}}_{\alpha}v_{\text{гр},\,\beta}$ (см. с. 107 в [76] и указанную там литературу). При выборе же тензора Абрагама подобные соотношения не имеют места, что почему-то считается минусом или трудностью. На самом деле, все опять-таки связано с наличием при использовании тензора Абрагама объемной силы $\mathbf{f}^{\text{A}}$. В движущейся среде такая сила производит работу над средой, и поэтому соотношение $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{\text{гр}}$ не может и не должно соблюдаться. Ситуация здесь вполне аналогична имеющей место уже для покоящейся среды *), когда соотноше-

*) В таком случае объемная сила, действующая на среду, работы не производит, так как эта работа равна произведению силы на скорость среды.

ние $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{\text{гр}}$ нарушается при наличии поглощения и вообще каких-либо источников или «стоков» энергии в среде. В применении к потоку плотности импульса $g_\alpha v_{\text{гр},\,\beta}$ сказанное относится уже к случаю прозрачной покоящейся среды, так как соотношение $\sigma_{\alpha\beta} = -g_\alpha v_{\text{гр},\,\beta}$ может иметь место только в отсутствие объемной силы. Последнему требованию как раз и удовлетворяет тензор Минковского (заряды и токи считаем отсутствующими), для которого $\partial T^{(\text{M})}_{ik}/\partial x_k = 0$.

Все сказанное позволяет считать тензор Абрагама «правильным», но, как нам представляется, объявить тензор Минковского «неправильным» можно, лишь подходя к проблеме несколько формально. На самом же деле, в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны. Это дает возможность в соответствующих случаях не только пользоваться тензором Минковского, но даже считать его применение вполне целесообразным, если тем самым достигаются какие-то упрощения. Поэтому тензор Минковского $T^{ik}_{(\text{M})}$ вряд ли следует объявлять «ошибочным», скорее он представляет собой некое вспомогательное понятие, которое вполне может использоваться. Тем самым отнюдь не наносится какой-либо ущерб «престижу» более фундаментального и, если угодно, «истинного» тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде $T^{ik}_{(\text{A})}$.

Анализ вопроса о законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде подтверждает и иллюстрирует только что сделанное замечание. В самом деле, посмотрим, чему равны импульсы цуга волн в среде на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, а затем обратимся в обоих случаях к законам сохранения.

Рассмотрим распространяющуюся в среде плоскую волну вида

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= {}^1\!/_2\,(\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] + \mathbf{E}_0^* \exp[-i(\mathbf{kr} - \omega t)]),\\ \mathbf{H} &= {}^1\!/_2\,(\mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] + \mathbf{H}_0^* \exp[-i(\mathbf{kr} - \omega t)]).\end{aligned}\right\} \quad (13.14)$$

Если волна квазимонохроматическая, то $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ являются «медленными» (по сравнению с периодом $2\pi/\omega$) функциями времени t. Однако для простоты мы не учитываем дисперсию, и поэтому будем считать амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ постоянными, но цуг волн имеющим сечение с площадью 1 и длину L (учет дисперсии см., например, в § 3 монографии [76], а в случае лишь частотной дисперсии — ниже в настоящей главе). Подставляя (13.14) в уравнения поля (13.1), (13.2) с вещественным $\varepsilon = \text{const}$ *) и $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$, находим

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{c}{\varepsilon\omega}[\mathbf{kH}_0], \quad \mathbf{H}_0 = \frac{c}{\omega}[\mathbf{kE}_0]. \quad (13.15)$$

*) Если быть точным, то нужно добавить, что среда считается не только непоглощающей (вещественность ε), но и прозрачной (условие $\varepsilon > 0$).

Отсюда, как условие существования нетривиального решения, получаем дисперсионное уравнение

$$k \equiv \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}. \tag{13.16}$$

Далее, для средних по времени (усредненных по высокой частоте) величин имеем (см. (13.10) и (13.13))

$$\left.\begin{aligned} \bar{w} &= \overline{\frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi}} = \frac{1}{16\pi}\{\varepsilon \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^*\} = \frac{n^2}{8\pi}(\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*), \\ \bar{\mathbf{S}} &= \frac{c}{4\pi}[\overline{\mathbf{E}\mathbf{H}}] = \frac{c}{16\pi}\{[\mathbf{E}_0^* \mathbf{H}_0] + [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0^*]\} = \\ &= \frac{cn}{8\pi}(\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*)\frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{A}} = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{c^2}, \quad \bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{M}} = n^2 \bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{A}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.17}$$

или

$$\mathbf{G}^{(\mathrm{A})} = \bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{A}} L = \frac{\bar{w} L}{cn}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathscr{H}}{cn}\frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{13.18}$$

$$\mathbf{G}^{(\mathrm{M})} = \bar{\mathbf{g}}^{\mathrm{M}} L = \frac{\bar{w} L n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathscr{H} n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{13.19}$$

где $\mathbf{G}^{(\mathrm{A,\,M})}$ и $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{(\mathrm{A})} = \mathscr{H}^{(\mathrm{M})} = \bar{w} L$ — соответственно импульс и энергия цуга волн *). Связь (13.19) точно совпадает со связью между энергией и импульсом «фотона в среде», получающейся при квантовании поля в среде (см. гл. 6 и 7). Действительно, энергия фотона в среде равна $\mathscr{H} = \hbar\omega$, а импульс равен $\mathbf{G} = (\hbar\omega n/c)(\mathbf{k}/k)$, т. е. $\mathbf{G} = (\mathscr{H} n/c)(\mathbf{k}/k)$. Как было показано в гл. 7, использование связи (13.19) позволяет из законов сохранения энергии и импульса найти условие черенковского излучения; то же относится к формуле Доплера. В обоих случаях при классическом расчете, когда величина $\mathscr{H}$ не конкретизируется (и, следовательно, не содержит квантовую постоянную $\hbar$), получаются, естественно, только классические формулы, не учитывающие отдачи — изменения движения излучающей частицы. Для нахождения более общих формул с учетом отдачи нужно использовать законы сохранения уже в применении к отдельным фотонам в среде. Конкретно, при излучении одного фотона нужно воспользоваться соотношениями (см. (7.1) и (7.2))

$$E_0 - E_1 = \hbar\omega, \quad \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 = \frac{\hbar\omega n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{13.20}$$

---

*) Для неподвижной диспергирующей среды, как ясно уже из общих соображений (см., в частности, выше), электромагнитный импульс цуга волн $\mathbf{G}^{(A)} = \frac{\mathscr{H}}{c^2}\mathbf{v}_{\mathrm{гр}} = \frac{\mathscr{H}}{c^2}\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$, где $\mathbf{v}_{\mathrm{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ — групповая скорость. Любопытно, что для изотропной плазмы с $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, когда $v_{\mathrm{гр}} = cn$, имеет место равенство $\mathbf{G}^{(\mathrm{M})} = \frac{\mathscr{H} n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} = \mathbf{G}^{(\mathrm{A})}$.

где $E_{0,1}$ и $\mathbf{p}_{0,1}$ — энергии и импульсы частицы (излучателя) соответственно в начальном состоянии 0 и конечном состоянии 1. В силу сказанного ясно (и это, конечно, подтверждается вычислениями), что для «получения» квантов (фотонов в среде) с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $(\hbar\omega n/c)(\mathbf{k}/k)$ при стандартном квантовании нужно прибегнуть к тензору энергии — импульса в форме Минковского. Если же пользоваться тензором Абрагама, то как классически (см. (13.18)), так и при квантовании и учете лишь импульса $\mathbf{G}^{(A)}$ для импульса «фотона» находим заведомо неверный результат. Фактически же, как и следовало ожидать, использование тензора Абрагама приводит к правильному результату, но нужно учесть также действие силы Абрагама на среду в процессе испускания излучения (то же относится к процессу поглощения). Сделать это действительно необходимо, поскольку при излучении цуга волн (или, например, при его вхождении в среду) сила $\mathbf{f}^{A}$ (см. (13.6)) отлична от нуля. Нас здесь интересует не сама сила, а импульс силы, который при излучении цуга волн равен (см. (13.17))

$$\mathbf{F}^{(A)} = \frac{n^2-1}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\,d\mathbf{r}\,dt = \frac{n^2-1}{16\pi c}\{[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0^*] + [\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}_0]\}L = \\ = \frac{(n^2-1)n}{8\pi c}(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*)L\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{(n^2-1)\mathscr{H}\mathbf{k}}{cnk}, \qquad (13.21)$$

где отброшены осциллирующие члены и, следовательно, речь идет о средней по времени величине *).

Отметим, что можно с самого начала рассматривать более или менее произвольный цуг волн и вычислять, а затем и сравнивать интегральные величины $\mathscr{H} = \int w\,d\mathbf{r}\,dt$, $\mathbf{G}^{(A,\,M)} = \int \mathbf{g}^{A,\,M}\,d\mathbf{r}\,dt$ и $\mathbf{F}^{(A)}$. Соотношения между этими величинами остаются такими же, как в (13.17)—(13.19), (13.21) для цуга с резкими границами.

Очевидно, что в силу (13.17)—(13.19)

$$\mathbf{G}^{(A)} + \mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(M)} = \frac{\mathscr{H}n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k}. \qquad (13.22)$$

В плане применения закона сохранения энергии и импульса обычно существенны лишь два момента: во-первых, какие энергию и импульс теряет при излучении (или получает при поглощении) излучающая частица или «система»; во-вторых, какая энергия поля излучается в данном направлении. Вопрос же о том, как распределяется или перераспределяется импульс излучения с этой точки зрения не важен. В рассматриваемом случае

*) Сила действует, лишь пока волна (цуг) входит в среду или излучается источником. При распространении же цуга данной длины в однородной среде импульс силы $\mathbf{F}^{(A)}$ равен нулю.

частица теряет импульс $-\mathbf{G}^{(M)}$, поле в среде приобретает импульс $\mathbf{G}^{(A)}$ и среда получает импульс силы $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(M)} - \mathbf{G}^{(A)}$. Для среды — «пылевидной материи» — под действием силы $\mathbf{f}^A$ частицы среды ускоряются и $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(c)}$ есть импульс среды (сумма импульсов «пылинок», концентрация которых считается постоянной). В общем же случае состояние среды определяется соответствующими уравнениями движения, например уравнениями теории упругости или уравнениями гидродинамики, в которых плотность объемной силы равна $\mathbf{f}^A$ и в принципе может содержать и какие-то другие члены. При этом, конечно, нельзя считать, что $\mathbf{F}^{(A)} = \mathbf{G}^{(c)} = \mathbf{g}^c L$, где $\mathbf{g}^c$ — плотность импульса среды *). Тем самым нельзя также, вообще говоря, утверждать, что плотность импульса Минковского $\mathbf{g}^M$ равна $\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^c$. Но, как мы видели, в отношении интегральных величин — импульсов и импульса силы $\mathbf{F}^{(A)}$, результат (13.21) совершенно не зависит от свойств среды и остается верным и в предположении (вообще говоря, неправильном), что $\mathbf{g}^M = \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^c$. Тем самым использование тензора Минковского в данном случае фактически оправдано, так как не только приводит к правильному результату, но и непосредственно ведет к цели без рассмотрения действия объемной силы. Учет действия этой силы в рамках классического подхода, правда, весьма прост (см. выше), но квантовомеханически он оказался бы, по-видимому, довольно громоздким. Так или иначе, насколько нам известно, такое квантовое рассмотрение еще не проведено. В тех нестационарных задачах, для решения которых ясны преимущества или даже необходимость применения тензора Абрагама, соответствующий квантовый анализ был бы оправдан (хотя, конечно, и не необходим, пока задача является классической, что, вероятно, справедливо при любой реальной постановке вопроса об измерении силы Абрагама). Что же касается обсуждавшегося выше (и особенно в гл. 7) использования законов сохранения энергии

---

*) Аналогичная ситуация имеет место в случае квантов звука — фононов. Распространение звука в твердом теле не сопровождается перемещением массы, и в этой связи импульс звуковых волн равен нулю (здесь не учитывается релятивистский эффект, — то обстоятельство, что цуг звуковых волн с энергией $\mathscr{H}$ имеет массу $\mathscr{H}/c^2$ и, следовательно, обладает импульсом $(\mathscr{H}/c^2)v_s$, где v_s — скорость звука). Поэтому и при квантовании получится, что кванты звука — фононы имеют энергию $\hbar\omega$ и равный нулю импульс (импульсом $(\hbar\omega/c^2)v_s$ опять пренебрегаем). Утверждение же, что импульс фонона (скажем, при его излучении электроном) равен $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/v_s)(\mathbf{k}/k)$ на самом деле означает, что при излучении фонона решетка как целое получает импульс $\hbar\mathbf{k}$ (процессы переброса здесь не учитываются). При применении законов сохранения в случае излучения, поглощения и рассеяния звука ничего, однако, не меняется, если считать, как обычно и делается, что сами фононы имеют не только энергию $\hbar\omega$, но и импульс $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/v_s)(\mathbf{k}/k)$. Кстати, импульс поля по Абрагаму $G^{(A)} = \mathscr{H}/cn = (\mathscr{H}/c^2)(c/n)$ (см. (13.18)), т. е. имеет такой же смысл, как и «истинный» импульс фонона $(\mathscr{H}/c^2)v_s$, поскольку скорость электромагнитного импульса равна c/n (дисперсией мы пренебрегаем).

и импульса при излучении «фотонов в среде», то, как нам представляется, вопрос о характере и смысле такого рассмотрения может считаться вполне ясным уже в свете сделанных замечаний (вместо того, чтобы обращаться к гл. 6 и 7, удобнее, быть может, использовать статью [78], в которой квантование поля в среде и вопрос о тензоре энергии — импульса обсуждаются в одном месте).

Вопросы о тензоре энергии — импульса и о силах в среде были рассмотрены выше в простейшем случае. В частности, среда считалась неподвижной, непоглощающей, однородной и немагнитной; не учитывалась также возможная зависимость диэлектрической проницаемости ε от плотности среды ρ (не путать ρ с плотностью внешних зарядов ρ_{ext}).

Откажемся от всех этих предположений, причем запишем уравнения поля в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{ext} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{13.23}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13.24}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{ext}, \tag{13.25}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{13.26}$$

Если в системе отсчета, в которой среда покоится, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (дисперсией, как и ранее, пренебрегаем), то для медленно движущейся среды (см. § 111 в [85])

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right], \\
\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{B}\right], \\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{E}\right] = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\mathbf{D}\right],
\end{aligned} \tag{13.27}$$

где скорость среды $\mathbf{u}$ относительно лабораторной системы отсчета считается малой, т. е. пренебрегается членами порядка u^2/c^2. Однако и при использовании более общих связей между $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ исходные уравнения (13.23)—(13.26) также остаются справедливыми.

Умножая уравнения (13.23) и (13.24) скалярно соответственно на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и действуя далее как обычно (см. (13.4)), получаем соотношение

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{H}\right) = -\mathbf{j}_{ext}\mathbf{E} - \operatorname{div}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}]. \tag{13.28}$$

Умножая (13.23) и (13.24) векторно соответственно на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ и опять поступая так же, как выше при получении уравнения

(13.5), имеем

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{D}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}]+[\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]-\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}\}=-\mathbf{f}^{\text{Л}}-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DB}], \quad (13.29)$$

$$\mathbf{f}^{\text{Л}}=\rho_{\text{ext}}\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{B}].$$

Соотношения (13.28) и (13.29) обобщают (13.4), (13.5) и представляют собой законы сохранения энергии и импульса, вытекающие из уравнений поля (13.23)—(13.26). Точнее, речь идет о законах сохранения, связанных с законами сохранения энергии и импульса. Выявление же этой связи требует дополнительного анализа и дополнительных предположений. По сути дела, последнее уже было пояснено выше — при наличии в законе сохранения ряда членов нельзя без дальнейших допущений однозначно интерпретировать те или иные из них. Вместе с тем при конкретизации задачи использование законов сохранения позволяет, разумеется, получить ценные результаты. В качестве примера найдем на базе соотношения (13.28) выражение для плотности силы $\mathbf{f}_m$, действующей на рассматриваемую среду.

Для этой цели вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}+\mathbf{BH}}{8\pi}\right)\equiv\frac{\partial w^{\text{M}}}{\partial t}, \quad (13.30)$$

где $w^{\text{M}}=(\mathbf{DE}+\mathbf{BH})/8\pi$ можно пока рассматривать лишь как обозначение.

При вычислении производных $\partial\mathbf{E}/\partial t$ и $\partial\mathbf{H}/\partial t$ воспользуемся связями (13.27). При этом нужно также как-то конкретизировать значения $\partial\varepsilon/\partial t$ и $\partial\mu/\partial t$. Будем считать, что ε для каждого элемента среды может изменяться лишь в силу изменения плотности ρ. Тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\equiv\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla\varepsilon=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \quad (13.31)$$

где использовано также уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\mathbf{u}=0.$$

В силу (13.27), (13.31) и аналогичного выражения для $d\mu/dt$ легко находим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}&=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]-\mathbf{D}\left\{\mathbf{u}\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\},\\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}&=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\left[\frac{\mathbf{u}}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right]-\mathbf{B}\left\{\mathbf{u}\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)-\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\rho\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (13.32)$$

Здесь, как и везде, скорость $\mathbf{u}$ считается постоянной или, точнее, пренебрегается всеми производными от $\mathbf{u}$ по времени и координатам, но учитывается дивергенция $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$, возникающая при использовании уравнения непрерывности. В силу (13.22), и снова

принимая во внимание связи (13.27) при пренебрежении членами порядка u^2/c^2, получаем

$$\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{H}\right)+\frac{1}{8\pi}(\mathbf{u}\nabla\varepsilon)E^2+$$

$$+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1}{8\pi}(\mathbf{u}\nabla\mu)H^2+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2\operatorname{div}\mathbf{u}. \quad (13.33)$$

Комбинируя (13.33) с (13.28), окончательно находим

$$-\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t}=\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{E}+\mathbf{f}_m\mathbf{u}+\operatorname{div}\left\{\mathbf{S}-\frac{\mathbf{u}}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2+\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2\right]\right\}, \quad (13.34)$$

$$\mathbf{f}_m=-\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu+\frac{1}{8\pi}\nabla\left\{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\rho\right)E^2\right\}+\frac{1}{8\pi}\nabla\left\{\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\rho\right)H^2\right\}. \quad (13.35)$$

Это соотношение уже естественно непосредственно интерпретировать как закон сохранения энергии, причем w^{M} есть плотность энергии поля и $\mathbf{f}_m$ — сила, действующая на среду (она производит работу $\mathbf{f}_m\mathbf{u}$); добавление к потоку энергии члена, пропорционального $\mathbf{u}$, не может вызвать удивления, но вопрос о точности соответствующего выражения нуждается в дополнительном анализе. Нас этот вопрос не будет интересовать, поскольку целью вывода было получение выражения для силы $\mathbf{f}_m$, действующей на покоющуюся среду, когда $\mathbf{u}=0$. Но положить сразу $\mathbf{u}=0$ нельзя, поскольку в этом случае работа силы $\mathbf{f}_m\mathbf{u}$ также равна нулю. Выражение (13.35) совпадает, конечно, с получающимся обычно (см. [44, 85]), но в результате рассмотрения смещения элементов среды в поле. Подобный вывод в общем эквивалентен приведенному, но непосредственно относится лишь к статическому случаю.

Не следует думать, как могло бы показаться на первый взгляд, что приведенный вывод однозначно определяет плотность силы, действующей на среду. В самом деле, выберем для движущейся среды в качестве плотности энергии и плотности импульса следующие выражения:

$$w^{\mathrm{A}}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE}+\mathbf{BH})-\frac{\mathbf{u}/c}{4\pi\,(1-u^2/c^2)}([\mathbf{DB}]-[\mathbf{EH}]), \quad (13.36)$$

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}}=\frac{\mathbf{S}^{\mathrm{A}}}{c^2}=\frac{1}{4\pi c}\left\{[\mathbf{EH}]-\frac{\mathbf{u}/c^2}{1-(u^2/c^2)}(\mathbf{u}[\mathbf{DB}]-\mathbf{u}[\mathbf{EH}])\right\}. \quad (13.37)$$

Именно такие выражения получаются (см. [3, 175]) для движущейся среды в результате релятивистских преобразований, если в неподвижной среде принять для тензора энергии — импульса выражение Абрагама (13.10).

Очевидно, что

$$\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t}+\mathbf{f}_m\mathbf{u}=\frac{\partial w^{\mathrm{A}}}{\partial t}+\mathbf{f}_m\mathbf{u}+\mathbf{f}^{\mathrm{A}}\mathbf{u}, \quad (13.38)$$

$$\mathbf{f}^{\mathrm{A}}=\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g}^{\mathrm{M}}-\mathbf{g}^{\mathrm{A}})=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{[\mathbf{DB}]-[\mathbf{EH}]+\frac{\mathbf{u}\,(\mathbf{u}[\mathbf{DB}]-\mathbf{u}[\mathbf{EH}])}{c^2\,(1-(u^2/c^2))}\right\}. \quad (13.39)$$

Таким образом, если говорить только о соблюдении закона сохранения (13.28), то с равным правом можно считать плотность объемной силы равной $\mathbf{f}_m$ или $\mathbf{f}_m + \mathbf{f}^A$. То же справедливо и в отношении выбора выражения для плотности импульса на основании закона сохранения (13.29): как выражение Минковского $\mathbf{g}^M = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{DB}]$, так и выражение Абрагама (13.37) совместимы с (13.29). Вся разница состоит лишь в том, что в варианте Абрагама на среду, помимо других сил, действует и сила с плотностью $\mathbf{f}^A$, отсутствующая в варианте Минковского, так сказать, за счет соответствующего изменения плотности импульса поля в среде. Вопрос о реальности силы $\mathbf{f}^A$, которая для изотропной и немагнитной среды при $(u^2/c^2) \ll 1$ имеет вид (13.6), должен решаться на основе опыта или в результате анализа сил, действующих на среду в электромагнитном поле (имеем в виду уравнения движения для среды). Как мы уже упоминали, с обеих этих точек зрения в наличии силы $\mathbf{f}^A$ не приходится сомневаться. Остается заметить, что и в общем случае сохраняется связь $\mathbf{G}^M \equiv \int \mathbf{g}^M dV = \mathbf{G}^A + \mathbf{F}^A$ (см. (13.22)), т. е. полный импульс, передаваемый среде находящимся в ней излучателем, может вычисляться с использованием выражения Минковского для плотности импульса $\mathbf{g}^M$ (подробнее см. [176]). Как и в рассмотренном ранее частном случае неподвижной, изотропной и немагнитной среды, такой вывод, очевидно, нисколько не противоречит признанию реальности силы Абрагама $\mathbf{f}^A$.

Необходимо подчеркнуть, что выше был затронут лишь один аспект проблемы сил, действующих в среде. Особенно существенно пренебрежение дисперсией. Кроме того, в различных экспериментальных ситуациях возникает необходимость конкретного анализа, который различен для статических, квазистационарных и высокочастотных (световых) полей. Многое здесь можно сделать феноменологически [177], но приходится прибегать (в частности, в плазме) и к микроскопическим расчетам или по крайней мере к использованию модельных представлений (см., например, [178]).

Обратимся ко второму вопросу, которому посвящена настоящая глава, а именно, к обсуждению выражений для плотности энергии и выделяющегося тепла в диспергирующей и поглощающей среде.

Из физических соображений ясно, что всякая реальная среда является и диспергирующей, и поглощающей, а формально связь частотной дисперсии с поглощением видна из дисперсионных отношений (см., например, [44], § 62). Однако в реальных условиях вполне возможны ситуации, когда в рассматриваемом интервале частот частотная дисперсия достаточно мала. То же можно сказать о поглощении. Пространственная же дисперсия незначительна для еще гораздо более широкого круга условий.

Таким образом, обсуждавшиеся в книге задачи в применении к средам без дисперсии и поглощения имеют определенный смысл. Менее тривиально такое замечание: значительно большая простота трактовки задач при отсутствии дисперсии и поглощения приводит к злоупотреблениям в том смысле, что энергетические соотношения для сред с дисперсией и поглощением недостаточно хорошо известны и осмыслены.

Вопрос об энергии поля в диспергирующих средах при отсутствии поглощения, как отмечалось выше, все же достаточно широко освещен в литературе (впрочем, это относится лишь к квазимонохроматическому полю и уже для двух квазимонохроматических волн картина заметно усложняется [179]). Но для диспергирующей и поглощающей среды ситуация хуже и, более того, даже для «поглощающей среды без дисперсии» — в этом случае диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ считаются не зависящими от частоты, обычная интерпретация членов в соотношении Пойнтинга оказывается по меньшей мере неточной. Ниже мы осветим этот вопрос (следуем статье [180]), пренебрегая пространственной дисперсией.

Исходными для нас будут уравнения в форме (13.23)—(13.26) и вытекающая из них теорема Пойнтинга (13.28). Если среда неподвижна, изотропна, немагнитна и не обладает поглощением и дисперсией, то $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, причем $\varepsilon = \varepsilon'$ — вещественная величина. Тогда соотношение (13.28) переходит в (13.4) и, как указывалось, сразу же ясно, что $w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + H^2)$ есть плотность энергии, а $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — поток энергии через единицу поверхности. В диспергирующей и поглощающей среде соотношение (13.28) по-прежнему справедливо, и при пренебрежении пространственной дисперсией, а также в предположении о линейности, немагнитности, неподвижности и неизменности среды во времени, принимает вид ($\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = \operatorname{Re}\varepsilon + i\operatorname{Im}\varepsilon$ — комплексная проницаемость)

$$\frac{\partial(w_E + w_M)}{\partial t} + Q = -\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E} - \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}, \quad w_M = \frac{H^2}{8\pi}, \tag{13.40}$$

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega, \mathbf{r})\,\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{13.41}$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega, \quad \mathbf{E}(-\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{r}),$$

где аргумент $\mathbf{r}$ будем в дальнейшем опускать, так как при предполагаемом отсутствии пространственной дисперсии он вхо-

дит лишь как параметр. Связь $\mathbf{E}(-\omega)=\mathbf{E}^*(\omega)$ отражает тот факт, что поле $\mathbf{E}$ вещественно; из вещественности $\mathbf{D}$ следует далее, что

$$\begin{gathered}\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega), \quad \operatorname{Re}\varepsilon(-\omega)\equiv\varepsilon'(-\omega)=\varepsilon'(\omega),\\ \operatorname{Im}\varepsilon(-\omega)\equiv\varepsilon''(-\omega)=-\varepsilon''(\omega).\end{gathered} \tag{13.42}$$

Обобщение всего рассмотрения на случай среды анизотропной и магнитной не составляет труда и только привело бы к более громоздким выражениям.

В случае поля, произвольным образом зависящего от времени, выражение $\dfrac{\partial(w_E+w_M)}{\partial t}+Q$ можно записать в виде интеграла по частотам, но нельзя затем провести в общем виде интегрирование по времени. Последнее, однако, можно сделать для непоглощающей среды (см. приложение в [180]). Для поглощающей же среды некоторые общие результаты удается получить, лишь конкретизируя зависимость поля $\mathbf{E}$ от времени. Важнейшим таким случаем является квазимонохроматическое поле

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t)&=\frac{1}{2}\left[\mathbf{E}_0(t)\,e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_0^*(t)\,e^{i\omega t}\right],\\ \mathbf{H}(t)&=\frac{1}{2}\left[\mathbf{H}_0(t)\,e^{-i\omega t}+\mathbf{H}_0^*(t)\,e^{i\omega t}\right],\end{aligned} \tag{13.43}$$

где квазимонохроматический характер поля проявляется в том, что функции $\mathbf{E}_0(t)$ и $\mathbf{H}_0(t)$ очень медленно изменяются за время $T=2\pi/\omega$. Ниже будет предполагаться также, что $\mathbf{E}_0(-\infty)=0$ и $\mathbf{H}_0(-\infty)=0$. Именно этому условию не удовлетворяет, очевидно, монохроматическое поле, что мешает его неограниченному использованию.

Подставим поля (13.43) в (13.40) и произведем усреднение по высокой частоте ω, что эквивалентно пренебрежению членами, содержащими множители $e^{\pm 2i\omega t}$ (такие средние отмечаются ниже чертой сверху). Тогда получается следующий результат (выкладки можно найти в [180]):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}\mathbf{E}(t)}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_0(t)\,\mathbf{E}_0^*(t))+\frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{8\pi}\mathbf{E}_0(t)\,\mathbf{E}_0^*(t)+\\ +\frac{i}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon''(\omega))}{d\omega}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0^*(t)-\frac{\partial\mathbf{E}_0^*(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0(t)\right),\end{aligned} \tag{13.44}$$

где, как и ниже, производные по частоте берутся на несущей частоте ω, фигурирующей в (13.43). В отсутствие поглощения, когда $\varepsilon''(\omega)=0$ и $\varepsilon'(\omega)=\varepsilon(\omega)$, очевидно,

$$\begin{gathered}\overline{\frac{\partial w_E(t)}{\partial t}}=\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}\mathbf{E}(t)}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{\partial|\mathbf{E}_0(t)|^2}{\partial t},\\ \bar{w}_E=\frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}.\end{gathered} \tag{13.45}$$

Это выражение, уже использованное в гл. 6, выводится в большом числе книг и статей (см., например, [44, 76, 84, 180]), причем получается разными способами.

Если нет поглощения, то интерпретация величины $\bar{w}_E$ как средней плотности энергии электрического поля, что ясно из (13.40) и (13.45), не вызывает никаких сомнений. Но как обстоит дело в поглощающей среде?

На первый взгляд кажется, что в поглощающей среде средняя плотность энергии имеет вид

$$\bar{w}_E = \frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}, \tag{13.46}$$

поскольку именно такое выражение фигурирует в (13.44), где остальные члены зависят от $\varepsilon''(\omega)$, исчезают при отсутствии поглощения и их естественно связать с выделяющимся теплом Q. Для такого заключения нет, однако, достаточных оснований, так как разделение заданной суммы на неизвестные слагаемые явно неоднозначно. Более того, выражение (13.46) в общем случае безусловно не является плотностью энергии электрического поля. Ниже это будет показано на примерах, свидетельствующих одновременно и о том, что плотности w_E, $\bar{w}_E$ и Q вообще непосредственно не выражаются в общем случае*) через проницаемость $\varepsilon(\omega)$.

Такой вывод естествен уже из весьма общих соображений. Проницаемость $\varepsilon(\omega)$ определяет линейный «отклик» среды — индукцию $\mathbf{D}$, возникающую под влиянием поля $\mathbf{E}$. Нет никаких оснований, чтобы для достаточно сложной поглощающей среды этот «отклик» однозначно определял также квадратичную по полю величину — плотность энергии. Особенно выпукло неоднозначное соответствие между линейным «откликом» и запасенной в системе энергией демонстрируется на примере дискретных электрических цепей. Рассмотрим, например, известную из литературы цепь, изображенную на рис. 13.1. Если к такой цепи — двухполюснику приложено напряжение $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$, то ток будет равен $J = J_0 e^{-i\omega t} = \mathscr{E}/Z(\omega)$, причем $Z = R$ при любых значениях параметра $\varkappa$, если самоиндукция $L = \varkappa R$ и емкость

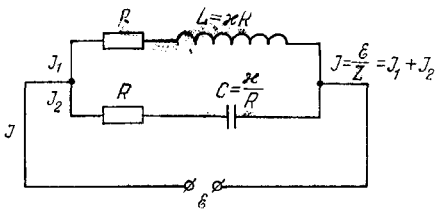


Рис. 13.1. Электрический контур с импедансом $Z = R$ при произвольном значении параметра $\varkappa$.

*) В *состоянии термодинамического равновесия* средние потери отсутствуют, и поэтому и в поглощающей среде средняя плотность электромагнитной энергии, являющаяся термодинамической величиной, в известном смысле (см. [181] и гл. 14) выражается через диэлектрическую проницаемость среды.

$C = \varkappa/R$ *). В то же время энергия, сосредоточенная в цепи, равна

$$\frac{LJ_1^2}{2} + \frac{\left(\int J_2\, dt\right)^2}{2C}$$

и, разумеется, зависит от значений L и C.

Из приведенных рассуждений, конечно, совсем не следует, что для поглощающей среды вообще невозможно получить отдельные выражения для энергии или для диссипации. Простейший пример подобного рода — выражение для среднего по периоду количества тепла в случае монохроматического поля. Для строго монохроматического поля, очевидно, $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ (см. (13.43)). Далее ясно, что в этом случае усредненная по периоду энергия $\overline{w_E(t)}$ неизменна по времени; поэтому из (13.40), (13.44) получаем

$$\frac{\partial \bar{w}_E}{\partial t} + \bar{Q} = \bar{Q} = \frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}\,\mathbf{E}(t)} = \frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{8\pi}\,|\,\mathbf{E}_0\,|^2. \qquad (13.47)$$

Рассмотрим теперь довольно поучительный случай поглощающей среды, называемой «средой без дисперсии», когда

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon'\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma\mathbf{E}, \qquad (13.48)$$

причем ε' и σ вещественные и не зависящие от частоты величины. Диэлектрическая проницаемость такой среды $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i(4\pi\sigma/\omega)$, разумеется, обладает очевидной частотной дисперсией, но тем не менее с физической точки зрения используемый термин «поглощающая среда без дисперсии» представляется разумным и после сказанного вполне ясным. Соотношение (13.28) в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon'\mathbf{E}^2(t) + \mathbf{H}^2(t)}{8\pi}\right) + \sigma\mathbf{E}^2 + \mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E} = -\frac{c}{4\pi}\,\text{div}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}]. \qquad (13.49)$$

На первый взгляд из (13.49) и (13.40) следует, что величины $w'(t) = (\varepsilon' E^2 + H^2)/8\pi$ и $Q(t) = \sigma E^2(t)$ однозначно отождествляются с плотностями энергии и потерь, но на самом деле это неверно. Лишь в случае поля, изменяющегося со временем достаточно медленно, выражение для тепла (и в общем случае только оно) принимает написанный выше вид $Q = \sigma E^2$.

Действительно, при наличии дисперсии проницаемости $\varepsilon(\omega)$, т. е. для нелокальной во времени связи между рассматриваемыми величинами и полем, слагаемые $\partial w_E/\partial t$ и Q в соотношении (13.40)

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,\mathbf{E} \qquad (13.50)$$

*) Как ясно из рис. 13.1, $\mathscr{E} = J_1R - i\omega LJ_1 \equiv Z_1J_1 = J_2R - (J_2/i\omega C) \equiv Z_2J_2 = Z(J_1 + J_2) = ZJ$. Отсюда следует известное соотношение для параллельных цепей $1/Z = (1/Z_1) + (1/Z_2)$. Для рассматриваемой цепи действительно $1/Z = [1/(R - i\omega L)] + \{1/[R - (1/i\omega C)]\} = 1/R$ при любых $\varkappa$.

можно представить в виде рядов типа

$$a_1\mathbf{E}^2(t)+a_2\mathbf{E}(t)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+a_{31}\mathbf{E}(t)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+a_{32}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)^2+\ldots$$

В случае среды с $\varepsilon'=\text{const}$ и $\sigma=\text{const}$ в правую часть (13.50) будут в силу (13.48) входить лишь слагаемые, содержащие $\mathbf{E}^2(t)$ или $\partial\mathbf{E}^2(t)/\partial t$. Поэтому из (13.50) видим, что выражения для энергии и тепла в среде с постоянными (не зависящими от частоты) величинами ε' и σ при произвольной зависимости поля от времени, вообще говоря, имеют вид

$$w_E(t)=a\frac{\mathbf{E}^2(t)}{8\pi}+\ldots, \tag{13.51}$$

$$Q(t)=\sigma\mathbf{E}^2(t)+b\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mathbf{E}^2(t)}{\partial t}+\ldots, \tag{13.52}$$

причем

$$a+b=\varepsilon', \tag{13.53}$$

но по отдельности a и b через диэлектрическую проницаемость, вообще говоря, не выражаются, а коэффициенты при невыписанных членах так согласованы, что в выражении $(\partial w_E/\partial t)+Q$ все такие члены, содержащие производные выше первой степени от поля по времени, сокращаются. Если электрическое поле изменяется со временем достаточно медленно, так что $|b|/T\ll\sigma$, где T — характерное время для изменения поля, то выражение для выделяющегося тепла, как видно из (13.52), принимает вид

$$Q(t)=\sigma\mathbf{E}^2(t). \tag{13.54}$$

Что же касается выражения для энергии поля в «поглощающей среде без дисперсии», т. е. при $\varepsilon'(\omega)=\text{const}$ и $\sigma(\omega)=\text{const}$, то лишь при условии $|a|\gg|b|$ оно принимает вид $w_E(t)=\varepsilon' E^2(t)/8\pi=w'_E(t)$. Однако выполнение условия $|a|\gg|b|$ совсем не обязательно и вполне может быть, что $|a|\lesssim|b|$; в этом мы еще убедимся ниже на конкретном примере (см. (13.70), (13.71)). Разумеется, возможность появления в (13.51), (13.52) членов, содержащих производные поля по времени, обусловлена тем, что рассматриваемая среда обладает частотной дисперсией комплексной проницаемости ($\varepsilon(\omega)=\varepsilon'+i(4\pi\sigma/\omega)$, $\varepsilon'=\text{const}$, $\sigma=\text{const}$).

Поскольку выразить w_E и Q через ε в общем случае нельзя, для нахождения этих величин нужно обратиться к рассмотрению тех или иных конкретных сред или моделей среды. То же естественно сделать и для прояснения ситуации в целом. Как известно, весьма общей моделью среды является модель, сводящаяся к совокупности осцилляторов с массами m_k, собственными частотами ω_k (речь идет о частотах при отсутствии поглощения) и эффективными числами соударений ν_k ($m_k\nu_k$ — коэф-

фициент при силе трения). Уравнение движения для такого осциллятора типа k имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_k + \nu_k \dot{\mathbf{r}}_k + \omega_k^2 \mathbf{r}_k = \frac{e_k}{m_k} \mathbf{E}, \tag{13.55}$$

где e_k — заряд ($e_k \mathbf{r}_k$ — дипольный момент осциллятора) и $\mathbf{E}$ — действующее на осциллятор поле. Ниже, чтобы не усложнять модель без особой на то нужды, поле $\mathbf{E}$ будет отождествляться со средним макроскопическим полем. Такое предположение является, вообще говоря, частным или приближенным. Но, например, для плазмы (в этом случае $\omega_k = 0$) оно практически полностью оправдано. Применение уравнения (13.55) с $\omega_k = 0$ к плазме имеет весьма широкую область применимости, как это ясно из более общего анализа на основе кинетического уравнения (см. гл. 12). Что же касается применения классической модели осцилляторов к атомарным или молекулярным газам и некоторым другим средам, то оно находит обоснование на базе квантовой теории.

В поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ вынужденное решение уравнения (13.55) имеет вид

$$\mathbf{r}_k = -\frac{e_k}{m_k} \frac{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_k^2 - \omega_k^2 + i\omega\nu_k}. \tag{13.56}$$

Поскольку поляризация среды $\mathbf{P} = \sum_k e_k N_k \mathbf{r}_k$ и по определению для рассматриваемого поля $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$, то *)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_k \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \omega_k^2 + i\omega\nu_k}, \quad \Omega_k^2 = \frac{4\pi e_k^2 N_k}{m_k}, \tag{13.57}$$

где N_k — концентрация осцилляторов сорта k.

Для плазмы, когда $\omega_k = 0$,

$$\begin{gathered} \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega}{\omega^2 + i\omega\nu}, \quad \varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \nu^2}, \\ \varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} = \frac{\nu\Omega^2}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}, \quad \Omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \end{gathered} \tag{13.58}$$

где, для простоты, плазма считается однокомпонентной и индекс k опущен (мы не касаемся вопроса о фоне, скажем, из положительных ионов, обеспечивающих квазинейтральность среды).

Закон сохранения энергии для осциллятора сорта k имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2}{2} + \frac{m_k \omega_k^2 \mathbf{r}_k^2}{2}\right) = -m_k \nu_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 + e_k \dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{E}. \tag{13.59}$$

*) Напомним, что при выборе временной зависимости в виде $e^{-i\omega t}$ по используемому определению $\mathbf{D}_0 e^{-i\omega t} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$.

Отсюда ясно, что для рассматриваемой модели среды

$$K = \sum_k {}^1/_2 N_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2, \quad U = \sum_k {}^1/_2 N_k m_k \omega_k^2 \mathbf{r}_k^2$$
$$Q = \sum_k N_k m_k \nu_k \dot{\mathbf{r}}_k^2, \tag{13.60}$$

где K — связанная с полем кинетическая энергия, U — потенциальная энергия и Q — выделяющееся в единицу времени в единице объема тепло (точнее, Q есть работа сил трения, которую мы считаем переходящей в тепло).

Плотность энергии поля и вызванного полем движения зарядов (осцилляторов) в среде равна $w_E = (E^2/8\pi) + K + U$. Поскольку речь идет о квадратичных величинах, удобно теперь рассмотреть вещественное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \operatorname{Re} e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^* = \text{const}$ и найти w_E и Q, а затем средние по периоду значения $\bar{w}_E$ и $\bar{Q}$. (Это означает практически, что отбрасываются все члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$.) Результат элементарного расчета таков:

$$\bar{w}_E = \left[1 + \sum_k \frac{\Omega_k^2 (\omega^2 + \omega_k^2)}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \omega^2 \nu_k^2}\right] \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi} \tag{13.61}$$

$$\bar{Q}_E = \sum_k \frac{\Omega_k^2 \nu_k \omega^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \omega^2 \nu_k^2} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi} = \omega \varepsilon''(\omega) \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi}, \tag{13.62}$$

поскольку, согласно (13.57),

$$\varepsilon''(\omega) = \sum_k \frac{\omega \nu_k \Omega_k^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \omega^2 \nu_k^2}. \tag{13.63}$$

В то же время

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \sum_k \frac{\Omega_k^2 (\omega^2 - \omega_k^2)}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \omega^2 \nu_k^2}, \tag{13.64}$$

и поэтому w_E через $\varepsilon'(\omega)$ не выражается (см. также ниже). В частном случае уже упомянутой модели плазмы (13.58)

$$\bar{w}_E = \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \nu^2}\right) \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi} = (2 - \varepsilon'(\omega)) \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi},$$
$$\bar{Q}_E = \frac{\nu \Omega^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi} = \omega \varepsilon''(\omega) \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi}, \tag{13.65}$$

т. е. не только $\bar{Q}_E$, но и $\bar{w}_E$ выражается через $\varepsilon(\omega)$ или, конкретно, через $\varepsilon'(\omega) = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$. Этот случай, однако, явно является частным. К тому же сами значения $w_E(t)$ и $Q(t)$, а не

соответствующие средние даже для плазмы непосредственно через $\varepsilon(\omega)$ не выражаются — они имеют вид

$$w_E(t) = \left\{\left[1 - \frac{\Omega^2(\omega^2-\nu)^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\cos^2\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu\omega\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t + \frac{\omega^2\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right\}\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}, \qquad (13.66)$$

$$Q(t) = \nu\Omega^2\left[\frac{1}{\omega^2+\nu^2} - \frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t + 2\frac{\nu\omega}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}. \qquad (13.67)$$

Для системы осцилляторов определенная согласно (13.46) величина равна

$$\tilde{\bar{w}}_E = \frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi} =$$
$$= \left\{1 + \sum\frac{\Omega_k^2(\omega^2+\omega_k^2)\left[(\omega^2-\omega_k^2)^2 - \omega^2\nu_k^2\right]}{\left[(\omega^2-\omega_k^2)^2 + \omega^2\nu_k^2\right]^2}\right\}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}, \qquad (13.68)$$

а для плазмы имеем

$$\tilde{\bar{w}}_E = \frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi} = \left[1 + \frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}. \qquad (13.69)$$

Очевидно, в обоих случаях при наличии поглощения $\bar{w}_E \neq \tilde{\bar{w}}_E$ (см. (13.61), (13.65), (13.68) и (13.69)) и только при отсутствии поглощения (т. е. при $\nu_k = 0$) $\bar{w}_E = \tilde{\bar{w}}_E$, т. е. средняя плотность энергии $\bar{w}_E$ правильно определяется формулой (13.46), переходящей в этом случае в (13.45). Иначе и не могло быть, поскольку при отсутствии поглощения

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} = \frac{\partial w_E}{\partial t}$$

и не приходится как-то разделять величину $(1/4\pi)(\partial\mathbf{D}/\partial t)\mathbf{E}$ на части $\partial w_E/\partial t$ и Q (см. (13.40)).

Приведенные примеры (носящие, кстати сказать, весьма общий характер) не оставляют сомнений в том, что величина

$$\tilde{\bar{w}}_E = \frac{d(\omega\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}$$

(см. (13.46)) не является, вообще говоря, плотностью энергии электрического поля в среде. Из (13.68), (13.69) ясно также, что $\tilde{\bar{w}}_E$ может быть отрицательной (например, в (13.69) $\tilde{\bar{w}}_E < 0$, если $\Omega^2\nu^2 > \Omega^2\omega^2 + (\omega^2+\nu^2)^2$; в предельном случае $\nu^2 \gg \omega^2$ это сводится к условию $\Omega^2 > \nu^2$). Величина же $\bar{w}_E$, как ясно из (13.61) или (13.65), всегда положительна, как это и должно быть для величины $\bar{w}_E = (\overline{\mathbf{E}^2}/8\pi) + K$.

Для области частот $\omega^2 \ll \nu^2$, согласно (13.58), $\varepsilon' = 1 - (\Omega^2/\nu^2)$, $\sigma = \Omega^2/4\pi\nu$, а, значит, в данном случае плазма представляет собой пример уже обсуждавшейся выше поглощающей среды без дисперсии *). Из (13.66), (13.67) при этом в полном соответствии с (13.51)—(13.53) имеем (напомним, что в (13.66), (13.67) $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$)

$$w_E(t) = \left(1 + \frac{\Omega^2}{\nu^2}\right) \frac{\mathbf{E}^2(t)}{8\pi}, \tag{13.70}$$

$$Q(t) = \frac{\Omega^2}{4\pi\nu} \mathbf{E}^2(t) - 2\frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \mathbf{E}^2(t)}{\partial t}, \tag{13.71}$$

так что $a = 1 + \Omega^2/\nu^2$, $b = -2\Omega^2/\nu^2$, $a + b = 1 - \Omega^2/\nu^2 = \varepsilon'$. Соотношение между a и $|b|$ определяется, как видно из формул, параметром Ω^2/ν^2 и при $\Omega^2/\nu^2 > 1$ имеем $|b| > a$.

Хотя величины $w_E(t)$ и $Q(t)$ в общем виде, вообще говоря, не выражаются через $\varepsilon(\omega)$, для суммы

$$\frac{\partial w_E(t)}{\partial t} + Q(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E}$$

это, конечно, возможно. Отсюда ясно, что вклад в члены с $\varepsilon'(\omega)$ и с $\varepsilon''(\omega)$, входящие в выражение $(1/4\pi)(\partial \mathbf{D}/\partial t)\mathbf{E}$, вносит как член $dw_E(t)/dt$, так и член $Q(t)$. Тем не менее довольно поучительно убедиться в сказанном на конкретном примере. Разумеется, для этого годится и среда, состоящая из осцилляторов, но мы ограничимся рассматривавшейся выше моделью плазмы.

Заметим, что в этом случае особенно легко также проверить справедливость самого соотношения

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E}, \tag{13.50}$$

выписанного ранее, можно сказать, из общих соображений. В самом деле, для обсуждаемой модели и плазмы

$$eN\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\mathbf{D} - \mathbf{E})}{\partial t},$$

где $\mathbf{P}$ — полная поляризация среды (если отдельно вводятся ток проводимости $\mathbf{j}$ и поляризация $\mathbf{P}$, то используется запись $eN\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{P}/\partial t$). С другой стороны, согласно уравнению движения, $m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$ и, значит,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Nm\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2}\right) + Nm\nu\dot{\mathbf{r}}^2 = Ne\dot{\mathbf{r}}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{E}.$$

*) Заметим, что при $\sigma > 0$ и $\varepsilon' < 0$ такая среда в отсутствие внешних источников неустойчива [182], в силу чего случай плазмы с $\omega^2 \ll \nu^2$ и $\Omega^2 > \nu^2$ нужно рассматривать с известной осторожностью (нужно опираться на общие выражения (13.58), свидетельствующие об устойчивости соответствующей модели плазмы). В этой связи отметим, что мы, по существу, нигде и не опираемся на неравенство $\omega^2 \ll \nu^2$.

Отсюда

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}, \quad w_E = K + \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}, \quad K = \frac{Nm\dot{\mathbf{r}}^2}{2}, \quad Q = mN\nu\dot{\mathbf{r}}^2,$$

как это и должно быть.

Для монохроматического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ значения w_E и Q уже были выписаны (см. (13.66), (13.67)) и, таким образом,

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + Q =$$

$$= \left\{ -\omega \sin 2\omega t + \frac{\omega\Omega^2(\omega^2 - \nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2} \sin 2\omega t + 2\frac{\omega^2\Omega^2\nu}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t \right\} \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} +$$

$$+ \left[\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2} - \frac{\nu\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t + 2\frac{\Omega^2\nu^2\omega}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t \right] \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} = [-\omega\varepsilon'(\omega)\sin 2\omega t + \omega\varepsilon''(\omega) + \omega\varepsilon''(\omega)\cos 2\omega t]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} =$$

$$= \left(-\omega \sin 2\omega t + \frac{\omega\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\sin 2\omega t + \frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2} + \frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\cos 2\omega t \right)\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}, \tag{13.72}$$

где последнее выражение получено путем подстановки выражений (13.58) для $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$; что же касается предпоследнего выражения в (13.72), то оно сразу же получается при учете связи поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ с индукцией $\mathbf{D} = (\mathbf{E}_0/2)(\varepsilon(-\omega)e^{i\omega t} + \varepsilon(\omega)e^{-i\omega t})$, так как при учете соотношения (13.42) получаем тогда

$$\mathbf{D} = \varepsilon'(\omega)\mathbf{E}_0 \cos \omega t + \varepsilon''(\omega)\mathbf{E}_0 \sin \omega t.$$

Из сравнения различных членов в (13.72) ясно, например, что член

$$-\omega\varepsilon'(\omega)\sin 2\omega t = -\omega \sin 2\omega t + \frac{\Omega^2\omega}{\omega^2+\nu^2}\sin 2\omega t$$

образуется или, если угодно, формируется и из $\partial w_E/\partial t$, и из Q. Это, очевидно, относится и к члену

$$\omega\varepsilon''(\omega)\cos 2\omega t = \frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\cos 2\omega t.$$

И лишь постоянный во времени член

$$\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}$$

обусловлен только диссипацией. Последнее не удивительно, если учесть, что рассматривается монохроматическое поле. Совершенно очевидно, что аналогичные заключения сохраняются и после интегрирования по времени. Заметим здесь, что при интегрировании (13.72) по времени и определении таким образом величины $w_E(t) + \int Q(t)\,dt$ нужно проявить некоторую осторожность и, по сути дела, вернуться сначала к выражениям (13.66), (13.67). Действительно, из (13.72) получаем

$$w_E(t) + \int Q(t)\,dt = \varepsilon'(\omega)\frac{\mathbf{E}_0^2\cos 2\omega t}{16\pi} + \omega\varepsilon''(\omega)\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}t + \\ + \omega\varepsilon''(\omega)\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + \text{const} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}\,\mathbf{E}(t)\,dt. \quad (13.73)$$

Как ясно из сказанного и нижеследующих замечаний, входящую в (13.73) постоянную интегрирования в общем случае, вообще говоря, выразить через ε нельзя. При отсутствии же поглощения из сравнения (13.73) с (13.45) видно, что

$$\text{const} = \frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}.$$

С другой стороны, для модели среды и конкретно для модели плазмы определить величину $w_E(t) + \int Q(t)\,dt$ не составляет труда и при наличии поглощения. В самом деле, выражение для $w_E(t)$ в случае плазмы нам уже известно (см. (13.66)), и здесь его удобно записать, учитывая, что $\cos^2\omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$, в виде

$$w_E(t) = \left\{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\right) + \frac{2\omega\Omega^2\nu}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t + \right. \\ \left. + \left[1 - \frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\cos 2\omega t\right\}\frac{\mathbf{E}_0^2}{16\pi}. \quad (13.74)$$

Далее, интегрируя (13.67) по времени, находим

$$\int Q(t)\,dt = \nu\Omega^2\left[\frac{t}{\omega^2+\nu^2} - \frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - \frac{\nu\cos 2\omega t}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}, \quad (13.75)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы для усредненной по периоду диссипации энергии за промежуток времени t при монохроматическом поведении поля было $\overline{\int Q(t)\,dt} = \int \overline{Q(t)}\,dt \propto t$. Таким образом, складывая (13.74) и (13.75) и

приравнивая их сумму (13.73), получаем

$$w_E(t)+\int Q(t)\,dt=\left[\frac{\cos 2\omega t}{2}-\frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\cos 2\omega t}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu\omega\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\right)\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}+$$
$$+\left[\frac{\nu\Omega^2 t}{\omega^2+\nu^2}-\frac{\nu\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}-\frac{\nu^2\Omega^2\cos 2\omega t}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,\mathbf{E}\,dt=$$
$$=\left[\varepsilon'(\omega)\frac{\cos 2\omega t}{2}+\omega\varepsilon''(\omega)\,t+\varepsilon''(\omega)\frac{\sin 2\omega t}{2}+\text{const}\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi}=$$
$$=\left[\frac{\cos 2\omega t}{2}-\frac{\Omega^2\cos 2\omega t}{2(\omega^2+\nu^2)}+\frac{\nu\Omega^2 t}{\omega^2+\nu^2}+\frac{\nu\Omega^2\sin 2\omega t}{2\omega(\omega^2+\nu^2)}+\text{const}\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi},\tag{13.76}$$

где все выражения записаны в полной аналогии с (13.72). Ясно, что и при наличии поглощения постоянная интегрирования как раз и определяет выражение для $\bar{w}_E(t)$ (см. (13.58), (13.74) и (13.76)).

Подчеркнем здесь также, что не только в общем виде, но и даже для квазимонохроматического поля невозможно проинтегрировать соотношение Пойнтинга для поглощающей среды по времени, и использование начальных условий $E(-\infty)=0$, $H(-\infty)=0$ в этом смысле не приводит к решению вопроса. В самом деле, уже из (13.44) видно, что слагаемые, содержащие $\varepsilon''(\omega)$, нельзя представить в виде полных производных по времени от некоторых выражений. Последнее и не удивительно, ибо, как известно, выделяющееся тепло не является функцией состояния системы и δQ, как и в обычной термодинамике, не представляет собой, таким образом, полного дифференциала. Поэтому в зависимости от того, каким именно способом изменяется с течением времени поле $\mathbf{E}_0(t)$ от $\mathbf{E}_0(-\infty)=0$ до величины $\mathbf{E}_0$, при интегрировании соотношения (13.44) по времени для поглощающей среды мы можем получить различные ответы.

Мотивы, в силу которых мы сочли уместным подробно останавливаться на столь простых расчетах, уже были упомянуты ранее. Нам остается лишь отметить, что обсуждение энергетических соотношений в поглощающей среде, находящейся в электромагнитном поле, не только полезно для понимания механизма и характера поглощения и релаксации, но и используется при вычислении «энергетической скорости» — переноса энергии в электромагнитных волнах, распространяющихся в поглощающей среде (см. [76, 84, 126, 143а, 183]).

Глава 14

ФЛУКТУАЦИИ И ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫ СИЛЫ

Флуктуации в электрическом контуре. Тепловое излучение в среде. Молекулярные (ван-дер-ваальсовы) силы между макроскопическими телами. Взаимодействие электронов с полем в полом резонаторе.

При изложении электродинамики сплошных сред в гл. 11 мы подчеркивали, что рассматриваются поля, являющиеся средними статистическими полями. Тем самым без внимания автоматически оставались флуктуационные явления. Между тем, как хорошо известно, различные флуктуации и в частности электромагнитные флуктуации и связанные с ними эффекты играют очень большую роль в физике и астрофизике. Достаточно упомянуть о флуктуациях в электрических контурах и цепях, о флуктуациях электромагнитного поля в резонаторах (как пустых, так и наполненных средой) и молекулярных (ван-дер-ваальсовых) силах между конденсированными телами (вычисление этих сил тесно связано с вопросом об электромагнитных флуктуациях). Рассеяние электромагнитных волн (радиоволн, света, рентгеновских лучей) в среде также представляет собой флуктуационное явление — можно сказать, что речь идет о рассеянии на флуктуациях тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Тем самым освещение в настоящей и следующей главах некоторых вопросов, связанных с флуктуациями и рассеянием волн, представляется в плане этой книги вполне естественным. Необходимо, однако, подчеркнуть, что внимание сконцентрировано не на общих вопросах теории электромагнитных флуктуаций (см. [165, 184, 185]), а только на нескольких более частных, но в физическом отношении весьма интересных задачах.

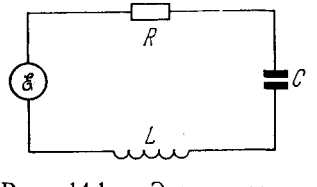


Рис. 14.1. Электрический LCR-контур.

Первая такая задача — флуктуации в линейном электрическом контуре, т. е. электрической цепи с сосредоточенными емкостью C, самоиндукцией L и сопротивлением R (рис. 14.1). Размеры контура l считаются очень малыми по сравнению

с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, отвечающей рассматриваемой области частот ω. В таких условиях при рассмотрении полей и токов в контуре справедливо квазистационарное приближение (см., например, [44, 85]), в рамках которого сила тока во всех частях контура одинакова и равна $J(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega$.

Если величины C, L и R не зависят от частоты, то ток J определяется уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = L\dot{J} + RJ + \frac{\int J\, dt}{C} = \mathscr{E}(t), \tag{14.1}$$

где $q = \int J\, dt$ — заряд на конденсаторе и $\mathscr{E}(t)$ — приложенная к контуру (или, лучше сказать, включенная в контур) электродвижущая сила (э. д. с.)*). Если хотя бы одна из величин L, C и R зависит от частоты (прямой аналог частотной дисперсии в среде), уравнение (14.1) справедливо лишь для фурье-компонент:

$$\left.\begin{aligned} -i\omega L(\omega) + R(\omega) - \left(\frac{1}{i\omega C(\omega)}\right) J_\omega &= \mathscr{E}_\omega, \\ J_\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J(t) \exp(i\omega t)\, dt, \\ \mathscr{E}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(t) \exp(i\omega t)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Если ввести импеданс (комплексное сопротивление) контура

$$Z(\omega) = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{14.3}$$

то, согласно (14.2),

$$\mathscr{E}_\omega = Z(\omega) J_\omega. \tag{14.4}$$

В отсутствие внешней э. д. с. статистическое среднее значение тока J в контуре, разумеется, равно нулю. Вместе с тем очевидно, что в контуре под влиянием или, если угодно, в результате теплового движения все время возникают и исчезают (затухают) флуктуационные токи. Эти токи можно, как обычно в таких случаях, охарактеризовать корреляционной функцией

$$\varphi(t' - t) = \varphi(\tau) = \overline{J(t)\, J(t+\tau)}, \tag{14.5}$$

*) При использовании абсолютных единиц (система СГС), как мы везде поступаем, в (14.1) фигурирует не самоиндукция L, а L/c^2. Поскольку конкретные значения L ниже использоваться не будут, удобнее просто обозначить самоиндукцию, деленную на c^2, через L.

причем задача считается однородной во времени (отсюда зависимость только от $\tau = t' - t$; задача была бы неоднородна во времени, если бы параметры контура зависели от времени) и черта означает статистическое, а если нужно, то и квантовомеханическое усреднение (подробнее см. [184, 186]; для простоты выписываем формулы типа (14.5) лишь в применении к классической задаче). Для случайных (флуктуационных) токов J, не стремящихся к нулю при $|t| \to \infty$, фурье-компонентами нужно пользоваться с осторожностью, но для применяемых ниже конечных квадратичных величин подобные предосторожности оказываются излишними [186, 187]. Поэтому, подставляя в (14.5) выражение *)

$$J(t) = \int J_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega,$$

получаем

$$\varphi(\tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{J_\omega J_{\omega'}} \exp[-i(\omega t + \omega' t')]\, d\omega\, d\omega'.$$

Но правая часть этой формулы зависит только от τ лишь при наличии соответствующей δ-функции, и, следовательно, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (J^2)_\omega \exp(-i\omega\tau)\, d\omega, \\ (J^2)_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (14.6)$$

где величина $(J^2)_\omega$ определена следующим образом:

$$\overline{J_\omega J_{\omega'}} = (J^2)_\omega\, \delta(\omega + \omega').$$

Для среднего квадрата силы тока имеем

$$\overline{J^2} = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (J^2)_\omega\, d\omega = 2\int_0^{\infty} (J^2)_\omega\, d\omega. \qquad (14.7)$$

---

*) При сравнении ряда формул с приведенными в [186] нужно иметь в виду, что в [186] используется нормировка, отличающаяся от нашей на 2π; например, согласно [186] было бы

$$J(t) = \frac{1}{2\pi}\int J_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega, \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (J_\omega)^2 \exp(-i\omega\tau)\, d\omega,$$

$$(J^2)_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau; \text{ см. (14.6).}$$

Измеряя силу флуктуационного тока $J(t)$ в контуре, можно найти $\varphi(\tau)$ и, следовательно, $(J^2)_\omega$ — спектральную плотность среднеквадратичной флуктуации. Для контура, находящегося в термодинамическом равновесии (при температуре T), величина $(J^2)_\omega$ определяется из теории — получение соответствующего выражения и является сейчас нашей целью. При этом вместо $(J^2)_\omega$ можно с таким же успехом искать спектральную плотность среднеквадратичной «случайной» э. д. с.

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = |Z(\omega)|^2 (J^2)_\omega. \qquad (14.8)$$

Действительно, в электродинамическом отношении флуктуационные токи в контуре ничем не отличаются от токов, текущих под влиянием «внешней» э. д. с. Используя поэтому связь (14.4), причем согласно (14.3), $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$, приходим к (14.8).

Значение $(\mathscr{E}^2)_\omega$ в термодинамическом равновесии получается сразу же при использовании общей так называемой флуктуационно-диссипационной теоремы, связывающей флуктуации (например, величины $\overline{J^2}$ и $(J^2)_\omega$) с диссипативными свойствами системы (в случае контура — с его сопротивлением R). В этом отношении нам нечего прибавить к выводам, приводимым в книгах [184—187]. Вместе с тем достаточно элементарное рассмотрение, предпринятое ниже, не только сразу же приводит к цели, но и проясняет по существу все физическое содержание флуктуационно-диссипационной теоремы. Более того, отправляясь от контура, мы по сути дела получаем значительно более общие результаты.

Итак, обратимся к получению выражения для $(\mathscr{E}^2)_\omega$ в равновесном контуре. Начнем с утверждения, что для любого контура

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = R(\omega) f(\omega, T), \qquad (14.9)$$

где $f(\omega, T)$ — универсальная, т. е. не зависящая от параметров контура L, C и R, функция частоты ω и температуры T.

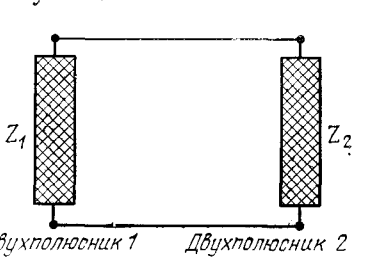


Рис. 14.2. Цепь, состоящая из двух последовательно включенных двухполюсников с импедансами Z_1 и Z_2.

Для доказательства соотношения (14.9) рассмотрим два последовательно включенных контура — двухполюсника, образующих замкнутую цепь, схематически изображенную на рис. 14.2 (см., например, [188]; идея доказательства восходит по сути дела к Найквисту [189], рассматривавшему двухпроводную линию). В результате флуктуаций в общем контуре течет некоторый ток $J(t)$, а флуктуационные э. д. с. в каждом из двухполюсников равны соответственно $\mathscr{E}_1 = Z_1 J$ и $\mathscr{E}_2 = Z_2 J$, где $Z_{1,2}$ — импедансы двухполюсников. В термодинамическом равновесии средняя мощность P_{12}, отдаваемая двухполюсником 1 двухпо-

люснику *2*, должна равняться мощности P_{21}, отдаваемой двухполюсником *2* двухполюснику *1*, т. е.

$$P_{12}=\int \frac{R_2\left(\mathscr{E}_1^2\right)_\omega d\omega}{|Z|^2}=P_{21}=\int \frac{R_1\left(\mathscr{E}_2^2\right)_\omega d\omega}{|Z|^2}. \qquad (14.10)$$

Здесь $Z(\omega)=Z_1+Z_2$ — импеданс рассматриваемой цепи из двух последовательно включенных контуров (двухполюсников), а к используемым выражениям для мощности легко прийти на основе известного соотношения $P=\overline{RJ^2}$. Равенство (14.10) должно соблюдаться для любых двухполюсников, в частности, когда при заданных R_1 и R_2, но различных самоиндукциях $L_{1,2}$ и емкостях $C_{1,2}$ изменяется импеданс всей цепи Z. Но это возможно лишь в случае равенства подынтегральных выражений, т. е. при условии $R_2\left(\mathscr{E}_1^2\right)_\omega=R_1\left(\mathscr{E}_2^2\right)_\omega$. Значит,

$$\frac{\left(\mathscr{E}_1^2\right)_\omega}{R_1}=\frac{\left(\mathscr{E}_2^2\right)_\omega}{R_2}=\frac{\left(\mathscr{E}^2\right)_\omega}{R}=f(\omega,\ T)$$

представляет собой величину, которая может зависеть от ω и T, но не от параметров контуров (несколько подробнее см. [188а]). Для нахождения функции $f(\omega,\ T)$ мы вправе теперь выбрать уже любой контур и проще всего, конечно, слабо затухающий LC-контур с $R\to 0$.

Предварительно запишем выражения для средних электрической $\overline{U}$ и магнитной $\overline{K}$ энергий в контуре при любых L, C и R:

$$\overline{U}=\frac{\overline{q^2}}{2C}=\frac{1}{2C}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}\left(J^2\right)_\omega d\omega=$$

$$=\frac{1}{C}\int\limits_0^\infty\frac{\left(\mathscr{E}^2\right)_\omega d\omega}{\omega^2|Z(\omega)|^2}=\int\limits_0^\infty\frac{CRf(\omega,\ T)\,d\omega}{R^2C^2\omega^2+(LC\omega^2-1)^2}, \qquad (14.11)$$

$$\overline{K}=\frac{\overline{LJ^2}}{2}=\frac{L}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(J^2\right)_\omega d\omega=\int\limits_0^\infty\frac{\omega^2C^2LRf(\omega,\ T)\,d\omega}{R^2C^2\omega^2+(LC\omega^2-1)^2}. \qquad (14.12)$$

Если $R\to 0$, то получающийся контур вполне аналогичен гармоническому незатухающему осциллятору, описываемому уравнением $m\ddot{x}+kx=0$, причем собственная частота $\omega_i=\sqrt{k/m}=1/\sqrt{LC}$ (см. (14.1)). В отношении же осциллятора достаточно хорошо известно (и поэтому мы не будем делать на этот счет дополнительных пояснений), что средняя его энергия при температуре T равна

$$\overline{W}=\overline{U}+\overline{K}=2\overline{U}=2\overline{K}=\tfrac{1}{2}\overline{m\dot{x}^2}+\tfrac{1}{2}\overline{kx^2}=\frac{\overline{q^2}}{2C}+\tfrac{1}{2}\overline{LJ^2}=$$

$$=\left(\frac{\hbar\omega_i}{2}+\frac{\hbar\omega_i}{\exp\left[\hbar\omega_i/\varkappa T\right]-1}\right)=\frac{\hbar\omega_i}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_i}{2\varkappa T}. \qquad (14.13)$$

Разумеется, внутренняя энергия самого сопротивления R здесь не принимается во внимание.

Далее заметим, что при малых R интегралы (14.11) и (14.12) имеют резкий максимум при $\omega = \omega_i = 1/\sqrt{LC}$, и поэтому можно положить (строго это справедливо при $R \to 0$, $\alpha = CR/\overline{LC}$)

$$\bar{U} = f(\omega, T) \int_0^\infty \frac{\alpha\, d\eta}{\alpha^2\eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \overline{K} = f(\omega, T) \int_0^\infty \frac{\alpha\eta^2\, d\eta}{\alpha^2\eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \\ = {}^1/_2 \pi f(\omega, T). \quad (14.14)$$

Фигурирующие здесь интегралы берутся точно (проще всего с использованием теоремы о вычетах), но для получения результата достаточно учесть, что при $\alpha \to 0$ оба интеграла сводятся к $\int_0^\infty \frac{\alpha\, d\eta}{\alpha^2 + 4(\eta - 1)^2} \approx \frac{\pi}{2}$. Сравнивая (14.13) и (14.14) и учитывая, что частота ω_i произвольна, находим для $f(\omega, T)$

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \quad (14.15)$$

Наконец, из (14.9) получаем формулу Найквиста

$$\left.\begin{aligned} (\mathscr{E}^2)_\omega &= \frac{\hbar\omega}{2\pi} R(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} = \frac{R}{\pi}\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1}\right), \\ \overline{\mathscr{E}^2} &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty R(\omega)\, \omega \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\, d\omega. \end{aligned}\right\} \quad (14.16)$$

В классическом случае, когда $\hbar\omega \ll \varkappa T$, имеем

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = \frac{R}{\pi} \varkappa T, \qquad \hbar\omega \ll \varkappa T. \quad (14.17)$$

Приведенный вывод вполне строг или во всяком случае не менее убедителен, чем вывод, основанный на общей флуктуационно-диссипационной теореме. Более того, его можно рассматривать как вывод самой этой теоремы, которая для случайной величины x имеет вид (см., например, [186], § 124)

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''}{2\pi} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \quad (14.18а)$$

где α'' — мнимая часть α — величины, определяющей отклик системы на внешнее возмущение и в такой же мере на случайное (флуктуационное) возмущение Q. Конкретно

$$x_\omega = \alpha(\omega) Q_\omega$$

и

$$\overline{x_\omega x_{\omega'}} = \alpha(\omega)\alpha(\omega')\overline{Q_\omega Q_{\omega'}} = (x^2)_\omega \delta(\omega + \omega') = |\alpha|^2 (Q^2)_\omega \delta(\omega + \omega').$$

Сравнивая это выражение с (14.18а), получаем

$$(Q^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''}{2\pi|\alpha|^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \qquad (14.18б)$$

Но, очевидно, формула (14.18б) эквивалентна (14.16), если $\alpha = i\omega/Z(\omega)$ и, следовательно, $\alpha'' = \operatorname{Im}\alpha = \omega R/|Z|^2$. В том, что для электрического контура величина α имеет именно такой смысл, легко убедиться и непосредственно (см., например, § 78 в [184]). Из сказанного ясно, что и наоборот, отправляясь от формулы Найквиста (14.16), а также уточняя смысл параметра α и величин x и Q, можно получить соотношения (14.18) для достаточно широкого класса случайных физических величин.

Сделаем теперь несколько замечаний, касающихся свойств LCR-контура.

В классическом пределе $\hbar\omega \ll \varkappa T$ функция $f(\omega, T) = \varkappa T/\pi$ и, как ясно из (14.11), (14.12) и (14.14), при любых значениях параметров L, C и R можно написать

$$\bar{U} = \bar{K} = {}^1/_2\varkappa T. \qquad (14.19)$$

Разумеется, такого результата и следовало ожидать, ибо он в данном случае эквивалентен статистической теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы. Правда, выше предполагалось, что L, C и R не зависят от ω, но в противном случае вообще трудно говорить о контуре с одной степенью свободы и, во всяком случае, классический закон равнораспределения и не должен выполняться.

Существенно, что в квантовом случае, даже при постоянных L, C и R равнораспределение, вообще говоря, не имеет места. Конечно, при $R \to 0$ справедливы формулы (14.13) и в частности $\bar{U} = \bar{K}$. Вообще же в качестве первого приближения формулы (14.13) справедливы при условии

$$R/L \ll 1/\sqrt{LC}, \qquad (14.20)$$

обеспечивающем слабость затухания *). Если же неравенство (14.20) не соблюдается, то $\bar{U} \neq \bar{K}$, причем общие выражения для $\bar{U}$ и $\bar{K}$ в этом случае получаются из (14.11), (14.12) и (14.15). Мы видим, что $\bar{U}$ и $\bar{K}$ зависят от двух параметров — от $\alpha = CR/\sqrt{LC}$ и $\beta = \hbar/\sqrt{LC}\varkappa T$.

Условие (14.20) эквивалентно неравенству $\alpha \ll 1$, и тогда $\beta = \hbar\omega_i/\varkappa T$, где $\omega_i = 1/\sqrt{LC}$ — частота контура. Пусть для примера (подробнее см. [188 б]) контур сильно затухает, т. е.

$$\frac{R}{L} \gg \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (14.22)$$

*) Собственная частота LCR-контура определяется из уравнения (14.1) с $\mathscr{E}(t) = 0$ и равна

$$\omega_i = -i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \qquad (14.21)$$

или, что то же самое, $\alpha \gg 1$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{U} = {}^1/_2 \varkappa T && \text{при} && \frac{\hbar}{RC} \ll \varkappa T, && \text{т. е. при } \beta \ll \alpha,\\
&\bar{U} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\varkappa T}{\hbar/RC}\right)\varkappa T && \text{при} && \frac{\hbar}{RC} \gg \varkappa T,\\
&\bar{K} = {}^1/_2 \varkappa T && \text{при} && \frac{\hbar R}{L} \ll \varkappa T, && \text{т. е. при } \beta \ll \frac{1}{\alpha},\\
&\bar{K} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\varkappa T}{\hbar R/L}\right)\varkappa T && \text{при} && \frac{\hbar R}{L} \gg \varkappa T.
\end{aligned}\right\} \quad (14.23)$$

Таким образом, условие классичности для электрической энергии $\bar{U}$ совершенно отлично от условия классичности для магнитной энергии $\bar{K}$ и т. д. Любопытно также, что контур, далекий от условия классичности при малом R (выполняется условие $\hbar\omega_i = \hbar/\sqrt{LC} \gtrsim \varkappa T$), при достаточном возрастании R и неизменных L и C становится классичным по отношению к $\bar{U}$ (т. е. $\bar{U} \to {}^1/_2 \varkappa T$), тогда как $\bar{K} \to 0$. Здесь нужно лишь напомнить, что требование квазистационарности контура, из которого мы исходили, накладывает известные ограничения на величины L, C и R (в частности, нельзя просто стремить $R \to \infty$, ибо в этом случае контур окажется разомкнутым и формально $(\mathscr{E}^2)_\omega \to \infty$, хотя $(J^2)_\omega \to 0$). Нам неизвестно, однако, чтобы подобные ограничения как-то сказывались при анализе соответствующих конкретных задач или существенным образом мешали переходу к предельным случаям $\hbar/RC \ll \varkappa T$ или $\hbar R/L \gg \varkappa T$ (см. (14.23)).

Причина отмеченной ситуации — разного поведения $\bar{U}$ и $\bar{K}$ — вполне ясна. Классическая система даже при большом затухании может сохранять свои характерные черты — «оставаться сама собой». Например, колебания маятника (осциллятора) с ростом вязкости окружающей его среды затухают все сильнее, но сам он остается тем же маятником. Если же мы имеем квантовый гармонический осциллятор с частотой ω_i, то в отсутствие затухания эта система имеет энергетические уровни, отстоящие друг от друга на расстоянии $\hbar\omega_i$. С ростом затухания (в результате, скажем, соударений или взаимодействия с излучением) уровни расширяются и все больше перекрываются. Совершенно очевидно далее, что при сильном перекрытии уровней система обладает явно выраженным непрерывным спектром и имеет мало общего с квантовым гармоническим осциллятором. Но у разных квантовых систем в зависимости от характера их энергетического спектра средняя полная энергия и средние потенциальная или кинетическая энергии уже, вообще говоря, совершенно различны.

Гармонический осциллятор играет в физике исключительно большую роль отнюдь не только потому, что подобная система, как таковая, часто встречается (маятник, колебания молекул и т. п.). Еще более важно, что к задаче об осцилляторе в известной мере сводится чрезвычайно широкий круг вопросов, свя-

занных с рассмотрением малых (линейных) возмущений и волн в средах с «распределенными постоянными», т. е. в электродинамике сплошных сред, в акустике и т. д. Относится это и к электромагнитному полю в вакууме — излагавшийся в гл. 1 и гл. 6 гамильтоновский метод в электродинамике вакуума и среды является очевидной тому иллюстрацией. Впрочем, разложение на волны, причем отнюдь не только на плоские волны, выходит за пределы гамильтоновского метода и, как сказано, имеет чрезвычайно широкую область применения. В этой связи сразу же ясно, что проведенное выше исследование электрических флуктуаций в электрическом контуре обобщается не только на дискретные системы (механический осциллятор, дискретные цепи и т. п.), но и на сплошные среды. Отсылая за подробностями, например, к [44, 84, 185, 187], приведем лишь некоторые выражения, относящиеся к флуктуациям электромагнитного поля в среде.

Наличие флуктуаций можно отразить, записывая в рамках линейной электродинамики связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в виде

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \int \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\omega, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' + K_i(\omega, \mathbf{r}). \quad (14.24)$$

Здесь уже сделан переход к фурье-компонентам по ω, а в остальном эта связь отличается от (11.3) только добавлением флуктуационной электрической индукции $\mathbf{K}(\omega, \mathbf{r})$, учитывающей появление флуктуаций $\mathbf{D}$ и в отсутствие среднего поля $\mathbf{E}$. В отсутствие внешних источников основные уравнения поля для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_i \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) &= -\frac{i\omega}{c} \int \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\omega, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' - \frac{i\omega}{c} K_i(\omega, \mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}. \end{aligned}\right\} \quad (14.25)$$

Связь (14.24) учитывает, очевидно, возможность наличия пространственной дисперсии, и поэтому можно без ограничений общности считать, что $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (см. гл. 11). При пренебрежении пространственной дисперсией уже можно (а иногда и нужно) вводить магнитную проницаемость, и тогда при рассмотрении флуктуаций следует ввести также флуктуационную магнитную индукцию $\mathbf{L}(\omega)$ (см. § 90 в [44])*).

*) В настоящей книге мы часто ссылаемся на первое издание т. VIII курса [44]. Между тем ряд вопросов, освещавшихся в этом томе, вошел теперь в другие тома курса. Так, дисперсионные соотношения (соотношения Крамерса — Кронига) и флуктуационно-диссипационная теорема излагаются в т. V [186], а электромагнитные флуктуации — в т. IX [184]. При этом в [184] принята форма изложения, при которой флуктуационные члены K_i и L_i в явном виде не вводятся. Эти члены, однако, имеют довольно ясный физический смысл и, поскольку мы приводим лишь некоторые результаты вычислений, нам кажется более удобным и наглядным сохранить старую схему изложения.

Согласно флуктуационно-диссипационной теореме в равновесии

$$\overline{K_i(\omega, \mathbf{r}) K_j(\omega, \mathbf{r}')} \equiv (K_i(\mathbf{r}) K_j(\mathbf{r}'))_\omega = \\ = i\hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} \{\hat{\varepsilon}^*_{ji}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) - \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\}, \quad (14.26)$$

где черта отвечает статистическому усреднению. При пренебрежении пространственной дисперсией и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ имеем $\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon_{ij}(\omega)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и

$$(K_i(\mathbf{r}) K_i(\mathbf{r}'))_\omega = i\hbar \{\varepsilon^*_{ji} - \varepsilon_{ij}(\omega)\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} = \\ = 2\hbar\varepsilon''_{ij}(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14.27)$$

Решая уравнения (14.25) для нахождения полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, вызванных флуктуационным членом $\mathbf{K}$, и получая далее квадратичные выражения, можно, используя флуктуационно-диссипационные соотношения (14.26), (14.27), выразить результат через ε''_{ij} или затем через другие подходящие величины. Например, в прозрачной среде $\varepsilon'' \to 0$, но наличие в (14.27) δ-функции обеспечивает правильный предельный переход, скажем, к выражению (см. § 91 в [44] и §77 в [184])

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}'))_\omega = \frac{1}{n^2} (\mathbf{H}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}'))_\omega = \frac{\hbar\omega^2}{\pi c^2} \frac{\sin((\omega/c) n\tilde{r})}{\tilde{r}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \\ (\mathbf{E}^2)_\omega = \frac{1}{n^2} (\mathbf{H}^2)_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3} n \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}, \end{aligned}\right\} \quad (14.28)$$

где $\tilde{r} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}$, так как $\varepsilon'' = 0$.

Отсюда прямой путь и к получению формулы для равновесной плотности электромагнитной энергии в прозрачной диспергирующей среде (в таких случаях говорят обычно о тепловом излучении). Действительно, эта плотность равна *)

$$w_\omega = \frac{1}{8\pi} 2(E^2)_\omega \frac{d(\omega n^2)}{d\omega} + \frac{1}{8\pi} 2(H^2)_\omega = \\ = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \left(n \frac{d(\omega n^2)}{d\omega} + n^3\right) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\varkappa T} = \\ = \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1}\right) \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d(\omega n)}{d\omega}; \quad (14.29)$$

*) Напомним, что используемые ниже в тексте величины таковы, что $\overline{(\mathbf{E})^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (E^2)_\omega \, d\omega = 2 \int\limits_0^\infty (E^2)_\omega \, d\omega$. Кроме того, полная энергия определена как $W = \int\limits_0^\infty w_\omega \, d\omega$, и нужно учесть выражение (6.29) или ему эквивалентные (см., например, [44, 76, 84]).

здесь учтены соотношения (14.28), где уже отражен тот факт, что в поперечных нормальных волнах в изотропной среде (только они сейчас и рассматриваются) $(H^2)_\omega = n^2 (E^2)_\omega$.

С другой стороны, к формуле (14.29) можно значительно проще прийти непосредственно, считая, что каждый «осциллятор поля» (индекс α) имеет среднюю энергию

$$w_\alpha = \left(\frac{\hbar\omega_\alpha}{2} + \frac{\hbar\omega_\alpha}{\exp(\hbar\omega_\alpha/\varkappa T) - 1} \right) = \frac{\hbar\omega_\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2\varkappa T}, \qquad (14.30)$$

а число таких осцилляторов в интервале $d\omega$ равно (множитель 2 учитывает два направления поляризации)

$$\frac{2\, dk_x\, dk_y\, dk_z}{(2\pi)^3} = \frac{8\pi k^2\, dk}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d(\omega n)}{d\omega} d\omega, \qquad (14.31)$$

поскольку $\frac{dk}{d\omega} = \frac{d(\omega n/c)}{d\omega}$, $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$.

Полученные выражения для поперечного поля в прозрачной однородной среде (вообще говоря, без пространственной дисперсии, поскольку учитывались лишь две волны) легко обобщаются на произвольную прозрачную среду, в которой могут распространяться нормальные волны с показателем преломления $n_l(\omega, \mathbf{s})$, $l = 1, 2, 3 \ldots$ Конкретно, в этом случае

$$w_l(\omega, \mathbf{s})\, d\omega\, d\Omega = \frac{\omega^2 n_l^2 w(\omega)}{(2\pi c)^3} \left| \frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega} \right| d\omega\, d\Omega, \qquad (14.32)$$

где $w(\omega)$ — функция (14.30) с $\omega_\alpha = \omega$, равная в классическом пределе $\varkappa T$, и $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор, отвечающий элементу телесного угла $d\Omega$. С применением выражения (14.32) мы уже сталкивались в гл. 10 (см. также указанную там литературу). Нет никаких сомнений в том, что к этой формуле можно прийти и исходя из флуктуационно-диссипационной теоремы (14.26) с ее последующим применением к произвольной среде и переходом к пределу $\varepsilon''_{ij} \to 0$. Но для прозрачной среды такой путь несравненно сложнее и явно не адекватен задаче. Несомненно, ценность соотношения (14.26) и всего флуктуационного подхода со случайными индукциями и т. п. (см., например, (14.25)) связана с возможностью изучать на таком пути поглощающие среды, а переход к прозрачной среде служит обычно лишь для контроля.

Энергия электромагнитного поля в поглощающей среде *) составляет, вообще говоря, лишь малую часть от полной энер-

*) Понятие об энергии электромагнитного поля в поглощающей среде нуждается, вообще говоря, в уточнении, так как оно во всяком случае неоднозначно (см. гл. 13). Однако энергию поля в поглощающей среде, во-первых, можно ввести при уточнении модели среды и, во-вторых, что здесь особенно важно, в тепловом равновесии диссипация в среднем отсутствует и внутренняя энергия электромагнитного поля имеет вполне определенный смысл (см. также ниже).

гии (или свободной энергии) теплового движения в среде. При этом, конечно, имеется в виду электромагнитное поле в области длин волн или характерных расстояний, существенно больших атомного размера a. Если рассматривать все поле, то в конечном итоге обычное вещество только электромагнитную энергию и содержит (отвлекаемся от ядерной энергии, остающейся неизменной при сохранении изотопного состава вещества). Но эта энергия, во-первых, является в основном электростатической (кулоновской), во-вторых, «сосредоточена», так сказать, в масштабах порядка атомных ($a \sim 10^{-8} - 10^{-7}$ см) и, в-третьих, должна вычисляться квантовомеханически. Сравнительно же

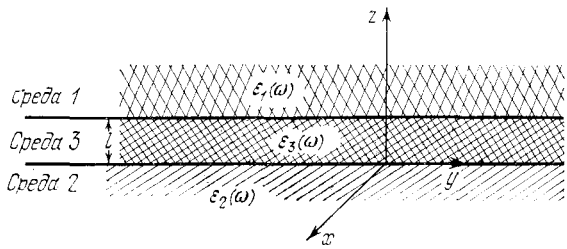


Рис. 14.3. Два полупространства *1* и *2* (с проницаемостями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$), разделенные щелью *3*, заполненной средой с проницаемостью $\varepsilon_3(\omega)$.

длинноволновое поле с $\lambda \gg a$, как указано, несет, вообще говоря, малую энергию. Вопрос о роли этой энергии, быть может, не совсем ясен и нуждается в дальнейшем анализе по крайней мере для «нестандартных» сред (например, для слоистых или нитевидных химических соединений и т. п.). Сейчас же известны две постановки задачи, когда нужно учитывать электромагнитные флуктуации в сплошной поглощающей среде. Это, во-первых, вопрос о силах между макроскопическими телами, действующими на расстояниях $l \gg a$ (такие силы обычно называют молекулярными или ван-дер-ваальсовыми). Вторая задача родственна предыдущей — речь идет о тепловом излучении макроскопических тел. Правда, если длина излучаемых волн $\lambda \ll l$ (l — характерный размер тела, например, радиус нагретого шарика или цилиндра), то обычно применимо геометрикооптическое приближение и вместе с ним классическая теория теплового излучения (закон Кирхгофа и т. п.; см., например, § 63 в [186]), но при $\lambda \gtrsim l$ (что может иметь место для антенн, для нагретых тел в волноводах и резонаторах и т. п.), нужны уже более полные электродинамические расчеты. На соответствующем круге задач мы здесь останавливаться не будем (см. (187]), но кратко коснемся вопроса о молекулярных силах.

В относительно простой постановке задачи речь идет о нахождении силы между двумя полупространствами *1* и *2*, заполненными средами с проницаемостями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Расстояние

(щель) между средами равно l, и сама щель может быть заполнена средой (скажем, газом или жидкостью) с проницаемостью $\varepsilon_3(\omega)$. Мы назвали такую постановку задачи относительно простой, имея в виду естественную возможность ряда обобщений — переходу к анизотропным средам, средам с пространственной дисперсией, совокупности плоских пластин (слоев), неплоским поверхностям и т. п. Что же касается возможности ее полного количественного анализа, то и упомянутая задача уже исключительно сложна или, точнее, громоздка. Для того, чтобы это было ясно, приведем выражение для силы F, действующей на единицу площади каждой из пластин (а формально полупространств) *1* и *2*, разделенных щелью *3* (рис. 14.3)

$$\left.\begin{aligned} F(l,T) &= \frac{\varkappa T}{\pi c^2}\sum_{m=0}{}'^{\infty}\varepsilon_3^{3/2}\omega_m^3\int_1^\infty p^2\{\quad\}\,dp,\\ \{\quad\} &= \left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp\left(\frac{2p\omega_m}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}+\right.\\ &\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_2)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\exp\left(\frac{2p\omega_m}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right\},\\ s_1 &= \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3-1+p^2},\ s_2=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3-1+p^2},\ \omega_m=2\pi m\varkappa T/\hbar, \end{aligned}\right\} \quad (14.33)$$

где штрих у суммы означает, что член с $m=0$ нужно еще умножить на $^1/_2$; кроме того, все комплексные проницаемости ε_1, ε_2 и ε_3 берутся для мнимой частоты $i\omega_m$ (положительное значение F отвечает притяжению между телами, а отрицательное — их отталкиванию). В предельном случае малого расстояния между телами *1* и *2* (это значит, что для существенных в задаче длин волн $\lambda_c \sim 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon_3}) \gg l$; кроме того, считается, что $\varkappa Tl/\hbar c \ll 1$, в силу чего положено $T=0$) формула (14.33) сводится к следующей:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty x^2\left[\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}e^x-1\right]^{-1}dx\,d\xi,\\ &\varepsilon_{1,2,3}=\varepsilon_{1,2,3}(i\xi). \end{aligned}\right\} \quad (14.34)$$

Общее выражение (14.33) несколько упрощается и в другом предельном случае — для больших щелей с $l \gg \lambda_c$. Ограничимся здесь еще более частным случаем двух хорошо проводящих сред (в пределе — идеальных проводников), разделенных пустой достаточно широкой щелью. Тогда

$$F = \frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{l^4}. \quad (14.35)$$

В важнейшем случае вакуумной щели (т. е. при $\varepsilon_3 = 1$) формула (14.33) хотя по виду и почти не упрощается, была получена [190], можно сказать, «в лоб» — путем вычисления флуктуационных полей $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$ в щели и последующего вычисления максвелловского тензора натяжений *) с использованием теоремы (14.27). Расчеты при этом столь громоздки, что даже не воспроизведены в книге [44] (см. § 92), где, как правило, приводятся все существенные вычисления. Обобщение же результата на случай щели, заполненной средой, т. е. формула (14.33), было получено в [191] (и подробно изложено в [184]) методом квантовой теории поля или, как его иногда называют в применении к статистической физике, методом квантовой теории систем из многих частиц. Эффективность и плодотворность таких методов доказана. Но это нисколько не противоречит стремлению получать те или иные результаты более простыми способами. Не говоря уже о методической стороне вопроса, можно в общем утверждать, что более прозрачные и простые, а поэтому и менее громоздкие методы оказываются предпочтительными при переходе к более сложным задачам, дают способ проверки и т. д. По нашему мнению, именно так и обстоит дело в случае вычисления сил между макроскопическими телами.

Действительно, как было отмечено в статьях [192], не только результат (14.34), но и (14.33) можно получить несравненно проще, чем в [191], путем следующего приема **). Предположим, что все среды *1*, *2* и *3* прозрачны. Тогда внутреннюю энергию W и свободную энергию $\mathcal{F}$ системы можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\overline{W} \equiv W = \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = \sum_\alpha w_\alpha(\omega_\alpha, T), \\ &w_\alpha = {}^1\!/_2 \hbar\omega_\alpha \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_\alpha}{2\varkappa T}, \\ &\mathcal{F} = \sum_\alpha \left\{\varkappa T \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_\alpha}{\varkappa T}\right)\right) + {}^1\!/_2\hbar\omega_\alpha\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (14.36)$$

где ω_α — собственные частоты; при вычислении силы $F = -\partial\mathcal{F}/\partial l$ существенны только частоты ω_α, зависящие от l. Такие частоты $\omega_\alpha(l)$, отвечающие «поверхностным» колебаниям в щели, находятся без труда. Их подстановка в (14.36) и приводит к (14.33) или в частности к (14.34). Для иллюстрации получим эту последнюю формулу ***).

*) Сила F равна компоненте σ_{zz} тензора натяжений, где ось z направлена перпендикулярно щели.

**) В статьях [192] фактически поступают так, как сказано в тексте, но странным образом нет никакой оговорки о том, что непосредственно рассматривается только прозрачная среда.

***) Отметим, что такой прием в применении к двум идеальным проводникам, разделенным пустой щелью, был использован уже довольно давно [193], причем привел как раз к формуле (14.35). В этом случае особенно

Волновое уравнение в каждой из однородных областей *1*, *2* и *3* (см. рис. 14.3) имеет вид

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0.$$

Ищем его решения вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(z) \exp[i(k_x x + k_y y)].$$

Тогда для $\mathbf{E}_0(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_0(z)}{dz^2} - K^2 \mathbf{E}_0(z) = 0, \quad K^2 = k^2 - \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Интересующие нас решения $\mathbf{E}_0(z)$ — решения «поверхностного» типа, т. е. локализованные вблизи щели, имеют, очевидно, вид: $A \exp(-K_1 z)$ в области *1*, $B \exp(-K_3 z) + C \exp(K_3 z)$ в области *3* и $D \exp(K_2 z)$ в области *2*. На границах (при $z = 0$ и $z = l$) эти решения должны быть «сшиты» с помощью электродинамических граничных условий — требования непрерывности величины $\varepsilon E_{0z}(z)$ и компонент $E_{0x}(z)$ и $E_{0y}(z)$.

Поскольку, как сказано, мы хотим ограничиться статическим случаем, нужно положить $K^2 = k^2$ (формально это достигается при $c \to \infty$) и можно не рассматривать магнитное поле (поэтому соответствующее уравнение и не выписывалось). Наконец, из условия $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, справедливого в каждой из областей *1*, *2* и *3*, следует, что компонента $E_{0y}(z)$ пропорциональна $dE_{0z}(z)/dz$ (удобно направить $\mathbf{k}$ вдоль оси x, что не приводит к нарушению общности). Поэтому на границах *1—3* и *3—2* должны быть непрерывны величины εE_{0z} и $dE_{0z}(z)/dz$. В результате получаются четыре однородных уравнения для амплитуд A, B, C и D. Условие существования нетривиального решения этой системы уравнений имеет вид

$$\mathscr{D}(\omega_\alpha) = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \exp(2kl) - 1 = 0, \qquad (14.37)$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 — функции ω.

Дисперсионное уравнение (14.37) связывает $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ с $\omega = \omega_\alpha$, т. е. определяет собственные частоты волн в щели.

наглядна роль нулевых колебаний поля — при достаточно низкой температуре сила равна

$$F = -\frac{\partial W}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l} \sum_\alpha {}^1/_2 \hbar \omega_\alpha(l),$$

где $\omega_\alpha(l)$ — частоты собственных колебаний электромагнитного поля в щели (считается, что $T = 0$).

Согласно (14.36), при $T = 0$,

$$\left.\begin{aligned} W = \sum_{\alpha} {}^{1}/_{2}\hbar\omega_{\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} 2\pi k\, dk\, \{\quad\}, \\ \{\quad\} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}[\ln \mathscr{D}(\omega)]\, d\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (14.38)$$

где использована известная теорема теории аналитических функций — так называемый принцип аргумента, выражающий в виде контурного интеграла сумму значений некоторой функции (в данном случае функции ${}^{1}/_{2}\hbar\omega$) во всех нулях $\omega = \omega_\alpha$ другой функции (в данном случае функции $\mathscr{D}(\omega)$). Кроме того, существенно, что не нужно учитывать полюсов функции $\mathscr{D}(\omega)$, поскольку соответствующие значения ω_∞ не зависят от l (подробнее об условиях применимости расчетов см. [181]). Учтено также, что корни ω_α уравнения (14.37) зависят, как от параметра, от k, а число таких корней в интервале dk равно $\frac{1}{(2\pi)^2}\, 2\pi k\, dk$; поскольку в (14.36) входит сумма по всем корням, нужно интегрировать по k. Сила $F = -\partial W/\partial l$ определяется значением производной

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial\mathscr{D}/\partial\omega}{\mathscr{D}} = -\frac{2k\,\partial\mathscr{D}/\partial\omega}{\mathscr{D}^2},$$

так как в силу (14.37) $\partial\mathscr{D}/\partial l = 2k(\mathscr{D} - 1)$. Наконец, можно записать

$$-\frac{\omega\,\partial\mathscr{D}/\partial\omega}{\mathscr{D}^2} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\omega}{\mathscr{D}}\right) - \frac{1}{\mathscr{D}}$$

и воспользоваться этим соотношением при интегрировании в (14.38) по ω. Вводя переменные $x = 2kl$ и $\xi = -i\omega$, а в качестве контура интегрирования выбирая мнимую ось ω, сразу же получаем формулу (14.34). Отметим, что значения функций $\varepsilon(i\xi)$ для мнимой частоты $\omega = i\xi$ можно найти, если известны значения $\varepsilon'' = \operatorname{Im}\varepsilon$ при вещественной частоте ω; мы имеем в виду формулу (см. § 62 в [44])

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 + \xi^2}\, dx.$$

Как упомянуто, аналогичным образом, но с учетом запаздывания (т. е. находя частоты $\omega_\alpha(k)$ в щели точно — при $K^2 = k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$, а не при $K^2 = k^2$; см. выше) получается [192б, в] также и общий результат (14.33). Разумеется, в конце расчета проницаемости считаются уже произвольными, отвечающими реальным средам. Помимо общей сентенции — «победителей не

судят», оправдать вывод формул (14.33), (14.34) для поглощающих сред на основе общего выражения (14.36) для прозрачных сред можно путем следующих аргументов. Во-первых, проницаемости ε_1, ε_2 и ε_3 входят в (14.33) функциональным образом. Во-вторых, на мнимой оси функция $\varepsilon(\omega)$ всегда вещественна (см. § 62 в [44]). Поэтому результат, полученный для прозрачных сред (ε_1, ε_2 и ε_3 — вещественные, положительные величины при вещественной частоте ω), и должен, видимо, совпадать со значительно более общим, пригодным для поглощающих сред. Вряд ли, однако, кто-либо поверил бы такому заключению, если бы оно не было раньше получено без дополнительных предположений. Как по этой причине, так и имея в виду другие родственные или аналогичные задачи, нужно как-то последовательным образом обобщить используемое разложение по собственным колебаниям с частотами ω_α на поглощающие среды. Это действительно можно сделать [181, 194].

Сама по себе возможность упомянутого обобщения уже ясна из рассмотренного выше примера электрического контура — его внутренняя энергия была найдена и при $R \neq 0$; она равна (см. (14.11), (14.12), (14.15) и (14.30))

$$\left.\begin{aligned} &\bar{W} = \bar{U} + \bar{K} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{CRw(\omega, T)\, d\omega}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{C^2LRw(\omega, T)\,\omega^2\, d\omega}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}, \\ &w(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \end{aligned}\right\} \quad (14.39)$$

Для обобщения этого результата его нужно преобразовать к общей форме разложения по собственным частотам, но не самого рассматриваемого контура, а некоторого вспомогательного контура. Дело в том, что нас интересуют вынужденные колебания в контуре под влиянием какой-то э. д. с. $\mathscr{E}_\omega \exp(-i\omega t)$ (в данном случае речь идет о флуктуационной э. д. с.). Тогда, как ясно из (14.1),

$$q_\omega = \frac{\mathscr{E}_\omega}{-L\omega^2 - i\omega R + 1/C} = \frac{L^{-1}\mathscr{E}_\omega}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad \omega_1^2(\omega) = \frac{1}{LC} - i\frac{R}{L}\omega. \quad (14.40)$$

Но частоты $\omega_1(\omega)$ являются собственными частотами для контура (это и есть вспомогательный контур)

$$L\ddot{q} + \frac{\omega}{\omega_1}R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (14.41)$$

отличающегося от (14.1) заменой R на $(\omega/\omega_1)R$ (во избежание недоразумений поясним лишний раз, что решения $\exp(-i\omega_1(\omega)t)$, в которых частота ω, как и в (14.40), считается параметром,

удовлетворяют как раз уравнению (14.41)). В терминах частот $\omega_1(\omega)$ выражение (14.39) записывается в виде

$$\bar{W} = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(\omega, T)}{\omega_1^2(\omega)-\omega^2}\,\omega\,d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(\omega, T)}{\omega_1^2(\omega)-\omega^2}\,\frac{d\omega_1^2(\omega)}{d\omega}\,d\omega. \tag{14.42}$$

В тождественности выражений (14.39) и (14.42) легко убедиться непосредственно.

Разумеется, в случае контура еще ничего не изменилось, но при обобщениях (например, для колебаний в щели) работать нужно, именно отправляясь от выражения (14.42) и, главное, с использованием частот $\omega_\alpha(\omega)$, аналогичных частоте $\omega_1(\omega)$. Последняя методика известна (см. § 100—102 в [126] и [181]). Пусть вся система погружена в некоторый вспомогательный резонатор с идеально проводящими стенками, причем частота ω рассматривается как параметр, а собственные частоты резонатора $\omega_\alpha(\omega)$ определяются из однородных уравнений поля

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}) &= -\frac{i\omega_\alpha(\omega)}{c}\int\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{i\omega_\alpha(\omega)}{c}\,\mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r}),\end{aligned}\right\} \tag{14.43}$$

где $\hat{\varepsilon}$ — линейный оператор, фигурирующий в (14.24), причем тензорные индексы i, j для упрощения записи опущены. Из (14.43) очевидно, что при $\omega_\alpha = \omega$ вспомогательный резонатор совпадает с реальным (т. е. с рассматриваемой системой) при отсутствии внешних и флуктуационных источников. Собственные функции $\mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r})$, $\mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, \mathbf{r})$ вспомогательного резонатора обладают рядом свойств (ортогональность и т. п.), позволяющих особенно просто найти вынужденные решения, зависящие от $\mathbf{K}(\omega, \mathbf{r})$, для реальной задачи, описываемой уравнениями (14.25). При этом средняя внутренняя энергия системы представляется просто в виде

$$\bar{W} = -\frac{i}{\pi}\sum_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(\omega, T)}{\omega_\alpha^2(\omega)-\omega^2}\,\omega\,d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi}\sum_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(\omega, T)}{\omega_\alpha^2(\omega)-\omega^2}\,\frac{d\omega_\alpha^2(\omega)}{d\omega}\,d\omega, \tag{14.44}$$

что непосредственно обобщает выражение (14.42). Уже последнее обстоятельство делает очевидным, что при $\varepsilon'' \to 0$ (или $R \to 0$) выражение (14.44) переходит в (14.36) для $\bar{W}$ (то же, конечно относится к выражениям для $\mathcal{F}$). Вместе с тем формула (14.44) справедлива и для поглощающих сред, и, как

ясно из (14.43), может использоваться также при учете анизотропии и пространственной дисперсии. В применении к задаче о щели (см. рис. 14.3) для изотропной среды без пространственной дисперсии, как можно убедиться [181, 194], из выражения (14.44) или, точнее, аналогичного выражения для свободной энергии *) $\mathcal{F}$ следует формула (14.33). При решении еще более сложных задач, например, когда среды *1* и *2* являются анизотропными [195], преимущества описанной методики разложения на собственные колебания становятся еще более разительными. Впрочем, не менее важно, что мы вычисляем свободную энергию (или при низкой температуре практически совпадающую с ней внутреннюю энергию), в то время как в [190, 191, 184] вычисляется тензор напряжений — величина в общем более сложная. Можно думать, что именно такой подход будет доминировать при решении целого ряда родственных задач о молекулярных силах для разных сред в различных геометрических условиях, при вычислении свободной энергии в поглощающей среде и т. д. Во избежание недоразумений, необходимо вместе с тем подчеркнуть, что как в [184, 190, 191], так и в [181, 194] речь идет об одних и тех же задачах, общем подходе и, естественно, об одинаковых результатах. Нам лишь представляется методика [181, 194, 195] более простой и прозрачной, но, несомненно, подобные суждения часто являются довольно субъективными.



Рис. 14.4. К задаче о пролете электронов через полый резонатор.

Остановимся теперь еще на одной электродинамической флуктуационной задаче — на вопросе о влиянии флуктуационного напряжения в резонаторе на пролетающие через него электроны [196].

Пусть нерелятивистский электрон с начальной энергией $K_0 = {}^1/_2 m v_0^2$ входит в резонатор в момент $t = 0$ и выходит из него в момент τ с энергией $K_\tau = {}^1/_2 m v_\tau^2$. Поле в резонаторе считаем однородным и направленным по скорости электронов — по оси x (такой случай отвечает резонаторам определенной формы, например, схематически изображенной на рис. 14.4). Если

$$E = E_1 \cos \omega t + (E_2 + E_0) \sin \omega t,$$

то

$$m\ddot{x} = eE, \quad v_\tau \equiv \dot{x}(\tau) = v_0 + \frac{e}{m\omega} \{E_1 \sin \omega\tau + (E_2 + E_0)(1 - \cos \omega\tau)\}. \tag{14.45}$$

*) При $T \to 0$ свободная энергия совпадает с внутренней энергией. В задаче же о ван-дер-ваальсовых силах обычно интересен лишь случай $T \to 0$ (см. [181, 184]). Поэтому мы и не выписывали выражения для $\mathcal{F}$.

Будем далее считать E_1 и E_2 случайными величинами, так что $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = 0$ и $\bar{E}_1^2 = \bar{E}_2^2 = \bar{V}^2/l$, где l — толщина резонатора (проходимый электронами путь в резонаторе) и $\bar{V}^2$ — средний квадрат флуктуационного напряжения на «обкладках» резонатора. Тогда с точностью до членов порядка e^2 имеем $\left(\bar{K}_0 = {}^1/_2 m v_0^2\right)$

$$\left.\begin{aligned} \bar{K}_\tau - \bar{K}_0 &= \frac{e^2}{2m\omega^2}\left(\frac{4\bar{V}^2}{l^2}\sin^2{}^1/_2\omega\tau + \right. \\ &\left. + E_0^2(1-\cos\omega\tau)^2\right) + \frac{2ev_0}{\omega}E_0\sin^2{}^1/_2\omega\tau, \\ \overline{(\Delta K_\tau)^2} \equiv \bar{K}_\tau^2 - (\bar{K}_\tau)^2 &= \overline{(K_\tau - K_0)^2} - \left(\overline{(K_\tau - K_0)}\right)^2 = \\ &= \frac{4e^2v_0^2}{\omega^2}\frac{\bar{V}^2}{l^2}\sin^2{}^1/_2\omega\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (14.46)$$

Опущенный здесь член порядка e^4 незначителен, если скорость электрона мало изменяется, т. е. $(v_0 - v_\tau) \ll v_0$; в этом же приближении время пролета через резонатор $\tau = l/v_0$ и

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2\bar{V}^2\left(\frac{\sin{}^1/_2\omega\tau}{{}^1/_2\omega\tau}\right)^2. \qquad (14.47)$$

Выше временная зависимость V считалась несущественной. Если это не так, то вместо (14.47) имеем

$$\left.\begin{aligned} \overline{(\Delta K_\tau)^2} &= 2e^2\int_0^\infty (V^2)_\omega\left(\frac{\sin{}^1/_2\omega\tau}{{}^1/_2\omega\tau}\right)^2 d\omega, \\ \bar{V}^2 &= 2\int_0^\infty (V^2)_\omega\, d\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (14.48)$$

Разумеется, в классическом случае возможно, что $(V^2)_\omega = 0$, но в состоянии теплового равновесия в резонаторе всегда имеется электромагнитное излучение, причем

$$(V^2)_\omega = \frac{R(\omega)\varkappa T/\pi}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}, \qquad (14.49)$$

где использована классическая формула Найквиста (14.17) для $(\mathscr{E}^2)_\omega$, а $L(\omega)$, $C(\omega)$ и $R(\omega)$ — самоиндукция, емкость и сопротивление контура, эквивалентного данному резонатору при вычислении напряжения V. Контур при этом считаем принадлежащим к типу, изображенному на рис. 14.1 (последовательное включение), так что $Z = R - i(\omega L - 1/\omega C)$, $J_\omega = \mathscr{E}_\omega/Z(\omega)$ и

$V_\omega = J_\omega/i\omega C = \mathscr{E}_\omega/i\omega CZ$. При использовании же квантовой формулы Найквиста (14.16) получаем

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2 \int_0^\infty \frac{(2/\pi)\, R\,(\omega)\, \{{}^1/_2\hbar\omega + \hbar\omega/[\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1]\}}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} \left(\frac{\sin {}^1/_2\omega\tau}{{}^1/_2\omega\tau}\right)^2 d\omega \tag{14.50}$$

или для слабозатухающего (высокодобротного) резонатора с собственной частотой $\omega_i = 1/\sqrt{LC}$

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = \frac{e^2}{C\,(\omega_i)} \left({}^1/_2\hbar\omega_i + \frac{\hbar\omega_i}{\exp(\hbar\omega_i/\varkappa T) - 1}\right) \left(\frac{\sin {}^1/_2\omega_i\tau}{{}^1/_2\omega_i\tau}\right)^2. \tag{14.51}$$

Поскольку движение электронов считалось выше классическим, приведенный результат справедлив лишь с известными ограничениями. Если вспомнить, однако, что длина волны электрона $\lambda = 2\pi\hbar/mv \lesssim 10^{-8}$ см при $K = {}^1/_2mv^2 \gtrsim 10$ эВ, ясно, что классический подход для резонаторов, пронизываемых электронным пучком, практически всегда пригоден. Между тем в целом ряде статей (ссылки см. в [196]) вся рассмотренная выше задача и с тем же результатом решалась квантовомеханически в применении как к излучению, так и к движению электронов. Из сказанного ясно, что это, вообще говоря, излишне (некоторые дополнительные оговорки см., однако, в [196]).

В заключение сделаем еще общее замечание, касающееся условия применимости классической теории.

Часто это условие сводится к неравенству

$$\hbar\omega \ll K, \tag{14.52}$$

где ω — частота осциллятора или излучения, а K — некоторая характерная энергия (кинетическая энергия нерелятивистской частицы $mv^2/2$, средняя энергия классического осциллятора в тепловом равновесии $\varkappa T$ и т. д.). Совершенно очевидно, однако, что условие типа (14.52) далеко не всегда достаточно. Конкретно, если речь идет о каких-то волнах, то они характеризуются не только энергией $\hbar\omega$, но и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Естественное требование классичности, которое может возникнуть помимо (14.52) при рассмотрении взаимодействия волны с частицей имеет вид

$$\hbar k \ll p, \tag{14.53}$$

где p — импульс частицы.

Для излучения в вакууме $\hbar k = \hbar\omega/c$ и условие (14.53) для нерелятивистских частиц (с $p = mv \ll mc$) значительно слабее условия (14.52), принимающего вид $\hbar\omega \ll mv^2/2$. В ультрарелятивистском случае неравенства (14.52) и (14.53) при $k = \omega/c$, $K = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \approx cp$, очевидно, совпадают. Но в среде, если $\hbar k = \hbar\omega n/c$, ситуация при достаточно большом n уже может из-

мениться. Далее, для сред с пространственной дисперсией при вычислении проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, как мы подчеркивали в гл. 11, переменные ω и $\mathbf{k}$ должны, вообще говоря, считаться независимыми. Поэтому соблюдение условия классичности типа (14.52), *всегда достижимое при достаточно низких частотах* ω, вовсе не обеспечивает выполнения условия классичности при больших k. Например, плазму можно считать классической лишь для длин волн $\lambda = 2\pi/k$, значительно превосходящих длину волны де Бройля $\lambda_Б = h/mv$ для электронов в плазме (для равновесной плазмы обычно достаточно рассматривать только электроны с энергией $K = mv^2/2$ порядка средней тепловой энергии $^3/_2\varkappa T$, откуда приходим к условию классичности $k \ll \sqrt{\varkappa mT/\hbar}$; в связи со сказанным см. статью [197]). Требование $\lambda = 2\pi/k \gg \lambda_Б = h/mv$ совпадает, конечно, с (14.53) с $p = mv$.

Глава 15

РАССЕЯНИЕ ВОЛН В СРЕДЕ

Рассеяние электромагнитных волн (света) в среде. Ширина линий в спектре излучения и в спектре рассеянного света. Комбинационное рассеяние света с образованием поляритонов (реальных экситонов). Рассеяние на свободных электронах и в плазме. Переходное рассеяние в плазме.

Среда называется однородной, если ее средние статистические свойства не зависят от координат (подобное определение всегда подразумевалось выше). Именно в таких условиях и вводился, например, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ связывающий среднюю индукцию и среднее поле (под средними понимаются средние статистические значения). В однородной среде средние поля (волны) распространяются без всякого рассеяния, как ясно из решения уравнений поля — оно как раз и проводилось, в частности, в гл. 11 и 12 при нахождении нормальных волн. Но при учете флуктуаций среда, конечно, уже неоднородна и волны рассеиваются. При этом рассеяние на тепловых флуктуациях проницаемости ничем принципиально не отличается от рассеяния на неоднородностях ε_{ij}, созданных внешними источниками. Поскольку при наличии пространственной дисперсии само введение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ предполагает однородность среды, рассмотрение рассеяния с учетом пространственной дисперсии требует специального анализа. Ниже при обсуждении рассеяния с образованием поляритонов мы коснемся этого вопроса, в остальном же будем считать, что в рассматриваемой среде отсутствует пространственная дисперсия. Общая теория рассеяния электромагнитных волн в изотропной среде в пренебрежении пространственной дисперсией и преимущественно при условии малого изменения частоты рассеянного излучения по сравнению с частотой падающего изложена в гл. 14 книги [44] (см. также [198]). Поэтому, как и обычно, ограничимся лишь кратким напоминанием некоторых общих результатов, а затем перейдем к дополнительным замечаниям.

В большинстве случаев рассеянное поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ слабо по сравнению с полем $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ в падающей (рассеиваемой) волне (исключением является, например, область критической опалесценции, не говоря уже о рассеянии в различных мутных средах

типа эмульсий). В таких условиях, а ими мы и ограничимся, можно применить метод возмущений. Именно, связь между полными индукцией $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}'$ и полем $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ запишем в виде

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \approx \varepsilon_{ij}^{(0)} E_j + \delta\varepsilon_{ij} E_{0,j} = \varepsilon_{ij}^{(0)} E_{0,j} + \varepsilon_{ij}^{(0)} E'_j + \delta\varepsilon_{ij} E_{0,j} = \\ = D_{0,i} + \varepsilon_{ij}^{(0)} E'_j + \delta\varepsilon_{ij} E_{0,j}, \quad (15.1)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + \delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$, причем флуктуационная часть проницаемости $\delta\varepsilon_{ij}$ считается малой того же порядка, что и поле E'_j; в изотропной среде $\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon\delta_{ij}$, а в предположении о прозрачности среды тензоры ε и $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ji}$ также можно считать вещественными (разумеется, и в изотропной среде тензор $\delta\varepsilon_{ij}$ вовсе не сводится, вообще говоря, к скаляру). При всех этих упрощающих допущениях удобно выразить $\mathbf{E}'$ через $\mathbf{D}'$, а именно записать

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}' - \frac{\mathbf{C}}{\varepsilon}, \quad C_i = \delta\varepsilon_{ij} E_{0,j}. \quad (15.2)$$

Обратимся теперь к волновому уравнению для поля $\mathbf{E}$, т. е. к уравнению (см. (11.21))

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = 0.$$

Подставляя в это уравнение связь (15.2) и учитывая, что, по предположению,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = 0,$$

получаем

$$\Delta\mathbf{D}' + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mathbf{D}' = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{C}, \quad (15.3)$$

поскольку $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{D}_0 = \operatorname{div}\mathbf{D}' = 0$.

Решение уравнения (15.3) для падающей волны $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00}\exp(i\mathbf{k}_e\mathbf{r})$ и при наблюдении в направлении $\mathbf{k}_s$ на большом расстоянии R_0 от рассеивающего объема (но в области с тем же значением $\varepsilon(\omega)$) приводит к результату

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E}' = -\frac{\exp(ik_sR_0)}{4\pi\varepsilon R_0}[\mathbf{k}_s[\mathbf{k}_s\mathbf{G}]], \\ &G_i = \int(\delta\varepsilon_{ij}E_{00,j})\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\,dV, \\ &\mathbf{q} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_s, \quad k_e = k_s = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \end{aligned}\right\} \quad (15.4)$$

где $\mathbf{k}_e$ и $\mathbf{k}_s$ — волновые векторы падающей и рассеянной волн.

Выше рассеяние считалось, строго говоря, происходящим без изменения частоты, и поэтому мы не отличали частоту

падающего света *) ω_e от частоты рассеянного света ω_s; по той же причине $k_e = k_s$. Фактически, однако, ничего не изменится, если $\omega_e \neq \omega_s$, но можно пренебречь частотной зависимостью ε и $\delta\varepsilon_{ij}$ в интервале частот $\Delta\omega \sim (\omega_e - \omega_s)$. Другими словами, поле $\mathbf{E}'$ можно считать полным полем рассеянного света при условии, что $\Delta\omega \ll \omega_e$. Поэтому вычисление величины $\overline{|\mathbf{E}'|^2}$, где черта означает усреднение по времени, позволяет найти полную (для всех частот) интенсивность рассеянного излучения. Согласно (15.4) для интенсивности рассеянного света $I = \overline{S} R_0^2 = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} \overline{|\mathbf{E}'|^2} R_0^2$, отнесенной к интенсивности падающего света $I_0 = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 = \overline{S}_0$ и к единице телесного угла, имеем

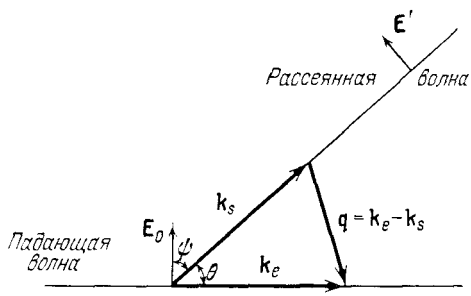


Рис. 15.1. Рассеяние в среде.

Поле в рассеянной волне линейно поляризовано, как показано на рисунке, лишь тогда, когда флуктуации $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon\delta_{ij}$.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\overline{|\mathbf{G}|^2}}{|\mathbf{E}_0|^2} \sin^2\psi, \tag{15.5а}$$

где ψ — угол между $\mathbf{G}$ и $\mathbf{k}_s$ (волновым вектором рассеянного света), и учтено, что $k_e^2 = k_s^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon$. В ряде случаев, например, для газа из сферически симметричных молекул, а также для ряда жидкостей, флуктуации $\delta\varepsilon_{ij}$ можно считать скалярными, т. е. положить $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon\delta_{ij}$. В таких условиях (см. (15.4) и (15.5а), а также рис. 15.1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{I}{I_0} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2} \sin^2\psi, \quad \mathbf{G} = \delta\varepsilon_{\mathbf{q}}\mathbf{E}_{00}, \\ &\delta\varepsilon_{\mathbf{q}} = \int \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\, dV, \end{aligned}\right\} \tag{15.5б}$$

где $\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2} \equiv ((\delta\varepsilon)^2)_{\mathbf{q}}$, но последнее обозначение, аналогичное использованному в гл. 14, менее удобно.

Напомним, что падающее поле считалось имеющим вид $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00}\exp(i\mathbf{k}_e\mathbf{r})$; при $\mathbf{E}_{00} = \text{const}$ это отвечает линейно поляризованной волне. Для естественного (неполяризованного) света с интенсивностью I_0, как легко видеть,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^4 \overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2}(1 + \cos^2\theta), \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \tag{15.6}$$

*) О свете мы говорим лишь для краткости и известной конкретности; по существу, очевидно, рассматривается рассеяние электромагнитных волн всех диапазонов, но при условии $\lambda \gg a$, где $a \sim 10^{-7}$—10^{-8} см — атомный размер.

где θ — угол рассеяния, т. е. угол между $\mathbf{k}_e$ и $\mathbf{k}_s$. В условиях, когда $\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2}$ не зависит от $\mathbf{q}$ (см. ниже), интенсивность I сразу же можно проинтегрировать по углам (элемент телесного угла $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$) и в результате для так называемого коэффициента экстинкции имеем

$$h = \frac{\int I\, d\Omega}{I_0} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\,\frac{\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2}}{V}. \tag{15.7}$$

Рассеивающий объем среды V входит сюда потому, что по определению h есть отношение интенсивности рассеянного во все стороны света к интенсивности падающего света, причем рассеивающий объем считается единичным; другими словами, в результате рассеяния интенсивность падающего света изменяется по закону $dI = -hI\, dz$. Разумеется, для поляризованного света коэффициент экстинкции h равен тому же выражению (15.7) — этот результат, помимо общих соображений, получаем из (15.5б) при интегрировании по углам.

По определению,

$$\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2} = \overline{\iint \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_2)\exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2}\,.$$

При усреднении нужно учесть, что при рассмотрении сразу всех частот рассеянного света флуктуации $\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)$ и $\delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)$ коррелированы обычно лишь на расстояниях $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| \sim a \sim 10^{-7}$—$10^{-8}$ см. Поэтому для света, когда $\lambda \gg a$, в выражении для $\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2}$ можно положить $\exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)] = 1$. В однородной среде среднее значение $\overline{\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_2)}$ может зависеть лишь от разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$. Поэтому при переходе к переменным $^1/_2(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ легко показать, что в обсуждаемых условиях

$$\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2} = V\int \overline{(\delta\varepsilon)^2}\,d\mathbf{r} = V^2\,\frac{\overline{\left(\int \delta\varepsilon\, d\mathbf{r}\right)^2}}{V^2} \equiv V^2\overline{(\delta\varepsilon)^2_V}, \tag{15.8}$$

где V — объем рассеивающей области среды; разумеется, пропорциональности величины $\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2}$, а значит и интенсивности I (см. (15.5б)), объему V следовало ожидать (введение величины $\overline{(\delta\varepsilon)^2_V}$ удобно, так как она пропорциональна $1/V$).

В первом приближении роль флуктуаций температуры мала (подробнее см. [198]), и поэтому

$$\overline{(\delta\varepsilon)^2} \approx \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\delta\rho)^2_V}, \quad \overline{(\delta\rho)^2} = \frac{\varkappa T\rho}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T; \tag{15.9}$$

отсюда и из (15.5), (15.7), (15.8) получаем формулу, выведенную Эйнштейном в 1910 г. (см. [199]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{V}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2\beta_T\varkappa T\sin^2\psi, \\ h &= \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2\beta_T\varkappa T, \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

где $\beta_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T$ — изотермическая сжимаемость.

Для несжатых газов $\varepsilon - 1 = \text{const}\cdot\rho$, $\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \varepsilon - 1 \approx 2(n-1) \approx 4\pi\alpha N$ и $\beta_T \approx 1/\varkappa TN$ (N — концентрация частиц в газе, α — поляризуемость молекулы), и поэтому из (15.10) получаем формулу Релея

$$h = \frac{2\omega^4(n-1)^2}{3\pi c^4 N} = \frac{8\pi\omega^4\alpha^2 N}{3c^4}. \tag{15.11}$$

Результат (15.11) эквивалентен получаемому в предположении о том, что каждая молекула рассеивает совершенно независимо от других. Действительно, в поле волны изотропная молекула приобретает дипольный момент $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}_0 = \alpha\mathbf{E}_{00}\exp(-i\omega t)$ и, следовательно, в единицу времени рассеивает энергию (см., например, (1.85) и (3.1))

$$\int I\,d\Omega = \frac{\alpha^2\omega^4}{3c^3}|\mathbf{E}_{00}|^2;$$

поскольку в данном случае $I_0 = (c/8\pi)|\mathbf{E}_{00}|^2$, то для $h = \int I\,d\Omega/I_0$ сразу же и приходим к (15.11). В газах или, строго говоря, в достаточно разреженных (идеальных) газах рассеяние на флуктуациях плотности оказывается эквивалентным независимому (некогерентному) рассеянию на отдельных частицах (молекулах) в силу того, что в таких условиях положение частиц некоррелировано и $\overline{|\delta N|^2} = N$.

Выше мы для удобства лишь повторили кратко (и, как было оговорено, следуя в основном [44]) ход вычислений интенсивности рассеянного света. Для выяснения спектрального состава или, как часто говорят, ширины линий в спектре рассеянного света, нужно выяснить временной ход флуктуаций $\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$. Но здесь мы предпочтем начать с вопроса о ширине линий как при испускании, так и при рассеянии света в разреженных газах, т. е. считать частицы излучающими или рассеивающими независимо друг от друга. На этом пути и, переходя затем к рассеянию в конденсированной среде, мы осветим ряд моментов, обычно недостаточно подчеркиваемых в литературе (далее используем статью [200]).

Начнем с определения ширины линии испускания света на классическом широко используемом примере затухающего осциллятора. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{15.12}$$

Будем считать x_0 начальным смещением осциллятора в момент $t = 0$, т. е. используем решение

$$\left.\begin{aligned} &x(t) = x_0 \exp(-{}^1/_2\gamma t)\cos(\omega_k t + \varphi), \quad \omega_k^2 = \omega_0^2 - {}^1/_4\gamma^2, \quad t \geqslant 0, \\ &x(t) = 0, \quad t < 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

где φ — произвольная фаза. Разлагая колебание (15.13) в интеграл Фурье

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega, \quad x_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(i\omega t)\, dt,$$

получаем

$$x_\omega = -\frac{x_0}{4\pi}\left\{\frac{\exp(-i\varphi)}{-{}^1/_2\gamma - i(\omega_k - \omega)} + \frac{\exp(+i\varphi)}{-{}^1/_2\gamma + i(\omega_k + \omega)}\right\}. \tag{15.14}$$

Интенсивность (мощность) дипольного излучения, как известно, пропорциональна $(e\ddot{x})^2$, где e — заряд частицы. Поэтому, очевидно, спектральная плотность интенсивности $I(\omega)$ пропорциональна $\omega^4 |x_\omega|^2$. Будем также считать фазу произвольной и проведем усреднение по фазам, имея в виду, что наблюдается излучение совокупности осцилляторов с произвольными фазами. Тогда

$$\begin{aligned} I(\omega) = A\omega^4 \overline{|x_\omega|^2} \equiv A\omega^4 (x^2)_\omega = \\ = \frac{Ax_0^2\omega^4}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{(\omega_k - \omega)^2 + {}^1/_4\gamma^2} + \frac{1}{(\omega_k + \omega)^2 + {}^1/_4\gamma^2}\right\} = \\ = \frac{Ax_0^2\omega^4(\omega_0^2 + \omega^2)}{8\pi^2\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}, \end{aligned} \tag{15.15}$$

где A — некоторый коэффициент пропорциональности и усреднение отмечено чертой сверху. Если, как обычно имеет место (за исключением радиодиапазона),

$$\gamma \ll \omega_0, \tag{15.16}$$

то с достаточной точностью можно написать

$$\left.\begin{aligned} &I(\omega) = \frac{Ax_0^2\omega_0^4}{16\pi^2\left[(\omega - \omega_0)^2 + {}^1/_4\gamma^2\right)\right]} = \frac{\gamma I_0/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + {}^1/_4\gamma^2}, \\ &I_0 = \int\limits_0^\infty I(\omega)\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{15.17}$$

Формулой (15.17) для $I(\omega)$ обычно и пользуются, ее смысл вполне ясен. В случае же более общей формулы (15.15) видно (см. ниже), что x_0^2 не выражается простым образом через $\overline{x^2} = \int (x^2)_\omega \, d\omega$ и, следовательно, предположение о постоянстве x_0 для всех осцилляторов является совершенно произвольным и неразумным (см. ниже). Как по этой причине, так и для целей дальнейшего изложения рассмотрим более реалистическую задачу, а именно тот же осциллятор, но под действием случайной силы $f(t)$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega. \qquad (15.18)$$

Отсюда

$$x_\omega = \frac{f_\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega}. \qquad (15.19)$$

Роль «силы» f могут играть, например, соударения, поддерживающие квадрат амплитуды колебаний осциллятора на некотором неизменном среднем уровне. Если считать, что $f(t) = \sum_m a_m \delta(t - t_m)$, то

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_m a_m \exp(i\omega t_m)$$

и для случайных (некоррелированных) соударений получим среднее значение

$$(f^2)_\omega \equiv \frac{1}{4\pi^2} \sum_m a_m^2.$$

Далее, в этом случае

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2)_\omega \, d\omega = (f^2)_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \frac{\pi (f^2)_\omega}{\gamma\omega_0^2}. \qquad (15.20)$$

Тем самым среднее $\overline{x^2}$ и, следовательно, средние значения потенциальной энергии $^1/_2 m\omega_0^2\overline{x^2}$ и кинетической энергии $^1/_2 m\overline{\dot{x}^2}$ оказываются постоянными при заданном $(f^2)_\omega = \text{const}$ (в тепловом равновесии эти средние значения равны $^1/_2 \varkappa T$). Поэтому использование выражения (15.19), а не (15.14) не только проще и удобнее, но и более осмысленно. Из (15.19), учитывая сказанное, сразу же получаем

$$I(\omega) = A\omega^4 (x^2)_\omega = \frac{A\omega^4 (f^2)_\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \qquad (15.21)$$

Разумеется, при условии (15.16), выражение (15.21) переходит в (15.17). В общем же случае, как отмечено, спектральная плотность интенсивности (15.21) получена при более разумных

и естественных предположениях, чем выражение (15.15). Что же касается уширения линий излучения и поглощения в реальных условиях, а не для обсуждавшейся простейшей модели, то в этом отношении имеется много возможностей и вариантов (см. [201]).

Рассмотрим теперь тот же гармонический осциллятор, но в качестве рассеивателя, а не спонтанного излучателя света. Предположим, что падающий свет является монохроматическим, т. е. поле падающей волны имеет вид

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega = \\ = E_0 \exp(-i\omega_e t), \quad E_\omega = E_0 \delta(\omega - \omega_e), \quad (15.22)$$

причем частота ω_e лежит вдали от резонанса.

Каков будет спектральный состав рассеянного света при учете затухания рассеивающего осциллятора или в условиях, когда спонтанное излучение осциллятора претерпевает ударное уширение (в последнем случае при простейших предположениях получается формула (15.17) с $\gamma = 2/\tau$, где τ — среднее время между столкновениями; см. [201, 202])?

На поставленный вопрос в ряде статей в свое время давался такой ответ: ширина линии рассеяния будет такой же, как в случае линии испускания; аналогичный ответ автору неоднократно приходилось получать, например, и на экзаменах. Между тем легко видеть, что при сделанных предположениях рассеянный свет будет монохроматическим, т. е. уширение линии практически полностью отсутствует. Действительно, уравнение движения осциллятора в поле (15.22), которое считается направленным по оси x, имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) + \frac{e}{m} E_0 \exp(-i\omega_e t). \quad (15.23)$$

Отсюда

$$x_\omega = \frac{(e/m)\, E_0 \delta(\omega - \omega_e) + f_\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega}, \quad (15.24)$$

и вдали от резонанса, т. е. при $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$, а также в предположении, что соударения происходят не слишком часто, роль члена, пропорционального f_ω, весьма мала, поскольку случайная сила f имеет широкий спектр.

Сказанное ясно, конечно, и без всякого спектрального разложения: при рассеянии света осциллятор совершает вынужденные колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы (рассеиваемой волны). Соударения же, пока их длительностью $\Delta\tau$ можно пренебречь, приводят к изменению амплитуды и фазы собственных колебаний осциллятора, имеющих частоту $\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - {}^1/_4\gamma^2}$, которая считается существенно отличной от

частоты падающей волны ω_e. В течение времени $\Delta\tau$, когда рассеивает уже другая система, рассеяние изменяется, что может, в частности, приводить к деполяризации рассеянного света [203]. Уширение появляется, конечно, и при приближении к резонансу (в особом рассмотрении, хотя в принципе и вполне ясном, нуждается также рассеяние не монохроматической волны, а чередующихся импульсов).

Вдали от резонанса и при пренебрежении длительностью соударений по сравнению с временем свободного пробега, уширение линии рассеяния связано только с движением рассеивателя. При этом в первую очередь появляется обычное доплеровское уширение [201, 202].

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= \text{const}\cdot\exp\left(-\frac{\Omega^2}{b^2}\right), \\ \Omega &= \omega_e - \omega, \quad b^2 = \frac{8\varkappa T\omega_e^2\sin^2{}^1\!/_2\theta}{Mc^2}, \end{aligned}\right\} \tag{15.25}$$

где θ — угол рассеяния и T — температура рассеивающего газа, состоящего из частиц (совокупности осцилляторов) с массой M; очевидно, Ω есть разность частот падающей и рассеянной волн.

Кроме того существует уширение, генетически связанное с доплеровским, причем соответствующая интенсивность пропорциональна квадрату давления. Этот эффект был рассмотрен в [204] для разреженного газа, когда длина свободного пробега $l \gg \lambda_0/(2\sin{}^1\!/_2\theta)$, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_e$. В крыле линии (в области $\Omega \gg b$) интенсивность $I(\Omega) = \text{const}\cdot p^2/\Omega^6$, где p — давление. Обсуждаемое уширение обусловлено тем обстоятельством, что при соударениях изменяется проекция скорости атома (осциллятора) на направление наблюдения. Поэтому изменяется и доплеровское смещение частоты, т. е. терпит разрыв производная фазы; другими словами, рассеянная волна состоит из участков с разными частотами, хотя и с непрерывной фазой. Естественно, фурье-разложение такой волны имеет дополнительное крыло, интенсивность которого растет с увеличением давления *).

Область давлений, когда $l \sim \lambda_0/(2\sin{}^1\!/_2\theta)$, является промежуточной и с трудом поддается анализу. Если же $l \ll \lambda_0/(2\sin{}^1\!/_2\theta)$ (сжатый газ), то, подобно рассмотрению рассеяния в конденсированных средах, возможен феноменологический подход, и конкретно релеевское рассеяние описывается как рассеяние на звуковых и энтропийных волнах (см. ниже). Для

*) Если газ состоит из атомов разных сортов (с различными массами), то в выражении для интенсивности содержится также член, пропорциональный Ω^{-4}. Кроме того, дополнительное уширение возникает при наличии соударений, переводящих атомы (молекулы) в состояния с разными поляризуемостями. Отметим, наконец, что в случае вырожденных уровней рассеивающей молекулы на релеевское (когерентное) рассеяние накладывается рассеяние, связанное с переходами молекулы с данного на другие подуровни рассматриваемого уровня. По сути дела, речь здесь идет о комбинационном рассеянии, которое происходит уже с уширением линий (см. ниже).

этого случая вопрос о ширине линий рассеяния рассмотрен уже давно [44, 198, 205]. На рассеянии в конденсированной среде мы остановимся несколько ниже, сейчас же перейдем к рассмотрению ширины линий комбинационного рассеяния света в газах.

Обычно используемая классическая модель, служащая для описания комбинационного (рамановского) рассеяния света молекулой, представляет собой осциллятор (обобщенная координата x, скажем, пропорциональна расстоянию между двумя ядрами в двухатомной молекуле), модулирующий электронную поляризуемость молекулы $\alpha(x)$; тогда индуцированный падающим полем E дипольный момент молекулы (подробнее см. [202, 206]) равен

$$p(t) = \alpha(x) E = \alpha(x) E_0 \exp(-i\omega_e t), \quad \alpha(x) = \alpha(0) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 x. \tag{15.26}$$

Изменение координаты x можно в некотором приближении описывать уравнением (15.18). Тогда, согласно (15.19) и (15.26),

$$p_\omega = \alpha(0) E_0 \delta(\omega - \omega_e) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 \frac{f_\Omega}{-\Omega^2 + \Omega_0^2 - i\gamma\Omega} = \\ = p_{\omega_e} + p_\Omega, \quad \Omega = \omega_e - \omega, \tag{15.27}$$

где с целью некоторого единообразия частота осциллятора ω_0 в (15.18) обозначена теперь через Ω_0.

Первый член в выражении для p_ω ответствен за релеевское рассеяние и сейчас нас интересовать не будет. Поэтому спектральную плотность комбинационного рассеяния можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= A\omega_e^4 \overline{|p_\Omega|^2} = \frac{(\gamma\Omega_0^2/\pi) I_0}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \\ I_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Omega)\, d\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{15.28}$$

где в числителе положено $\omega = \omega_e$, что справедливо при условии $\Omega \ll \omega_e$; считается также, что $\overline{|f_\Omega|^2} \equiv (f^2)_\Omega = \text{const}$.

Область частот $\Omega < 0$ отвечает красному сателлиту, область $\Omega > 0$ — фиолетовому сателлиту. Если $\Omega_0 \gg \gamma$, то для каждого из сателлитов

$$I(\Omega) = \frac{\gamma I_0/4\pi}{(\Omega - \Omega_0)^2 + {}^1/_4\gamma^2}, \quad \Omega_0 \gg \gamma, \quad \Omega = \omega_e - \omega, \tag{15.29}$$

где I_0 — полная интенсивность обоих сателлитов.

В случае линий испускания или поглощения условие $\omega_0 \gg \gamma$ (см. (15.16)) в оптике всегда выполняется, в силу чего в оптическом диапазоне общая формула (15.21) не имеет реальной

ценности и всегда при уширении соответствующего типа пригодно выражение (15.17). В случае же рассеяния область применимости формулы (15.28) значительно шире, так как частота Ω_0 может быть мала, что имеет место для некоторого колебания (моды), например при приближении к точке фазового перехода второго рода [207].

Выше для ширины линии излучения было получено не только выражение (15.21), но и выражение (15.15). Если, как иногда делают, поступать аналогичным образом и в применении к линиям комбинационного рассеяния, т. е. не вводить случайной силы $f(t)$, а записать в (15.26)

$$x = x_0 \exp(-{}^1/_2\gamma t)\cos(\Omega_k t + \varphi), \quad \Omega_k^2 = \Omega_0^2 - {}^1/_4\gamma^2, \quad (15.30)$$

то разложение Фурье для

$$p(t) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0 xE_0 \exp(-i\omega_e t)$$

приводит к формуле типа (15.15)

$$I(\Omega) = \frac{A'\omega_e^4(\Omega_0^2 + \Omega^2)}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}. \quad (15.31)$$

Именно такое выражение иногда приводится в литературе, причем оно считается даже более точным, чем соотношение (15.28). Но, как мы видели выше, ситуация на самом деле обратная, и в рамках принятой модели использовать нужно формулу (15.28), а не (15.31).

Поскольку полученный результат (15.28) для ширины линий комбинационного рассеяния, как сказано, аналогичен формуле (15.21) для ширины линий испускания, может сложиться впечатление, что существенное различие между ними ограничивается случаем релеевского рассеяния. Как мы увидим, однако, такой вывод был бы слишком поспешным и фактически относится лишь к простейшим случаям, в частности к обсуждавшимся осцилляторным моделям, в какой-то мере описывающим рассеяние в газах. При переходе же к любому рассеянию в конденсированной среде в выражениях для ширины линий поглощения (испускания) и рассеяния имеется, вообще говоря, существенное различие.

Для рассеяния света в достаточно разреженных газах характерна независимость (некогерентность) рассеяния разными объемами или, как можно считать, разными молекулами (рассеивающими осцилляторами). В плотных газах и в конденсированных средах рассеяние в разных точках нельзя считать независимым, особенно при анализе спектрального состава рассеянного света. В этих случаях адекватным подходом, использование которого восходит к упомянутой работе Эйнштейна [199], является представление о рассеянии на пространственных фурье-

компонентах флуктуаций тензора диэлектрической проницаемости *) или, по сути дела, родственное рассмотрение взаимодействия различных плоских волн, распространяющихся в среде. Именно так с самого начала и проводились выше вычисления интенсивности рассеянного света (см. (15.4)—(15.7)). Но теперь мы уже не будем считать частоту рассеянного света неотличимой от частоты падающего света.

Для удобства повторим используемые обозначения. Волновые векторы падающего и рассеянного света обозначим через $\mathbf{k}_e$ и $\mathbf{k}_s$, а соответствующие частоты — через ω_e и ω_s (ранее индекс s часто опускался). Предполагая, что среда для частот ω_e и ω_s прозрачна, все величины $\mathbf{k}_e$, $\boldsymbol{k}_s$, ω_e и ω_s считаем вещественными. Тогда рассеивающая волна, скажем, фурье-компонента флуктуационного изменения диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$ (рассматриваем релеевское рассеяние без учета анизотропии; подробнее см. [44, 198, 205б]), характеризуется частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{q}$, равными

$$\Omega = \omega_e - \omega_s, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_s. \tag{15.32}$$

Если изменение частоты Ω мало, то $k_s \approx k_e = 2\pi n/\lambda_0 = \omega_e n(\omega_e)/c$ и

$$q \equiv \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{4\pi n}{\lambda_0} \sin {}^1\!/_2\theta = \frac{2\omega_e n(\omega_e)}{c} \sin {}^1\!/_2\theta, \tag{15.33}$$

где $n(\omega_e)$ — показатель преломления на частоте $\omega_e \approx \omega_s$ и θ — угол рассеяния.

В обсуждаемых условиях интенсивность рассеянного света I в объеме V, отнесенная к единице телесного угла, выражается формулой (15.5б).

Спектральный состав рассеянного света определяется кинетикой флуктуаций $\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}$ и конкретно

$$\left.\begin{aligned} I(\Omega) &= A\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q},\,\Omega}|^2} \equiv A\left((\delta\varepsilon)^2_{\mathbf{q}}\right)_\Omega, \\ \delta\varepsilon_{\mathbf{q},\,\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\varepsilon_{\mathbf{q}}(t)\exp(-i\Omega t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{15.34}$$

Величина $\left((\delta\varepsilon)^2_{\mathbf{q}}\right)_\Omega$ имеет смысл, ясный из сказанного в гл. 14, т. е.

$$\overline{|\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}|^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left((\delta\varepsilon)^2_{\mathbf{q}}\right)_\Omega d\Omega$$

и черта отвечает статистическому усреднению.

---

* Особо можно выделить интересный вопрос о сужении линий комбинационного рассеяния света в газах при переходе к большим давлениям, когда еще удается рассматривать рассеяние на отдельных молекулах [201а, 208].

В довольно хорошем приближении, как упоминалось,

$$\delta\varepsilon_q = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho_q,$$

где ρ — плотность; флуктуации плотности $\delta\rho$ в свою очередь разлагаются на флуктуации давления δp и флуктуации энтропии δS

$$\overline{(\delta\rho)^2} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S^2 \overline{(\delta p)^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p^2 \overline{(\delta S)^2}.$$

Адиабатические (изоэнтропийные) флуктуации плотности, пропорциональные δp, изменяются со временем в соответствии с уравнениями гидродинамики, а кинетика изобарических флуктуаций (пропорциональных δS) определяется уравнением теплопроводности. Мы не будем подробнее останавливаться на получении всех соответствующих формул (см. [198] и указанную там литературу), но все же сделаем в этой связи несколько замечаний.

Если считать оба коэффициента вязкости η и ζ, а также коэффициент теплопроводности κ равными нулю, то звук в жидкости распространяется без поглощения, а флуктуации энтропии не рассасываются. В таких условиях в спектре рассеянного света наблюдался бы триплет из неуширенных линий — в центре линия с несмещенной частотой $\omega_s = \omega_e$ (при этом $\Omega = \omega_e - \omega_s = 0$) и дублет Мандельштама — Бриллюэна $\Omega = \pm\Omega_0$, причем $\Omega_0 = uq = (2un\omega_e/c)\sin{}^1/_2\theta$, где u — скорость звука частоты Ω_0. На квантовом языке появление сателлитов $\Omega = \pm\Omega_0$ описывается как рассеяние света, сопровождающееся испусканием фонона с энергией $\hbar\Omega_0$ и импульсом $\hbar\mathbf{q} = (\hbar\Omega_0/u)\mathbf{q}/q$ (красный сателлит) или поглощением такого же фонона (фиолетовый сателлит). Разумеется, применяя классическую теорию, мы всегда считаем, что $\hbar\Omega \ll \varkappa T$.

Если вязкостью и теплопроводностью не пренебрегать, то звук затухает, а энтропийные флуктуации рассасываются, в результате чего все линии триплета уширяются. При этом кинетика изобарических флуктуаций определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\Delta T = f_T(t, \mathbf{r}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}, \quad (15.35)$$

где f_T — случайные «силы», обусловленные тепловым движением в жидкости; флуктуации температуры T при заданном давлении пропорциональны флуктуациям энтропии S и в конечном счете приводят к флуктуациям плотности ρ и проницаемости ε (см. выше).

Поэтому из (15.34) и (15.35) получаем

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{изоб}}(\Omega) &= A'(\Omega)\overline{\left(f^2_{T,\,\mathrm{q}}\right)}_{\Omega} = \frac{(\gamma/2\pi)\, I_{0,\ \text{изоб}}}{\Omega^2 + {}^1\!/_4\gamma^2}, \\ \gamma &= 2\chi q^2 = 4\left(\frac{\omega_e n}{c}\right)^2 \chi(1-\cos\theta), \quad I_{0,\ \text{изоб}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\Omega)\, d\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{15.36}$$

где, как и ниже, предполагается, что частотная зависимость величины $\overline{\left(f^2_{T,\,\mathrm{q}}\right)}_{\Omega}$ несущественна.

В случае компонент Мандельштама — Бриллюэна, отвечающих рассеянию на адиабатических флуктуациях, не будем учитывать некоторых тонкостей, связанных с дисперсией звука (см. гл. 8 в [209]), и воспользуемся поэтому таким уравнением для давления:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - u^2\Delta p - \Gamma\Delta\frac{\partial p}{\partial t} = f_p(t,\ \mathbf{r}), \\ &\Gamma = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{4}{3}\eta + \zeta + \frac{\kappa}{c_p}\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15.37}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{ад}} &= \frac{(\gamma/\pi)\,\Omega_0^2 I_{0,\ \text{ад}}}{\left(\Omega^2 - \Omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \\ \Omega_0 &= uq = \frac{2u\omega_e n}{c}\sin {}^1\!/_2\theta, \quad \gamma = \Gamma q^2, \\ I_{0,\ \text{ад}} &= 2I_0^{\text{МБ}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{ад}}(\Omega)\, d\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{15.38}$$

где $I_0^{\text{МБ}}$ — полная интенсивность одного сателлита; для узких линий (при $\gamma \ll \Omega_0$) для каждого из сателлитов

$$\left.\begin{aligned} I^{\text{МБ}}(\Omega) &= \frac{(\gamma/2\pi)\, I_0^{\text{МБ}}}{(\Omega - \Omega_0)^2 + {}^1\!/_4\gamma^2}, \quad I_0^{\text{МБ}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I^{\text{МБ}}(\Omega)\, d\Omega, \\ {}^1\!/_2\gamma &= \frac{q^2}{2\rho}\left\{\frac{4}{3}\eta + \zeta + \frac{\kappa}{c_p}\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)\right\}, \\ q^2 &= 2\left(\frac{n\omega_e}{c}\right)^2(1-\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{15.39}$$

Что касается интенсивностей $I_{0,\ \text{изоб}}$ и $I_{0,\ \text{ад}}$, то их сумма в простейшем случае определяется формулой (15.10), а отношение равно $I_{0,\ \text{ад}}/(I_{0,\ \text{ад}} + I_{0,\ \text{изоб}}) = c_V/c_p$, т. е. $I_{0,\ \text{изоб}}/I_{0,\ \text{ад}} = c_p/c_V - 1$ (см. [44, 198]).

Полученные выше формулы с точностью до обозначений совпадают с хорошо известными выражениями (см. [44, 198, 205];

в [44], например, через γ обозначена величина $^1/_2\gamma$ в (15.36) или (15.39)). Вывод формул тем не менее был приведен, чтобы подчеркнуть остающийся обычно в тени факт — использование вынужденных решений, а не решений однородных уравнений движения (в данном случае речь идет об уравнениях (15.35) и (15.37)). Между тем, если бы мы интересовались распространением звука в жидкости, то в рассматриваемом приближении использовали бы уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - u^2 \Delta p - \Gamma \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{15.40}$$

решение которого для монохроматической плоской волны с вещественным $\mathbf{q}$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} p = p_0 \exp[i(\mathbf{qr} - \Omega_q t)] = p_0 \exp(-{}^1/_2\gamma t) \exp[i(\mathbf{qr} - \Omega'_q t)], \\ \Omega_q = \Omega'_q - i\gamma/2, \quad \gamma = \Gamma q^2, \quad \Omega'_q = \sqrt{\Omega_0^2 - {}^1/_4\gamma^2}, \quad \Omega_0^2 = u^2 q^2. \end{aligned}\right\} \tag{15.41}$$

Если же, что отвечает другой возможной постановке задачи, считать вещественной частоту Ω_q, то комплексным будет волновой вектор $\mathbf{q}$, ибо из уравнения (15.40) вытекает только общая связь (дисперсионное уравнение)

$$\Omega_q^2 - u^2 q^2 - i\Gamma \Omega_q q^2 = 0. \tag{15.42}$$

В случае же рассеяния света обе величины Ω и $\mathbf{q}$ в (15.32) вещественны в силу вещественности $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{k}_s$, ω_e и ω_s. Такие «звуковые» волны могут распространяться в среде только потому, что они представляют собой вынужденные решения уравнения (15.37), а вынужденные решения, разумеется, не должны удовлетворять дисперсионному уравнению. Таким образом, при учете поглощения звука, строго говоря, неверно говорить о рассеянии света с поглощением или испусканием фонона — поглощается и испускается не звуковая волна, могущая свободно распространяться в данной среде, а некоторое вынужденное звуковое возмущение с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{q}$, определяемыми (15.32). Сказанное не мешает, вообще говоря, использовать измерения ширины линий рассеяния для определения коэффициента поглощения гиперзвука. Действительно, определяя величину γ из (15.36) или (15.38), мы тем самым находим коэффициенты Γ или γ и для распространения звука (см. (15.41)). Но дело обстоит так просто лишь в силу пренебрежения дисперсией звука, т. е. зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от частоты. При сильном поглощении и вообще в общем случае так поступать нельзя и определение скорости и затухания гиперзвука (т. е. исследование дисперсионного уравнения $F(\Omega_q, q) = 0$ для распространения звука) методом рассеяния света может оказаться затруднительным. Аналогичная ситуация возникает и в других случаях, например

при комбинационном рассеянии света в кристаллах (и вообще в конденсированной среде) с образованием различных возбуждений — экситонов, поляритонов, магнонов и т. п. Этот круг вопросов служит последние годы объектом многочисленных исследований. Здесь мы остановимся только на ширине линий комбинационного рассеяния с образованием поляритонов (реальных экситонов), поскольку соответствующее рассмотрение ([210] и § 16 в [76]) довольно тесно связано с предшествующей частью настоящей главы.

Поляритонами или, реже, реальными экситонами *) принято называть экситоны, распространяющиеся в кристаллах и рассматриваемые с учетом запаздывания; по сути дела это значит, что речь идет о «нормальных» электромагнитных волнах или фотонах в среде (подробнее см. конец гл. 11). Рассеяние света с образованием поляритонов (и конкретно одного поляритона) при пренебрежении затуханием поляритонов представляет собой комбинационное рассеяние, при котором в среде испускается (или поглощается) нормальная электромагнитная волна — поляритон с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{q}$, удовлетворяющими условиям (15.32). Другими словами, обсуждаемый процесс вполне аналогичен рассеянию с образованием сателлитов Мандельштама — Бриллюэна в жидкостях (и твердых телах), но с заменой фононов поляритонами (реальными экситонами).

Ограничимся для простоты оптически изотропной средой **) и будем пренебрегать пространственной дисперсией. Тогда оптические свойства среды характеризуются диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Как и выше, в случае релеевского рассеяния, будем считать среду прозрачной для падающей и рассеянной волн с частотами ω_e и ω_s. Это значит, что $\varepsilon(\omega_e)$ и $\varepsilon(\omega_s)$ являются вещественными величинами, т. е. можно положить $\varepsilon''(\omega_e) = \varepsilon''(\omega_s) = 0$. Что же касается рассеивающей волны с частотой $\Omega = \omega_e - \omega_s$, то ее поглощением, вообще говоря, пренебречь нельзя.

Если волна с частотой Ω свободно распространяется в данной среде, то для нее дисперсионное соотношение имеет вид

$$\frac{c^2q^2}{\Omega^2} \equiv (n + i\varkappa)^2 = \varepsilon(\Omega) = \varepsilon'(\Omega) + i\varepsilon''(\Omega). \qquad (15.43)$$

---

*) Введение термина «реальный экситон» связано с тем, что рассматриваются также другие экситоны, например кулоновские и механические (см. [76]). Подчеркнем также, что терминология в этой области не установилась, и это нужно иметь в виду при ознакомлении с литературой.

**) Обсуждаемый здесь «трехфотонный» процесс (речь идет о «взаимодействии» трех волн или трех фотонов в среде, обладающих частотами ω_e, ω_s и Ω) возможен лишь в среде без центра симметрии, но к числу таких сред принадлежат и негиротропные кубические кристаллы класса $T_d \equiv \bar{4}3m$ (ZnS, ZnSe и др.), которые при пренебрежении эффектами пространственной дисперсии высшего порядка оптически изотропны (это значит, что $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$).

Это соотношение, разумеется, есть обычное выражение, связывающее Ω и $\mathbf{q}$ при распространении поперечных электромагнитных волн в изотропной среде. В силу (15.43) нормальные (свободные) волны, распространяющиеся в среде в любом направлении z, таковы:

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 \exp\left\{-\frac{\Omega}{c}\varkappa z - i\left(\Omega t - \frac{\Omega}{c} n z\right)\right\}, \\ n &= \sqrt{{}^1\!/_2\varepsilon' + \sqrt{({}^1\!/_2\varepsilon')^2 + ({}^1\!/_2\varepsilon'')^2}}, \\ \varkappa &= \sqrt{-({}^1\!/_2\varepsilon') + \sqrt{({}^1\!/_2\varepsilon')^2 + ({}^1\!/_2\varepsilon'')^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.44)$$

В результате наличия поглощения (т. е. при условии $\varepsilon''(\Omega) \neq 0$) нормальные волны (поляритоны) поглощаются и, например, при вещественной частоте Ω волновой вектор $\mathbf{q}$ в нормальных волнах является комплексным. Но при рассеянии света с образованием поляритонов эти последние в силу (15.32) должны обладать вещественными Ω и $\mathbf{q}$. Кажущееся противоречие *) устраняется, если вспомнить, что рассеяние является вынужденным процессом **) и к поляритонам, образующимся при рассеянии, дисперсионное уравнение (15.43) отношения не имеет. Другими словами, только при пренебрежении поглощением можно в буквальном смысле говорить о комбинационном рассеянии с образованием поляритонов. При учете же поглощения образуется не свободный поляритон, а некоторая поляритоноподобная волна. Последнее не мешает, конечно, использованию комбинационного рассеяния света для изучения поляритонов. Ситуация в этом отношении аналогична обсуждавшейся выше в случае релеевского рассеяния в жидкостях. Конкретно, для рассеяния с образованием поляритонов получается формула для ширины линии $I(\Omega, q)$, где фигурируют те же параметры, которые определяют и распространение нормальных электромагнитных волн — поляритонов. За некоторыми дальнейшими подробностями и самой формулой для ширины линии рассеяния мы отсылаем к статье [210] и § 16 в [76]. Отметим здесь лишь то обстоятельство, что в статье [210] не вводятся случайные «силы» $f(t, \mathbf{r})$, рассмотрение которых особенно удобно при классическом подходе к задаче о рассеянии. Вместо этого в уравне-

*) То обстоятельство, что здесь усматривалась некоторая трудность, ясно из ряда статей, цитируемых в [210]. В одной из них была, например, сделана попытка связать Ω и q в максимуме линии комбинационного рассеяния соотношением $c^2q^2/\Omega^2 = n^2$; в другой статье обсуждается связь $c^2q^2/\Omega^2 = \varepsilon'(\Omega)$. В обоих случаях это сделано для того, чтобы в правой части дисперсионного соотношения стояла вещественная величина. Такой подход не приводит к согласию с наблюдениями и, главное, неверен по существу, так как Ω и $\mathbf{q}$, относящиеся к образовавшемуся при рассеянии поляритону, вообще не связаны между собой дисперсионным соотношением.

**) Здесь имеется в виду любое рассеяние, в том числе и спонтанное, а не только так называемое вынужденное рассеяние, возникающее при рассеянии волн с большой интенсивностью [107, 198, 211].

нии для поля поляритонов в [210] в явном виде фигурирует «сила», учитывающая воздействие на среду электрических полей падающей и рассеянной волн. Такой подход, эквивалентный рассмотрению энергии взаимодействия падающей и рассеянной волн со звуковой или экситонной волной, образующейся (поглощающейся) в результате рассеяния, естествен в тех случаях, когда вычисление интенсивности необходимо или целесообразно проводить в рамках квантовой теории.

Приведенные выше примеры, как можно думать, продемонстрировали специфику вопроса о ширине линий рассеяния света по сравнению с рассмотрением ширины линий поглощения света или звука, которая определяется однородными уравнениями для распространения соответствующих волн. Так, например, поляритонная линия поглощения образуется при поглощении в кристалле падающей на него свободной волны с частотой Ω (разумеется, для возникновения линии частоту Ω нужно изменять). Дело сводится, таким образом, к определению показателя поглощения $\varkappa(\Omega)$, фигурирующего в дисперсионном соотношении (15.43).

Проблема ширины линий рассеянного света (особенно, если иметь в виду также вынужденное комбинационное и релеевское рассеяние [211], не говоря уже о рассеянии электромагнитных волн в плазме и на релятивистских частицах; см. ниже) представляется довольно многогранной и важной. Она оставалась в прошлом несколько в тени в связи с чисто экспериментальными трудностями — отсутствием подходящих источников монохроматического света, что особенно препятствовало широкому размаху исследований ширины линий рассеяния. Сейчас же, с использованием лазеров, такое препятствие отпало, что уже привело к впечатляющему размаху разнообразных исследований рассеяния света во всевозможных средах. В частности, все чаще исследуется спектральный состав (ширина) линий рассеяния и, вероятно, такая тенденция сохранится и укрепится. Поэтому сделанные выше замечания полезно иметь в виду.

Остановимся теперь на случае, особенно важном с точки зрения астрофизических и ионосферных приложений — на рассеянии электромагнитных волн в плазме.

Начнем с того, что напомним, как рассеивает отдельный свободный электрон (см., например, § 5 в [1] и § 78 в [2]). Электрон будем считать нерелятивистским ($K = {}^1/_2 mv^2 \ll mc^2 = 5{,}1 \cdot 10^5$ эВ), а рассеяние классическим ($\hbar\omega \ll mc^2$). Случай релятивистских электронов и любых частот излучения обсуждается в гл. 17*). В электрическом поле волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t) \qquad (15.45)$$

*) Для такого общего случая необходимо базироваться на квантовой электродинамике. Если же условие $\hbar\omega \ll mc^2$ соблюдается в системе отсчета, в которой скорость электрона (или, разумеется, какой-то другой рассматриваемой частицы с массой покоя m) равна нулю или достаточно мала, то

при использовании уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} \tag{15.46}$$

и пренебрежении в (15.45) фазой $\mathbf{kr}$ по сравнению с ωt электрон приобретает скорость

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega}\sin\omega t + \mathbf{v}_0. \tag{15.47}$$

Для того, чтобы не только скорость без поля v_0, но и вынужденная скорость были нерелятивистскими, должно соблюдаться условие

$$\frac{eE_0}{mc\omega} \ll 1, \tag{15.48}$$

которое здесь и считается выполненным.

Именно в силу предположения, что $v \sim \sqrt{v_0^2 + (eE_0/m\omega)^2} \ll c$ можно пользоваться уравнением (15.46), где пренебрежено лоренцевой силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$. Точнее, это так, если кроме того $H_0 \sim E_0$. Для плоской волны в вакууме, конечно, $H_0 = E_0$, но в среде с показателем преломления n уже $H_0 = nE_0$ и при $n \gg 1$ относительная роль магнитного поля возрастает. То же может иметь место в волноводах, где для определенных колебаний (мод) или в некоторых точках также возможно соблюдение неравенства $H_0 \gg E_0$. Здесь мы, во всяком случае, действием лоренцевой силы пренебрегаем. Отметим, что условие классичности $\hbar\omega \ll mc^2$ автоматически обеспечивает также возможность пренебречь силой радиационного трения *), как это и сделано в (15.46). Наконец, при $v \ll c$ (точнее, должно соблюдаться условие $v \ll c/n$) фаза $kr \sim \omega nvt/c \ll \omega t$, что оправдывает замену поля (15.45) полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos\omega t$.

Учитывая сказанное, исходим из (15.46) и можем ограничиться дипольным приближением, причем

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2}\cos\omega t, \quad \ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}_0\cos\omega t. \tag{15.49}$$

Отсюда, используя формулу (6.28), получаем усредненную по времени интенсивность рассеянного излучения, отнесенную к телесному углу $d\Omega$:

$$I = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 E_0^2\frac{cn}{8\pi}\sin^2\psi = I_0 r_e^2\sin^2\psi = d\sigma I_0, \tag{15.50}$$

задача о рассеянии при любой энергии электрона сводится к обсуждаемой здесь при использовании соответствующего преобразования системы отсчета. Заметим, вместе с тем, что анализ классического движения релятивистского заряда в поле плоской волны как с учетом, так и без учета радиационного трения имеет известный методический интерес [212].

*) Условие $\hbar\omega \ll mc^2$ эквивалентно неравенству $\omega \ll c/(\hbar/mc) \ll c/r_e$, где $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}82\cdot10^{-13}$ см — классический радиус электрона. В таких условиях радиационная сила очень слаба (см. гл. 2).

поскольку интенсивность падающего излучения

$$I_0 = \frac{cn}{4\pi}\overline{E^2} = \frac{cn}{8\pi}E_0^2$$

(как и в (15.5), угол между $\mathbf{E}_0$ и волновым вектором рассеянной волны $\mathbf{k}$ обозначен через ψ, в отличие от формулы (6.28), в которой использовано обозначение θ). Очевидно, полное эффективное сечение для рассеяния

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{\int I\, d\Omega}{I_0} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \qquad (15.51)$$

(сечение $\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6{,}65 \cdot 10^{-25}\ \text{см}^2$ называют томсоновским сечением). Для неполяризованного света $d\sigma = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)$, но по-прежнему, конечно, $\sigma = \sigma_T$ (здесь θ — угол рассеяния).

Из приведенного расчета видно, что показатель преломления среды n, в которой происходит рассеяние на свободном электроне, выпадает из выражений для $d\sigma$ (заметим, что в вакууме удобнее всего сразу исходить из выражения для $\ddot{\mathbf{p}}$ в (15.49) и пользоваться хорошо известными формулами для мгновенной интенсивности $I = ((\ddot{\mathbf{p}})^2/4\pi c^3)\sin^2\psi$ и $\int I\, d\Omega = (2/3c^3)(\ddot{\mathbf{p}})^2$).

Как очевидно из (15.7) и (15.51), коэффициент экстинкции для газа независимо рассеивающих электронов с концентрацией N равен

$$h = \sigma_T N. \qquad (15.52)$$

Считая газ идеальным и вычисляя флуктуации $\delta\varepsilon$ для газа свободных электронов, получаем такой же результат из формулы (15.10), если учесть, что в этом случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right) = \left(N\frac{\partial\varepsilon}{\partial N}\right) = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \quad \text{и} \quad \beta_T = \frac{1}{\varkappa TN}.$$

Здесь, очевидно, влиянием ионов полностью пренебрежено, причем не только в выражении для ε, но и для сжимаемости β_T. Другими словами, считается, что ионы ни прямо, ни косвенно не вносят вклада в рассеяние.

Когда можно так поступать? Разумеется, раньше всего должен быть мал вклад ионов в ε_{ij}. В изотропной плазме он мал при $\omega \gg kv_{Te,i}$ и $\omega \gg \nu_{\text{эфф}}$ (см. (12.40)); в разреженной изотермической плазме существенно только неравенство $\omega \gg kv_T$, $v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$. Для поперечных волн, которые мы сейчас только и рассматриваем, это условие всегда выполняется, но его отнюдь еще недостаточно для того, чтобы считать независимыми существенные в задаче флуктуации. Действительно, независимы

лишь флуктуации в объемах, находящихся на расстояниях $r \gg l$, где l — радиус корреляции. В незаряженном (нейтральном) газе роль l играет длина свободного пробега, а в разреженной плазме — дебаевский радиус r_D (см. (12.14)).

С другой стороны, фазы рассеянных волн отличаются не более чем на π лишь для рассеивающих объемов с размерами, меньшими длины волны $\lambda = \lambda_0/n$. Для бóльших объемов или бóльших расстояний между рассеивающими объемами фаза рассеянных волн все время «сбивается» в силу теплового движения, т. е. временной зависимости флуктуаций. Поэтому для неразложенного в спектр рассеянного света (или хотя бы для достаточно широкой спектральной полосы) рассеяние на объемах, находящихся на расстояниях $r \gg \lambda$, некогерентно. Отсюда ясно, что при $\lambda \ll l$ или, точнее, при условии (см. (15.33); θ — угол рассеяния)

$$\frac{2\pi}{q} = \frac{\lambda}{2 \sin {}^1\!/_2\theta} \ll l \tag{15.53}$$

коррелированность флуктуаций на расстояниях порядка l не играет роли в том смысле, что фаза рассеянных волн и так «сбивается» на значительно меньших расстояниях, на которых газ ведет себя как близкий к идеальному *).

Это обстоятельство в применении к газу из нейтральных частиц уже упоминалось и использовалось выше. Для плазмы же рассеяние на одних только электронах с полным игнорированием роли ионов допустимо, таким образом, только при условии (см. (12.14))

$$\frac{\lambda}{2 \sin {}^1\!/_2\theta} = \frac{\pi c}{n\omega \sin {}^1\!/_2\theta} \ll r_D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} = 4{,}9 \sqrt{\frac{T\,(\mathrm{K})}{N}}\ \text{см}. \tag{15.54}$$

Если не касаться рассеяния на ничтожно малые углы, неравенство (15.54) в оптике ($\lambda \lesssim 10^{-3}$ см $= 10$ мкм) обычно всегда соблюдается (имеются в виду концентрации N в областях, откуда излучение вообще может выйти в астрономических условиях). Так или иначе, при соблюдении неравенства (15.54) можно использовать формулу (15.52). В другом предельном случае **)

$$\frac{\lambda}{2 \sin {}^1\!/_2\theta} \gg r_D \tag{15.55}$$

---

*) Это утверждение очевидно в случае нейтрального газа — на расстояниях, меньших длины свободного пробега l, частицы вообще не взаимодействуют. В рассматриваемой газовой плазме взаимодействие между частицами тоже слабо в силу условия $e^2N^{1/3} \ll \varkappa T$, обеспечивающего также соблюдение неравенства $r_D \gg N^{-1/3}$, где $N^{-1/3}$ — среднее расстояние между частицами.

**) В случае газа нейтральных частиц здесь нужно заменить r_D на длину свободного пробега $l \sim v_T/\nu_{\text{эфф}} \sim 1/\pi a^2 N_m$, где $\pi a^2 \sim 10^{-15}$ см^2 — сечение молекул (атомов) и N_m — их концентрация.

некогерентно рассеивают объемы с размерами, много большими радиуса корреляции, и считать плазму идеальным газом электронов уже нельзя. Здесь, вообще говоря, нужно действовать в соответствии с общей теорией, излагавшейся выше — вычислять $\delta\varepsilon_{\mathbf{q}}$ или для нахождения спектра определять величины $\delta\varepsilon_{\mathbf{q},\,\Omega}$ (см. (15.5б) и (15.34)). Такие расчеты можно найти в [56, 83, 159, 165, 185, 213]. Кое-что можно сказать, однако, и на более элементарном уровне.

Подобно тому как флуктуации плотности в жидкости можно разделить на адиабатические и изобарические, флуктуации $\delta\varepsilon$ в изотропной плазме в первом приближении делятся на флуктуации $\delta\varepsilon_n$, в которых изменяется лишь плотность плазмы, но не ее заряд, и флуктуации $\delta\varepsilon_e$, связанные с изменением заряда. Иными словами, флуктуации $\delta\varepsilon_n$ аналогичны флуктуациям, обусловленным звуковыми волнами, в них электроны и ионы «привязаны» друг к другу, в силу чего заряд не возникает. Флуктуации же $\delta\varepsilon_e$ можно разложить на высокочастотные плазменные волны — в них ионы неподвижны, а электроны колеблются с частотами, близкими к

$$\omega_{pe} \equiv \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}.$$

С точностью до членов порядка m/M флуктуации обоих типов статистически независимы, и, таким образом,

$$\overline{(\delta\varepsilon)^2} = \overline{(\delta\varepsilon_n)^2} + \overline{(\delta\varepsilon_e)^2}. \tag{15.56}$$

В рассматриваемой области (15.55), но при условии, что длина свободного пробега велика по сравнению с λ, нейтральные флуктуации $\delta\varepsilon_n$, как можно думать, близки к флуктуациям в соответствующем нейтральном газе с концентрацией всех частиц, равной $2N$. Здесь существенна именно полная концентрация, так как она определяет давление, которое в тепловом равновесии от массы частиц не зависит ($p = 2N\varkappa T$). Таким образом, в этом случае сжимаемость $\beta_T = {}^1/_{2\varkappa TN}$, но по-прежнему $\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right) = -4\pi e^2/m\omega^2$. Отсюда и из сказанного ранее легко видеть, что интенсивность волн, рассеянных на флуктуациях $\delta\varepsilon_n$, отличается от интенсивности волн, рассеянных на свободных электронах, лишь множителем ${}^1/_2$, т. е.

$$h_n = {}^1/_2\sigma_T N. \tag{15.57}$$

Более строгая теория подтверждает этот вывод [110]. Довольно любопытно и вместе с тем важно, что продольные волны с длиной $\lambda \gg r_D$ рассеиваются на флуктуациях $\delta\varepsilon_n$ точно так же, как и поперечные волны. В самом деле, при рассеянии волн объемом с размером, малым по сравнению с длиной λ, ориен-

тация вектора $\mathbf{E}_0$ относительно $\mathbf{k}$ несущественна. Поэтому в продольной волне с полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ интенсивность рассеянных поперечных волн (речь, следовательно, идет о трансформации продольных волн в поперечные в результате рассеяния [110]; вопроса о переходном рассеянии, обсуждаемого ниже, сейчас не касаемся) определяется формулой (15.50) с добавлением множителя $^1/_2 N$ (имеется в виду рассеяние в единице объема)

$$\left.\begin{aligned} I_\perp &= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{cn(\omega)}{8\pi} N E_0^2 \sin^2 \psi, \\ \int I_\perp \, d\Omega &= \frac{1}{6}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 cn(\omega) E_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{15.58}$$

Коэффициент экстинкции здесь не вводился, поскольку мы не касались вопроса о потоке энергии в продольной волне (этот момент в данном случае неважен, так как интерес представляет обычно именно интенсивность $I_\perp$ в зависимости от E_0^2).

В случае коротких волн (высоких частот), когда выполняется условие (15.54), форма спектра рассеянного света доплеровская (см. (15.25), но с заменой M на m). Характерная ширина спектра при этом $\Delta\omega \sim \sqrt{\varkappa T/mc^2}\,\omega_e$. При рассеянии длинных волн (условие (15.55)) для рассеяния на флуктуациях $\delta\varepsilon_n$, являющегося аналогом релеевского рассеяния в жидкости или газе, $\Delta\omega \sim \sqrt{\varkappa T/Mc^2}\,\omega_e$. Действительно, флуктуации $\delta\varepsilon_n$ рассасываются со скоростями порядка скорости ионов $v_{Ti} \sim \sqrt{\varkappa T/M}$ и, как всегда, $\Delta\omega \sim (v/c)\omega_e$, где v — характерная скорость движения (более точно в этой оценке заменить c на c/n).

Флуктуации $\delta\varepsilon_e$, как указывалось, связаны с плазменными волнами и имеют характерную частоту ω_p. Рассеяние на этих флуктуациях аналогично комбинационному рассеянию и приводит к появлению сателлитов с частотами, отличающимися от частоты рассеянного света на $\Omega \sim \omega_p$. На квантовом языке речь здесь идет о рождении или поглощении падающей волной одного плазмона с энергией $\hbar\omega \sim \hbar\omega_{pe}$. Ширина сателлитов определяется затуханием соответствующих плазменных волн — волн с частотой $\Omega = \omega_e - \omega_s$ (в (15.25) мы писали $\Omega = \omega_e - \omega$, т. е. индекс s был опущен). Интенсивность сателлитов зависит от величины флуктуаций заряда. При $\lambda \gg r_D$ плазменные волны затухают слабо (и поэтому сателлиты узки), но средний квадрат флуктуаций заряда, пропорциональный величине $\overline{(\delta\varepsilon_e)^2}$, резко уменьшается — он содержит дополнительный множитель $(r_D/\lambda)^2$ по сравнению с соответствующим выражением при $\lambda \ll r_D$. Такой результат физически довольно понятен — на расстояниях, бо́льших r_D, электроны уже «привязаны» к ионам и с ростом λ тепловому движению все «труднее» отделить электроны от ионов и создать флуктуации заряда, или, на другом языке, плазмен-

ные волны со значительной амплитудой *). Таким образом, для длинных волн $\lambda \gg r_D$ интенсивность комбинационного рассеяния с образованием или поглощением плазменных волн (плазмонов) оказывается небольшой, и главную роль играет релеевское рассеяние на флуктуациях плотности, причем коэффициент экстинкции для поперечных волн определяется формулой (15.57). Такая ситуация реально осуществляется при рассеянии радиоволн в ионосфере (речь идет о методе некогерентного рассеяния при радиолокации ионосферы [213, 214]).

В целом проблема рассеяния электромагнитных волн в плазме сделанными замечаниями, конечно, далеко не исчерпывается. Особого внимания заслуживают также учет влияния магнитного поля, случай неизотермической плазмы, трансформация поперечных волн в продольные, продольных волн в поперечные и т. п. Но здесь эта тема развиваться больше не будет (см. [56, 83, 159, 165, 185, 213, 214] и указанную там литературу).

Упомянем и о некоторых особенностях, имеющих место при рассеянии волн на частицах, быстро движущихся в преломляющей среде [108г, 215], роль которой может играть и плазма, в частности магнитоактивная плазма.

В заключение главы остановимся на переходном рассеянии в плазме. Дело в том, что именно в плазме переходное рассеяние, рассмотренное в гл. 8, играет чрезвычайно важную роль.

Причин здесь несколько. Чтобы они стали ясны, мы напомним, что в простейшей форме или, так сказать, в чистом виде, переходное рассеяние имеет место при падении волны проницаемости на неподвижный заряд, причем рассеянная волна — это уже поперечная электромагнитная волна. Между тем достаточно разреженная плазма как раз и представляет собой среду, в которой лучше всего распространяются продольные плазменные волны, являющиеся одновременно волнами проницаемости. Весьма существенно, правда, что плазменная волна — это также волна электрического поля, вызывающего колебания частиц

---

*) Приведем здесь результат, вывод которого содержится, например, в гл. 6 монографии [185]. Для изотермической электронно-ионной плазмы квадрат флуктуаций плотности заряда равен

$$\overline{|\rho_{\mathbf{k}}|^2} = \frac{\varkappa T k^2}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_l(0, k)}\right) = \frac{2e^2Nk^2}{k^2 + 8\pi e^2 N/\varkappa T} = \frac{2e^2Nk^2r_D^2}{k^2r_D^2 + 1},$$

$$\bar{\rho}^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \overline{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}\, d\mathbf{k}, \quad \varepsilon_l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2r_D^2}, \quad \lambda = \frac{k}{2\pi}$$

(см. (12.44), (12.49)).

Очевидно, что в пределах применимости приведенной формулы для $\overline{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}$ имеем $\overline{|\rho_{\mathbf{k}}|^2} = 2e^2N$ при $\lambda \ll r_D$,

$$\overline{|\rho_{\mathbf{k}}|^2} = \frac{8\pi^2e^2Nr_D^2}{\lambda^2} \text{ при } \lambda \gg r_D.$$

плазмы. Поэтому наряду с переходным рассеянием возникает и интерферирует с ним и обычное (томсоновское) рассеяние. Но об этом — ниже. Сейчас же уместно добавить, что относительно большая роль переходного рассеяния в плазме связана вместе с тем с редкостью соударений за период плазменных колебаний *), т. е. с соблюдением неравенства $\omega^2 \approx \omega_p^2 \gg \nu_{эфф}^2$. В самом деле, в таких условиях частицы плазмы (электроны и ионы) в отсутствие внешнего магнитного поля большую часть времени движутся равномерно и прямолинейно, и, следовательно, основную роль могут играть такие процессы излучения и рассеяния, которые, подобно переходному излучению и переходному рассеянию, не требуют ускорения частиц, в частности изменения их траектории. При наличии магнитных полей каждая из частиц плазмы в первом приближении движется по спирали. Это в общем не меняет, однако, заключения о том, что основную роль могут играть такие процессы излучения и рассеяния, которые не требуют изменения траекторий частицы (в данном случае — движения по спирали). Важно, что излучение и рассеяние могут осуществляться на всей траектории частицы без значительного изменения характера ее движения. Наконец, плазма бывает весьма неустойчивой, когда даже очень малые отклонения от равновесия вызывают лавинообразное нарастание разнообразных колебаний. Существенно, что большинство таких колебаний сопровождается изменением концентрации и других параметров плазмы, т. е. представляет собой волны диэлектрической проницаемости.

В свете сказанного не удивительно, что переходное рассеяние в плазме фактически рассматривалось (см. [216], некоторые другие ссылки приведены в [94, 106б]) еще до того, как была понята его физическая природа, по крайней мере в той форме, в какой она здесь нами освещается [94, 138].

Перечислим отличительные черты переходного рассеяния в плазме. Во-первых, особенно существенным оказывается такой тип переходного рассеяния, при котором одна плазменная волна, являющаяся волной диэлектрической проницаемости, превращается в другую тоже плазменную волну (например, высокочастотная ленгмюровская волна превращается в ленгмюровскую или ленгмюровская — в ионнозвуковую (низкочастотную) ионнозвуковая — в ионнозвуковую и т. д. и т. п.). Во-вторых, в процессах переходного рассеяния весьма важную роль играют эф-

*) Считаем справедливым газовое приближение $\varkappa T \gg e^2 N^{1/3}$ (см. (12.16); легко проверить, что для большого числа реальных случаев это неравенство соблюдается с колоссальным запасом). Для «чистой» (полностью ионизированной) плазмы $\nu_{эфф} \sim \frac{e^4}{(\varkappa T)^2}\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,N$ и при $\varkappa T \gg e^2 N^{1/3}$ автоматически имеем

$$\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m \gg \nu_{эфф}^2.$$

фекты пространственной дисперсии (в особенности когда рассеяние происходит на частицах с малыми скоростями). В-третьих, как уже отмечалось, в плазме, помимо переходного рассеяния, существует, а иногда и доминирует обычное (томсоновское) рассеяние. Поэтому в плазме важную роль играет интерференция между обычным томсоновским и переходным рассеяниями. Следовательно, используя квантовый язык, можно сказать, что вероятность полного рассеяния не является суммой вероятностей переходного и томсоновского рассеяний, поскольку складываются не вероятности рассеяния, а матричные элементы для процессов рассеяния. В-четвертых, для достаточно интенсивных плазменных колебаний основную роль начинает играть не спонтанное, а вынужденное (индуцированное) переходное рассеяние. Такой процесс представляет собой по существу процесс реабсорбции рассеянного излучения, и соответствующий коэффициент поглощения можно вычислить при известной вероятности рассеяния, используя метод коэффициентов Эйнштейна (несколько подробнее см. [94]).

Для того чтобы рассмотреть переходное рассеяние в случае, когда рассеянная волна является не электромагнитной, а произвольной нормальной волной в среде (в частности, продольной волной), развитую в конце гл. 8 теорию необходимо несколько обобщить. Кроме того, необходим учет пространственной дисперсии. Все это сделано в [94], здесь же ограничимся простейшей задачей о рассеянии высокочастотной плазменной (ленгмюровской) продольной волны с частотой $\omega_0 \approx \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ в нерелятивистской изотропной плазме с образованием поперечных волн; очевидно, частота этих поперечных волн ω весьма близка к ω_0, поскольку изменение частоты происходит лишь в результате движения частиц в плазме (эффект Доплера), а отношение $v/c \sim \sqrt{\varkappa T/mc^2} \ll 1$.

Для вычисления излучаемой (рассеиваемой) в единицу времени энергии поперечных волн нужно обратиться к общей формуле (8.120), и ее обобщению с учетом пространственной дисперсии. Здесь мы, однако, сразу же воспользуемся полученной из (8.120) формулой (8.122а) для излучаемой энергии при условии

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \ll k_0 = \frac{\omega_0}{c} n_3(\omega_0), \tag{15.59}$$

$$n^2(\omega) = \varepsilon^{(0)}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad n_3^2(\omega_0) = \frac{c^2}{3v_T^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right),$$

где k — волновое число поперечной (рассеянной) волны и k_0 — волновое число падающей плазменной волны (волны проницаемости); приведенное выражение для n_3 отвечает (12.68). При одной и той же частоте поперечной и продольной волн, очевидно, $n_3/n_2 = c^2/3v_T^2$ и неравенство (15.59) в рассматриваемой

нерелятивистской плазме всегда соблюдается. Поскольку в нерелятивистской плазме для подавляющей части рассеивающих частиц частоты падающей и рассеянной волн действительно очень близки (т. е. $\omega \approx \omega_0$; см. также выше), то условие (15.59) обычно выполняется.

Обращаясь к формуле (8.122а), необходимо еще уточнить смысл входящего в нее отношения $\left|\frac{\varepsilon^{(1)}(\omega)}{\varepsilon^{(0)}(0)}\right|^2$. Как ясно из смысла задачи и всего вывода, приведенного в гл. 8, $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(0)}$ относятся здесь к волне проницаемости (8.103). Но если эта волна плазменная, то нужно, вообще говоря, учитывать пространственную дисперсию и в качестве ε брать продольную проницаемость $\varepsilon_l(\omega, k)$, обсуждавшуюся в гл. 12. Плазменные волны слабо затухают лишь при условии $k_0^2 r_D^2 \ll 1$, $r_D^2 = \varkappa T/8\pi e^2 N = v_T^2/2\omega_p^2$, $v_T^2 = \varkappa T/m$ (см. (12.67)). Поэтому нас должен в первую очередь интересовать именно такой случай, а значит, для изотермической плазмы (т. е. при $T_e = T_i = T$)

$$\varepsilon_l \approx 1 + \frac{1}{k_0^2 r_D^2} = 1 + \frac{8\pi e^2 N}{\varkappa T k_0^2} \approx \frac{8\pi e^2 N}{\varkappa T k_0^2}, \qquad (15.60)$$

где использована формула (12.44), пригодная при $k_0 v_{Te} \gg \omega$ (у нас $k = k_0$, $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_p$). Таким образом, ясно, что $\varepsilon_l^{(0)}(0) \approx \approx 8\pi e^2 N_0/\varkappa T k_0^2$. Для нахождения $\varepsilon_l^{(1)}(\omega_0)$ учтем, что в силу уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(N - N_0)$ и условия продольности $\mathbf{k}_0\mathbf{E}_0 = k_0 E_0$, для волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$ имеем $\delta N = N - N_0 = -\frac{k_0 E_0}{4\pi e} \sin(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$, т.е.

$$\varepsilon_l^{(1)}(\omega_0) = \varepsilon_l^{(0)} \frac{\delta N}{N_0} = -\frac{k_0 E_0}{4\pi e} \frac{8\pi e^2}{\varkappa T k_0^2}$$

(см. (8.103), а также ниже; напомним, что для электронов $e < 0$, но это далее обычно несущественно). Итак, у нас $\left|\frac{\varepsilon_l^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon_l^{(0)}(0)}\right| = \frac{k_0^2 E_0^2}{(4\pi e)^2 N_0^2}$, и, учитывая, что $\omega_0^2 \approx \omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0/m$ (выше мы не всегда различали N и N_0), из (8.122а) имеем

$$\frac{dW^R}{dt} = \frac{q^2 e^2 E_0^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3 m^2}, \quad \varepsilon^{(0)}(\omega_0) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}. \qquad (15.61)$$

Для получения более точных или, вернее, более общих формул при последовательном учете пространственной дисперсии и вклада ионов нужно для продольных волн ввести замены (см. [94б])

$$\varepsilon^{(0)}(0) \to \varepsilon_l^{(0)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad \varepsilon_l^{(0)} = \varepsilon_{l,e}^{(0)} + \varepsilon_{l,i}^{(0)} - 1,$$

$$\varepsilon^{(1)}(\omega_0) \to \frac{eE_0(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{mk_0\omega_0^2}\left(\varepsilon_{l,e}^{(0)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - 1\right),$$

$$k_0 v_{Te} \ll \omega_0,$$

где $\varepsilon_l(\omega, k)$ — продольная диэлектрическая проницаемость, фигурирующая в общем выражении (12.36); очевидно, $\varepsilon_l(\omega, k) = (k_i k_j/k^2)\,\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, где ε_{ij} — полный тензор проницаемости изотропной плазмы, а $\varepsilon_{l,e}$ и $\varepsilon_{l,i}$ — части ε_l, обусловленные соответственно вкладами электронов и ионов.

В результате для изотропной квазиравновесной (вообще говоря, неизотермической) плазмы получаем [94, 138]

$$\frac{dW^R}{dt} = \frac{q^2e^2E_0^2\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3m^2}\left|\frac{\varepsilon^{(0)}_{l,e}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)-1}{\varepsilon^{(0)}_{l}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)}\right|^2. \quad (15.62)$$

Здесь учтено, что множитель, входящий в (15.62) под знаком модуля, с хорошей степенью точности постоянен и равен

$$\frac{\varepsilon^{(0)}_{l,e}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)-1}{\varepsilon^{(0)}_{l}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1, & v \gg v_{T_i} = \sqrt{\varkappa T/m_i}, \quad \left|\varepsilon^{(0)}_{l,i}-1\right| \ll \left|\varepsilon^{(0)}_{l,e}-1\right|, \\ \dfrac{1}{1+T_e/T_i}, & v \ll v_{T_i}, \ \left|\varepsilon^{(0)}_{l,i}-1\right| \approx \dfrac{T_i}{T_e}\left|\varepsilon^{(0)}_{l,e}-1\right| \approx \dfrac{\omega_p^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2 v_{T_e}^2}, \end{cases} \quad (15.63)$$

где v — скорость рассеивающей частицы с зарядом q, m_i — масса ионов плазмы, T_i — их температура (m и T_e — масса и температура электронов и, как уже указывалось, величина $\varepsilon^{(0)}_{l,e}$ — часть $\varepsilon^{(0)}_l$, связанная с электронами).

Результат (15.63) не учитывает, однако, томсоновского рассеяния и его интерференции с переходным рассеянием и в этом отношении, строго говоря, корректен только для рассеивающих частиц с массой $M \to \infty$. Практически же выражение (15.62) с хорошей точностью применимо для любых нерелятивистских ионов; очевидно, оно мало отличается от (15.61) и, более того, (15.62) переходит в (15.61) при $v \gg v_{T_i}$*). Томсоновское рассеяние можно учесть, используя выражение (8.125), в котором для электронов $M = m$. С учетом интерференции между томсоновским и переходным рассеяниями полная мощность рассеяния на частице с массой M и зарядом q, движущейся с нерелятивистской скоростью или покоящейся в плазме, может быть

*) Выражение (15.60) пригодно при условиях (12.43), выполняющихся при вычислении величины $\varepsilon_l^{(0)}(0)$. Когда же мы определяем $\varepsilon_l^{(1)}(\omega_0)$, то интересуемся областью $k_0 v_{T_e} \ll \omega_0$, в силу чего $\varepsilon_l^{(1)}(\omega_0) = -\dfrac{k_0 E_0}{4\pi e}\cdot\dfrac{4\pi e^2}{\varkappa T k_0^2}$. Это привело бы к появлению дополнительного множителя $1/4$ в (15.61). Для простоты выше мы не учитывали это обстоятельство, нашедшее отражение в (15.63).

записана как мощность томсоновского рассеяния на электронах $\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$, умноженная на дополнительный фактор $|F|^2$:

$$\frac{dW^R}{dt}=\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}|F|^2,\quad F=\frac{m}{M}+\frac{|e|}{q}\,\frac{\left(\varepsilon^{(0)}_{l,e}(\omega-\omega_0,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)-1\right.}{\varepsilon^{(0)}_{l}\ (\omega-\omega_0,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)}. \tag{15.64}$$

Результат (15.64) получен для рассеяния продольных ленгмюровских волн в поперечные (электромагнитные) волны. Однако он носит, как оказывается, более общий характер и может описывать, например, рассеяние продольных ленгмюровских волн в ленгмюровские же волны. В этом случае величина $\left(\frac{dW}{dt}\right)_{T,\,m}$ в (15.64) будет, правда, отличаться от (8.125) численным множителем $^1/_2$ (из-за иных угловых зависимостей сечения рассеяния [1066]). При рассеянии на ионах $m/M \ll 1$ и $F \sim 1$ (см. (15.63)). Формула (15.64) выявляет тем самым то обстоятельство, что полное рассеяние (фактически — переходное рассеяние) на ионах по порядку величины соответствует томсоновскому рассеянию на электронах. Одновременно формула (15.64) показывает, что переходное рассеяние на электронах обычно будет малым. Действительно, согласно (15.63), только очень медленные электроны со скоростью $v \ll v_{T_i}$ будут иметь сечение рассеяния, сравнимое с томсоновским. Полагая $M = m$, $q = -|e|$, в этом случае получаем

$$F=1-\frac{1}{1+T_e/T_i}=\frac{1}{1+T_i/T_e}. \tag{15.65}$$

Таким образом, при $T_e = T_i$ отсюда и из (15.64) следует, что $\frac{dW^R}{dt}=\frac{1}{4}\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$. Для электронов с $v \gg v_{T_i}$, согласно (15.63), (15.64), получаем $F = 0$. Мощность рассеяния все же не равна строго нулю, поскольку при учете членов следующего порядка по малому параметру $k_0^2 v_{T_e}^2/\omega_p^2 \ll 1$ мощность рассеяния $\left(\frac{dW^R}{dt}\right)\sim\frac{k_0^2 v_{T_e}^2}{\omega_p^2}\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}\ll\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$. Мощность рассеяния для теплового электрона можно определить как мощность рассеяния, усредненная по максвелловскому распределению электронов. Такая мощность будет всегда много меньше мощности томсоновского рассеяния, поскольку мала относительная доля электронов с $v \ll v_{T_i}$, когда мощность рассеяния порядка $\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$, а для основной массы электронов с $v \gg v_{T_i}$ мощность рассеяния мала. Этот эффект подавления рассеяния на электронах является прямым следствием интерференции томсоновского и

переходного рассеяний. Интересно, что для позитрона ($q = |e|$, $M = m$) томсоновское и переходное рассеяния усиливают друг друга. В случае $v \ll v_{T_i}$ имеем $F \approx {}^3/_2$ (при $T_e = T_i$) и $\left(\frac{dW^R}{dt}\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$. При $v \gg v_{T_i}$ $F \approx 2$ и $\left(\frac{dW^R}{dt}\right) \approx 4\left(\frac{dW^R}{dt}\right)_{T,\,m}$.

Эти примеры хорошо иллюстрируют большую роль, которую играет в плазме именно переходное рассеяние. Сделанное заключение о роли переходного рассеяния в плазме еще усиливается в результате анализа переходного рассеяния на релятивистских частицах с учетом возможных применений в лабораторной и особенно в космической плазме. Переходное рассеяние в плазме существенно также при рассмотрении ряда эффектов, связанных с учетом индуцированного рассеяния и нелинейностей (обо всем этом см. [94б] и указанную там литературу).

Глава 16

АСТРОФИЗИКА КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Вводные замечания. Модели происхождения космических лучей. Общая характеристика проблематики. Ионизационные потери энергии. О пучковой неустойчивости и плазменных эффектах в космических лучах. Уравнения переноса в диффузионном приближении. Упрощения уравнений переноса в случае протонно-ядерной и электронной компонент. Некоторые оценки.

За последние 30—35 лет облик астрономии (и особенно астрофизики) существенно изменился. Разумеется, такой срок не является, вообще говоря, малым по принятым в настоящее время «нормам», характеризующим развитие науки. История астрономии насчитывает, однако, несколько тысячелетий, и поэтому глубокие изменения, происшедшие всего за три десятилетия, представляются особенно впечатляющими. Существо дела состоит в том, что лишь в этот последний период астрономия стала или, лучше сказать, постепенно превращается во всеволновую астрономию, тогда как ранее (практически вплоть до 1945 г.) почти вся астрономическая информация поступала к нам в оптическом, а чаще даже в еще более узком — видимом диапазоне электромагнитных волн. В настоящее же время радиоастрономия (в основном в диапазоне сантиметровых, дециметровых и метровых длин волн) по своему общему уровню догнала, а кое в чем и обогнала оптическую астрономию. Рентгеновская астрономия, родившаяся только в 1962 г. (мы имеем в виду внесолнечную рентгеновскую астрономию; рентгеновское излучение Солнца было обнаружено в 1948 г.), находится сейчас в стадии бурного расцвета и возмужания. Началось развитие инфракрасной астрономии и гамма-астрономии. Тем самым, действительно, весь спектр электромагнитных волн оказался либо освоенным, либо начал исследоваться. К этому, в плане характеристики современного этапа в развитии астрономии, нужно добавить появление астрофизики космических лучей (в данном случае информацию несут заряженные частицы с высокой энергией — космические лучи), а также зарождение нейтринной астрономии и астрономии гравитационных волн.

Здесь не место подробнее характеризовать происходящие в астрономии процессы, останавливаться на ее многочисленных

достижениях (см., в частности, [49, 56, 59, 60, 68, 69, 83, 154, 159, 217—221]). Мы хотим лишь пояснить причину, в силу которой в поле зрения астрофизики попали механизмы рентгеновского и гамма-излучения, анализ распространения и трансформации химического состава космических лучей при их блуждании в межзвездном пространстве, физика нейтрино и многие другие вопросы. Естественно, что и в преподавании теоретической физики (и не только будущим астрономам, но и значительно более широкому кругу специалистов) должна найти какое-то отражение вся эта тематика, важная для астрономии и космических исследований. В настоящей книге «астрономическую направленность» имели гл. 5 и 10, не говоря уже об отдельных замечаниях в других разделах. Настоящая глава и две последующие также посвящены ряду процессов, происходящих в космосе (но, конечно, не только в космосе), причем мы ограничиваемся только частью проблематики, относящейся к так называемой астрофизике высоких энергий. Сам этот термин еще не вполне установился, но встречается достаточно часто, причем сюда относятся астрофизика космических лучей *), рентгеновская астрономия, гамма-астрономия и нейтринная астрономия (в данном случае имеется в виду прием космических нейтрино со сравнительно высокой энергией — большей, скажем, 0,1—1 МэВ). Однако нейтринной астрономии касаться не будем (см. [220, 221, 256в]) и ограничимся некоторыми вопросами, связанными с астрофизикой космических лучей (см. данную главу), с рентгеновской астрономией (см. гл. 17) и с гамма-астрономией (см. гл. 18). Нужно иметь в виду, впрочем, что эти вопросы связаны между собой и в большинстве случаев здесь не легко, да и не нужно проводить какие-то резкие границы.

Космическими лучами называем только заряженные частицы (протоны, ядра, электроны и позитроны), причем только с достаточно высокой энергией. Четкого соглашения в отношении терминологии не существует, но обычно космическими лучами называют лишь частицы с кинетической энергией $E_к > 100$ Мэв, а более мягкие, но все еще быстрые частицы иногда именуют субкосмическими лучами.

Основной величиной, которая характеризует космические лучи, является их интенсивность J (иногда эту величину называют также потоком в данном направлении)**). По определению J есть отнесенное к единице телесного угла число частиц,

*) По установившейся исторической традиции астрофизику космических лучей чаще именуют проблемой происхождения космических лучей.

**) Интенсивностью (особенно в случае электромагнитного излучения) называют также поток энергии, отнесенный к единице телесного угла. Такая «энергетическая» интенсивность равна $I = E_к J$, где $E_к$ — кинетическая энергия частиц или энергия фотонов $h\nu = \hbar\omega$ (мы имеем здесь в виду моноэнергетические частицы или фотоны). Заметим, что, следуя распространенным обозначениям, мы здесь и ниже обозначаем энергию частицы буквой E, а не $\mathscr{E}$, как было принято в предшествующих главах.

проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению наблюдения. Единицей измерения J является величина

$$\frac{\text{част.}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср}} = 10^4 \frac{\text{част.}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср}}.$$

Поток частиц сорта i с интенсивностью J_i равен $F_{i\Omega} = \int J_i \cos\theta \, d\Omega$, где θ — угол между нормалью к площадке и направлением скорости частицы, а $d\Omega$ — элемент телесного угла. Для изотропного излучения поток частиц F_i из полусферы направлений равен

$$F_i = 2\pi \int_0^{1/2\pi} J_i \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi J_i. \tag{16.1}$$

Концентрация частиц N_i, имеющих скорость v_i, в случае изотропного излучения равна

$$N_i = \frac{4\pi}{v_i} J_i. \tag{16.2}$$

Обычно приходится иметь дело не с моноэнергетическими частицами, а с распределением частиц по энергиям (т. е., как говорят, с энергетическим спектром). Основной величиной является при этом спектральная (дифференциальная) интенсивность $J_i(E)$, так что $J_i(E)\,dE$ есть интенсивность частиц с полной энергией E, лежащей в интервале E, $E + dE$. Интенсивность частиц с энергией, большей E (интегральная интенсивность), равна

$$J_i(>E) = \int_E^\infty J_i(E)\, dE. \tag{16.3}$$

В случае изотропного распределения частиц с массой M_i имеем

$$N_i(>E) = 4\pi \int \frac{J_i(E)}{v} dE, \quad E = \frac{M_i c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{16.4}$$

Плотность кинетической энергии изотропных космических лучей равна

$$w_i = \int E_\text{к} N_i(E)\, dE = \int \frac{4\pi}{v} E_\text{к} J_i(E)\, dE. \tag{16.5}$$

Можно ввести также энергетическую интенсивность

$$I_i = \int E_\text{к} J_i(E)\, dE, \tag{16.6}$$

но ею редко пользуются.

Для ультрарелятивистских частиц имеем

$$I_i = \frac{c}{4\pi} \int E_\text{к} N_i(E)\, dE = \frac{c w_i}{4\pi}. \tag{16.7}$$

Разумеется, использование полной энергии $E = Mc^2 + E_к$ удобно лишь в релятивистской области, но именно к ней относятся обычно изучаемые у Земли космические лучи. Для мягких космических и субкосмических лучей чаще используется кинетическая энергия $E_к$. Далее, для ядер удобно пользоваться не только полной энергией E или кинетической энергией $E_к$, но и полной энергией на нуклон $\epsilon = E/A$ или кинетической энергией на нуклон $\epsilon_к = E_к/A$, где A — массовое число ядра. Наконец, выражения (16.2) и (16.3) написаны в предположении об изотропности распределения частиц по направлениям по той причине, что космические лучи у Земли, если исключить влияние земного магнитного поля, в высокой степени изотропны.

Степень анизотропии космических лучей определяют следующим образом:

$$\delta = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}, \qquad (16.8)$$

где J_{max} и J_{min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности космических лучей в зависимости от направления (здесь предполагается, что зависимость $J(\theta)$ имеет лишь один максимум, скажем, в направлении $\theta = 0$; другими словами, принимается зависимость типа $J(\theta) = J_0 + J_1 \cos\theta$, так что $\delta = J_1/J_0$). Степень анизотропии космических лучей долгие годы не удавалось даже надежно установить. Сейчас, однако, для частиц с энергией $E \gtrsim 10^{12}$ эВ и вплоть до энергии $E \sim 10^{14}$ эВ анизотропия космических лучей вне Солнечной системы может считаться установленной, причем $\delta \sim 5 \cdot 10^{-4}$ (см. [220, 222]).

При бóльших энергиях, особенно при $E > 10^{17}$ эВ, анизотропия, вообще говоря, возрастает, но ситуация здесь еще недостаточно выяснена. Изучение анизотропии в этой области очень существенно для выяснения происхождения космических лучей с такой сверхвысокой энергией. Вместе с тем проблема частиц со сверхвысокой энергией ($E > 10^{17}$ эВ и практически вплоть до $E \sim 10^{20} - 10^{21}$ эВ) является особой, и мы ее ниже касаться почти не будем (см. [220]).

Таким образом, анизотропию можно выявить лишь в результате специальных исследований, во всех же других случаях космические лучи мы вправе считать совершенно изотропными (еще раз напоминаем, что влияние земного магнитного поля считается исключенным). Поэтому задачей изучения первичных космических лучей, т. е. космических лучей за пределами атмосферы или с учетом ее влияния, фактически является определение функций $J_i(E)$ для всех компонент космических лучей — для протонов и ядер (для протонно-ядерной компоненты) и для электронно-позитронной компоненты. Впрочем, позитронов в составе электронно-позитронной компоненты при $E > 1$ ГэВ довольно мало (при $E \sim 10$ ГэВ интенсивность позитронов составляет примерно 10% от полной интенсивности электронно-пози-

тронной компоненты [220]). К тому же в подавляющем большинстве случаев разделение на электроны и позитроны не производится, а измеряется интенсивность $J_e(E)$ всей электронно-позитронной компоненты, которую называют просто электронной. В случае протонно-ядерной компоненты также далеко не всегда производится разделение ядер по зарядам, не говоря уже о разделении изотопов; таким образом, часто рассматривается полная интенсивность космических лучей $J_{к.л}(E)$ или практически полная интенсивность протонно-ядерной их компоненты, так как доля электронов (т. е. отношение $J_e(E)/J_{к.л}(E)$) порядка процента и кроме того электроны сравнительно легко отделяются.

Антиядер в составе космических лучей очень мало, и лишь недавно удалось обнаружить антипротоны, причем отношение их числа к числу протонов $\bar{p}/p = (5{,}2 \pm 1{,}5)\cdot 10^{-4}$ (в области энергий $E \sim 10$ ГэВ [220б, 223]). Такое количество антипротонов совместимо с предположением, что все они являются вторичными — образуются при соударениях космических лучей с частицами межзвездной среды.

Мы не собираемся здесь приводить сколько-нибудь подробные сведения о космических лучах (см. [59, 68, 69, 218—220]) и ограничимся лишь несколькими замечаниями, в том числе указанием некоторых характерных значений таких величин, как J и w. Так, у Земли (вне действия земного магнитного поля) для всех космических лучей можно в качестве ориентировочных принять такие значения *):

$$\left.\begin{aligned} J_{к.л} \equiv J &\sim 0{,}2 - 0{,}3\ \frac{\text{част.}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}}, \\ N_{к.л} &\sim \frac{4\pi J}{c} \sim 10^{-10}\ \frac{\text{част.}}{\text{см}^3}, \\ w_{к.л} &\sim 10^{-12}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \sim 1\ \frac{\text{эВ}}{\text{см}^3}, \\ I &\sim \frac{c w_{к.л}}{4\pi} \sim 10^{-3}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.9)$$

Некоторое представление о химическом составе релятивистских космических лучей ($\epsilon = E/A > 2{,}5$ ГэВ/нукл.) можно составить из табл. 16.1, где ядра разбиты на традиционно используемые группы (например, L-группу составляют ядра Li, Be и

*) Нужно иметь в виду, что энергетический спектр космических лучей у Земли имеет максимум, отвечающий для протонов энергии $E_к \sim 250$ МэВ. Поэтому приводимые значения $\int_{E_к = 100\ \text{МэВ}}^{\infty} J(E)\,dE$ и аналогичные интегралы сходятся. Их величина, однако, изменяется с циклом солнечной деятельности за счет изменения вклада более медленных частиц и, таким образом, в какой-то мере чувствительна к нижнему пределу интегрирования.

Таблица 16.1

Группа ядер	Атомный номер	Интенсивность[1])	Распространенность по отношению к ядрам H-группы	
			в космических лучах	в среднем во Вселенной
p	1	1300	650	3000—7000
α	2	94	47	250—1000
L	3—5	2,0	1	10^{-5}
M	6—9	6,7	3,3	2,5—10
H	10	2,0	1	1
HV	$\geqslant 20$	0,5	0,26	0,05
VVH	$\geqslant 30$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-4}$

[1]) В третьем столбце приведены данные для J ($>\epsilon=2{,}5$ ГэВ/нукл.) в единицах част./(м^2·с·ср).

В). Нужно иметь в виду, что погрешность приведенных в ней значений не менее десятка процентов — данные меняются в процессе накопления нового материала и использования более совершенной экспериментальной методики. Последняя уже позволяет в ряде случаев получать сведения не только о группах ядер, но и об отдельных ядрах. Кроме того, обнаружены сравнительно очень редкие ядра с $Z \geqslant 83$ (т. е. более тяжелые, чем свинец), количество которых в космических лучах ориентировочно на 8 порядков меньше, чем всех ядер группы H.

В 80-е годы главным образом в результате измерений на спутниках, по всей вероятности, удастся получить весьма детальные сведения о химическом составе космических лучей вплоть до энергий $10^{12} — 10^{13}$ эВ/нукл. Совершенствуется также методика разделения изотопов. В качестве примера приведем данные работы [224], в которой измерялся изотопный состав неона для ядер с энергией $60 < \epsilon_к < 230$ МэВ/нукл. Оказалось, что отношение $^{22}Ne/^{20}Ne = 0{,}54 \pm 0{,}07$. Пересчет, учитывающий изменение состава при блуждании ядер в межзвездной среде, приводит для состава космических лучей в их источниках к значению $^{22}Ne/^{20}Ne = 0{,}38 \pm 0{,}07$. В то же время в Солнечной системе $^{22}Ne/^{20}Ne = 0{,}122 \pm 0{,}006$. Уже отсюда ясно, что определение изотопного состава (а также, конечно, химического состава) космических лучей может в принципе дать ценную информацию о некоторых условиях в источниках, скажем, в оболочках сверхновых звезд. Однако, повторяем, в нашу задачу здесь отнюдь не входит сколько-нибудь детальное изложение данных о космических лучах, а приводимые сведения в этом отношении служат только для ориентировки. Напротив, на некоторых процессах, происходящих в космических лучах, и на способах анализа их распространения в космическом пространстве мы остановимся в дальнейшем несколько подробнее.

Наиболее существенная черта, характеризующая химический состав космических лучей и ясная из табл. 16.1, состоит в присутствии довольно значительного потока L-ядер, несмотря на их ничтожное количество в среднем в природе. Эта особенность, подтверждающаяся и в отдельности для ядер Li, Be и B, а также для других редких ядер (например, ядер ^{3}He), свидетельствует о значительной роли трансформации химического состава космических лучей при их распространении в межзвездном пространстве, а возможно, и в источниках (т. е. в области генерации или, иными словами, области ускорения космических лучей).

Зависимость интенсивности космических лучей от энергии (энергетический спектр) принято представлять в виде

$$J_A(>\epsilon)=\int\limits_{\epsilon} J_A(\epsilon)\,d\epsilon = K_A\epsilon^{-(\gamma-1)},\quad J_A(\epsilon)=(\gamma-1)K_A\epsilon^{-\gamma}, \quad (16.10)$$

где, как уже указывалось, $\epsilon = E/A$ — энергия на нуклон и индекс A указывает, что речь идет о ядрах (или группе ядер) со средним массовым числом A; кроме того, вводятся аналогичные величины $J(>E)$ и $J(E)$ для всех космических лучей.

Фактически спектр не является степенным, т. е. показатель γ зависит от энергии. Однако, и это достаточно важно, в весьма широком интервале энергий аппроксимация спектра в виде (16.10) оказывается хорошей. Так, в области энергий $2\cdot10^9 < E < 3\cdot10^{15}$ эВ по ряду данных $\gamma = 2{,}7 \pm 0{,}2$. По-видимому, лучшим сейчас можно считать значение $\gamma = 2{,}7$ или $\gamma = 2{,}6$. Для ориентировки приведем, например, такой спектр космических лучей в области $10^{10} < E < 10^{15}$ эВ:

$$J(>E)=(5{,}3\pm1{,}1)\,10^{-10}\left(\frac{E\,(\text{эВ})}{6\cdot10^{14}}\right)^{-(\gamma-1)}\approx\left(\frac{E\,(\text{эВ})}{10^9}\right)^{-1{,}6}\frac{\text{част.}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}},$$
$$\gamma=2{,}62\pm0{,}05. \quad (16.11)$$

В области малых энергий $E_к < 10^9 - 10^{10}$ эВ показатель γ изменяется и спектр сильно зависит от уровня солнечной активности. На этой области останавливаться не будем. Отметим лишь, что особенно важный вопрос (в плане теории происхождения космических лучей) о форме спектра в области малых энергий и в частности о наличии максимума в энергетическом спектре вдали от Солнца (за пределами Солнечной системы) еще не выяснен. По-видимому, вплоть до энергии $\epsilon_к \sim$ $\sim$ 100 МэВ/нукл. максимума в спектре галактических космических лучей еще нет. При энергии $E \sim 10^{15}$ эВ происходит более или менее резкий излом или, во всяком случае, изменение спектра и при $E > 10^{15}$ эВ выражение (16.11) несправедливо и ближе к действительности спектр

$$J(>E)=(2{,}0\pm0{,}8)\,10^{-10}\left(\frac{E\,(\text{эВ})}{10^{15}}\right)^{-(\gamma-1)}\frac{\text{част.}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}},$$
$$\gamma=3{,}2\pm0{,}2; \quad (16.12)$$

по другим данным в (16.12) множитель $(2{,}0 \pm 0{,}8)$ нужно заменить на $(3{,}74 \pm 0{,}20)$, а $\gamma = 3{,}16 \pm 0{,}1$. При $E \sim 10^{15}$ эВ спектры (16.11) и (16.12) в пределах достигнутой точности согласуются («сшиваются») между собой, как и должно быть. По-видимому, при $E \gtrsim 10^{18} - 10^{19}$ эВ спектр опять несколько уплощается. Интегральный спектр космических лучей (при $E > 10^{10}$ эВ) изображен на рис. 16.1 (напомним, что γ — показатель в дифференциальном спектре; см. (16.10)).

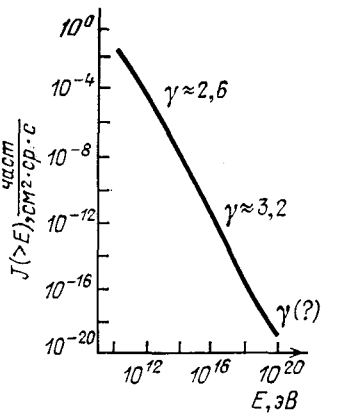


Рис. 16.1. Интегральный спектр космических лучей у Земли.

γ — показатель степени для дифференциального спектра; для степенного интегрального спектра $J(>E) = \text{const} \cdot E^{-(\gamma-1)}$.

Максимальная энергия наблюдавшихся космических лучей порядка 10^{20} эВ. В этой области спектр космических лучей должен, вообще говоря, резко «заваливаться» в результате значительных потерь, которые испытывают космические лучи со столь большими энергиями при их взаимодействии с излучением, имеющимся в межзвездном и межгалактическом пространствах. Но пока что такой «завал» не обнаружен, и вопрос о спектре, а, тем самым, и о происхождении космических лучей со сверхвысокой энергией представляется в значительной мере открытым [220].

Приведенные значения γ относятся ко всем космическим лучам, но до сравнительно недавнего времени считалось, что химический состав космических лучей, по крайней мере вплоть до энергий 100—1000 ГэВ, не зависит от энергии. Тем самым считалось, что в этой области показатель $\gamma \approx 2{,}6$—$2{,}7$ относится и ко всем группам ядер. В 1972 г. появились подтвердившиеся затем указания на то, что химический состав космических лучей уже в области энергий до 100 ГэВ/нукл. все же слабо зависит от энергии — конкретно речь идет об уменьшении с ростом энергии доли вторичных ядер (типа Li, Be и B), образующихся в результате фрагментации более тяжелых ядер. Соответствующие данные обсуждаются в [220, 225]. В области еще более высоких энергий $E > 10^{12}$ эВ (или, точнее, $\epsilon > 10^{11}$ эВ/нукл.) изменения химического состава могут оказаться более существенными, но на этот счет надежных данных пока нет.

Электронная компонента космических лучей изучена менее детально, чем протонно-ядерная. Спектр в области энергий до 1 ГэВ особенно чувствителен к процессам на Солнце и в Солнечной системе, и сам он здесь довольно сложен. При $E \equiv E_e > 1$ ГэВ степенная аппроксимация уже лучше подходит и, например, в области $5 \leq E \leq 50$ ГэВ спектр является сте-

пенным с показателем $\gamma = 3{,}0 \pm 0{,}1$. При меньших энергиях показатель γ уменьшается, а в области $E_e > 100$ ГэВ возможно уже $\gamma \approx 3{,}4$ (при этом для энергий $E_e > 500$—1000 ГэВ данных уже практически нет). Для ориентировки приведем такой дифференциальный электронный спектр:

$$J_e(E) = 3 \cdot 10^{-2} E^{-3} \frac{\text{электр.}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ}}, \quad 5 < E < 100 \text{ ГэВ}, \qquad (16.13)$$

где энергия электронов $E = E_e$ измеряется в ГэВ; если заменить здесь показатель $\gamma = 3$ на $\gamma = 3{,}3 \pm 0{,}2$, то спектром можно пользоваться вплоть до энергий $E \sim 1000$ ГэВ (при этом, правда, в [220б] множитель $3 \cdot 10^{-2}$ в (16.13) заменяется на $1{,}7 \cdot 10^{-2}$). Для сравнения электронного спектра с интегральным спектром для всех космических лучей (16.11) запишем (16.13) в виде

$$J_e(> E) \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2} \left(\frac{E\,(\text{эВ})}{10^9}\right)^2 \frac{\text{электр.}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср}}, \quad 5 \cdot 10^{1} \lesssim E \lesssim 10^{11} \text{ эВ}. \qquad (16.14)$$

Подчеркнем еще раз, что все приводимые величины имеют лишь приближенный характер и в литературе встречаются значения интенсивности, отличающиеся раза в 2, но это совершенно неважно в плане нашего изложения. Иное дело — принципиальный вопрос об экстраполяции всех данных к границам Солнечной системы и на значительную область Галактики.

Радиус кривизны траектории частицы с энергией $E \gg Mc^2$, движущейся в однородном магнитном поле H, равен (см. (4.24); считаем, что частица движется перпендикулярно к полю)

$$r = \frac{E\,(\text{эВ})}{300H}\,\text{см}. \qquad (16.15)$$

В Солнечной системе, вообще говоря, $H \lesssim 3 \cdot 10^{-5}$ Э и, кроме того, поле неоднородно. Поэтому космические лучи с энергией $E > 10^{12}$ эВ, а практически и при $E > 10^{10}$ эВ явно не могут удерживаться в Солнечной системе. Учитывая же, что форма спектра космических лучей у Земли мало изменяется вплоть до энергий $E \sim 10^{15}$ эВ, имеем все основания полагать, что этот спектр (при $E > 10^{10} - 10^{11}$ эВ) характерен по крайней мере для области Галактики, примыкающей к Солнечной системе. Но условия в окрестности Солнца, видимо, весьма типичны для многих районов Галактики. В этом отношении для нас особенно существенны радиоастрономические данные, касающиеся нетеплового радиоизлучения с непрерывным спектром, имеющего, несомненно, синхротронную природу. Таким образом мы получаем весьма непосредственную информацию об электронной компоненте космических лучей в Галактике, а также далеко за ее пределами (нормальные и радиогалактики, квазары). Именно радиоданные создали, можно сказать, астрофизику космических лучей, поскольку они не оставляют сомнений в том, что космические лучи имеются практически везде в космосе,

а иногда играют большую энергетическую и динамическую роль — это относится в первую очередь к разреженным областям галактик (гало в нормальных галактиках, радиоизлучающие области, облака и выбросы в радиогалактиках). В отношении нашей Галактики радиоастрономические наблюдения указывают на существование радиодиска, центральной радиообласти и радиогало (рис. 16.2).

Впрочем, такое разделение довольно условно. Источники космических лучей (сверхновые звезды и в какой-то мере, возможно, некоторые другие звезды) концентрируются к галактической плоскости. Здесь же сильнее галактические магнитные

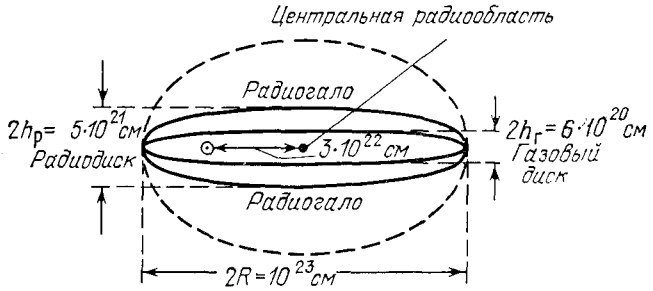


Рис. 16.2. Схематическое изображение радиоструктуры Галактики.

поля. Поэтому, естественно, радияркость больше вблизи галактической плоскости (в диске) и постепенно убывает с ростом z — расстояния от галактической плоскости. Естественно также некоторое изменение яркости в области галактического центра, хотя выделение особой центральной радиообласти совсем не обязательно. Если газ в Галактике сконцентрирован в слое толщиной $2h_г \sim 200$ пк $\approx 6 \cdot 10^{20}$ см, то область интенсивного радиоизлучения заведомо значительно толще. Последнее физически вполне понятно, поскольку газ удерживается вблизи галактической плоскости силами тяготения, космические же лучи (в частности, релятивистские электроны) силами тяготения практически не удерживаются и уходят из области газового диска, блуждая в межзвездных магнитных полях. Поскольку мы находимся внутри системы (Галактики) выяснение зависимости радияркости (или излучательной способности) от координат, в частности от z, оказалось очень трудной задачей. Если считать, что излучательная способность (речь идет, очевидно, о синхротронном излучении) от z не зависит, то из радиоастрономических данных следует, что источники излучения заполняют некоторый диск (радиодиск) с толщиной около $2h_р \approx 1500$ пк $\approx$ $\approx 5 \cdot 10^{21}$ см. Важно, что толщина этого радиодиска примерно на порядок больше толщины газового диска $2h_г$. Фактически, однако, излучательная способность с ростом z уменьшается в

силу уменьшения интенсивности релятивистских электронов с данной энергией и ослабления магнитного поля. Поэтому, по всей вероятности, не существует никаких сколько-нибудь резких границ между радиодиском и радиогало (см. рис. 16.2). Другими словами, понятие о радиодиске вообще вряд ли отвечает физической картине, а введено лишь в связи с указанным выше способом расчета. Сказанное подтверждается полученными за последние несколько лет радиоданными, касающимися других нормальных галактик, видных «с ребра»; о том же свидетельствует и современный анализ радиоданных для Галактики (см. [69, 219б, 220в] и указанную там литературу).

В результате сейчас (в итоге усилий, занявших почти три десятилетия) нет сомнений в существовании радиогало у Галактики и других нормальных галактик. Другое дело, что это радиогало может быть слабее или сильнее для разных галактик. Недостаточно надежно установлены и параметры радиогало для Галактики, но в общем можно считать, что размеры гало (по z) $h_{\text{гало}} \sim R \sim 10$ кпк $\approx 3 \cdot 10^{22}$ см; радиоизлучательная способность в радиогало в среднем лишь в несколько раз меньше, чем в диске. Помимо радиогало, на «радиокарте» Галактики видны оболочки сверхновых звезд и различные «неоднородности» — те или иные изменения интенсивности (в частности, связанные со спиральной структурой). Тем самым совершенно ясно, что по крайней мере электронная компонента космических лучей заполняет огромные области Галактики, а околосолнечная область в этом отношении ничем качественно не выделена.

«Ахиллесовой пятой» астрофизики космических лучей с самого начала ее зарождения была и в известной мере остается до сих пор некоторая неопределенность (или, если угодно, неоднозначность), связанная с использованием сведений об электронной компоненте для суждения о протонно-ядерной компоненте космических лучей. Соответствующий переход осуществляется, как мы видели в гл. 5, путем определенного предположения о значении коэффициентов $\varkappa_H$ и $\varkappa_e$:

$$\varkappa_H = \frac{w_H}{w_{\text{к. л}}}, \quad \varkappa_e = \frac{w_{\text{к. л}}}{w_e}, \tag{16.16}$$

где $w_H = H^2/8\pi$ — плотность энергии магнитного поля, $w_{\text{к. л}}$ — плотность энергии всех космических лучей и w_e — плотность энергии электронной компоненты (в гл. 5 вместо плотностей энергии рассматривались полные энергии, но это в общем эквивалентно, если речь идет о средних значениях).

Для космических лучей у Земли имеем

$$\varkappa_e \sim 100, \quad \varkappa_H \sim 1, \tag{16.17}$$

где использованы измеренные значения $w_{\text{к. л}} \sim 10^{-12}$ эрг/см^3 и $w_e \sim 10^{-14}$ эрг/см^3, а также учтено, что в Галактике в среднем $H \sim (2\text{—}5) \cdot 10^{-6}$ Э.

В силу уже изложенных аргументов, соображений о равнораспределении энергии в квазистационарных условиях (отсюда $\varkappa_H \sim 1$) и др., представляется вполне разумным принять оценки (16.17) для Галактики в целом (или в среднем по галактическому пространству). Так же поступают и в отношении внегалактических источников и приходят к упомянутому выводу о большой роли космических лучей во Вселенной. В гл. 5 подчеркивалась тем не менее важность создания методов измерения величин $\varkappa_e$ и $\varkappa_H$; об этом пойдет также речь в гл. 17 и 18. В применении к Галактике оценки (16.17), возможно, становятся неправильными лишь для центральной области, а для основных галактических дискретных источников (типа оболочек сверхновых звезд) — на некоторых стадиях их эволюции.

Используя для Галактики в целом значения (16.17), легко оценить полную энергию космических лучей в радиодиске (при $w_{к.\,л} \sim 10^{-12}$ эрг/см^3 и $H \sim 5 \cdot 10^{-6}$ Э), а также несколько условно во всей Галактике с учетом радиогало

$$W_{к.\,л,\,диск} \sim w_{к.\,л,\,диск} V_{диск} \sim 10^{55} \text{ эрг}, \qquad W_{к.\,л,\,гало} \sim w_{к.\,л,\,гало} V_{гало} \sim 10^{56} \text{ эрг}, \tag{16.18}$$

где $V_{диск} \sim R^2/2h_р \sim 10^{67}$ см^3 — объем радиодиска (см. рис. 16.2), а $V_{гало} \sim 4\pi R^3/3 \sim 5 \cdot 10^{68}$ см^3 — объем квазисферического гало; реальное гало, по-видимому, уплощено и кроме того плотность энергии космических лучей с удалением от галактической плоскости, вероятно, убывает; поэтому и принята оценка $W_{к.\,л,\,гало} \sim 10^{56}$ эрг. Эта величина впечатляюща; можно, например, заметить, что она отвечает энергии покоя примерно ста звезд с массой Солнца ($M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, $M_\odot c^2 \sim 10^{54}$ эрг). Более существенно, конечно, что энергия $W_{к.\,л}$ сравнима или больше внутренней энергии межзвездного газа и энергии межзвездного магнитного поля. Заметим также, что в мощных радиогалактиках энергия $W_{к.\,л}$ достигает значений 10^{60} или даже 10^{61} эрг, т. е. порядка $10^7 M_\odot c^2$.

Каково происхождение космических лучей вообще и в частности космических лучей, наблюдаемых у Земли? Несомненно, сам факт эффективной генерации (ускорения) частиц до релятивистских и ультрарелятивистских энергий в космосе является отражением плазменной природы соответствующих областей, плазменных неустойчивостей и существования космических взрывов (взрывы галактических ядер, взрывы сверхновых и новых звезд, солнечные вспышки и др.). Таким образом, именно космические и субкосмические лучи и порождаемое ими излучение (в частности рентгеновское и гамма-излучение) служат практически непременными элементами и вместе с тем индикаторами особенно бурных, активных космических процессов — в этом состоит одна из важнейших особенностей астрофизики космических лучей (и вообще астрофизики высоких энергий), определяющих ее роль для астрономии в целом.

Когда речь идет о происхождении наблюдаемых у Земли космических лучей (ниже в этом случае говорим просто о происхождении космических лучей), то обычно имеются в виду не механизмы ускорения, а построение определенной модели, в которой должны быть указаны источники космических лучей, заполненная этими лучами область и т. п. В течение многих лет здесь конкурировали в основном модели двух типов — галактические и метагалактические. В метагалактических моделях принимается, что подавляющая часть космических лучей (протонно-ядерная компонента) втекает в Галактику извне — из межгалактического (метагалактического) пространства. Поэтому, как можно видеть *), плотность энергии космических лучей в Метагалактике $w_{\text{Мг}}$ (по крайней мере в области, прилегающей к Галактике) должна быть порядка $w_{\text{к. л, г}} \sim 10^{-12}$ эрг/см^3. Это означает, кстати, что в Метагалактике $\varkappa_e \gg 10^2$, поскольку электронная компонента наблюдаемых у Земли космических лучей заведомо имеет галактическое происхождение; в самом деле, в силу больших комптоновских потерь (см. ниже) релятивистские электроны не могут долго блуждать в Метагалактике и дойти до Галактики от радиогалактик и квазаров. К сожалению, надежная оценка плотности $w_{\text{Мг}}$ еще не произведена, но по ряду соображений можно считать, что

$$w_{\text{Мг}} \ll w_{\text{к. л, г}} \sim 10^{-12} \text{ эрг/см}^3 \qquad (16.19)$$

и, вероятнее всего, $w_{\text{Мг}} \lesssim 10^{-15} - 10^{-16}$ эрг/см^3 (см. [226]). Неравенство (16.19) надежно установить можно, по-видимому, лишь гамма-астрономическим методом, изложенным в гл. 18. Имеющиеся на этот счет данные (см. гл. 18), хотя и недостаточно всеобъемлющи, свидетельствуют в пользу условия (16.19) и, следовательно, против метагалактических моделей. По этой, как, впрочем, и по ряду других причин (см. [59, 226]), метагалактические модели могут, по убеждению автора, уже считаться опровергнутыми. В рамках галактических моделей (опять же по мнению многих и, в частности, автора, но не всеобщему) основными источниками космических лучей являются сверхновые

*) Космические лучи в Метагалактике, как и в Галактике, должны быть в высокой степени изотропны, поскольку резкая анизотропия космических лучей разрушается в результате плазменной неустойчивости (см. ниже). Поэтому в квазистационарных условиях, как следует из рассмотрения движения частиц в магнитном поле, интенсивность, а значит, и плотность энергии космических лучей в Метагалактике и в Галактике должны быть примерно одинаковы (подробнее см. [226]). Если же космические лучи, наблюдаемые у Земли, имеют галактическое происхождение, то плотность энергии в Метагалактике может быть значительно ниже, чем в Галактике, — ситуацию в таких условиях нельзя считать квазистационарной, поскольку источники (галактики, квазары) просто не успевают заполнить метагалактическое пространство космическими лучами с большой плотностью (быть может, не лишним будет напомнить, что возраст галактик и квазаров в нашей расширяющейся Вселенной не превосходит примерно 10^{10} лет).

звезды, в том числе пульсары *) и, возможно, хотя и маловероятно, взрывы в ядре Галактики. В дисковой галактической модели характерным объемом, занимаемым космическими лучами, является радиодиск или близкая к нему область ($V_{\text{диск}} \sim 10^{67}$ см^3). В этом случае характерное время жизни космических лучей в Галактике $T_{\text{к. л, диск}} \sim 10^7$ лет. В галактической модели с гало занимаемый объем — это гало космических лучей ($V_{\text{гало}} \sim 10^{68}$ см^3), а характерное время жизни $T_{\text{к. л, гало}} \sim 10^8$ лет (оценка времени жизни проведена ниже). Отсюда и из значений (16.18) для $W_{\text{к. л}}$ ясно, что для сохранения квазистационарного режима источники космических лучей в Галактике в обеих упомянутых моделях должны испускать (ускорять) космические лучи с мощностью порядка

$$U_{\text{к. л}} \sim \frac{W_{\text{к. л, гало}}}{T_{\text{к. л, гало}}} \sim \frac{W_{\text{к. л, диск}}}{T_{\text{к. л, диск}}} \sim 10^{40} - 10^{41} \text{ эрг/с}. \quad (16.20)$$

Сверхновые звезды способны обеспечить инжекцию космических лучей с такой мощностью.

Выбор между различными галактическими моделями — проблема, дискутирующаяся уже долгие годы. Основное затруднение здесь было связано с неопределенностью в вопросе о существовании радиогало Галактики. Но после того как эта проблема, наконец, решена положительно, а также в силу ряда других причин (имеем в виду в первую очередь результаты измерений возраста космических лучей по данным о количестве имеющихся в их составе радиоактивных ядер ^{10}Be; см. [219, 220] и ниже) не приходится сомневаться в справедливости галактических моделей с гало космических лучей (такое гало может по своим размерам превосходить радиогало — область со значительной радиояркостью). Что касается роли различных источников космических лучей, то прогресс в этом отношении возможен на различных путях в силу разных соображений. Отметим в качестве примера, что галактическое ядро не может служить источником электронной компоненты космических лучей в области высоких энергий $E \gtrsim 1 - 10$ Гэв. Дело в том, что на пути от центра Галактики до Солнечной системы электроны с высокой энергией потеряют большую ее часть в результате синхротронных и комптоновских потерь (см. выше гл. 4).

Сделанными замечаниями о происхождении космических лучей здесь и ограничимся, поскольку нашей основной целью является освещение ряда физических процессов и механизмов, представляющих интерес в астрофизике высоких энергий. Ана-

*) В большинстве сверхновых находится, вероятно, вращающаяся намагниченная нейтронная звезда — пульсар [30, 31]. Частицы могут ускоряться при самом взрыве сверхновой, в оболочке сверхновой звезды и вблизи пульсара. Таким образом, ускорение частиц пульсарами — одна из трех возможностей, причем ее удельный вес недостаточно выяснен.

лизу и обсуждению подлежат следующие процессы и механизмы.

Процессы и механизмы ускорения протонно-ядерной и электронной компонент космических лучей в различных космических условиях и в разных областях (взрыв звезды, турбулентная плазма в оболочках сверхновых, ускорение в межзвездном пространстве, ускорение вблизи пульсаров, ускорение в солнечных вспышках и др.).

Механизмы потерь энергии быстрыми частицами разных типов. Трансформация ядер при соударениях.

Механизмы диффузии и изотропизации космических лучей в частности с учетом плазменных явлений.

Процессы и механизмы генерации (рождения) космическими и субкосмическими лучами фотонов различной энергии и их применение к радиоастрономии, оптической, рентгеновской и гамма-астрономии. Сюда же относится вопрос о поглощении и рассеянии фотонов всех диапазонов.

Кроме того стоит, очевидно, задача построения количественной теории происхождения космических лучей в Галактике с учетом потерь, диффузии, трансформации химического состава и т. п. Для этого, конечно, нужно задаться более определенной моделью (конкретизировать область, заполненную космическими лучами, распределение источников, параметры межзвездной среды и т. п.). Состояние проблемы таково, что неизбежен «метод проб и ошибок» — нужно рассчитывать различные модели и выбирать лучшую из них путем сопоставления с данными наблюдений (см. [59, 69, 220, 226, 227]).

Совершенно очевидно, что вся соответствующая проблематика крайне обширна. В отношении синхротронного излучения мы ее уже касались (см. гл. 5 и 10). Выше были затронуты и некоторые другие процессы, представляющие интерес в астрофизике, но большая часть перечисленных вопросов и задач освещена еще не была. К сожалению, сделать это сколько-нибудь подробно и полно в рамках настоящей книги вообще невозможно. Ниже (в данной главе и гл. 17 и 18) мы ограничимся обсуждением энергетических потерь, изложением общей схемы рассмотрения диффузии космических лучей с учетом трансформации их химического состава и (в случае электронной компоненты) с учетом потерь; затем будут рассмотрены механизмы генерации рентгеновских и гамма-лучей и будет сделан ряд замечаний по смежным вопросам. Механизмов ускорения частиц в космических условиях мы касаться не будем (см. [59, 69, 159, 218, 220]).

При прохождении заряженных частиц через вещество происходит несколько процессов, объединяемых обычно термином «ионизационные потери энергии». Если считать движение частицы заданным (конкретно равномерным и прямолинейным) и не рассматривать изменения массы и заряда частицы за счет

ядерных превращений и захвата или «обдирки» орбитальных электронов (здесь имеется в виду движение атомного ядра), то вклад в ионизационные потери вносят ионизация атомов среды, их возбуждение и черенковское излучение.

Правда, четкое разделение (воздействия движущейся частицы на среду) на процессы этих трех типов не всегда возможно, особенно в плотной среде. Кроме того в случае плазмы нужно говорить о передаче энергии электронам и ионам плазмы, а не об ионизации и возбуждении, происходящих в газе из нейтральных атомов или молекул. Для достаточно медленных частиц играет роль перезарядка. При наличии пучка частиц, а не отдельных частиц могут проявляться коллективные эффекты — неустойчивость пучка и т. д. К проблеме ионизационных потерь примыкают вопросы об образовании δ-электронов (электронов отдачи) в среде и о многократном рассеянии при прохождении частицей данного слоя вещества. Иногда нужно учитывать флуктуации ионизационных потерь и разброс в длинах пробега.

Уже из приведенного краткого перечня ясна вся многогранность проблемы ионизационных потерь, которой можно было бы посвятить специальный курс. Естественно, этому кругу вопросов посвящена обширная литература, но мы ограничимся ссылкой на классический труд Бора [228] и несколько современных источников [1, 44, 59, 218а, 229, 230]. Ниже приводится лишь ряд формул, которые нужно использовать при вычислении ионизационных потерь в газе, и делается ряд замечаний на этот счет.

В основе вычисления ионизационных потерь для быстрых частиц лежит формула (иногда ее называют формулой Бете — Блоха):

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i = -\frac{1}{v}\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv^2}\left\{\ln\frac{2mv^2 W_{\max}}{\mathcal{J}^2(1-\beta^2)} - 2\beta^2 + f\right\}, \tag{16.21}$$

где N — концентрация электронов в веществе, m — масса электронов, $\beta = v/c$, v — скорость рассматриваемой быстрой частицы с зарядом eZ, $\mathcal{J}$ — средняя энергия ионизации атомов среды, $W_{\max}$ — максимальная энергия, передаваемая частицей атомарным электронам, и f — поправка на «эффект плотности». Основой для получения формулы (16.21) является, по сути дела, классическая формула Резерфорда, определяющая эффективное сечение рассеяния частицы с зарядом eZ, массой M и начальной скоростью v на покоящейся частице с зарядом e и массой m (энергия взаимодействия e^2Z/r). При соударении покоящаяся вначале частица (конкретно электрон) приобретает некоторую энергию W, а падающая частица теряет такую же энергию (упругое соударение). Выраженное через W эффективное сечение равно

$$d\sigma = 2\pi\frac{e^4Z^2}{mv^2}\frac{dW}{W^2}$$

(расчет проведен в § 19 книги [231], и поэтому его нецелесообразно повторять). Для энергии, теряемой падающей частицей, имеем

$$dE = \int_{W_{\min}}^{W_{\max}} W\, d\sigma = \frac{2\pi e^4 Z^2}{mv^2} \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}}.$$

Отсюда после умножения на электронную концентрацию N приходим к формуле типа (16.21), и реальной проблемой является уточнение логарифмического множителя с учетом релятивизма (выше, очевидно, использовалась нерелятивистская формула), связи электронов в атомах и т. д.

Качественно смысл логарифмического члена в (16.21) становится ясным, если учесть, что он по существу имеет вид $\text{const} \cdot \ln(p_{\max}/p_{\min})$, где p — параметр удара. При близких соударениях ($p \sim p_{\min}$) образуются δ-электроны с энергией, достигающей $W_{\max}$. Вклад же от далеких соударений ($p \sim p_{\max}$) растет как $\ln(1/(1-\beta^2)) = \ln(E/Mc^2)^2$ в силу сжатия поля частицы при $v \to c$ (по этой причине с ростом энергии фурье-компоненты поля с данной частотой $\omega \sim \mathcal{I}/\hbar$, грубо говоря, соответствуют все более далеким расстояниям). Однако с увеличением $p_{\max}$ между частицей и электроном, которому передается энергия, появляется все больше и больше частиц среды. Последние экранируют поле частицы, причем при прочих равных условиях эта экранировка, конечно, тем больше, чем плотнее среда. Влияние экранировки (или эффект плотности) как раз и учитывается членом f в (16.21). В ультрарелятивистском случае (точнее см. ниже) член f имеет универсальный характер

$$f = \ln(1-\beta^2) + \ln \frac{\mathcal{I}^2}{\hbar^2 \omega_p^2} + 1, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

В результате формула (16.21) принимает вид

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc^2} \left\{ \ln \frac{m^2 c^2 W_{\max}}{2\pi e^2 N \hbar^2} - 1 \right\}. \qquad (16.22)$$

Независимость приведенного выражения для f от свойств среды (помимо концентрации электронов N) связана с тем, что в обсуждаемом случае достаточно больших энергий существенны свойства среды на высоких частотах, когда для любой среды

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

Ионизационные потери ультрарелятивистских электронов ($E \gg mc^2$) в атомарном водороде равны, согласно (16.21),

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left\{\ln\frac{E^3}{mc^2\mathcal{J}^2} - 2\right\} =$$
$$= 1{,}22\cdot 10^{-20} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{эрг/с} =$$
$$= 7{,}62\cdot 10^{-9} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{эВ/с} =$$
$$= 2{,}54\cdot 10^{-19} N\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{эВ/см} =$$
$$= 1{,}52\cdot 10^{5}\left\{3\ln\frac{E}{mc^2} + 18{,}8\right\} \text{эВ}\cdot\text{см}^2/\text{г}. \qquad (16.23)$$

Здесь приведены значения ионизационных потерь в различных единицах для удобства их использования в разных случаях; при этом, очевидно, переход от потерь в секунду к потерям на сантиметр пути осуществляется путем деления на $c = 3\cdot 10^{10}$ см/с, поскольку речь идет об ультрарелятивистской частице. Потери на см^2/г означают, что рассматривается слой вещества, масса которого на 1 см^2 поверхности равна 1 г; поэтому переход от потерь на см$^{-1}$ к потерям на см^2/г осуществляется, если положить $N = 1/M$, где M — масса атома (в данном случае, т. е. для водорода, $M = 1{,}674\cdot 10^{-24}$ г).

В (16.23) N — концентрация атомов водорода, а эффективная энергия ионизации $\mathcal{J}$ положена равной 15 эВ; в этой формуле принят во внимание вклад всех электронов отдачи с энергией, достигающей $W_{\max} = {}^1/_2 E$, ибо в связи с неразличимостью электронов именно такова максимальная передаваемая энергия $W_{\max}$ при электрон-электронных соударениях*). Отметим, что в (16.21)—(16.23) учтены все процессы — ионизация (в частности, образование быстрых δ-электронов), возбуждение и черенковское излучение. Доля последнего даже для водорода сравнительно невелика (порядка 15%). Энергия $\mathcal{J}$ в (16.23), насколько нам удалось установить, точно еще не вычислена; поэтому под знаком логарифма в (16.23) имеется неопределенный множитель порядка единицы (связанная с этим обстоятельством неточность формулы (16.23) не больше нескольких процентов). Кроме того, в (16.23) пренебрежено эффектом плотности, т. е. опущен член f в (16.21). Это допустимо до тех пор, пока $v/c < 1/\sqrt{\varepsilon(0)}$, где v — скорость частицы и $\varepsilon(0)$ — диэлектриче-

*) Электрон с энергией, большей ${}^1/_2 E$, будем считать не δ-электроном, а рассеянным электроном. Отметим также, что формула (16.21) в случае электронов не вполне точна. В условиях (16.23) приходится заменить слагаемое -2 в скобках в (16.23) на ${}^1/_8 - \ln 2 = -0{,}57$. Практически это уточнение несущественно, в частности, в силу приближенного определения энергии $\mathcal{J}$ (см. ниже).

ская проницаемость среды на частоте $\omega = 0$. В атомарном водороде

$$\varepsilon(0) = 1 + 4\pi\alpha N, \quad \alpha = \frac{9}{2}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^3 \sim 10^{-24},$$

и эффектом плотности можно пренебречь при

$$\frac{E}{mc^2} < (4\pi\alpha N)^{-1/2} \sim \frac{3\cdot 10^{11}}{\sqrt{N}}.$$

Даже при $N \sim 10^2$ это значит, что формула (16.23) справедлива для электронов с энергией $E < 10^{16}$ эВ.

Для легких неводородных атомов ионизационные потери в первом приближении также определяются формулой (16.23), где под N нужно, понимать концентрацию всех атомарных электронов. Ясно, что в межзвездной среде (скажем, при содержании 10% атомов гелия) ионизационные потери лишь примерно на 10% больше, чем в чистом водороде (при одинаковой полной концентрации атомов). В полностью ионизированной плазме (N — концентрация электронов) ионизационные потери для ультрарелятивистских электронов равны

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left\{\ln\frac{m^2c^2E}{4\pi e^2\hbar^2N} - {}^3/_4\right\} =$$

$$= 7{,}62\cdot 10^{-9} N\left\{\ln\frac{E}{mc^2} - \ln N + 73{,}4\right\} \text{ эВ/с}. \qquad (16.24)$$

Эта формула получается из (16.22) при $W_{\max} = {}^1/_2E$; кроме того в согласии с расчетами [232] уточнено численное значение логарифмического множителя (замена -1 в (16.22) на $-{}^3/_4$ в (16.24); разумеется, такое уточнение не имеет особого значения). Формулы (16.23) и (16.24) обычно дают результаты, не различающиеся по порядку величины. Например, при $N = 0{,}1$ и $E = 5\cdot 10^8$ эВ потери (16.24) вдвое больше потерь (16.23). Потери (16.24) идут на образование δ-электронов (т. е. передачу энергии плазменным электронам) и на черенковское излучение плазменных волн *). Необходимость применения для плазмы формулы (16.22), учитывающей эффект плотности, вполне понятна уже в силу сказанного ранее: для разреженной плазмы $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ при всех частотах, а именно использование этого выражения для ε и приводит к (16.22).

Формула (16.23) относится к случаю ультрарелятивистских электронов. Если же условие $E \gg mc^2$ не выполнено и в част-

*) Плазму считаем изотропной, т. е. магнитное поле отсутствующим; в этих условиях, как мы знаем, поперечные черенковские волны в плазме излучаться не могут. Подчеркнем также, что под плазменными волнами здесь понимаются продольные волны, которые могут распространяться не только в плазме, но и в любой среде при условии $\varepsilon(\omega) = 0$. Особенностью плазмы в этом отношении является лишь слабое затухание достаточно длинных плазменных волн. В конденсированной среде значительную часть ионизационных потерь можно связать именно с генерацией плазменных волн.

ности для нерелятивистских электронов (но со скоростью $v \gg v_a$, где v_a — скорость атомарных электронов; в случае водорода это значит, что кинетическая энергия электрона $E_к = E - mc^2 \gg 15$ эВ), при расчетах с погрешностью, не меньшей нескольких процентов, можно пользоваться формулой (16.21) с заменой W_{max} на $^1/_2 E_к$.

Для частиц с полной энергией E и массой $M \gg m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г, т. е. для мезонов, протонов и ядер, формула (16.21) приводит к следующим результатам.

Пусть

$$E \ll \left(\frac{M}{m}\right) Mc^2. \tag{16.25}$$

Тогда максимальная передаваемая электрону энергия равна

$$W_{max} = 2mv^2 \left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2. \tag{16.26}$$

При выполнении условия (16.25) для потерь в атомарном водороде ($\mathcal{J} = 15$ эВ) формула (16.21) дает

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right)_i &= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \sqrt{\frac{2Mc^2}{E_к}} \left\{ \ln \frac{E_к}{Mc^2} + 11{,}8 \right\} \text{эВ/с}, \\ E_к &= E - Mc^2 \approx {}^1/_2 Mv^2 \ll Mc^2, \end{aligned}\right\} \tag{16.27}$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{ 4 \ln \frac{E}{Mc^2} + 20{,}2 \right\} \text{эВ/с}, \; E \gg Mc^2. \tag{16.28}$$

Для протонов условие (16.25) имеет вид $E \ll 2 \cdot 10^{12}$ эВ и, таким образом, формула (16.28) практически пригодна при $2 \cdot 10^9 < E < 10^{12}$ эВ.

Если

$$E \gg \left(\frac{M}{m}\right) Mc^2, \tag{16.29}$$

то

$$W_{max} = E. \tag{16.30}$$

Формула (16.21) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right)_i &= \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc} \left\{ \ln \frac{2mc^2}{\mathcal{J}^2} \frac{E^3}{(Mc^2)^2} - 2 \right\} = \\ &= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{ 3 \ln \frac{E}{Mc^2} + \ln \frac{M}{m} + 19{,}5 \right\} \text{эВ/с}, \end{aligned} \tag{16.31}$$

где последнее выражение относится к атомарному водороду. В (16.31) не учтен эффект плотности, что в атомарном водороде допустимо, пока $E/Mc^2 < 3 \cdot 10^{11}/\sqrt{N}$ (см. выше).

В полностью ионизированной плазме с электронной концентрацией N в нерелятивистском случае имеем

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right)_i &= \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv} \ln \frac{m^3 v^4}{\pi e^2 \hbar^2 N} = \\ &= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \sqrt{\frac{2Mc^2}{E_к}} \left\{ \ln \frac{E_к}{Mc^2} - \frac{1}{2} \ln N + 38{,}7 \right\} \text{эВ/с}. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Эта формула получается из (16.21) при $E_к = {}^1/_2 Mv^2 \ll$ $\ll Mc^2$, $W_{max} = 2mv^2$ (см. (16.26)) и $\mathcal{I} = \hbar\omega_p = \hbar\sqrt{4\pi e^2 N/m} =$ $= 3{,}7 \cdot 10^{-11}\sqrt{N}$ эВ. Такая замена $\mathcal{I}$ на энергию плазмона $\hbar\omega_p$ (или, на ином языке, замена частоты $\omega = \mathcal{I}/\hbar$ на плазменную частоту ω_p) вполне естественна и подкрепляется более последовательным расчетом (см. [44]).

В ультрарелятивистском случае $E \gg Mc^2$ для плазмы нужно использовать формулу (16.22) или отличающуюся на небольшой фактор формулу

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mc} \ln \frac{m^2c^2 W_{max}}{4\pi e^2 \hbar^2 N} =$$

$$= 7{,}62 \cdot 10^{-9} Z^2 N \left\{ \ln \frac{W_{max}}{mc^2} - \ln N + 74{,}1 \right\} \text{эВ/с}, \qquad (16.33)$$

где в качестве W_{max} нужно использовать значение (16.26) при условии (16.25) и значение (16.30) в случае (16.29). Численные значения приведены в эВ/с. Для релятивистских частиц с $v \approx c$ выражение для потерь в эВ/см находят делением на $c =$ $= 3 \cdot 10^{10}$ см/с; потери в водороде в эВ/(г·см$^{-2}$) получаются из потерь в эВ/см умножением на $6 \cdot 10^{23}/N = 1/(1{,}67 \cdot 10^{-24}\, N) =$ $= 1/M_p N$.

Остановимся теперь еще на вопросе об образовании δ-электронов. Очевидно, соответствующие потери полностью учтены в (16.21) и других формулах, в которых уже фигурирует максимальная передаваемая электрону энергия W_{max}. Потери, связанные с образованием δ-электронов с энергиями в пределах от W_{max} до некоторого интересующего нас значения W_{min} (причем $W_{min} \gg \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ — средняя энергия связи электрона, фигурирующая в (16.21)), получаются из (16.21) и равны

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv} \ln \frac{W_{max}}{W_{min}}, \qquad (16.34)$$

где eZ — заряд и v — скорость падающей частицы, N — концентрация электронов (не атомов!) в веществе (e и m — заряд и масса электрона). Значения W_{max} для разных случаев уже приводились выше (см. (16.26), (16.30) и пояснения к формуле (16.23)).

Вероятность того, что в слое вещества толщиной в 1 см частица с энергией E передаст электрону энергию $W \gg \mathcal{I}$, лежащую в интервале W, $W + dW$, равна

$$\left.\begin{aligned} P_\delta(E, W)\, dW &= \frac{2\pi e^4 Z^2 N}{mv^2} \frac{dW}{W^2} F(E, W), \\ F(E, W) &= \left(\frac{E}{E - W} - \frac{W}{E}\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (16.35)$$

где функция F выписана в применении к ультрарелятивистским электронам с $E \gg mc^2$ (при этом, конечно, $Z = 1$). Отнесенное к одному электрону среды дифференциальное эффективное сечение, отвечающее вероятности (16.35), равно

$$d\sigma_\delta = \frac{2\pi e^4 Z^2 F(E, W)}{mv^2 W^2}\, dW.$$

Прежде чем кратко остановиться также на других потерях энергии (помимо ионизационных), сделаем несколько замечаний, касающихся коллективных эффектов, возникающих при движении частиц в среде. Конкретно рассмотрим плазму, в которой с постоянной скоростью движется поток (пучок) быстрых заряженных частиц. Вопрос о процессах в такой системе (пучок в плазме) в известном отношении близок к задаче об ионизационных потерях.

Начнем, однако, с более общей проблемы. В достаточно разреженном газе процессы излучения фотонов, генерации различных других частиц (например, π-мезонов), ионизации и возбуждения атомов и т. д. можно рассматривать без учета влияния среды. Иными словами, если расстояние между частицами (скажем, атомами) среды достаточно велико, все процессы происходят так, как если бы существовали только сталкивающиеся частицы (налетающая частица, атом, «продукты» столкновения). Столь же ясно (и хорошо известно), что с увеличением плотности среды нужно, вообще говоря, принимать во внимание взаимное влияние составляющих ее частиц и в этом смысле можно говорить о коллективных эффектах. К такому коллективному эффекту приводит, например, учет влияния показателя преломления среды на синхротронное излучение (см. выше гл. 6). Черенковское излучение как поперечных, так и продольных (плазменных) волн тоже, конечно, есть коллективный эффект, причем в данном случае без среды (в вакууме) процесс вообще не идет. На коллективных эффектах такого рода мы, когда это было нужно, уже останавливались. Другая категория коллективных эффектов относится к «коллективу» падающих частиц. Конкретно потери энергии потоком частиц при прохождении ими среды лишь в простейшем случае равны сумме потерь, испытываемых отдельными частицами потока в отсутствие всех других частиц в этом потоке. Подобные условия далеко не всегда выполняются.

Не претендуя здесь на какую-то классификацию, выделим все же два класса коллективных эффектов, связанных с самими излучающими («падающими») частицами. Для первого класса существенна пространственная неоднородность в распределении излучающих частиц. Например, как ясно из формулы (16.21) и из самого существа дела, ионизационные потери и интенсивность черенковского излучения пропорциональны квадрату за-

ряда eZ рассматриваемой быстрой частицы *). Совершенно ясно вместе с тем, что потери одной частицы с зарядом eZ будут равны потерям Z частиц с зарядом e, если только эти последние летят вместе, образуя достаточно компактный сгусток с полным зарядом eZ. Сгусток можно, очевидно, считать достаточно малым в указанном смысле, если его размер l мал по сравнению с характерным размером p, который, образно говоря, ответствен за рассматриваемые потери. При близких соударениях, приводящих к образованию δ-электронов, прицельный параметр p мал и о коллективных эффектах говорить не приходится **). Напротив, черенковское излучение с длиной волны λ порождается в области с размерами порядка λ; в этом случае сгустки частиц вполне могут оказаться достаточно малыми и, следовательно, интенсивность излучения уже не будет просто пропорциональна количеству частиц в потоке.

Другая возможность проявления коллективных эффектов (второй их класс) связана с реабсорбцией излучения, неустойчивостью пучков и т. п. Для этого класса коллективных эффектов пространственная неоднородность в распределении частиц, вообще говоря, несущественна (по крайней мере при вычислении в линейном приближении коэффициента поглощения или усиления волн). Один процесс такого типа — реабсорбция синхротронного излучения, обсуждался в гл. 10. Здесь картина очень проста: одна частица излучает, а другие частицы того же коллектива могут поглотить это излучение, в силу чего коэффициент поглощения зависит от концентрации излучающих частиц. Неустойчивость пучка частиц в плазме, связанная с появлением в пучке продольных волн, представляет по сути дела такой же процесс — речь в данном случае идет об отрицательном черенковском поглощении (реабсорбции) плазменных волн.

Этот вопрос уже был затронут в гл. 7, но сейчас остановимся на нем несколько подробнее, поскольку задача важна и в методическом, и в практическом отношениях.

Рассмотрим нерелятивистский пучок частиц с массой M, зарядом e и концентрацией N_s, движущихся в «материнской» плазме с концентрацией N и температурой T. Функцию распределения частиц в потоке по скоростям обозначим через $f_s(\mathbf{v})$.

---

*) Выше уже подчеркивалось, что черенковские потери содержатся в полном выражении для ионизационных потерь и, следовательно, как и последние, пропорциональны Z^2. Все виды ионизационных потерь пропорциональны Z^2, поскольку поле частицы $\mathbf{E}$ пропорционально eZ; потери же на пути частицы равны работе $eZvE \propto e^2Z^2$, которую порождаемое частицей поле совершает над ней самой (именно такой метод расчета — вычисление работы $eZvE$ используется при определении ионизационных потерь в гл. 12 книги [44]).

**) Мы имеем в виду сгусток несвязанных между собой частиц. Если же частицы связаны, как, например, протоны в ядре, то и характер близких соударений обычно определяется зарядом сгустка eZ.

В качестве довольно типичного примера используем распределение

$$f_s(\mathbf{v}) = N_s \left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_s}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{M(\mathbf{v}-\mathbf{v}_s)^2}{2\varkappa T_s}\right\}. \tag{16.36}$$

Очевидно, мы имеем здесь дело с потоком, движущимся со средней скоростью $\mathbf{v}_s$; разброс скоростей около $\mathbf{v}_s$ имеет максвелловский вид с температурой T_s. Для электронов материнской плазмы, поскольку она считается равновесной, можно написать

$$f_0(\mathbf{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right). \tag{16.37}$$

Если поток отсутствует (или его влиянием можно пренебречь), то в рассматриваемой изотропной бесстолкновительной плазме (внешнее магнитное поле считаем отсутствующим) могут распространяться электромагнитные поперечные волны:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)], \quad \mathbf{kE} = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{kE}], \\ &n_\perp \equiv n_{1,2} = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \\ &\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \end{aligned}\right\} \tag{16.38}$$

и продольные волны

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)], \quad \mathbf{H} = 0, \\ &\mathbf{kE} = kE, \quad \omega^2 \approx \omega_p^2 + 3\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)k^2, \\ &n_\parallel \equiv n_3 = \frac{ck}{\omega} \approx \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2}{3\varkappa T/mc^2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.39}$$

Продольные волны распространяются без специфического бесстолкновительного затухания лишь при условии $\sqrt{\varkappa T/m}\,k \ll \omega_p$ (это значит, что $kr_D = k\sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N} \ll 1$ или $\lambda = 2\pi/k \gg r_D$, где $r_D = \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$ — дебаевский радиус). Здесь мы для удобства повторили сказанное в гл. 12.

В приближении независимых частиц (достаточно разреженный поток) каждая частица потока движется, рассеивается и излучает независимо от других частиц. При этом рассеяние и тормозное излучение на частицах материнской плазмы *),

*) Речь идет об электронах и ионах; концентрация последних N_i при $Z = 1$ равна электронной концентрации N (или при наличии потока такова, чтобы была обеспечена квазинейтральность системы).

вообще говоря, можно рассматривать как результат парных соударений; то же относится и к образованию δ-электронов и связанной с этим части ионизационных потерь на близкие соударения. Однако, как уже подчеркивалось, черенковское излучение есть по самой своей сути коллективный эффект. В случае (16.38) показатель преломления $n_\perp < 1$ и, следовательно, фазовая скорость поперечных волн $v_{\text{ф},\perp} = c/n_\perp > c$. Ясно, что условие черенковского излучения $\cos\theta = c/n(\omega)v$ (см. (6.56)) при $n < 1$ выполняться не может (v — скорость частицы и θ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$ — волновым вектором излучаемой волны). Напротив, для продольных волн (16.39) черенковское условие (6.56) вполне может соблюдаться и, таким образом, частица потока способна генерировать плазменные (продольные) волны. Полная мощность этого черенковского излучения

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{чр}} = \frac{2\pi e^4 N}{mv}\ln\left(\frac{2}{3}\frac{v^2}{\varkappa T/n}\right) = \frac{e^2\omega_p^2}{2v}\ln\left(\frac{2}{3}\frac{v^2}{\varkappa T/m}\right). \qquad (16.40)$$

По структуре формула (16.40) такая же, как и все формулы (см., например, (16.21) при $\beta^2 \ll 1$) для ионизационных потерь (выражение (16.40) есть часть этих потерь). Что же касается логарифмического множителя, который определен лишь приближенно (в этом смысле множитель $^2/_3$ под знаком логарифма имеет чисто условный характер, а сама формула (16.40) не отличается от приведенной ранее формулы (7.33)), то его можно определить только в результате более детального расчета (см., например, [83, 117, 118]; по существу все дело в учете черенковского условия (6.56) с $n = n_\parallel$ и условия $kr_D \lesssim 1$, необходимого для существования не очень сильно затухающих продольных волн).

В потоке частиц волны с частотой ω под данным углом θ излучают все частицы, для которых $v\cos\theta = c/n_\parallel(\omega)$. Таким образом, в излучение под углом θ дают вклад все частицы с фиксированным значением проекции $\mathbf{v}$ на $\mathbf{k}$ и любыми значениями $\mathbf{v}_\perp$ (т. е. составляющей, перпендикулярной $\mathbf{k}$). В этой связи нас будет интересовать не сама функция распределения $f_s(\mathbf{v})$, а величина

$$f_s(v_k) = \int f_s(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}_\perp = N_s\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_s}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{M(v_k - v_s\cos\theta)^2}{2\varkappa T_s}\right\}, \qquad (16.41)$$

где использовано распределение (16.36). Функция типа (16.41) была схематически представлена на рис. 7.2.

С повышением концентрации частиц в потоке N_s нужно учитывать реабсорбцию (или усиление) черенковских волн, т. е. их поглощение и индуцированное испускание другими частицами того же потока. Тот факт, что такие процессы (поглощение и

индуцированное испускание) возможны, сразу же очевиден, если пользоваться квантовым языком. На таком языке *) генерация плазменных волн (в частности, их черенковская генерация) есть излучение плазмонов с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/c)n_{\parallel}(\mathbf{k}/k)$ (некоторые оговорки на этот счет сделаны в гл. 13 и их нет оснований повторять). При излучении плазмона частица с энергией $E_2 = {}^1/_2 M v_2^2$ и импульсом $\mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_2$ переходит в состояние с энергией $E_1 = {}^1/_2 M v_1^2 = E_2 - \hbar\omega$ и импульсом $\mathbf{p}_1 = M\mathbf{v}_2 - \hbar\mathbf{k}$. Совершенно ясно, что возможен и обратный процесс, поскольку модули матричных элементов для прямого и обратного переходов равны между собой. При таком обратном процессе плазмон $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$ поглощается частицей $(E_1, \mathbf{p}_1)$, в результате чего энергия и импульс частицы становятся равными $E_2 = E_1 + \hbar\omega$ и $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}$. Вероятность индуцированного испускания равна вероятности поглощения и, таким образом, если состояние 2 является более «высоким» (что выше и предполагалось), то при наличии плазмона $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$ система (частица) совершает индуцированный переход $E_2 \to E_1$, $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1$ с испусканием еще одного плазмона $(\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$. «Истинное» (результирующее) поглощение определяется разностью чисел частиц N_1 и N_2 в состояниях 1 и 2. В случае черенковского излучения, очевидно, меняется лишь проекция скорости частицы $\mathbf{v}$ на $\mathbf{k}$, т. е. изменяется значение v_k, причем $Mv_{k,2} = Mv_{k,1} + (\hbar\omega/c)n_{\parallel}$. Далее,

$$1 - \frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{f_s(v_{k,2})}{f_s(v_{k,1})} = -\frac{1}{f_s}\frac{df_s}{dv_k}\frac{\hbar\omega}{Mc}n_{\parallel},$$

где функцию распределения f_s и ее производную нужно брать в точке $v_k = \omega/k \approx v_{k,1} \approx v_{k,2}$ (легко видеть, что в классическом случае $\hbar k \ll Mv_k$). Итак, коэффициент реабсорбции равен

$$\mu = -A\left(\frac{df_s(v_k)}{dv_k}\right)_{v_k=\omega/k}. \tag{16.42}$$

Поле монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z, изменяется по закону

$$E = E_0 \exp\left[i\omega\left(\frac{n}{c}z - t\right)\right]\exp\left(-\frac{\omega}{c}\varkappa z\right),$$

где $\varkappa$ — показатель поглощения. Коэффициент поглощения

*) Мы говорим здесь, как неоднократно делали ранее, о «языке», ибо имеем в виду классическую задачу, полное описание которой возможно и в классических терминах, но оказывается удобным или более наглядным с использованием квантовых представлений.

$\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa$ определяет изменение интенсивности $I \propto |E|^2 \propto$ $\propto \exp(-\mu z)$. Возможна, однако, и часто встречается другая постановка задачи, когда волновой вектор $\mathbf{k}$ считается вещественным, а частота ω — комплексной. Тогда

$$E = E_0 \exp\left[i\omega'\left(\frac{n}{c}z - t\right)\right]\exp(-\gamma t),$$

где $\omega = \omega' - i\gamma$ (здесь $\omega' = \operatorname{Re}\omega$).

При этом интенсивность $I \propto \exp(-2\gamma t)$. Для слабо поглощающей (или слабо усиливающей) среды, как можно строго показать, но сразу ясно уже из наглядных соображений, имеем

$$2\gamma = \mu v_{\text{гр}}, \tag{16.43}$$

где $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ — групповая скорость волн; в условиях (16.39)

$$v_{\text{гр}} = \frac{3\varkappa T}{m v_{\text{ф}}} \quad \text{и} \quad v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{3\varkappa T/m}{1 - \omega_p^2/\omega^2}}\,.$$

В результате расчета, который мы опускаем (см. [83, 106б, 165], а для максвелловской плазмы см. также [84, 164] и гл. 12), можно найти коэффициент A в выражении (16.42). В результате для γ получаем (см. также (16.43))

$$\gamma = -\frac{2\pi^2 e^2 \omega_p}{Mk^2}\left(\frac{df_s(v_k)}{dv_k}\right)_{v_k=\omega/k}. \tag{16.44}$$

где $M \equiv M_s$ — масса каждой частицы в пучке.

По смыслу в (15.44) $f_s(v_k)$ для электронного пучка есть полная функция распределения, учитывающая и наличие пучка и существование материнской плазмы. Если мы тем не менее обозначили функцию распределения через f_s (индекс s отвечает пучку), то только имея в виду приложение к реальным случаям, когда вблизи значения $v_k = \omega/k$ вкладом частиц материнской максвелловской плазмы можно пренебречь. В силу сказанного ясно, однако, что формулу (16.44) с $M = m$ можно применять и в случае чисто максвелловской плазмы, без пучка, причем она приводит к выражению для γ в условиях бесстолкновительного затухания (см. гл. 12). Как сказано, имеет место именно затухание ($\gamma > 0$), и это связано с тем, что для максвелловского распределения $df_s/dv_k < 0$ (см. (16.37) или (16.41) при $v_s = 0$). Из вышеизложенного особенно ясно видна природа бесстолкновительного затухания в изотропной плазме — речь идет об обратном эффекте Вавилова — Черенкова, т. е. о черенковском поглощении (такое поглощение плазменной волны осуществляется как раз для частиц с $v_k = v\cos\theta = c/n_{\parallel}(\omega)$; здесь повторено сказанное в гл. 7 и 12).

Если функция распределения такова, что в той или иной области $df_s/dv_k > 0$, то вместо затухания происходит нарастание амплитуды волн или, по другой терминологии, имеет место отрицательное поглощение или неустойчивость. Для любого «утопленного» в плазме пучка, как очевидно хотя бы из рис. 7.2, имеется область (область *I*), в которой $df_s/dv_k > 0$. Таким образом, волны с фазовой скоростью $v_\Phi = \omega/k$, лежащей в области значений v_k, отвечающих участку *I* на рис. 7.2, будут усиливаться. В результате амплитуда волн нарастает и ограничивается лишь в силу нелинейных эффектов. Усиление волн в данном случае имеет такую же природу, как и в квантовых усилителях или генераторах (мазерах и лазерах). Действительно, условие $df_s/dv_k > 0$ просто означает, что на верхних уровнях частиц больше, чем на нижних, в результате чего индуцированное испускание превалирует над поглощением.

Представляя в (16.44) функцию (16.41), получаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_s^2\omega_p\,(v_\Phi - v_s\cos\theta)}{k^2 v_{T_s}^3}\exp\left\{-\frac{(v_\Phi - v_s\cos\theta)^2}{2v_{T_s}^2}\right\}, \\ \omega_s^2 &= \frac{4\pi e^2 N_s}{M}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad v_\Phi = \frac{\omega}{k}, \quad v_{T_s}^2 = \frac{\varkappa T_s}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{16.45}$$

В области, где $v_\Phi < v_s\cos\theta$, волны нарастают ($\gamma < 0$). Очевидно, максимальное значение γ при данном k равно

$$|\gamma_{\max}| \sim \frac{\omega_s^2\omega_p}{k^2 v_{T_s}^2}. \tag{16.46}$$

Скорость v_Φ, фигурирующая выше, есть фазовая скорость волн в материнской плазме. Для того чтобы было возможно черенковское излучение, эта скорость не должна превосходить c. Поэтому в (16.46) $k_{\min} \approx \omega_p/c$ и, следовательно *),

$$|\gamma_{\max}| \lesssim \frac{\omega_s^2 c^2}{\omega_p v_{T_s}^2} \gtrsim \frac{\omega_s^2}{\omega_p}. \tag{16.47}$$

При классическом рассмотрении вопроса используется кинетическое уравнение для функции распределения f_s, причем в качестве исходного распределения в пучке выбирается, например, распределение (16.36). Определению подлежит, скажем, частота $\omega = \omega' - i\gamma$ для волны с вещественным вектором $\mathbf{k}$ (или комплексный вектор $\mathbf{k}$ при вещественной частоте ω). В результате получается, конечно, тот же результат (16.44) или конкретно (16.45). Уже такое тождество результатов свидетельствует

*) Если $v_{T_s} \ll v_s$, то можно считать, что условие черенковского излучения есть $v_\Phi < v_s$ и $k_{\min} \approx \omega_p/v_s$; отсюда $|\gamma_{\max}| \lesssim \omega_s^2 v_s^2/\omega_p v_{T_s}^2$.

о полной эквивалентности квантового и классического подхода к обсуждаемой задаче (в этой связи см., например, [110]), причем под квантовым подходом мы имеем в виду использование метода коэффициентов Эйнштейна для вероятностей переходов *). Область применимости этого метода ограничена, в частности, в связи с условием $|\gamma| \ll \omega \sim \omega_p$. Однако в области своей применимости метод коэффициентов Эйнштейна очень плодотворен, что уже было продемонстрировано в гл. 10.

В силу изложенного ясно, что при наличии пучка частиц в плазме (средняя скорость частиц в пучке $v_s \gg v_T = \sqrt{\varkappa T/m}$) этот пучок неустойчив — продольные (плазменные) волны в нем нарастают. Инкремент нарастания γ пропорционален концентрации частиц в пучке N_s (см. (16.45) и далее, учитывая, что $\omega_s^2 \propto N_s$). Уже отсюда следует, что в пучке с достаточно малой плотностью нарастание волн за счет отрицательного поглощения черенковских волн достаточно мало́ (мало́ за время, характеризующее процесс; мало́ на всей длине пучка и т. п.); с другой стороны, во вполне реальных условиях коллективный эффект (неустойчивость) в пучках может быть весьма существен. В результате потеря энергии в пучке и его расплывание могут происходить значительно быстрее (или на меньшем пути), чем для отдельных частиц. Решение задачи о потерях и рассеянии (изотропизации) пучка довольно сложно, поскольку здесь нельзя ограничиться линейным приближением и должна развиваться нелинейная теория (см. [106б, в, 159, 165] и указанную там литературу).

Почему, однако, мы остановились на неустойчивости пучков в плазме в главе, посвященной космическим лучам? На первый взгляд это кажется тем более странным, что выше подчеркивалась изотропность космических лучей, в силу чего совершенно нет условий для возникновения пучковой неустойчивости. Кроме того, вследствие крайней разреженности космической плазмы (электронная концентрация $N \lesssim 1$ см$^{-3}$ в межзвездном пространстве и $N \lesssim 10^{-5}$ см$^{-3}$ в межгалактическом пространстве) плазменные эффекты в астрофизике космических лучей могли бы оказаться вообще несущественными.

Последний аргумент, впрочем, сразу же должен быть признан несерьезным, поскольку абсолютные значения концентрации N и других величин роли играть не могут — их нужно сравнивать с соответствующими значениями, существенными для рассматриваемых процессов. Что же касается изотропности космических лучей, то одной из важнейших задач является уста-

*) Только в таком или аналогичном смысле и можно как-то противопоставлять квантовый и классический подходы. Если же иметь в виду принципиальную возможность решить любую классическую задачу на основе уравнений квантовой теории, то такая возможность очевидна, поскольку классическая механика и классическая электродинамика являются предельными случаями соответствующих квантовых построений.

новление ее причин, а также выявление условий, в которых изотропность отсутствует. Таким образом, анализ плазменных эффектов в астрофизике космических лучей действительно необходим. Более того, нет сомнений в том, что эти эффекты могут быть весьма существенными.

Рассмотрим, например, «вытекание» космических лучей из некоторой области с магнитным полем H_1, в которой космические лучи изотропны, в окружающее пространство с магнитным полем $H_2 \ll H_1$. Такая ситуация вполне реальна, скажем, при выходе космических лучей из оболочки сверхновой в межзвездное пространство или их вытекании из галактики (или ее ядра) в межгалактическое пространство.

При движении заряженной частицы в регулярном магнитном поле сохраняется адиабатический инвариант *)

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \frac{p^2 \sin^2 \chi}{H} = \text{const}, \tag{16.48}$$

где p — импульс частицы и χ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{H}$. В постоянном, т. е. не зависящем от времени магнитном поле, энергия частицы $E = \sqrt{M^2c^4 + c^2p^2}$ и ее импульс p не изменяются, в силу чего

$$\frac{\sin^2 \chi}{H} = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{16.49}$$

При переходе частицы в область с меньшим полем, как ясно из (16.49), угол χ уменьшается. Отсюда следует, что при $H_2 \ll H_1$ в области *2* со слабым полем распределение частиц по направлениям должно стать резко анизотропным, они практически будут двигаться вдоль силовых линий (т. е. для них угол $\chi \ll 1$). Тем самым, образуется пучок частиц.

В Галактике концентрация космических лучей $N_{к.л} \sim 10^{-10}$ част./см^3 (см. (16.9)); поэтому для оценки концентрации частиц в «пучке», входящем в межзвездное пространство из оболочек или выходящем из Галактики, также примем оценку $N_s \sim N_{к.л} \sim 10^{-10}$ част./см^3, откуда для протонов $\omega_s^2 = 4\pi e^2 N_s/M \sim 0{,}3$; эта оценка справедлива вплоть до энергий $E \sim Mc^2 \sim 10^9$ эВ, т. е. для большей части космических лучей

*) Правильнее сказать, что левая часть в (16.48) является адиабатическим инвариантом при движении частицы в магнитном поле. Адиабатический инвариант остается постоянным при медленном изменении параметров задачи, в данном случае при медленном изменении поля H. Это значит, что поле должно лишь незначительно изменяться на расстояниях порядка радиуса кривизны r_H и за время порядка $1/\omega_H^*$, $\omega_H^* = (eZH/Mc)\,(Mc^2/E)$. В космических условиях такие требования во многих случаях хорошо соблюдаются. Нужно, однако, иметь в виду, что здесь считается отсутствующим не только электрическое поле (кроме поля, связанного с изменением H во времени), но и пренебрегается потерями. Последние могут, конечно, приводить к непостоянству адиабатического инварианта. Например, магнитотормозные потери, особенно существенные для электронов, ведут при $H = \text{const}$ к уменьшению угла χ.

(в релятивистском случае $\omega_s^2 = (4\pi e^2 N_s/M)(Mc^2/E)$). Вместе с тем для материнской плазмы в Галактике $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N} \lesssim 5 \cdot 10^4 \text{с}^{-1}$ ($N \lesssim 1$ см$^{-3}$) и в Метагалактике $\omega_p \lesssim 10^2$ с$^{-1}$ ($N \lesssim 10^{-5}$ см$^{-3}$). Отсюда для инкремента нарастания плазменных волн вследствие пучковой неустойчивости (см. (16.47) с $v_{T_s} \sim c$) получим

$$\left.\begin{aligned} |\gamma_{\max}| &\lesssim \frac{\omega_s^2}{\omega_p} \sim 10^{-5}\text{с}^{-1} \text{ (Галактика),} \\ |\gamma_{\max}| &\lesssim 10^{-3}\text{с}^{-1} \text{ (Метагалактика).} \end{aligned}\right\} \tag{16.50}$$

Для самых коротких волн, могущих играть роль в задаче,

$$\gamma \sim \gamma_{\min} \sim (v_T/c)^2 \gamma_{\max} \sim (\varkappa T/mc^2)\gamma_{\max} \sim 10^{-6}\gamma_{\max}$$

(при $T \sim 10^4$ К) и $\gamma_{\min} \sim 10^{-4}\ \gamma_{\max}$ (при $T \sim 10^6$ К, что, вероятно, отвечает межгалактическому газу). Но даже при значении $|\gamma| \sim 10^{-10}$ с$^{-1}$ происходит существенное нарастание плазменных волн за время *) $T \sim 1/|\gamma| \sim 10^{10}$ с ~ 300 лет, т. е. за ничтожное время по сравнению с характерным временем эволюции Галактики $T_\Gamma \sim 10^9 - 10^{10}$ лет и временем жизни космических лучей в Галактике $T_{\text{к. л}} \sim 10^7 - 10^8$ лет. Мы не будем умножать число подобных примеров и оценок, так как их единственная цель здесь состоит в демонстрации того, что в астрофизике космических лучей плазменные эффекты, вообще говоря, существенны [106б, в, 159, 226, 233]. Дело просто в том, что частоты космической плазмы ω_p и частоты ω_s в возможных пучках космических лучей малы лишь по «лабораторным» масштабам; то же относится к инкрементам различных неустойчивостей, которые нужно, очевидно, сравнивать с величинами $1/T$, где T — характерное время в задаче (время расплывания оболочки сверхновой, возраст космических лучей и т. п.).

Инкремент γ различен для разных неустойчивостей и, например, при возбуждении плазменных волн или магнитогидродинамических волн пучком частиц. Кроме того γ зависит от параметров материнской плазмы и от характеристики самого пучка, в частности от степени анизотропии частиц в пучке (для пучка с распределением (16.36) речь идет об отношении $\varkappa T_s/Mv_s^2$). Так, например, для потока космических лучей с малой анизотропией $\delta \ll 1$ практически играет роль лишь возбуждение магнитогидродинамических волн [233б, в]. Таким образом, инкремент $|\gamma|$ является наибольшим, а тем самым, вообще говоря, и наиболее существенным в различных условиях для разных типов неустойчивостей, разных типов волн и т. п. Сделанная оговорка, «вообще говоря», связана с двумя моментами. Во-первых, ин-

*) Время и температура обозначены здесь одной и той же буквой T, но это не должно приводить к недоразумениям.

кремент γ характеризует нарастание, скажем, плазменных волн только в начальной, линейной, стадии. Характер же установившегося состояния определяется нелинейными процессами. Поэтому неустойчивость с бóльшим инкрементом может фактически приводить на нелинейной стадии к менее существенным возмущениям, чем некоторые медленнее развивающиеся неустойчивости. Во-вторых, нас обычно интересует не неустойчивость сама по себе и не интенсивность возникающих волн, а то или иное действие этих волн (возмущений). Если речь идет, например, об излучении в результате неустойчивостей электромагнитных (поперечных) волн, то учет взаимной трансформации волн разных типов не менее важен, чем определение интенсивности плазменных волн. В астрофизике космических лучей особенно интересен обычно вопрос об обратном действии генерируемых волн и других возмущений на сам пучок и на магнитное поле, в котором он движется. В результате развития неустойчивостей, приводящих к появлению разных волн и других возмущений (скажем, апериодических искажений магнитного поля), пучок, вообще говоря, размывается и изотропизуется, а магнитное поле из регулярного превращается во все более хаотическое, турбулентное. Такова общая и достаточно очевидная тенденция, но ее сколько-нибудь детальный анализ требует больших усилий и еще не завершен. Особенно это относится к космическим условиям, где значительная доля неопределенности связана с недостаточным знанием параметров задачи (характеристики пучков и магнитного поля, не говоря уже о параметрах межзвездной плазмы). Однако уже проведенные оценки для пучковой неустойчивости позволяют сделать некоторые выводы, подкрепляемые учетом вклада магнитогидродинамических волн, анализом роли нелинейных процессов и т. д. (см. [220, 233] и указанную там литературу).

Именно, появление плазменных неустойчивостей приводит в космосе к эффективной генерации различных волн и возмущений, которые в свою очередь рассеивают космические лучи. Вследствие этого резко анизотропное распределение космических лучей довольно быстро релаксирует и в Галактике или в межгалактическом пространстве космические лучи могут обладать лишь небольшой степенью анизотропии $\delta \ll 1$. Вместе с тем рассеяние космических лучей на неоднородностях и волнах в сочетании с уже упомянутым возмущением магнитного поля, приводит к известной турбулизации магнитного поля в Галактике и перемешиванию космических лучей. К сожалению, количественная сторона проблемы еще недостаточно ясна. В частности в разных энергетических диапазонах не ясен удельный вес рассеяния и изотропизации космических лучей на волнах, созданных самими этими лучами, на волнах другого происхождения и на различных статических или, точнее, квазистатических неоднородностях магнитного поля. Плазменные эффекты, пони-

маемые в широком смысле, играют определяющую роль и при рассмотрении механизмов ускорения космических лучей. Эта большая и важная проблема давно привлекает к себе пристальное внимание (см. [59, 159, 218] и указанную там литературу), а в последнее время особенно широко обсуждается с учетом механизма ускорения частиц в ударных волнах [220].

Мы не можем развивать здесь эту тему, но считали полезным, как и во всей главе, хотя бы в общих словах осветить круг проблем, стоящих перед астрофизикой космических лучей — в данном случае имеется в виду учет плазменных эффектов. Тем самым должен стать и более понятным тот подход — использование диффузионного приближения и уравнений переноса — который в настоящее время доминирует при попытках количественного рассмотрения тех или иных моделей происхождения космических лучей.

Будем считать космические лучи локально изотропными — это значит, что анизотропия может появиться лишь при учете пространственной неоднородности концентрации частиц $N_i(\mathbf{r}, t, E)$, где i — сорт частиц (количество частиц в элементе $d\mathbf{r}\, dE$ в момент t равно $N_i\, d\mathbf{r}\, dE$). Общее уравнение переноса для N_i в обсуждаемом приближении имеет вид (подробнее см. [59]; суммирование по дважды встречающимся индексам i в (16.51), конечно, не проводится)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) + \frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i) = Q_i - P_i N_i + \mathscr{P}_i. \qquad (16.51)$$

Ниже будут, естественно, охарактеризованы все члены уравнения (16.51), но начнем с первых двух — сохранение только этих членов ведет к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) = 0, \qquad (16.52)$$

где $D_i(\mathbf{r}, E)$ — коэффициент диффузии.

Возможность использования для описания движения космических лучей в магнитных полях диффузионного приближения (16.51), (16.52) ни в какой мере не очевидна. Для справедливости такого приближения мало того, чтобы поле имело сильно выраженную нерегулярную, хаотическую компоненту, поскольку и в таком случае сильна тенденция к перемещению частиц лишь вдоль силовых линий магнитного поля, пусть и довольно запутанных. Однако если сами эти силовые линии достаточно быстро расходятся друг от друга, что и имеет, вообще говоря, место в случае большой случайной (нерегулярной) составляющей магнитного поля по сравнению с его регулярной составляющей, то диффузионное приближение в достаточно больших областях уже применимо [234а]. Вместе с тем для анализа распространения космических лучей в Галактике интерес обычно представляют как раз большие объемы. Кроме того, в Галактике

нужно учитывать еще то обстоятельство, что в результате дифференциального вращения Галактики и движения облаков газа и спиральных ветвей магнитные силовые линии все время «перемешиваются». Наконец, нас обычно интересует картина, усредненная не только по достаточно большим областям пространства (скажем, областям в десятки и сотни парсек), но и за довольно длительное время. Так, для оценок средних градиентов концентрации космических лучей и их времени жизни в Галактике $T_{к.л}$ достаточно знать концентрацию N_i, усредненную за время $t \ll T_{к.л} \sim 10^7 - 10^8$ лет, т. е. время усреднения вполне может составлять 10^5 лет.

С учетом всех этих обстоятельств диффузионное приближение уже кажется приемлемым, особенно когда коэффициент D_i выбирается в качестве свободного параметра. Тем самым, правда, отнюдь не снимается вопрос о возможности вычислить D_i из более детального рассмотрения (с учетом плазменных неустойчивостей, блуждания силовых линий и т. д. [234]) и, главное, о проверке самого предположения о справедливости диффузионного механизма путем сравнения с наблюдениями результатов вычислений в диффузионном приближении (на основе уравнений типа (16.51)) анизотропии, химического состава и других величин, характеризующих все космические лучи или различные их компоненты.

В диффузионной картине результирующий поток космических лучей равен

$$F_{D,\,i} = 2\pi \int_0^{\pi} J(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta = D_i |\nabla N_i| = -D_i \frac{dN_i}{dr}, \qquad (16.53а)$$

причем последнее выражение написано в предположении о соответствующей симметрии задачи; кроме того, полярная ось выбрана в направлении потока $\mathbf{F}_{D,\,i}$. Полагая для всех космических лучей $J(\theta) = J_0 + J_1 \cos\theta$, без труда получаем для степени анизотропии выражение

$$\delta = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} = \frac{J_1}{J_0} = \frac{3F_D}{4\pi J_0} = \frac{3D}{c} \frac{1}{N_{к.л}} \left| \frac{dN_{к.л}}{dr} \right|, \qquad (16.53б)$$

где использована также связь $J \approx J_0 = (4\pi/v)^{-1} N_{к.л} = (4\pi/c)^{-1} N_{к.л}$ (рассматриваются ультрарелятивистские частицы); конечно, аналогичное соотношение можно написать для частиц любого сорта. В квазисферической картине

$$\left| \frac{dN_{к.л}}{dr} \right| \sim \frac{N_{к.л}}{R},$$

где R — характерное расстояние; в случае Галактики положим $R \sim 10^{22}$ см (расстояние от Солнца до галактического центра $R = 3 \cdot 10^{22}$ см) и $\delta \lesssim 10^{-4}$ (см. выше). Отсюда $D \sim {}^1/_3 \delta c R \lesssim \lesssim 10^{28}$ см^2/с.

К сожалению, данные о межзвездной анизотропии основной части космических лучей с энергией $E < 10^{12}$ эВ еще надежно неизвестны. Еще важнее то обстоятельство, что анизотропия может, по-видимому, отражать лишь «местные» условия в окрестности Солнечной системы, а не характеризовать средний градиент концентрации космических лучей в Галактике.

Другие оценки коэффициента диффузии основаны на расчетах химического состава космических лучей (см. ниже). Они дают [219а, 227]

$$D_{\text{диск}} \sim 3 \cdot 10^{27} \text{ см}^2/\text{с}, \quad D_{\text{гало}} \sim 10^{29} \text{ см}^2/\text{с}, \tag{16.54}$$

где значения $D_{\text{диск}}$ и $D_{\text{гало}}$ отвечают соответственно дисковой модели и модели с гало.

Коэффициент диффузии в газе $D = {}^1/_3 vl$, где l — длина свободного пробега и v — скорость частиц. Применяя такое же соотношение и считая, что скорость движения космических лучей вдоль поля $v \sim 10^{10}$ см/с, из (16.54) можно оценить эффективные длины свободного пробега: $l_{\text{диск}} \sim 10^{18}$ см и $l_{\text{гало}} \sim 3 \cdot 10^{19}$ см. В диффузионной картине средний квадрат расстояния $\overline{z^2}$, проходимого частицей в направлении z за время T, равен $\overline{z^2} = 2DT$. По этой формуле можно оценить время жизни космических лучей в Галактике, подставляя в качестве $\overline{z^2}$ квадрат характерного размера системы L. В дисковой модели обычно полагают $L \sim 3 \cdot 10^{20}$ см (полутолщина газового диска), а в модели с гало $L \sim R \sim 10^{22}$ см (радиус или, лучше, полутолщина гало). Тогда, используя (16.54), находим

$$T_{\text{к. л. диск}} \sim 5 \cdot 10^5 \text{ лет}, \quad T_{\text{к. л. гало}} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ лет}. \tag{16.55}$$

Грубость приведенных оценок очевидна, но, даже учитывая это обстоятельство, еще не ясно, почему в качестве размеров L в дисковой модели взята полутолщина газового диска, а не полутолщина радиодиска $h_{\text{р}} \sim 10^{21}$ см. Дело здесь в том, что межзвездный газ концентрируется, как видно уже из названия, именно в газовом диске. Поэтому при оценке времени пребывания космических лучей в газовой среде (для газового диска $N \sim 1$ см$^{-3}$), что существенно при вычислении толщи газа, проходимой космическими лучами, нужно поступать, как указано. Если же речь идет, скажем, о времени пребывания космических лучей в радиодиске ($h_{\text{р}} \sim 2 \cdot 10^{21}$ см), то при $D \sim 3 \cdot 10^{27}$ время $T_{\text{к. л, радиодиск}} \sim 2 \cdot 10^7$ лет. Мы уже указывали, однако, что реальности отвечает модель с гало и, таким образом, космические лучи покидают Галактику за время $T_{\text{к. л. гало}} \sim 2 \cdot 10^8$ лет. Конечно, это значение носит только ориентировочный характер, тем более, что коэффициент диффузии зависит от координат. По всей вероятности вблизи галактической плоскости D меньше, а в гало — больше и в этом отношении оценки типа (16.54) имеют известный смысл и в моделях с гало. Итак, коэффициент

диффузии D_i в (16.51), (16.52) может зависеть от координат $\mathbf{r}$, а также от энергии частицы E (система считается стационарной, в силу чего коэффициенты в уравнении переноса, в частности коэффициент D_i, не зависят от времени; диффузия и другие процессы в нестационарных условиях требуют особого рассмотрения). Однако практически приходится решать задачи либо с постоянным в пространстве коэффициентом D_i, либо для нескольких областей, в каждой из которых коэффициент D_i постоянен (на границе между этими областями должна быть непрерывна нормальная к границе компонента потока $-D_i\nabla N_i$, а также должна оставаться непрерывной концентрация N_i). Что касается зависимости D_i от энергии частиц E, то приближенная неизменность химического состава космических лучей свидетельствует о примерном постоянстве D_i в области энергий $\epsilon \lesssim 10^{12}$ эВ/нукл., а возможно и до энергии $E \sim E_c \sim \sim 1 - 3\cdot 10^{15}$ эВ. При $E \sim E_c$ происходит изменение показателя γ в спектре космических лучей (см. (16.11), (16.12)); естественно считать, что это связано с появлением заметной зависимости D_i от E и конкретно с возрастанием коэффициента диффузии с ростом E при $E > E_c$.

Поскольку при сравнительно небольших энергиях до 10^{12} эВ химический состав все же несколько изменяется [220, 225], то в следующем приближении нужно учитывать слабую зависимость D_i от энергии и при $E < 10^{12}$ эВ. Оценки приводят при этом к зависимости $D_i \propto E^{-0,3 \pm 0,2}$. Важно подчеркнуть, что учет зависимости коэффициента диффузии от координат и от энергии (а в принципе и от направления) еще вполне возможен в рамках диффузионного приближения.

В уравнении переноса (16.51) среда (скажем, межзвездная среда) считается неподвижной. Между тем космические лучи в основном «приклеены» к намагниченной среде, в которой они находятся, а эта среда в космических условиях, вообще говоря, не неподвижна. Например, происходит движение межзвездной среды в связи с распространением в ней ударных волн, в силу дифференциального вращения Галактики, при расширении оболочек сверхновых звезд и т. д. При учете движения среды в левую часть уравнения (16.51) следует добавить член $\operatorname{div}(N_i\mathbf{u})$, где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — скорость среды. Смысл этого члена очевиден, поскольку, например, в гидродинамике (при отсутствии диффузии и т. п.) уравнение непрерывности имеет вид $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$, где $\rho = MN$ — плотность среды. Нужно заметить, что при движении среды происходит также изменение энергии частицы E, в силу чего при $\operatorname{div}\mathbf{u} \neq 0$ в уравнение типа (16.51), где N_i зависит также от E, нужно ввести еще и соответствующий член [220, 235].

В последние годы уравнение типа (16.51) в применении к космическим лучам в Галактике довольно часто рассматривается как раз с учетом, как говорят, конвекции. Под последней

понимают при этом вытекание газа (и вместе с ним космических лучей) из области газового диска в гало. Поскольку газ считается покидающим Галактику и во всяком случае его возвращение (падение) в газовый диск не рассматривается, речь собственно идет не о конвекции в обычном понимании, а о галактическом ветре. Скорость ветра V считается не превосходящей $(1-5)\cdot 10^6$ см/с [220б; 235]. В таких условиях характеризующий роль конвекции (по сравнению с диффузией) параметр $Vh_{\text{гало}}/D$ для гало в целом меньше единицы (при $D \sim 10^{29}$ см^2/с и размерах гало $h_{\text{гало}} \sim 10^{22}$ см). Последнее свидетельствует о том, что роль конвекции в общем невелика. Главное же, наличие галактического ветра для Галактики отнюдь не доказано и даже кажется сомнительным. Но это уже иной вопрос, возможную же необходимость в какой-то мере учитывать в космических условиях как наличие ветра, так и настоящей конвекции (перемешивания) нужно иметь в виду.

Остановимся теперь на других (помимо двух первых) членах в уравнениях переноса (16.51), которые сами по себе имеют смысл законов сохранения числа частиц в пространстве координат и энергий. Уже это замечание позволяет понять, что величина $b_i N_i$ представляет собой поток частиц сорта i в «энергетическом пространстве», где b_i — скорость в пространстве энергий, т. е. изменение энергии частицы в единицу времени

$$\frac{dE}{dt} = b_i(E). \tag{16.56}$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i)$ действительно представляет собой дивергенцию потока. Нужно при этом иметь в виду, что рассматриваемое изменение энергии частицы должно быть плавным, непрерывным (по крайней мере в пределах точности используемого приближения). Если речь идет о потерях энергии, то, разумеется, $b_i < 0$; примером таких практически непрерывных потерь могут служить рассмотренные выше ионизационные потери (очевидно, $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dE}{dt}$) или обсуждавшиеся в гл. 4 магнитормозные потери. При ускорении частиц $b_i > 0$. Необходимо подчеркнуть также, что как в случае потерь, так и при ускорении частиц, помимо регулярного среднего изменения энергии за некоторый интервал времени, могут иметь место (и часто существенны) флуктуационные изменения энергии. В результате таких флуктуаций распределение частиц по энергиям изменяется, даже если средняя энергия частиц остается постоянной *). При наличии таких флуктуаций энергии в левую

*) Примером может служить ускорение частиц в электрическом поле с некоторой определенной по модулю разностью потенциалов V, но в условиях, когда знак V хаотически изменяется (т. е. частица движется то по полю, то против него, что может происходить при ее попадании в «конденсатор» с разных сторон). Тогда средняя энергия всех частиц остается не-

часть уравнения (16.51) нужно при некоторых условиях добавить член

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}(d_i N_i), \quad \text{где} \quad d_i(E) = \frac{d}{dt}\overline{(\Delta E)^2},$$

$\overline{(\Delta E)^2}$ есть средний квадрат изменения энергии в результате флуктуаций (подробнее см. [59]).

Член $Q_i(\mathbf{r}, t, E)$ в (16.51) есть мощность «внешних» источников частиц — их количество, поступающее в систему в единицу времени в окрестности $d\mathbf{r}\, dE$ «точки» $\mathbf{r}$, E, равно $Q_i\, d\mathbf{r}\, dE$. Член $-P_i N_i$ в (16.51) учитывает «катастрофические» процессы ухода частиц сорта i из рассматриваемого интервала $d\mathbf{r}\, dE$. Из этого интервала и его окрестностей частица как бы исчезает. Примером может служить трансформация ядер, когда ядро сорта i вообще исчезает, превращаясь в ядра (и в принципе также в другие частицы) сортов k, l, m. Второй пример — тормозные (радиационные) потери при соударениях электрона с другими частицами с испусканием достаточно жесткого фотона.

Если σ_i — сечение для соударения частиц сорта i, v_i — скорость рассматриваемых частиц, $N_{\text{газ}} \equiv N$ — концентрация частиц, скажем, ядер в межзвездном газе, с которыми происходят столкновения, то

$$P_i = \sigma_i v_i N = \frac{v_i}{l_i} = \frac{1}{T_i}. \tag{16.57}$$

Очевидно, P_i имеет смысл числа столкновений (см. гл. 12), $l_i = 1/\sigma_i N$ — длина свободного пробега и T_i — среднее «время жизни», или время свободного пробега.

Последний член $\mathscr{P}_i$ в уравнении (16.51) учитывает поступление частиц (также в результате «катастрофических» соударений) в рассматриваемый интервал $d\mathbf{r}\, dE$. Можно, например, записать

$$\mathscr{P}_i = \sum_k \int P_i^k(E', E)\, N_k(\mathbf{r}, t, E')\, dE', \tag{16.58}$$

где P_i^k — вероятность процесса, переводящего частицу сорта k в частицу сорта i (учитывается и случай $k = i$) из области с энергией E' в область с энергией E.

Уравнения переноса (16.51) достаточно сложны, что делает естественным обсуждение различных частных случаев. Примером может служить переход к уравнению диффузии (16.52), в котором опущены все другие члены. Хотя и не столь значительное, но существенное упрощение можно обычно ввести и при

изменной, поскольку $\bar{V} = 0$, но некоторым из частиц может так «повезти», что они наберут большую энергию в результате попадания преимущественно в области с полем, направленным параллельно импульсу частиц. Другими словами, речь идет о «диффузии по энергии», так что $\overline{(\Delta E)^2} \neq 0$, поскольку $\bar{V}^2 \neq 0$.

анализе химического состава ядер. При ядерных превращениях в межзвездной среде (если пренебречь неупругими соударениями с рождением мезонов и т. п.) сохраняется энергия на нуклон $\epsilon = E/A$. Поэтому целесообразно перейти от переменной E к переменной ϵ, в которой

$$P_i^k(E', E) = P_i^k \delta(\epsilon - \epsilon') \quad \text{и} \quad \mathscr{P}_i = \sum_{k<i} P_i^k N_k(\mathbf{r}, t, \epsilon)$$

(см. (16.58)). Здесь индекс $k < i$ указывает на то, что ядра типа i могут появиться только за счет развала более тяжелых ядер, для которых индекс k условно считается меньшим i. Кроме того, для релятивистских ядер потери энергии относительно малы (речь идет в основном об ионизационных потерях) и ими можно пренебречь. В результате приходим к уравнениям, широко используемым при анализе химического состава космических лучей:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i) = Q_i(\mathbf{r}, t) - P_i N_i + \sum_{k<i} P_i^k N_k, \qquad (16.59)$$

где в Q_i опущена переменная ϵ и так же можно поступать в отношении $N_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$; разумеется, если учитывать непрерывные потери, добавив слева к (16.59) член $\frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i)$, то нужно полагать, вообще говоря, что $Q_i = Q_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$ и $N_i = N_i(\mathbf{r}, t, \epsilon)$.

Длину свободного пробега l_i (см. (16.57)) бывает удобно выражать в г/см^2, причем $l_i = \frac{1}{\sigma_i N}$ см $= \frac{M}{\sigma_i}$ г/см^2, где $M = \rho/N$ — средняя масса ядер в межзвездном газе с плотностью ρ и концентрацией ядер (или атомов) N. В межзвездном газе обычно считается, что по числу ядер водород составляет 90% и гелий 10%, а другими ядрами можно пренебречь. Значения σ_i и l_i при движении ядер сорта (группы) i в водороде и межзвездном газе упомянутого состава приведены в табл. 16.2 (см. также табл. 16.1).

Таблица 16.2

Группа ядер	Среднее массовое число $\overline{A}$	Сечение σ, 10^{-26} см^2		Длина пробега l_i, г/см^2	
		водород	межзвездный газ	водород	межзвездный газ
p	1	2,3	3	74	72
α	4	9,3	11	18	20
L	10	23	25	7,3	8,7
M	14	29	31	5,8	6,9
H	31	48	52	3,5	4,2
Fe	56	73	78	2,3	2,8

Нужно иметь в виду, что длина пробега l_i характеризует выбывание ядра сорта i из потока таких частиц вне зависимости от того, в какое ядро оно переходит. При разбиении ядер на группы нужно учитывать превращения ядер, оставляющие их в пределах группы. Соответствующая эффективная длина пробега $\lambda_i = l_i/(1 - P_i^i)$, где P_i^i — вероятность образования ядра группы i из других ядер той же группы. В результате, например, для ядер M-группы в межзвездном газе $\lambda_i = 7{,}8$ г/см^2 при $l_i = 6{,}9$ г/см^2. Впрочем, этим величинам не следует придавать особый вес, поскольку данные табл. 16.2 имеют лишь ориентировочное значение.

При соударении с ядрами межзвездного газа (с сечением σ_i) релятивистские протоны теряют в среднем около $^1/_3$ своей энергии; поэтому энергия протонов уменьшается в $e = 2{,}72$ раза на пути

$$\lambda_E = 1/(\sigma_E N) \approx 180 \text{ г/см}^2 \approx 10^{26}/N \text{ см} \quad (\text{сечение } \sigma_E \sim 10^{-26} \text{ см}^2).$$

В грубом приближении можно сказать, что энергия релятивистских протонов изменяется по закону (N — концентрация ядер в межзвездном газе)

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{nucl}} = \frac{cE}{\lambda_E} = \sigma_E c N E \approx 3 \cdot 10^{-16} NE. \qquad (16.60)$$

Сравним эти потери в водороде с ионизационными потерями протонов в том же водороде (см. (16.28) с $Z = 1$). Очевидно,

$$\eta_{\text{nucl},\, i} = \frac{(dE/dt)_{\text{nucl}}}{(dE/dt)_i} \approx 40 \frac{E/Mc^2}{4 \ln (E/Mc^2) + 20{,}2}. \qquad (16.61)$$

Таким образом, ядерные потери существенно выше ионизационных уже при $E \sim 10\, Mc^2 \sim 10^{10}$ эВ. Поэтому для основной части космических лучей (но не в области малых энергий $\epsilon_к \lesssim M_p c^2 \sim 10^9$ эВ) ионизационными потерями можно пренебречь, ядерные же потери в (16.59) учитываются членом $-P_i N_i$ (эти потери правильнее относить к числу «катастрофических», и формулой типа (16.60) можно пользоваться лишь при оценке средних потерь за длительное время).

Методы решения системы (16.59) обсуждаются в гл. 5 книги [59] (см. также [219а, 227]) и останавливаться на них мы не будем. Заметим лишь, что при решении задачи обычно вводится ряд дополнительных упрощений: задачу считают стационарной (отбрасывают производную $\partial N_i/\partial t$), коэффициент диффузии D_i полагают постоянным или рассматривают несколько областей в пространстве и областей энергии со «сшивкой» решений на границах, мощность источников Q_i записывают в виде $Q_i(\mathbf{r}, t, \epsilon) =$

$= q_i\chi(\mathbf{r}, t, \epsilon)$ и т. д. Далее нужно конкретизировать модель — задать пространственное распределение мощности источников Q_i, область «захвата» космических лучей (диск, гало) и т. д.

Предельным случаем на пути все большего упрощения задачи и модели можно считать однородную модель, часто используемую для определения химического состава космических лучей. В такой модели считается, что диффузия происходит достаточно быстро, и поэтому концентрация космических лучей во всей системе (Галактике) постоянна. Но при этом нужно, конечно, задать некоторое время жизни космических лучей в системе, определяемое скоростью их выхода из нее. Другими словами, члены $\partial N_i/\partial t - \operatorname{div}(D_i \nabla N_i)$ в (16.59) заменяют на $N_i/T_{\text{к. л. }i}$ (проще всего к такой замене прийти, отбрасывая диффузионный член и полагая $\partial N_i/\partial t = N_i/T_{\text{к. л, }i}$). Тогда систему (15.59) можно записать так (однородная модель, именуемая также leaky box моделью):

$$\frac{N_i}{x} = q_i - \sigma_i N_i - \sum_{k<i} \sigma_{ik} N_k, \tag{16.62}$$

где $x = c\rho T_{\text{к. л}}$ — толща межзвездного газа, проходимого космическими лучами (частицы считаются релятивистскими, так что их скорость $v = c$; для простоты полагается, что время $T_{\text{к. л, }i} = T_{\text{к. л}}$, т. е. не зависит от сорта ядра i), а σ_i и σ_{ik} — соответствующие сечения (см. (16.57)) и определение величин $P_i^k = \sigma_{ik} v N$; поскольку мы, как принято, определяем толщу x_i в г/см^2 и поэтому ввели плотность $\rho = MN$ г/см^3, сечения в (16.62) суть обычные сечения, деленные на массу «среднего ядра» в газе M).

Поскольку q_i в (16.62) характеризует мощность источников космических лучей, ясно, что $q_i \geqslant 0$; кроме того для мало распространенных ядер (в частности, ядер группы L, т. е. для Li, Be и B) можно считать, что $q_i = 0$. Система (16.62) является алгебраической и решается достаточно просто; вся трудность связана с недостатком сведений о сечениях σ_i и σ_{ik} и в еще большей мере с недостатком точных данных о химическом (и тем более изотопном) составе космических лучей у Земли. В настоящее время однородная модель (16.62) неплохо описывает химический состав космических лучей с энергией $\epsilon_{\text{к}} \gtrsim 1-2$ ГэВ/нукл. при $x_i = x \approx 5$ г/см^2 (см. [69, 219, 220, 227]).

Итак

$$T_{\text{к. л}} = \frac{x}{\rho c} = \frac{x}{cMN} \approx \frac{3 \cdot 10^6}{N} \text{ лет}, \tag{16.63}$$

где N — концентрация газа (ядер со средней массой $M \sim 2 \cdot 10^{-24}$ г) в области, занятой космическими лучами. В дисковой модели средние значения $N \approx 1-2$, а в модели с гало $N \sim (1-3) \cdot 10^{-2}$ см$^{-3}$; в результате соответствующие значения

(16.63) не противоречат оценкам (16.55)*). Более существенно другое — химический состав в первую очередь определяется толщей x, и поэтому из данных о химическом составе нельзя непосредственно найти время $T_{к.л}$. Правда, в более рафинированных моделях, учитывающих диффузию, время жизни, определяемое коэффициентом диффузии $D_i(E)$, более существенно, но точность всех данных еще недостаточна для решения задачи. Для определения некоторого характерного возраста космических лучей при известной толще x может служить измерение в составе космических лучей количества вторичных радиоактивных ядер (наиболее известный пример — ядро ^{10}Be, для которого среднее время жизни $\tau = 2{,}2 \cdot 10^6\ E/Mc^2$ лет, где фактор E/Mc^2 учитывает релятивистское замедление времени). В (16.62) возможность радиоактивного распада не учтена, и если это сделать, то для радиоактивного ядра слева должна стоять сумма $N_i/x_i + N_i/c\rho\tau_i$. Определяя концентрацию радиоактивных ядер N_i по сравнению с концентрацией ряда стабильных ядер, можно в принципе найти как $x_i = c\rho T_{к.л,\,i}$, так и $c\rho\tau_i$ и тем самым определить $T_{к.л,\,i}$ и среднюю плотность газа ρ в занятой космическими лучами области. Соответствующие измерения уже осуществлены, правда, лишь с нерелятивистскими ядрами ^{10}Be и с невысокой точностью [220, 236]. Их результаты по меньшей мере не противоречат модели с гало и указывают на то, что однородная модель имеет весьма условный или, можно сказать, вспомогательный характер — она, ввиду ее простоты, удобна для расчетов, но, понимаемая буквально, не отражает реальную обстановку в Галактике. По последней причине, например, время $T_{к.л}$, фигурирующее в однородной модели, должно зависеть от времени жизни радиоактивного ядра τ_i (это значит, что для данного ядра время $T_{к.л}$ будет зависеть от энергии, ибо $\tau_i = \tau_{i,\,0}(E/Mc^2)$; подробнее см. [219, 220, 227]).

Перейдем к конкретизации уравнений переноса (16.51) в применении к электронам и позитронам. В этом случае в (16.51) нужно, очевидно, считать, что $N_i = N_e(\mathbf{r},\ t,\ E)$ (или отдельно N_{e^-} (электроны) и N_{e^+} (позитроны)). Упрощения возникают в предположении о стационарности задачи (отбрасывается производная $\partial N_e/\partial t$) и при пренебрежении «катастрофическими»

---

*) Характерное ядерное время жизни протонной компоненты космических лучей (см. (16.60))

$$T_{\text{nucl}} \sim \frac{E}{|\,(dE/dt)_{\text{nucl}}\,|} \sim \frac{3 \cdot 10^{15}}{N}. \qquad (16.60\text{a})$$

Даже для газового диска при $N \sim 1$ см$^{-3}$ время $T_{\text{nucl}} \sim 10^8$ лет $\gg T_{к.л,\,\text{диск}}$, а при $N \sim 10^{-2}$ см$^{-3}$ уже $T_{\text{nucl}} \sim 10^{10}$ лет $\gg T_{к.л,\,\text{гало}} \sim (1\text{—}3) \cdot 10^8$ лет. Отсюда следует, что время жизни космических лучей $T_{к.л}$ действительно определяется их выходом из Галактики, а не потерями (это, вообще говоря, не относится к достаточно тяжелым ядрам; см. табл. 16.2).

потерями энергии. Тогда имеем

$$-\operatorname{div}(D_e \nabla N_e) + \frac{\partial}{\partial E}(b_e(E)\, N_e) = Q_e(\mathbf{r}, E). \qquad (16.64)$$

Член Q_e должен учитывать появление электронов и (или) позитронов не только в результате их ускорения, но и вследствие различных распадов нестабильных частиц ($\mu^{\pm}$-мезонов и т. д.), образующихся при ядерных соударениях космических лучей в газе (сюда же можно отнести δ-электроны и электронно-позитронные пары, порождаемые гамма-лучами). В уравнение типа (16.64) для позитронов нужно ввести также член, учитывающий их аннигиляцию.

Наиболее существенное отличие, возникающее при рассмотрении электронной компоненты космических лучей по сравнению с протонно-ядерной компонентой, состоит в необходимости, вообще говоря, учитывать потерю энергии электронами. Поэтому переменная E в уравнении (16.64) не остается параметром, как это было в уравнениях (16.59) и (16.62).

Интегрирование уравнения (16.64) позволяет найти спектр электронов $N_e(\mathbf{r}, t, E)$. Зная этот спектр для всей Галактики, можно рассчитать интенсивность синхротронного радиоизлучения, принимаемого на Земле. То же относится, конечно, к радиоизлучению оболочек сверхновых звезд, радиогалактик и т. д. Проводить соответствующие расчеты мы не будем (см. английское издание книги [59], [219] и указанную там литературу) и ограничимся физическими процессами, которые нужно учитывать. Ускорение электронов в источниках и генерация «вторичных» электронов и позитронов протонно-ядерной компонентой космических лучей определяет мощность источников $Q_i(\mathbf{r}, E)$. Электроны теряют энергию в результате ионизационных, тормозных (радиационных), магнитотормозных и комптоновских потерь; все эти потери вносят вклад в коэффициент $b_e(E)$ в (16.64).

Ионизационные потери рассматривались выше (см. (16.23)), магнитотормозные потери обсуждались в гл. 4, на тормозных и комптоновских потерях мы остановимся в гл. 17. Целесообразно, однако, сопоставить все эти потери для ультрарелятивистских электронов в одном месте.

Ионизационные потери.

В атомарном водороде

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left(\ln\frac{E^3}{mc^2\mathcal{J}^2} - 0{,}57\right) =$$

$$= 7{,}62 \cdot 10^{-9} N \left\{3 \ln\frac{E}{mc^2} + 20{,}2\right\} \text{ эВ/с}. \qquad (16.23а)$$

В ионизированном газе

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_i = \frac{2\pi e^4 N}{mc}\left(\ln\frac{m^2c^2E}{4\pi e^2\hbar^2 N} - {}^3/_4\right) =$$

$$= 7{,}62 \cdot 10^{-9} N \left\{\ln\frac{E}{mc^2} - \ln N + 73{,}4\right\} \text{ эВ/с}. \qquad (16.24)$$

Тормозные (радиационные) потери.
В атомарном межзвездном газе (см. (17.48))

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = 10^{-15} N_a E \text{ эВ/с} = 5{,}1 \cdot 10^{-10} N_a \frac{E}{mc^2} \text{ эВ/с}.$$

В полностью ионизированном газе (см. (17.46))

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = 7 \cdot 10^{-11} N \left(\ln \frac{E}{mc^2} + 0{,}36\right) \frac{E}{mc^2} \text{ эВ/с}$$

($N = N_a$ — концентрация ядер или электронов).

Магнитотормозные и комптоновские потери.

$$-\left\{\left(\frac{dE}{dt}\right)_m + \left(\frac{dE}{dt}\right)_C\right\} = \frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 c \left(\frac{H^2}{8\pi} + w_\Phi\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 =$$

$$= 1{,}65 \cdot 10^{-2}\left(\frac{H^2}{8\pi} + w_\Phi\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \text{ эВ/с}. \quad (16.65)$$

Часть этого выражения, отвечающая магнитотормозным потерям, пропорциональна H^2 и получается из формулы (4.39) в предположении, что направление магнитного поля хаотически изменяется, и поэтому $H_\perp^2 = {}^2/_3 H^2$. Вторая часть выражения (16.65) отвечает комптоновским потерям в изотропном поле излучения с плотностью энергии w_Φ (величина $H^2/8\pi + w_\Phi$ в (16.65) измеряется в эрг/см^3), причем здесь рассматривается только область энергий электронов $E \ll \frac{mc^2}{\epsilon_\Phi} mc^2$, где ϵ_Φ — средняя энергия фотонов (подробнее см. гл. 17).

Для ионизированного газа, например, имеем

$$\eta_{r,\,i} = \frac{(dE/dt)_r}{(dE/dt)_i} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-8}\left(\ln\left(E/mc^2\right) + 0{,}36\right) E}{\ln\left(E/mc^2\right) - \ln N + 73{,}4}. \quad (16.66)$$

Даже в межгалактическом газе $N \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ см$^{-3}$ и, следовательно, $|\ln N| < 15$. Поэтому $\eta_{r,\,i} \lesssim 1$ при $E \lesssim 7 \cdot 10^8$ эВ. При $E > 10^9$ эВ тормозные потери преобладают над ионизационными.

Отношение магнитотормозных и комптоновских потерь к тормозным потерям (16.46) равно

$$\eta_{mC,\,r} = \frac{(dE/dt)_m + (dE/dt)_C}{(dE/dt)_r} \approx \frac{3 \cdot 10^7}{N}\left(\frac{H^2}{8\pi} + w_\Phi\right)\frac{E}{mc^2}. \quad (16.67)$$

В Галактике (в диске) $H^2/8\pi \sim 10^{-12}$ эрг/см^3 и $w_\Phi \sim$ $\sim 10^{-12}$ эрг/см^3 (только для одного теплового реликтового излучения с температурой $T = 2{,}7$ К плотность $w_\Phi = 4 \cdot 10^{-13}$ эрг/см^3; по последним данным, скорее, $T \approx 3$ К) в Галактике, особенно в диске присутствует также немало оптических фотонов, излучаемых звездами. Поэтому в газовом диске (при $N \sim 1$ см$^{-3}$) $\eta_{mC,\,r} \sim 3 \cdot 10^{-5}\, E/mc^2 \gtrsim 1$ при $E \gtrsim 10^{10}$ эВ,

а в гало (при $N \sim 10^{-2}$ см$^{-3}$) $\eta_{mC,\,r} \gtrsim 1$ при $E \gtrsim 10^8$ эВ. Таким образом, даже в радиодиске, не говоря уже о гало, для электронной компоненты в наиболее интересной области энергий $E \gtrsim 10^8 - 10^9$ эВ основную роль играют магнитотормозные и комптоновские потери. К этому нужно добавить, что тормозные потери по сути дела принадлежат к числу «катастрофических»— они сопровождаются излучением в основном фотонов с энергией $\hbar\omega \sim E$. В результате электрон просто «выходит из игры». Среднее характерное время T_r для таких потерь (см. ниже (17.48)) равно

$$T_r \sim \frac{E}{|(dE/dt)_r|} \sim \frac{10^{15}}{N} \text{ с}. \qquad (16.68)$$

Даже при $N \sim 1$ см$^{-3}$ время $T_r \sim 3 \cdot 10^7$ лет, что больше времени блуждания электронов в газовом диске. При $N \sim 10^{-2}$ см$^{-3}$ время T_r уже столь велико (по сравнению с $T_{\text{к. л.}} \lesssim (1-3) \times 10^8$ лет), что тормозные потери не играют роли. Поэтому при расчетах электронного спектра в Галактике обычно принимают во внимание лишь магнитотормозные и комптоновские потери энергии.

На этом закончим настоящую главу, посвященную некоторым вопросам астрофизики космических лучей. Здесь, в отличие от других глав, мы уделили значительное внимание описательному, по существу астрофизическому, материалу, что уменьшило место, отводимое теоретическим вопросам. Так пришлось поступить, поскольку соответствующая астрофизическая информация в курсах общей и теоретической физики, практически полностью отсутствует. Если же ее не использовать, не учитывать, то ни о какой астрофизике космических лучей говорить не приходится, остаются лишь чисто физические результаты, которые можно применить, в частности, к космическим лучам. Но тогда становится неопределенным отбор материала, и, главное, теряется вся астрофизическая специфика. Нам же хотелось ее сохранить. В двух последующих главах эта тенденция также найдет известное, хотя и несколько меньшее отражение.

Глава 17

РЕНТГЕНОВСКАЯ АСТРОНОМИЯ (НЕКОТОРЫЕ ПРОЦЕССЫ)

Процессы, приводящие к образованию рентгеновских и гамма-лучей. Определение величин, используемых в рентгеновской и гамма-астрономии. Тормозное рентгеновское излучение нерелятивистского ионизированного газа (плазмы). Тормозное излучение релятивистских электронов и тормозные (радиационные) потери энергии. Рассеяние релятивистских электронов на фотонах (обратный комптон-эффект). Комптоновские потери энергии. О синхротронном рентгеновском излучении. Замечания о сопоставлении теории с наблюдениями.

Рентгеновские и гамма-лучи «сами по себе» (т. е. без рассмотрения их взаимодействия с веществом) не только отличаются лишь длиной волны, но и являются «соседями» в спектре электромагнитных волн *). Поэтому целесообразно начать обсуждение процессов, приводящих к возникновению космического рентгеновского и гамма-излучения без более детального разделения на диапазоны. Таким образом, прежде всего перечислим процессы, ведущие к образованию как рентгеновских, так и гамма-лучей.

Предварительно, правда, уместно заметить, что длина свободного пробега или коэффициент поглощения даже жестких гамма-лучей, не говоря уже о более мягких фотонах, не превосходит примерно 100 г/см^2. Отсюда ясно, что космическое гамма- и рентгеновское излучение, которое достигает Земли, не может исходить из областей с чрезвычайно высокой плотностью, например из недр нейтронных звезд. Тем самым ясно также, что процессы испускания и поглощения фотонов, с которыми приходится сталкиваться в рентгеновской и гамма-астрономии, имеют, так сказать, обычный для атомной и ядерной физики характер. Иными словами, здесь не приходится рассматривать каких-то новых, еще неизвестных механизмов излучения и поглощения. Та же специфика, которая возникает в рентгеновской и гамма-

*) Условно будем называть рентгеновскими или X-лучами фотоны с энергией $100 < E_X < 10^5$ эВ (длины волны $\lambda \approx 12\,400/(E_X$ (эВ)) Å примерно от 100 до 0,1 Å). Однако излучение, испускаемое атомными ядрами, даже при $E_X \equiv E_\gamma < 10^5$эВ также принято называть γ-лучами. Энергия рентгеновских и гамма-фотонов обозначается ниже через E_X и E_γ, но иногда под E_γ понимается энергия любого жесткого фотона (в X и γ областях).

астрономии, связана в первую очередь с тем, что в лаборатории обычно имеют дело с рассеянием жестких фотонов на медленных электронах, а в космосе бóльшую роль играет рассеяние электронов высокой энергии на оптических и радиофотонах. Существуют, конечно, и другие особенности, но во всех известных случаях они касаются конкретной обстановки или параметров, характеризующих задачу, а не самого существа обсуждаемых элементарных процессов. Следовательно, когда речь идет об элементарных процессах, важных в области рентгеновской и гамма-астрономии, картина может считаться достаточно ясной.

К образованию рентгеновских и гамма-фотонов приводят следующие процессы:

1. Тормозное излучение электронов и позитронов (ниже, кроме известных исключений, позитроны отдельно упоминаться не будут).

Здесь имеются в виду соударения электронов с различными ядрами, а также другими электронами, при которых и падающий и рассеянный электроны принадлежат непрерывному спектру, а состояние рассеивающей частицы, если не говорить об отдаче, не изменяется.

Частица с кинетической энергией $E_к$ может испускать тормозной фотон лишь с энергией $E_{х,\gamma} \leqslant E_к$ (для простоты имеем в виду столкновение с достаточно тяжелой покоящейся частицей; при учете отдачи $E_{х,\gamma} < E_к$). Тем самым ясно, что нерелятивистские электроны могут порождать в результате тормозного механизма только рентгеновские лучи. Релятивистские электроны способны давать и гамма-фотоны. Для релятивистских протонов и ядер с массой M интенсивность тормозного излучения на ядрах в $(M/m)^2 \geqslant 3{,}4 \cdot 10^6$ раз меньше, чем для электронов с той же полной энергией. Поэтому, если речь идет о тормозном излучении на ядрах, то обычно имеются все основания ограничиться учетом тормозного излучения электронов. В веществе, однако, имеются не только ядра, но и электроны (например, атомарные электроны), которые могут ускоряться падающей частицей (об этом процессе говорят как об отдаче или об образовании δ-электронов). Такие δ-электроны образуются примерно одинаково при движении в веществе как быстрых электронов, так и протонов. Поэтому при учете излучения, возникающего при образовании δ-электронов, тормозное излучение протонов может оказаться значительным [237]. Тормозным можно считать также излучение, сопровождающее появление электронов и позитронов при $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} \to e^{\pm}$-распаде.

Ниже мы отнюдь не собираемся останавливаться на всех аспектах теории тормозного излучения. Рассмотрены будут только два случая: тормозное излучение равновесной нерелятивистской плазмы и тормозное излучение релятивистских электронов.

2. Рекомбинационное и характеристическое рентгеновское излучение, возникающее при переходах электрона с уровня в не-

прерывном спектре на атомный уровень или при его переходе с одного атомного уровня на другой.

По астрофизической терминологии речь идет соответственно о свободно-связанных и связано-связанных переходах электрона, тогда как тормозное излучение по такой терминологии отвечает свободно-свободным переходам. Процессы типа 2 будут лишь бегло затронуты в этой главе.

3. Комптоновское рассеяние релятивистских электронов на рентгеновских, оптических и радиофотонах.

Этот процесс уже упоминался ранее (см., например, гл. 16). Возможны разные соотношения между энергиями падающих и рассеянных частиц, но рассматриваться будет лишь случай

$$E > E_\gamma \gg \epsilon_\Phi, \tag{17.1}$$

где E, E_γ и ϵ_Φ — энергия (в «лабораторной», т. е. связанной с Землей или Галактикой системе отсчета) соответственно первичного электрона, рассеянного γ- или X-фотона и первичного фотона; в большинстве случаев энергия ϵ_Φ относится к области оптического ($\epsilon_\Phi \sim 1$ эВ) или реликтового теплового радиоизлучения ($\epsilon_\Phi \sim 10^{-3}$ эВ, $\lambda \sim 1$ мм), но интересно также рассеяние электронов на космических же рентгеновских лучах (в этом случае $\epsilon_\Phi \sim 10^2 - 10^4$ эВ и в результате рассеяния образуются гамма-лучи) и на радиофотонах, скажем, синхротронного происхождения (при этом $\epsilon_\Phi \sim 10^{-5} - 10^{-7}$ эВ, $\lambda \sim 10$ см — 10 м и в результате рассеяния появляются рентгеновские и оптические фотоны).

Рассеяние релятивистских протонов и ядер на фотонах значительно менее эффективно (по сравнению с сечением рассеяния электронов появляется фактор $(m/M)^2 \lesssim 3 \cdot 10^{-7}$) и практически во всех известных случаях может не приниматься во внимание. Комптоновское излучение рассмотрено в настоящей главе.

4. Синхротронное излучение.

Для удобства выпишем еще раз формулу (5.40а) для характерной частоты ν_m, испускаемой электроном с энергией $E \gg mc^2$ в магнитном поле,

$$\nu_m = 1{,}2 \cdot 10^6 H_\perp \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 4{,}6 \cdot 10^{-6} H_\perp (E\,(\text{эВ}))^2 \text{ Гц}. \tag{17.2}$$

Отсюда легко увидеть, что в полях $H_\perp \lesssim 10^{-3}$ Э излучение с частотой $\nu_m \sim 10^{18}$ с$^{-1}$ ($\lambda_m = c/\nu_m \sim 3$ Å) испускается при $E \gtrsim 10^{13}$ эВ; излучение с $\lambda \lesssim 0{,}1$ Å (гамма-лучи) испускалось бы лишь при $E \gtrsim 10^{14}$ эВ. Таким образом, в галактиках, радиогалактиках и в большей части оболочек сверхновых звезд синхротронное рентгеновское и гамма-излучение может возникать лишь при наличии электронов с очень большой энергией. Это обстоятельство явно лимитирует возможности синхротронного механизма в применении к жестким фотонам. Достаточно ска-

зать, что электроны с энергией $E \gtrsim 10^{13}$ эВ в поле $H_\perp \sim 10^{-3}$ Э теряют половину своей энергии за время $T_m = \dfrac{5\,1 \cdot 10^8 mc^2}{H_\perp^2 E}$ с $\lesssim$ $\lesssim$1 года (см. (4.42)). На звездах, в квазарах (вблизи их ядер) и, возможно, в некоторых областях оболочек сверхновых звезд (особенно вблизи пульсаров) могут существовать довольно сильные магнитные поля. В таких условиях, очевидно, рентгеновское синхротронное излучение создается уже электронами с меньшими энергиями. Так, например, при $H_\perp \sim 10^2$ Э частота $\nu_m \sim$ $\sim 10^{18}$ с$^{-1}$ для электронов с энергией $E \sim 5 \cdot 10^{10}$ эВ; при этом, однако, $T_m \sim 1$ с.

В силу сказанного кажется, что появление космического синхротронного рентгеновского и гамма-излучения (если не говорить о пульсарах и вообще об окрестностях компактных источников — белых карликов, нейтронных звезд, «черных дыр») сравнительно маловероятно. Фактически тем не менее это заключение носит довольно неопределенный характер, поскольку существуют условия, при которых ускорение электронов или их инжекция в протяженную область с достаточно сильным полем весьма эффективны. Примером может служить Крабовидная туманность, рентгеновское излучение которой имеет синхротронную природу (это было доказано в результате измерений поляризации излучения). Роль эффективного инжектора электронов играет здесь (прямо или косвенно) находящийся в туманности пульсар PSR0532. Таким образом, синхротронное космическое рентгеновское излучение наблюдается и, несомненно, играет существенную роль (и нужно заметить, что по мере накопления данных эта роль становится все более важной). О синхротронном рентгеновском излучении речь еще пойдет ниже.

5. Распад нейтральных π-мезонов на два гамма-фотона ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$).

Энергия покоя π^0-мезонов равна $m_\pi c^2 = 135$ МэВ и, следовательно, π^0-мезоны порождаются лишь космическими лучами. В основном в их рождении играют роль соударения p — p и p — α или α — p (p — протон, α — ядро гелия).

Впрочем, при достаточно больших энергиях происходит также фоторождение π^0-мезонов при соударениях космических лучей с фотонами (радио, оптическими и рентгеновскими), имеющимися в космическом пространстве. Общее выражение для порога фоторождения $E_{\min}$ частиц с массой покоя m_π при соударении ядра (полная энергия $E \gg Mc^2$, масса покоя $M = AM_p$) с фотоном с энергией ϵ_ϕ, имеет вид *)

$$E_{\min} = \frac{2M + m_\pi}{4\epsilon_\phi} m_\pi c^4 = \epsilon_{\phi,0} \frac{Mc^2}{2\epsilon_\phi}, \qquad (17.3)$$

*) Величины порогов для рождения частиц получаются, как хорошо известно, из законов сохранения энергии и импульса. Соответствующие вычисления принято упрощать путем использования четырехмерных векторов. Так,

где

$$\epsilon_{\phi,\,0} = \frac{(2M + m_\pi)}{2M} m_\pi c^2 \approx m_\pi c^2 \qquad (17.4)$$

есть порог фоторождения π-мезона на покоящемся ядре с массой M. Порог фоторождения π^0-мезонов $\epsilon_{\phi,\,0}$ на покоящихся нуклонах составляет примерно 150 МэВ, и, следовательно, энергия космических протонов, генерирующих π^0-мезоны, например, на оптических фотонах с $\epsilon_\phi \sim 1$ эВ, должна превышать энергию $E_{\min} \approx 150 \frac{M_p c^2}{2\epsilon_\phi}$ МэВ $\sim 10^{17}$ эВ. При $\epsilon_\phi \sim 10^{-3}$ эВ (реликтовое излучение) $E_{\min} \sim 10^{20}$ эВ. Именно в результате таких процессов фоторождения спектр космических лучей должен, вообще говоря, «обрываться» при $E \gtrsim 10^{19} - 10^{20}$ эВ.

Гамма-лучи образуются, конечно, при распаде не только π^0-мезонов, но и ряда других нестабильных частиц. Генерация гамма-лучей в результате распада π^0-мезонов и некоторых других распадов обсуждается в гл. 18.

6. Аннигиляция электронов и позитронов ($e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$). Какое-то количество позитронов в космосе всегда присутствует, так как они образуются при распаде $\pi^+ \to \mu^+ \to e^+$ и ряде других процессов. Следует различать аннигиляцию релятивист-

---

получим выражение (17.3), обозначая следующим образом четырехмерные векторы для падающей частицы, для π-мезона и для фотона:

$$p^i = \left\{\frac{E}{c},\ \mathbf{p}\right\},\quad \pi^i = \left\{\frac{E_\pi}{c},\ \pi\right\},\quad k^i = \left\{\frac{\epsilon_\phi}{c},\ \mathbf{k}\right\},$$

$$p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = M^2 c^2,\quad \pi^i \pi_i = m_\pi^2 c^2,\quad k^i k_i = 0.$$

Закон сохранения энергии и импульса при фоторождении π-мезона имеет вид $p_1^i + k^i = p_2^i + \pi^i$. Возводя это соотношение в квадрат и учитывая приведенные выше обозначения, получаем $M^2c^2 + 2k^i p_{1,\,i} = \left(p_2^i + \pi^i\right)\left(p_{2,\,i} + \pi_i\right)$. Но на пороге фоторождения $\left(p_2^i + \pi^i\right)\left(p_{2,\,i} + \pi_i\right) = (M + m_\pi)^2 c^2$, поскольку при вычислении этой величины можно использовать любую систему отсчета, а в системе центра масс на пороге рождения имеются покоящиеся частица и π-мезон. Далее, для летящих друг другу навстречу фотона и частицы

$$2k^i p_{1,\,i} = 2\frac{\epsilon_\phi E_1}{c^2} + 2\frac{\epsilon_\phi}{c}|\,p_1\,| \approx 4\frac{\epsilon_\phi E_1}{c^2},$$

где последнее выражение относится к случаю $E_1 \gg Mc^2$. Таким образом, сразу же приходим к выражению (17.3) для $E_1 = E_{\min}$. При фоторождении на покоящейся частице $2k^i p_i = 2\epsilon_\phi M$ и получаем формулу (17.4) для $\epsilon_\phi = \epsilon_{\phi,\,0}$.

Следует, быть может, несколько расшифровать используемый жаргон. Порог фоторождения $E_{\min}$ есть в данном случае минимальная энергия ядра с массой M, при которой рождается π-мезон при соударении этого ядра с фотоном с энергией ϵ_ϕ. Аналогично $\epsilon_{\phi,\,0}$ — минимальная энергия фотона, способного породить π-мезон на покоящемся ядре с массой M.

ских или во всяком случае быстрых позитронов на лету и аннигиляцию покоящихся (медленных) позитронов. В первом случае образуются гамма-лучи с непрерывным или весьма широким спектром. Во втором случае (аннигиляция остановившихся позитронов) гамма-излучение монохроматично ($E_\gamma = mc^2 = 0{,}51$ МэВ) и по этому признаку может в принципе быть выделено на фоне непрерывного спектра [238].

Гамма-излучение, возникающее при аннигиляции антипротонов с протонами или каких-то других частиц с античастицами, практической роли играть не может, если не говорить о гипотетических областях, где соприкасается вещество и антивещество. Подобная возможность представляется нам довольно маловероятной и во всяком случае на ее реализацию нет достаточно определенных указаний.

7. Ядерные гамма-лучи, возникающие при радиационных переходах в атомных ядрах.

В атмосферах звезд и при взрывах (типа взрыва сверхновой звезды) возбуждение ядер, приводящее к гамма-излучению, происходит при ядерных реакциях и под влиянием соударений с быстрыми частицами. В межзвездном и межгалактическом пространствах возбуждающим агентом служат космические и субкосмические лучи. Существенно подчеркнуть, что ядерное гамма-излучение может обладать как непрерывным спектром, так и дискретным (речь идет здесь о наличии более или менее резких линий). Последний случай имеет место при ядерных реакциях, в которых возбуждаются медленные частицы (ядра в межзвездной среде). Если же ядро, входящее в состав космических лучей, возбуждается при каком-то соударении, то оно обычно сохраняет большую скорость, и при учете вклада от космических лучей разных энергий его гамма-излучение попадает в непрерывный спектр [238].

Напомним теперь некоторые основные определения и обозначения (здесь, как и в некоторых других частях настоящей главы, следуем [239]).

При наблюдениях измеряется одна из следующих величин: интенсивность $J_\gamma(E_\gamma)$ и поток $F_\gamma(E_\gamma)$ по числу фотонов, а также интенсивность $I_\gamma(E_\gamma)$ и поток $\Phi_\gamma(E_\gamma)$ по энергии:

$$\left.\begin{aligned} F_\gamma(E_\gamma) &= \int\limits_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega, \quad I_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma J_\gamma(E_\gamma), \\ \Phi_\gamma(E_\gamma) &= E_\gamma F_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma \int\limits_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega. \end{aligned}\right\} \qquad (17.5)$$

Приведенные интенсивности и потоки являются дифференциальными, например $J_\gamma(E_\gamma)\,dE_\gamma$ — число фотонов с энергиями в интервале E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$, пересекающих единичную площадку (нормальную к импульсу фотонов) за единицу времени, и отнесенное

к единичному телесному углу. Соответствующие интегральные величины имеют вид

$$\left.\begin{aligned} J_\gamma(>E_\gamma) &= \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma, \\ I_\gamma(>E_\gamma) &= \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} I_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma = \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} E'_\gamma J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma, \\ F_\gamma(>E_\gamma) &= \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} F_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma\,d\Omega, \\ \Phi_\gamma(>E_\gamma) &= \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} \Phi_\gamma(E'_\gamma)\,dE'_\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (17.6)$$

Пусть в элементе объема dV источника рентгеновских или гамма-лучей в единицу времени образуется $q(E_\gamma)\,dE_\gamma dV\,d\Omega$ фотонов, летящих в элементе телесного угла $d\Omega$ и имеющих энергию, лежащую в пределах E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$. Величина $q(E_\gamma)$ называется излучательной способностью (по числу фотонов). Использовавшаяся ранее (см., например, (5.52)) излучательная способность ε_ν связана с $q(E_\gamma)$ очевидной связью $E_\gamma q(E_\gamma)\,dE_\gamma = \varepsilon_\nu d\nu$, откуда $q(E_\gamma) = \varepsilon_\nu/h^2\nu$. Если излучение изотропно, то удобно пользоваться также излучательной способностью во всех направлениях

$$\tilde{q}(E_\gamma) = 4\pi q(E_\gamma) = \frac{4\pi\varepsilon_\nu}{h^2\nu}. \qquad (17.7)$$

В гамма-астрономии используется в основном излучательная способность $q(E_\gamma)$, тогда как в рентгеновской астрономии не менее распространено применение излучательной способности ε_ν (и вообще энергетических величин). Если рентгеновские или гамма-лучи образуются космическими лучами (или любыми другими частицами) с изотропной интенсивностью $J(E)$, то

$$\tilde{q}(E_\gamma)\,dE_\gamma = 4\pi q(E_\gamma)\,dE_\gamma = 4\pi N(\mathbf{r})\,dE_\gamma \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\,J(E)\,dE. \qquad (17.8)$$

Здесь $N(\mathbf{r})$ — концентрация атомов (или, скажем, электронов, мягких фотонов и т. п.) в источнике и

$$\sigma(E_\gamma, E)\,dE_\gamma = dE_\gamma \int \sigma(E_\gamma, E, \Omega')\,d\Omega' \qquad (17.9)$$

есть проинтегрированное по углам вылета сечение для образования фотонов (с энергией в интервале E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$) частицей с энергией E.

Пусть источник находится от наблюдателя на расстоянии R. Тогда поток излучения от источника, приходящий в телесном угле $d\Omega$, равен

$$dF_\gamma(E_\gamma) = J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega = d\Omega \int_0^{\mathscr{L}} \frac{\tilde{q}(E_\gamma)}{4\pi R^2} R^2\,dR = d\Omega \int_0^{\mathscr{L}} q(E_\gamma)\,dR \quad (17.10)$$

и

$$J_\gamma(E_\gamma) = \int_0^{\mathscr{L}} q(E_\gamma)\,dR = \tilde{N}(\mathscr{L}) \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\,J(E)\,dE, \quad (17.11)$$

где

$$\tilde{N}(\mathscr{L}) = \int_0^{\mathscr{L}} N(R)\,dR \quad (17.12)$$

есть число атомов (или других частиц, с которыми сталкиваются генерирующие гамма-излучение космические лучи) на луче зрения; в случае комптон-эффекта вместо $\tilde{N}(\mathscr{L})$ следует использовать число мягких фотонов $\tilde{N}_\phi(\mathscr{L}) = \int_0^{\mathscr{L}} N_\phi\,dR$ на луче зрения. При этом в (17.11) интенсивность космических лучей считается постоянной на всем пути $\mathscr{L}$. От этого предположения легко отказаться. В случае гамма-лучей интенсивности $J_\gamma(E_\gamma)$ и $J_\gamma(>E_\gamma)$ часто именуют соответственно дифференциальным и интегральным энергетическими спектрами гамма-лучей.

Для дискретных источников (особенно когда их угловые размеры малы) обычно пользуются следующими выражениями для потока:

$$F_\gamma(E_\gamma) = \int_\Omega J_\gamma(E_\gamma)\,d\Omega = \frac{\int q(E_\gamma)\,dV}{R^2} \approx \frac{\tilde{N}_V}{R^2} \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E)\,J(E)\,dE, \quad (17.13)$$

где интегрирование ведется по телесному углу, под которым виден источник, находящийся от наблюдателя на расстоянии R; при этом

$$\tilde{N}_V = R^2 \int_\Omega \tilde{N}(\mathscr{L})\,d\Omega \approx \int N(\mathbf{r})\,dV \quad (17.14)$$

есть полное число частиц (или мягких фотонов) в источнике.

Перейдем к рассмотрению механизмов рентгеновского излучения, причем начнем с тормозного рентгеновского излучения нерелятивистского горячего газа (плазмы).

Горячий газ, который частично или полностью ионизирован, является источником тормозного, рекомбинационного и линейчатого (характеристического) рентгеновского излучении. При

достаточно высокой температуре (что это означает будет пояснено ниже) основную роль играет тормозное излучение. К тому же, если речь идет о чисто водородной или водородно-гелиевой плазме, то о линейчатом рентгеновском спектре вообще не приходится говорить. Тормозное рентгеновское излучение наблюдается у рентгеновских «звезд», а также в спектре Солнца.

Ниже мы приведем основные формулы, с которыми приходится иметь дело при обсуждении тормозного рентгеновского излучения (более общий подход см. в [1, 9, 218а, 240]). Помимо задач рентгеновской астрономии, такое излучение представляет интерес также при термоядерных исследованиях и в работах по использованию горячей плазмы в лабораториях в качестве мощного источника рентгеновских лучей.

Для достаточно быстрых, но еще нерелятивистских электронов можно считать выполненными условиями

$$e^2Z/\hbar v \ll 1, \quad {}^1/_2 mv^2 \ll mc^2. \tag{17.15}$$

Поскольку $e^2/\hbar c = 1/137$, первое условие (17.15), конечно, не будет выполняться для очень тяжелых элементов, но мы имеем в виду случай легких элементов. Полная излучаемая при одном соударении энергия равна (см. § 25 в [1]).

$$W = \int E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = \frac{16e^6Z^2}{3mc^3\hbar} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 Z^2 mc^2, \tag{17.16}$$

где энергию фотона мы по-прежнему обозначили через E_γ и $r_e = e^2/mc^2$. Тормозные (радиационные) потери одного электрона в единицу времени равны

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = WN_a v = \frac{16e^6Z^2N_a v}{3mc^3\hbar} = 2{,}5 \cdot 10^{-33} Z^2 N_a v \text{ эрг/с}, \tag{17.17}$$

где N_a — концентрация ядер в среде. При $E \sim mc^2$ и $v \approx c$ формула (17.17) и приводимая ниже для релятивистской области формула (17.46) с $Z = 1$ дают примерно одно и то же значение $-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r \approx 8\frac{e^6N_a}{mc^2\hbar}$. Отметим, что в нерелятивистском приближении излучение от электрон-электронных соударений значительно слабее, чем при соударениях электрон — протон. Дело в том, что при соударении одинаковых частиц дипольное излучение отсутствует в силу закона сохранения импульса, а квадрупольное излучение по порядку величин в $(v/c)^2$ раз слабее дипольного излучения.

Для равновесной плазмы концентрация электронов со скоростью, лежащей в интервале v, $v + dv$, равна

$$\left.\begin{aligned} dN = N(v)\,dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right) dv, \\ \int N(v)\,dv = N. \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

Поэтому полная мощность излучения от единицы объема плазмы

$$4\pi\varepsilon = \int \left|\frac{dE}{dt}\right|_r dN = \int_0^\infty W N_a N 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right) v^3\, dv =$$

$$= \frac{32\sqrt{2}\, e^6 Z^2 N_a N (\varkappa T/m)^{1/2}}{3\sqrt{\pi}\, mc^3\hbar}. \qquad (17.19)$$

Множитель 4π используется здесь потому, что интегральная излучательная способность $\varepsilon = \int \varepsilon_\nu\, d\nu$ определена как относящаяся к единичному телесному углу. В силу условия квазинейтральности, которое обычно хорошо соблюдается, в полностью ионизированной плазме из атомов одного сорта $N = ZN_a$. Таким образом, для водородной плазмы, согласно (17.19), имеем

$$4\pi\varepsilon = 1{,}57 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T} \text{ эрг/(см}^3 \cdot \text{с)}, \qquad (17.20)$$

где температура T измеряется в градусах (по смыслу T есть электронная температура; очевидно, T (в градусах) $= \frac{1{,}6 \cdot 10^{-12}}{\varkappa} T$ (эВ) $= 1{,}16 \cdot 10^4 T$ (эВ)) и N — концентрация электронов в см$^{-3}$. Несколько более точные расчеты, учитывающие электрон-электронные столкновения и релятивистские поправки, приводят к выражению

$$4\pi\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T}\,(1 + 4{,}4 \cdot 10^{-10} T). \qquad (17.21)$$

Формулы (17.19), (17.20) пригодны лишь при условии (17.15), что при $Z = 1$ дает $v \gg 3 \cdot 10^8$ см/с или

$$T \sim \frac{mv^2}{3\varkappa} \gg \frac{e^4 m}{\hbar^2 \varkappa} \sim 10^5 \text{ K}. \qquad (17.22)$$

С другой стороны, из условия малости релятивистских поправок

$$T \ll \frac{mc^2}{\varkappa} \sim 10^{10} \text{ K}. \qquad (17.23)$$

Интерес представляет, разумеется, не только интегральная излучательная способность ε, но и введенная ранее дифференциальная излучательная способность ε_ν. По определению

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\nu\, d\nu = \int_0^\infty dE_\nu E_\nu \int_{E_\nu}^\infty \sigma(E_\nu, E)\, v(E)\, N(E)\, dE =$$

$$= h^2 \int_0^\infty \nu\, d\nu \int_{\sqrt{2h\nu/m}}^\infty \sigma(h\nu, E)\, vN(v)\, dv,$$

где $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega$ — энергия фотона и $E = {}^1/_2 mv^2$ — энергия электронов; в тепловом равновесии $N(v)\,dv$ определяется выражением (17.18).

Сечение $\sigma(E_\gamma, E)$ лишь весьма слабо (логарифмически) зависит от E (см. [1, 240б]) и в первом приближении можно положить $\sigma(E_\gamma, E) = \text{const}/E_\gamma = \text{const}/\nu$, откуда находим $\varepsilon_\nu = \text{const}\cdot\exp(-h\nu/\varkappa T)$. Постоянную легко определить из условия $\int\limits_0^\infty \varepsilon_\nu\,d\nu = \varepsilon$, и, таким образом, имеем

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon\frac{h}{\varkappa T}\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right) = \frac{7{,}7\cdot 10^{-38}N^2}{4\pi\sqrt{T}}\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\cdot\text{с}\cdot\text{Гц}}. \quad (17.24)$$

Остановимся теперь на другом предельном случае малых энергий (низких температур), когда

$$\frac{e^2Z}{h\upsilon} \gg 1. \quad (17.25)$$

При условии (17.25) расчет можно проводить классически. В самом деле, длина волны электрона $\lambda = h/mv = 2\pi\hbar/mv$, а наименьшее расстояние, на которое электрон подходит к ядру, определяется из условия $Ze^2/r_{\min} = {}^1/_2 mv^2$ и равно $r_{\min} = 2Ze^2/mv^2$. Очевидно, при соблюдении неравенства (17.25) $r_{\min} \gg \lambda/\pi$, и движение электрона можно описывать классически. Излучение также описывается классически, но при интегрировании по частотам нужно внести квантовый элемент — интегрировать лишь до частоты $\nu = mv^2/2h$, где v — скорость электрона до излучения *). Классический расчет излучения при движении частицы в кулоновском поле детально проведен в § 70 книги [2]. Нас при этом интересует величина

$$dW = \int \tilde{W}(p)\,2\pi p\,dp,$$

где $\tilde{W}(p)$ — энергия, излучаемая в интервале ω, $\omega + d\omega$ при пролете частицы с зарядом e на расстоянии p от ядра с зарядом eZ (масса частицы, которую будем считать электроном, равна m, отдачей ядра пренебрегаем). Если

$$\omega \gg \frac{mv^3}{e^2Z}\ \left(\text{т. е. } \frac{e^2Z}{h\upsilon} \gg \frac{mv^2}{\hbar\omega}\right), \quad (17.26)$$

то

$$dW = \frac{16\pi e^6Z^2}{3\sqrt{3}\,v^2m^2c^3}\,d\omega = \frac{32\pi^2e^6Z^2}{3\sqrt{3}\,v^2m^2c^3}\,d\nu. \quad (17.27)$$

Ту же формулу можно, конечно, получить квантовомеханически, но классический расчет в данном случае вполне достаточен

*) Точнее, классическое рассмотрение пригодно при условии $h\nu = \hbar\omega \ll {}^1/_2 mv^2$; приближенно в ряде случаев можно использовать классические формулы и при $h\nu \leqslant {}^1/_2 mv^2$.

(условие (17.25) есть как раз условие применимости квазиклассического приближения для кулоновского поля).

Полная энергия, излучаемая при ударе, равна

$$W = \int_0^{h\nu_{\max}=1/2 mv^2} dW = \frac{16\pi^2 e^6 Z^2}{3\sqrt{3}\, mc^3 h}. \qquad (17.28)$$

Неточность исходного выражения (17.27), вызванная условием (17.26), при интегрировании по частотам несущественна. Более важно ограничение, связанное с использованием выражения (17.27) вплоть до частоты $\omega = mv^2/2\hbar$ (см. ниже). Для максвелловского распределения скоростей в водородной плазме

$$4\pi\varepsilon_\nu = \int_0^{\sqrt{2h\nu/m}} \frac{dW}{d\nu} N^2 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2\varkappa T}\right) dv =$$

$$= \frac{32\pi\sqrt{2\pi}\, N^2 \exp(-h\nu/\varkappa T)}{3\sqrt{3}\, m^{3/2} (\varkappa T)^{1/2} c^3} = 4\pi\varepsilon \frac{h \exp(-h\nu/\varkappa T)}{\varkappa T} =$$

$$= 6{,}8 \cdot 10^{-38} \frac{N^2}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right) \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц}}. \qquad (17.29)$$

При получении этой формулы учтено, что фотон с энергией $h\nu$ может быть испущен лишь электроном с энергией $^1/_2 mv^2 \geqslant h\nu$. Интегральная излучательная способность ε равна

$$4\pi\varepsilon = \int 4\pi\varepsilon_\nu\, d\nu = \int W\, dN = \frac{16\sqrt{2\pi}\, e^6 N^2 (\varkappa T/m)^{1/2}}{3\sqrt{3}\, mc^3\hbar} =$$

$$= 1{,}42 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \qquad (17.30)$$

Значение (17.30) отличается от (17.20) лишь множителем $1{,}57/1{,}42 = 1{,}1$, который в применении к астрофизическим задачам обычно может считаться равным единице. Таким образом, хотя в области температур (см. (17.25) с $Z = 1$)

$$T \sim \frac{mv^2}{3\varkappa} \ll \frac{e^4 m}{\hbar^2 \varkappa} \sim 10^5\ \text{K} \qquad (17.31)$$

нужно использовать формулы (17.29), (17.30), но фактически всегда можно употреблять формулы (17.20), (17.21) и (17.24). Точнее, использование (17.20), (17.21) и (17.24) при всех температурах допустимо, если речь идет о погрешностях порядка десятков процентов (кроме того, (17.24) неточно при $h\nu/\varkappa T \ll 1$). В высокотемпературной области (17.22), (17.23) формула (17.21), видимо, очень точна. Формула (17.24) даже при высоких температурах достаточно точна лишь при $h\nu/\varkappa T \gtrsim 1$ (в области $h\nu/\varkappa T \ll 1$ нужно умножить ε_ν на $\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4\varkappa T}{1{,}781 h\nu}$; см.

ниже). Формулы (17.28)—(17.30) являются приближенными в связи с использованием классических выражений вплоть до частоты $\nu = mv^2/2h$. Точные формулы отличаются от (17.29) и (17.30) наличием дополнительного множителя $g(\nu, T)$, который обычно называют фактором Гаунта. Соответствующие выражения и графики $g(\nu, T)$ приведены в [241]. Фактор $g \sim 1$ и именно поэтому, как мы и отмечали, при расчетах с погрешностью до десятков процентов формулы (17.20), (17.21) и (17.24) обычно можно использовать при всех температурах. Это заключение, как и большинство ему подобных, нужно воспринимать с осторожностью, поскольку точность зависит, естественно, от рассматриваемого интервала энергий рентгеновских лучей. Например, для плазмы с $\varkappa T = 6$ кэВ в интервале энергий фотонов 2—20 кэВ фактор Гаунта изменяется от 1,35 до 0,55, т. е. уже примерно в 2,5 раза. Такое изменение, особенно в условиях все повышающейся в области рентгеновской астрономии точности измерений, достаточно существенно и не должно игнорироваться [241в]. Нужно также иметь в виду, что при низкой температуре происходит рекомбинация, и плазму обычно нельзя считать полностью ионизированной.

Максимальная мощность рекомбинационного излучения $4\pi\varepsilon_{\text{рек, max}} \approx 10^{-21} N^2/\sqrt{T}$ и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon_{\text{рек}}}{\varepsilon_{\text{торм}}} \lesssim \frac{8 \cdot 10^5}{T}. \qquad (17.32)$$

Таким образом, при $T \lesssim 10^6$ К нужно учитывать рекомбинационное излучение (свободно-связанные и связанно-связанные переходы; см. [240а]). При $T \gg 10^6$ К водородная плазма излучает практически лишь тормозное излучение (см. (17.21) и (17.24)). В силу наличия рекомбинационного излучения неточность формул (17.21) и (17.24) в области $T \lesssim 10^5$ К обычно тем более несущественна.

Коэффициент поглощения излучения, связанный со свободно-свободными переходами (т. е. процессом, обратным тормозному излучению), в условиях (17.26) равен *)

$$\mu = \mu_\nu = \frac{16\pi^2 e^6 Z^2 N N_a}{3\sqrt{3}\, hc\, (2\pi m)^{3/2} (\varkappa T)^{1/2} \nu^3}\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right) =$$

$$= \mu_{\nu, 0}\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right) =$$

$$= 3{,}68 \cdot 10^8 \frac{N^2}{\sqrt{T}\,\nu^3}\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right)\right) \text{ см}^{-1}, \qquad (17.33)$$

*) Подробный вывод (методом коэффициентов Эйнштейна) следующей ниже формулы (17.33а) проведен в § 37 книги [84]. Соотношение (17.33) получается точно так же, но с заменой, приведенной в [84] формулы (37.7) на (37.7а) и разности $N_2 - N_1 = Nh\nu/\varkappa T$ на $N_2 - N_1 = N(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$, поскольку теперь не используется условие $h\nu \ll \varkappa T$.

где последнее выражение относится к водородной плазме ($Z = 1$, $N = N_a$). Заметим, что в множителе $(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$ учтен вклад индуцированного испускания, которое приводит к уменьшению наблюдаемого поглощения. При $h\nu \ll \varkappa T$ формула (17.33) принимает вид

$$\mu_\nu = \frac{0{,}018 N^2}{T^{3/2}\nu^2}. \tag{17.34}$$

Однако в этом предельном случае формула (17.33), а следовательно, и (17.34), неточна, ибо при ее выводе частота считалась *достаточно большой* (условие (17.26)). При $h\nu \ll \varkappa T$ справедлива формула

$$\mu = \frac{8e^6N^2}{3\sqrt{2\pi}\,(\varkappa T m)^{3/2} c\nu^2} \ln\left[\frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115 \cdot 2\pi e^2 m^{1/2}\nu}\right] \approx \frac{10^{-2}N^2}{T^{3/2}\nu^2}\left[17{,}7 + \ln\left(\frac{T^{3/2}}{\nu}\right)\right] \tag{17.33а}$$

или при $T \gg 10^5$ К та же формула, но с заменой

$$\ln\frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115 \cdot 2\pi e^2 m^{1/2}\nu} \quad \text{на} \quad \ln\frac{4\varkappa T}{1{,}781 \cdot h\nu}$$

или уже в последнем выражении (17.33а) с заменой $\ln(T^{3/2}/\nu)$ на $\ln(10^3\ T/\nu)$. Если воспользоваться для μ выражением (17.33а) с заменой логарифмического члена на $\ln(4\varkappa T/1{,}781\ h\nu)$, как нужно поступать в условиях (17.22), то указанным ниже путем приходим к формуле (17.24), с дополнительным множителем $\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{4\varkappa T}{1{,}781 h\nu}$. Это обстоятельство уже было отмечено выше (речь идет об уточнении формулы (17.24) при $h\nu \ll \varkappa T$). Если не обращать внимание на логарифмический член, то формулы (17.33а) и (17.34) одинаково зависят от $N = N_e$, T и ν и по порядку величины дают один и тот же результат. Область применимости и точность формулы (17.33) такая же, как и (17.29). Более того, одна из них следует из другой (именно поэтому мы и останавливаемся на этом вопросе подробнее).

Действительно, согласно теореме (закону) Кирхгофа, в состоянии теплового равновесия излучательная способность равна

$$\varepsilon_\nu = B_\nu \mu_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\mu_{\nu,0}\exp\left(-\frac{h\nu}{\varkappa T}\right), \tag{17.35}$$

где

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp(h\nu/\varkappa T) - 1}$$

есть спектральная плотность черного излучения, отнесенная к единице объема и единичному телесному углу, и использовано обозначение $\mu_\nu = \mu_{\nu,0}(1 - \exp(-h\nu/\varkappa T))$. Подставляя в (17.35) выражение (17.29), приходим к формуле (17.33) и наоборот. На первый взгляд это может показаться частным случаем, поскольку теорема Кирхгофа, строго говоря, относится к состоя-

нию локального термодинамического равновесия. Фактически, однако, область применимости формулы (17.35) значительно шире в силу слабости взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. По последней причине, например, тормозное излучение газа, вообще говоря, не зависит от состояния поля излучения и будет равновесным (тепловым) даже в отсутствие равновесия с излучением. Несколько подробнее и точнее можно сказать так. Условие применимости формулы (17.35) состоит в наличии теплового равновесия для электронов (иными словами, функция распределения электронов по скоростям должна быть максвелловской). В условиях слабости взаимодействия излучения с частицами *) состояние поля излучения обычно или по крайней мере в целом ряде случаев не сказывается на электронной функции распределения и, если последняя остается равновесной, *излучательная способность также остается равновесной*.

Выше всегда вычислялись и обсуждались выражения для излучательной способности (величины ε_ν и $\varepsilon = \int \varepsilon_\nu \, d\nu$). Для определения интенсивности или потока излучения, испускаемого источником, нужно, вообще говоря, решать уравнение переноса, учитывающее поглощение излучения и в частности его реабсорбцию (см. гл. 10). Результат, однако, сразу же известен для двух предельных случаев — для «толстого» и для «тонкого» слоев. Если слой излучающей плазмы является «толстым», т. е. совершенно непрозрачным, то он излучает как черное тело (спектральная плотность излучения пропорциональна $\nu^3/[\exp(h\nu/\varkappa T) - 1]$). В случае совершенно прозрачного («тонкого») слоя его излучение просто пропорционально $\varepsilon_\nu \mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$ — толщина слоя, считаемого однородным). При этом, как следует из (17.24) и (17.29), спектр является экспоненциальным — он имеет вид $\exp(-h\nu/\varkappa T)$ (правда, при $h\nu \ll \varkappa T$ спектр непостоянен, а логарифмически зависит от частоты; см. (17.33а)). Очевидно, слой можно считать тонким, пока $\mu\mathscr{L} \ll 1$.

В случае рентгеновских источников тормозной природы (облако или атмосфера из горячей плазмы) особенно удобно для оценок использовать формулы (17.21) и (17.24). Например, для однородного источника с объемом V рентгеновская светимость (мощность излучения)

$$L_X = 1{,}6 \cdot 10^{-27} N^2 \sqrt{T}\, V. \qquad (17.36)$$

*) Формально слабость электромагнитного взаимодействия проявляется в малости постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Для мезонного поля с $g^2/\hbar c \gtrsim 1$ аналог закона Кирхгофа, вообще говоря, оказался бы несправедливым для неравновесного мезонного поля. С другой стороны, уже в электромагнитном случае возможны ситуации, в которых неравновесный характер излучения приводит к несоблюдению закона Кирхгофа (результат зависит и от интенсивности поля излучения и от вероятности тех или иных радиационных переходов в системе).

Здесь, конечно, предполагается, что источник является «тонким». В случае квазиоднородного распределения плотности средние значения $N \sim \sqrt{N^2}$ и, следовательно, для массы газа $M = M_p NV$ и внутренней энергии $W_T = {}^3/_2 \varkappa TNV$ в источнике имеем

$$\left.\begin{aligned} M &\sim 2 \cdot 10^{-24} V \sqrt{N^2} = \frac{(L_X V)^{1/2}}{2 \cdot 10^{10} T^{1/4}} \text{ г}, \\ W_T &\sim \sqrt{N^2}\, \varkappa TV \sim 3 \cdot 10^{-3} (L_X V)^{1/2} T^{3/4} \text{ эрг}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.37)$$

С помощью этих простых формул можно сделать некоторые выводы, касающиеся «тормозной модели» рентгеновского излучения различных источников.

Остановимся теперь на тормозном излучении релятивистских электронов. Тормозное излучение релятивистских электронов (и позитронов) может быть существенным механизмом потерь энергии (радиационные потери). С этой точки зрения тормозное излучение уже упоминалось в гл. 16. Здесь же нас будет интересовать само тормозное излучение, причем только в случае ультрарелятивистских электронов и достаточно больших энергий испускаемых фотонов (область гамма-лучей)*).

Итак, рассмотрим тормозное излучение ультрарелятивистских электронов, причем обозначим начальную и конечную энергии электрона соответственно через $E \equiv E_1$ и E_2, а энергию испущенного тормозного фотона через E_γ. В случае тормозного излучения при рассеянии электронов на ядрах (этим случаем сейчас ограничимся) ядро обычно можно считать неподвижным. В подобных условиях ядро получает лишь импульс, но его кинетической энергией можно пренебречь, т. е. энергия электрона после излучения равна $E_2 = E - E_\gamma$.

При условии, что

$$E \gg mc^2, \quad E_2 = E - E_\gamma \gg mc^2, \qquad (17.38)$$

фотоны вылетают в основном в пределах угла $\theta \sim mc^2/E$ с направлением импульса падающего электрона $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1$. При этом сечение равно

$$\sigma_r(E_\gamma, E)\, dE_\gamma = 4 \frac{e^2}{\hbar c} Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} \left[\left\{1 + \left(1 - \frac{E_\gamma}{E}\right)^2\right\} \Phi_1 + \left\{1 - \frac{E_\gamma}{E}\right\} \Phi_2\right], \qquad (17.39)$$

где Z — заряд ядра рассеивающего атома, а функции Φ_1, Φ_2 указаны ниже. По определению вероятность излучения в единицу времени электроном с энергией $E \gg mc^2$ фотона с энергией

*) Этот вопрос обсуждается тем не менее в настоящей главе, а не в гл. 18, поскольку тормозное излучение релятивистских электронов логично рассматривать сразу же после тормозного излучения нерелятивистских электронов.

E_γ в интервал E_γ, $E_\gamma + dE_\gamma$, равна $P(E_\gamma, E)\,dE_\gamma = \sigma_r(E_\gamma, E)\,F\,dE_\gamma$, где F — поток электронов через единичную площадку. Если речь идет о «голом» ядре, т. е. рассеянии на кулоновском центре, то

$$\Phi_1 = \ln\left(\frac{2E}{mc^2}\,\frac{E - E_\gamma}{E_\gamma}\right) - \frac{1}{2}, \quad \Phi_2 = -\frac{2}{3}\,\Phi_1. \qquad (17.40)$$

При рассеянии на атомах электроны атомных оболочек экранируют заряд ядра, в силу чего сечение изменяется. Величина экранировки определяется параметром

$$\xi = \frac{\hbar c}{e^2}\,\frac{mc^2}{E}\,\frac{E_\gamma}{E - E_\gamma}\,Z^{-1/3}.$$

Смысл этого параметра становится ясным, если учесть, что при рассеянии электрона на ядре последнее получает импульс $\Delta p \sim \hbar/r$, где r — эффективное расстояние при пролете электрона вблизи ядра (подробнее см., например, § 25 в [1]). Далее, как следует из законов сохранения,

$$\Delta p = \frac{1}{2}\,\frac{mc^2}{E}\,\frac{E_\gamma}{E - E_\gamma}\,mc$$

и, значит,

$$r \sim \frac{\hbar}{mc}\,\frac{E(E - E_\gamma)}{mc^2 E_\gamma}.$$

С другой стороны, в статистической модели атома радиус атома $a \sim a_0 Z^{-1/3}$, где $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar}{mc}\,\frac{\hbar c}{e^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ см. Введенный выше параметр ξ, очевидно, порядка отношения a/r. Чем жестче испускаемый фотон, тем ближе должен пролететь электрон к ядру и тем меньше экранирование; при этом, если параметр $\xi \gg 1$, то справедливы выражения (17.40). Более мягкие фотоны испускаются при пролетах электрона на значительном расстоянии от ядра. При $\xi \ll 1$ экранирование велико и для тяжелых атомов имеем

$$\Phi_1 = \ln\left(191 \cdot Z^{-1/3}\right), \quad \Phi_2 = -\,{}^2/_3 \ln\left(191 \cdot Z^{-1/3}\right) + {}^1/_9. \qquad (17.41)$$

Как ясно из формул (17.39)—(17.41), зависимость $\sigma(E_\gamma, E)$ от E является слабой, а зависимость от E_γ определяется множителем $1/E_\gamma$ (это замечание особенно справедливо при полном экранировании (17.41)). Вместе с тем формула (17.41) неточна для легких элементов.

Если речь идет об ошибках, не меньших нескольких процентов, то сечение для тормозного излучения в условиях полного экранирования можно представить в форме

$$\sigma_r(E_\gamma, E)\,dE_\gamma = \frac{M\,dE_\gamma}{t_r E_\gamma}, \qquad (17.42)$$

где t_r — радиационная единица длины (в г/см^2) в газе из атомов с массой M; в условиях (17.41)

$$\frac{1}{t_r} = 4\frac{e^2}{\hbar c} Z^2 M^{-1} \ln\left(191 \cdot Z^{-1/3}\right)$$

и для водорода ($Z = 1$, $M = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г) мы имели бы $t_r \approx$ ≈ 73 г/см^2. Фактически в связи с неточностью формулы (17.41) для легких элементов значение t_r для водорода несколько меньше даже при учете вклада электрон-электронных соударений. Детальные расчеты [242] приводят для t_r к значениям $t_{\mathrm{H}} = 62{,}8$, $t_{\mathrm{He}} = 93{,}1$, $t_{\mathrm{C}} = 43{,}3$, $t_{\mathrm{N}} = 38{,}6$, $t_{\mathrm{O}} = 34{,}6$, $t_{\mathrm{Fe}} =$ $= 13{,}9$ г/см^2 (индекс r здесь опущен и заменен символом элемента). Для неионизированной межзвездной среды (около 90% H и примерно 10% He) можно с достаточной точностью положить $M = 2 \cdot 10^{-24}$ г и $t_r = 66$ г/см^2.

Интенсивность тормозных гамма-фотонов равна

$$J_{\gamma,\ \text{торм}}(E_\gamma) = \int_0^{\mathscr{L}} dR \int_{E_\gamma}^{\infty} N_a(\mathbf{R})\, \sigma_r(E_\gamma,\ E)\, J_e(E,\ \mathbf{R})\, dE, \quad (17.43)$$

где J_e — интенсивность генерирующей электронной компоненты, $N_a(\mathbf{R})$ — концентрация атомов межзвездной среды. Используя формулу (17.42) и предполагая, что интенсивность J_e постоянна на луче зрения, получим

$$J_{\gamma,\ \text{торм}}(E_\gamma) = \frac{M\tilde{N}(\mathscr{L})}{t_r} \frac{J_e(>E_\gamma)}{E_\gamma} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \tilde{M}(\mathscr{L}) \frac{J_e(>E_\gamma)}{E_\gamma}, \quad (17.44)$$

где $\tilde{M}(\mathscr{L}) = M\tilde{N}(\mathscr{L})$ — масса газа вдоль луча зрения (в г/см^2) и $J_e(>E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty} J_e(E)\, dE$.

В неионизированном водороде при $E_\gamma \lesssim E$ параметр $\xi =$ $= 10^2 mc^2/E$ и $\xi \ll 1$ при $E \gg 5 \cdot 10^7$ эВ; при этом условии и можно пользоваться формулами (17.42) и (17.44). В полностью ионизированной среде практически всегда допустимо пренебрежение экранировкой. В самом деле, в данном случае радиус экранирования есть дебаевский радиус $r_D = \sqrt{\varkappa T/8\pi e^2 N}$, который, например, при $T \sim 10^4$ К, $N \sim 0{,}1$ см$^{-3}$ порядка 10^3 см. В этом примере $r_D \sim r \sim (\hbar/mc)(E/mc^2)$ (см. выше) только при $E/mc^2 \sim 3 \cdot 10^{13}$, т. е. $E \sim 10^{19}$ эВ. Таким образом, в ионизированном газе обычно $r \ll r_D$ и экранировка несущественна. В отсутствие экранировки в условиях (17.38) нужно использо-

вать выражения (17.39), (17.40) и (17.43). Отметим, что при этом не учитывается тормозное излучение, возникающее при соударениях налетающего электрона с атомарными электронами (и вообще электронами в среде, например в плазме). Влияние столкновений электрон — электрон на сечение (17.39) в грубом приближении можно учесть путем замены множителя Z^2 на $Z(Z+1)$. Смысл этой замены состоит, очевидно, в том, что сечение $\sigma(E_\gamma, E)$ для электрон-электронных соударений примерно такое же, как для соударений электрон — протон; кроме того, учтено, конечно, что в атоме имеется Z электронов. Подчеркнем, что приближенный учет междуэлектронных соударений указанным способом вообще возможен лишь потому, что речь идет о сечении, проинтегрированном по углам. Именно поэтому вклад в интегральное сечение $\sigma(E_\gamma, E)$ от процессов, связанных с передачей атомарному электрону большого импульса, оказывается незначительным. Приведенное выше значение $t_r = 66$ г/см^2 для межзвездной среды получено с учетом тормозного излучения при соударениях электрон — электрон (см. [242]). Ниже электрон-электронные соударения также учитываются путем замены Z^2 на $Z(Z+1)$ или соответствующего выбора значения t_r.

Вследствие тормозного излучения электроны теряют энергию — соответствующие потери, как уже упоминалось, называются тормозными или радиационными. Подчеркнем, что радиационные потери происходят в основном большими порциями (т. е. принадлежат к числу «катастрофических» потерь; см. гл. 16). Например, из (17.42) ясно, что передаваемая энергия

$$\int E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma \sim \int_0^E \text{const} \cdot dE_\gamma \sim \text{const} \cdot E,$$

т. е. определяется излучением фотонов с энергией $E_\gamma \sim E$. Поэтому радиационные потери сильно флуктуируют. Мы ограничимся, однако, вычислением лишь средних потерь на единице пути

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_r = \int_0^E N_a E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma, \qquad (17.45)$$

где N_a — концентрация атомов и учтено, что сечение $\sigma(E_\gamma, E)$ нормировано на единичный поток электронов (кроме того, в силу (17.38) верхний предел в интеграле $E - mc^2$ заменен на E); для рассматриваемых ультрарелятивистских электронов потери в единицу времени $-\left(\frac{dE}{dt}\right)_r$ получаются просто умножением значения (17.45) на $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

В полностью ионизированном газе (плазме) или в отсутствие экранировки, согласно (17.39), (17.40) и (17.45), имеем

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{4e^6 N_a Z\,(Z+1)}{m^2c^4\hbar}\left[\ln\frac{2E}{mc^2}-\frac{1}{3}\right] =$$

$$= 1{,}37\cdot 10^{-16} N_a \left\{\ln\frac{E}{mc^2}+0{,}36\right\}\text{с}^{-1} =$$

$$= 2{,}74\cdot 10^{-3}\left\{\ln\frac{E}{mc^2}+0{,}36\right\}\text{г}^{-1}\cdot\text{см}^2 =$$

$$= 4{,}6\cdot 10^{-27} N_a \left\{\ln\frac{E}{mc^2}+0{,}36\right\}\text{см}^{-1}, \qquad (17.46)$$

где при переходе к трем последним выражениям положено $Z = 1$ (водород) *).

При полной экранировке для тяжелых элементов находим

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{4e^6 N_a Z\,(Z+1)}{m^2c^4\hbar}\left\{\ln\left(191Z^{-1/3}\right)+{}^1/_{18}\right\} =$$

$$= 7{,}26\cdot 10^{-16} N_a\ \text{с}^{-1}, \qquad (17.47)$$

где численные значения относятся к водороду ($Z = 1$), когда формула (17.47) уже неточна. Мы привели тем не менее численный результат для того, чтобы сравнить формулы (17.46) и (17.47) для водорода. Очевидно, потери (17.46) и (17.47) становятся одинаковыми при $E/mc^2 = 140$; в неионизированном водороде формулой (17.46) следует пользоваться при $E/mc^2 \lesssim 10^2$, а (17.47) — при $E/mc^2 \gg 10^2$. В последнем случае (полная экранировка) более точное значение для межзвездной среды получается, если считать радиационную единицу длины t_r равной 66 г/см^2. Тогда непосредственно из (17.42) и (17.45) получаем

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right)_r = \frac{McN_a}{t_r}\,\text{с}^{-1} = \frac{1}{t_r}\,\text{г}^{-1}\cdot\text{см}^2 = 1{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{г}^{-1}\cdot\text{см}^2 \approx$$

$$\approx 10^{-15} N_a\ \text{с}^{-1} \approx 3\cdot 10^{-26} N_a\ \text{см}^{-1}. \qquad (17.48)$$

В силу (17.48) электрон теряет энергию в среднем по закону $E = E_0\exp(-\mathscr{L}/66)$, где E_0 — его начальная энергия и $\mathscr{L}$ — пройденный им путь в г/см^2. Поскольку радиационные потери носят в основном «катастрофический» характер (потеря энергии в одном акте $\Delta E \sim E$), можно считать, что в грубом приближении электрон имеет вероятность, равную $\exp(-\mathscr{L}/66)$, пройти путь $\mathscr{L}$ (в г/см^2) без всяких радиационных потерь. Ряд дополнительных сведений о тормозном излучении и соответствующих потерях см. в [243].

Помимо гамма-фотонов, ультрарелятивистские электроны могут при рассеянии порождать электронно-позитронные пары

*) Напомним лишний раз, что потери, рассчитанные на г/см^2, получаются из потерь, отнесенных к единице пути, путем замены концентрации N_a атомов на $1/M$, где M — масса атома.

e^+, e^-, а также другие частицы (например, пары μ^+, μ^-). Соответствующее полное сечение для рождения пар e^+, e^- при соударениях электрон — протон или электрон — электрон порядка

$$\sigma_{\text{пар}} \sim \left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\ln\frac{E}{mc^2}\right)^3 \qquad (17.49)$$

(точнее, при соударениях электрон — протон под знаком логарифма стоит множитель E/M_pc^2, где M_p — масса протона). Между тем в отсутствие экранировки (как и в (17.49)) сечение для тормозного излучения в водороде (см. (17.39), (17.40)) порядка

$$\sigma_r = \int \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma \sim 4\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln\frac{E}{mc^2}. \qquad (17.50)$$

Таким образом,

$$\sigma_{\text{пар}} \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\sigma_r\left(\ln\frac{E}{mc^2}\right)^2 \sim 10^{-3}\sigma_r\left(\ln\frac{E}{mc^2}\right)^2$$

и в отсутствие экранировки $\sigma_{\text{пар}} \ll \sigma_r$ пока $E/mc^2 \ll 10^{12}$—10^{13} (или $E \ll 10^{18}$ эВ).

Остановимся теперь на излучении, возникающем при образовании электронов и позитронов в результате распада $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$. Интенсивность такого излучения обычно весьма мала по сравнению с интенсивностью излучения другой природы (тормозное излучение электронов; гамма-лучи, испускаемые при распаде π^0-мезонов). Поэтому мы здесь ограничимся лишь оценками.

При образовании частицы с зарядом e и с энергией

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \gg mc^2$$

в классическом приближении излучается энергия (см. гл. 8 и § 69 в [2])

$$\left.\begin{aligned} dW_\gamma &= \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right)dE_\gamma \approx \frac{2\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2E}{mc^2} - 1\right)dE_\gamma, \\ \alpha &= e^2/\hbar c \approx 1/137. \end{aligned}\right\} \qquad (17.51)$$

Для оценок это выражение пригодно и при $E_\gamma \leqslant E$ (в (17.51) квантовая постоянная $\hbar = h/2\pi$ фактически не входит, ибо $dE_\gamma = h\, d\nu$). Число образующихся фотонов равно dW_γ/E_γ и, следовательно, интенсивность

$$J_{\gamma,\,\text{рожд}}(E_\gamma) = \frac{\mathscr{L}}{4\pi}\int_{E_\gamma}^{\infty}\frac{dW_\gamma}{dE_\gamma}\frac{q_e(E)\,dE}{E_\gamma} \approx 4\cdot 10^{-4}\left(\ln\frac{2\bar{E}_\gamma}{mc^2} - 1\right)\frac{Q_e(E > E_\gamma)}{E_\gamma}, \qquad (17.52)$$

где $Q_e(E > E_\gamma) = \mathscr{L} \int\limits_{E_\gamma}^{\infty} q_e(E)\, dE$ — число электронов с энергией $E > E_\gamma$, рождающихся за 1 с на пути вдоль луча зрения длиной $\mathscr{L}$, и $\bar{E}_\gamma$ — некоторое среднее значение. Конкретные оценки для Галактики свидетельствуют о том, что интенсивность $J_{\gamma,\,\text{рожд}}$, например, при $E_\gamma = 5 \cdot 10^7$ эВ на несколько порядков меньше интенсивности тормозного излучения $J_{\gamma,\,\text{торм}}$. Что же касается сопоставления интенсивности $J_{\gamma,\,\text{рожд}}$ (речь идет о рождении продуктов распада $\pi^\pm$-мезонов) с $J_{\gamma,\,\pi^0}$ — интенсивностью гамма-лучей от распада π^0-мезонов, то здесь оценка возможна вне зависимости от спектра и интенсивности протонно-ядерной и электронной компонент космических лучей. Действительно, π^0-мезонов возникает приблизительно в два раза меньше, чем $\pi^\pm$-мезонов. Отсюда ясно, что при распаде $\pi^0 \to 2\gamma$ образуется примерно столько же гамма-фотонов, сколько электронов и позитронов при распаде $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$. Далее, вероятность излучения фотона при рождении электрона (позитрона) содержит дополнительный множитель $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Следовательно, интенсивность гамма-фотонов, сопровождающих распад $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$, на два порядка меньше интенсивности гамма-лучей, испускаемых при распаде π^0-мезона.

Следующий и к тому же особенно важный процесс, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем, — рассеяние релятивистских электронов на фотонах, часто именуемое обратным эффектом Комптона *).

Пусть в лабораторной системе отсчета (в интересующих нас условиях это есть система координат, связанная с Землей, или какая-либо иная астрономическая система отсчета) имеются электрон с импульсом

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m\mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

и энергией

$$E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},$$

а также фотон с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\epsilon_{\phi,\,1} = \hbar\omega\,(k = 2\pi/\lambda,\ \omega = 2\pi c/\lambda = ck)$; пусть, кроме того, среда отсутствует или не оказывает влияния, что допустимо, если $\omega \gg \omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}$. При рассеянии друг на друге электрон и фотон обмениваются энергией и импульсом, так что в конечном со-

*) Такой термин возник потому, что комптон-эффект был открыт и обычно исследуется в лабораториях в условиях, когда гамма-фотон рассеивается на покоящемся или медленном электроне. Ниже во всех случаях, независимо от энергий фотонов и электронов, мы говорим просто о комптоновском рассеянии.

стоянии соответствующие величины равны $\mathbf{p}_2$, E_2, $\mathbf{k}_2$ и $\epsilon_{\text{ф},\,2}$. Поскольку $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ и $\epsilon_\text{ф} = \hbar ck$, всего в задаче о рассеянии при заданных $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{k}_1$ имеется шесть неизвестных величин (импульсы $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{k}_2$). Законы сохранения энергии и импульса дают четыре соотношения и, таким образом, интересующую нас энергию рассеянного фотона $\epsilon_{\text{ф},\,2}$ можно найти, только задав каких-то два параметра. В качестве таковых обычно выбирают угол θ_2 между $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{p}_1$ и угол θ между $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_1$ (тем самым фиксируется направление $\mathbf{k}_2$; рис. 17.1). Для удобства, имея в виду

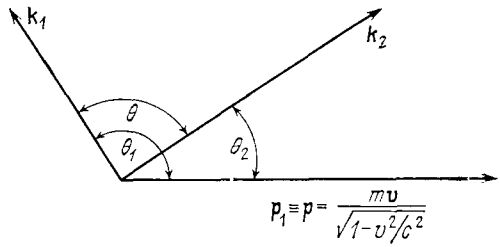


Рис. 17.1. Рассеяние фотона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\epsilon_{\text{ф},\,1} \equiv \epsilon_\text{ф}$ на электроне с импульсом $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ и энергией $E_1 \equiv E$.
Рассеянный фотон имеет импульс $\hbar\mathbf{k}_2$ и энергию $\epsilon_{\text{ф},\,2} \equiv E_\gamma$. Векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{p}$, вообще говоря не лежат в одной плоскости.

применения к случаю жестких рассеянных фотонов (фотонов 2), будут обычно использоваться такие обозначения:

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_1 \equiv E, \quad \epsilon_{\text{ф},\,1} = \epsilon_\text{ф}, \quad \epsilon_{\text{ф},\,2} = E_\gamma, \tag{17.53}$$

θ_1 — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{p}$, θ_2 — угол между $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{p}$, θ — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$.

Энергия рассеянного фотона равна

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_\text{ф}\,(1 - (v/c)\cos\theta_1)}{1 - (v/c)\cos\theta_2 + (\epsilon_\text{ф}/E)\,(1 - \cos\theta)} = \varphi\,(\epsilon_\text{ф},\ E,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta). \tag{17.54}$$

Если

$$E > E_\gamma \gg \epsilon_\text{ф}, \tag{17.55}$$

то приближенно имеем

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_\text{ф}\,(1 - (v/c)\cos\theta_1)}{1 - (v/c)\cos\theta_2 + (\epsilon_\text{ф}/E)\,(1 - (v/c)\cos\theta_1)\cos\theta_2}. \tag{17.56}$$

Сечение для рассеяния неполяризованных частиц удобно использовать в инвариантной форме (см. [9])

$$\left.\begin{aligned}\sigma_C(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{v})\, d\Omega_2 = 2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{E_\gamma^2}{m^2c^4\varkappa_1^2}\left\{4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right)^2 - \right.\right.\\ \left.\left. - 4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right) - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}+\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\right\} d\Omega_2,\\ \varkappa_1 = -\frac{2}{m^2c^4}\epsilon_\Phi E\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right),\\ \varkappa_2 = \frac{2}{m^2c^4}E_\gamma E\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_2\right),\end{aligned}\right\} \quad (17.57)$$

где $d\Omega_2$ — элемент телесного угла, отвечающего направлению $\mathbf{k}_2$ (используемый ниже телесный угол Ω_1 относится к направлению $\mathbf{k}_1$).

Если в начальном состоянии электрон покоится (т. е. $\mathbf{p} \equiv \equiv \mathbf{p}_1 = 0$), то из (17.54) и (17.57) получаем хорошо известные выражения:

$$E_\gamma = \frac{\epsilon_\Phi}{1 + (\epsilon_\Phi/mc^2)(1 - \cos\theta)}, \quad (17.58)$$

$$\sigma_C\, d\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{E_\gamma}{\epsilon_\Phi}\right)^2\left(\frac{\epsilon_\Phi}{E_\gamma} + \frac{E_\gamma}{\epsilon_\Phi} - \sin^2\theta\right) d\Omega_2. \quad (17.59)$$

В нерелятивистском пределе, когда в (17.59) $\epsilon_\Phi \ll mc^2$, можно положить $E_\gamma = \epsilon_\Phi$ (это, конечно, ясно и из (17.58)), и тогда

$$\sigma_C\, d\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega_2. \quad (17.60)$$

Интегрируя сечение (17.59) по телесному углу $d\Omega_2 = \equiv 2\pi \sin\theta\, d\theta$ (угол θ_2 можно в этом случае отождествить с углом θ между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$), получаем томсоновское сечение

$$\sigma_T = \int \sigma_C\, d\Omega_2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6{,}65 \cdot 10^{-25}\ \text{см}^2. \quad (17.61)$$

Подчеркнем еще раз, что электроны и фотоны в начальном состоянии считаются неполяризованными, а сечение, определенное по (17.57), (17.59) или (17.60), уже просуммировано по поляризациям в конечном состоянии. Развитие рентгеновской и гамма-астрономии, несомненно, приведет к очень важной и интересной возможности измерять поляризацию космических рентгеновских и гамма-лучей (это существенно для выяснения природы излучения; например, синхротронное рентгеновское излучение Крабовидной туманности должно быть довольно сильно поляризовано, что и удалось наблюдать, тогда как тормозное излучение горячего газа не поляризовано; подробнее см. ниже).

В дальнейшем, однако, для простоты будем считать, что поляризация рассеянного излучения (фотоны 2) отсутствует. Так оно и будет, если мягкое излучение (фотоны 1) не поляризовано (о поляризационных эффектах при комптоновском рассеянии см. § 87 в [9]).

Напомним, что по определению эффективного сечения (см., например, [240б]) $\sigma_C d\Omega_2 F$ есть число фотонов, рассеянных в единицу времени в угле $d\Omega_2$, причем $F = N_\Phi (c - v\cos\theta_1)$ — плотность потока фотонов, рассеивающихся на электронах (N_Φ — концентрация фотонов, $v \equiv v_1$ — скорость рассеивающих электронов, θ_1 — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{v}$); сечение $\sigma_C d\Omega_2$ является релятивистским инвариантом. Будем теперь считать, что фотоны с энергией ϵ_Φ изотропно распределены по направлениям, а нас интересуют рассеянные фотоны с энергией E_γ также независимо от направления их распространения. В подобных условиях нужно вычислить сечение (см. (17.54) и (17.57)):

$$\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E) = \frac{1}{4\pi}\int\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)\sigma_C(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{v})\times$$
$$\times\,\delta(E_\gamma - \varphi(\epsilon_\Phi, E, \theta_1, \theta_2, \theta))\,d\Omega_1\,d\Omega_2. \quad (17.62)$$

В самом деле, обозначим концентрацию мягких фотонов 1 с любым направлением распространения и энергией в интервале ϵ_Φ, $\epsilon_\Phi + d\epsilon_\Phi$ через $N_\Phi(\epsilon_\Phi)d\epsilon_\Phi$. Тогда число жестких фотонов 2, образовавшихся в единицу времени в результате рассеяния мягких фотонов на электроне, равно $c\int\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E)N_\Phi(\epsilon_\Phi)d\epsilon_\Phi$. Пусть

$$4\epsilon_\Phi\frac{E}{mc^2} \ll mc^2 \quad (17.63)$$

и, кроме того, соблюдается условие (17.55). Воспользовавшись тогда выражениями (17.56) и (17.57), можно вычислить сечение (17.62), а затем и величину $\sigma_t = \int\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E)\,dE_\gamma$. При условии (17.63) получаем

$$\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E) = {}^1\!/_4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{(mc^2)^4}{\epsilon_\Phi^2 E^3}\times$$
$$\times\left\{2\frac{E_\gamma}{E} - \frac{(mc^2)^2E_\gamma^2}{\epsilon_\Phi E^3} + 4\left(\frac{E_\gamma}{E}\right)\ln\frac{(mc^2)^2E_\gamma}{4\epsilon_\Phi E^2} + \frac{8\epsilon_\Phi E}{(mc^2)^2}\right\}, \quad (17.64)$$

причем E_γ заключено в пределах $\epsilon_\Phi \leqslant E_\gamma \leqslant 4\epsilon_\Phi(E/mc^2)^2$; фактически область применимости формулы (17.64) несколько шире. Далее

$$\sigma_t = \int\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E)\,dE_\gamma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \sigma_T. \quad (17.65)$$

Мы не останавливались подробнее на соответствующих расчетах, ибо результат (17.65) совершенно ясен *). В системе координат, связанной с электроном, энергия фотона 1 равна $\epsilon'_{\phi,1} = (E/mc^2)\,\epsilon_\phi\,(1-(v/c)\cos\theta_1)$. Для изотропного излучения $\bar{\epsilon}'_\phi = (E/mc^2)\,\bar{\epsilon}_\phi$ и вместе с тем при условии $\bar{\epsilon}'_\phi \ll mc^2$ справедливы формулы (17.60), (17.61) — иными словами, рассеяние можно считать классическим. Но условие $\bar{\epsilon}'_\phi \ll mc^2$ в силу сказанного эквивалентно условию $\bar{\epsilon}_\phi (E/mc^2) \ll mc^2$, которое по существу совпадает с (17.63).

Итак, при условии

$$E \ll {}^1\!/_4 \left(\frac{mc^2}{\bar{\epsilon}_\phi}\right) mc^2 \approx \frac{6\cdot 10^{10}}{\bar{\epsilon}_\phi\,(\text{эВ})}\ \text{эВ} \tag{17.66}$$

рассеяние фотонов на движущихся электронах является классическим и полное сечение равно σ_T (детальнее см. [240в]). При рассеянии электронов на оптических фотонах $\bar{\epsilon}_\phi \sim 1$ эВ (тепловое излучение звезд) и условие (17.66) имеет вид $E \ll 10^{11}$ эВ; если же речь идет о рассеянии на радиофотонах, то условие (17.66), конечно, еще мягче. В большинстве встречающихся в астрономии ситуаций условие (17.63) или (17.66) соблюдается и ниже мы ограничимся в основном этим случаем (впрочем, будут даны приближенные выражения и для другого предельного случая, а также указан реальный пример, когда условие (17.66) нарушается).

Вычислим средние потери (комптоновские потери), которые испытывает электрон с энергией E в результате рассеяния на фотонах.

При рассеянии электронов на достаточно мягких фотонах, когда соблюдается условие (17.66), имеем

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_C = c\int \sigma(E_\gamma,\ \epsilon_\phi,\ E)\,N_\phi(\epsilon_\phi)\,E_\gamma\,dE_\gamma\,d\epsilon_\phi =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 c\cdot\frac{4}{3}\int \epsilon_\phi N_\phi(\epsilon_\phi)\,d\epsilon_\phi =$$

$$= cN_\phi\sigma_T\cdot\frac{4}{3}\bar{\epsilon}_\phi\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 c w_\phi\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \tag{17.67}$$

где полная концентрация фотонов, плотность их энергии и средняя энергия фотона определяются соотношениями

$$N_\phi = \int N_\phi(\epsilon_\phi)\,d\epsilon_\phi, \qquad w_\phi = \int \epsilon_\phi N_\phi(\epsilon_\phi)\,d\epsilon_\phi = \bar{\epsilon}_\phi N_\phi. \tag{17.68}$$

*) Сделаем лишь одно пояснение, касающееся размерности выражения (17.62). Она равна площадь·энергия$^{-1}$, или конкретно см^2/эрг, ибо размерность σ_C есть см^2, а $\delta(E_\gamma)$ имеет размерность $1/E_\gamma$, поскольку $\int \delta(E_\gamma)\,dE_\gamma = 1$. Отсюда понятно, что величина σ_t действительно является эффективным сечением (в отношении $\sigma(E_\gamma, \epsilon_\phi, E)$ мы тоже используем термин сечение, хотя правильнее говорить об энергетической плотности сечения).

Из (17.65) и (17.67) ясно, что средняя энергия рассеянного фотона (жесткого фотона 2) равна

$$E_\gamma = \frac{4}{3}\,\bar{\epsilon}_\Phi \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2. \qquad (17.69)$$

Точный расчет (см. (17.67)) здесь требует использования сечения $\sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E)$, которое определяется формулой (17.64). Однако если не обращать внимание на множитель $^4/_3$, связь (17.69) легко установить в результате элементарного расчета, проведенного с использованием законов сохранения энергии и импульса. Не будем излагать здесь этот расчет (см., например, [59]), поскольку к результату (17.69) можно прийти еще проще, опираясь на волновые представления или конкретно формулу для эффекта Доплера. Действительно, как мы видели в гл. 5, учет эффекта Доплера приводит к появлению множителя порядка $(E/mc^2)^2$ или, иными словами, некоторая частота ν_0, вычисленная без учета эффекта Доплера, преобразуется в частоту $\nu \sim \nu_0 (E/mc^2)^2$; для магнитотормозного излучения $\nu_0 \sim eH_\perp/2\pi mc$ и $\nu \sim (eH_\perp/2\pi mc)\,(E/mc^2)^2$ (см. (5.7) и (5.40а)). В случае же рассеяния $\nu_0 \sim \epsilon_\Phi/h$, $\nu \sim (\epsilon_\Phi/h)\,(E/mc^2)^2$ и для $E_\gamma = h\nu$ получаем выражение типа (17.69).

Сопоставляя синхротронные потери (4.39) для хаотического по направлениям магнитного поля (в таком поле $H_\perp^2 = {}^2/_3 H^2$) с комптоновскими потерями (17.67), находим для суммарных потерь выражение

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{mC} = -\left\{\left(\frac{dE}{dt}\right)_m + \left(\frac{dE}{dt}\right)_C\right\} =$$
$$= \frac{32\pi}{9}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 c\left(\frac{H^2}{8\pi} + w_\Phi\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 =$$
$$= 2{,}65 \cdot 10^{-14}\left(\frac{H^2}{8\pi} + w_\Phi\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \frac{\text{эрг}}{\text{с}}, \qquad (17.70)$$

где $H^2/8\pi + w_\Phi$ измеряется в эрг/см^3; эта формула уже была приведена в гл. 16 (см. (16.65)).

Такой результат — эквивалентность синхротронных и комптоновских потерь энергии при одинаковой плотности энергии соответственно изотропного (в среднем) магнитного поля и излучения, — конечно, не случаен. Дело в том, что в классической области (а формула (17.67) относится только к классической области (17.66)) мощность излучения определяется ускорением заряда и, следовательно, действующей на него силой. Но в электромагнитной волне в вакууме электрическое поле $E = H$ и для ультрарелятивистской частицы сила Лоренца $(e/c)\,[\mathbf{vH}]$ при $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$ равна силе, создаваемой электрическим полем $e\mathbf{E}$. Вместе с тем при $v \to c$ существенно именно ускорение, перпендикулярное скорости, и в результате в изотропном случае полные потери определяются плотностью энергии электромагнитного

поля $(E^2+H^2)/8\pi$ независимо от спектрального состава поля (этот спектральный состав определяет, однако, спектральный состав возникающего излучения, в обсуждаемом случае — синхротронного излучения и рассеянных электромагнитных волн).

Важно подчеркнуть, что при нарушении условия (17.66) комптоновские потери уже слабо растут с энергией. Действительно, в предельном случае

$$E \gg \frac{(mc^2)^2}{\epsilon_\Phi} \tag{17.71}$$

энергия фотонов 1 в системе отсчета, связанной с электроном, удовлетворяет условию $\epsilon'_\Phi = (E/mc^2)\,\epsilon_\Phi \gg mc^2$. В этом случае полное сечение для рассеяния, которое можно получить из (17.59), имеет вид (см. [1, 9])

$$\sigma_t = {}^3/_8\sigma_T \frac{mc^2}{\epsilon'_\Phi}\left\{\ln\left(\frac{2\epsilon'_\Phi}{mc^2}\right) + {}^1/_2\right\}. \tag{17.72}$$

В условиях (17.71) при каждом соударении, которому отвечает сечение (17.72), испускается гамма-фотон *) с энергией $E_\gamma \sim E$. Таким образом, электрон при рассеянии теряет энергию

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_C \sim \sigma_t N_\Phi c E \approx {}^3/_8 c\sigma_T w_\Phi \left(\frac{mc^2}{\bar{\epsilon}_\Phi}\right)^2 \left\{\ln\left(\frac{2E\bar{\epsilon}_\Phi}{m^2c^4}\right) + {}^1/_2\right\} \approx$$

$$\approx 10^{-14}\left(\frac{mc^2}{\bar{\epsilon}_\Phi}\right)^2 w_\Phi \ln\left(\frac{2E\bar{\epsilon}_\Phi}{m^2c^4}\right) \text{эрг/с}, \tag{17.73}$$

где учтено, что $\bar{\epsilon}'_\Phi \sim (E/mc^2)\,\bar{\epsilon}_\Phi$ и $w_\Phi = N_\Phi \bar{\epsilon}_\Phi$.

При $(E/mc^2)\,(\bar{\epsilon}_\Phi/mc^2) \sim 1$ потери (17.67) и (17.73) по порядку величины одинаковы, как это и должно быть. Таким образом, комптоновские потери растут пропорционально квадрату энергии E^2, лишь пока $E \lesssim (mc^2)^2/4\epsilon_\Phi$. В предельном же случае (17.71) комптоновские потери практически постоянны.

В большинстве случаев, с которыми до сих пор приходилось встречаться в астрофизике, условие (17.66) выполняется (как указывалось, при рассеянии на оптических фотонах с $\bar{\epsilon}_\Phi \sim 1$ эВ это условие имеет вид $E \ll 10^{11}$ эВ, а релятивистские электроны, ответственные за наблюдаемое космическое радиоизлучение, имеют обычно энергию $E \lesssim 10^{10}$ эВ). Можно тем не менее уже сейчас указать на важные исключения. Во-первых, в ряде источников (Крабовидная туманность, Дева А, квазары) наблю-

*) Помимо фотонов в условиях (17.71) при рассеянии электронов на фотонах могут образовываться электронно-позитронные пары e^-, e^+. Соответствующие энергетические потери отличаются от потерь (17.73) множителем порядка $2\cdot 10^{-3}\ln(E\bar{\epsilon}_\Phi/m^2c^4)$. Этот множитель в большинстве встречающихся случаев значительно меньше единицы.

дается оптическое синхротронное излучение, за которое ответственны электроны с высокой энергией ($E \gg 10^{10}$ эВ). Поэтому даже при $\bar{\epsilon}_\Phi \sim 1$ эВ условие (17.66) для таких электронов будет нарушаться. Во-вторых, обнаружено мощное рентгеновское излучение галактических и внегалактических источников. В этих источниках и вблизи них велика плотность энергии рентгеновских фотонов с $\bar{\epsilon}_\Phi \sim (3—5)\cdot 10^3$ эВ ($\bar{\epsilon}_\Phi \sim \varkappa T$, $T \sim 5\cdot 10^7$ К). При рассеянии на таких фотонах условие (17.66) имеет вид $E \ll 10^7$ эВ и не выполняется уже для электронов, ответственных за космическое радиоизлучение. Таким образом, ограничение классической областью (17.66) в рентгеновской и гамма-астрономии далеко не имеет всеобщего характера.

Перейдем к вопросу об энергетическом спектре рассеянных (жестких) фотонов. Обозначим, как всегда, через $J_e(E)\,dE$ интенсивность релятивистских электронов, т. е. число электронов, проходящих за единицу времени через единичную площадку (нормально к площадке) в единичном телесном угле, причем их энергия лежит в интервале E, $E + dE$. Тогда интенсивность гамма-лучей равна (см. (17.11))

$$J_\gamma(E_\gamma) = \int_0^{\mathscr{L}} dR \int_{E_\gamma}^{\infty} J_e(E,\ \mathbf{R})\,dE \int_0^{\infty} \sigma(E_\gamma,\ \epsilon_\Phi,\ E)\,N_\Phi(\epsilon_\Phi,\ \mathbf{R})\,d\epsilon_\Phi =$$

$$= \tilde{N}_\Phi(\mathscr{L}) \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma,\ E)\,J_e(E)\,dE, \qquad (17.74)$$

где при переходе к последнему выражению считаем, что J_e на луче зрения не зависит от $\mathbf{R}$ (интегрирование по dR ведется вдоль луча зрения) и

$$\tilde{N}_\Phi(\mathscr{L})\,\sigma(E_\gamma,\ E) = \int \sigma(E_\gamma,\ \epsilon_\Phi,\ E)\,N_\Phi(\epsilon_\Phi,\ \mathbf{R})\,d\epsilon_\Phi\,dR. \qquad (17.75)$$

Для моноэнергетического электронного спектра $J_e(E) = J_0\delta(E - E_0)$ и интенсивность $J_\gamma(E_\gamma)$ определяется выражением (17.64) для $\sigma(E_\gamma,\ \epsilon_\Phi,\ E_0)$. Чаще приходится иметь дело со степенным спектром

$$J_e(E) = K_J E^{-\gamma}. \qquad (17.76)$$

При изотропном распределении релятивистских электронов с концентрацией $N(E) = K_e E^{-\gamma}$, очевидно, что

$$J_e(E) = \frac{c}{4\pi} N(E).$$

При вычислении $J_\gamma(E_\gamma)$ для степенного спектра (17.76), чтобы не проводить громоздких расчетов (ход этих вычислений совершенно ясен), используем сначала в качестве усредненного по

спектру тепловых (мягких) фотонов сечения $\sigma(E_\gamma, E)$ выражение

$$\left.\begin{aligned}\sigma(E_\gamma, E) &= \frac{1}{N_\Phi}\int_0^\infty \sigma(E_\gamma, \epsilon_\Phi, E)\, N_\Phi(\epsilon_\Phi)\, d\epsilon_\Phi = \\ &= \sigma_T \delta\left(E_\gamma - \frac{4}{3}\bar{\epsilon}_\Phi\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right), \\ \sigma_T &= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2, \quad N_\Phi = \int N_\Phi(\epsilon_\Phi)\, d\epsilon_\Phi.\end{aligned}\right\} \qquad (17.77)$$

Другими словами, считаем, что все жесткие фотоны имеют среднюю энергию (17.69), а полное сечение для рассеяния в согласии с (17.77) равно σ_T. Таким образом, сечение (17.77) заведомо приводит к правильным выражениям для $\int \sigma_T(E_\gamma, E)\, dE_\gamma$ и $\int E_\gamma \sigma(E_\gamma, E)\, dE_\gamma$.

Подставляя (17.77) в (17.74), для однородного распределения всех величин на длине $\mathscr{L}$ (поэтому $\tilde{N}_\Phi(\mathscr{L}) = N_\Phi \mathscr{L}$) получаем

$$\begin{aligned}J_\gamma(E_\gamma) &= \sigma_T N_\Phi \mathscr{L} \int J_e(E)\, \delta\left(E_\gamma - {}^4\!/_3 \bar{\epsilon}_\Phi \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right) dE = \\ &= \frac{\sqrt{3}\, N_\Phi \mathscr{L} \sigma_T mc^2}{4\sqrt{\bar{\epsilon}_\Phi E_\gamma}}\, J_e\left(mc^2 \sqrt{\frac{3E_\gamma}{4\bar{\epsilon}_\Phi}}\right) = \\ &= {}^1\!/_2 N_\Phi \mathscr{L} \sigma_T (mc^2)^{1-\gamma} \left({}^4\!/_3 \bar{\epsilon}_\Phi\right)^{1/2(\gamma-1)} K_J E_\gamma^{-1/2(\gamma+1)}. \qquad (17.78)\end{aligned}$$

Приведенный расчет вполне аналогичен использованному в гл. 5 в применении к синхротронному излучению (см. (5.51)). При точном расчете [239] в (17.78) появляется численный множитель $f(\gamma)$. Этот множитель равен 0,84; 0,86; 0,99 и 1,4 соответственно при $\gamma = 1, 2, 3$ и 4.

Для теплового излучения $\bar{\epsilon}_\Phi = 2{,}7\varkappa T$, где T — температура излучения. В качестве примера укажем, что при $T = 5000$ К ($\bar{\epsilon}_\Phi = 1{,}2$ эВ)

$$J_\gamma(E_\gamma) = 2{,}8 \cdot 10^{-25} (7{,}9 \cdot 10^{-2})^{\gamma-1} \times \\ \times f(\gamma) \mathscr{L} w_\Phi K_J E_\gamma^{-1/2(\gamma+1)} \ \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ}}, \qquad (17.79)$$

где $w_\Phi = N_\Phi \bar{\epsilon}_\Phi$, E_γ измеряется в ГэВ и K_J в единицах $(\text{ГэВ})^{\gamma-1}(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср})^{-1}$.

Если речь идет не об интенсивности по числу частиц, а об интенсивности по энергии, то $I_\gamma(E_\gamma) = E_\gamma J_\gamma(E_\gamma)$.

В случае степенного спектра (17.76), очевидно, $I_\gamma(E_\gamma) \propto \propto E_\gamma^{-1/2(\gamma-1)} \propto \nu^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1\!/_2(\gamma - 1)$. Найденный результат совпадает с зависимостью (5.50) для синхротронного излучения, как и сле-

довало ожидать для комптоновского излучения при условии (17.66) — мы видели, что при этом условии синхротронное и комптоновское излучения родственны между собой.

Отметим, что при больших энергиях и конкретно при энергиях падающего фотона, больших 10^{13} эВ (в системе отсчета, в которой электрон до рассеяния покоился), становится уже не малым «двойное комптоновское рассеяние» [244]. При этом процессе один падающий фотон превращается в два рассеянных фотона. Родственным является процесс, при котором два сталкивающихся фотона порождают пару электрон — позитрон и еще один фотон. Учет этих процессов при вычислении длины пробега фотонов и порождаемого ими электрон-позитронного каскада оказывается, однако, не таким значительным, как могло бы показаться на первый взгляд (это объясняется необходимостью учесть радиационные поправки к сечениям для процессов более низкого порядка — обычного рассеяния и рождения пар, не сопровождающегося излучением фотона [244]).

Как уже упоминалось, синхротронное (магнитотормозное) рентгеновское излучение в космических условиях в каком-то смысле «не типично», но оно наблюдается и, вероятно, его удельный вес в ходе дальнейших исследований будет повышаться. Вообще очевидно, что синхротронное излучение может обладать сколь угодно высокой частотой, причем для его описания достаточно классической теории пока

$$h\nu \ll E. \tag{17.80}$$

Космическое синхротронное излучение чаще всего лежит в радиодиапазоне, так как напряженность магнитного поля в соответствующих областях невелика ($H \lesssim 10^{-3}$ Э), а энергия электронов E также не очень велика. Конкретно интенсивность синхротронного излучения электрона с полной энергией $E \gg mc^2$ максимальна на частоте (см. (5.40) и (17.2))

$$\nu_m = 1{,}2 \cdot 10^6 H_\perp \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 4{,}6 \cdot 10^{-6} H_\perp (E\,(\text{эВ}))^2\ \text{Гц}. \tag{17.81}$$

Даже, например, при $H_\perp = H \sin\chi = 10^{-3}$ Э и $E = 10^{10}$ эВ частота $\nu_m = 4{,}6 \cdot 10^{11}$ Гц ($\lambda_m = c/\nu_m \sim 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ см). Таким образом, космическое оптическое и рентгеновское синхротронное излучение возникает либо при наличии электронов с очень высокой энергией $E > 10^{11}$ эВ (Крабовидная туманность, Дева А), либо при очень большой напряженности магнитного поля ($H \gtrsim 10$—100 Э) и в присутствии электронов с энергией, достигающей 10^9—10^{10} эВ.

Такая ситуация (довольно сильные поля $H \gtrsim 10$ Э и электроны с энергией $E \gtrsim 10^9$ эВ) может, по-видимому, иметь место в атмосферах некоторых звезд, в определенных областях

в квазарах и т. п. Для магнитных белых карликов и для пульсаров поля достигают уже значений 10^8 Э и 10^{13} Э соответственно. Радиационные и другие процессы в столь сильных полях (особенно для пульсаров) нуждаются в специальном рассмотрении. Например, о весьма существенном для пульсаров изгибном излучении упоминалось в гл. 5. Другой интересный пример — циклотронное рентгеновское излучение [245], уже обнаруженное для рентгеновского пульсара Геркулес X-1 (Her X-1). Речь идет при этом о дискретных (хотя и довольно широких) линиях с энергиями 58 и 110 кэВ, отвечающих переходу электрона между магнитными уровнями в поле $H_0 \approx 5 \cdot 10^{12}$ Э. Если не учитывать релятивистские поправки, которые в данном случае уже заметны, то основная циклотронная частота $\omega_H = eH_0/mc = 1{,}76 \cdot 10^7 H_0$ (см. (4.2)) в поле $H_0 = 5 \cdot 10^{12}$ Э отвечает энергии $\hbar\omega_H = 57{,}75$ кэВ, а энергия второй гармоники $2\hbar\omega_H = 115{,}5$ кэВ. Проблемы, возникающие здесь в связи с необходимостью учитывать релятивистские и квантовые поправки, влияние плазмы и поляризацию вакуума, весьма многогранны и интересны (см. [245] и указанную там литературу).

Вернемся, однако, к синхротронному излучению.

Для оценок полей и энергий, при которых излучаются волны с различными частотами, удобно воспользоваться вытекающей из (17.81) формулой

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{H_{\perp,2}}{H_{\perp,1}} \frac{E_2^2}{E_1^2}. \tag{17.82}$$

Пусть, например, $\nu_1 = 3 \cdot 10^8$ Гц ($\lambda_1 = c/\nu_1 = 1$ м) в типичном для Галактики поле $H_{\perp,1} = 3 \cdot 10^{-6}$ Э. Тогда, согласно (17.81), энергия излучающих электронов $E_1 \sim 5 \cdot 10^9$ эВ. В том же поле $H_{\perp,2} = H_{\perp,1}$ волны оптических частот $\nu_2 \sim 10^{14}$—10^{15} Гц ($\lambda = 0{,}3$—3 мкм) могут излучать лишь электроны с энергией $E_2 \sim 5 \cdot 10^{12}$ эВ. Для рентгеновских лучей $\nu_2 \sim 10^{18}$ Гц и, следовательно, при неизменном магнитном поле электроны уже должны иметь энергию $E_2 \sim 3 \cdot 10^{14}$ эВ.

Нужно помнить, что синхротронные потери пропорциональны $H_\perp^2 E^2$ (см. (4.39)), и поэтому частицы с очень высокой энергией или при движении в сильном поле быстро замедляются. Оценку энергии и «времени жизни» в магнитном поле удобно производить с помощью формул (4.41) и (4.42). При этом в формуле (4.42) энергию электрона можно выразить через характерную частоту его излучения (17.81) и, таким образом, получить непосредственную связь между наблюдаемой частотой и характерным временем жизни (временем, за которое энергия уменьшается вдвое) излучающих электронов:

$$T_m = \frac{5 \cdot 10^8}{H_\perp^2} \frac{mc^2}{E} \text{ с} \approx \frac{5{,}5 \cdot 10^{11}}{H_\perp^{3/2} \nu^{1/2}} \approx \frac{1{,}8 \cdot 10^4}{H_\perp^{3/2} \nu^{1/2}} \text{ лет}. \tag{17.83}$$

Здесь $H_\perp$ измеряется в эрстедах и ν — в герцах. Время T_m, выраженное через частоту, имеет, разумеется, несколько условный характер, поскольку в качестве ν выбрана частота, отвечающая максимуму в спектре излучения моноэнергетических электронов.

В поле $H_\perp = 3\cdot10^{-6}$ Э время T_m для электронов с энергией $5\cdot10^9$, $5\cdot10^{12}$ и $3\cdot10^{14}$ эВ составляет соответственно $2\cdot10^8$, $2\cdot10^5$ и $3\cdot10^3$ лет. Для нашей Галактики и вообще для нормальных галактик, для которых значение $H_\perp = 3\cdot10^{-6}$ Э может считаться типичным, характерное время T_m порядка 10^5 лет и тем более порядка 10^3 лет весьма невелико, и поэтому естественно, что оптическое и рентгеновское синхротронные излучения будут слабыми. Положение может измениться лишь в условиях мощной инжекции электронов высокой энергии в межзвездное пространство из каких-то источников, например из оболочек сверхновых звезд.

Как сказано, оптическое и рентгеновское синхротронные излучения полностью описываются приведенными ранее формулами (см. гл. 5; условие (17.80) считается выполненным). Кроме того, возникает даже упрощение, связанное с тем, что на высоких частотах можно пренебречь отличием от единицы показателя преломления $\tilde{n}(\omega)$ в излучающей области, а также реабсорбцией и вращением плоскости поляризации в космической плазме. Учитывать же нужно лишь поглощение излучения на пути от источника к Земле или же в самом источнике (газ, пыль).

Для удобства приведем здесь тем не менее несколько выражений, полезных при расчетах. В рентгеновской области, а иногда и в оптике часто пользуются не потоком энергии, а потоком или интенсивностью по числу частиц (фотонов), которые мы обозначаем соответственно через F_ν и J_ν. Переход, очевидно, достигается делением энергетических величин на энергию фотона $h\nu$. Таким образом, согласно (5.48), интенсивность по числу фотонов равна

$$J(\nu) = \frac{I_\nu}{h\nu} = 3{,}26\cdot10^{-15} a(\gamma)\,\mathscr{L}K_e H^{1/2(\gamma+1)} \times \left(\frac{6{,}26\cdot10^{18}}{\nu}\right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}\cdot\text{Гц}} \qquad (17.84)$$

или, если перейти от частоты ν к энергии фотона $\epsilon_\Phi = h\nu$, выраженной в эВ,

$$J(\epsilon_\Phi) = J(\nu)\frac{d\nu}{d\epsilon_\Phi} = 0{,}79 a(\gamma)\,\mathscr{L}K_e H^{1/2(\gamma+1)} \left(\frac{2{,}59\cdot10^{4}}{\epsilon_\Phi}\right)^{1/2(\gamma+1)} \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}\cdot\text{эВ}}; \qquad (17.85)$$

здесь $\mathscr{L}$ измеряется в см, K_e — в эрг$^{\gamma-1}\cdot$см$^{-3}$, H — в Э и ϵ_Φ — в эВ.

Аналогично поток фотонов от дискретного источника (см. (5.59)) равен

$$F(\nu)=\frac{\Phi(\nu)}{h\nu}=$$

$$=3{,}26\cdot10^{-15}a(\gamma)\frac{VK_eH^{1/2(\gamma+1)}}{R^2}\left(\frac{6{,}26\cdot10^{18}}{\nu}\right)^{1/2(\gamma+1)}\frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Гц}}, \quad (17.86)$$

или, будучи отнесенным к энергии фотона $\epsilon_\Phi=h\nu=$ $=4{,}14\cdot10^{-15}\nu$ эВ,

$$F(\epsilon_\Phi)=0{,}79a(\gamma)\frac{VK_eH^{1/2(\gamma+1)}}{R^2}\left(\frac{2{,}59\cdot10^{4}}{\epsilon_\Phi}\right)^{1/2(\gamma+1)}\frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{эВ}}. \quad (17.87)$$

Далее, если электронный спектр можно считать одинаковым во всем объеме источника, удобно пользоваться следующим выражением для отношения потоков излучения на разных частотах ν_1 и ν_2 (см. (5.59) или (17.86))

$$\frac{\Phi_2(\nu_2)}{\Phi_1(\nu_1)}=\frac{V_2}{V_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{1/2(\gamma+1)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{1/2(\gamma-1)}. \quad (17.88)$$

Здесь считается, что излучение на частоте ν_1 возникает в источнике в области с объемом V_1, где напряженность магнитного поля равна H_1, а излучение на частоте ν_2 приходит из объема V_2 с полем H_2. Тогда, если речь идет об излучении электронов с одной и той же энергией $E_2=E_1$, то частоты ν_1 и ν_2 связаны соотношением (17.82), а отношение потоков равно

$$\frac{\Phi_2(\nu_2)}{\Phi_1(\nu_1)}=\frac{V_2H_2}{V_1H_1}. \quad (17.89)$$

Формулы (17.88) и (17.89) полезны, если в малой области V_2 источника с полным объемом V_1 поле $H_2\gg H_1$, а в спектре электронов имеется обрыв со стороны высоких энергий, так что электроны из объема V_1 не излучают на частотах $\nu_2\gg\nu_1$, а излучение из объема V_2 на частотах ν_1 мало́ вследствие малости этого объема. Тогда наблюдаемое отношение потоков на частотах ν_2 и ν_1 от всего источника будет определяться отношением потоков из областей V_2 и V_1. Такая ситуация может осуществляться, например, в случае туманности, имеющей в центральной части область с очень сильным магнитным полем.

Характерной особенностью синхротронного излучения является то, что в упорядоченном поле это излучение в высокой степени поляризовано. Так, для степенного спектра электронов $N_e(E)=K_eE^{-\gamma}$ в однородном поле степень поляризации (см. (5.46)) равна

$$\Pi_0=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{\gamma+1}{\gamma+7/3}. \quad (17.90)$$

В рентгеновской области, как отмечалось, отсутствуют деполяризующие факторы, обусловленные наличием среды (разные формы фарадеевского вращения). Поэтому степень поляризации

при данном показателе γ отражает лишь степень упорядоченности поля, достигая максимального значения (17.90) в однородном поле.

Тормозное излучение поляризовано лишь в том случае, если анизотропна функция распределения электронов (или, строго говоря, функция распределения для относительной скорости сталкивающихся частиц) *). Например, поляризация тормозного излучения возникает при наличии направленного потока электронов, рассеивающихся в холодной плазме. В космических условиях, если не говорить о Солнце и некоторых нестационарных областях, нет особых оснований ожидать существования сколько-нибудь сильной анизотропии распределения электронов по скоростям (см. гл. 16; кроме того, при наличии соударений релаксация анизотропного распределения электронов по скоростям, т. е. изотропизация, будет проходить еще быстрее, чем в бесстолкновительном случае). При рассеянии электромагнитного излучения на частицах степень поляризации в принципе может быть большой. Это хорошо известно, например, при рассеянии света в газах или в плазме (см. гл. 15). Однако в случае рассеяния мягких неполяризованных фотонов на релятивистских электронах с образованием жестких фотонов (рентгеновских и гамма-лучей) степень поляризации последних порядка $(mc^2/E)^2$, т. е. очень мала.

Для всех других механизмов излучения, кроме синхротронного и синхро-комптоновского (см. конец гл. 5), ожидать в космических условиях заметной поляризации также не приходится. Тем самым обнаружение не очень малой поляризации космического рентгеновского и гамма-излучения, как и в случае космического радиоизлучения, позволяет обычно считать соответствующее излучение синхротронным (или синхро-комптоновским). В частности, синхротронная (а не тормозная) природа рентгеновского излучения Крабовидной туманности была окончательно выявлена только в результате наблюдения поляризации рентгеновского излучения.

Если обнаружение поляризации рентгеновского излучения свидетельствует об его синхротронной природе, то обратное заключение, разумеется, несправедливо — достаточно сказать, что в хаотическом магнитном поле синхротронное излучение не поляризовано **). Таким образом, установить природу космического

*) Разумеется, ситуация может измениться, если неполяризованное тормозное излучение до поступления к месту наблюдения рассеивается или отражается. Например, наблюдаемая небольшая поляризация ($\Pi \approx 4\%$) тормозного излучения ($h\nu \gtrsim 10$ кэВ) горячей плазмы, образующейся в короне при солнечных вспышках, объясняется, возможно, томсоновским рассеянием («отражением»), происходящим в плотных слоях фотосферы [246а].

**) Нужно, кроме того, иметь в виду, что поляриметрические измерения в рентгеновской области, особенно при невысокой степени поляризации и для сравнительно слабых потоков космического рентгеновского излучения, весьма затруднительны и практически еще почти не проводятся.

рентгеновского излучения весьма нелегко. Основным критерием (помимо поляризации) является форма спектра. Тормозное излучение горячей плазмы имеет экспоненциальный спектр (см., например, (17.24)) и кроме того в случае горячей плазмы могут наблюдаться в принципе линии характеристического рентгеновского излучения тяжелых элементов (в первую очередь железа). Комптоновское рентгеновское излучение порождается релятивистскими электронами, имеющими обычно степенной спектр (17.76) с некоторым показателем γ, причем для рентгеновского излучения $J_\gamma(E_\gamma) \propto E_\gamma^{-\beta}$, $\beta = {}^1/_2(\gamma + 1)$ (см. (17.78)) и $I_\gamma(E_\gamma) \propto E_\gamma^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1/_2(\gamma - 1)$. Кроме того для данного известного объекта релятивистские электроны могут давать также синхротронное излучение, спектр которого позволяет определить γ (напомним еще раз, что для синхротронного излучения, как и для комптоновского, $I(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$, $\alpha = {}^1/_2(\gamma - 1)$, см. гл. 5). На таком пути, как уже упоминалось, при известном поле излучения, в котором происходит комптоновское рассеяние, можно также найти магнитное поле в той же излучающей области. К сожалению, на практике все это не так просто: прежде всего нужно отметить, что спектры не являются строго степенными и одни и те же релятивистские электроны дают синхротронное и комптоновское излучение с данным α лишь в ограниченных и заранее неизвестных интервалах частот $\Delta\nu$ (в радио и рентгеновском диапазонах). Кроме того, для тепловых источников, но с изменяющейся в пространстве температурой, спектр тормозного излучения может оказаться практически степенным (такова ситуация для некоторых моделей солнечных вспышек [246б]). В будущем тем не менее можно ожидать большого прогресса именно на пути комбинированных (комплексных) исследований излучения в самом широком диапазоне частот (радио, оптический, рентгеновский) в сочетании с поляриметрическими измерениями, а также с измерениями с высоким угловым разрешением. Собственно такие измерения уже осуществляются после запуска в ноябре 1978 г. рентгеновской обсерватории «Эйнштейн» (HEAO B). С помощью находящегося на этой обсерватории рентгеновского телескопа достигается при энергии фотонов $E < 4$ кэВ угловое разрешение около $4''$. Такое разрешение лишь в несколько раз хуже, чем у лучших наземных оптических телескопов. Чувствительность прибора в интервале 1—3 кэВ достигает $1{,}3 \cdot 10^{-14}$ эрг/(см^2·с) [247]. В согласии с этим удалось, например, зафиксировать рентгеновское излучение от слабых (в рентгеновском диапазоне) галактик со светимостью $L_X = 4 \cdot 10^{38}$ эрг/с, находящихся на расстоянии 20 Мпк. Вместе с тем самая большая рентгеновская светимость (она отвечает некоторым квазарам) достигает 10^{47} эрг/с. Такие квазары доступны наблюдениям при любом их реальном расстоянии R. Действительно, максимальное наблюдаемое расстояние до ква-

заров отвечает красному смещению $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 \sim 3$. При таких z уже нельзя пользоваться законом $\Phi_X = L_X/4\pi R^2$, но, как показывает расчет по формулам релятивистской космологии (см. [247], с. L11), например, при $L_X = 10^{47}$ эрг/с и $z = 3$ поток $\Phi_X \sim 3 \cdot 10^{-13}$ эрг/(см^2·с).

Что касается галактических источников, то наблюдались звезды со светимостью $L_X \sim 10^{26}$ эрг/с (для энергий в интервале 0,1—3 кэВ) и большей. Между тем для O-звезд и некоторых других $L_X \sim 10^{30}$ эрг/с (в интервале 0,5—3,5 кэВ). Таким образом, стала реальностью рентгеновская астрономия «обычных» звезд. Между тем еще недавно наблюдать в рентгеновском диапазоне удавалось лишь «особые» объекты: немногие пульсары (в первую очередь пульсар PSR 0532 в Крабовидной туманности), рентгеновские пульсары — нейтронные компоненты тесных двойных звезд и некоторые другие тесные двойные звезды. Наблюдались также оболочки сверхновых звезд и немногочисленные внегалактические источники. Рентгеновское излучение от оболочек сверхновых звезд имеет либо синхротронную природу (Крабовидная туманность), либо представляет собой в основном тормозное излучение горячей плазмы (характерная температура 10^6—10^8 К, которой отвечает средняя энергия частиц, равная 10^2—10^4 эВ). Появление мощных рентгеновских источников в составе тесных двойных звездных систем вполне понятно — в таких случаях интенсивно идет аккреция, т. е. перетекание плазмы от более легкой на более тяжелую звезду. При этом особенно для компактной звезды (белый карлик, нейтронная звезда) потоки плазмы при приближении к звездной фотосфере достигают большой скорости и при их торможении («падении» на звезду) плазма сильно разогревается ($T \sim 10^7$—10^9 К). Если звезда обладает достаточно сильным магнитным полем, то может оказаться существенным не только тормозное, но и магнитотормозное излучение.

Теперь с помощью HEAO B и ряда других спутников наблюдаются уже не только исключительные объекты, но многочисленные и разнообразные галактические и внегалактические источники [220, 247, 248]. Вообще можно сказать, что менее чем через 20 лет после своего зарождения (1962 г.), несолнечная рентгеновская астрономия возмужала и превратилась, наряду с оптической и радиоастрономией, в один из важнейших разделов астрономии в целом. В такой ситуации практически совершенно невозможно в рамках настоящей книги излагать результаты рентгеноастрономических исследований [247, 248], и мы ограничимся еще лишь несколькими замечаниями и оценками.

Мощность (рентгеновская светимость) галактических рентгеновских источников L_X достигает 10^{37}—10^{38} эрг/с *), что на

*) Несомненно, наша Галактика в этом отношении не является каким-либо исключением. Аналогичные источники обнаружены в Магеллановых Облаках и, очевидно, присутствуют и в других галактиках.

4—5 порядков больше полной светимости Солнца $L_\odot = 3{,}86 \cdot 10^{33}$ эрг/с. При $L_X \sim 10^{38}$ эрг/с и изотропном излучении рентгеновский поток на Земле равен

$$\Phi_X = \frac{L_X}{4\pi R^2} \sim \frac{L_{X/10^{38}}}{[R\ (\text{пк})]^2} \sim \frac{1}{(R\ (\text{пк}))^2}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \qquad (17.91)$$

где R(пк) — расстояние до источника в парсеках.

В согласии с этой оценкой для Крабовидной туманности ($R \approx 2000$ пк) во всем рентгеновском диапазоне $\Phi_X \approx 2 \cdot 10^{-7}$ эрг/(см^2·с) (поток фотонов с энергией 2—10 кэВ составляет $F_X \approx 2$ фотон/(см^2·с)). Для ряда рентгеновских источников — двойных звезд светимость также лежит в пределах $3 \cdot 10^{36} - 3 \cdot 10^{38}$ эрг/с [248в].

Для сравнения заметим, что черное тело с температурой T (в градусах) с единицы поверхности излучает поток

$$\Phi_0 = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 \varkappa^2}{60\hbar^2 c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4}, \quad \Phi(R) = \Phi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \qquad (17.92)$$

где $\Phi(R)$ — поток от черной сферы радиуса r, наблюдаемый на расстоянии R.

Поток солнечного излучения на Земле равен

$$\Phi_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi R^2} = 1{,}4 \cdot 10^6\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$$

($R \approx 1{,}5 \cdot 10^{13}$ см, $L_\odot = 4\pi r_\odot^2 \Phi_\odot$, $T_\odot \approx 5700$ К), но излучение концентрируется в оптической части спектра. Рентгеновский поток от спокойного Солнца равен $\Phi_{\odot,X} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ эрг/(см^2 · с) и лишь во время мощных вспышек достигает значения $\Phi_{\odot,X} \sim 1$ эрг/(см^2 · с). Отсюда следует, что рентгеновское излучение ближайшей звезды ($R \sim 4\ 10^{18}$ см), если она излучает, как Солнце, будет весьма слабым: $\Phi_X \sim 10^{-11}\ \Phi_{\odot,X} \leqslant 10^{-11}$ эрг/(см^2·с). Именно поэтому обнаружение в 1962 г. яркой рентгеновской «звезды» в Скорпионе (Sco X-1), для которой $\Phi_X \sim 10^{-6}$ эрг/(см^2 с), оказалось непредвиденным. Поскольку для Sco X-1 расстояние $R \approx 350$ пк [247г], полная рентгеновская светимость этого источника ($L_X(0{,}5 < E_X < 25$ кэВ) $\approx 5 \cdot 10^{36}$ эрг/с) не только не превосходит светимости Крабовидной туманности, но на порядок слабее. Разумеется, большая рентгеновская светимость связана с относительно большой энергией электронов и конкретно для тепловых источников с их высокой температурой. Так, звезда с размерами Солнца и поверхностной температурой $T \sim 6 \cdot 10^6$ К обладала бы чудовищной светимостью $L_X \sim 3 \cdot 10^{45}$ эрг/с, причем именно в рентгеновской области (максимум интенсивности в спектре черного тела приходится на длину волны $\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965 \varkappa T} \approx \frac{3 \cdot 10^7}{T\ (\text{К})}$ Å).

Обычная звезда столь высокой температурой обладать не может (речь идет о фотосфере, излучающей примерно, как черное тело) именно в силу слишком большой, практически невосполнимой потери энергии на излучение. Для нейтронной звезды с радиусом $r \sim 7 \cdot 10^5$ см $\sim 10^{-5}\ r_\odot$ при $T \sim 6 \cdot 10^6$ К уже $L_X \sim 3 \cdot 10^{35}$ эрг/с, что на некоторое время допустимо. Что же касается не столь компактных тепловых источников, то они являются «тонкими» (или, как говорят, оптически тонкими; мы избегаем употреблять этот термин, поскольку для рентгеновского диапазона он может привести к недоразумению). Если воспользоваться поэтому формулами (17.36) и (17.37), то легко видеть, что при $T \sim 6 \cdot 10^6$ К светимостью $L_X \sim 10^{38}$ эрг/с будет обладать, например, облако плазмы с объемом $V \sim 10^{30}$ см^3 и со сравнительно небольшой массой $M \sim 10^{22}$ г $\sim 10^{-11}\ M_\odot$ (масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г); при этом средняя электронная концентрация в облаке $N \sim \sqrt{N^2} \sim 10^{16}$ см$^{-3}$.

Внегалактические рентгеновские дискретные источники — это галактики (в частности, радиогалактики), квазары и скопления галактик. Рентгеновская светимость нормальной галактики (в том числе нашей Галактики) не превосходит 10^{39}—10^{40} эрг/с. Поэтому поток от такой галактики, находящейся на расстоянии $R \sim 10^7$ пк (расстояние до радиогалактики Дева A≡NGC 4486≡≡ $\equiv M$ 87), составил бы $\Phi_X \sim 10^{-12}$—10^{-13} эрг/(см^2·с) (см. (17.91)). Между тем радиогалактика M 87 излучает значительно более мощное рентгеновское излучение, так что для нее $L_X \sim$ $\sim 10^{43}$—10^{44} эрг/с. Как в этом случае, так и в случае других мощных рентгеновских источников — галактик, квазаров и скоплений галактик — излучение явно не сводится к совокупности излучения «рентгеновских звезд» и рентгеновскими источниками являются релятивистские электроны (синхротронный и комптоновский механизмы) или горячая плазма (тормозной механизм), заполняющие галактику, скопление галактик или «корону» квазара.

Особенно «просто» в принципе дело обстоит в случае горячей плазмы в протяженном источнике типа скопления галактик. Например, при температуре $T \sim 6 \cdot 10^6$ К плазма объемом $V \sim 3 \cdot 10^{73}$ см^3 будет иметь светимость $L_X \sim 10^{44}$ эрг/с при $N \sim 10^{-3}$ см$^{-3}$, чему отвечает масса $M \sim 2 \cdot 10^{-24}\ NV \sim 10^{13}\ M_\odot$; такая масса для скопления галактик еще допустима. Но уже этот пример показывает, что объяснить гигантские светимости мощных рентгеновских внегалактических источников не всегда легко или, правильнее сказать, такое объяснение сопряжено с далеко идущими предположениями, которые должны контролироваться (и в принципе вполне могут контролироваться) целым рядом способов.

Отсюда видна вместе с тем иключительная потенциальная ценность рентгеновской астрономии для изучения горячей плазмы в космосе. Относится это, в частности, к Солнцу. Бли-

зость источника позволяет в данном случае изучать детали, конечно, совершенно недоступные в отношении других звезд. В настоящее время рентгеновская астрономия Солнца уже весьма развита и соответствующие наблюдения широко используются, например, в теории солнечных вспышек [249].

Помимо дискретных источников, наблюдается рентгеновский фон, т. е. излучение, приходящее со всех направлений и не имеющее на небесной сфере сколько-нибудь выраженной «зернистой» структуры. Не исключено, что такой фон тем не менее связан (частично или даже полностью) с совокупностью неразрешаемых аппаратурой дискретных источников. Вместе с тем вполне возможно и даже вероятно существование какого-то (истинного) рентгеновского фона, образующегося в межзвездном и особенно в межгалактическом пространстве. Фон возникает в результате тормозного излучения горячего межгалактического газа и (или) комптоновского рассеяния релятивистских электронов на реликтовом тепловом излучении (в межгалактическом пространстве), а в Галактике, кроме того, на излучении другой природы (имеется в виду, в частности, комптоновское рассеяние на инфракрасных и оптических фотонах).

Удельный вес дискретных источников в составе фона еще сколько-нибудь полно не выяснен. Но все же многое уже ясно (см. [247], с. 1). Так, при энергии $E_x > 2$ кэВ заведомо можно утверждать, что основная составляющая фона — внегалактическая (при $E_x < 1$ кэВ галактическая составляющая уже значительна). Далее, внегалактический фон в существенной своей части образуется в удаленных областях с $z > 1$. Наконец, утверждается, что в интервале $E_x = 1$—3 кэВ известные дискретные источники (квазары и др.) вносят $37 \pm 16\%$ от всего фона. Выделение диффузной части фона — весьма актуальная задача, поскольку количество газа в метагалактическом пространстве еще неизвестно, а этот газ является одним из источников диффузного фона. Данные о спектре фона приведены в [250], а также в [247].

Рентгеновская астрономия, т. е. изучение космического рентгеновского излучения и сопоставление соответствующих данных с теорией и всей остальной астрономической информацией, открывает исключительно широкие и важные для астрономии в целом возможности исследования горячей космической плазмы и релятивистских космических электронов. Значение этого астрономического метода трудно переоценить.

Глава 18

ГАММА-АСТРОНОМИЯ (НЕКОТОРЫЕ ПРОЦЕССЫ)

Гамма-излучение, генерируемое протонно-ядерной компонентой космических лучей. Пример Магеллановых Облаков и межзвездной среды. Поглощение рентгеновских и гамма-лучей

Два важных механизма гамма-излучения, а именно тормозной и комптоновский, уже были рассмотрены в гл. 17. То же относится к синхротронному механизму, который в области гамма-лучей представляет меньший интерес, поскольку может практически оказаться существенным только в областях с очень сильным полем (например, вблизи пульсаров). Что же касается тормозного излучения релятивистских электронов и особенно их комптоновского рассеяния, то их вклад может быть заметен или даже играть определяющую роль во всем гамма-диапазоне. Например, при рассеянии на оптических фотонах ($\epsilon_\Phi \sim 1$ эВ) классическая область (17.66) простирается вплоть до энергий электронов $E \sim 5 \cdot 10^{10}$ эВ, а образующиеся при этом фотоны имеют энергию $E_\gamma \sim \epsilon_\Phi (E/mc^2)^2 \lesssim 10^{10}$ эВ (см. (17.69)). В области же еще больших энергий электронов, особенно в квантовой области (17.71), энергия комптоновских фотонов $E_\gamma \sim E$. Вместе с тем при очень высоких энергиях «условия существования» для электронов в силу больших потерь менее благоприятны, чем для протонов и ядер. Кроме того, электроны в космосе ускоряются менее эффективно, чем протоны, и во всяком случае в Галактике интенсивность электронной компоненты (по крайней мере в районе Солнечной системы) на два порядка меньше, чем протонной (см. гл. 16). Поэтому можно думать, что с ростом энергии космическое гамма-излучение порождается в основном протонно-ядерной компонентой космических лучей.

Остается еще неясным, однако, при какой энергии E_γ гамма-излучение такой природы, связанное в основном с распадом π^0-мезонов (см. ниже), начинает доминировать. Дело в том, что в области энергий $E_\gamma \sim 50$—200 МэВ, в которой по преимуществу проводятся измерения (особенно часто в литературе приводятся данные о потоке при $E_\gamma > 100$ МэВ [251, 252]), тормозное гамма-излучение, как мы знаем, создается в основном электронами тоже с энергией $E_e \sim E_\gamma \sim 50$—$200$ МэВ. Но о такой мягкой (или субкосмической) электронной компоненте вдали от Земли мало что известно. В ту же область энергий вносят

вклад и дискретные гамма-источники (обнаружены уже десятки таких источников). В результате разделить галактическое гамма-излучение на компоненты достаточно надежно еще не удалось; для этого, по-видимому, понадобятся более точные измерения при $E_\gamma \gtrsim 200$—300 МэВ.

Помимо гамма-лучей с $E_\gamma > 50$—100 МэВ уже проводятся наблюдения гамма-лучей ядерной природы [238], гамма-лучей с высокой энергией $E_\gamma > 10^{11}$ эВ и некоторые другие [251, 252]. Вместе с тем нужно подчеркнуть, что гамма-астрономия почти вдвое моложе рентгеновской астрономии и еще находится в стадии становления. Перспективы ее развития представляются исключительно многообещающими (см. [220, 238, 239, 251, 252] и указанную там литературу).

Все механизмы космического гамма-излучения и во всех областях энергии представляют интерес, но такое в достаточной мере тривиальное утверждение сделано здесь лишь для того чтобы выделить все же возможность получить методом гамма-астрономии надежные сведения о протонно-ядерной компоненте космических лучей вдали от Земли. В гл. 5 и 16 уже подчеркивалось, что отсутствие соответствующих прямых данных создает принципиальные трудности на пути развития астрофизики космических лучей (формально речь идет о незнании коэффициентов $\varkappa_e = w_{\text{к. л}}/w_e$ и $\varkappa_H = w_H/w_{\text{к. л}}$; см. (16.16)).

Остановимся на этом вопросе подробнее, не опасаясь некоторых повторений. Кроме того, воспользуемся некоторыми данными наблюдений, хотя наша цель состоит не столько в сообщении конкретных результатов, сколько в том, чтобы проиллюстрировать характер оценок и аргументации, используемых в астрофизике высоких энергий.

Протоны и ядра, входящие в состав космических лучей, претерпевают соударения с протонами и ядрами межгалактического или межзвездного газа. В результате ядерных соударений рождаются, в частности, π^0-мезоны и Σ^0-гипероны, быстро распадающиеся с образованием гамма-лучей. Распад π^0-мезона с вероятностью 98,8% (т. е. практически всегда) происходит по каналу $\pi^0 \to 2\gamma$, в силу чего энергия гамма-лучей от распада покоящегося π^0-мезона равна $E_\gamma = {}^1/_2 m_\pi c^2 = 67{,}5$ МэВ; среднее время жизни π^0-мезона составляет $0{,}84 \cdot 10^{-16}$ с. Σ^0-гиперон распадается (фактически с вероятностью 100%) по каналу $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$, энергия $E_\gamma \approx 77$ МэВ, среднее время жизни Σ^0-гиперона меньше 10^{-14} с. Помимо непосредственного рождения π^0-мезонов при ядерных соударениях, они образуются также в результате распада различных мезонов и гиперонов ($K^\pm \to \pi^\pm + \pi^0$, $\Lambda \to n + \pi^0$ и т. д.), в результате чего опять же испускаются γ-лучи. Вероятность и кинематика всех существенных реакций достаточно хорошо известны [239, 251, 252], что позволяет вычислить спектр гамма-лучей с точностью, вполне достаточной для обсуждаемых астрофизических приложений. При

этом существенно, что поток космических гамма-лучей генерируется, конечно, не моноэнергетическими частицами, а изотропными по направлениям космическими лучами с некоторой интенсивностью $J_{к.л}(E)$. Поэтому происходит усреднение по спектру и интенсивность гамма-лучей с энергией E_γ равна

$$J_\gamma(E_\gamma) = \tilde{N}(\mathscr{L}) \int_{E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E) J_{к.л}(E)\, dE, \qquad (18.1)$$

где σ — соответствующее эффективное сечение, усредненное с учетом химического состава космических лучей и газа (учитывается, конечно, и то, что при распаде π^0-мезона образуются два фотона), а $\tilde{N}(\mathscr{L}) = \int_0^{\mathscr{L}} N(R)\, dR$ — количество частиц в газе вдоль луча зрения (в выражении (18.1), совпадающем с (17.11), а также в приводимых ниже формулах, интенсивность $J_{к.л}$ считается не зависящей от координат). Интегральная интенсивность равна

$$J_\gamma(>E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty} J_\gamma(E_\gamma)\, dE_\gamma = \bar{q}_\gamma \tilde{N}. \qquad (18.2)$$

Здесь q_γ — излучательная способность по числу фотонов, отнесенная к единице телесного угла (см. (17.7)); нужно отметить, что в литературе величину q_γ обозначают также через $q_\gamma/4\pi$ и $\varepsilon_\gamma/4\pi$, где $q_\gamma \equiv \varepsilon_\gamma$ имеет смысл излучательной способности во всех направлениях для изотропного излучения (мы такую величину обозначали через $\tilde{q} = 4\pi q$; см. (17.7)). Черта над $\bar{q}_\gamma = \equiv (\sigma J_{к.л})$ в (18.2) указывает на интегрирование по спектру космических гамма-лучей, ясное из (18.1) и (18.2).

Для потока γ-лучей от дискретного источника имеем

$$F_\gamma(>E_\gamma) = \int_\Omega J_\gamma(>E_\gamma)\, d\Omega \approx \frac{\overline{(\sigma J_{к.л})}\, N(V)}{R^2} \approx \frac{5\cdot 10^{23}\, \overline{(\sigma J_{к.л})}\, M}{R^2}\ \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}}, \qquad (18.3)$$

где Ω — телесный угол, R — расстояние до источника (в см), $N(V) = NV$ — число частиц (ядер) в источнике (V — объем, N — средняя концентрация газа) и $M = 2\cdot 10^{-24}\, N(V)$ — масса газа в источнике в граммах (химический состав источника предполагается отвечающим средней распространенности элементов, и поэтому, особенно для учета ядер He, масса «среднего» ядра в газе считается равной $2\cdot 10^{-24}$ г). Для спектра космических лучей у Земли (интенсивность $J_{к.л,0}(E) \equiv J_0(E)$) значение $\bar{q}_{\gamma,0} = \overline{\sigma J_0(>E_\gamma)} = \int_{E_\gamma}^{\infty} \int_{E=E_\gamma}^{\infty} \sigma(E_\gamma, E) J_{к.л,0}(E)\, dE\, dE_\gamma$ приведено на

рис. 18.1, взятом из [252а]. Ниже мы будем пользоваться значением $\overline{\sigma J_0(E_\gamma > 100\ \text{МэВ})} = 10^{-26}\ \text{с}^{-1}\cdot\text{ср}^{-1}$ (см., впрочем, ниже и другие значения) и, следовательно,

$$F_\gamma(E_\gamma > 100\ \text{МэВ}) = \frac{10^{-26} NV\,(w_{\text{к. л}}/w_0)}{R^2} = \\ = \frac{5\cdot 10^{-3} M\,(w_{\text{к. л}}/w_0)}{R^2}\ \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}}, \qquad (18.4)$$

где $w_{\text{к. л}}$ — плотность энергии космических лучей в источнике в предположении, что форма их спектра там такая же, как у Земли (поэтому $w_{\text{к. л}}/w_0 = J_{\text{к. л}}/J_{\text{к. л, 0}}$, где $w_{\text{к. л, 0}} \equiv w_0 \sim$ $\sim 10^{-12}$ эрг/см^3 — плотность энергии космических лучей у Земли; см. (16.9)). В пределах сделанного приближения для источников типа Галактики, где доминирует неионизированный атомарный водород, $M \approx 1{,}2\ M_{\text{HI}}$, где M_{HI} — масса нейтрального водорода; точность расчетов при этом может быть повышена, так как из данных о линии водорода ($\lambda = 21$ см) получается сразу отношение M_{HI}/R^2. В дальнейшем мы не будем стремиться к подобным уточнениям, которые сейчас еще не актуальны.

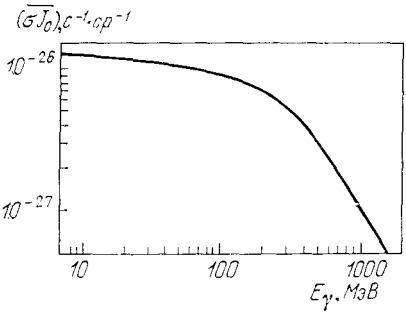


Рис. 18.1. Усредненное по спектру галактических космических лучей значение величины $\overline{\sigma J_\gamma(>E_\gamma)}$ в зависимости от энергии генерируемых гамма-лучей.

Заметим, наконец, что спектр гамма-лучей ядерного происхождения, о которых идет речь, по понятным причинам сосредоточен в основном в области энергий $E_\gamma \gtrsim 50$—100 МэВ (красное смещение здесь, разумеется, не учитывается, и мы поэтому имеем в виду не слишком удаленные источники). Сказанное видно из рис. 18.1 и более конкретно из следующего примера [252в]: для гамма-лучей от распада π^0-мезонов отношение

$$\xi = \frac{F_\gamma(E_\gamma > 50\ \text{МэВ}) - F_\gamma(E_\gamma > 100\ \text{МэВ})}{F_\gamma(E_\gamma > 100\ \text{МэВ})} = 0{,}12.$$

Вместе с тем для релятивистских электронов со спектром $J_e(E) = K_e E^{-2{,}6}$, использованным в [252в], в случае тормозных гамма-лучей $\xi = 2{,}03$, а для гамма-лучей синхротронного происхождения или испускаемых при обратном комптоновском рассеянии $\xi = 0{,}74$. Таким образом, спектральные измерения потока гамма-лучей позволяют в принципе установить их «ядер-

ную» природу. Если это сделано, то из измерений потока $F_\gamma(E_\gamma > 100$ МэВ) или соответствующей интенсивности J_γ мы сразу же получаем отношение $w_{к.\,л}/w_0$ в источнике, т. е. основной недостающий сейчас параметр. При этом, конечно, делается предположение о подобии спектров космических лучей в источнике и у Земли. Но для такого предположения имеются известные основания и кроме того в реальных условиях оно, по-видимому, может привести лишь к появлению численного коэффициента порядка единицы. Во всяком случае, даже определение указанным способом плотности энергии, или полной энергии $W_{к.\,л} = w_{к.\,л}V$ космических лучей в источниках явилось бы принципиальным шагом вперед.

Сказанное можно конкретизировать на примере Магеллановых Облаков [252б].

Рассмотрение Магеллановых Облаков интересно, конечно, и само по себе. Однако этот пример еще более важен в связи с попытками ответить на вопрос: как наиболее убедительно выяснить судьбу метагалактических моделей происхождения космических лучей? Для этого, как ясно из сказанного в гл. 16, достаточно определить плотность энергии космических лучей $w_{Мг}$ в окружающей Галактику области. Если окажется, что $w_{Мг} \ll w_{к.\,л,} \sim 10^{-12}$ эрг/см^2, то метагалактические модели отпадут. Одним из лучших из известных нам путей решения этой проблемы как раз и представляется измерение потока гамма-лучей от Магеллановых Облаков. Для этих Облаков (Большого Облака — БМО и Малого Облака — ММО) расстояния до Солнца и масса нейтрального водорода соответственно равны

$$R(\text{БМО}) = 55 \text{ кпк}, \quad R(\text{ММО}) = 63 \text{ кпк},$$
$$M_{\text{HI}}(\text{БМО}) = 1{,}1 \cdot 10^{42} \text{ г}, \quad M_{\text{HI}}(\text{ММО}) = 0{,}8 \cdot 10^{42} \text{ г}.$$

Поэтому, согласно (18.4), при $w_{к.\,л} = w_0$

$$\left.\begin{aligned} F_{\gamma,\,\text{БМО}}(E_\gamma > 100 \text{ МэВ}) &\approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ фотон/(см}^2 \cdot \text{с)}, \\ F_{\gamma,\,\text{ММО}}(E_\gamma > 100 \text{ МэВ}) &\approx 1 \cdot 10^{-7} \text{ фотон/(см}^2 \cdot \text{с)}, \end{aligned}\right\} \qquad (18.5)$$

Как уже упоминалось, эти потоки можно вычислить и точнее. Здесь важно другое — потоки (18.5) непосредственно получаются в любых известных метагалактических моделях, ибо в этих моделях роль собственных источников космических лучей в Магеллановых Облаках, как и в Галактике, невелика, и поэтому $w_{Мг} \approx w_{к.\,л,\,г} \approx w_{\text{БМО}} \approx w_{\text{ММО}}$. Напротив, нет никаких оснований ожидать соблюдения такого равенства в галактических моделях. Даже при одинаковой активности источников космических лучей весьма вероятно, что $w_{к.\,л,\,г} > w_{\text{БМО}} > w_{\text{ММО}}$ в силу меньших размеров Облаков и соответственно более быстрого выхода из них космических лучей.

Итак, для убедительного опровержения метагалактических моделей происхождения космических лучей *) достаточно было бы установить, например, что от обоих Облаков, вместе взятых, $F_{\gamma,\,\text{мо}}(E_\gamma > 100\ \text{МэВ}) \ll 3\cdot10^{-7}$ фотон/(см$^2\cdot$с) или $F_{\gamma,\,\text{ммо}} \ll \ll {}^1/_2 F_{\gamma,\,\text{бмо}}$. При уточнении расчетов знак много меньше можно в принципе заменить знаком меньше. Существенно при этом, что любой вклад в поток гамма-лучей, связанный с релятивистскими электронами, приведет только к увеличению потоков F_γ и, следовательно, никак не повлияет на указанную интерпретацию, скажем, результата $F_{\gamma,\,\text{мо}}$ $(E_\gamma > 100$ МэВ$) \ll 3\cdot10^{-7}$ фотон/(см$^2\cdot$с). Назовем такой результат отрицательным и заметим, что имеется, как часто бывает, известная асимметрия при интерпретации положительных и отрицательных результатов эксперимента. Так, если бы измерения потока гамма-лучей от Магеллановых Облаков свидетельствовали о наличии заметного потока $F_{\gamma,\,\text{мо}} \gtrsim 3\cdot10^{-7}$ фотон/(см$^2\cdot$с), (такой результат мы условно называем положительным), то это еще не доказывало бы справедливости метагалактических моделей, ибо такой поток мог бы в принципе генерироваться и космическими лучами (в том числе релятивистскими электронами), ускоренными в самих Облаках [252б].

Необходимая для исследования Магеллановых Облаков чувствительность гамма-телескопов практически еще не достигнута (к началу 1981 г.). Однако изучение скоплений водорода в Галактике уже проводится, причем гамма-метод, очевидно, в равной мере чувствителен к ионизированному ($H^+ \equiv$ p), атомарному (H) и молекулярному водороду (H_2). Между тем другими путями обнаружить присутствие молекул H_2, а их немало, весьма трудно. Комбинируя гамма-данные с другими методами (в основном с детектированием радиолинии атомарного водорода с длиной волны $\lambda = 21$ см), можно эмпирически найти излучательную способность $\bar{q}_\gamma$ для межзвездной среды в Галактике. Согласно [253] имеем

$$4\pi\bar{q}_{\gamma,\,0}(E_\gamma > 100\ \text{МэВ}) = (2{,}3\pm0{,}3)\cdot10^{-25}\ \text{фотон/(атом H}\cdot\text{с) [253а]},$$

$$4\pi q_{\gamma,\,0}(E_\gamma > 100\ \text{МэВ}) = 2{,}9\cdot10^{-25}\ \text{фотон/(атом H}\cdot\text{с) [253б]}. \qquad (18.6)$$

Отметим, что эти величины заметно больше использованного выше (см. (18.4) и [252а]) значения $4\pi\bar{q}_{\gamma,\,0} = 4\pi\cdot10^{-26}$. Последнее получено, однако, путем расчета с учетом лишь протонно-ядерной компоненты галактических космических лучей; результ-

*) Существенно, что речь идет о всех известных моделях, тогда как измерения изотропного фона гамма-лучей, генерируемых в межгалактическом пространстве (см. [59, 226, 252]), могут послужить опровержением лишь тех моделей, в которых космические лучи заполняют очень большую область, в частности все метагалактическое пространство (к тому же плотность метагалактического газа еще не установлена).

таты же (18.6) учитывают вклад тормозного излучения от релятивистских электронов и, следовательно, сопоставление данных указывает на существенную роль тормозного излучения даже при $E_\gamma > 100$ МэВ (при меньших энергиях и тем более при $E_\gamma < 50$ МэВ, вклад тормозного излучения увеличивается).

Таким образом, измерение гамма-интенсивности даже только при $E_\gamma > 100$ МэВ позволяет определить количество водорода на луче зрения $\tilde{N}$ (см. (18.2)), но в предположении, что спектр космических лучей такой же или достаточно близок к отвечающему окрестностям Солнца (это предположение использовалось при получении значений (18.6)).

Интересно, что на таком пути уже получен результат, весьма важный для проблемы происхождения космических лучей. Именно, оказалось, что в направлении на галактический антицентр, интенсивность гамма-излучения меньше ожидаемой в предположении о постоянстве интенсивности космических лучей (используются определяемые независимым способом данные о количестве водорода $\tilde{N}$ в направлении на антицентр и вообще при удалении от центра Галактики). Такой результат можно интерпретировать, только полагая, что интенсивность $J_{к.л}$ (и, разумеется, плотность энергии космических лучей $w_{к.л}$) уменьшается к периферии Галактики [221в, 254]. Но, как и в проведенном выше анализе для Магеллановых Облаков, отсюда следует несправедливость метагалактических моделей происхождения космических лучей. Единственное, чего можно в этом отношении пожелать — это повышения точности измерений с переходом ко все большим расстояниям от галактического центра. Остается, конечно, актуальной и дальнейшая проверка, возможная с помощью гамма-наблюдений Магеллановых Облаков.

Отметим, что полная гамма-светимость Галактики в области энергий $E_\gamma > 100$ МэВ составляет

$$L_{\gamma,г}(E_\gamma > 100 \text{ МэВ}) \approx 4 \cdot 10^{38} \text{ эрг/с}, \qquad (18.7)$$

что отвечает (при наблюдаемом спектре) примерно 10^{42} фотон/с [251г]. Согласно [251а], правда, светимость (18.7) относится к области энергий $E_\gamma > 35$ МэВ.

Гамма-измерения непосредственно дают некоторое среднее значение произведения концентрации газа N и интенсивности космических лучей $J_{к.л}$ вдоль луча зрения (см. (18.1); в более общем случае выражение такого типа имеет вид

$$J_\gamma(E_\gamma) = \int_{E_\gamma}^{\infty} \int_0^{\mathscr{L}} \sigma(E_\gamma, E) N(R) J_{к.л}(R, E) dE\, dR).$$

Поэтому из данных о $J_\gamma(E_\gamma)$ или $J_\gamma(>E_\gamma)$ найти $J_{к.л}(R, E)$ даже при известной концентрации газа N нелегко. Ситуация осложняется, ибо вдали от Солнечной системы сведения об $N(R)$ весьма не полны уже хотя бы в связи с отсутствием достаточ-

ной информации о концентрации молекулярного водорода. Поэтому, а также в силу недооценки роли тормозного излучения в литературе появилось много статей, содержащих заключение о сильной неоднородности плотности энергии космических лучей $w_{к.л}$ на пути от Солнечной системы до галактического центра. Конечно, какая-то неоднородность в распределении космических лучей вполне возможна и, несомненно, имеет место; однако в целом («в большом») радиоастрономические данные и динамические соображения (см. гл. 16) свидетельствуют в пользу квазипостоянства $w_{к.л}$ в Галактике (при расстояниях $R \lesssim 10$ кпк от галактического центра) [59, 69, 219]. В настоящее время считается [251в], что и гамма-данные не противоречат этой картине.

Выше мы сосредоточили внимание на гамма-лучах ядерного происхождения, т. е. образующихся в газе при ядерных соударениях космических лучей. Более того, и в этом случае речь шла лишь об энергиях $E_\gamma > 50$—100 МэВ. Между тем известен, конечно, целый ряд других возможностей, частично уже упоминавшихся. Так, представляет интерес область энергий $E_\gamma = 1$—50 МэВ, в которую попадают, в частности, гамма-лучи, испускаемые при распаде π^0-мезонов, от объектов с большим параметром красного смещения z (конкретно речь идет о наблюдении аннигиляции материи и антиматерии при $z \gg 1$ и т. д.)*).

Другая сторона проблемы — выделение галактической и метагалактической компонент гамма-излучения. Если иметь в виду диффузное излучение, то такое разделение производится по двум признакам — по энергетическому спектру и по угловому распределению. Коренное различие угловых распределений этих компонент здесь очевидно: метагалактическое излучение должно быть, и фактически является, в высокой степени изотропным; галактическое же излучение резко концентрируется в направлениях, близких к галактической плоскости в силу соответствующей концентрации межзвездного газа.

Спектр метагалактической (изотропной) компоненты имеет вид

$$J_\gamma(E_\gamma) = 0{,}7 \cdot 10^{-7} \left(\frac{E_\gamma}{100\ \text{МэВ}}\right)^{-3{,}4} \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{МэВ}}. \qquad (18.8\text{а})$$

Для галактического излучения имеем

$$J_\gamma(E_\gamma) = 1{,}1 \cdot 10^{-7} \left(\frac{E_\gamma}{100\ \text{МэВ}}\right)^{-1{,}6} \frac{1}{|\sin b|} \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{МэВ}}, \qquad (18.8\text{б})$$

где b — галактическая широта; в обзоре [251а], на который мы здесь опираемся, указываются и более новые показатели спектра, равные соответственно $2{,}7\,(+0{,}4;\ -0{,}3)$ и $1{,}5 \pm 0{,}3$.

*) Для источника, расстояние до которого характеризуется параметром z, наблюдаемая на Земле энергия $E_\gamma = E_{\gamma,0}/(1+z)$, где $E_{\gamma,0}$ — энергия фотона в источнике.

В области сравнительно малых энергий $E_\gamma < 10$ МэВ и в самой мягкой гамма-области $0{,}1 < E_\gamma < 1$ МэВ представляют большой интерес, во-первых, гамма-линии, появляющиеся при ядерных переходах и при аннигиляции позитронов [238]. Во-вторых, в этой же области энергий наблюдаются гамма-всплески (они образуются, вероятно, при аккреции вещества на нейтронные звезды, но надежно природа всплесков еще не установлена [220, 251]) и постоянное во времени излучение с непрерывным спектром как диффузное, так и от дискретных источников.

Несколько выделенной можно считать и область очень больших энергий — уже довольно давно удалось зарегистрировать гамма-излучение с энергией $E_\gamma > (1\text{—}5) \cdot 10^{11}$ эВ от дискретных источников путем наземных наблюдений оптического черенковского свечения в атмосфере (см. [251а, в, 252в]).

Особое место в гамма-астрономии, причем в значительной мере независимо от используемого диапазона гамма-лучей, занимает изучение дискретных источников. Когда речь идет о мягких гамма-лучах, примыкающих по энергии к рентгеновскому излучению, появление гамма-излучения от Солнца и, например, радиогалактики Центавр А (Cen A) весьма многозначительно, но все же не может вызвать большого удивления (впрочем, в случае Cen A мощное гамма-излучение в линиях 1,6 и 4,5 МэВ вряд ли кто-либо мог предвидеть [238]).

Несколько иначе дело обстоит с мощным гамма-излучением с $E_\gamma > 30\text{—}100$ МэВ от пульсаров и особенно от квазаров и ядер галактик [251].

Для пульсара PSR 0532 (другие обозначения: PSR 0531 + 21 и NP 0532) в Крабовидной туманности светимость при $E_\gamma > 100$ МэВ составляет $L_\gamma \approx 3{,}5 \cdot 10^{34}$ эрг/с (на Земле поток $F_\gamma(E_\gamma > 100 \text{ МэВ}) = (8 \pm 1{,}5) \cdot 10^{-6}$ фотон/(см^2·с)). Для рентгеновского источника Лебедь-X 3 (являющегося, возможно, молодым пульсаром в двойной системе) $L_\gamma(E_\gamma > 40 \text{ МэВ}) \approx 7{,}5 \cdot 10^{36}$ эрг/с, $L_\gamma(E_\gamma > 10^{12} \text{ эВ}) \approx 1{,}0 \cdot 10^{35}$ эрг/с [251а]. Гамма-излучение пульсаров можно объяснить синхротронным механизмом, хотя могло бы играть роль и родственное синхротронному изгибное излучение [255].

Для квазара 3C 273 светимость L_γ $(50 < E_\gamma < 500 \text{ МэВ}) = 2 \cdot 10^{46}$ эрг/с (принято расстояние $R = 790$ Мпк; красное смещение $z = 0{,}158$). Такая светимость за 10^6 лет (такова возможная оценка длительности активной фазы квазара) отвечает энергии $W_\gamma \sim 6 \cdot 10^{59}$ эрг $\sim 3 \cdot 10^5 M_\odot c^2$. Кстати, полная светимость квазара 3C 273, по-видимому, не превосходит $(2\text{—}5) \cdot 10^{47}$ эрг/с (излучение сосредоточено в основном в инфракрасной области; рентгеновская светимость L_X $(0{,}5 < E_X < 4{,}5$ кэВ$) = 1{,}7 \times 10^{46}$ эрг/с; оптическая светимость $L_o \sim 0{,}9 L_X$). Максимальная зафиксированная светимость квазаров достигает 10^{48} эрг/с. Возможная природа гамма-излучения квазаров — обратное

комптоновское рассеяние [256а] и распад π^0-мезонов, генерируемых протонно-ядерной компонентой космических лучей.

Природа обнаруженных в 1963 г. квазаров или, точнее, их центральной части (сердцевины, керна) остается неясной. Наиболее вероятно, что сердцевиной квазаров и во многом им аналогичных ядер активных галактик (сейфертовых галактик и др.) является либо массивная черная дыра (масса $M \sim 10^7 - 10^9\ M_\odot$), либо вращающееся магнитоплазменное «тело» примерно с такой же массой (магнитоид или спинар). Однако сделать выбор между этими (а также некоторыми другими) возможностями весьма трудно [256б, в], поскольку электромагнитное излучение (в том числе гамма-лучи) исходят из сравнительно неглубоких слоев газа, окружающего черную дыру или составляющего магнитоид (радиус для этих слоев $R \gtrsim 10^{15} - 10^{16}$ см, тогда как гравитационный радиус $R_g = 2GM/c^2 = 3 \cdot 10^5\ M/M_\odot$ см и при $M \sim 10^8 M_\odot$ составляет $3 \cdot 10^{13}$ см). Выяснение природы квазаров и активных галактических ядер, несомненно, является одной из важнейших задач современной астрономии. Один из возможных (и, по-видимому, самых надежных) путей ее решения состоит в сопоставлении потока гамма-излучения (с $E_\gamma > 100$ МэВ) от квазара с его нейтринным излучением (с энергией $E_\gamma > 10^{12}$ эВ; см. [256в]).

Так или иначе ценность гамма-астрономических исследований квазаров и галактических ядер трудно переоценить. Относится это и к сравнительно малоактивным центральным областям нормальных галактик и, в частности, нашей Галактики (в случае Галактики вопрос о гамма-излучении из ее центральной части привлекает к себе внимание уже довольно давно [252б]; последние известные нам данные приведены в [257]).

Сделанными замечаниями, касающимися некоторых возможностей и результатов гамма-астрономии, мы и ограничимся, поскольку повторим это, основной целью гл. 17 и 18 является обсуждение важных для рентгеновской и гамма-астрономии физических механизмов, а не астрономических результатов.

В заключение настоящей главы коснемся вопроса о поглощении гамма-лучей (а также частично рентгеновских лучей), поскольку эта проблема имеет принципиальный характер.

При вычислении коэффициента поглощения гамма- или рентгеновских лучей μ обычно важно учитывать, как ослабляется первичный поток излучения, т. е. принимать во внимание и поглощение, и рассеяние. По определению, величина μ фигурирует в соотношении *)

$$\frac{dJ}{dz} = -\mu J, \quad \mu = \sigma N, \tag{18.9}$$

*) Возможность индуцированного поглощения или рассеяния здесь во внимание не принимается; насколько можно судить в рентгеновском и гамма-диапазонах такое предположение практически всегда оправдано, но в целом этот вопрос нуждается в более детальном анализе.

где σ — полное эффективное сечение для поглощения и рассеяния и N — концентрация частиц (атомов, электронов), ответственных за поглощение и рассеяние. В приближении геометрической оптики (оно всегда применимо в интересующих нас случаях), к которому только и относится уравнение (18.9), интенсивность $J(\nu) = J_0 e^{-\tau}$ и оптическая толща $\tau = \int_0^{\mathscr{L}} \mu\, dR$ (или в однородной среде $\tau = \mu\mathscr{L}$).

В (18.9) предполагается, кроме того, что на луче зрения излучение фотонов не происходит. Если же излучение имеет место, то уравнение переноса приобретает вид

$$\frac{dJ(\nu)}{dz} = q(\nu) - \mu(\nu) J(\nu), \tag{18.10}$$

где $q(\nu)$ — излучательная способность (по числу фотонов) на рассматриваемой частоте $\nu = E_\gamma/h$ (см. (17.7)).

Вклад в σ дают в принципе очень многие процессы, а именно:

1. Фотоэффект (ионизация атомов).
2. Комптоновское рассеяние.
3. Переходы в непрерывном спектре (свободно-свободное поглощение).
4. Переходы между атомарными уровнями (возбуждение атомов).
5. Образование в среде пар e^+, e^-.
6. Образование пар e^+, e^- на тепловых и вообще «мягких» фотонах (процесс $\gamma + \gamma' \to e^+ + e^-$, где γ' — мягкий фотон).
7. Поглощение на ядрах (ядерный фотоэффект и возбуждение ядер).
8. Рождение $\pi^\pm$ и π^0-мезонов на протонах и ядрах. Рождение других частиц.

Некоторые из перечисленных процессов мы уже рассматривали. Так, коэффициент поглощения при свободно-свободных переходах (процесс 3) в водородной плазме определяется выражением (17.33). Поглощение за счет связано-связанных переходов (процесс 4) в области рентгеновских лучей может играть роль лишь для сравнительно тяжелых элементов по той простой причине, что для легких элементов потенциал ионизации даже с K-оболочки еще невелик (например, для атомов Al с $Z = 13$ он равен примерно 1500 В, что отвечает для края K-полосы поглощения длине волны 8 Å). Сечение для комптоновского рассеяния (процесс 2) приведено в гл. 17.

При малых энергиях основную роль в поглощении играет фотоэффект, затем с ростом энергии начинает преобладать комптоновское рассеяние. Рассмотрение фотоэффекта (процесс 1) требует, вообще говоря, конкретного учета химического состава среды и степени ее ионизации. На этом процессе, опре-

деляющем поглощение нежестких рентгеновских лучей, мы останавливаться не будем (см. [258]), но подчеркнем, что детальное изучение поглощения мягких рентгеновских лучей в межзвездной и межгалактической средах представляется исключительно интересным. Именно таким образом, возможно, будут получены ценные сведения о концентрации, составе и степени ионизации газа в областях, о которых сейчас очень мало известно (особенно в межгалактической среде). Но это особый вопрос, который здесь нет возможности должным образом осветить.

С ростом энергии поглощение вследствие фотоэффекта уменьшается, и в воздухе вклад комптоновского рассеяния сравнивается с вкладом от фотоэффекта при энергии $E_\gamma \approx$ ≈ 25 кэВ. При $E_\gamma = 50$ кэВ фотопоглощение уже примерно в пять раз меньше комптоновского. Таким образом, для рентгеновских лучей с $E_\gamma > 50$ кэВ и вплоть до энергии $2mc^2 = 1$ МэВ, когда начинают образовываться пары e^+, e^-, учитывать нужно лишь комптоновское рассеяние. При $E_\gamma = h\nu \ll mc^2 \approx 5 \cdot 10^5$ эВ полное сечение для рассеяния σ_C, фигурирующее в (18.9) при неучете других процессов, равно томсоновскому сечению $\sigma_T = {}^8/_{3}\pi(e^2/mc^2)^2 = 6{,}65 \cdot 10^{-25}$ см^2. С ростом частоты сечение уменьшается, но при $h\nu = mc^2$ еще $\sigma_C = 0{,}43\,\sigma_T$. Таким образом, с обычно (но не всегда!) встречающейся «астрофизической точностью» можно полагать $\sigma_C \sim \sigma_T$ при всех энергиях гамма-лучей $E_\gamma \leqslant 1$ МэВ. При $E_\gamma \gg mc^2$ нужно пользоваться формулой (17.72) и, например, при $E_\gamma = 10^3\ mc^2 = 5 \cdot 10^8$ эВ имеем $\sigma_C = 3 \cdot 10^{-3}\ \sigma_T$. Более подробные формулы, а также таблицу значений для σ_C можно найти в § 36 книги [1]. Заметим еще, что при учете комптоновского рассеяния в (18.9) под N нужно понимать полную концентрацию электронов в среде. Если положить $\sigma = \sigma_C = \sigma_T$, то в межзвездной среде (N — полная концентрация всех электронов)

$$\mu_C = \sigma_T N = 6{,}65 \cdot 10^{-25} N \approx 0{,}4 \text{ см}^2/\text{г}. \qquad (18.11)$$

Комптоновское рассеяние в межзвездной среде вносит доминирующий вклад в μ в области энергии $E_\gamma < 10^8$ эВ. В области $E_\gamma > 10^8$ эВ за поглощение гамма-лучей ответственно образование пар (процесс 5). В нейтральном газе в области энергии $E_\gamma > 10^8$ эВ рождение пар в первом приближении происходит в условиях полного экранирования. Соответствующее значение коэффициента поглощения в межзвездной среде равно

$$\mu_{\text{пар}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{г} = 2 \cdot 10^{-26} N_a \text{ см}^{-1}; \qquad (18.12)$$

здесь использовано значение t-единицы длины, равное 66 г/см^2 (см. гл. 17) и N_a — концентрация атомов. В плазме (полностью ионизированном газе) экранировкой в интересующих нас слу-

чаях всегда можно пренебречь и

$$\mu_{\text{пар}} = \frac{4e^2Z(Z+1)}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 N_a\left\{\frac{7}{9}\ln\frac{2E_\gamma}{mc^2} - \frac{109}{54}\right\} =$$

$$= 3{,}6\cdot 10^{-27}\left(\ln\frac{E_\gamma}{mc^2} - 1{,}9\right)N_a \text{ см}^{-1} =$$

$$= 2{,}1\cdot 10^{-3}\left(\ln\frac{E_\gamma}{mc^2} - 1{,}9\right)\text{ см}^2/\text{г}, \qquad (18.13)$$

где численные значения приведены для водорода ($Z = 1$). Здесь мы ограничиваемся только указанием результатов, поскольку роль экранирования уже обсуждалась в гл. 17 (подробнее о процессе образования пар см. [1, 9]). Значения (18.12) и (18.13) примерно совпадают при $E_\gamma \sim 10^9$ эВ.

Комптоновское «поглощение» (18.11) значительно больше поглощения за счет образования пар (по крайней мере пока $\ln(E_\gamma/mc^2) \ll 100$). Однако, как уже подчеркивалось, этот коэффициент относится лишь к области энергий $E_\gamma \ll 10^6$ эВ. Коэффициенты $\mu_C = \sigma_C N$ и $\mu_{\text{пар}}$ сравниваются при $E_\gamma \sim 10^8$ эВ. Уже при $E_\gamma = 5\cdot 10^8$ эВ коэффициент $\mu_C \sim 2\cdot 10^{-27} N \sim 0{,}1\,\mu_{\text{пар}}$ (см. (18.12)).

В направлении на центр Галактики $\bar{N}(\mathscr{L}) \approx N\mathscr{L} \sim 3\cdot 10^{22}$ см$^{-2}$ и соответствующая масса газа $\bar{M}(\mathscr{L}) = 2\cdot 10^{-24}\,\bar{N}(\mathscr{L}) \approx \approx 6\cdot 10^{-2}$ г/см^2; в Метагалактике $\bar{M}(\mathscr{L}) \sim 0{,}1$ г/см^2 (для $\mathscr{L} = R_\Phi \sim 10^{28}$ см). Поэтому из (18.12) сразу же ясно, что в обсуждаемых условиях поглощение гамма-лучей (при $E_\gamma \gtrsim 10^8$ эВ) мало; например, при $\bar{M}(\mathscr{L}) \sim 0{,}1$ г/см^2 оптическая толща $\tau \sim \sim 10^{-3}$ и фактор $e^{-\tau} \approx 1 - \tau$ можно считать равным единице с погрешностью порядка 0,1 %. Сделанный вывод остается в силе и при учете поглощения гамма-лучей на ядрах (процесс 7).

Особо нужно остановиться на процессе 6 — поглощении гамма-лучей, связанном с образованием пар e^+, e^- на тепловых фотонах [259]. В системе координат, в которой суммарный импульс обоих фотонов равен нулю, рождение пар начнется при энергии $E'_\gamma = mc^2$. В лабораторной системе, в которой имеется гамма-фотон с энергией E_γ и тепловой фотон с энергией ϵ_Φ, порогу рождения отвечает энергия *)

$$E_{\gamma,0} = \left(\frac{mc^2}{\epsilon_\Phi}\right)mc^2 = 5\cdot 10^5\left(\frac{mc^2}{\epsilon_\Phi}\right)\text{ эВ}. \qquad (18.14)$$

Для оптических фотонов $\epsilon_\Phi \sim 1$ эВ и $E_{\gamma,0} \sim 2\cdot 10^{11}$ эВ; для фотонов реликтового метагалактического фона с температурой $T \sim 3$ К средняя энергия $\bar{\epsilon}_\Phi \sim 10^{-3}$ эВ (для теплового излучения $\bar{\epsilon}_\Phi = 2{,}7\varkappa T$) и $E_{\gamma,0} \sim 2\cdot 10^{14}$ эВ. Только в случае рождения пар на рентгеновских фотонах с $\bar{\epsilon}_\Phi \sim 10^3 - 10^4$ эВ энергия

*) Этот результат проще всего, видимо, получить, даже не прибегая к преобразованию из одной системы отсчета в другую. В самом деле, на

$E_{\gamma,0} \sim 10^7 - 10^8$ эВ и соответствующее поглощение может быть существенно для сравнительно нежестких γ-лучей. Однако в среднем в Галактике и в Метагалактике плотность энергии рентгеновского излучения весьма мала (в Галактике $\bar{w}_{\Phi,r} \sim$ $\sim 10^{-6}$ эВ/см^3); она значительна лишь в источниках космических рентгеновских лучей. Для оптических фотонов в метагалактическом пространстве плотность энергии $w_{\Phi,0} \sim 10^{-2}$ эВ/см^3 и для реликтового метагалактического излучения $w_{\Phi,r} \sim$ $\sim 0{,}3$ эВ/см^3. Коэффициент поглощения, обусловленного оптическими фотонами, вычислен в [259]; соответствующее значение μ максимально при $E_\gamma = 10^{12}$ эВ:

$$\mu_{max} \sim 7 \cdot 10^{-26} w_\Phi \text{ см}^{-1}, \qquad (18.15)$$

где w_Φ — плотность энергии излучения в эВ/см^3. Для теплового излучения с температурой $T = 5800$ К ($\varkappa T = 0{,}5$ эВ) величины отношения μ/w_Φ приведены в табл. 18.1.

Таблица 18.1

Энергия гамма-фотонов, эВ	μ/w_Φ, 10^{-26} см$^{-1}$ × × (эВ·см$^{-3}$)$^{-1}$	Энергия гамма-фотонов, эВ	μ/w_Φ, 10^{-26} см$^{-1}$ × × (эВ·см$^{-3}$)$^{-1}$
10^{11}	0,05	$5 \cdot 10^{12}$	4
$5 \cdot 10^{11}$	5	10^{13}	2
10^{12}	7	$5 \cdot 10^{13}$	0,7

При $w_\Phi \sim 10^{-2}$ эВ/см^2 оптическая толща $\tau_{max} \sim 7 \cdot 10^{-28} \mathscr{L}$ и на фотометрическом радиусе Метагалактики $R_\Phi \sim 10^{28}$ см уже $\tau_{max} \sim 7$. Поглощение на фотонах реликтового фона еще на полтора порядка выше, но максимально лишь при $E_\gamma \sim 10^{15}$ эВ.

Таким образом, для гамма-лучей с очень высокой энергией $E_\gamma > 10^{11}$ эВ и особенно $E_\gamma > 10^{14}$ эВ поглощение гамма-лучей за счет образования пар на тепловых фотонах (процесс 6) может быть велико. Отметим, что при соударениях космических лучей (протонов и ядер) с достаточно высокой энергией с тепловыми фотонами идут фотоядерные реакции (процессы 7). Однако в данном случае (в лабораторной системе) эти процессы непосредственно не относятся к проблеме поглощения гамма-

---

пороге рождения пар в лабораторной системе, согласно законам сохранения энергии и импульса,

$$E_\gamma + \epsilon_\Phi = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_\gamma - \epsilon_\Phi = \frac{2mcv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где v — скорость образующейся пары. Отсюда

$$E_\gamma = \frac{mc^2(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v}{c} = \frac{E_\gamma - \epsilon_\Phi}{E_\gamma + \epsilon_\Phi}$$

и при условии $E_\gamma \gg \epsilon_\Phi$ сразу же приходим к (18.14).

лучей. Другое дело, что они могут играть важную роль при рассмотрении генерации гамма-лучей в результате распада π^0-мезонов и при обсуждении вопроса об изменении химического состава космических лучей и об «обрезании» их спектра при $E \sim$ $\sim 10^{19} - 10^{20}$ эВ (см. [260]).

В заключение еще раз подчеркнем, хотя, быть может, это и излишне, что перспективы развития гамма-астрономии представляются многообещающими и впечатляющими. Можно думать, что к началу следующего десятилетия, и уже во всяком случае к концу нашего века, гамма-астрономия по уровню своего развития и по значению окажется в одном ряду с радио-астрономией, оптической астрономией и рентгеновской астрономией. Тем самым завершится начавшийся практически лишь с 1945—1946 гг. процесс превращения астрономии из оптической во всеволновую.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ, 1956.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — 6-е изд. — М.: Наука, 1973.
3. *Паули В.* Теория относительности: Пер. с нем. — М. — Л.: Гостехиздат, 1947.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика — М.: Мир, 1965.
5. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности. — 2-е изд. — М.: Наука, 1977.
6. *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 981.
7. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978.
8. *Тер-Микаэлян М. А.* Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. — Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1969.
9. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1980.
10. а) *Kobe D. H., Smirl A. L.* — Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 624; *Kobe D. H.* — Phys. Rev., 1979, v. 19A, p. 205; Phys. Lett., 1980, v. 80A, p. 121.
    б) *Mandel L.* — Phys. Rev., 1979, v. 20A, p. 1590.
11. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1965, т. 1, с. 53.
12. *Гинзбург В. Л.* — ДАН СССР, 1939, т. 23, с 773; т. 24, с. 131.
13. *Фейнберг Е. Л.* — ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 203.
14. *Фейнберг Е. Л.* — УФН, 1980, т. 132, с. 255.
15. *Белоусов А. П.* — ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 658.
16. *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1943, т. 13, с. 33; Труды ФИАН СССР, 1946, т. 3, с. 195.
17. *Марков М. А.* — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 800.
18. *Фрадкин Е. С.* — ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 211.
19. *Rohrlich F.* Classical Charged Particles. — Addison-Wesley Publ. Co, 1965.
20. а) *Tabensky R.* — Phys. Rev., 1976, v. 13D, p. 267.
    б) *Tirapegui E.* — Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 634.
21. *Cheng Kuo-shung.* — J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1656.
22. *Grünbaum A., Janis A. I.* — Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 337.
23. *Sorg M.* — Z. Naturforsch., 1976, B. 31a, S. 1500; 1978, B. 33a, S. 619.
24. а) *Kalcar J., Ulfbeck O.* — Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1976, v. 39, № 9.
    б) *Franca H. M., Margues G. C., da Silva A. J.* — Nuovo Cimento, 1978, v. 48A, p. 65.
25. *Maass W., Petzold J.* — J. Phys. A: Math. Gen., 1978, v. 11, p. 1211.
26. *Moniz E. A., Sharp D. H.* — Phys. Rev., 1977, v. 15D, p. 2850; см. также — Amer. J. Phys. 1977, v. 45, p. 75.
27. *Grotch H., Kazes E.* — Phys. Rev., 1977, v. 16D, p. 3605.
28. *Pradhan T., Khare A.* — J. Phys. A: Math. Gen., 1978, v. 11, p. 609.
29. *Ритус В. И.* — ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1561.
30. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1971, т. 103, с. 393.
31. а) *Тер Хаар Д.* — УФН, 1976, т. 119, с. 525.
    б) *Смит Ф. Г.* Пульсары. — М.: Мир, 1979.
    в) *Манчестер Р., Тейлер Дж.* Пульсары. — М.: Мир, 1980.
32. *Гинзбург В. Л.* — В сб.: Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма) — М.: Наука, 1972, с. 192.

33 *Born A.* — Ann. Phys., 1909, B. 30, S. 1; см. также *Milner S. R.* — Phil. Mag., 1921, v. 41, p. 405.
34. *Fulton T., Rohrlich F.* — Ann. Phys., 1960, v. 9, p. 499.
35. *Leibowitz C., Peres A.* — Ann. Phys., 1963, v. 25, p. 400.
36. *Никишев А. И., Ритус В. И.* — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2035.
37. *Никишев А. И., Ритус В. И.* Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. — Труды ФИАН СССР, 1979, т. 111.
38. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1969, т. 98, с. 569.
39. *Kovetz A., Tauber G. E.* — Amer. J. Phys., 1969, v. 37, p. 382.
40. *Anderson J. L., Ryon J. W.* — Phys. Rev., 1969, v. 181, p. 1765.
41. *Grandy W. T.* — Nuovo Cimento, 1970, v. 65A, p. 738.
42. а) *Cohn J.* — Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 225.
б) *Boulware D. G.* —Ann. Phys., 1980, v. 124, p. 169.
43. *Тамм И. Е., Франк И. М.* — ДАН СССР, 1937, т. 14, с. 107.
44. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
45. *Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г.* — Труды ФИАН СССР, 1975, т. 80, с. 100.
46. а) *Гинзбург В. Л.* — ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 145; Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1972, № 2, с. 40.
б) *Coisson R.* — Phys. Rev., 1979, v. 20A, p. 524.
в) Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: Ин-т прикл. физ. АН СССР, 1979.
47. а) *Loisell W. H. et al.* — Phys. Rev., 1979, v. 19A, p. 288.
б) *Bambini A., Renuri A., Stenholm S.* — Phys. Rev., 1979, v. 19A, p. 2013.
в) *Kwan T., Dawson J. M.* — Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 1089.
г) *Bratman V. L. et al.* — Optics Commun., 1979, v. 30, p. 409.
48. а) *Кумахов М. А.* — УФН, 1979, т. 127, с. 531.
б) *Chui S. T.* — Phys. Rev., 1979, v. 19B, p. 4838.
49. а) *Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И.* — УФН, 1968, т. 94, с. 63.
б) *Ginzburg V. L., Syrovatskii S. I.* — Ann. Rev. Astronom. Astrophys., 1969, v. 7, p. 375.
50. *Померанчук И. Я.* — ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 915; Собрание научных трудов. М.: Наука, 1972, т. 2, с. 40.
51. а) *Shen C. S.* — Phys. Rev., 1978, v. 17D, p. 434.
б) *Суворов Е. В., Чугунов Ю. В.* — Astrophys. a. Space Sci., 1973, v. 23, p. 189.
в) *Lubart N. D.* — Phys. Rev., 1974, v. 9D, p. 2717.
52. *Гинзбург В. Л., Жарков Г. Ф.* — ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 2279.
53. а) *Chitre D. M., Price R. H.* — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 185.
б) *Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д., Полнарев А. Г.* — ЖЭТФ, 1972, т. 63 с. 1538.
в) *Wagoner R. V.* — Phys. Rev., 1979, v. 19D, p. 2897.
54. а) *Гетманцев Г. Г., Гинзбург В. Л.* — ДАН СССР, 1952, т. 87, с. 187.
б) *Epstein R. I.* — Astrophys. J., 1973, v. 183, p. 593.
в) *Очелков Ю. П., Прилуцкий О. Ф., Розенталь И. А., Усов В. В.* Релятивистская кинетика и гидродинамика. — М.: Атомиздат, 1979.
55. *Chugunov Yu. V., Eidman V. J., Suvorov E. V.* — Astrophys. a. Space Sci., 1975, v. 32, p. L7.
56. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме. — М.: Наука, 1977.
57. *Ochelkov Yu. P., Usov V. V.* — Astrophys. a. Space Sci., 1980, v. 69, p. 439.
58. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* — УФН, 1965, т. 87, с. 65; Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1965, v. 3, p. 297.
59. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* — Происхождение космических лучей. — М. — Л.: Изд. АН СССР, 1963 (дополненное английское издание: Origin of cosmic rays, Pergamon Press, 1964).
60. *Пахольчек А.* Радиоастрофизика. — М.: Мир, 1973.
61. а) *Jones T. W., Harde P. E.* — Astrophys. J. 1979, v. 228, p. 268.

б) *Gould R. J.* — Astron. Astrophys., 1979, v. 76, p. 306.
62. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.
63. а) *Озерной Л. М., Сазонов В. Н.* — Astrophys. a. Space Sci., 1969, v. 3, p. 365.
б) *Salvati M.* — Astrophys. J., 1979, v. 233, p. 11.
64. *Чандрасекар С.* Перенос излучения. — М.: ИЛ, 1953.
65. *Шерклифф У.* Поляризованный свет. — М.: Мир, 1965.
66. а) *Трубников Б. А.* — ДАН СССР, 1958, т. 118, с. 913.
б) *Westfold K. C.* — Astrophys. J., 1959, v. 130, p. 241.
в) *Dulk G. A. et al.* — Astrophys. J., 1979, v. 234, p. 1137.
67. *Корчак А. А., Сыроватский С. И.* — Астрон. ж., 1961, т. 38, с. 885.
68. а) *Уикс Т.* Астрофизика высоких энергий. — М.: Мир, 1972.
б) *Озерной Л. М., Прилуцкий О. Ф., Розенталь И. А.* Астрофизика высоких энергий. — М.: Атомиздат, 1973.
69. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1978, т. 124, с. 307.
70. *Cooke B. A. et al.* — Mon. Not. RAS, 1978, v. 182, p. 661.
71. а) *Rees M.* — Nature, 1971, v. 229, p. 312; Nature (Phys. Sci.), 1971, v. 230, p. 55.
б) *Gann J. M., Ostreiker J. P.* — Astrophys. J., 1971, v. 165, p. 523.
в) *Arons J.* — Astrophys. J., 1972, v. 177, p. 395.
г) *Blandford R. D.* — Astron. Astrophys., 1972, v. 20, p. 135.
72. *Asseo E., Kennel C. F., Pellat R.* — Astron. Astrophys., 1978, v. 65, p. 401.
73. *Schott G. A.* Electromagnetic Radiation. — Cambr. Univ. Press, 1912.
74. а) *Tsai Wu-yang.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 3863.
б) *White D., Sisco M.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 4789.
75. *Tamoikin V. V.* — Astrophys. a. Space Sci., 1978, v. 53, p. 3.
76. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
77. а) *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 589.,
б) *Watson K. W., Jauch J. M.* — Phys. Rev. 1948, v. 74, p. 950, 1485; 1949, v. 75, p. 1249.
в) *Рязанов М. И.* — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1244.
г) *Brevik I., Lautrup B.* — Mat. Fys. Medd Dan., 1970, v. 38, № 1.
78. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1973, т. 110, с. 309.
79. *Randorf W. R.* — Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 35.
80. *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 601.
81. *Рыжов Ю. А.* — Радиофизика, 1959, т. 2, 869.
82. *Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я.* — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1865.
83. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет. — М.: Наука, 1964 (дополненное английское издание: Radio Emission of the Sun and Planets: Pergamon Press, 1970). См. также обзор *Melrose D. B.* — Space Sci. Rev., 1980, v. 26, p. 3.
84. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967 (улучшенное английское издание: The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas, Pergamon Press, 1970).
85. *Тамм И. Е* Основы теории электричества. — 9-е изд. — М.: Наука, 1976.
86. *Агранович В. М., Галанин М. Д.* Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах. — М.: Наука, 1978.
87. а) *Бункин Ф. В.* — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 338.
б) *Андронов А. А., Чугунов Ю. В.* — УФН, 1975, т. 116, с. 79.
в) *Kiehl H. H.* — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 1275, 1636.
88. Библиографический указатель работ по переходному излучению. — Ереван: Ереванский физ. ин-т, 1979.
89. *Болотовский Б. М.* — УФН, 1957, т. 62, с. 201; 1961; т. 75, с. 295.
90. *Джелли Дж.* Черенковское излучение. — М.: ИЛ, 1960.
91. *Зрелов В. П.* Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий. — М.: Атомиздат, 1968.
92. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1959, т. 69, с. 537.
93. *Басс Ф. Г., Яковенко В. М.* — УФН, 1965, т. 86, с. 189.

94. а) *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* — УФН, 1978, т. 126, с. 553; 1980, т. 131, с. 83.
б) *Ginzburg V. L., Tsytovich V. N.* — Phys. Rep., 1979, v. 49, № 1, p. 1. (подробный вариант статьи [94а]) Phys. Lett., 1980, v. 79A, p. 16.
95. *Франк И. М.* — В сб.: Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма). — М.: Наука, 1972, с. 350.
96. *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 608.
97. *Франк И. М.* — Изв. АН СССР: Сер. физ., 1942, т. 6, с. 3; УФН, 1959, т. 68, с. 397.
98. а) *Гинзбург В. Л.* — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 501.
б) *Гайлитис А.* — Радиофизика, 1964, т. 7, с. 646.
в) *Мусаханян В. В., Никишев А. И.* — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1258.
г) *Геворкян Л. А., Корхмазян Н. А.* — ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1226.
д) *Risbud A. A., Takwale R. G.* — J. Phys. A: Math. Gen., 1979, v. 12, p. 905; 1980, v. 13, p. 535.
99. *Freund H. P., Wu C. S.* — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 963.
100. *Euler H.* — Ann. Phys., 1936, B. 26, S. 398; *Heisenberg W., Euler H.* — Z. Phys., 1936, B. 98, S. 714.
101. *Пафомов В. Е.* — Труды ФИАН, 1961, т. 16, с. 94.
102. а) *Adler S. L.* — Ann. Phys., 1971, v. 67, p. 599.
б) *Shabad A. E.* — Ann. Phys., 1975, v. 90, p. 166.
в) *Tsai Wu-yang, Erber T.* — Phys. Rev., 1975, v. 12D, p. 1132.
г) *Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.* — Яд. физ., 1979, т. 30, с. 1301.
103. а) *Erber T. et al.* — Ann. Phys., 1976, v. 102, p. 405.
б) *Гнедин Ю. Н., Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А.* — Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 325; 1979, т. 30, с. 137; Письма Астрон. ж, 1978, т. 4, с. 214.
в) *Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А.* — ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1457.
г) *Daugherty J. K., Ventura J.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 2868.
д) *Maszaros P., Ventura J.* — Phys. Rev., 1979, v. 19D, p. 3565 см. также Astrophys. J. (Letters), 1979, v. 233, p. L125.
е) *Железняков В. В.* — Астрофизика, 1980, т. 16, с. 539.
104. а) *Grassi Strini A. M., Strini G., Tagliaferri G.* — Phys. Rev., 1979, v. 19D, p. 2330.
б) *Iacopini E., Zavattini E.* — Phys. Lett., 1979, v. 85B, p. 151.
105. *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1621.
106. а) *Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973; *Gurevich A. V.* Nonlinear Phenomens in the Ionosphere. — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1978.
б) *Цытович В. Н.* Теория турбулентной плазмы. — М.: Атомиздат, 1971 (дополненное английское издание: Theory of Turbulent Plasmas. — New York, Consultants Bureau, 1977).
в) *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
г) Plasma Physics. Nonlinear Theory and Experiment/Ed. H. Wilhelmson.— New York: Plenum Press, 1977.
107. а) *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
б) *Файн В. М.* Квантовая радиофизика. Фотоны и нелинейные среды. — М.: Сов. радио, 1972.
в) *Лоудэн Р.* Квантовая теория света. — М.: Мир, 1976.
108. а) *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* — ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 583.
б) *Гинзбург В. Л., Файн В. М.* — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 817.
в) *Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я.* — ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1823.
г) *Франк И. М.* — УФН, 1979, т. 129, с. 685; Rev. Roum. Phys., 1978, v. 23, p. 715.
109. *Железняков В. В.* — Радиофизика, 1959, т. 2, с. 14.
110. *Гинзбург В. Л., Железняков В. В.* — Астрон. ж., 1958, т. 35, с. 694; Phil. Mag., 1962, v. 7, p. 451; 1965; v. 11, p. 197, 876.
111. *Тамм И. Е.* — УФН, 1959, т. 68, с. 387.
112. а) *Мандельштам Л. И.* Собрание трудов. — М.: Изд. АН СССР, 1947, т. 2, с. 334.

б) *Пафомов В. Е.* — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 366; 1959, т. 36, с. 1853. См. также [101].
113. *Франк И. М.* — Письма ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 482.
114. *Гинзбург В. Л., Железняков В. В.* — Радиофизика, 1958, т. I, № 2, с. 59.
115. *Эйдман В. Я.* — Радиофизика, 1960, т. 3, с. 192.
116. а) *Гаврилов В. П., Коломенский А. А.* — Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 617; 1972, т. 16, с. 29.
б) *Dialetis D.* — Phys. Rev., 1978, v. 18A, p. 2115.
117. *Pines D., Bohm D.* — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 338.
118. а) *Пайнс Д.* Элементарные возбуждения в твердых телах. — М.: Мир, 1965.
б) *Стил М., Вюраль Б.* Взаимодействие волн в плазме твердого тела. — М.: Атомиздат, 1973.
119. *Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1593.
120. *Bohm D., Gross E. P.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1851.
121. *Ландау Л. Д.* — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.
122. *Эйдман В. Я.* — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 131; 1959, т. 36, с. 1335; 1961, т. 41, с. 1971.
123. *Герценштейн М. Е.* — ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 180.
124. *Франк И. М.* — В сб.: Памяти С. И. Вавилова. — М. — Л.: Изд. АН СССР, 1952, с. 173.
125. а) *Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я.* — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1508.
б) *Гинзбург В. Л.* — В сб.: Памяти С. И. Вавилова. — М. — Л.: Изд. АН СССР, 1952, с. 193.
126. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
127. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* — ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 699.
128. *Богданкевич Л. С.* — ЖЭТФ, 1959, т. 29, с. 1086.
129. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 15.
130. а) *Шипов Н. В., Беляков В. А.* — ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1589.
б) *Федоров В. В., Смирнов А. И.* — ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 866.
131. *Дремин И. М.* — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 152.
132. а) *Fermi E.* — Phys. Rev., 1940, v. 57, p. 485.
б) *Sastry G. P., Parida B. K.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 3025.
133. *L. L. DeRaad, Tsai Wu-yang, Erber T.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, 2152.
134. а) *Гарибян Г. М.* — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 527; 1960; т. 39, с. 332.
б) *Барсуков К. А.* — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1106.
135. а) *Франк И. М.* — УФН, 1959, т. 68, с. 397.
б) *Франк И. М.* — УФН, 1961, т. 75, с. 231.
136. а) *Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В.* — УФН, 1966, т. 88, с. 209; 1968, т. 94, с. 377.
б) *Van der Berg P. M., Nicia A. J. A.* — J. Phys. A: Math. Gen., 1976, v. 9, p. 1133.
в) *Болотовский Б. М. и др.* — УФН, 1978, т. 126, с. 311.
г) *Болотовский Б. М., Давыдов В. А.* — Радиофизика, 1981, т. 24, с. 231.
137. а) *Гинзбург В. Л.* — Радиофизика, 1973, т. 16, с. 512.
б) *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 132.
в) *Давыдов В. А.* — Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1976, № 4, с. 3; Вестник МГУ: Сер. физ. астрон., 1977, т. 18, № 6, с. 64; 1978, т. 19, № 3, с. 53.
г) *Манева Г. М.* — Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1977, № 2, с. 21.
138. *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1818; Радиофизика, 1975, т. 18, с. 173.
139. *Франк И. М.* Яд. физ., 1979, т. 29, с. 180.
140. а) *Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1961, т. 31, с. 923.
б) *Аматуни А. У., Корхмазян Н. А.* — ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1011.
в) *Галеев А. А.* — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1335.
141. *Эйдман В. Я.* — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1419.
142. *Sommerfeld A.* — Ann. Phys., 1914, B. 44, S. 177.

143. а) *Вайнштейн Л. А.* — УФН, 1976, т. 119, с. 339.
б) *Кузелев М., Рухадзе А. А.* — Радиофизика, 1979, т. 22, с. 1223.
144. а) *Cohen M. H. et al.* — Nature, 1977, v. 268, p. 405.
б) *Blandford R. D., McKee C. F., Rees M. J.* — Nature, 1977, v. 267, p. 211.
145. а) *Rees M.* Mon. Not. RAS, 1967, v. 135, p. 345; Astrophys. J. (Letters), 1968, v. 152, p. L145.
б) *Cavaliere A., Morrison P., Sartori L.* — Science, 1971, v. 173, p. 625.
146. а) *Вайскопф В.* — УФН, 1964, т. 84, с. 183.
б) *McGill N. C.* — Contempor. Phys., 1968, v. 9, p. 33.
в) *Болотовский Б. М., Михальчи Е. Д.* — Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1976, № 5, с. 35.
г) *Sala K. L.* — Phys. Rev., 1979, v. 19A, p. 2377.
147. *Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л.* — УФН, 1972, т. 106, с. 577; — в кн.: Эйнштейновский сборник 1972. — М.: Наука, 1974, с. 212.
148. *Sommerfeld A.* — Göttingen Nachrichten, 1904, S. 99, 363; 1905, S. 201; *Зоммерфельд А.* Оптика. — М.: ИЛ, 1958, § 47.
149. а) *Tamm I. E.* — J. Phys. USSR, 1939, v. 1, p. 439.
б) *Motz H., Schiff L.* — Amer. J. Phys., 1953, v. 21, p. 258 (русский перевод в сб.: Миллиметровые и субмиллиметровые волны. — М.: ИЛ, 1959, стр. 171).
150. *Эйдман В. Я.* — Радиофизика, 1972, т. 15, с. 634; Астрофизика, 1972, т. 9, с. 609.
151. а) *Болотовский Б. М.* — Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1972, № 7, с. 34.
б) *Афанасьев С. В.* — Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1069; 1975, т. 18, с. 1520; 1976, т. 19, с. 1523.
в) *Манева Г. М.* — Радиофизика, 1976, т. 19, с. 1086; 1977, т. 20, с. 1577.
г) *Файнгольд М. И.* — Радиофизика, 1977, т. 22, с. 531.
152. а) *Heaviside O.* — Phil. Mag., 1889, v. 27, p. 324.
б) *Heaviside O.* Electromagnetic Theory, v. 3, — L.: Electr. Publ. Co., 1912.
153. *Lord Kelvin.* — Phil. Mag., 1901, v. 2, p. 1.
154. *Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А.* Распространение и поляризация излучения в космической среде. — М.: Наука, 1979.
155. а) *Сазонов В. Н., Цытович В. Н.* — Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1287.
б) *Сазонов В. Н.* — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1075; Астрофизика, 1974, т. 10, с. 405.
156. а) *Сазонов В. Н.* — Астрон. ж., 1972, т. 49, с. 1197.
б) *Железняков В. В., Суворов Е. В.* — ЖЭТФ, 1969, т. 54, с. 627; Astrophys. a. Space Sci., 1972, v. 15, p. 2.
в) *Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.* — ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 101.
157. *Ginzburg V. L., Ozernoy L. M.* — Astrophys. J., 1966, v. 144, p. 599.
158. *Железняков В. В.* — ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 570; Астрон. ж., 1967, т. 44, с. 42.
159. *Каплан С. А., Цытович В. Н.* Плазменная астрофизика — М.: Наука, 1972.
160. *Братман В. Л., Суворов Е. В.* — ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1415.
161. *Zheleznyakov V. V., Shaposhnikov V. E.* — Australian J. Phys., 1979, v. 32, p. 49.
162. *Agranovich V. M., Ginzburg V. L.* — In: Progress in Optics/Ed. E. Wolf, 1971, v. 9, p. 235.
163. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
164. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975.
165. а) *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
б) *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971.

в) Электродинамика плазмы./Под ред. А. И. Ахиезера. — М.: Наука, 1974.
г) *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979.
166. *Киржниц Д. А.* — УФН, 1976, т. 119, с. 357.
167. а) *Agranovich V. M., Yudson V. I.* — Opt. Commun., 1973, в. 9, p. 58.
б) *Бокуть Б. В., Сердюков А. Н.* — ЖПС, 1974, т. 20, с. 677.
в) *Schlagheck U.* — Opt. Commun., 1975, v. 13, p. 273.
168. а) *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. — М.: Мир, 1967.
б) *Бирман Дж.* Пространственная симметрия и оптические свойства твердых тел. — М.: Мир, 1978.
169. *Борн М., Хуан Кунь.* Динамическая теория кристаллических решеток. — М.: ИЛ, 1958.
170. *Агранович В. М.* Теория экситонов. — М.: Наука, 1968.
171. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
172. Сб. Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М. А. — М.: Госатомиздат, 1963—1974, тт. 1—8.
173. *Меллер К.* Теория относительности. — М.: Атомиздат, 1975.
174. *Brevik I.* — Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1970, v. 37, №№ 11, 13.
175. *Скобельцын Д. В.* — УФН, 1973, т. 110, с. 253.
176. *Гинзбург В. Л., Угаров В. А.* — УФН, 1976, т. 118, с. 175; см. также УФН, 1977, т. 122, с. 325.
177. *Brevik I.* — Phys. Reports, 1979, v. 52, № 3, p. 133.
178. а) *Вашими Х., Карпман В. И.* — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1010 (см. также Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 576).
б) *Klima R.*, Petrzilka. — J. Phys. A: Math. Gen., 1978, v. 11, p. 1687.
в) *Israel W.* — Gen. Rel. Grav., 1978, v. 9, p. 451.
г) *Перель В. И., Пинский Я. М.* — ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1889.
д) *Вигдорчик Н. Ф.* — Радиофизика, 1978, т. 21, с. 481.
е) *Гинзбург В. Л.* — Радиофизика, 1980, т. 23, с. 372.
ж) *Бараш Ю. С.* — ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 2271.
179. *Бараш Ю. С.* — Радиофизика, 1978, т. 21, с. 736.
180. *Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л.* — УФН, 1976, т. 118, с. 523.
181. *Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л.* — УФН, 1975, т. 116, с. 5.
182. *Гинзбург В. Л.* — Радиофизика, 1961, т. 4, с. 74.
183. *London R.* — J. Phys. A. Math. Gen., 1970, v. 3, p. 233.
184. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1978, ч. 2.
185. *Ситенко А. Г.* Флуктуации и нелинейное взаимодействие в плазме. — Киев: Наукова думка, 1977.
186. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1976, ч. 1.
187. *Рытов С. М* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1975, ч. 1.
188. а) *Горелик Г. С.* — УФН, 1951, т. 44, с. 33.
б) *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1952, т 46, с. 348.
189. *Nyquist H.* — Phys Rev., 928, v. 32, p. 110.
190. *Лифшиц Е. М.* — ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 94.
191. *Дзялошинский И Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* — УФН, 1961, т. 73, с. 381.
192. а) *van Kampen W. G. et al.* — Phys. Lett., 1968, v. 26A, p. 307.
б) *Ninham B. W., Parsegian V. A., Weiss G. H.* — J. Stat. Phys., 1970, v. 2, p. 323.
в) *Gerlach E.* — Phys. Rev., 1971, v. 4B, p. 393.
193. а) *Casimir H. B. G.* — Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., 1948, v. 51, p. 793.
б) *Boyer T. H.* — Ann. Phys., 1970, v. 56, p. 474.
194. *Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л.* — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 15, с. 567.
195. *Бараш Ю. С.* — Радиофизика, 1978, т. 21, с. 1637.

196. *Гинзбург В. Л., Файн В. М.* — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 162; Радиотехника и электроника, 1957, т. 2, с. 780.
197. *Андронов А. А., Рыжов Ю. А.* — УФН, 1978, т. 126, с. 323.
198. *Фабелинский И. Л.* Молекулярное рассеяние света. — М.: Наука, 1965.
199. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1966, т. 3, с. 216.
200. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1972, т. 106, с. 151.
201. а) *Вайнштейн Л. А., Юков Е. А.* Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. — М.: Наука, 1979.
б) *Чен Ш., Такео М.* — УФН, 1958, т. 66, с. 391.
202. *Борн М.* Оптика. — Харьков — Киев: ГНТИУ, 1937.
203. *McTague J. P., Birnbaum G.* — Phys. Rev., 1971, v. 3A, p. 1376.
204. *Гинзбург В. Л.* — ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 397.
205. а) *Леонтович М. А.* — Z. Phys., 1931, B. 72, S. 247.
б) *Гинзбург В. Л.* — ДАН СССР, 1944, т. 42, с. 172; Изв. АН СССР: Сер. физ., 1945, т. 9, с. 174.
206. а) *Сущинский М. М.* Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов. — М.: Наука, 1969.
б) *Горелик В. С., Сущинский М. М.* — УФН, 1969, т. 98, с. 237.
207. *Гинзбург В. Л., Собянин А. А., Леванюк А. П.* — УФН, 1980, т. 130, с. 615 (более подробный вариант — Phys. Reports, 1980, v. 57, № 3, p. 151).
208. *Алексеев В. А., Собельман И. И.* — ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1879.
209. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1958.
210. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* — ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1243.
211. а) *Бломберген Н.* — УФН, 1969, т. 97, с. 307.
б) *Старунов В. С., Фабелинский И. Л.* — УФН, 1969, т. 98, с. 441.
212. *Hagenbuch K.* — Amer. J. Phys., 1977, v. 45, с. 693.
213. *Шеффильд Дж.* Рассеяние электромагнитного излучения в плазме. — М.: Атомиздат, 1978.
214. Сб. Некогерентное рассеяние радиоволн. — М.: Мир, 1965.
215. *Франк И. М.* — Яд. физ., 1968, т. 7, с. 1100.
216. а) *Гайлитис А. К., Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1485.
б) *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2234.
217. а) *Гинзбург В. Л.* Современная астрономия. — М.: Наука, 1970.
б) *Гинзбург В. Л.* О физике и астрофизике. — М.: Наука, 1980.
в) *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1981, т. 134, вып. 3.
218. а) *Хайкова С.* Физика космических лучей. — М.: Мир, 1973, ч. 1, 1974. ч. 2.
б) *Дорман Л. И.* Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей. — М.: Наука, 1975.
в) *Христиансен Г. Б.* Космические лучи сверхвысоких энергий. — М.: Изд. МГУ, 1974.
г) *Дорман Л. И.* Космические лучи солнечного происхождения. — М.: ВИНИТИ, 1978; Исследования космического пространства, т. 12.
219. а) *Гинзбург В. Л., Птускин В. С.* — УФН, 1975, т. 117, с. 585.
б) *Гинзбург В. Л.* — Изв. АН СССР: Сер. физ., 1979, т. 43, с. 2469.
220. а) 15th Intern. Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Plovdiv, 1977, v. 1—12 (обзорные статьи помещены в т. 10).
б) 16th Intern. Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Kyoto, 1979, v. 1—14 (обзорные статьи помещены в т. 14).
в) Origin of Cosmic Rays. — IUPAP/IAU Symp. N 94 — Bologna: 1980, D. Reidel Publ. Co., in press.
г) VII Европейский симпозиум по космическим лучам, труды — Л.: 1980.
221. а) *Березинский В. С., Зацепин Г. Т.* — УФН, 1977, т. 122, с. 3.
б) Neutrino 77. Proc. Intern. Conference on Neutrino Physics and Neutrino Astrophysics, 1977 — М.: Nauka, 1978, v. 1, 2.
222. *Kraly P. et al.* — Riv. Nuovo Cimento, 1979, v. 2, p. 1.

223 а) *Golden R. L. et al.* — Phys. Rev. Letters, 1979, v. 43, p. 1196.
б) *Steigman G.* — Astrophys. J. (Letters), 1977, v. 217, p. L131.
224. *Garcia-Munoz M. et al.* — Astrophys. J. (Letters), 1979, v. 232, p. L95.
225. *Caldwell J. H.* — Astrophys. J., 1977, v. 218, p. 269.
226. а) *Ginzburg V. L.* The Origin of Cosmic Rays. — New York: Gordon a. Breach Sci. Publ., 1969; Phil. Trans. Roy. Soc., 1975, v. 277, p. 463.
б) *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* — УФН, 1966, т. 88, с. 485.
227. *Ginzburg V. L., Kazan Ya. M., Ptuskin V. S.* — Astrophys. a. Space Sci. 1980, v. 68, p. 295.
228. *Бор Н.* Прохождение атомных частиц через вещество. — М.: ИЛ, 1950.
229. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1974.
230. а) *Gould R. J.* — Physica, 1972, v. 60, p. 145; v. 62, p. 555; Astrophys. J., 1975, v. 196, p. 689.
б) *Kim Y. K., Cheng K.* — Phys. Rev., 1980, v. 22A, p. 61
231. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Наука, 1973.
232. *Цытович В. Н.* — ЖЭТФ, 1964, т. 42, с. 803.
233. а) *Гинзбург В. Л.* — Астрон. ж., 1965, т. 42, с. 1129.
б) *Ginzburg V. L., Ptuskin V. S., Tsytovich V. N.* — Astrophys. a. Space Sci., 1973, v. 21, p. 13.
в) *Wentzel D. G.* — Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1974, v. 12, p. 71.
г) *Топтыгин И. Н.* — Изв. АН СССР: Сер. физ., 1979, т. 43, с. 755 (см. также с. 2552).
234. а) *Птускин В. С.* — Astrophys. a. Space Sci., 1979, v. 61, p. 251.
б) *Carvalho J. C., ter Haar D.* — Mon. Not RAS, 1979, v. 187, p. 23; Astrophys. a. Space Sci., 1979, v. 61, p. 3, 19, 45.
235. а) *Owens A. J., Jokippii J. R.* — Astrophys. J., 1977, v. 215, p. 677, 685.
б) *Jones F. C.* — Astrophys. J., 1979, v. 229, p. 747.
236. *Carcia-Munoz M. et al.* — Astrophys. J., 1977, v. 217, p. 859.
237. а) *Bolt E., Serlemitsos P.* — Astrophys. J., 1969, v. 157, p. 557.
б) *Котов Ю. Д., Агоронян Ф. А.* — В сб.: Материалы семинара Ядерная космическая физика. — Л.: ФТИ АН СССР, 1978, с. 108; *Агоронян Ф. А. и др.* — Изв. АН СССР: Сер. физ., 1979, т. 43, с. 2499.
238. а) *Розенталь И. Л. и др.* — УФН, 1979, т. 127, с. 135.
б) *Ramaty R., Lingenfelter R. E.* — Nature, 1979, v. 278, p. 127.
в) *Ozernoy L. M., Aharonian F. A.* — Astrophys. a. Space Sci., 1979, v. 66, p. 497.
239. а) *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* — УФН, 1964, т. 84, с. 201 (см. также *Ginzburg V. L.* Elementary Processes for Cosmic Ray Astrophysics. — New York: Gordon a. Breach Sci. Publ., 1969).
б) *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* — ЖЭТФ, 1964, т. 26, с. 1865.
240. а) *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: Физматгиз, 1960.
б) *Blumenthal G. R., Gould R. J.* — Rev. Mod. Phys., 1970. v 42. p. 237.
в) *Schlickeiser R.* — Astrophys. J., 1979, v. 233, p. 294.
г) *Liang E. P. T.* — Astrophys. J., 1979, v. 234, p. 1105.
д) *Gould R. J.* — Astrophys. J., 1980, v. 238, p. 1026.
241. а) *Greene J.* — Astrophys. J., 1959, v. 130, p. 693.
б) *Karzas W. J., Latter R.* — Astrophys. J. Suppl., 1961, v. 6, p. 167.
в) *Margon B.* — Astrophys. J., 1973, v. 184, p. 323.
242. *Довженко О. И., Поманский А. А.* — ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 268.
243. а) *Gould R. J.* — Astrophys. J., 1975, v. 196, p. 689.
б) *Cesarsky C. J. et al.* — Astrophys. a. Space Sci., 1978, v. 59, p. 73.
в) *Pangborn R. L.* — Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 915.
244. а) *Gould R. J.* — Astrophys. J., 1979, v. 230, p. 967.
б) *Gould R. J., Raphaeli Y.* — Astrophys. J., 1978, v. 225, p. 318.
245. а) *Trümper J. et al.* — Astrophys. J. (Letters), 1978, v. 219, p. L105.
б) *Melrose D. B., Zheleznyakov V. V.* — Astron. a. Astropys., 1981, in press.

246. а) *Сомов Б. В., Тиндо И. П.* — Космические исследования, 1978, т. 16. с. 686.
б) *Сомов Б. В., Сыроватский С. И.* — УФН, 1976, т. 120, с. 217.
247. Astrophys. J. (Letters), 1979, v. 234, № 1, pt 2 (номер посвящен результатам, полученным на рентгеновской обсерватории «Эйнштейн»).
248. а) *Boyg R. L. F.* — Proc. Roy. Soc., 1979, v. 366A, p. 1 (см. также p. 311, 345, 435, 461).
б) *van Paradijs J.* — Nature, 1978, v. 274, p. 650.
в) *Гурский Г., Ван ден Хёвен Э.* — УФН, 1976, т. 118, с. 673.
г) *Wu C. C.* — Astrophys. J., 1979, v. 227, p. 291.
249. а) *Сыроватский С. И.* — УФН, 1976, т. 118, с. 738.
б) *Сомов Б. В.* — Изв. АН СССР: Сер. физ., 1979, т. 43, с. 708.
250. *Schwartz D. A.* — In: Proc. COSPAR Symposium on X-ray Astronomy, Pergamon Press, 1979, p. 453.
251. а) *Гальпер А. М., Лучков Б. И., Прилуцкий О. Ф.* — УФН, 1979, т. 128, с. 313.
б) *Pinkan K.* — Nature, 1979, v. 277, p. 17.
в) *Karbach G.* — In: 16th Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Kyoto, 1979, v. 14, p. 105.
г) *Daniel R. R.* — In: 16th Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Kyoto, 1979, v. 12, p. 19.
252. а) *Stecker F. W.* Cosmic Gamma Rays.— Washington: NASA, 1971; Astrophys. J., 1977, v. 212, p. 60.
б) *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1972, т. 108, с. 273; Nature (Phys. Sci.), 1972, v. 239, p. 8.
в) *Гальпер А. М. и др.* — УФН, 1971, т. 105, с. 209; 1972, т. 112, с. 517.
г) *Fichtel C. E.* — Space Sci. Rev., 1977, v. 20, p. 191 (см. также Science, 1978, v. 202, p. 933).
253. а) *Protheroe R. J., Strong A. W., Wolfendale A. W.* — Mon. Not. RAS, 1979, v. 188, p. 863.
б) *Lebran F., Paul J.* — In: 16th Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Kyoto, 1979, v. 12, p. 13.
254. а) *Dodds D. et al.* — Mon. Not RAS, 1975, v. 171, p. 569.
б) *Strong A. W. et al.* — Mon. Not. RAS, 1978, v. 182, p. 751.
255. а) *Мачабели Г. З., Усов В. В.* — Письма Астрон. ж, 1979, т. 5, с. 445.
б) *Очелков Ю. П., Усов В. В.* — Письма Астрон. ж., 1979, т. 5, с. 180.
256. а) *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М., Сыроватский С. И.* — ДАН СССР, 1964, т. 154, с. 557.
б) *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.* — Astrophys. a. Space Sci., 1977, v 48, p. 401.
в) *Berezinsky V. S., Ginzburg V. L.* — Mon. Not. RAS, 1981, v. 194, p. 3.
257. *Audouze J. et al.* — Astron. a. Astrophys., 1979, v. 80, p. 276.
258. а) *Bell K. L., Kingston A. E.* — Mon. Not RAS, 1967, v. 136, p. 241.
б) *Вайнштейн А., Курт В., Шеффер К.* — Астрон. ж., 1968, т. 45, с. 237.
в) *Brown R., Gould R.* — Phys. Rev., 1970, v. 1D, p. 1970.
г) *Fireman E. L.* — Astrophys. J., 1974, v. 187, p. 57.
д) *Gould R. J.* — Astrophys. J., 1980, v. 235, p. 650.
259. а) *Никишев А. И.* — ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 459.
б) *Березинский В. С.* — Яд. физ., 1970, т. 11, с. 399.
260. а) *Березинский В. С., Зацепин Г. Т.* — Яд. физ., 1971, т. 13, с. 793.
б) *Berezinsky V. S.* — In: 15th Cosmic Ray Conference, Conference Papers. — Plovdiv, 1977, v 10, p. 84; УФН, 1981, в печати.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Волны виртуальные 205
— дополнительные 262, 274, 277
— необыкновенные 147, 233—237, 215
— нормальные 110, 233—237, 279, 309—312
— —, поляризация 117, 240, 244
— обыкновенные 233—237, 245
Вырождение поляризационное 238, 239

Гирочастота 66

Движение гиперболическое 49, 51
— сверхсветовое 128, 140, 147, 218—220, 225—227
Дисперсия 106, 111
— в кристаллооптике 273
— пространственная 106, 206, 252—281, 230, 328—333
— частотная 106, 111, 191, 203, 206, 254, 265
Длина волны де Бройля 289, 360

Законы сохранения 44—57, 135—137, 149, 318—327

Излучательная способность 94, 232, 237, 242, 443, 446, 448, 450
Излучение изгибное 76, 104
— индуцированное 139, 152
— квазисинхротронное 225
— магнитотормозное 155 и д.
— переходное 29, 119, 152, 167—210
— — акустических волн 170
— — в среде анизотропной 182, 187, 224
— — — — нестационарной 183—188
— — вперед 175—178, 180, 187
— —, зона формирования 188—193, 203, 224
— — на границе раздела 167—183
— — назад 176, 178, 180, 187
— —, поляризация 184
— — резонансное 198
— —, энергетический баланс 132—138
—, реабсорбция 102, 152, 229, 242, 414
—, — в вакууме 240
—, — — холодной плазме 240
—, —, коэффициент 243, 245, 246, 249
—, — отрицательная 230, 244, 249, 250
— рекомбинационное 438
— рентгеновское 444
— — рекомбинационное 449
— — тормозное плазмы 444, 445
— синхро-комптоновское 101, 104
— синхротронное 53, 75 и д.
— — космическое 467—470
— —, поляризация 77, 78, 87, 89, 470
— —, радиационные потери 79, 83
— тормозное 155, 179, 438, 452—457
Излучение частиц 58
— — в ондуляторе 61—65, 75, 125
— — — среде 105—134
— — нерелятивистских 58—73
— — релятивистских 58—73
— черенковское 29, 31, 53, 119, 135 и д.
— — диполей 158—165
— — — в канале 161—165
— — зайчика 221
— — нелинейное 208
— —, условие 120, 124, 141, 154, 200, 294
— —, — резонанса 156
— циклотронное 59
Интеграл столкновений 291, 292, 297
Источники галактические 473—476
— сверхсветовые 128, 218—220, 225—227

Калибровка кулоновская 12
— Лоренца 10
Колебания, затухание 147—150
—, раскачка 147—150
Конус черенковский 123—126, 147 и д.
Коэффициент экстинции 365, 381
Коэффициенты Эйнштейна 139, 237
— —, метод 234—242

Лучи космические 98
— —, анизотропия 395, 423
— —, диффузионное приближение 424—428
— —, компонента протонно-ядерная 396, 406, 477
— —, — электронная 396, 399, 400, 406
— —, происхождения 99, 393, 403—406, 424, 483
— —, спектр 394—405
— —, химический состав 396—399, 432, 433
— субкосмические 393

Магеллановы Облака 481—483
Метод гамильтоновский 27, 33, 107, 110 и д.
— изображений 170
— кинетического уравнения 157, 237

Нелинейность вакуума 128—133
Неустойчивость пучка 139, 140, 152, 153, 414, 420, 422
— —, критерий 139, 152

Осцилляторы поля 15, 28, 31

Параметр прицельный 33
Параметры Стокса 86—89, 96, 231—237, 241, 245, 246
Пары электрон-позитронные 69

Плазма 133, 143, 151, 207 и д.
— горячая 308
— изотропная 143, 151, 153, 241, 283—303, 309
— магнитоактивная 143, 151, 155, 157, 303—315
— холодная 236, 244, 280, 307, 310, 311
Плазмоны 141, 150—152, 154, 417
Поглощение бесстолкновительное 294, 302
— отрицательное 139, 140
Поля виртуальные 205
Поляритоны 278—280, 377
Потенциалы Лиенара — Вихерта 45, 62, 120
Потери ионизационные 124, 161, 406—436
— — в плазме 410—412
— комптоновские 435, 462—465
— магнитотормозные 435
— радиационные 70—74, 79, 83, 428, 435, 445, 452—455

Радиогало 401—405
Радиодиск 401—403
Радиус дебаевский 257, 288, 296
Рассеяние дельбруковское 209
— в плазме 207, 379—385
— комптоновское 103, 439, 477—481
— переходное 166—210, 385—395
— света в среде 362—380
— — комбинационное 341—379, 384
— томсоновское 138, 207, 386—389
Реакция излучения — см. Сила радиационная

Сила ван-дер-ваальсова 351
— Лоренца 50, 67, 70, 76, 317
— радиационная 35—43,50—57, 64, 69, 125, 143—145
— — в среде 135 и д.
— — черенковская 143
Скорость альвеновская 305
— сверхсветовая 128, 40, 147, 217—220, 225—227
— — зайчика 2,7
Соотношения дисперсионные 111, 258
Среда 105 и д.
— анизотропная 115—123, 141, 147, 176—182, 187, 240, 260, 277
— гиротропная 257, 262, 264, 265, 271, 273, 276
— — диспергирующая поглощающая 327—339
Среда гиротропная диспергирующая, выделение тепла 324—339
— — —, плотность энергии 327—339
— изотропная 105—115, 136, 142, 145, 150, 158, 278
— негиротропная 256, 257, 269, 271, 277, 278
—, тепловое излучение 351—356
Счетчики переходные 169, 202
— черенковские 169

Тензор энергии — импульса Абрагама 316—327
— — — Минковского 316—327
Теорема взаимности 162, 164
— Пойнтинга 265, 266, 328
— флуктуационно-диссипационная 345—351

Угол черенковский 126 и д.
Уравнение дисперсионное 118, 150, 154, 259, 261, 264, 274, 297, 354
— материальное 254, 263, 264
— переноса 232, 234, 424, 428—436
— Френеля 261, 275

Фактор Гаунта 449
Флуктуации в контуре 340—348
— — резонаторе 358
Формула Тамма — Франка 174
Фотоны в среде 109—119, 135, 141
Функции Грина 204

Ширина линий 366—371

Экранирование дебаевское 288
— —, радиус 257, 288, 296
Эффект Вавилова — Черенкова — см. Излучение черенковское
— Доплера 47, 60, 77, 135 и д.
— — аномальный 123, 137, 140, 146, 228
— — нормальный 123, 137, 140, 146
— Комптона обратный 458—465
— мазерный 150, 229
— Фарадея 246