

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	7
Предисловие к первому изданию	7
Глава I. Уравнения движения	9
§ 1. Обобщенные координаты	9
§ 2. Принцип наименьшего действия	10
§ 3. Принцип относительности Галилея	13
§ 4. Функция Лагранжа свободной материальной точки	15
§ 5. Функция Лагранжа системы материальных точек	17
Глава II. Законы сохранения	23
§ 6. Энергия	23
§ 7. Импульс	25
§ 8. Центр инерции	27
§ 9. Момент импульса	29
§ 10. Механическое подобие	33
Глава III. Интегрирование уравнений движения с	37
§ 11. Одномерное движение	37
§ 12. Определение потенциальной энергии по периоду колебаний	40
§ 13. Приведенная масса	42
§ 14. Движение в центральном поле	43
§ 15. Кеплерова задача	49
Глава IV. Столкновения частиц	53
§ 16. Распад частиц	56
§ 17. Упругие столкновения частиц	60
§ 18. Рассеяние частиц	64
§ 19. Формула Резерфорда	70
§ 20. Рассеяние под малыми углами	73
Глава V. Малые колебания	76
§ 21. Свободные одномерные колебания	76
§ 22. Вынужденные колебания	80
§ 23. Колебания систем со многими степенями свободы	85
§ 24. Колебания молекул	92
§ 25. Затухающие колебания	97
§ 26. Вынужденные колебания при наличии трения	100
§ 27. Параметрический резонанс	103
§ 28. Ангармонические колебания	109
§ 29. Резонанс в нелинейных колебаниях	113
§ 30. Движение в быстро осциллирующем поле	119

Глава VI. Движение твердого тела	123
§ 31. Угловая скорость	123
§ 32. Тензор инерции	126
§ 33. Момент импульса твердого тела	135
§ 34. Уравнения движения твердого тела	137
§ 35. Эйлеровы углы	140
§ 36. Уравнения Эйлера	145
§ 37. Асимметрический волчок	147
§ 38. Соприкосновение твердых тел	155
§ 39. Движение в неинерциальной системе отсчета	160
Глава VII. Канонические уравнения	155
§ 40. Уравнения Гамильтона	165
§ 41. Функция Рауса	167
§ 42. Скобки Пуассона	169
§ 43. Действие как функция координат	173
§ 44. Принцип Мопертюи	176
§ 45. Канонические преобразования	179
§ 46. Теорема Лиувилля	182
§ 47. Уравнение Гамильтона—Якоби	184
§ 48. Разделение переменных	187
§ 49. Адиабатические инварианты	193
§ 50. Канонические переменные	196
§ 51. Точность сохранения адиабатического инварианта	199
§ 52. Условно-периодическое движение	202
Предметный указатель	208

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

Абсолютно гладкая поверхность 155	-быстрый 144
-шероховатая поверхность 156	-симметрический 128, 136, 142
Аддитивность интегралов движения	-шаровой 128
23	Вырождение 205
-массы 28	Геометрическая оптика 175
Амплитуда 77	Главные моменты инерции 128
Апериодическое затухание 99	-оси инерции 128
Биения 82, 91	Действие 10
Вариация 11	-укороченное 176
Вириальная теорема 35	Декремент затухания 98
Внутренняя энергия 28	Дисперсионное поглощение 102
Волчок асимметрический 128, 147	Диссипативная функция 99

Задача двух тел 42  
Закон инерции 14  
-равенства действия и  
    противодействия 26  
Законы Кеплера 34, 44  
Замкнутая система 17 Замкнутые  
    траектории 46  
Изотропия пространства 14, 29  
Инерциальная система отсчета 14  
Интеграл движения 23  
-площадей 44  
Канонические уравнения 166  
Канонически-сопряженные величины  
    181  
Качение 155  
Кинетическая энергия 18  
Комбинационные частоты 111  
Консервативная система 24  
Линия узлов 140  
Масса частицы 16  
Маятник двойной 21, 91  
-плоский 21, 39, 49, 121  
-сферический 47  
-физический 131  
-Фуко 164  
Мгновенная ось вращения 125  
Момент силы 138  
Нормальные колебания 89  
Нутация 143  
Обобщенная координата 9  
-сила 27  
Обобщенный импульс 28  
Однородное поле 20  
Однородность времени 24  
-пространства 25  
Осциллятор 77  
-пространственный 92  
Падение частицы в центре 47, 68  
Пара сил 138  
Параболические координаты 189  
Переменная действия 197  
Перигелия смещение 54  
Полодия 148  
Поступательное движение 124  
Потенциальная энергия 18  
-яма 38  
Преобразование Галилея 15  
-Лежандра 165  
Прецессия регулярная 136  
Принцип д'Аламбера 157  
Производящая функция 180  
Резонанс 81  
Ротатор 129, 136  
Связи 20  
-голономные 156  
-неголономные 156  
Секториальная скорость 44  
Сила 19  
-Кориолиса 162  
-реакции 155  
-трения 97, 155  
-центробежная 162  
Скольжение 155  
Собственная частота 87  
Степени свободы 9, 92, 123  
Теорема Пуассона 172  
Тождество Якоби 171  
Точечное преобразование 179  
Точка остановки 38  
Угловая переменная 197  
Уравнения Ньютона 19  
Условия равновесия твердого тела  
    15S  
Фаза 77  
Фазовая траектория 182  
Фазовое пространство 182  
Финитное и инфинитное движение  
    32  
Циклическая координата 44, 168, 186  
-частота 77  
Эксцентриситет 50  
Эллиптические координаты 191  
Эффективное сечение 65

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании эта книга почти не отличалась от первого издания. Не возникло необходимости в сколько-нибудь значительной ее переработке и при подготовке нового издания. Поэтому большая часть книги воспроизведена стереотипно (с исправлением лишь опечаток). Переработке и дополнению, произведенным мной совместно с Л. П. Питаевским, подверглись лишь последние параграфы, посвященные адиабатическим инвариантам.

Июнь 1972 г.

*Е. М. Лифшиц*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящей книгой мы рассчитываем начать последовательное переиздание всех томов нашей «Теоретической физики». Окончательный план ее сейчас представляется в следующем виде:

1. Механика. 2. Теория поля. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 4. Релятивистская квантовая теория. 5. Статистическая физика. 6. Гидродинамика. 7. Теория упругости. 8. Электродинамика сплошных сред. 9. Физическая кинетика.

Мы благодарны И. Е. Дзялошинскому и Л. П. Питаевскому за помощь при чтении корректуры книги.

Москва, июль 1957 г.

*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

## § 1. Обобщенные координаты

Одним из основных понятий механики является понятие *материальной точки*<sup>1)</sup>. Под этим названием понимают тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Разумеется, возможность такого пренебрежения зависит от конкретных условий той или иной задачи. Так, планеты можно считать материальными точками при изучении их движения вокруг Солнца, но, конечно, не при рассмотрении их суточного вращения.

Положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Производная  $\mathbf{r}$  по времени  $t$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

называется скоростью, а вторая производная  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  — ускорением точки. Ниже, как это принято, мы будем часто обозначать дифференцирование по времени точкой над буквой:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

Для определения положения системы из  $N$  материальных точек в пространстве надо задать  $N$  радиус-векторов, т. е.  $3N$  координат. Вообще число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется числом ее *степеней свободы*; в данном случае это число равно  $3N$ . Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат. Любые  $s$  величин  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , вполне характеризующие положение системы (с  $s$  степенями свободы), называют ее *обобщенными координатами*, а производные  $\dot{q}_i$  — ее *обобщенными скоростями*.

Задание значений обобщенных координат еще не определяет, однако, «механического состояния» системы в данный момент времени

<sup>1)</sup> Вместо термина «материальная точка» мы будем часто говорить о «частичках».

в том смысле, что оно не позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. При заданных значениях координат система может обладать произвольными скоростями, а в зависимости от значения последних будет различным и положение системы в следующий момент времени (т. е. через бесконечно малый временной интервал  $dt$ ).

Одновременное же задание всех координат и скоростей полностью определяет, как показывает опыт, состояние системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат  $q$  и скоростей  $\dot{q}$  в некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений  $\ddot{q}$  в этот момент<sup>1)</sup>.

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются *уравнениями движения*. По отношению к функциям  $q(t)$  это — дифференциальные уравнения второго порядка, интегрирование которых позволяет в принципе определить эти функции, т. е. траектории движения механической системы.

## § 2. Принцип наименьшего действия

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым *принципом наименьшего действия* (или *принципом Гамильтона*). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

или, в краткой записи,  $L(q, \dot{q}, t)$ , причем движение системы удовлетворяет следующему условию.

Пусть в моменты времени  $t=t_1$  и  $t=t_2$  система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ . Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2,1)$$

имел наименьшее возможное значение<sup>2)</sup>. Функция  $L$  называется *функцией Лагранжа* данной системы, а интеграл (2,1) — *действием*.

<sup>1)</sup> Для краткости обозначений мы будем часто условно понимать под  $q$  совокупность всех координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (и под  $\dot{q}$  аналогично совокупность всех скоростей).

<sup>2)</sup> Следует, однако, указать, что в такой формулировке принцип наименьшего действия не всегда справедлив для всей траектории движения в целом, а лишь для каждого из достаточно малых ее участков; для всей же траектории может оказаться, что интеграл (2,1) имеет лишь экстремальное, не обязательно минимальное значение. Это обстоятельство, однако, совершенно не существенно при выводе уравнений движения, использующем лишь условие экстремальности.

Тот факт, что функция Лангранжа содержит только  $q$  и  $\dot{q}$ , но не более высокие производные  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\dot{q}}$ , ... , является выражением указанного выше факта, что механическое состояние полностью определяется заданием координат и скоростей.

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений, решающих задачу об определении минимума интеграла (2,1). Для упрощения записи формул предположим сначала, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция  $q(t)$ .

Пусть  $q = q(t)$  есть как раз та функция, для которой  $S$  имеет минимум. Это значит, что  $S$  возрастает при замене  $q(t)$  на любую функцию вида

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2,2)$$

где  $\delta q(t)$  — функция, малая во всем интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  (ее называют *вариацией* функции  $q(t)$ ); поскольку при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  все сравниваемые функции (2,2) должны принимать одни и те же значения  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ , то должно быть:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2,3)$$

Изменение  $S$  при замене  $q$  на  $q + \delta q$  дается разностью

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Разложение этой разности по степеням  $\delta q$  и  $\delta \dot{q}$  (в подинтегральном выражении) начинается с членов первого порядка. Необходимым условием минимальности  $S^1$ ) является обращение в нуль совокупности этих членов; ее называют первой вариацией (или обычно просто вариацией) интеграла. Таким образом, принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2,4)$$

или, произведя варьирование:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Замечая, что  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ , проинтегрируем второй член по частям и получим:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2,5)$$

<sup>1)</sup> Вообще — экстремальности.

Но в силу условий (2,3) первый член в этом выражении исчезает. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях  $\delta q$ . Это возможно только в том случае, если подинтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться  $s$  различных функций  $q_i(t)$ . Очевидно, что мы получим тогда  $s$  уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2,6)$$

Это — искомые дифференциальные уравнения; они называются в механике *уравнениями Лагранжа*<sup>1)</sup>. Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (2,6) устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т. е. представляют собой уравнения движения системы.

С математической точки зрения уравнения (2,6) составляют систему  $s$  уравнений второго порядка для  $s$  неизвестных функций  $q_i(t)$ . Общее решение такой системы содержит  $2s$  произвольных постоянных. Для их определения и тем самым полного определения движения механической системы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например знание начальных значений всех координат и скоростей.

Пусть механическая система состоит из двух частей  $A$  и  $B$ , каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы в качестве функции Лагранжа соответственно функции  $L_A$  и  $L_B$ . Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь, лагранжева функция всей системы стремится к пределу

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2,7)$$

Это свойство аддитивности функции Лагранжа выражает собой тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.

Очевидно, что умножение функции Лагранжа механической системы на произвольную постоянную само по себе не отражается на уравнениях движения. Отсюда, казалось бы, могла вытекать существ-

<sup>1)</sup> В вариационном исчислении, рассматривающем формальную задачу об определении экстремумов интегралов вида (2,1), они называются уравнениями Эйлера.

венная неопределенность: функции Лагранжа различных изолированных механических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные. Свойство аддитивности устраняет эту неопределенность, — оно допускает лишь одновременное умножение лагранжевых функций всех систем на одинаковую постоянную, что сводится просто к естественному произволу в выборе единиц измерения этой физической величины; мы вернемся еще к этому вопросу в § 4.

Необходимо сделать еще следующее общее замечание. Рассмотрим две функции  $L'(q, \dot{q}, t)$  и  $L(q, \dot{q}, t)$ , отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени  $f(q, t)$ :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (2,8)$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы (2,1) связаны соотношением

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1), \end{aligned}$$

т. е. отличаются друг от друга дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия, так что условие  $\delta S' = 0$  совпадает с условием  $\delta S = 0$ , и вид уравнений движения остается неизменным.

Таким образом, функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени.

### § 3. Принцип относительности Галилея

Для изучения механических явлений надо выбрать ту или иную систему отсчета. В различных системах отсчета законы движения имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то, тем не менее, его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т. е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, — очевидно. Так, например, свободное

(т. е. не подвергающееся внешним воздействиям) тело не могло бы покоиться: если скорость тела в некоторый момент времени и равна нулю, то уже в следующий момент тело начало бы двигаться в некотором направлении.

Оказывается, однако, что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время — однородным. Такая система называется *инерциальной*. В ней, в частности, свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остается в покое неограниченно долго.

Мы можем теперь сразу сделать некоторые заключения о виде функции Лагранжа свободно движущейся материальной точки в инерциальной системе отсчета. Однородность пространства и времени означает, что эта функция не может содержать явным образом ни радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки, ни времени  $t$ , т. е.  $L$  является функцией лишь от скорости  $\mathbf{v}$ . В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора  $\mathbf{v}$ , так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т. е. от квадрата  $\mathbf{v}^2 = v^2$ :

$$L = L(v^2). \quad (3,1)$$

Ввиду независимости функции Лагранжа от  $\mathbf{r}$  имеем  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$ , и потому уравнения Лагранжа имеют вид<sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

откуда  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{const}$ . Но поскольку  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$  является функцией только от скорости, то отсюда следует, что и

$$\mathbf{v} = \text{const}. \quad (3,2)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Это утверждение составляет содержание так называемого *закона инерции*.

Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Опыт показывает, однако, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что они будут и во всех других механических отношениях полностью эквивалентными.

<sup>1)</sup> Под производной скалярной величины по вектору подразумевается вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики. Это утверждение составляет содержание так называемого *принципа относительности Галилея* — одного из важнейших принципов механики.

Все сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчета, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений. Везде в дальнейшем, где обратное не оговорено особо, мы будем рассматривать только инерциальные системы отсчета.

Полная механическая эквивалентность всего бесчисленного множества таких систем показывает в то же время, что не существует никакой одной «абсолютной» системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.

Координаты  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  одной и той же точки в двух различных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , из которых вторая движется относительно первой со скоростью  $\mathbf{V}$ , связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (3,3)$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета:

$$t = t'. \quad (3,4)$$

Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе представлений классической механики<sup>1)</sup>.

Формулы (3,3), (3,4) называют *преобразованием Галилея*. Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

#### § 4. Функция Лагранжа свободной материальной точки

Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай — свободное движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Как мы уже видели, функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости. Для выяснения вида этой зависимости воспользуемся принципом относительности Галилея. Если инерциальная система отсчета  $K$  движется относительно инерциальной системы отсчета  $K'$  с бесконечно малой скоростью  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , то  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$ . Так как уравнения движения во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, то функция Лагранжа  $L(v^2)$  должна при таком преобразовании перейти в функцию  $L'$ , которая

<sup>1)</sup> Оно не справедливо в механике теории относительности.

если и отличается от  $L(v^2)$ , то лишь на полную производную от функции координат и времени (см. конец § 2).

Имеем:

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2v\epsilon + \epsilon^2).$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням  $\epsilon$  и пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2v\epsilon.$$

Второй член первой части этого равенства будет полной производной по времени только в том случае, если он зависит от скорости  $v$  линейно. Поэтому  $\frac{\partial L}{\partial v^2}$  от скорости не зависит, т. е. функция Лагранжа в рассматриваемом случае прямо пропорциональна квадрату скорости:

$$L = av^2.$$

Из того, что функция Лагранжа такого вида удовлетворяет принципу относительности Галилея в случае бесконечно малого преобразования скорости, непосредственно следует, что функция Лагранжа инвариантна и в случае конечной скорости  $V$  системы отсчета  $K$  относительно  $K'$ . Действительно,

$$L' = av'^2 = a(v + V)^2 = av^2 + 2avV + aV^2$$

или

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2avV + aV^2t).$$

Второй член является полной производной и может быть опущен.

Постоянную  $a$  принято обозначать как  $m/2$ , так что окончательно напишем функцию Лагранжа свободно движущейся точки в виде

$$L = \frac{mv^2}{2}. \quad (4,1)$$

Величина  $m$  называется *массой* материальной точки. В силу свойства аддитивности функции Лагранжа, для системы невзаимодействующих точек имеем <sup>1)</sup>

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \quad (4,2)$$

Следует подчеркнуть, что лишь при учете этого свойства данное определение массы приобретает реальный смысл. Как уже было отмечено в § 2, всегда можно умножить функцию Лагранжа на любую посто-

<sup>1)</sup> В качестве индекса; указывающего номер частицы, мы будем пользоваться первыми буквами латинского алфавита, а для индексов, нумерующих координаты, используем буквы  $i, k, l, \dots$

янную; это не отражается на уравнениях движения. Для функции (4,2) такое умножение сводится к изменению единицы измерения массы; отношения же масс различных частиц, которые только и имеют реальный физический смысл, остаются при этом преобразовании неизменными.

Легко видеть, что масса не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия для действительного движения материальной точки из точки 1 пространства в точку 2 интеграл

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

имеет минимум. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от 1, а затем быстро приближается к 2, интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не имел бы минимума<sup>1)</sup>.

Полезно заметить, что

$$v^2 = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \quad (4,3)$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги  $dl$  в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах, например,  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , поэтому

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4,4)$$

В цилиндрических  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$ , откуда

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4,5)$$

В сферических  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$  и

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (4,6)$$

## § 5. Функция Лагранжа системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими посторонними телами; такую систему называют *замкнутой*. Оказывается, что взаимодействие между материальными точками может быть описано прибавлением

<sup>1)</sup> Сделанная в примечании на стр. 10 оговорка не мешает этому выводу, так как при  $m < 0$  интеграл не мог бы иметь минимума ни для какого малого участка траектории.

к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (4,2) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции координат<sup>1)</sup>. Обозначив эту функцию через  $-U$ , напишем:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (5,1)$$

( $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор  $a$ -й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой системы.

Сумму

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

называют *кинетической энергией*, а функцию  $U$  — *потенциальной энергией* системы; смысл этих названий выяснится в § 6.

Тот факт, что потенциальная энергия зависит только от расположения всех материальных точек в один и тот же момент времени, означает, что изменение положения одной из них мгновенно отражается на всех остальных; можно сказать, что взаимодействия «распространяются» мгновенно. Неизбежность такого характера взаимодействий в классической механике тесно связана с основными предпосылками последней — абсолютностью времени и принципом относительности Галилея. Если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, т. е. с конечной скоростью, то эта скорость была бы различна в разных (движущихся друг относительно друга) системах отсчета, так как абсолютность времени автоматически означает применимость обычного правила сложения скоростей ко всем явлениям. Но тогда законы движения взаимодействующих тел были бы различны в разных (инерциальных) системах отсчета, что противоречило бы принципу относительности.

В § 3 мы говорили только об однородности времени. Вид функции Лагранжа (5,1) показывает, что время не только однородно, но и изотропно, т. е. его свойства одинаковы по обоим направлениям. В самом деле, замена  $t$  на  $-t$  оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т. е. такое, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5,2)$$

<sup>1)</sup> Это утверждение относится к излагаемой в настоящей книге классической — нерелятивистской — механике.

Подставив сюда (5,1), получим:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r_a}. \quad (5,3)$$

Уравнения движения в этой форме называются *уравнениями Ньютона* и представляют собой основу механики системы взаимодействующих частиц. Вектор

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \quad (5,4)$$

стоящий в правой стороне уравнений (5,3), называется *силой*, действующей на  $a$ -ю точку. Вместе с  $U$  она зависит лишь от координат всех частиц, но не от их скоростей. Уравнения (5,3) показывают поэтому, что и векторы ускорения частиц являются функциями только от координат.

Потенциальная энергия есть величина, определяемая лишь с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной; такое прибавление не изменило бы уравнений движения (частный случай указанной в конце § 2 неоднозначности функции Лагранжа). Наиболее естественный и обычно принятый способ выбора этой постоянной заключается в том, чтобы потенциальная энергия стремилась к нулю при увеличении расстояний между частицами.

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты  $q_i$ , то для получения лагранжевой функции надо произвести соответствующее преобразование

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \text{ и т. д.}$$

Подставляя эти выражения в функцию

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

получим искомую функцию Лагранжа, которая будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5,5)$$

где  $a_{ik}$  — функции только от координат. Кинетическая энергия в обобщенных координатах по-прежнему является квадратичной функцией скоростей, но может зависеть также и от координат.

До сих пор мы говорили только о замкнутых системах. Рассмотрим теперь незамкнутую систему  $A$ , взаимодействующую с другой системой  $B$ , совершающей заданное движение. В таком случае говорят, что система  $A$  движется в заданном внешнем поле (создаваемом системой  $B$ ). Поскольку уравнения движения получаются из принципа

наименьшего действия путем независимого варьирования каждой из координат (т. е. как бы считая остальные известными), мы можем для нахождения функции Лагранжа  $L_A$  системы  $A$  воспользоваться лагранжевой функцией  $L$  всей системы  $A+B$ , заменив в ней координаты  $q_B$  заданными функциями времени.

Предполагая систему  $A+B$  замкнутой, будем иметь:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

где первые два члена представляют собой кинетические энергии систем  $A$  и  $B$ , а третий член — их совместную потенциальную энергию. Подставив вместо  $q_B$  заданные функции времени и опустив член  $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ , зависящий только от времени (и поэтому являющийся полной производной от некоторой другой функции времени), получим:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа обычного типа с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

Так, для движения одной частицы во внешнем поле общий вид функции Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \quad (5,6)$$

и уравнение движения

$$m \dot{\mathbf{v}} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (5,7)$$

*Однородным* называют поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила  $\mathbf{F}$ . Потенциальная энергия в таком поле равна, очевидно:

$$U = -\mathbf{F}\mathbf{r}. \quad (5,8)$$

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание по поводу применения уравнений Лагранжа к различным конкретным задачам. Часто приходится иметь дело с такими механическими системами, в которых взаимодействие между телами (материальными точками) имеет, как говорят, характер *связей*, т. е. ограничений, налагаемых на взаимное расположение тел. Фактически такие связи осуществляются путем скрепления тел различными стержнями, нитями, шарнирами и т. п. Это обстоятельство вносит в движение новый фактор — движение тел сопровождается трением в местах их соприкосновения, в результате чего задача выходит, вообще говоря, за рамки чистой механики (см. § 25). Однако во многих случаях трение в системе оказывается настолько слабым, что его влиянием на движение можно полностью пренебречь. Если к тому же можно пренебречь массами «скрепляющих элементов» системы, то роль последних сведется просто к уменьшению числа степеней свободы системы

$s$  (по сравнению с числом  $3N$ ). Для определения ее движения можно при этом снова пользоваться функцией Лагранжа вида (5,5) с числом независимых обобщенных координат, отвечающих фактическому числу степеней свободы.

### Задачи

Найти функцию Лагранжа следующих систем, находящихся в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести  $-g$ ).

1. Двойной плоский маятник (рис. 1).

Решение. В качестве координат берем углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые нити  $l_1$  и  $l_2$  образуют с вертикалью. Тогда для точки  $m_1$  имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad U = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выражаем ее декартовы

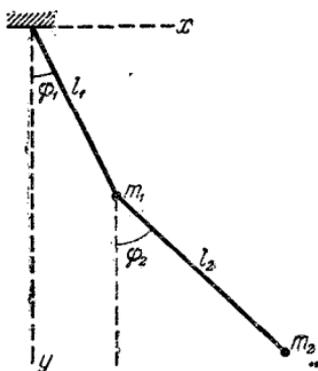


Рис. 1.

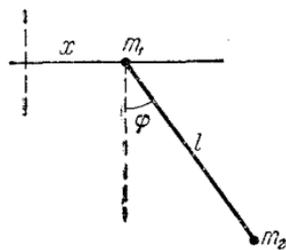


Рис. 2.

координаты  $x_2, y_2$  (начало координат в точке подвеса, ось  $y$  — по вертикали вниз) через углы  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

После этого получим:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

Окончательно:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

2. Плоский маятник с массой  $m_2$ , точка подвеса которого (с массой  $m_1$  в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой (рис. 2).

Решение. Вводя координату  $x$  точки  $m_1$  и угол  $\varphi$  между нитью маятника и вертикалью, получим:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

3. Плоский маятник, точка подвеса которого:

а) равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой  $\gamma$  (рис. 3);

б) совершает горизонтальные колебания по закону  $a \cos \gamma t$ ;

в) совершает вертикальные колебания по закону  $a \cos \gamma t$ .

Решение. а) Координаты точки  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \varphi.$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl \cos \varphi;$$

здесь опущены члены, зависящие только от времени, и исключена полная производная по времени от  $maly \cos(\varphi - \gamma t)$ .

б) Координаты точки  $m$ :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi.$$

Функция Лагранжа (после исключения полных производных)

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + mgl \cos \varphi.$$

в) Аналогичным образом

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

4. Система, изображенная на рис. 4; точка  $m_2$  движется по вертикальной оси, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг этой оси.

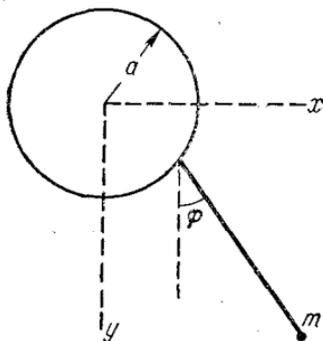


Рис. 3.

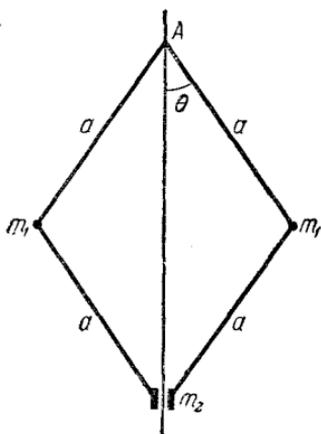


Рис. 4.

Решение. Вводим угол  $\theta$  между отрезком  $a$  и вертикалью и угол поворота  $\varphi$  всей системы вокруг оси вращения;  $\dot{\varphi} = \Omega$ . Для каждой из точек  $m_1$  элемент перемещения  $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ . Для точки  $m_2$  расстояние от точки подвеса  $A$  равно  $2a \cos \theta$ , и потому  $dl_2 = -2a \sin \theta d\theta$ . Функция Лагранжа

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2) \cos \theta.$$

## ГЛАВА II

### ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

#### § 6. Энергия

При движении механической системы  $2s$  величин  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ), определяющих ее состояние, изменяются со временем. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняются при движении постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Эти функции называют *интегралами движения*.

Число независимых интегралов движения для замкнутой механической системы с  $s$  степенями свободы равно  $2s - 1$ . Это очевидно из следующих простых соображений. Общее решение уравнений движения содержит  $2s$  произвольных постоянных (см. стр. 12). Поскольку уравнения движения замкнутой системы не содержат времени явно, то выбор начала отсчета времени совершенно произволен, и одна из произвольных постоянных в решении уравнений всегда может быть выбрана в виде аддитивной постоянной  $t_0$  во времени. Исключив  $t + t_0$  из  $2s$  функций

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}),$$

мы выразим  $2s - 1$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  в виде функций от  $q$  и  $\dot{q}$ , которые и будут интегралами движения.

Однако далеко не все интегралы движения играют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени — их однородностью и изотропией. Все эти, как говорят, сохраняющиеся величины имеют важное общее свойство аддитивности — их значение для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Именно свойство аддитивности придает соответствующим величинам особенно важную механическую роль. Предположим, например, что два тела взаимодействуют в течение некоторого времени. Поскольку

как до, так и после взаимодействия каждый из аддитивных интегралов всей системы равен сумме их значений для обоих тел в отдельности, то законы сохранения этих величин сразу дают возможность сделать ряд заключений о состоянии тел после взаимодействия, если их состояния до взаимодействия известны.

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с *однородностью времени*.

В силу этой однородности лагранжева функция замкнутой системы не зависит явно от времени. Поэтому полная производная функции Лагранжа по времени может быть записана следующим образом:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(если бы  $L$  зависела явно от времени, к правой стороне равенства добавился бы член  $\frac{\partial L}{\partial t}$ ). Заменяя производные  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  согласно уравнениям Лагранжа на  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , получим:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Отсюда видно, что величина

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (6,1)$$

остаётся неизменной при движении замкнутой системы, т. е. является одним из ее интегралов движения. Эта величина называется *энергией* системы. Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности функции Лагранжа, через которую она выражается согласно (6,1) линейным образом.

Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянном (т. е. не зависящем от времени) внешнем поле; единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа — отсутствие явной зависимости от времени — имеется и в этом случае. Механические системы, энергия которых сохраняется, иногда называют *консервативными*.

Как мы видели в § 5, лагранжева функция замкнутой (или находящейся в постоянном поле) системы имеет вид

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

где  $T$ —квадратичная функция скоростей. Применяя к ней известную теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Подставляя это значение в (6,1), найдем:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \quad (6,2)$$

в декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (6,3)$$

Таким образом, энергия системы может быть представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

## § 7. Импульс

Другой закон сохранения возникает в связи с *однородностью пространства*.

В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый перенос на отрезок  $\epsilon$  и потребуем, чтобы функция Лагранжа осталась неизменной.

Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же отрезок, т. е. их радиус-векторы  $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \epsilon$ . Изменение функции  $L$  в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \epsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Ввиду произвольности  $\epsilon$  требование  $\delta L = 0$  эквивалентно требованию

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (7,1)$$

В силу уравнений Лагранжа (5,2) получаем отсюда:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в замкнутой механической системе векторная величина

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (7,2)$$

остаётся неизменной при движении. Вектор  $\mathbf{P}$  называется *импульсом*<sup>1)</sup> системы. Дифференцируя функцию Лагранжа (5,1), найдем, что импульс следующим образом выражается через скорости точек:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \quad (7,3)$$

Аддитивность импульса очевидна. Более того, в отличие от энергии импульс системы равен сумме импульсов

$$\mathbf{P}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

отдельных частиц вне зависимости от возможности пренебрежения взаимодействием между ними.

Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в отсутствие внешнего поля. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля, если потенциальная энергия в нем не зависит от какой-либо из декартовых координат. При переносе вдоль соответствующей координатной оси механические свойства системы, очевидно, не меняются, и тем же способом мы найдем, что проекция импульса на эту ось сохраняется. Так, в однородном поле, направленном вдоль оси  $z$ , сохраняются компоненты импульса вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Исходное равенство (7,1) имеет простой физический смысл. Производная  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$  есть сила  $\mathbf{F}_a$ , действующая на  $a$ -ю частицу. Таким образом, равенство (7,1) означает, что сумма сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (7,4)$$

В частности, в случае системы, состоящей всего из двух материальных точек,  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ : сила, действующая на первую частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно под названием закона равенства действия и противодействия.

Если движение описывается обобщенными координатами  $q_i$ , то производные лагранжевой функции по обобщенным скоростям

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7,5)$$

<sup>1)</sup> Устаревшее название — количество движения.

называются *обобщенными импульсами*, а производные

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7,6)$$

называются *обобщенными силами*. В этих обозначениях уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7,7)$$

В декартовых координатах обобщенные импульсы совпадают с компонентами векторов  $\mathbf{p}_a$ . В общем же случае величины  $p_i$  являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей  $q_i$ , отнюдь не сводящимися к произведениям массы на скорость.

### Задача

Частица с массой  $m$ , движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , переходит из полупространства, в котором ее потенциальная энергия постоянна и равна  $U_1$ , в полупространство, где эта энергия тоже постоянна, но равна  $U_2$ . Определить изменение направления движения частицы.

Решение. Потенциальная энергия не зависит от координат вдоль осей, параллельных плоскости раздела между полупространствами. Поэтому сохраняется проекция импульса частицы на эту плоскость. Обозначая посредством  $\theta_1$  и  $\theta_2$  углы между нормалью к плоскости раздела и скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  частицы до и после перехода, получим:  $v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$ . Связь же между  $v_1$  и  $v_2$  дается законом сохранения энергии, и в результате находим:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2} (U_1 - U_2)}.$$

## § 8. Центр инерции

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным (инерциальным) системам отсчета. Если система отсчета  $K'$  движется относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $\mathbf{V}$ , то скорости  $\mathbf{v}'_a$  и  $\mathbf{v}_a$  частиц по отношению к этим системам связаны соотношением  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Поэтому связь между значениями  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}'$  импульса в этих системах дается формулой

$$\mathbf{P} = \sum_b m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \quad (8,1)$$

В частности, всегда существует такая система отсчета  $K'$ , в которой полный импульс обращается в нуль. Положив в (8,1)  $\mathbf{P}' = 0$ , найдем, что скорость этой системы отсчета равна

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \quad (8,2)$$

Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она покоится относительно соответствующей системы отсчета. Это является вполне естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки. Соответственно скорость  $V$ , даваемая формулой (8,2), приобретает смысл скорости «движения как целого» механической системы с отличным от нуля импульсом. Мы видим, таким образом, что закон сохранения импульса позволяет естественным образом сформулировать понятия покоя и скорости механической системы как целого.

Формула (8,2) показывает, что связь между импульсом  $P$  и скоростью  $V$  системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой  $\mu = \sum m_a$ , равной сумме масс всех частиц в системе. Это обстоятельство можно сформулировать как утверждение об *аддитивности массы*.

Правая сторона формулы (8,2) может быть представлена как полная производная по времени от выражения

$$R = \frac{\sum m_a r_a}{\sum m_a}. \quad (8,3)$$

Можно сказать, что скорость системы как целого есть скорость перемещения в пространстве точки, радиус-вектор которой дается формулой (8,3). Такую точку называют *центром инерции* системы.

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции движется прямолинейно и равномерно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, который был выведен в § 3 для одной свободной материальной точки, «центр инерции» которой совпадает с ней самой.

При изучении механических свойств замкнутой системы естественно пользоваться той системой отсчета, в которой ее центр инерции покоится. Тем самым исключается из рассмотрения равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

Энергию покоящейся как целое механической системы обычно называют ее *внутренней энергией*  $E_{\text{вн}}$ . Она включает в себя кинетическую энергию относительного движения частиц в системе и потенциальную энергию их взаимодействия. Полная же энергия системы, движущейся как целое со скоростью  $V$ , может быть представлена в виде:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{вн}}. \quad (8,4)$$

Хотя эта формула довольно очевидна, дадим ее прямой вывод. Энергии  $E$  и  $E'$  механической системы в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$  связаны соотношением

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (v'_a + V)^2 + U = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + V \sum_a m_a v'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U \end{aligned}$$

или

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \quad (3,5)$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому как для импульса этот закон дается формулой (8,1). Если в системе  $K'$  центр инерции покоится, то  $\mathbf{P}' = 0$ ,  $E' = E_{\text{ин}}$ , и мы возвращаемся к формуле (8,4).

### Задача

Найти закон преобразования действия при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Решение. Функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий, очевидно, преобразуется согласно формуле, аналогичной (8,5):

$$L = L' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2.$$

Интегрируя это равенство по времени, найдем искомый закон преобразования действия:

$$S = S' + \mu \mathbf{V}\mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t,$$

где  $\mathbf{R}'$  — радиус-вектор центра инерции в системе  $K'$ .

## § 9. Момент импульса

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с *изотропией пространства*.

Эта изотропия означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее функция Лагранжа при этом не изменилась.

Введем вектор  $\delta\varphi$  бесконечно малого поворота, абсолютная величина которого равна углу  $\delta\varphi$  поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению  $\delta\varphi$ ).

Найдем, прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиус-вектора, проведенного из общего начала координат (расположенного на оси вращения) к какой-либо из материальных точек поворачиваемой системы. Линейное перемещение конца радиус-вектора связано с углом соотношением

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \cdot \delta\varphi$$

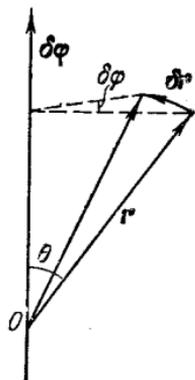


Рис. 5.

(рис. 5). Направление же вектора перпендикулярно к плоскости, проходящей через  $\mathbf{r}$  и  $\delta\varphi$ . Поэтому ясно, что

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}]. \quad (9,1)$$

При повороте системы меняется направление не только радиус-векторов, но и скоростей всех частиц, причем все векторы преобразуются по одинаковому закону. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат

$$\delta\mathbf{v} = [\delta\varphi \cdot \mathbf{v}]. \quad (9,2)$$

Подставив эти выражения в условие неизменяемости функции Лагранжа при повороте

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0,$$

заменяем производные  $\partial L / \partial \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$ ,  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{p}}_a$ :

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a [\delta\varphi \cdot \mathbf{v}_a]) = 0,$$

или, производя циклическую перестановку множителей и вынося  $\delta\varphi$  за знак суммы:

$$\delta\varphi \sum_a ([\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta\varphi \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0.$$

Ввиду произвольности  $\delta\varphi$  отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0,$$

т. е. мы приходим к выводу, что при движении замкнутой системы сохраняется векторная величина

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a], \quad (9,3)$$

называемая *моментом импульса* (или просто *моментом*) системы<sup>1)</sup>. Аддитивность этой величины очевидна, причем, как и у импульса, она не зависит от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами.

Этим исчерпываются аддитивные интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего семь таких интегралов: энергия и по три компоненты векторов импульса и момента.

Поскольку в определение момента входят радиус-векторы частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Радиус-векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}'_a$  одной и той же точки по отношению к началам, отстоящим на расстоянии  $\mathbf{a}$ , связаны соотношением  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ . Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{p}_a] + \left[ \mathbf{a} \sum_a \mathbf{p}_a \right]$$

<sup>1)</sup> Употребляются также названия *вращательный момент* или *угловой момент*.

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{aP}]. \quad (9,4)$$

Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится (т. е.  $\mathbf{P} = 0$ ), ее момент не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Выведем также формулу, связывающую значения момента импульса в двух различных инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , из которых вторая движется относительно первой со скоростью  $\mathbf{V}$ . Будем считать, что начала координат в системах  $K$  и  $K'$  в данный момент времени совпадают. Тогда радиус-векторы частиц в обеих системах одинаковы, скорости же связаны посредством  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}].$$

Первая сумма в правой стороне равенства есть момент  $\mathbf{M}'$  в системе  $K'$ ; введя во вторую сумму радиус-вектор центра инерции согласно (8,3), получаем:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu [\mathbf{RV}]. \quad (9,5)$$

Эта формула определяет закон преобразования момента импульса при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому, как для импульса и энергии аналогичные законы даются формулами (8,1) и (8,5).

Если система отсчета  $K'$  есть та, в которой данная механическая система покоится как целое, то  $\mathbf{V}$  есть скорость центра инерции последней, а  $\mu\mathbf{V}$  — ее полный импульс  $\mathbf{P}$  (относительно  $K$ ). Тогда

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{RP}]. \quad (9,6)$$

Другими словами, момент импульса  $\mathbf{M}$  механической системы складывается из ее «собственного момента» относительно системы отсчета, в которой она покоится, и момента  $[\mathbf{RP}]$ , связанного с ее движением как целого.

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента (относительно произвольного начала координат) имеет место только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может иметь место и для систем, находящихся во внешнем поле. Из приведенного выше вывода очевидно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и потому механические свойства системы не меняются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой же оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с центральной симметрией, т. е. поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор  $\mathbf{M}$  момента, но определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля.

Другой пример: однородное поле вдоль оси  $z$ , в котором сохраняется проекция  $M_z$  момента, причем начало координат может быть выбрано произвольным образом.

Отметим, что проекция момента на какую-либо ось (назовем ее  $z$ ) может быть найдена дифференцированием функции Лагранжа по формуле

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \quad (9,7)$$

где координата  $\varphi$  есть угол поворота вокруг оси  $z$ . Это ясно уже из характера изложенного выше вывода закона сохранения момента, но в том же можно убедиться и прямым вычислением. В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  имеем (подставляя  $x_a = r_a \cos \varphi_a, y_a = r_a \sin \varphi_a$ ):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \quad (9,8)$$

С другой стороны, функция Лагранжа в этих переменных имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

и ее подстановка в формулу (9,7) приводит к тому же выражению (9,8).

### Задачи

1. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} M_x &= m \sin \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ M_y &= m \cos \varphi (z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ M_z &= mr^2\dot{\varphi}, \\ M^2 &= m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2. \end{aligned}$$

2. То же в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} M_x &= -mr^2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi), \\ M_y &= mr^2 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi), \\ M_z &= mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}, \\ M^2 &= m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

3. Какие компоненты импульса  $\mathbf{P}$  и момента  $\mathbf{M}$  сохраняются при движении в следующих полях:

а) поле бесконечной однородной плоскости.

Ответ:  $P_x, P_y, M_z$  (бесконечная плоскость — плоскость  $x, y$ ).

б) Поле бесконечного однородного цилиндра.

Ответ:  $M_z, P_z$  (ось цилиндра — ось  $z$ ).

в) Поле бесконечной однородной призмы.

Ответ:  $P_z$  (ребра призмы параллельны оси  $z$ ).

г) Поле двух точек.

Ответ:  $M_z$  (точки находятся на оси  $z$ ).

д) Поле бесконечной однородной полуплоскости.

Ответ:  $P_y$  (бесконечная полуплоскость — часть плоскости  $x, y$ , ограниченная осью  $y$ ).

е) Поле однородного конуса.

Ответ:  $M_z$  (ось конуса — ось  $z$ ).

ж) Поле однородного кругового тора.

Ответ:  $M_z$  (ось тора — ось  $z$ ).

з) Поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.

Решение. Функция Лагранжа не меняется при повороте вокруг оси винта (ось  $z$ ) на угол  $\delta\varphi$  и одновременном переносе вдоль этой оси на расстояние  $\frac{h}{2\pi} \delta\varphi$  ( $h$  — шаг винта). Поэтому

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi = \left( \dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z \right) \delta \varphi = 0,$$

откуда

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{const.}$$

## § 10. Механическое подобие

Умножение функции Лагранжа на любой постоянный множитель очевидным образом не меняет уравнений движения. Это обстоятельство (отмеченное уже в § 2) дает возможность в ряде важных случаев сделать некоторые существенные заключения о свойствах движения, не производя конкретного интегрирования уравнений движения.

Сюда относятся случаи, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат, т. е. функцией, удовлетворяющей условию

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_n) = \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_n), \quad (10, 1)$$

где  $\alpha$  — любая постоянная, а число  $k$  — степень однородности функции.

Произведем преобразование, при котором наряду с изменением всех координат в  $\alpha$  раз одновременно изменяется (в  $\beta$  раз) время:

$$r_a \rightarrow \alpha r_a, \quad t \rightarrow \beta t.$$

Все скорости  $v_a = \frac{dr_a}{dt}$  изменяются при этом в  $\alpha/\beta$  раз, а кинетическая энергия — в  $\alpha^2/\beta^2$  раз. Потенциальная же энергия умножается на  $\alpha^k$ . Если связать  $\alpha$  и  $\beta$  условием

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{т. е. } \beta = \alpha^{1 - \frac{k}{2}},$$

то в результате такого преобразования функция Лагранжа целиком умножится на постоянный множитель  $\alpha^k$ , т. е. уравнения движения останутся неизменными.

Изменение всех координат частиц в одинаковое число раз означает переход от одних траекторий к другим, геометрически подобным первым и отличающимся от них лишь своими линейными размерами. Таким образом, мы приходим к заключению, что если потенциальная энергия системы является однородной функцией  $k$ -й степени от координат (декартовых), то уравнения движения допускают геометрически подобные траектории, причем все времена движения (между соответственными точками траекторий) относятся, как

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \quad (10,2)$$

где  $l'/l$  — отношение линейных размеров двух траекторий. Вместе с временами определенными степенями отношения  $l'/l$  являются также значения любых механических величин в соответственных точках траекторий в соответственные моменты времени. Так, для скоростей, энергии и момента имеем:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \quad (10,3)$$

Приведем для иллюстрации несколько примеров.

Как мы увидим далее, в случае так называемых малых колебаний потенциальная энергия является квадратичной функцией координат ( $k=2$ ). Из (10,2) находим, что период таких колебаний не зависит от их амплитуды.

В однородном силовом поле потенциальная энергия — линейная функция координат (см. (5,8)), т. е.  $k=1$ . Из (10,2) имеем

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Отсюда следует, например, что при падении в поле тяжести квадраты времени падения тел относятся, как их начальные высоты.

При ньютоновском притяжении двух масс или кулоновском взаимодействии двух зарядов потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между частицами, т. е. является однородной функцией степени  $k=-1$ . В этих случаях

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

и мы можем утверждать, например, что квадраты времен обращения по орбитам пропорциональны кубам их размеров (так называемый *третий закон Кеплера*).

Если движение системы, потенциальная энергия которой является однородной функцией координат, происходит в ограниченной области

пространства, существует весьма простое соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергии; оно известно под названием *вириальной теоремы*.

Поскольку кинетическая энергия  $T$  является квадратичной функцией скоростей, то по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T,$$

или, вводя импульсы  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$ :

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (10,4)$$

Усредним это равенство по времени. Средним значением какой-либо функции времени  $f(t)$  называется величина

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt.$$

Легко видеть, что если  $f(t)$  является производной по времени  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$  от ограниченной (т. е. не принимающей бесконечных значений) функции  $F(t)$ , то ее среднее значение обращается в нуль. Действительно,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Предположим, что система совершает движение в конечной области пространства и со скоростями, не обращающимися в бесконечность. Тогда величина  $\sum \mathbf{r}_a \mathbf{p}_a$  ограничена, и среднее значение первого члена в правой стороне равенства (10,4) обращается в нуль. Во втором же заменяем  $\dot{\mathbf{p}}_a$  согласно уравнениям Ньютона на  $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$  и получаем <sup>1)</sup>:

$$2\bar{T} = \sum_a \mathbf{r}_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (10,5)$$

Если потенциальная энергия является однородной функцией  $k$ -й степени от всех радиус-векторов  $\mathbf{r}_a$ , то согласно теореме Эйлера равенство (10,5) переходит в искомое соотношение

$$2\bar{T} = k\bar{U}. \quad (10,6)$$

<sup>1)</sup>Выражение в правой стороне равенства (10,5) иногда называют вириалом системы.

Поскольку  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , соотношение (10,6) можно представить в эквивалентных формах

$$\bar{U} = \frac{2}{k+2} E, \quad \bar{T} = \frac{k}{k+2} E, \quad (10,7)$$

выражающих  $\bar{U}$  и  $\bar{T}$  через полную энергию системы.

В частности, для малых колебаний ( $k=2$ ) имеем:

$$\bar{T} = \bar{U},$$

т. е. средние значения кинетической и потенциальной энергий совпадают. Для ньютоновского взаимодействия ( $k=-1$ )

$$2\bar{T} = -\bar{U}.$$

При этом  $E = -\bar{T}$  в соответствии с тем, что при таком взаимодействии движение происходит в конечной области пространства лишь при отрицательной полной энергии (см. § 15).

### Задачи

1. Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?

Ответ:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Как изменяются времена движения по одинаковым траекториям при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель?

Ответ:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

# ГЛАВА III

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

### § 11. Одномерное движение

Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. Наиболее общий вид лагранжевой функции такой системы, находящейся в постоянных внешних условиях, есть

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \quad (11,1)$$

где  $a(q)$  — некоторая функция обобщенной координаты  $q$ . В частности, если  $q$  есть декартова координата (назовем ее  $x$ ),

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (11,2)$$

Соответствующие этим лагранжевым функциям уравнения движения интегрируются в общем виде. При этом нет даже необходимости выписывать самое уравнение движения, а следует исходить сразу из его первого интеграла — уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Так, для функции Лагранжа (11,2) имеем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирующееся путем разделения переменных. Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \quad (11,3)$$

Роль двух произвольных постоянных в решении уравнения движения играют здесь полная энергия  $E$  и постоянная интегрирования  $\text{const.}$

Поскольку кинетическая энергия — величина существенно положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т. е. движение может происходить только в тех областях пространства, где  $U(x) < E$ .

Пусть, например, зависимость  $U(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 6. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же

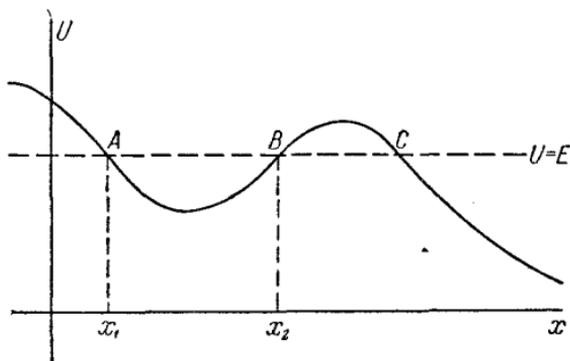


Рис. 6.

выясним возможные области движения. Так в изображенном на рис. 6 случае движение может происходить лишь в области  $AB$  или в области справа от  $C$ .

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной

$$U(x) = E, \quad (11,4)$$

определяют границы движения. Они являются *точками остановки*, поскольку в них скорость обращается в нуль. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства; оно является, как говорят, *финитным*. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, — движение *инфинитно*, частица уходит на бесконечность.

Одномерное финитное движение является колебательным — частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами (на рис. 6 в *потенциальной яме*  $AB$  между точками  $x_1$  и  $x_2$ ). При этом согласно общему свойству обратимости (стр. 18) время движения от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени обратного движения от  $x_2$  до  $x_1$ . Поэтому период колебаний  $T$ , т. е. время, за которое точка пройдет от  $x_1$  до  $x_2$  и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка  $x_1x_2$  или согласно (11,3)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (11,5)$$

причем пределы  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения (11,4) при данном значении  $E$ . Эта формула определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

### Задачи

1. Определить период колебаний плоского математического маятника (точка  $m$  на конце нити длиной  $l$  в поле тяжести) в зависимости от их амплитуды.

Решение. Энергия маятника

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0,$$

где  $\varphi$  — угол отклонения нити от вертикали;  $\varphi_0$  — максимальный угол отклонения. Вычисляя период как учетверенное время прохождения интервала углов от нуля до  $\varphi_0$ , находим:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Подстановкой  $\sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2} = \sin \xi$  этот интеграл приводится к виду

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

— так называемый полный эллиптический интеграл первого рода. При  $\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$  (малые колебания) разложение функции  $K(k)$  дает

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right).$$

Первый член этого разложения отвечает известной элементарной формуле.

2. Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы  $m$  в полях с потенциальной энергией:

а)  $U = A|x|^n$ .

Ответ:

$$T = 2 \sqrt{2m} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2 \sqrt{2m} E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}}{A^{1/n}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}.$$

Подстановкой  $y^n = u$  интеграл приводится к так называемому  $B$ -интегралу Эйлера, который выражается через  $\Gamma$ -функции

$$T = \frac{2 \sqrt{2\pi m} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n A^{1/n} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}.$$

Зависимость  $T$  от  $E$  соответствует закону механического подобия (10,2), (10,3).

б)  $U = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$ ,  $-U_0 < E < 0$ .

О т в е т:

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{|E|}}.$$

в)  $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ .

О т в е т:

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E + U_0}}.$$

## § 12. Определение потенциальной энергии по периоду колебаний

Рассмотрим вопрос о том, в какой степени можно восстановить вид потенциальной энергии  $U(x)$  поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода этого движения  $T$  от энергии  $E$ . С математической точки зрения речь идет о решении интегрального уравнения (11,5), в котором  $U(x)$  рассматривается как неизвестная, а  $T(E)$  — как известная функция.

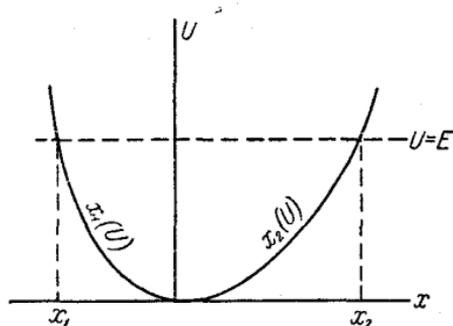


Рис. 7.

При этом мы будем заранее предполагать, что искомая функция  $U(x)$  имеет в рассматриваемой области пространства лишь один минимум, оставляя в стороне вопрос о возможности существования решений интегрального уравнения, не удовлетворяющих

этому условию. Для удобства выберем начало координат в положении минимума потенциальной энергии, а значение последней в этой точке положим равным нулю (рис. 7).

Преобразуем интеграл (11,5), рассматривая в нем координату  $x$  как функцию  $U$ . Функция  $x(U)$  двужанчна — каждое значение потенциальной энергии осуществляется при двух различных значениях  $x$ . Соответственно этому интеграл (11,5), в котором мы заменяем  $dx$  на  $\frac{dx}{dU} dU$ , перейдет в сумму двух интегралов: от  $x = x_1$  до

$x=0$  и от  $x=0$  до  $x=x_2$ ; будем писать зависимость  $x$  от  $U$  в этих двух областях соответственно как  $x=x_1(U)$  и  $x=x_2(U)$ .

Пределами интегрирования по  $dU$  будут, очевидно,  $E$  и  $0$ , так что получаем:

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E-U}}. \end{aligned}$$

Разделим обе стороны этого равенства на  $\sqrt{\alpha-E}$ , где  $\alpha$  — параметр, и проинтегрируем по  $E$  от нуля до  $\alpha$ :

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_0^E \left[ \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] \frac{dU dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

или, меняя порядок интегрирования:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[ \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

Интеграл по  $dE$  вычисляется элементарно и оказывается равным  $\pi$ . После этого интегрирование по  $dU$  становится тривиальным и дает:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi \sqrt{2m} [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

(при этом учтено, что  $x_2(0) = x_1(0) = 0$ ). Заменяв теперь букву  $\alpha$  на  $U$ , находим окончательно:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi \sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{U-E}}. \quad (12,1)$$

Таким образом, по известной функции  $T(E)$  определяется разность  $x_2(U) - x_1(U)$ . Сами же функции  $x_2(U)$  и  $x_1(U)$  остаются неопределенными. Это значит, что существует не одна, а бесчисленное множество кривых  $U = U(x)$ , приводящих к заданной зависимости периода от энергии и отличающихся друг от друга такими деформациями, которые не меняют разности двух значений  $x$ , соответствующих одному и тому же значению  $U$ .

Многозначность решения исчезает, если потребовать, чтобы кривая  $U = U(x)$  была симметрична относительно оси ординат, т. е. чтобы было:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

В таком случае формула (12,1) дает для  $x(U)$  однозначное выражение

$$x(U) = \frac{1}{2\pi \sqrt{2m_0}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{U-E}}. \quad (12,2)$$

### § 13. Приведенная масса

Полное решение в общем виде допускает чрезвычайно важная задача о движении системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц (*задача двух тел*).

В качестве предварительного шага к решению этой задачи покажем, каким образом она может быть существенно упрощена путем разложения движения системы на движение центра инерции и движения точек относительно последнего.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, т. е. от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Поэтому лагранжева функция такой системы

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (13,1)$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

и поместим начало координат в центре инерции, что дает:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Из двух последних равенств находим:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (13,2)$$

Подставляя эти выражения в (13,1), получим:

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \quad (13,3)$$

где введено обозначение

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad (13,4)$$

величина  $m$  называется *приведенной массой*. Функция (13,3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой  $m$ , движущейся во внешнем поле  $U(r)$ , симметричном относительно неподвижного начала координат.

Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к решению задачи о движении одной

точки в заданном внешнем поле  $U(r)$ . По решению  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  этой задачи траектории  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  каждой из частиц  $m_1$  и  $m_2$  в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (13,2).

### Задача

Система состоит из одной частицы с массой  $M$  и  $n$  частиц с одинаковыми массами  $m$ . Исключить движение центра инерции и свести задачу к задаче о движении  $n$  частиц.

Решение. Пусть  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор частицы  $M$ , а  $\mathbf{R}_a$  ( $a=1, 2, \dots, n$ ) — радиус-векторы частиц с массами  $m$ . Введем расстояния от частицы  $M$  до частиц  $m$

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

и поместим начало координат в центре инерции:

$$M\mathbf{R} + m \sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

Из этих равенств находим:

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{\mu} \sum_a \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a,$$

где  $\mu = M + nm$ . Подставив эти выражения в функцию Лагранжа

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2} \sum_a \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U,$$

получим:

$$L = \frac{m}{2} \sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu} \left( \sum_a \mathbf{v}_a \right)^2 - U,$$

где  $\mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$ .

Потенциальная энергия зависит лишь от расстояний между частицами и потому может быть представлена как функция от векторов  $\mathbf{r}_a$ .

## § 14. Движение в центральном поле

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния  $r$  до определенной неподвижной точки; такое поле называют *центральным*. Сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от  $r$  и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

Как было уже показано в § 9, при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы это есть

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Поскольку векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{r}$  взаимно перпендикулярны, постоянство  $\mathbf{M}$  означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{M}$ .

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Введя в ней полярные координаты  $r, \varphi$ , напомним функцию Лагранжа в виде (ср. (4,5))

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (14,1)$$

Эта функция не содержит в явном виде координату  $\varphi$ . Всякую обобщенную координату  $q_i$ , не входящую явным образом в лагранжеву функцию, называют *циклической*. В силу уравнения Лагранжа имеем для такой координаты:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

т. е. соответствующий ей обобщенный импульс  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  является интегралом движения. Это обстоятельство приводит к существенному упрощению задачи интегрирования уравнений движения при наличии циклических координат.

В данном случае обобщенный импульс

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$$

совпадает с моментом  $M_z = M$  (см. (9,6)), так что мы возвращаемся к известному уже нам закону сохранения момента

$$M = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (14,2)$$

Заметим, что для плоского движения одной частицы в центральном поле этот закон допускает простую геометрическую интерпретацию.

Выражение  $\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} d\varphi$  представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории (рис. 8). Обозначив ее как  $df$ , напомним момент частицы в виде

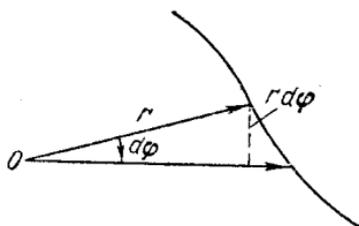


Рис. 8.

$$M = 2mf \dot{\varphi}, \quad (14,3)$$

где производную  $\dot{\varphi}$  называют *секториальной скоростью*. Поэтому сохранение момента означает постоянство секториальной скорости — за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади (так называемый *второй закон Кеплера*<sup>1)</sup>).

<sup>1)</sup> Закон сохранения момента для частицы, движущейся в центральном поле, иногда называют *интегралом площадей*.

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле проще всего получить, исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих уравнений движения. Выражая  $\dot{\varphi}$  через  $M$  из (14,2) и подставляя в выражение для энергии, получим:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (14,4)$$

Отсюда

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (14,5)$$

или, разделяя переменные и интегрируя:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const.} \quad (14,6)$$

Далее, написав (14,2) в виде

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt,$$

подставив сюда  $dt$  из (14,5) и интегрируя, находим:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2m}{m^2} [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.} \quad (14,7)$$

Формулы (14,6) и (14,7) решают в общем виде поставленную задачу. Вторая из них определяет связь между  $r$  и  $\varphi$ , т. е. уравнение траектории. Формула же (14,6) определяет в неявном виде расстояние  $r$  движущейся точки от центра как функцию времени. Отметим, что угол  $\varphi$  всегда меняется со временем монотонным образом — из (14,2) видно, что  $\dot{\varphi}$  никогда не меняет знака.

Выражение (14,4) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (14,8)$$

Величину  $M^2/2mr^2$  называют центробежной энергией. Значения  $r$ , при которых

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \quad (14,9)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении равенства (14,9) радиальная скорость  $\dot{r}$  обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одно-

мерном движении), так как угловая скорость  $\dot{\varphi}$  не обращается в нуль. Равенство  $\dot{r}=0$  означает «точку поворота» траектории, в которой функция  $r(t)$  переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Если область допустимого изменения  $r$  ограничена лишь одним условием  $r \geq r_{\min}$ , то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения  $r$  имеет две границы  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями  $r=r_{\max}$  и  $r=r_{\min}$ . Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой. За время, в течение которого  $r$  изменяется от  $r_{\max}$  до  $r_{\min}$  и затем до  $r_{\max}$ , радиус-вектор повернется на угол  $\Delta\varphi$ , равный согласно (14,7)

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (14,10)$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от  $2\pi$ , т. е. имел вид  $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ ,

где  $m, n$  — целые числа. Тогда через  $n$  повторений этого периода времени радиус-вектор точки, сделав  $m$  полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, т. е. траектория замкнется.

Однако такие случаи исключительны, и при произвольном виде  $U(r)$  угол  $\Delta\varphi$  не является рациональной частью от  $2\pi$ . Поэтому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесчисленное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние (как, например, на рис. 9) и за

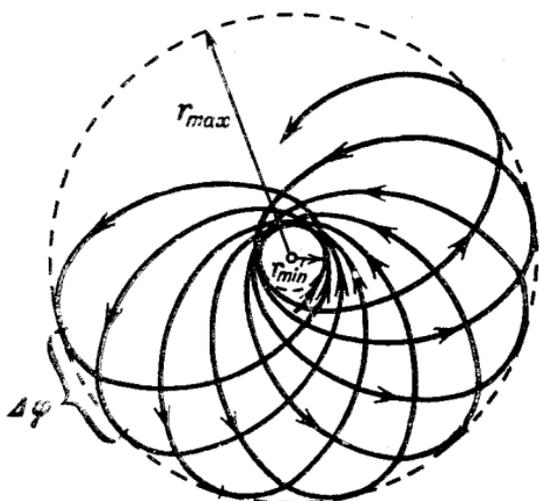


Рис. 9.

бесконечное время заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.

Существуют лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы пропорциональна  $1/r$  или  $r^2$ . Первый

из этих случаев рассмотрен в следующем параграфе, а второй соответствует так называемому пространственному осциллятору (см. задачу 3 § 23).

В точке поворота квадратный корень (14,5) (а вместе с ним и подинтегральные выражения в (14,6) и (14,7)) меняет знак. Если отсчитывать угол  $\varphi$  от направления радиус-вектора, проведенного в точку поворота, то примыкающие с двух сторон к этой точке отрезки траектории будут отличаться лишь знаком  $\varphi$  при каждом одинаковых значениях  $r$ ; это значит, что траектория симметрична относительно указанного направления. Начав, скажем, от какой-либо из точек  $r = r_{\max}$ , мы пройдем отрезок траектории до точки с  $r = r_{\min}$ , затем будем иметь симметрично расположенный такой же отрезок до следующей точки с  $r = r_{\max}$  и т. д., т. е. вся траектория получается повторением в прямом и обратном направлениях одинаковых отрезков. Это относится и к инфинитным траекториям, состоящим из двух симметричных ветвей, простирающихся от точки поворота  $r_{\min}$  до бесконечности.

Наличие центробежной энергии (при движении с  $M \neq 0$ ), обращаемой при  $r \rightarrow 0$  в бесконечность, как  $1/r^2$ , приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля, даже если последнее само по себе имеет характер притяжения. «Падение» частицы в центр возможно лишь, если потенциальная энергия достаточно быстро стремится к  $-\infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Из неравенства

$$\frac{mr^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

следует, что  $r$  может принимать стремящиеся к нулю значения лишь при условии

$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m}, \quad (14,11)$$

т. е.  $U(r)$  должно стремиться к  $-\infty$  либо как  $-\alpha/r^2$  с  $\alpha > M^2/2m$ , либо пропорционально  $-1/r^n$  с  $n > 2$ .

### Задачи

1. Проинтегрировать уравнения движения сферического маятника — материальной точки  $m$ , движущейся по поверхности сферы радиуса  $l$  в поле тяжести.

Решение. В сферических координатах с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вертикально вниз, функция Лагранжа маятника

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Координата  $\varphi$  — циклическая, поэтому сохраняется обобщенный импульс  $p_\varphi$ , совпадающий с  $z$ -компонентой момента:

$$ml^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = \text{const.} \quad (1)$$

Энергия

$$E = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta. \quad (2)$$

Определяя отсюда  $\dot{\theta}$  и разделяя переменные, получим:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} [E - U_{\text{эфф}}(\theta)]}}, \quad (3)$$

где введена «эффективная потенциальная энергия»

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta.$$

Для угла  $\varphi$ , используя (1), найдем

$$\varphi = \frac{M_z}{l \sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\theta)}}. \quad (4)$$

Интегралы (3) и (4) приводятся к эллиптическим интегралам соответственно первого и третьего рода.

Область движения по углу  $\theta$  определяется условием  $E > U_{\text{эфф}}$ , а ее границы — уравнением  $E = U_{\text{эфф}}$ . Последнее представляет собой кубическое уравнение для  $\cos \theta$ , имеющее в промежутке от  $-1$  до  $+1$  два корня, определяющих положение двух параллельных окружностей на сфере, между которыми заключена вся траектория.

2. Пронтегрировать уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса (с углом  $2\alpha$  при вершине), расположенном вертикально, вершиной вниз, в поле тяжести.

Решение. В сферических координатах с началом в вершине конуса и полярной осью, направленной вертикально вверх, функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \alpha.$$

Координата  $\varphi$  — циклическая, так что снова сохраняется

$$M_z = mr^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}.$$

Энергия

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha.$$

Тем же способом, что и в задаче 1, находим:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{эфф}}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sin^2 \alpha \sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}},$$

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha.$$

Условие  $E = U_{\text{эфф}}(r)$  представляет собой (при  $M_2 \neq 0$ ) кубическое уравнение для  $r$ , имеющее два положительных корня; ими определяется положение двух горизонтальных окружностей на поверхности конуса, между которыми заключена траектория.

3. Проинтегрировать уравнения движения плоского маятника, точка подвеса которого (с массой  $m_1$  в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении (см. рис. 2).

Решение. В найденной в задаче 2 § 5 функции Лагранжа координата  $x$  — циклическая. Поэтому сохраняется обобщенный импульс  $P_x$ , совпадающий с горизонтальной компонентой полного импульса системы:

$$P_x = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const.} \quad (1)$$

Всегда можно считать систему, как целое, покоящейся; тогда  $\text{const} = 0$ , и интегрирование уравнения (1) дает соотношение

$$(m_1 + m_2) x + m_2 l \sin \varphi = \text{const}, \quad (2)$$

выражающее собой неподвижность центра инерции системы в горизонтальном направлении. Используя (1), получим энергию в виде

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi \right) - m_2 g l \cos \varphi. \quad (3)$$

Отсюда

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{E + m_2 g l \cos \varphi}} d\varphi.$$

Выразив координаты  $x_2 = x + l \sin \varphi$ ,  $y_2 = l \cos \varphi$  частицы  $m_2$  с помощью (2) через  $\varphi$ , найдем, что траектория этой частицы представляет собой отрезок эллипса с горизонтальной полуосью  $l m_1 / (m_1 + m_2)$  и вертикальной  $l$ . При  $m_1 \rightarrow \infty$  мы возвращаемся к обычному математическому маятнику, качающемуся по дуге окружности.

## § 15. Кеплерова задача

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна  $r$  и соответственно силы — обратно пропорциональны  $r^2$ . Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (15,1)$$

с положительной постоянной  $\alpha$ . График «эффективной» потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (15,2)$$

имеет вид, изображенный на рис. 10. При  $r \rightarrow 0$  она обращается в  $+\infty$ , а при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при  $r = M^2/\alpha m$  она имеет минимум, равный

$$(U_{\text{эфф}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \quad (15,3)$$

Из этого графика сразу очевидно, что при  $E > 0$  движение частицы будет инфинитным, а при  $E < 0$  — финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы (14,7). Подставляя в нее  $U = -\frac{\alpha}{r}$  и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const.}$$

Выбирая начало отсчета угла  $\varphi$  так, чтобы  $\text{const} = 0$ , и вводя обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (15,4)$$

перепишем формулу для траектории в виде

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi. \quad (15,5)$$

Это есть уравнение конического сечения с фокусом в начале координат;  $p$  и  $e$  — так называемые *параметр* и *эксцентриситет* орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета  $\varphi$  заключается, как видно из (15,5), в том, что точка с  $\varphi = 0$  является ближайшей к центру (так называемый *перигелий* орбиты).

В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону (15,1), орбита каждой из частиц тоже представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции

Из (15,4) видно, что при  $E < 0$  эксцентриситет  $e < 1$ , т. е. орбита является эллипсом (рис. 11) и движение финитно в соответствии со сказанным в начале параграфа. Согласно известным формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (15,6)$$

Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с (15,3), при этом  $e = 0$ , т. е. эллипс обращается в окружность. Отметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра

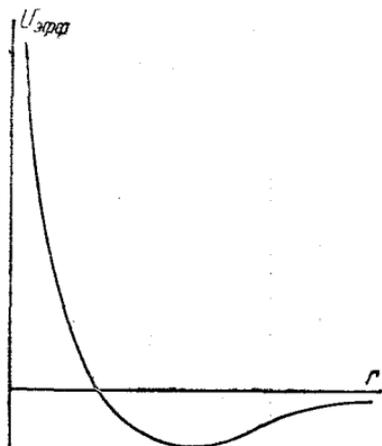


Рис. 10.

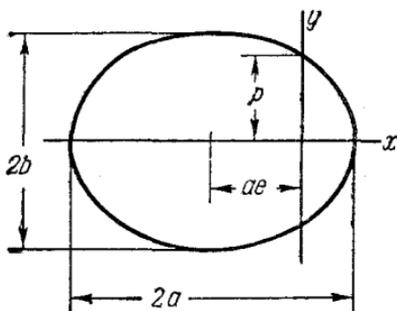


Рис. 11.

поля (фокуса эллипса) равны

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \quad (15,7)$$

Эти выражения (с  $a$  и  $e$  из (15,6) и (15,4)) можно было бы, конечно, получить и непосредственно как корни уравнения  $U_{\text{эфф}}(r) = E$ .

Время обращения по эллиптической орбите, т. е. период движения  $T$ , удобно определить с помощью закона сохранения момента в форме «интеграла площадей» (14,3). Интегрируя это равенство по времени от нуля до  $T$ , получим:

$$2mf = TM,$$

где  $f$  — площадь орбиты. Для эллипса  $f = \pi ab$ , и с помощью формул (15,6) находим:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{a}} = \\ &= \pi a \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \end{aligned} \quad (15,8)$$

Тот факт, что квадрат периода должен быть пропорционален кубу линейных размеров орбиты, был указан уже в § 10. Отметим также, что период зависит только от энергии частицы.

При  $E \geq 0$  движение инфинитно. Если  $E > 0$ , то эксцентриситет  $e > 1$ , т. е. траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус), как показано на рис. 12. Расстояние перигелия от центра

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e-1), \quad (15,9)$$

где

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{a}{2E}$$

— «полуось» гиперболы.

В случае же  $E = 0$  эксцентриситет  $e = 1$ , т. е. частица движется по параболе, с расстоянием перигелия  $r_{\min} = p/2$ . Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Зависимость координат частицы от времени при движении по орбите может быть найдена с помощью общей формулы (14,6). Она может быть представлена в удобном параметрическом виде следующим образом.

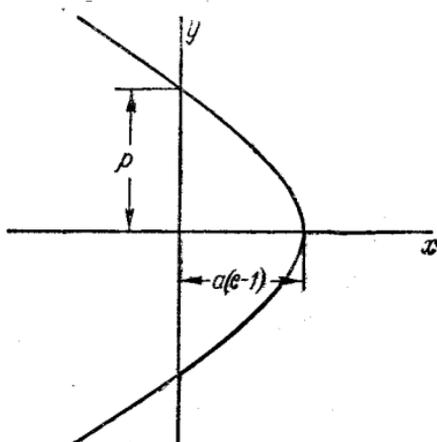


Рис. 12.

Рассмотрим сначала эллиптические орбиты. Вводя  $a$  и  $e$  согласно (15,4), (15,6), напомним интеграл (14,6), определяющий время, в виде

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{a}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \\ &= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}. \end{aligned}$$

С помощью естественной подстановки

$$r - a = -ae \cos \xi$$

этот интеграл приводится к виду

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{const.}$$

Выбирая начало отсчета времени так, чтобы обратить const в нуль, получим окончательно следующее параметрическое представление зависимости  $r$  от  $t$ :

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) \quad (15,10)$$

(в момент  $t=0$  частица находится в перигелии). Через тот же параметр  $\xi$  можно выразить и декартовы координаты частицы  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  (оси  $x$  и  $y$  направлены соответственно по большой и малой полуосям эллипса). Из (15,5) и (15,10) имеем:

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = ae(\cos \xi - e),$$

а  $y$  найдем, как  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Окончательно:

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi. \quad (15,11)$$

Полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра  $\xi$  от нуля до  $2\pi$ .

Совершенно аналогичные вычисления для гиперболических траекторий приводят к результату

$$\begin{aligned} r &= a(e \operatorname{ch} \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (e \operatorname{sh} \xi - \xi), \\ x &= a(e - \operatorname{ch} \xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} \xi, \end{aligned} \quad (15,12)$$

где параметр  $\xi$  пробегает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Обратимся к движению в поле отталкивания, в котором

$$U = \frac{\alpha}{r} \quad (15,13)$$

( $\alpha > 0$ ). В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

монотонно убывает от  $+\infty$  до нуля при изменении  $r$  от нуля до  $\infty$ . Энергия частицы может быть только положительной и движение всегда инфинитно. Все вычисления для этого случая в точности аналогичны произведенным выше. Траектория является гиперболой

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi \quad (15,14)$$

( $p$  и  $e$  определяются прежними формулами (15,4)). Она проходит мимо центра поля, как показано на рис. 13. Расстояние перигелия

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{p}{e-1} = \\ &= a(e+1). \end{aligned} \quad (15,15)$$

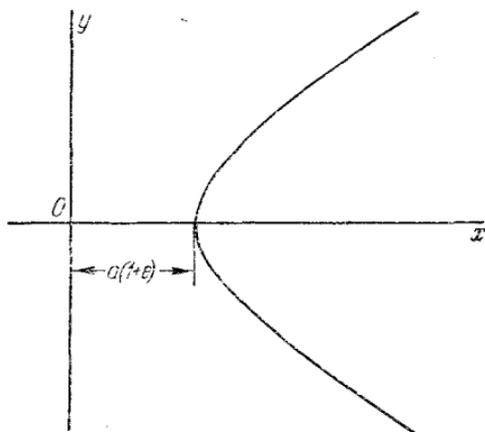


Рис. 13.

Зависимость от времени дается параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} r &= a(e \operatorname{ch} \xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (e \operatorname{sh} \xi + \xi), \\ x &= a(\operatorname{ch} \xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} \xi. \end{aligned} \quad (15,16)$$

В заключение параграфа укажем, что при движении в поле  $U = \alpha/r$  (с любым знаком  $\alpha$ ) имеется интеграл движения, специфический именно для этого поля. Легко проверить непосредственным вычислением, что величина

$$[\mathbf{vM}] + \frac{\alpha r}{r} = \text{const.} \quad (15,17)$$

Действительно, ее полная производная по времени равна

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha \dot{\mathbf{v}}}{r} - \frac{\alpha r (\mathbf{v}r)}{r^3},$$

или, подставив  $\mathbf{M} = m [\mathbf{r}\mathbf{v}]$ :

$$m r (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}) - m \mathbf{v} (\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}) + \frac{\alpha \dot{\mathbf{v}}}{r} - \frac{\alpha r (\mathbf{v}r)}{r^3};$$

положив здесь согласно уравнениям движения  $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha r/r^3$ , мы найдем, что это выражение обращается в нуль.

Сохраняющийся вектор (15,17) направлен вдоль большой оси от фокуса к перигелию, а по величине равен  $\alpha e$ . В этом проще всего можно убедиться, рассмотрев его значение в перигелии.

Подчеркнем, что интеграл движения (15,17), как и интегралы  $M$  и  $E$ , является однозначной функцией состояния (положения и скорости) частицы. Мы увидим в § 50, что появление такого дополнительного однозначного интеграла связано с так называемым вырождением движения.

### Задачи

1. Найти зависимость координат частицы от времени при движении в поле  $U = -\alpha/r$  с энергией  $E = 0$  (по параболе).

Решение. В интеграле

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

делаем подстановку

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha} (1 + \eta^2) = \frac{p}{2} (1 + \eta^2)$$

и в результате получаем следующее параметрическое представление искомой зависимости:

$$r = \frac{p}{2} (1 + \eta^2), \quad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right),$$

$$x = \frac{p}{2} (1 - \eta^2), \quad y = p\eta.$$

Параметр  $\eta$  пробегает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

2. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки в центральном поле  $U = -\alpha/r^2$ ,  $\alpha > 0$ .

Решение. По формулам (14,6), (14,7) с соответствующим выбором начала отсчета  $\varphi$  и  $t$  находим:

$$\begin{aligned} \text{а) при } E > 0, \quad \frac{M^2}{2m} > \alpha \quad \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos \left[ \varphi \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}} \right], \\ \text{б) при } E > 0, \quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{sh} \left[ \varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right], \\ \text{в) при } E < 0, \quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{ch} \left[ \varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right]. \end{aligned}$$

Во всех трех случаях

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}.$$

В случаях б) и в) частица «падает» в центр по траектории, приближающейся к началу координат при  $\varphi \rightarrow \infty$ . Падение с заданного расстояния  $r$  происходит за конечное время, равное

$$\frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}} \right\}.$$

3. При добавлении к потенциальной энергии  $U = -\alpha/r$  малой добавки  $\delta U(r)$  траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину  $\delta\varphi$ . Определить  $\delta\varphi$  для случаев а)  $\delta U = \beta/r^2$ , б)  $\delta U = \gamma/r^3$ .

Решение. При изменении  $r$  от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$  и снова до  $r_{\min}$  угол  $\delta\varphi$  меняется на величину, даваемую формулой (14,10), которую представим в виде

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}} dr$$

(с целью избежать ниже фиктивно расходящихся интегралов). Положим  $U = -\alpha/r + \delta U$  и разложим подинтегральное значение по степеням  $\delta U$ ; нулевой член разложения дает  $2\pi$ , а член первого порядка — искомое смещение  $\delta\varphi$ :

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U \cdot dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\varphi \right), \quad (1)$$

где от интегрирования по  $dr$  мы перешли к интегрированию по  $d\varphi$  вдоль траектории «невозмущенного» движения.

В случае а) интегрирование в (1) тривиально и дает:

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

( $p$  — параметр невозмущенного эллипса из (15,4)). В случае б)  $r^2\delta U = \gamma/r$ , и, взяв  $1/r$  из (15,5), получим:

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

## СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

## § 16. Распад частиц

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Начнем с процесса, представляющего собой «самопроизвольный» (т. е. без воздействия внешних сил) распад частицы на две «составные части», т. е. на две другие частицы, движущиеся после распада независимо друг от друга.

Наиболее просто этот процесс выглядит при рассмотрении его в системе отсчета, в которой частица (до распада) покоилась. В силу закона сохранения импульса сумма импульсов обеих образовавшихся в результате распада частиц тоже равна нулю, т. е. частицы разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами. Их общее абсолютное значение (обозначим его  $p_0$ ) определяется законом сохранения энергии

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы частиц,  $E_{1\text{вн}}$  и  $E_{2\text{вн}}$  — их внутренние энергии, а  $E_{\text{вн}}$  — внутренняя энергия первоначальной (распадающейся) частицы. Обозначим посредством  $\varepsilon$  «энергию распада», т. е. разность

$$\varepsilon = E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E_{2\text{вн}} \quad (16,1)$$

(очевидно, что эта величина должна быть положительной для того, чтобы распад был вообще возможен). Тогда имеем:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2m}, \quad (16,2)$$

чем и определяется  $p_0$  ( $m$  — приведенная масса обеих частиц); скорости же частиц  $v_{10} = p_0/m_1$ ,  $v_{20} = p_0/m_2$ .

Перейдем теперь к системе отсчета, в которой первичная частица движется до распада со скоростью  $V$ . Эту систему отсчета обычно называют лабораторной (или  $l$ -системой) в противоположность «системе центра инерции» (или  $\eta$ -системе), в которой полный импульс равен нулю. Рассмотрим одну из распадных частиц и пусть  $v$  и  $v_0$ —ее скорости соответственно в  $l$ - и  $\eta$ -системе. Из очевидного равенства  $v = V + v_0$ , или  $v - V = v_0$ , имеем:

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2, \quad (16,3)$$

где  $\theta$ —угол вылета частицы по отношению к направлению скорости  $V$ . Этим уравнением определяется зависимость скорости распадной частицы от направления ее вылета в  $l$ -системе. Она может

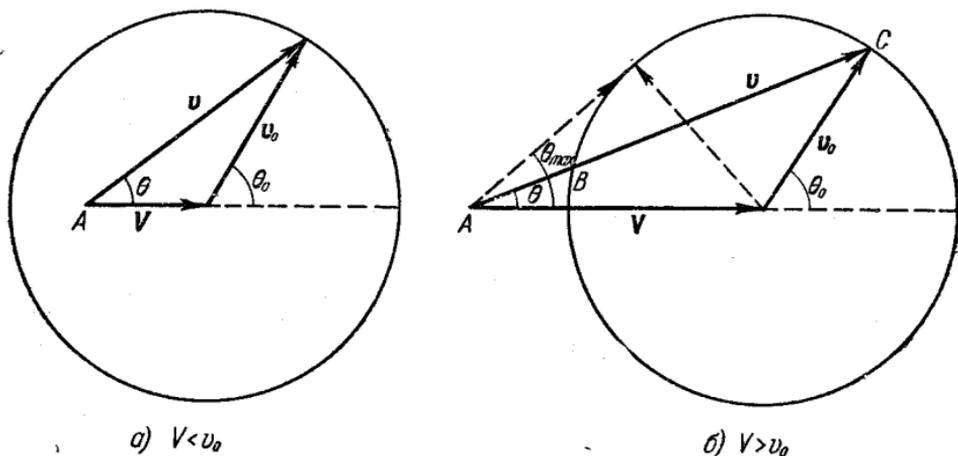


Рис. 14.

быть представлена графически с помощью диаграммы, изображенной на рис. 14. Скорость  $v$  дается вектором, проведенным в какую-либо точку окружности радиуса  $v_0$ <sup>1)</sup> из точки  $A$ , отстоящей на расстояние  $V$  от центра окружности. Случаям  $V < v_0$  и  $V > v_0$  отвечают соответственно рис. 14,  $a$  и  $б$ . В первом случае частица может вылететь под любым углом  $\theta$ . Во втором же случае частица может вылететь только вперед, под углом  $\theta$ , не превышающим значения  $\theta_{\max}$ , даваемого равенством

$$\sin \theta_{\max} = \frac{v_0}{V} \quad (16,4)$$

(направление касательной к окружности, проведенной из точки  $A$ ).

Связь между углами вылета  $\theta$  и  $\theta_0$  в  $l$ - и  $\eta$ -системах очевидна из той же диаграммы и дается формулой

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + V}. \quad (16,5)$$

<sup>1)</sup> Точнее—любую точку сферы радиуса  $v_0$ , диаметральной сечением которой является изображенная на рис. 14 окружность.

Если решить это уравнение относительно  $\cos \theta_0$ , то после элементарных преобразований получим:

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}. \quad (16,6)$$

При  $v_0 > V$  связь между  $\theta_0$  и  $\theta$  однозначна, как это видно из рис. 14, а. В формуле (16,6) надо при этом выбрать знак  $+$  перед корнем (так, чтобы было  $\theta_0 = 0$  при  $\theta = 0$ ). Если же  $v_0 < V$ , то связь между  $\theta_0$  и  $\theta$  неоднозначна: каждому значению  $\theta$  отвечают два значения  $\theta_0$ , соответствующие (на рис. 14, б) векторам  $\mathbf{v}_0$ , проведенным из центра окружности в точки  $B$  или  $C$ ; им отвечают два знака перед корнем в (16,6).

В физических применениях приходится обычно иметь дело с распадом не одной, а многих одинаковых частиц, в связи с чем возникают вопросы о распределении распадных частиц по направлениям, энергиям и т. п. При этом мы будем предполагать, что первичные частицы ориентированы в пространстве хаотическим, т. е. в среднем изотропным образом.

В  $\zeta$ -системе ответ на эти вопросы тривиален: все распадные частицы (одинакового рода) имеют одинаковую энергию, а их распределение по направлениям вылета изотропно. Последнее утверждение связано со сделанным предположением о хаотичности ориентаций первичных частиц. Оно означает, что доля числа частиц, летящих в элементе телесного угла  $d\theta_0$ , пропорциональна величине этого элемента, т. е. равна  $\frac{d\theta_0}{4\pi}$ . Распределение по углам  $\theta_0$  получим отсюда, подставим  $d\theta_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$ , т. е.

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0. \quad (16,7)$$

Распределения в  $\lambda$ -системе получаются путем соответствующего преобразования этого выражения. Определим, например, распределение по кинетической энергии в  $\lambda$ -системе. Возводя в квадрат равенство  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$ , находим:

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V \cos \theta_0,$$

откуда

$$d \cos \theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}.$$

Вводя сюда кинетическую энергию  $T = mv^2/2$  (где  $m$  есть  $m_1$  или  $m_2$ , смотря по тому, какого рода распадные частицы мы рассматриваем) и подставляя в (16,7), получим искомое распределение

$$\frac{dT}{2mv_0 V}. \quad (16,8)$$

Кинетическая энергия может пробегать значения от наименьшего  $T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$  до наибольшего  $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$ . В этом интервале частицы распределены согласно (16,8) однородно.

При распаде частицы на более чем две части законы сохранения импульса и энергии оставляют, естественно, значительно больший произвол в скоростях и направлениях распадных частиц, чем при распаде на две части. В частности, энергии разлетающихся частиц в  $\zeta$ -системе отнюдь не имеют одного определенного значения. Существует, однако, верхний предел кинетической энергии, которую может при этом унести с собой каждая из распадных частиц.

Для определения этого предела будем рассматривать совокупность всех распадных частиц за исключением одной заданной (с массой  $m_1$ ) как одну систему; ее «внутреннюю» энергию обозначим посредством  $E'_{\text{вн}}$ . Тогда кинетическая энергия частицы  $m_1$  будет согласно (16,1), (16,2):

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M} (E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E'_{\text{вн}})$$

( $M$  — масса первичной частицы). Очевидно, что  $T_{10}$  будет иметь наибольшее возможное значение, когда  $E'_{\text{вн}}$  минимальна. Для этого надо, чтобы все распадные частицы за исключением частицы  $m_1$  двигались с одной и той же скоростью; тогда  $E'_{\text{вн}}$  сводится просто к сумме их внутренних энергий, а разность  $E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E'_{\text{вн}}$  есть энергия распада  $\varepsilon$ . Таким образом,

$$(T_{10})_{\max} = \frac{M - m_1}{M} \varepsilon. \quad (16,9)$$

### Задачи

1. Найти связь между углами вылета  $\theta_1, \theta_2$  (в  $\lambda$ -системе) распадных частиц при распаде на две частицы.

Решение. В  $\zeta$ -системе углы вылета обеих частиц связаны посредством  $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$ . Обозначая  $\theta_{10}$  просто как  $\theta_0$  и применяя формулу (16,5) к каждой из двух частиц, пишем:

$$\begin{aligned} V + v_{10} \cos \theta_0 &= v_{10} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1, \\ V - v_{20} \cos \theta_0 &= v_{20} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_2. \end{aligned}$$

Из этих двух равенств надо исключить  $\theta_0$ . Для этого определяем сначала из них  $\cos \theta_0$  и  $\sin \theta_0$ , после чего составляем сумму  $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$ . Учитывая также, что  $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$  и используя (16,2), найдем в результате следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \\ &= \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2)V^2} \sin^2(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

2. Найти распределение распадных частиц по направлениям вылета в  $\lambda$ -системе.

Решение. При  $v_0 > V$  подставляем (16,6) со знаком плюс перед корнем в (16,7) и получаем искомое распределение в виде

$$\frac{\sin \theta d\theta}{2} \left[ 2 \frac{V}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right] \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

При  $v_0 < V$  надо учитывать обе возможные связи  $\theta_0$  с  $\theta$ . Поскольку при увеличении  $\theta$  одно из соответствующих ему значений  $\theta_0$  растет, а другое убывает, то надо взять разность (а не сумму) выражений  $d \cos \theta_0$  с двумя знаками перед корнем в (16,6). В результате получим:

$$\sin \theta d\theta \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \quad (0 \leq \theta \leq \theta_{\max}).$$

3. Определить интервал значений, которые может иметь угол  $\theta$  между направлениями вылета обеих распадных частиц в  $\lambda$ -системе.

Решение. Угол  $\theta$  есть сумма  $\theta_1 + \theta_2$  углов, определяющихся формулой (16,5) (см. задачу 1); проще всего вычисляется тангенс этого угла. Исследование экстремумов получающегося выражения приводит к следующему интервалу возможных значений  $\theta$  в зависимости от относительной величины  $V$  и  $v_{10}, v_{20}$  (для определенности полагаем всегда  $v_{20} > v_{10}$ ):

$$\begin{aligned} 0 < \theta < \pi, & \text{ если } v_{10} < V < v_{20}; \\ \pi - \theta_m < \theta < \pi, & \text{ если } V < v_{10}; \\ 0 < \theta < \theta_m, & \text{ если } V > v_{20}, \end{aligned}$$

причем значение  $\theta_m$  дается формулой

$$\sin \theta_m = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10} v_{20}}.$$

## § 17. Упругие столкновения частиц

Столкновение двух частиц называют упругим, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. Соответственно этому при применении к такому столкновению закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц.

Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета, в которой центр инерции обеих частиц покоится ( $\zeta$ -система); будем отличать, как и в предыдущем параграфе, индексом 0 значения величин в этой системе. Скорости частиц до столкновения в  $\zeta$ -системе связаны с их скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  в лабораторной системе соотношениями

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v},$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  (см. (13,2)).

В силу закона сохранения импульса импульсы обеих частиц остаются после столкновения равными по величине и противоположными по направлению, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины. Таким образом, результат столкновения сводится в  $\zeta$ -системе к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить посредством  $\mathbf{n}_0$  единичный вектор в направлении скорости частицы  $m_1$  после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут:

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0. \quad (17,1)$$

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость  $\mathbf{V}$  центра инерции. Таким образом, для скоростей частиц в  $\lambda$ -системе после столкновения получаем:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (17,2)$$

$$\mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

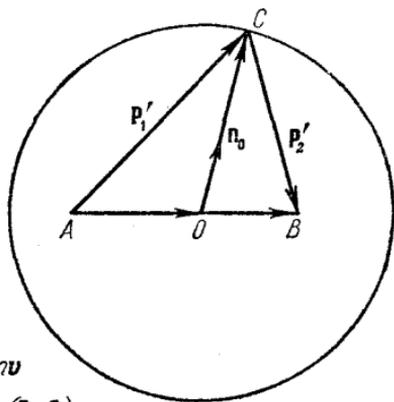
Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя из одних только законов сохранения импульса и энергии. Что касается направления вектора  $\mathbf{n}_0$ , то он зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Полученные результаты можно интерпретировать геометрически. При этом удобнее перейти от скоростей к импульсам. Умножив равенства (17,2) соответственно на  $m_1$  и  $m_2$ , получим:

$$\mathbf{p}'_1 = m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}'_2 = -m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad (17,3)$$

( $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ) — приведенная масса). Построим окружность с радиусом  $m v$  и произведем указанное на рис. 15 построение.

Если единичный вектор  $\mathbf{n}_0$  направлен вдоль  $\vec{OC}$ , то векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{CB}$  дают соответственно импульсы  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ . При заданных  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  радиус окружности и положение точек  $A$  и  $B$  неизменны, а точка  $C$  может иметь любое положение на окружности.



$$\vec{OC} = m v$$

$$\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

$$\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

Рис. 15.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из частиц (пусть это будет частица  $m_2$ ) до столкновения покоилась. В этом случае длина  $OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = mv$  совпадает с радиусом, т. е. точка  $B$  лежит на окружности. Вектор же  $AB$  совпадает с импульсом  $p_1$  первой частицы до рассеяния. При этом точка  $A$  лежит внутри (если  $m_1 < m_2$ )

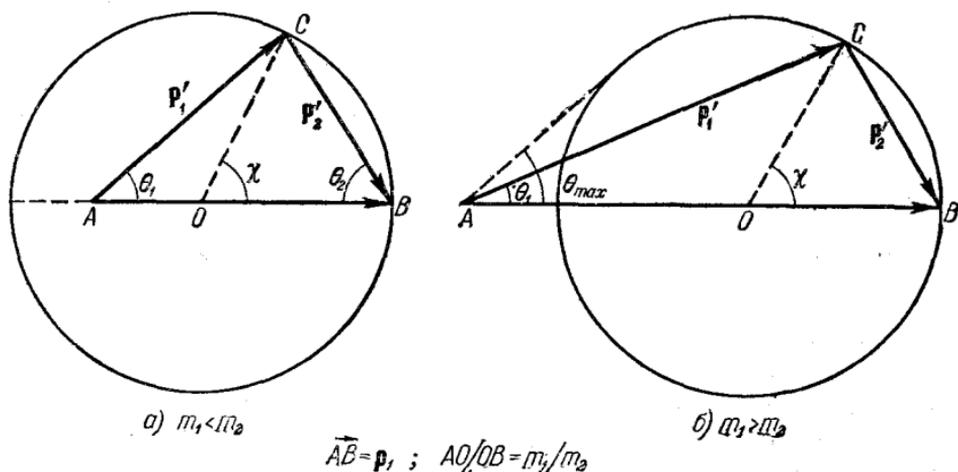


Рис. 16.

или вне (если  $m_1 > m_2$ ) окружности. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 16, а и б. Указанные на них углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  представляют собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению  $p_1$ ). Центральный же угол, обозначенный на рисунках посредством  $\chi$  (дающий направление  $p_0$ ), представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. Из рисунка очевидно, что углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  могут быть выражены через угол  $\chi$  формулами

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (17,4)$$

Выпишем также формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через тот же угол  $\chi$ :

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}. \quad (17,5)$$

Сумма  $\theta_1 + \theta_2$  есть угол разлета частиц после столкновения. Очевидно, что  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$  при  $m_1 < m_2$  и  $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$  при  $m_1 > m_2$ .

Случаю, когда обе частицы после столкновения движутся на одной прямой («лобовой удар»), соответствует  $\chi = \pi$ , т. е. положение точки  $C$  на диаметре слева от точки  $A$  (рис. 16, а; при этом  $p_1'$

и  $\mathbf{p}'_2$  взаимно противоположны) или между  $A$  и  $O$  (на рис. 16, б; при этом  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  направлены в одну сторону).

Скорости частиц после столкновения в этом случае равны

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \quad (17,6)$$

Значение  $\mathbf{v}'_2$  при этом — наибольшее возможное; максимальная энергия, которую может получить в результате столкновения первоначально покоившаяся частица, равна, следовательно,

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad (17,7)$$

где  $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$  — первоначальная энергия налетающей частицы.

При  $m_1 < m_2$  скорость первой частицы после столкновения может иметь любое направление. Если же  $m_1 > m_2$ , угол отклонения летящей частицы не может превышать некоторого максимального значения, соответствующего такому положению точки  $C$  (рис. 16, б), при котором прямая  $AC$  касается окружности. Очевидно, что  $\sin \theta_{1\max} = OC/OA$ , или

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (17,8)$$

Особенно просто выглядит столкновение частиц (из которых одна первоначально покоится) с одинаковыми массами. В этом случае не только точка  $B$ , но и точка  $A$  лежат на окружности (рис. 17). При этом

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad (17,9)$$

$$v'_1 = v \cos \frac{\chi}{2}, \quad v'_2 = v \sin \frac{\chi}{2}. \quad (17,10)$$

Отметим, что частицы разлетаются после столкновения под прямым углом друг к другу.

### Задача

Выразить скорости обеих частиц после столкновения движущейся частицы ( $m_1$ ) с неподвижной ( $m_2$ ) через их углы отклонения в  $l$ -системе.

Решение. Из рис. 16 имеем  $p'_2 = 2 \cdot OB \cdot \cos \theta_2$  или  $v'_2 = 2v \frac{m}{m_2} \cos \theta_2$ . Для импульса же  $p'_1 = AC$  имеем уравнение

$$OC^2 = AO^2 + p'^2_1 - 2AO \cdot p'_1 \cos \theta_1$$

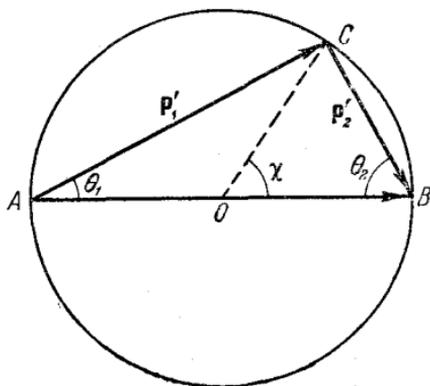


Рис. 17.

или

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2} \frac{v_1}{v} \cos \theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1}$$

(при  $m_1 > m_2$  перед корнем допустимы оба знака, при  $m_2 > m_1$  — знак +).

### § 18. Рассеяние частиц

Как было уже указано в предыдущем параграфе, полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла  $\chi$ ) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой  $m$  в поле  $U(r)$  неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Как было указано в § 14, траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению

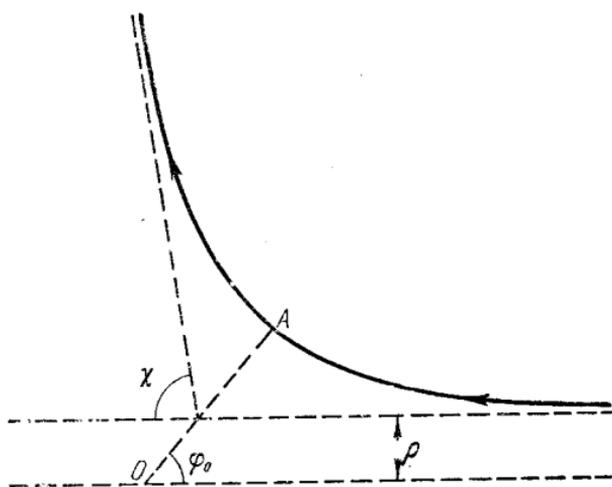


Рис. 18.

к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты (OA на рис. 18). Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Если обозначить эти углы посредством  $\varphi_0$ , то угол  $\chi$  отклонения частицы при ее пролетании мимо центра есть, как видно из рисунка,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \quad (18,1)$$

Угол же  $\varphi_0$  определяется согласно (14,7) интегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (18,2)$$

взятым между ближайшим к центру и бесконечно удаленным положениям частицы. Напомним, что  $r_{\min}$  является корнем выражения, стоящего под знаком радикала.

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных  $E$  и  $M$  другие — скорость  $v_{\infty}$  частицы на бесконечности и так называемое *прицельное расстояние*  $\rho$ . Последнее представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра на направление  $v_{\infty}$ , т. е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало (рис. 18). Энергия и момент выражаются через эти величины согласно

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad M = m\rho v_{\infty}, \quad (18,3)$$

а формула (18,2) принимает вид

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mc_{\infty}^2}}}. \quad (18,4)$$

Вместе с (18,1) она определяет зависимость  $\chi$  от  $\rho$ .

В физических применениях приходится обычно иметь дело не с индивидуальным отклонением частицы, а, как говорят, с *рассеянием* целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковой скоростью  $v_{\infty}$ . Различные частицы в пучке обладают различными *прицельными* расстояниями и соответственно рассеиваются под различными углами  $\chi$ . Обозначим посредством  $dN$  число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между  $\chi$  и  $\chi + d\chi$ . Само по себе это число неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как оно зависит от плотности падающего пучка (пропорционально ей). Поэтому введем отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \quad (18,5)$$

где  $n$  — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (мы предполагаем, естественно, что пучок однороден по всему своему сечению). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением рассеяния*. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Будем считать, что связь между  $\chi$  и  $\rho$  — взаимно однозначна; это так, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния. В таком случае рассеиваются в заданный интервал углов между  $\chi$  и  $\chi + d\chi$  лишь те частицы, которые летят с прицельным расстоянием в определенном интервале между  $\rho(\chi)$

и  $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ . Число таких частиц равно произведению  $n$  на площадь кольца между окружностями с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$ , т. е.  $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$ . Поэтому эффективное сечение

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (18,6)$$

Чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния, достаточно переписать это выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \quad (18,7)$$

Мы пишем здесь абсолютное значение производной  $d\rho/d\chi$ , имея в виду, что она может быть отрицательной (как это обычно бывает)<sup>1)</sup>. Часто относят  $d\sigma$  не к элементу плоского угла  $d\chi$ , а к элементу телесного угла  $do$ . Телесный угол между конусами с углами раствора  $\chi$  и  $\chi + d\chi$  есть  $do = 2\pi \sin\chi d\chi$ . Поэтому имеем из (18,7):

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do. \quad (18,8)$$

Возвращаясь к фактической задаче о рассеянии пучка частиц не на неподвижном силовом центре, а на других первоначально покоившихся частицах, мы можем сказать, что формула (18,7) определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для нахождения же эффективного сечения в зависимости от угла рассеяния  $\theta$  в лабораторной системе надо выразить в этой формуле  $\chi$  через  $\theta$  согласно формулам (17,4). При этом

получаются выражения как для сечения рассеяния падающего пучка частиц ( $\chi$  выражено через  $\theta_1$ ), так и для частиц, первоначально покоившихся ( $\chi$  выражено через  $\theta_2$ ).

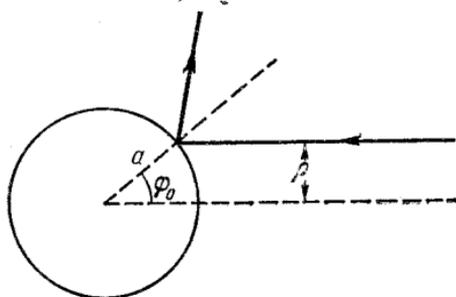


Рис. 19.

### Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния частиц от абсолютного твердого шарика радиуса  $a$  (т. е. при законе взаимодействия  $U = \infty$  при  $r < a$  и  $U = 0$  при  $r > a$ ).

Решение. Так как вне шарика частица движется свободно, а внутрь него проникнуть вообще не может, то траектория складывается из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку их пересечения с шариком (рис. 19). Как видно из рисунка,

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

<sup>1)</sup> Если функция  $\rho(\chi)$  многозначна, то надо, очевидно, взять сумму таких выражений по всем ветвям этой функции.

Подставляя в (18,7) или (18,8), получим:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi \, d\chi = \frac{a^2}{4} d\sigma, \quad (1)$$

т. е. в  $\psi$ -системе рассеяние изотропно. Интегрируя  $d\sigma$  по всем углам, найдем, что полное сечение  $\sigma = \pi a^2$  в соответствии с тем, что *прицельная площадь*, в которую должна попасть частица для того, чтобы вообще рассеяться, есть площадь сечения шарика.

Для перехода к  $l$ -системе надо выразить  $\chi$  через  $\theta_1$  согласно (17,4). Вычисления полностью аналогичны произведенным в задаче 2 § 16 (ввиду формального сходства формул (17,4) и (16,5)). При  $m_1 < m_2$  ( $m_1$  — масса частиц,  $m_2$  — масса шариков) получим:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[ 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} \right] d\sigma_1$$

( $d\sigma_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$ ). Если же  $m_2 < m_1$ , то

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} d\sigma_1.$$

При  $m_1 = m_2$  имеем:

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\sigma_1,$$

что можно получить и прямой подстановкой  $\chi = 2\theta_1$  (согласно (17,9)) в (1).

Для первоначально покоившихся шариков имеем всегда  $\chi = \pi - 2\theta_2$ , и подстановка в (1) дает:

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \theta_2| d\sigma_2.$$

2. Для того же случая выразить эффективное сечение как функцию энергии  $\epsilon$ , теряемой рассеиваемыми частицами.

Решение. Энергия, теряемая частицей  $m_1$ , совпадает с энергией, приобретаемой частицей  $m_2$ . Согласно (17,5) и (17,7) имеем:

$$\epsilon = E'_2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = \epsilon_{\max} \sin^2 \frac{\chi}{2},$$

откуда

$$d\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_{\max} \sin \chi \, d\chi,$$

и, подставляя в формулу (1) задачи 1, получим:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\epsilon}{\epsilon_{\max}}.$$

Распределение рассеянных частиц по значениям  $\epsilon$  оказывается однородным во всем интервале  $\epsilon$  от нуля до  $\epsilon_{\max}$ .

3. Как зависит эффективное сечение от скорости  $v_\infty$  частиц при рассеянии в поле  $U \propto r^{-n}$ ?

Решение. Согласно (10,3), если потенциальная энергия есть однородная функция порядка  $k = -n$ , то для подобных траекторий  $\rho \propto v^{-2/n}$  или

$$\rho = v_x^{-2/n} f(\chi)$$

(углы отклонения  $\chi$  для подобных траекторий одинаковы). Подставляя в (18,6), найдем, что

$$d\sigma \propto v_\infty^{-4/n} d\sigma.$$

4. Определить эффективное сечение для «падения» частиц в центр поля  $U = -\alpha/r^2$ .

Решение. «Падают» в центр те частицы, для которых выполняется условие  $2\alpha > m\rho^2 v_x^2$  (см. (14,11)), т. е. у которых прицельное расстояние не превышает значения  $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$ . Поэтому искомое эффективное сечение

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

5. То же в поле  $U = -\alpha/r^n$  ( $n > 2$ ,  $\alpha > 0$ ).

Решение. Зависимость эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

от  $r$  имеет вид, изображенный на рис. 20 с максимальным значением

$$(U_{\text{эфф}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2} \left( \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n} \right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

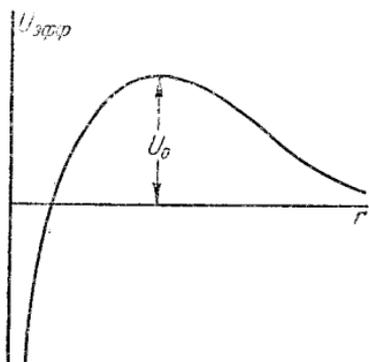


Рис. 20.

«Падают» в центр те частицы, у которых  $U_0 < E$ . Определяя  $\rho_{\max}$  из условия  $U_0 = E$ , получим:

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}} \left( \frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

6. Определить эффективное сечение для падения частиц (с массами  $m_1$ ) на поверхность сферического тела (с массой  $m_2$  и радиусом  $R$ ), к которой они притягиваются по закону Ньютона.

Решение. Условие падения заключается в неравенстве  $r_{\min} < R$ , где  $r_{\min}$  — ближайшая к центру сферы точки траектории частицы. Наибольшее допустимое значение  $Q$  определяется условием  $r_{\min} = R$ , что сводится к решению уравнения  $U_{\text{эфф}}(R) = E$  или

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

причем  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  ( $\gamma$  — гравитационная постоянная), и мы положили  $m \approx m_1$ , считая, что  $m_2 \gg m_1$ . Находя отсюда  $\rho_{\max}^2$ , получим:

$$\sigma = \pi R^2 \left( 1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2} \right).$$

При  $v_\infty \rightarrow \infty$  эффективное сечение стремится, естественно, к геометрической площади сечения сферы.

7. Восстановить вид рассеивающего поля  $U(r)$  по заданной зависимости эффективного сечения от угла рассеяния при заданной энергии  $E$ ; предполагается, что  $U(r)$  — монотонно убывающая функция  $r$  (поле отталкивания), причем  $U(0) > E$ ,  $U(\infty) = 0$ . (О. Б. Фирсов, 1953.)

Решение. Интегрирование  $d\sigma$  по углу рассеяния определяет согласно формуле

$$\int_{\chi}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi \rho^2 \quad (1)$$

квадрат прицельного расстояния, так что функцию  $\rho(\chi)$  (а с ней и  $\chi(\rho)$ ) тоже можно считать заданной.

Вводим обозначения:

$$s = \frac{1}{r}, \quad x = \frac{1}{\rho^2}, \quad \omega = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}. \quad (2)$$

Тогда формулы (18,1), (18,2) запишутся в виде

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{x\omega^2 - s^2}}, \quad (3)$$

где  $s_0(x)$  — корень уравнения

$$x\omega^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

Уравнение (3) — интегральное уравнение для функции  $\omega(s)$ ; его можно решить методом, аналогичным использованному в § 12. Разделив обе стороны (3) на  $\sqrt{\alpha - x}$  и проинтегрировав по  $dx$  в пределах от нуля до  $\alpha$ , найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} &= \int_0^{\alpha} \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{\sqrt{(x\omega^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \\ &= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{dx ds}{\sqrt{(x\omega^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{\omega}. \end{aligned}$$

или, интегрируя по частям в левой стороне равенства:

$$\pi \sqrt{\alpha - x} \int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha - x} \frac{d\chi}{dx} dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{\omega}.$$

Полученное соотношение дифференцируем по  $\alpha$ , после чего вместо  $s_0(\alpha)$  пишем просто  $s$ , соответственно чему заменяем  $\alpha$  на  $s^2/\omega^2$ ; написав равенство в дифференциалах, получим:

$$\pi d\left(\frac{s}{\omega}\right) - \frac{1}{2} d\left(\frac{s^2}{\omega^2}\right) \int_0^{s^2/\omega^2} \frac{\chi'(x) dx}{\sqrt{\frac{s^2}{\omega^2} - x}} = \frac{\pi}{\omega} ds$$

или

$$-\pi d \ln \omega = d \left( \frac{s}{\omega} \right) \int_0^{s^2/\omega^2} \frac{\chi'(x) dx}{\sqrt{\frac{s^2}{\omega^2} - x}}.$$

Это уравнение интегрируется непосредственно, причем в правой стороне следует изменить порядок интегрирования по  $dx$  и  $d(s/\omega)$ . Учитывая, что при  $s=0$  (т. е.  $r \rightarrow \infty$ ) должно быть  $\omega=1$  (т. е.  $U=0$ ), и возвращаясь к исходным переменным  $r$  и  $\rho$ , получим окончательный результат (в двух эквивалентных формах):

$$\omega = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{r\omega}^{\infty} \text{Arch} \frac{\rho}{r\omega} \cdot \frac{d\chi}{d\rho} d\rho \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{r\omega}^{\infty} \frac{\chi(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\omega^2}} \right\}. \quad (4)$$

Этой формулой определяется в неявном виде зависимость  $\omega(r)$  (а тем самым и  $U(r)$ ) при всех  $r > r_{\min}$ , т. е. в той области значений  $r$ , которая фактически проходится рассеиваемой частицей с заданной энергией  $E$ .

## § 19. Формула Резерфорда

Одно из важнейших применений полученных выше формул — рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в (18,4)  $U = \alpha/r$  и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_x^2} \rho}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{mv_x^2} \rho \right)^2}},$$

откуда

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_x^4} \text{tg}^2 \varphi_0,$$

или, вводя согласно (18,1)  $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_x^4} \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \quad (19,1)$$

Дифференцируя это выражение по  $\chi$  и подставляя в (18,7) или в (18,8), получим:

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{mv_x^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \quad (19,2)$$

или

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{do}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (19,3)$$

Это так называемая *формула Резерфорда*. Отметим, что эффективное сечение не зависит от знака  $\alpha$ , так что полученный результат относится в равной степени к кулоновскому полю отталкивания и притяжения.

Формула (19,3) дает эффективное сечение в системе отсчета, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Преобразование к лабораторной системе производится с помощью формул (17,4). Для частиц, первоначально покоившихся, подставляя  $\chi = \pi - 2\theta_2$  в (19,2), получим:

$$d\sigma_2 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_2}{\cos^3 \theta_2} d\theta_2 = \left( \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{do_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (19,4)$$

Для падающих же частиц преобразование приводит в общем случае к весьма громоздкой формуле. Отметим лишь два частных случая.

Если масса  $m_2$  рассеивающей частицы велика по сравнению с массой  $m_1$  рассеиваемой частицы, то  $\chi \approx \theta_1$ , а  $m \approx m_1$ , так что

$$d\sigma_1 = \left( \frac{\alpha}{4E_1} \right)^2 \frac{do_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad (19,5)$$

где  $E_1 = m_1 v_{\infty}^2 / 2$  — энергия падающей частицы.

Если массы обеих частиц одинаковы ( $m_1 = m_2$ ,  $m = m_1/2$ ), то согласно (17,9)  $\chi = 2\theta_1$ , и подстановка в (19,2) дает:

$$d\sigma_1 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} d\theta_1 = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} do_1. \quad (19,6)$$

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то не имеет смысла различать после рассеяния первоначально двигавшиеся от первоначально покоившихся частиц. Общее эффективное сечение для всех частиц мы получим, складывая  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$  и заменяя  $\theta_1$  и  $\theta_2$  общим значением  $\theta$ :

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \cos \theta do. \quad (19,7)$$

Вернемся снова к общей формуле (19,2) и определим с ее помощью распределение рассеянных частиц по отношению к теряемой ими в результате столкновения энергии. При произвольном соотношении между массами рассеиваемой ( $m_1$ ) и рассеивающей ( $m_2$ ) частиц, приобретаемая последней скорость выражается через угол рассеяния в  $\zeta$ -системе посредством

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{\infty} \sin \frac{\chi}{2}$$

(см. (17,5)). Соответственно, приобретаемая этой частицей, а тем самым и теряемая частицей  $m_1$  энергия равна

$$\varepsilon = \frac{m_2 v'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Выразив отсюда  $\sin \frac{\chi}{2}$  через  $\varepsilon$  и подставив в (19,2), получаем:

$$d\sigma = 2\pi \frac{a^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \quad (19,8)$$

Эта формула отвечает на поставленный вопрос, определяя эффективное сечение как функцию от потери энергии  $\varepsilon$ ; последняя пробегает при этом значения от нуля до  $\varepsilon_{\max} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$ .

### Задачи

1. Найти эффективное сечение рассеяния в поле  $U = a/r^2$  ( $a > 0$ ).  
Решение. Угол отклонения:

$$\chi = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m\rho^2 v_\infty^2}}} \right].$$

Эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{2\pi^2 a}{m v_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2 \sin \chi} d\chi.$$

2. Найти эффективное сечение рассеяния сферической «потенциальной ямы» радиуса  $a$  и «глубины»  $U_0$  (т. е. полем  $U = 0$  при  $r > a$ ,  $U = -U_0$  при  $r < a$ ).

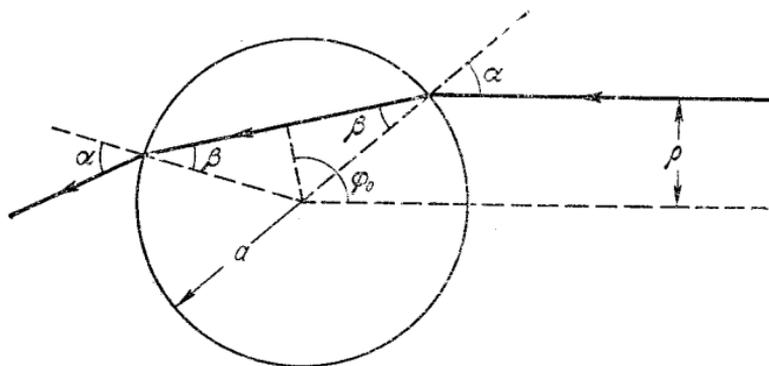


Рис. 21.

Решение. Прямолинейная траектория частицы «преломляется» при входе в яму и при выходе из нее. Согласно задаче к § 7 углы падения  $\alpha$  и преломления  $\beta$  (рис. 21) связаны соотношением

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_\infty^2}}.$$

Угол отклонения  $\chi = 2(\alpha - \beta)$ . Поэтому имеем:

$$\frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin \alpha} = \cos \frac{\chi}{2} - \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Исключив  $\alpha$  из этого равенства и очевидного из рисунка соотношения

$$a \sin \alpha = \rho,$$

получим связь между  $\rho$  и  $\chi$  в виде

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}.$$

Наконец, дифференцируя это равенство, получим эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1\right) \left(n - \cos \frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}\right)^2} d\chi.$$

Угол  $\chi$  меняется в пределах от нуля (при  $\rho = 0$ ) до значения  $\chi_{\max}$  (при  $\rho = a$ ), определяемого из

$$\cos \frac{\chi_{\max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

Полное эффективное сечение, получающееся интегрированием  $d\sigma$  по всем углам внутри конуса  $\chi < \chi_{\max}$ , равно, разумеется, площади геометрического сечения  $\pi a^2$ .

## § 20. Рассеяние под малыми углами

Вычисление эффективного сечения значительно упрощается, если рассматривать лишь те столкновения, которые происходят на больших прицельных расстояниях, где поле  $U$  является слабым, так что углы отклонения соответственно малы. При этом вычисление можно производить сразу в лабораторной системе отсчета, не вводя систему центра инерции.

Выберем ось  $x$  по направлению первоначального импульса рассеиваемых частиц (частицы  $m_1$ ), а плоскость  $xy$  — в плоскости рассеяния. Обозначив посредством  $\mathbf{p}_1$  импульс частицы после рассеяния, имеем очевидное равенство

$$\sin \theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p_1}.$$

Для малых отклонений можно приближенно заменить  $\sin \theta_1$  на  $\theta_1$ , а в знаменателе — заменить  $p'_1$  первоначальным импульсом  $p_1 = m_1 v_\infty$ ;

$$\theta_1 \approx \frac{p'_{1y}}{m_1 v_\infty}. \quad (20,1)$$

Далее, поскольку  $\dot{p}_y = F_y$ , то полное приращение импульса вдоль оси  $y$

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt. \quad (20,2)$$

При этом сила:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \frac{y}{r}.$$

Поскольку интеграл (20,2) уже содержит малую величину  $U$ , то при его вычислении можно в том же приближении считать, что частица вовсе не отклоняется от своего первоначального пути, т. е. движется прямолинейно (вдоль прямой  $y = \rho$ ) и равномерно (со скоростью  $v_x$ ). Соответственно этому полагаем в (20,2)

$$F_y = -\frac{dU}{dr} \frac{\rho}{r}, \quad dt = \frac{dx}{v_x}$$

и получаем:

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r}.$$

Наконец, от интегрирования по  $dx$  перейдем к интегрированию по  $dr$ . Поскольку для прямолинейного пути  $r^2 = x^2 + \rho^2$ , то при изменении  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$   $r$  изменяется от  $\infty$  до  $\rho$  и затем снова до  $\infty$ . Поэтому интеграл по  $dx$  перейдет в удвоенный интеграл по  $dr$  от  $\rho$  до  $\infty$ , причем  $dx$  заменяется на

$$dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Окончательно получим для угла рассеяния (20,1) следующее выражение<sup>1)</sup>:

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_x^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (20,3)$$

чем и определяется искомая зависимость  $\theta_1$  от  $\rho$  при слабом отклонении. Эффективное сечение рассеяния (в  $\lambda$ -системе) получается по такой же формуле, как (18,8) (с  $\theta_1$  вместо  $\chi$ ), причем  $\sin \theta_1$  можно и здесь заменить на  $\theta_1$ :

$$d\sigma = \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\theta_1. \quad (20,4)$$

<sup>1)</sup> Если произвести весь изложенный вывод в  $\zeta$ -системе, то мы получим для  $\chi$  такое же выражение с  $m$  вместо  $m_1$  в соответствии с тем, что малые углы  $\theta_1$  и  $\chi$  должны быть связаны согласно (17,4) соотношением

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \chi.$$

## З а д а ч и

1. Получить формулу (20,3) из формулы (18,4).

Решение. С целью избежать ниже фиктивно расходящихся интегралов, представим формулу (18,4) в виде

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^R \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}} dr,$$

причем в качестве верхнего предела предела пишем большую конечную величину  $R$ , имея в виду перейти затем к пределу  $R \rightarrow \infty$ . Ввиду малости  $U$  разлагаем корень по степеням  $U$ , а  $r_{\min}$  заменяем приближенно на  $\rho$ :

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{U(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Первый интеграл после перехода к пределу  $R \rightarrow \infty$  дает  $\pi/2$ . Второй же интеграл предварительно преобразуем по частям и получаем выражение

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{\sqrt{r^2 - \rho^2} dU}{mv_\infty^2} dr = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2} \int_0^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

эквивалентное формуле (20,3).

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы в поле  $U = \alpha/r^n$  ( $n > 0$ ).

Решение. Согласно (20,3) имеем:

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Подстановкой  $\rho^2/r^2 = u$  интеграл приводится к  $B$ -интегралу Эйлера и выражается через  $\Gamma$ -функции

$$\theta_1 = \frac{2\alpha \sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Выражая отсюда  $\rho$  через  $\theta_1$  и подставляя в (20,4), получим:

$$d\sigma = \frac{1}{n} \left[ \frac{2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2} \right]^{\frac{2}{n}} \theta_1^{-2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) d\theta_1.$$

## ГЛАВА V

### МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 21. Свободные одномерные колебания

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые *малые колебания*, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия  $U(q)$  имеет минимум; отклонение от такого положения приводит к возникновению силы  $-dU/dq$ , стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее значение обобщенной координаты посредством  $q_0$ . При малых отклонениях от положения равновесия в разложении разности  $U(q) - U(q_0)$  по степеням  $q - q_0$  достаточно сохранить первый исчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2} (q - q_0)^2,$$

где  $k$  — положительный коэффициент (значение второй производной  $U''(q)$  при  $q = q_0$ ). Будем в дальнейшем отсчитывать потенциальную энергию от ее минимального значения (т. е. положим  $U(q_0) = 0$ ) и введем обозначение

$$x = q - q_0 \quad (21,1)$$

для отклонения координаты от ее равновесного значения. Таким образом,

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (21,2)$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2.$$

В том же приближении достаточно заменить функцию  $a(q)$  просто ее значением при  $q=q_0$ . Вводя для краткости обозначение <sup>1)</sup>

$$a(q_0) = m,$$

получим окончательно следующее выражение для лагранжевой функции системы, совершающей одномерные малые колебания <sup>2)</sup>:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (21,3)$$

Соответствующее этой функции уравнение движения гласит:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (21,4)$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (21,5)$$

где введено обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21,6)$$

Два независимых решения линейного дифференциального уравнения (21,5):  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , так что его общее решение

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (21,7)$$

Это выражение может быть написано также и в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (21,8)$$

Поскольку  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , то сравнение с (21,7) показывает, что произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  связаны с постоянными  $c_1$  и  $c_2$  соотношениями

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \quad (21,9)$$

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение. Коэффициент  $a$  при периодическом множителе в (21,8) называется *амплитудой* колебаний, а аргумент косинуса — их *фазой*;  $\alpha$  есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени. Величина  $\omega$  называется *циклической частотой* колебаний; в теоретической физике, впрочем, ее называют обычно просто *частотой*, что мы и будем делать в дальнейшем.

Частота является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения. Согласно формуле (21,6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой. Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с

<sup>1)</sup> Подчеркнем, однако, что величина  $m$  совпадает с массой только, если  $x$  есть декартова координата частицы!

<sup>2)</sup> Такую систему часто называют одномерным *осциллятором*.

предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты<sup>1)</sup>.

Энергия системы, совершающей малые колебания, есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

или, подставив сюда (21,8):

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2. \quad (21,10)$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re} \{ A e^{i\omega t} \}, \quad (21,11)$$

где  $A$  — комплексная постоянная; написав ее в виде

$$A = a e^{i\alpha}, \quad (21,12)$$

мы вернемся к выражению (21,8). Постоянную  $A$  называют *комплексной амплитудой*; ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой.

Оперирование с экспоненциальными множителями в математическом отношении проще, чем с тригонометрическими, так как дифференцирование не меняет их вида. При этом, пока мы производим лишь линейные операции (сложение, умножение на постоянные коэффициенты, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак взятия вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

### Задачи

1. Выразить амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные значения  $x_0$  и  $v_0$  координаты и скорости.

Ответ:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Найти отношение частот  $\omega$  и  $\omega'$  колебаний двух двухатомных молекул, состоящих из атомов различных изотопов; массы атомов равны соответственно  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m'_1$ ,  $m'_2$ .

Решение. Поскольку атомы изотопов взаимодействуют одинаковым образом, то  $k = k'$ . Роль же коэффициентов  $m$  в кинетических энергиях молекул

<sup>1)</sup> Оно не имеет поэтому места, если у функции  $U(x)$  при  $x=0$  минимум более высокого порядка, т. е.  $U \propto x^n$ ,  $n > 2$  (см. задачу 2а, § 11).

играют их приведенные массы. Согласно (21,6) находим поэтому:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}$$

3. Найти частоту колебаний точки с массой  $m$ , способной двигаться по прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке  $A$  (рис. 22) на расстоянии  $l$  от прямой. Пружина имеет длину  $l$ , натянута с силой  $F$ .

Решение. Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна произведению силы  $F$  на удлинение  $\delta l$  пружины. При  $x \ll l$  имеем:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

так что  $U = Fx^2/2l$ . Поскольку кинетическая энергия есть  $mx^2/2$ , то

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

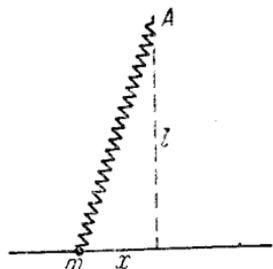


Рис. 22.

4. То же, если точка  $m$  движется по окружности радиуса  $r$  (рис. 23).  
Решение. В этом случае удлинение пружины (при  $\varphi \ll 1$ )

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2} - 2r(l+r) \cos \varphi - l \approx \frac{r(l+r)}{2l} \varphi^2.$$

Кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2$ . Отсюда частота

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

5. Найти частоту колебаний изображенного на рис. 2 маятника, точка подвеса которого (с массой  $m_1$  в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении.

Решение. При  $\varphi \ll 1$  из полученной в задаче 3 § 14 формулы находим:

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\varphi}^2, \quad U = \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

6. Определить форму кривой, при качании вдоль которой (в поле тяжести) частота колебаний не зависит от амплитуды.

Решение. Поставленному условию будет удовлетворять такая кривая, при движении вдоль которой потенциальная энергия частицы будет  $U = ks^2/2$ , где  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от положения равновесия; при этом

кинетическая энергия  $T = ms^2/2$  ( $m$  — масса частицы) и частота колебаний будет  $\omega = \sqrt{k/m}$  вне зависимости от начального значения  $s$ .

Но в поле тяжести  $U = mgy$ , где  $y$  — вертикальная координата. Поэтому имеем:  $ks^2/2 = mgy$  или

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

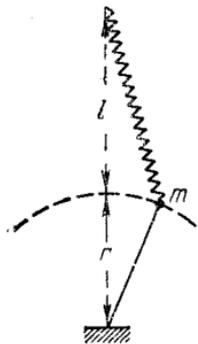


Рис. 23.

С другой стороны,  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , откуда

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} dy.$$

Интегрирование удобно произвести, сделав подстановку

$$y = \frac{g}{4\omega^2} (1 - \cos \xi).$$

Тогда получим:

$$x = \frac{g}{4\omega^2} (\xi + \sin \xi).$$

Эти два равенства определяют в параметрическом виде уравнение искомой кривой; она представляет собой циклоиду.

## § 22. Вынужденные колебания

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют *вынужденными* в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых *свободных* колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабое, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение  $x$ .

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией  $\frac{1}{2} kx^2$  система обладает еще потенциальной энергией  $U_e(x, t)$ , связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины  $x$ , получим:

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции времени). Во втором члене —  $\partial U_e / \partial x$  есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как  $F(t)$ . Таким образом, в потенциальной энергии появляется член —  $x F(t)$ , так что функция Лагранжа системы будет:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + x F(t). \quad (22,1)$$

Соответствующее уравнение движения есть

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \quad (22,2)$$

где мы снова ввели частоту  $\omega$  свободных колебаний.

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами получается в виде суммы двух выражений:  $x = x_0 + x_1$ , где  $x_0$  — общее решение однородного уравнения, а  $x_1$  — частный интеграл неоднородного уравнения. В данном случае  $x_0$  представляет собой рассмотренные в предыдущем параграфе свободные колебания.

Рассмотрим имеющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (22,3)$$

Частный интеграл уравнения (22,2) ищем в виде  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  с тем же периодическим множителем. Подстановка в уравнение дает:  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ ; прибавляя решение однородного уравнения, получим общий интеграл в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (22,4)$$

Произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой системы  $\omega$  и с частотой вынуждающей силы  $\gamma$ .

Решение (22,4) неприменимо в случае так называемого *резонанса*, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы. Для нахождения общего решения уравнения движения в этом случае перепишем выражение (22,4) с соответствующим переобозначением постоянных в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

При  $\gamma \rightarrow \omega$  второй член дает неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая ее по правилу Лопиталья, получим:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (22,5)$$

Таким образом, в случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

Выясним еще, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда  $\gamma = \omega + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Представим общее решение в комплексном виде, как

$$x = A e^{i\omega t} + B e^{i(\omega + \varepsilon)t} = (A + B e^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}. \quad (22,6)$$

Так как величина  $A + B e^{i\varepsilon t}$  мало меняется в течение периода  $2\pi/\omega$

множителя  $e^{i\omega t}$ , то движение вблизи резонанса можно рассматривать как малые колебания, но с переменной амплитудой<sup>1)</sup>.

Обозначив последнюю через  $C$ , имеем:

$$C = |A + Be^{i\alpha t}|.$$

Представив  $A$  и  $B$  соответственно в виде  $ae^{i\alpha}$  и  $be^{i\beta}$ , получим:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha t + \beta - \alpha). \quad (22,7)$$

Таким образом, амплитуда колеблется периодически с частотой  $\epsilon$ , меняясь между двумя пределами

$$|a - b| \leq C \leq a + b.$$

Это явление носит название *биений*.

Уравнение движения (22,2) может быть проинтегрировано и в общем виде при произвольной вынуждающей силе  $F(t)$ . Это легко сделать, переписав его предварительно в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m} F(t), \quad (22,8)$$

где введена комплексная величина

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \quad (22,9)$$

Уравнение (22,8) уже не второго, а первого порядка. Без правой части его решением было бы  $\xi = Ae^{i\omega t}$  с постоянной  $A$ . Следуя общему правилу, ищем решение неоднородного уравнения в виде  $\xi = A(t)e^{i\omega t}$  и для функции  $A(t)$  получаем уравнение

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t}.$$

Интегрируя его, получим решение уравнения (22,9) в виде

$$\xi = e^{i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t} dt + \xi_0 \right\}, \quad (22,10)$$

где постоянная интегрирования  $\xi_0$  выбрана так, чтобы представлять собой значение  $\xi$  в момент времени  $t=0$ . Это и есть искомое общее решение; функция  $x(t)$  дается мнимой частью выражения (22,10) (деленной на  $i\omega$ )<sup>2)</sup>.

Энергия системы, совершающей вынужденные колебания, разумеется, не сохраняется; система приобретает энергию за счет источ-

<sup>1)</sup> Меняется также «постоянный» член в фазе колебаний.

<sup>2)</sup> При этом, разумеется, сила  $F(t)$  должна быть написана в вещественном виде.

ника внешней силы. Определим полную энергию, передаваемую системе за все время действия силы (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), предполагая начальную энергию равной нулю. Согласно формуле (22,10) (с нижним пределом интегрирования  $-\infty$  вместо нуля и с  $\xi(-\infty)=0$ ) имеем при  $t \rightarrow \infty$ :

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

С другой стороны, энергия системы как таковой дается выражением

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2. \quad (22,11)$$

Подставив сюда  $|\dot{\xi}(\infty)|^2$ , получим искомую передачу энергии в виде

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2; \quad (22,12)$$

она определяется квадратом модуля компоненты Фурье силы  $F(t)$  с частотой, равной собственной частоте системы.

В частности, если внешняя сила действует лишь в течение короткого промежутка времени (малого по сравнению с  $1/\omega$ ), то можно положить  $e^{-i\omega t} \cong 1$ . Тогда

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2.$$

Этот результат заранее очевиден: он выражает собой тот факт, что кратковременная сила сообщает системе импульс  $\int F dt$ , не успев за это время произвести заметного смещения.

### Задачи

1. Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы  $F(t)$ , если в начальный момент  $t=0$  система покоится в положении равновесия ( $x=0$ ,  $\dot{x}=0$ ) для случаев

а)  $F = \text{const} = F_0$ .

Ответ:  $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$ ; действие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия, вокруг которого происходят колебания.

б)  $F = at$ .

Ответ:  $x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$ .

в)  $F = F_0 e^{-\alpha t}$ .

Ответ:  $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \left( e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right)$ .

$$r) F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t.$$

О т в е т:

$$x = \frac{F_0}{m [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} \left\{ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\omega} (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + e^{-\alpha t} [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] \right\}$$

(при решении удобно писать силу в комплексном виде  $F = F_0 e^{(-\alpha + i\beta)t}$ ).

2. Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы, меняющейся по закону  $F = 0$  при  $t < 0$ ,  $F = F_0 t/T$  при  $0 < t < T$ ,

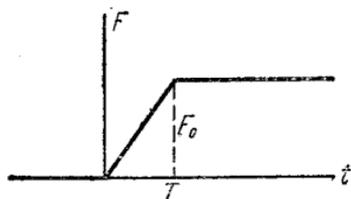


Рис. 24.

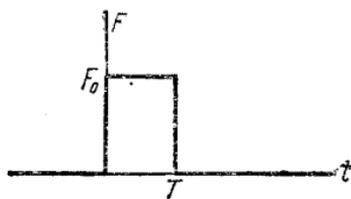


Рис. 25.

$F = F_0$  при  $t > T$  (рис. 24); до момента  $t = 0$  система покоится в положении равновесия.

Решение. В интервале времени  $0 < t < T$  колебания, удовлетворяющие начальному условию, имеют вид

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3} (\omega t - \sin \omega t).$$

При  $t > T$  ищем решение в виде

$$x = c_1 \cos \omega (t - T) + c_2 \sin \omega (t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Из условий непрерывности  $x$  и  $\dot{x}$  при  $t = T$  находим:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin \omega T, \quad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3} (1 - \cos \omega T).$$

При этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Отметим, что она тем меньше, чем медленнее «включается» сила  $F_0$  (т. е. чем больше  $T$ ).

3. То же в случае постоянной силы  $F_0$ , действующей в течение ограниченного времени  $T$  (рис. 25).

Решение можно найти как в задаче 2, но еще проще воспользоваться формулой (22,10). При  $t > T$  имеем свободные колебания вокруг положения  $x = 0$ ; при этом

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{i\omega m} (1 - e^{-i\omega T}) e^{i\omega t};$$

квадрат же модуля  $\xi$  дает амплитуду согласно формуле  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$ . В результате находим:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

4. То же в случае силы, действующей в течение времени от нуля до  $T$  по закону  $F = F_0 t/T$  (рис. 26).

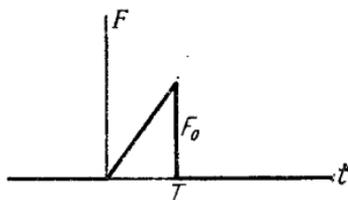


Рис. 26.

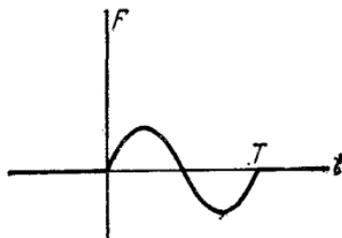


Рис. 27.

Решение. Тем же способом получим:

$$a = \frac{F_0}{T m \omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$

5. То же в случае силы, меняющейся в течение времени от нуля до  $T = 2\pi/\omega$  по закону  $F = F_0 \sin \omega t$  (рис. 27).

Решение. Подставив в (22,10)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

и проинтегрировав от нуля до  $T$ , получим:

$$a = \frac{F_0 \pi}{m \omega^2}.$$

### § 23. Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими ( $s$ ) степенями свободы строится аналогично тому, как были рассмотрены в § 21 одномерные колебания.

Пусть потенциальная энергия системы  $U$  как функция обобщенных координат  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) имеет минимум при  $q_i = q_{i0}$ . Вводя малые смещения

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$

и разлагая по ним  $U$  с точностью до членов второго порядка, получим потенциальную энергию в виде положительно определенной квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i, k} k_{ik} x_i x_k, \tag{23,2}$$

где мы снова отсчитываем потенциальную энергию от ее минимального значения. Поскольку коэффициенты  $k_{ik}$  и  $k_{ki}$  входят в (23,2)

умноженными на одну и ту же величину  $x_i x_k$ , то ясно, что их можно всегда считать симметричными по своим индексам

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

В кинетической же энергии, которая имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

(см. (5,5)), полагаем в коэффициентах  $q_i = q_{i0}$  и, обозначая постоянные  $a_{ik}(q_0)$  посредством  $m_{ik}$ , получаем ее в виде положительно определенной квадратичной формы

$$\frac{1}{2} \sum_{i, k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (23,3)$$

Коэффициенты  $m_{ik}$  тоже можно всегда считать симметричными по индексам

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Таким образом, лагранжева функция системы, совершающей свободные малые колебания:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \quad (23,4)$$

Составим теперь уравнения движения. Для определения входящих в них производных напишем полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Поскольку величина суммы не зависит, разумеется, от обозначения индексов суммирования, меняем в первом и третьем членах в скобках  $i$  на  $k$ , а  $k$  на  $i$ ; учитывая при этом симметричность коэффициентов  $m_{ik}$  и  $k_{ik}$ , получим:

$$dL = \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i).$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = - \sum_k k_{ik} x_k.$$

Поэтому уравнения Лагранжа

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \quad (23,5)$$

Они представляют собой систему  $s$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

По общим правилам решения таких уравнений ищем  $s$  неизвестных функций  $x_k(t)$  в виде

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \quad (23,6)$$

где  $A_k$  — некоторые, пока неопределенные, постоянные. Подставляя (23,6) в систему (23,5), получаем по сокращении на  $e^{i\omega t}$  систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные  $A_k$ :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (23,7)$$

Для того чтобы эта система имела отличные от нуля решения, должен обращаться в нуль ее определитель

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (23,8)$$

Уравнение (23,8) — так называемое *характеристическое* уравнение — представляет собой уравнение степени  $s$  относительно  $\omega^2$ . Оно имеет в общем случае  $s$  различных вещественных положительных корней  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s$  (в частных случаях некоторые из этих корней могут совпадать). Определенные таким образом величины  $\omega_\alpha$  называются *собственными частотами* системы.

Вещественность и положительность корней уравнения (23,8) заранее очевидны уже из физических соображений. Действительно, наличие у  $\omega$  мнимой части означало бы наличие во временной зависимости координат  $x_k$  (23,6) (а с ними и скоростей  $\dot{x}_k$ ) экспоненциально убывающего или экспоненциально возрастающего множителя. Но наличие такого множителя в данном случае недопустимо, так как оно привело бы к изменению со временем полной энергии  $E = U + T$  системы в противоречие с законом ее сохранения.

В том же самом можно убедиться и чисто математическим путем. Умножив уравнение (23,7) на  $A_i^*$  и просуммировав затем по  $i$ , получим:

$$\sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Квадратичные формы в числителе и знаменателе этого выражения вещественны в силу вещественности и симметричности

коэффициентов  $k_{ik}$  и  $m_{ik}$ ; действительно,

$$\left( \sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k \right)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik} A_k^* A_i.$$

Они также существенно положительны, а потому положительно и  $\omega^2$  <sup>1)</sup>.

После того как частоты  $\omega_\alpha$  найдены, подставляя каждое из них в уравнения (23,7), можно найти соответствующие значения коэффициентов  $A_k$ . Если все корни  $\omega_\alpha$  характеристического уравнения различны, то, как известно, коэффициенты  $A_k$  пропорциональны минорам определителя (23,8), в котором  $\omega$  заменена соответствующим значением  $\omega_\alpha$ ; обозначим эти миноры через  $\Delta_{k\alpha}$ . Частное решение системы дифференциальных уравнений (23,5) имеет, следовательно, вид

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

где  $C_\alpha$  — произвольная (комплексная) постоянная.

Общее же решение дается суммой всех  $s$  частных решений. Переходя к вещественной части, напишем его в виде

$$x_k = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right\} \equiv \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \quad (23,9)$$

где мы ввели обозначение

$$\Theta_\alpha = \operatorname{Re} \{ C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \}. \quad (23,10)$$

Таким образом, изменение каждой из координат системы со временем представляет собой наложение  $s$  простых периодических колебаний  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание? Самая форма общего интеграла (23,9) указывает путь к решению этой задачи.

В самом деле, рассматривая  $s$  соотношений (23,9) как систему уравнений с  $s$  неизвестными величинами  $\Theta_\alpha$ , мы можем, разрешив эту систему, выразить величины  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  через координаты  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Следовательно, величины  $\Theta_\alpha$  можно рассматривать как

<sup>1)</sup> Положительная определенность квадратичной формы, построенной на коэффициентах  $k_{ik}$ , очевидна из их определения в (23,2) для вещественных значений переменных. Но если написать комплексные величины  $A_k$  в явном виде как  $a_k + ib_k$ , то мы получим (снова в силу симметричности  $k_{ik}$ ):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik} (a_i - ib_i) (a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_i k_{ik} b_i b_k,$$

т. е. сумму двух положительно определенных форм.

новые обобщенные координаты. Эти координаты называют *нормальными* (или *главными*), а совершаемые ими простые периодические колебания — *нормальными колебаниями* системы.

Нормальные координаты  $\Theta_\alpha$  удовлетворяют, как это явствует из их определения, уравнениям

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \quad (23,11)$$

Это значит, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на  $s$  независимых друг от друга уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее временной зависимости надо знать начальные значения только ее же самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы.

Из сказанного очевидно, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты, распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию с одной из частот  $\omega_\alpha$ , т. е. имеет вид

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \quad (23,12)$$

где  $m_\alpha$  — положительные постоянные. С математической точки зрения это означает, что преобразованием (23,9) обе квадратичные формы — кинетическая энергия (23,3) и потенциальная (23,2) — одновременно приводятся к диагональному виду.

Обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны 1/2. Для этого достаточно определить нормальные координаты (обозначим их теперь  $Q_\alpha$ ) равенствами

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha. \quad (23,13)$$

Тогда

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Все изложенное мало меняется в случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Общий вид (23,9), (23,10) интеграла уравнений движений остается таким же (с тем же числом  $s$  членов) с той лишь разницей, что соответствующие кратным частотам коэффициенты  $\Delta_{k\alpha}$  уже не являются минорами определителя, которые, как известно, обращаются в этом случае в нуль<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Невозможность возникновения в общем интеграле членов, содержащих наряду с экспоненциальными также и степенные временные множители, очевидна из тех же физических соображений, которые исключают существование комплексных «частот»: наличие таких членов противоречило бы закону сохранения энергии.

Каждой кратной (или, как говорят, *вырожденной*) частоте отвечает столько различных нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих нормальных координат не однозначен. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковым  $\omega_a$ ) входят в виде одинаково преобразующихся сумм  $\sum \dot{Q}_a^2$  и  $\sum Q_a^2$ , то их можно подвергнуть любому линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

Весьма просто нахождение нормальных координат для трехмерных колебаний одной материальной точки, находящейся в постоянном внешнем поле. Помещая начало декартовой системы координат в точку минимума потенциальной энергии  $U(x, y, z)$ , мы получим последнюю в виде квадратичной формы переменных  $x, y, z$ , а кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

( $m$  — масса частиц) не зависит от выбора направления координатных осей. Поэтому соответствующим поворотом осей надо только привести к диагональному виду потенциальную энергию. Тогда

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2), \quad (23,14)$$

и колебания вдоль осей  $x, y, z$  являются главными с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

В частном случае центрально-симметричного поля ( $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$ ,  $U = kr^2/2$ ) эти три частоты совпадают (см. задачу 3).

Пользование нормальными координатами дает возможность привести задачу о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы к задачам об одномерных вынужденных колебаниях. Функция Лагранжа системы с учетом действующих на нее переменных внешних сил имеет вид

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t) x_k, \quad (23,15)$$

где  $L_0$  — лагранжева функция свободных колебаний. Вводя вместо координат  $x_k$  нормальные координаты, получим:

$$L = \frac{1}{2} \sum_a (\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2) + \sum_a f_a(t) Q_a, \quad (23,16)$$

где введено обозначение

$$f_a(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{ka}}{\sqrt{m_a}}.$$

Соответственно уравнения движения

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \quad (23,17)$$

будут содержать лишь по одной неизвестной функции  $Q_\alpha(t)$ .

### Задачи

1. Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(две одинаковые одномерные системы с собственной частотой  $\omega_0$ , связанные взаимодействием  $-\alpha xy$ )

Решение. Уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Подстановка (23,6) дает:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ , откуда

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

При  $\omega = \omega_1$  уравнения (1) дают  $A_x = A_y$ , а при  $\omega = \omega_2$   $A_x = -A_y$ . Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(коэффициенты  $1/\sqrt{2}$  соответствуют указанной в тексте нормировке нормальных координат).

При  $\alpha \ll \omega_0^2$  (слабая связь) имеем:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}.$$

Изменение  $x$  и  $y$  представляет собой в этом случае наложение двух колебаний с близкими частотами, т. е. имеет характер биений с частотой  $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$  (см. § 22). При этом в момент, когда амплитуда координаты  $x$  проходит через максимум, амплитуда  $y$  проходит через минимум и наоборот.

2. Определить малые колебания двойного плоского маятника (рис. 1).

Решение. Для малых колебаний ( $\varphi_1 \ll 1$ ,  $\varphi_2 \ll 1$ ) найденная в задаче 1 § 5 функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Уравнения движения:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

После подстановки (23,6):

$$A_1(m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0, \\ -A_1 l_1 \omega^2 + A_2(g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \{ (m_1 + m_2) (l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2) [(m_1 + m_2) (l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \}.$$

При  $m_1 \rightarrow \infty$  частоты стремятся к пределам  $\sqrt{g/l_1}$  и  $\sqrt{g/l_2}$ , соответствующим независимым колебаниям двух маятников.

3. Найти траекторию движения частицы в центральном поле  $U = kr^2/2$  (так называемый *пространственный осциллятор*).

Решение. Как и во всяком центральном поле, движение происходит в одной плоскости, которую выбираем в качестве плоскости  $x, y$ . Изменение каждой из координат  $x, y$  — простое колебание с одинаковыми частотами  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

или

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi,$$

где введены обозначения  $\varphi = \omega t + \alpha$ ,  $\delta = \beta - \alpha$ . Определив отсюда  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  и составив сумму их квадратов, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Это — эллипс с центром в начале координат <sup>1)</sup>. При  $\delta = 0$  или  $\pi$  траектория вырождается в отрезки прямой.

## § 24. Колебания молекул

Если мы имеем дело с системой частиц, взаимодействующих друг с другом, но не находящихся во внешнем поле, то не все ее степени свободы имеют колебательный характер. Типичным примером таких систем являются молекулы. Помимо движений, представляющих собой колебания атомов около их положения равновесия внутри молекулы, молекула как целое может совершать поступательное и вращательное движения.

Поступательному перемещению соответствуют три степени свободы. Столько же имеется в общем случае вращательных степеней свободы, так что из  $3n$  степеней свободы  $n$ -атомной молекулы всего  $3n - 6$  отвечают колебательному движению. Исключение представляют молекулы, в которых все атомы расположены вдоль одной прямой. Поскольку говорить о вращении вокруг этой прямой не имеет смысла, то вращательных степеней свободы в этом случае всего две, так что колебательных имеется  $3n - 5$ .

При решении механической задачи о колебаниях молекулы целесообразно с самого начала исключить из рассмотрения поступательные и вращательные степени свободы.

Чтобы исключить поступательное движение, надо считать равным нулю полный импульс молекулы. Поскольку это условие означает неподвижность центра инерции молекулы, то его можно выразить

<sup>1)</sup> Тот факт, что в поле с потенциальной энергией  $U = kr^2/2$  движение происходит по замкнутой кривой, был уже упомянут в § 14.

в виде постоянства трех координат последнего. Положив  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$  (где  $\mathbf{r}_{a0}$  — радиус-вектор неподвижного положения равновесия  $a$ -го атома, а  $\mathbf{u}_a$  — его отклонение от этого положения), представим условие

$$\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{const} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$$

в виде

$$\sum m_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (24,1)$$

Чтобы исключить вращение молекулы, следует положить равным нулю ее полный момент импульса. Так как момент не является полной производной по времени от какой-либо функции координат, то условие его исчезновения не может быть, вообще говоря, выражено в виде равенства нулю такой функции. Однако случай малых колебаний как раз представляет исключение. В самом деле, снова положив  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$  и пренебрегая малыми величинами второго порядка по смещениям  $\mathbf{u}_a$ , представим момент импульса молекулы в виде

$$\mathbf{M} = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] \cong \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \dot{\mathbf{u}}_a] = \frac{d}{dt} \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a].$$

Условие его исчезновения в этом приближении можно, следовательно, представить в виде

$$\sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a] = 0 \quad (24,2)$$

начало координат может быть при этом выбрано произвольным образом).

Нормальные колебания молекулы могут быть классифицированы по характеру движения атомов в них на основании соображений, связанных с симметрией расположения атомов (в положениях равновесия) в молекуле. Для этой цели существует общий метод, основанный на использовании теории групп; он изложен в другом томе этого курса<sup>1)</sup>. Здесь же мы рассмотрим лишь некоторые элементарные примеры.

Если все  $n$  атомов молекулы лежат в одной плоскости, то можно различать нормальные колебания, оставляющие атомы в этой плоскости, и нормальные колебания, при которых атомы выводятся из плоскости. Легко определить число тех и других. Так как всего для плоского движения имеется  $2n$  степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная, то число нормальных колебаний, не выводящих атомы из плоскости, равно  $2n - 3$ . Остальные же  $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$  колебательных степеней свободы отвечают колебаниям, выводящим атомы из плоскости.

В случае линейной молекулы можно различать продольные колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму, и колебания, выводящие атомы с прямой. Так как всего движению  $n$  частиц по линии отвечает  $n$  степеней свободы, из которых одна поступательная, то число колебаний, не выводящих атомы с прямой, равно  $n - 1$ .

<sup>1)</sup> См. «Квантовая механика», § 100.

Поскольку же полное число колебательных степеней свободы линейной молекулы есть  $3n-5$ , то имеется  $2n-4$  колебаний, выводящих атомы с прямой. Этим колебаниям, однако, отвечают всего  $n-2$  различные частоты, так как каждое из таких колебаний может осуществляться двумя независимыми способами — в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (проходящих через ось молекулы);

из соображений симметрии очевидно, что каждая такая пара нормальных колебаний имеет одинаковые частоты.

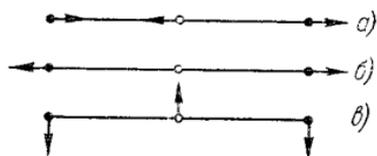
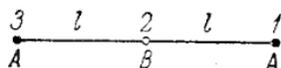


Рис. 28.

Задачи<sup>1)</sup>

1. Определить частоты колебаний линейной трехатомной симметричной молекулы  $ABA$  (рис. 28). Предполагается, что потенциальная энергия молекулы зависит только от расстояний  $A-B$  и  $B-A$  и от угла  $ABA$ .

Решение. Продольные смещения атомов  $x_1, x_2, x_3$  связаны в силу (24,1) соотношением

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

С его помощью исключаем  $x_2$  из функции Лагранжа продольного движения молекулы

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

после чего вводим новые координаты

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad Q_s = x_1 - x_3.$$

В результате получим:

$$L = \frac{m_A \mu}{4 m_B} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4 m_B^2} Q_a^2 - \frac{k_1}{4} Q_s^2$$

( $\mu = 2m_A + m_B$  — масса молекулы). Отсюда видно, что  $Q_a$  и  $Q_s$  являются (с точностью до нормировки) нормальными координатами. Координата  $Q_a$  отвечает антисимметричному относительно середины молекулы колебанию ( $x_1 = x_3$ ; рис. 28, а) с частотой

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}.$$

Координата  $Q_s$  соответствует симметричному ( $x_1 = -x_3$ ; рис. 28, б) колебанию с частотой

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

<sup>1)</sup> Расчеты колебаний более сложных молекул можно найти в книгах: М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов, Колебания молекул, Гостехиздат, 1949; Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, ИЛ, 1949.

Поперечные смещения атомов  $y_1, y_2, y_3$  в силу (24.1) и (24.2) связаны соотношениями

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, \quad y_1 = y_3$$

(симметричное колебание изгиба; рис. 28, в). Потенциальную энергию изгиба молекулы пишем в виде  $k_2 l^2 \delta^2 / 2$ , где  $\delta$  — отклонение угла  $ABA$  от значения  $\pi$ ; оно выражается через смещения согласно

$$\delta = \frac{1}{l} [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)].$$

Выражая все смещения  $y_1, y_2, y_3$  через  $\delta$ , получим функцию Лагранжа поперечного колебания в виде

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_A}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2 = \\ &= \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2, \end{aligned}$$

откуда частота

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}}.$$

2. То же для молекулы  $ABA$  треугольной формы (рис. 29).

Решение. В силу (24.1), (24.2) составляющие смещений и атомов по направлениям  $X$  и  $Y$  (рис. 29) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 &= 0, \\ m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 &= 0, \\ \sin \alpha (y_1 - y_3) - \cos \alpha (x_1 + x_3) &= 0. \end{aligned}$$

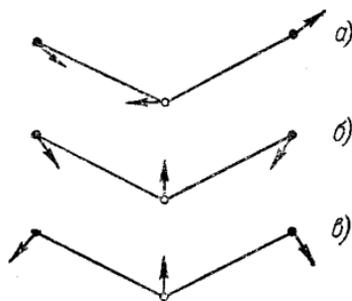
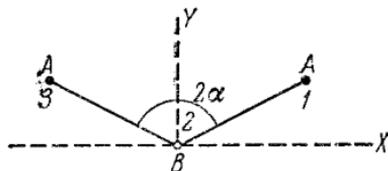


Рис. 29.

Изменения  $\delta l_1$  и  $\delta l_2$  расстояний  $A-B$  и  $B-A$  получаются путем проектирования векторов  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$  на направления линий  $AB$  и  $BA$ :

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= (x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha, \\ \delta l_2 &= -(x_3 - x_2) \sin \alpha + (y_3 - y_2) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Изменение же угла  $ABA$  получается проектированием тех же векторов на направления, перпендикулярное к отрезкам  $AB$  и  $BA$ :

$$\delta = \frac{1}{l} [(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha] + \frac{1}{l} [-(x_3 - x_2) \cos \alpha - (y_3 - y_2) \sin \alpha].$$

Функция Лагранжа молекулы

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{k_1}{2} (\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2.$$

Вводим новые координаты

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

Компоненты векторов  $u$  выражаются через них согласно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (Q_a + q_{s1}), & x_3 &= \frac{1}{2} (Q_a - q_{s1}), & x_2 &= -\frac{m_A}{m_B} Q_a, \\ y_1 &= \frac{1}{2} (q_{s2} + Q_a \operatorname{ctg} \alpha), & y_3 &= \frac{1}{2} (q_{s2} - Q_a \operatorname{ctg} \alpha), & y_2 &= -\frac{m_A}{m_B} q_{s2}, \end{aligned}$$

а для функции Лагранжа получим после вычисления:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_A}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} q_{s1}^2 + \frac{m_A \mu}{4m_B} q_{s2}^2 - \\ &\quad - Q_a^2 \frac{k_1}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) - \\ &\quad - \frac{q_{s1}^2}{4} (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) - q_{s2}^2 \frac{\mu^2}{4m_B^2} (k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) + \\ &\quad + q_{s1} q_{s2} \frac{\mu}{2m_B} (2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что координата  $Q_a$  отвечает нормальному колебанию с частотой

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right),$$

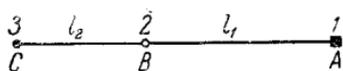


Рис. 30.

антисимметричному относительно оси  $Y$  ( $x_1 = x_3$ ,  $y_1 = -y_3$ ; рис. 29, а).

Координаты же  $q_{s1}$ ,  $q_{s2}$  совместно соответствуют двум колебаниям (симметричным относительно оси  $Y$ :  $x_1 = -x_3$ ,  $y_1 = y_3$ ; рис. 29, б и в), частоты которых  $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  определяются как корни квадратного (по  $\omega^2$ ) характеристического уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0.$$

При  $2\alpha = \pi$  все эти частоты совпадают с найденными в задаче 1.

3. То же для линейной несимметричной молекулы  $ABC$  (рис. 30).

Решение. Продольные ( $x$ ) и поперечные ( $y$ ) смещения атомов связаны соотношениями

$$\begin{aligned} m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 &= 0, & m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 &= 0, \\ m_A l_1 y_1 &= m_C l_2 y_3. \end{aligned}$$

Потенциальную энергию растяжения и изгиба пишем в виде

$$\frac{k_1}{2} (\delta l_1)^2 + \frac{k_1}{2} (\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

( $2l = l_1 + l_2$ ). Вычисления, аналогичные произведенным в задаче 1, приводят к значению

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left( \frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

для частот поперечного колебания и к квадратному (по  $\omega^2$ ) уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k_1 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k'_1 \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k'_1}{m_A m_B m_C} = 0$$

для частот  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{12}$  двух продольных колебаний.

## § 25. Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т. е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.

Существует, однако, определенная категория случаев, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем введения в них определенных дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует *сила трения*, зависящая (для заданной однородной среды) только от его скорости.

Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы трения, и первый исчезающий член пропорционален скорости. Таким образом, обобщенную силу трения  $f_{\text{тр}}$ , действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой  $x$ , можно написать в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x},$$

где  $\alpha$  — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую сторону уравнения движения, получим (ср. (21,4)):

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (25,1)$$

Разделим его на  $m$  и введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \quad (25,2)$$

$\omega_0$  есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина  $\lambda$  называется *коэффициентом затухания*<sup>1)</sup>.

Таким образом, имеем уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (25,3)$$

Следуя общим правилам решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем  $x = e^{rt}$  и находим для  $r$  характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Общее решение уравнения (25,3) есть

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Здесь следует различать два случая.

Если  $\lambda < \omega_0$ , то мы имеем два комплексно сопряженных значения  $r$ . Общее решение уравнения движения может быть представлено в этом случае, как

$$x = \text{Re} \left\{ A \exp \left( -\lambda t + i t \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \right) \right\},$$

где  $A$  — произвольная комплексная постоянная. Иначе можно написать:

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (25,4)$$

где  $a$  и  $\alpha$  — вещественные постоянные. Выражаемое этими формулами движение представляет собой так называемые *затухающие колебания*. Его можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Скорость убывания амплитуды определяется показателем  $\lambda$ , а «частота»  $\omega$  колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения; при  $\lambda \ll \omega_0$  разница между  $\omega$  и  $\omega_0$  — второго порядка малости. Уменьшение частоты при трении следовало ожидать заранее, поскольку трение вообще задерживает движение.

Если  $\lambda \ll \omega_0$ , то за время одного периода  $2\pi/\omega$  амплитуда затухающего колебания почти не меняется. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период) значения квадратов координаты и скорости, пренебрегая при усреднении изменением множителя  $e^{-\lambda t}$ . Эти средние квадраты, очевидно, пропорциональны  $e^{-2\lambda t}$ . Поэтому и энергия системы в среднем убывает по закону

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (25,5)$$

где  $E_0$  — начальное значение энергии.

<sup>1)</sup> Безразмерное произведение  $\lambda T$  (где  $T = 2\pi/\omega$  — период) называют логарифмическим декрементом затухания.

Пусть теперь  $\lambda > \omega_0$ . Тогда оба значения  $r$  вещественны, причем оба отрицательны. Общий вид решения

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) t}. \quad (25,6)$$

Мы видим, что в этом случае, возникающем при достаточно большом трении, движение состоит в убывании  $|x|$ , т. е. в асимптотическом (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближении к положению равновесия. Этот тип движения называют *апериодическим затуханием*.

Наконец, в особом случае, когда  $\lambda = \omega_0$ , характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень  $r = -\lambda$ . Как известно, общее решение дифференциального уравнения имеет в этом случае вид

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}. \quad (25,7)$$

Это — особый случай апериодического затухания. Оно тоже не имеет колебательного характера.

Для системы со многими степенями свободы обобщенные силы трения, соответствующие координатам  $x_i$ , являются линейными функциями скоростей вида

$$f_{i\text{тр}} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25,8)$$

Из чисто механических соображений нельзя сделать никаких заключений о свойствах симметрии коэффициентов  $\alpha_{ik}$  по индексам  $i$  и  $k$ . Методами же статистической физики можно показать<sup>1)</sup>, что всегда

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (25,9)$$

Поэтому выражения (25,8) могут быть написаны в виде производных

$$f_{i\text{тр}} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (25,10)$$

от квадратичной формы

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i, k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (25,11)$$

называемой *диссипативной функцией*.

Силы (25,10) должны быть добавлены к правой стороне уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (25,12)$$

Диссипативная функция имеет сама по себе важный физический смысл — ею определяется интенсивность диссипации энергии в

<sup>1)</sup> См. «Статистическая физика», § 123.

системе. В этом легко убедиться, вычислив производную по времени от механической энергии системы. Имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку  $F$  — квадратичная функция скоростей, то в силу теоремы Эйлера об однородных функциях сумма в правой стороне равенства равна  $2F$ . Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \quad (25,13)$$

т. е. скорость изменения энергии системы дается удвоенной диссипативной функцией. Так как диссипативные процессы приводят к уменьшению энергии, то должно быть всегда  $F > 0$ , т. е. квадратичная форма (25,11) существенно положительна.

Уравнения малых колебаний при наличии трения получаются добавлением сил (25,8) в правую сторону уравнений (23,5):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25,14)$$

Положив в этих уравнениях

$$x_k = A_k e^{rt},$$

получим по сокращении на  $e^{rt}$  систему линейных алгебраических уравнений для постоянных  $A_k$

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0. \quad (25,15)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, найдем характеристическое уравнение, определяющее значения  $r$ :

$$|m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}| = 0. \quad (25,16)$$

Это — уравнение степени  $2s$  относительно  $r$ . Поскольку все его коэффициенты вещественны, то его корни либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. При этом вещественные корни непременно отрицательны, а комплексные имеют отрицательную вещественную часть. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем как наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии.

## § 26. Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в § 22 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой стороне уравнения (25,1) внешнюю силу  $f \cos \gamma t$  и разделив на  $m$ , получим уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (26,1)$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего пишем в правой части  $e^{i\gamma t}$  вместо  $\cos \gamma t$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}.$$

Частный интеграл ищем в виде  $x = Be^{i\gamma t}$  и находим для  $B$ :

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (26,2)$$

Представив  $B$  в виде  $be^{i\delta}$ , имеем для  $b$  и  $\delta$ :

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (26,3)$$

Наконец, отделив вещественную часть от выражения  $Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$ , получим частный интеграл уравнения (26,1), а прибавив к нему общее решение уравнения без правой части (которое мы напишем для определенности для случая  $\omega_0 > \lambda$ ), получим окончательно:

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26,4)$$

Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, так что через достаточно большой промежуток времени остается только второй член:

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26,5)$$

Выражение (26,3) для амплитуды  $b$  вынужденного колебания хотя и возрастает при приближении частоты  $\gamma$  к  $\omega_0$ , но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы  $f$  амплитуда колебания максимальна при частоте  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ; при  $\lambda \ll \omega_0$  это значение отличается от  $\omega_0$  лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим область вблизи резонанса. Положим  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина; будем также считать, что  $\lambda \ll \omega_0$ . Тогда в (26,2) можно приближенно заменить:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

так что

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \quad (26,6)$$

или

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (26,7)$$

Отметим характерную особенность хода изменения разности фаз  $\delta$  между колебанием и вынуждающей силой при изменении частоты последней. Эта разность всегда отрицательна, т. е. колебание «запаздывает» относительно внешней силы. Вдали от резонанса, со стороны  $\gamma < \omega_0$ ,  $\delta$  стремится к нулю, а со стороны  $\gamma > \omega_0$  — к значению  $-\pi$ . Изменение  $\delta$  от нуля до  $-\pi$  происходит в узкой (ширины  $\sim \lambda$ ) области частот, близких к  $\omega_0$ ; через значение  $-\frac{\pi}{2}$  разность фаз проходит при  $\gamma = \omega_0$ . Отметим в этой связи, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденного колебания на величину  $\pi$  происходит скачком при  $\gamma = \omega_0$  (второй член в (22,4) меняет знак); учет трения «размазывает» этот скачок.

При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания (26,5), ее энергия остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая диссипируется благодаря наличию трения. Обозначим посредством  $I(\gamma)$  количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, как функцию частоты внешней силы. Согласно (25,13) имеем:

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

где  $\bar{F}$  — среднее (по периоду колебания) значение диссипативной функции. Для одномерного движения выражение (25,11) диссипативной функции сводится к  $F = a\dot{x}^2/2 = \lambda m \dot{x}^2$ . Подставив сюда (26,5), получим:

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

Среднее по времени значение квадрата синуса равно  $\frac{1}{2}$ , поэтому

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (26,8)$$

Вблизи резонанса, подставляя амплитуду колебания из (26,7), имеем:

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \quad (26,9)$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*. Полушириной резонансной кривой (рис. 31) называют

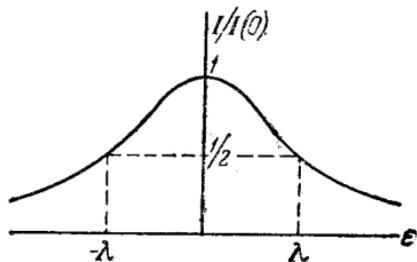


Рис. 31.

значение  $|\varepsilon|$ , при котором величина  $I(\varepsilon)$  уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при  $\varepsilon = 0$ . Из формулы (26,9) видно, что в данном случае эта ширина совпадает с показателем затухания  $\lambda$ . Высота же максимума

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

обратно пропорциональна  $\lambda$ . Таким образом, при уменьшении показателя затухания резонансная кривая становится уже и выше, т. е. ее максимум становится более острым. Площадь же под резонансной кривой остается при этом неизменной.

Последняя дается интегралом

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Поскольку  $I(\varepsilon)$  быстро убывает при увеличении  $|\varepsilon|$ , так что область больших  $|\varepsilon|$  все равно не существенна, можно при интегрировании писать  $I(\varepsilon)$  в виде (26,9), а нижний предел заменить на  $-\infty$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (26,10)$$

### Задача

Определить вынужденные колебания при наличии трения под действием внешней силы  $f = f_0 e^{i\alpha t} \cos \gamma t$ .

Решение. Решаем уравнение движения в комплексном виде

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t},$$

после чего отделяем вещественную часть решения. В результате получаем вынужденное колебание в виде

$$x = b e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

где

$$b = \frac{f_0}{mV(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2},$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

## § 27. Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем ее параметров<sup>1)</sup>.

Параметрами одномерной системы являются коэффициенты  $m$  и  $k$  в функции Лагранжа (21,3); если они зависят от времени, то уравнение движения гласит:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \quad (27,1)$$

<sup>1)</sup> Простым примером такого рода является маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении (см. задачу 3).

Путем введения вместо  $t$  новой независимой переменной  $\tau$  согласно  $d\tau = dt/m(t)$  это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Поэтому фактически, без всякого ограничения общности, достаточно рассмотреть уравнение движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0, \quad (27,2)$$

которое получилось бы из (27,1) при  $m = \text{const.}$

Вид функции  $\omega(t)$  задается условиями задачи; предположим, что эта функция периодическая с некоторой частотой  $\gamma$  (и периодом  $T = 2\pi/\gamma$ ). Это значит, что

$$\omega(t+T) = \omega(t),$$

а потому и все уравнение (27,2) инвариантно по отношению к преобразованию  $t \rightarrow t+T$ . Отсюда следует, что если  $x(t)$  есть решение уравнения, то и функция  $x(t+T)$  тоже есть решение. Другими словами, если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два независимых интеграла уравнения (27,2), то при замене  $t \rightarrow t+T$  они преобразуются линейным образом друг через друга. При этом можно<sup>1)</sup> выбрать  $x_1$  и  $x_2$  таким образом, чтобы их изменение при замене  $t$  на  $t+T$  сводилось просто к умножению на постоянный множитель

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t).$$

Наиболее общий вид функций, обладающих таким свойством, есть

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (27,3)$$

где  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$  — чисто периодические функции времени (с периодом  $T$ ).

Постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в этих функциях должны быть связаны друг с другом определенным соотношением. Действительно, умножив уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

соответственно на  $x_2$  и  $x_1$  и вычтя их почленно одно из другого, получим:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

или

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const.} \quad (27,4)$$

Но при любых функциях  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вида (27,3) выражение в левой стороне этого равенства умножается на  $\mu_1 \mu_2$  при изменении аргу-

<sup>1)</sup> Если только постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  не совпадают.

мента  $t$  на  $t + T$ . Поэтому ясно, что соблюдение равенства (27,4) во всяком случае требует, чтобы было

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (27,5)$$

Дальнейшие заключения о постоянных  $\mu_1, \mu_2$  можно сделать, исходя из факта вещественности коэффициентов уравнения (27,2). Если  $x(t)$  есть какой-либо интеграл такого уравнения, то и комплексно сопряженная функция  $x^*(t)$  должна удовлетворять тому же уравнению. Отсюда следует, что пара постоянных  $\mu_1, \mu_2$  должна совпадать с парой  $\mu_1^*, \mu_2^*$ , т. е. должно быть либо  $\mu_1 = \mu_2^*$ , либо  $\mu_1$  и  $\mu_2$  вещественны. В первом случае, учитывая (27,5), имеем  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , т. е.  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ ; постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  по модулю равны единице.

Во втором же случае два независимых интеграла уравнения (27,2) имеют вид

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t) \quad (27,6)$$

с отличным от единицы положительным или отрицательным вещественным числом  $\mu$ . Одна из этих функций (первая или вторая при  $|\mu| > 1$  или  $|\mu| < 1$ ) экспоненциально возрастает со временем. Это значит, что состояние покоя системы (в положении равновесия  $x = 0$ ) будет неустойчивым: достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение  $x$  стало быстро возрастать со временем. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Обратим внимание на то, что при строго равных нулю начальных значениях  $x$  и  $\dot{x}$  они оставались бы равными нулю и в дальнейшем в отличие от обычного резонанса (§ 22), в котором возрастание смещения со временем (пропорциональное  $t$ ) происходит и от равного нулю начального значения.

Выясним условия возникновения параметрического резонанса в важном случае, когда функция  $\omega(t)$  мало отличается от некоторой постоянной величины  $\omega_0$  и является простой периодической функцией

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (27,7)$$

где постоянная  $h \ll 1$  (мы будем считать  $h$  положительной, чего всегда можно добиться надлежащим выбором начала отсчета времени). Как мы увидим ниже, наиболее интенсивным образом параметрический резонанс возникает, если частота функции  $\omega(t)$  близка к удвоенной частоте  $\omega_0$ . Поэтому положим:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon \ll \omega_0$ .

Решение уравнения движения<sup>1)</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0 \quad (27,8)$$

<sup>1)</sup> Уравнение такого вида (с произвольными  $\gamma$  и  $h$ ) называется в математической физике уравнением Матьё.

будем искать в виде

$$x = a(t) \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + b(t) \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t, \quad (27,9)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно (по сравнению с множителями  $\cos$  и  $\sin$ ) меняющиеся функции времени. Такой вид решения, разумеется, не является точным. В действительности функция  $x(t)$  содержит также члены с частотами, отличающимися от  $\omega_0 + \varepsilon/2$  на целое кратное от  $(2\omega_0 + \varepsilon)$ ; эти члены, однако, высшего порядка малости по  $\dot{h}$ , и в первом приближении ими можно пренебречь (см. задачу 1).

Подставим (27,9) в (27,8) и произведем вычисления, сохраняя лишь члены первого порядка по  $\varepsilon$ . При этом предположим, что  $\dot{a} \sim \varepsilon a$ ,  $\dot{b} \sim \varepsilon b$  (правильность этого предположения в условиях резонанса подтвердится результатом). Произведения тригонометрических множителей следует разложить в суммы

$$\begin{aligned} \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \cdot \cos (2\omega_0 + \varepsilon) t &= \\ &= \frac{1}{2} \cos \left( 3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) t + \frac{1}{2} \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \end{aligned}$$

и т. п. и в соответствии со сказанным выше опустить члены с частотами  $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} - \left( 2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} b \right) \omega_0 \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ + \left( 2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} a \right) \omega_0 \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t = 0. \end{aligned}$$

Выполнение этого равенства требует одновременного обращения в нуль коэффициентов при каждом из множителей  $\sin$  и  $\cos$ . Отсюда получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений для функций  $a(t)$  и  $b(t)$ . Следуя общим правилам, ищем решение, пропорциональное  $e^{st}$ . Тогда

$$\begin{aligned} sa + \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) b &= 0, \\ \frac{1}{2} \left( \varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) a - sb &= 0, \end{aligned}$$

и условие совместности этих двух алгебраических уравнений дает:

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (27,10)$$

Условие возникновения параметрического резонанса заключается в вещественности  $s$  (т. е.  $s^2 > 0$ )<sup>1)</sup>. Таким образом, он имеет место в интервале

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \quad (27,11)$$

<sup>1)</sup> Постоянная  $\mu$  в (27,6) связана с  $s$  посредством  $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$  (при замене  $t$  на  $t + 2\pi/\omega_0 \cos$  и  $\sin$  в (27,9) меняют знак).

вокруг частоты  $2\omega_0^1$ ). Ширина этого интервала пропорциональна  $h$ , и такого же порядка осуществляющиеся в нем значения показателя усиления колебаний  $s$ .

Параметрический резонанс имеет место также при частотах  $\gamma$  изменения параметра системы, близких к значениям вида  $2\omega_0/n$ , где  $n$  — любое целое число. Однако ширина резонансных областей (областей неустойчивости) с увеличением  $n$  быстро уменьшается — как  $h^2$  (см. задачу 2). Так же уменьшаются и значения показателя усиления колебаний в них.

Явление параметрического резонанса существует и при наличии слабого трения в системе, но область неустойчивости при этом несколько сужается. Как мы видели в § 25, трение приводит к затуханию амплитуды колебаний по закону  $e^{-\lambda t}$ . Поэтому усиление колебаний при параметрическом резонансе происходит, как  $e^{(s-\lambda)t}$  (с положительным  $s$ , даваемым решением задачи без трения), а граница области неустойчивости определяется равенством  $s-\lambda=0$ . Так, используя  $s$  из (27,10), получим для резонансной области вместо (27,11) неравенства

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (27,12)$$

Обратим внимание на то, что при этом резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малой амплитуде  $h$ , а лишь начиная с определенного «порога»  $h_k$ , равного в случае (27,12)

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

Можно показать, что для резонансов вблизи частот  $2\omega_0/n$  величина порога  $h_k$  пропорциональна  $\lambda^{1/n}$ , т. е. возрастает с увеличением  $n$ .

### Задачи

1. Определить границы области неустойчивости при резонансе вблизи  $\gamma = 2\omega_0$  с точностью до величин порядка  $h^2$ .

Решение. Ищем решение уравнения (27,8) в виде

$$x = a_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \\ + a_1 \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_1 \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t,$$

учитывая в нем (по сравнению с (27,9)) также и члены следующего порядка по  $h$ . Интересуясь лишь границами области неустойчивости, предполагаем коэффициенты  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  постоянными (в соответствии с замечанием,

<sup>1)</sup> Если интересоваться лишь границами области резонанса (не интересуясь выражением для  $s$  внутри нее), то можно упростить вычисления, заметив, что на этих границах  $s=0$ , т. е. коэффициенты  $a$  и  $b$  в (27,9) постоянны; при этом мы сразу получим значения  $\varepsilon = \pm h\omega_0/2$ , отвечающие границам области (27,11).

сделанным в сноске на стр. 107). При подстановке в уравнение (27,8) произведения тригонометрических функций разлагаем в суммы, опуская при этом члены с частотами  $5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , которые нужны были бы лишь в еще более высоком приближении. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left[ -a_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 \right] \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ & + \left[ -b_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 - 8\omega_0^2 a_1 \right] \cos 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 - 8\omega_0^2 b_1 \right] \sin 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t = 0. \end{aligned}$$

В членах с частотами  $\omega_0 + \varepsilon/2$  сохранены величины первого и второго порядка малости, а в членах с частотами  $3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  — члены первого порядка. Каждое из выражений в квадратных скобках должно обращаться в нуль в отдельности. Из двух последних имеем:

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{16} b_0,$$

после чего из двух первых находим:

$$\omega_0 \varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2\omega_0^2}{32} = 0.$$

Решая это уравнение с точностью до членов порядка  $h^2$ , получим искомые граничные значения  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0.$$

2. Определить границы области неустойчивости при резонансе вблизи  $\gamma = \omega_0$ .

Решение. Написав  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , получаем уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0.$$

Имея в виду, что искомые граничные значения  $\varepsilon \sim h^2$ , ищем решение в виде

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + c_1,$$

учитывая в нем сразу члены двух первых порядков. Для определения границ неустойчивости снова предполагаем коэффициенты постоянными и получаем:

$$\begin{aligned} & \left[ -2\omega_0 \varepsilon a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \cos(\omega_0 + \varepsilon)t + \\ & + \left[ -2\omega_0 \varepsilon b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin(\omega_0 + \varepsilon)t + \\ & + \left[ -3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \\ & + \left[ -3\omega_0^2 b_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 \right] \sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[ c_1 \omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \quad c_1 = -\frac{h}{2} a_0,$$

и затем две границы области неустойчивости:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \quad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

3. Найти условия параметрического резонанса для малых колебаний плоского маятника с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса.

Решение. По найденной в задаче 3, в) § 5 функции Лагранжа найдем для малых ( $\varphi \ll 1$ ) колебаний уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left( 1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 t + \varepsilon) t \right) \varphi = 0$$

(где  $\omega_0^2 = g/l$ ). Отсюда видно, что роль введенного в тексте параметра  $h$  играет отношение  $4a/l$ . Условие (27,11), например, принимает вид

$$|\varepsilon| < \frac{2a \sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

## § 28. Ангармонические колебания

Вся изложенная выше теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергий системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о *линейных* колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемой *ангармоничности* или *нелинейности* колебаний) приводит к появлению некоторых хотя и слабых, но качественно новых особенностей движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам  $x_i$ , в кинетической же энергии — члены, содержащие произведения скоростей и координат вида  $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ ; это отличие от прежнего выражения (23,3) связано с оставлением членов первого порядка по  $x$  в разложении функций  $a_{ik}(q)$ . Таким образом, функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \quad (28,1)$$

где  $n_{ikl}$ ,  $l_{ikl}$  — новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат  $x_i$  перейти к нормальным координатам (линейного приближения)  $Q_\alpha$ , то в силу линейности этого

преобразования третья и четвертая суммы в (28,1) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат  $x_i$  и скоростей  $\dot{x}_i$  будут стоять  $Q_\alpha$  и  $\dot{Q}_\alpha$ . Обозначив коэффициенты в этих суммах через  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  и  $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ , получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (28,2)$$

Мы не станем выписывать полностью следующих из этой лагранжевой функции уравнений движения. Существенно, что они имеют вид

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28,3)$$

где  $f_\alpha$  — однородные функции второго порядка от координат  $Q$  и их производных по времени.

Применяя метод последовательных приближений, ищем решение этих уравнений в виде

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (28,4)$$

где  $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ , а функции  $Q_\alpha^{(1)}$  удовлетворяют «невозмущенным» уравнениям

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

т. е. представляют собой обычные гармонические колебания

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (28,5)$$

Сохраняя в следующем приближении в правой стороне уравнений (28,3) лишь члены второго порядка малости, получим для величин  $Q_\alpha^{(2)}$  уравнения

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28,6)$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (28,5). В результате мы получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых можно преобразовать к суммам простых периодических функций. Так, например,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, в правых частях уравнений (28,6) находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Решение уравнений следует искать в виде, содержащем такие же периодические множители, и мы приходим к выводу, что во втором приближении на нормальные коле-

бания системы с частотами  $\omega_x$  накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_x \pm \omega_3 \quad (28,7)$$

(в том числе удвоенные частоты  $2\omega_x$  и частота 0, соответствующая постоянному смещению). Эти частоты называются *комбинационными*. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям  $a_2 a_3$  (или квадратам  $a_\alpha^2$ ) соответствующих нормальных колебаний.

В следующих приближениях при учете членов более высокого порядка в разложении функции Лагранжа возникают комбинационные колебания с частотами, являющимися суммами и разностями большего числа частот  $\omega_\alpha$ . Кроме того, однако, возникает еще и новое явление.

Дело в том, что уже в третьем приближении среди комбинационных частот появляются частоты, совпадающие с исходными  $\omega_x$  ( $\omega_x + \omega_3 - \omega_3$ ). При применении описанного выше метода в правой части уравнений движения будут находиться, следовательно, резонансные члены, которые приведут к возникновению в решении членов с возрастающей со временем амплитудой. Между тем, физически очевидно, что в замкнутой системе в отсутствие внешнего источника энергии не может происходить самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний.

В действительности в высших приближениях происходит изменение основных частот  $\omega_x$  по сравнению с их «невозмущенными» значениями  $\omega_\alpha^{(0)}$ , фигурирующими в квадратичном выражении потенциальной энергии. Появление же возрастающих членов в решении связано с разложением типа

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos \omega_\alpha^{(0)}t - t \Delta\omega_\alpha \sin \omega_\alpha^{(0)}t,$$

явно незаконным при достаточно больших  $t$ .

Поэтому при переходе к следующим приближениям метод последовательных приближений должен быть видоизменен так, чтобы фигурирующие в решении периодические множители с самого начала содержали точные, а не приближенные значения частот. Изменения же частот сами определяются в результате решения уравнений как раз из условия отсутствия резонансных членов.

Продemonстрируем этот метод на ангармонических колебаниях с одной степенью свободы, написав функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \quad (28,8)$$

Соответствующее уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28,9)$$

Мы будем искать его решение в виде ряда последовательных приближений

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

причем

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (28,10)$$

с точным значением  $\omega$ , которое само будем затем искать в виде ряда  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  (начальную фазу в  $x^{(1)}$  можно всегда обратить в нуль надлежащим выбором начала отсчета времени). При этом, однако, уравнение движения в виде (28,9) не вполне удобно, так как при подстановке в него (28,10) левая сторона равенства не обратится строго в нуль. Поэтому перепишем его предварительно в эквивалентном виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \quad (28,11)$$

Положив здесь  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  и опустив члены выше второго порядка малости, получим для  $x^{(2)}$  уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t = \\ &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t. \end{aligned}$$

Условие отсутствия резонансного члена в правой стороне равенства дает просто  $\omega^{(1)} = 0$  в соответствии с изложенным в начале параграфа методом нахождения второго приближения. После этого, решая обычным способом неоднородное линейное уравнение, получим:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (28,12)$$

Далее, положив в (28,11)  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$ , получим уравнение для  $x^{(3)}$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

или, подставив в правую часть выражения (28,10) и (28,12) после простого преобразования:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} &= -a^3 \left[ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + \\ &+ a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2 \alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициент при резонансном множителе  $\cos \omega t$ , найдем поправку к основной частоте, пропорциональную квадрату амплитуды колебания:

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \quad (28,13)$$

Комбинационное же колебание третьего порядка

$$x^{(3)} = \frac{a^2}{16\omega_0^2} \left( \frac{a^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t. \quad (28,14)$$

## § 29. Резонанс в нелинейных колебаниях

Учет ангармонических членов при вынужденных колебаниях системы приводит к появлению существенно новых особенностей в резонансных явлениях.

Добавив в правой стороне уравнения (28,9) внешнюю периодическую (с частотой  $\gamma$ ) силу, получим:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \quad (29,1)$$

здесь написана также сила трения с показателем затухания  $\lambda$  (предполагаемым ниже малым). Строго говоря, при учете нелинейных членов в уравнении свободных колебаний должны учитываться также члены высших порядков в амплитуде вынуждающей силы, соответствующие возможной зависимости ее от смещения  $x$ . Мы не пишем этих членов лишь с целью упрощения формул; они не меняют качественной картины явлений.

Пусть

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(с малым  $\varepsilon$ ), т. е. мы находимся вблизи обычного резонанса. Для выяснения характера возникающего движения можно обойтись без непосредственного исследования уравнения (29,1), если воспользоваться следующими соображениями.

В линейном приближении зависимость амплитуды  $b$  вынужденного колебания от амплитуды  $f$  и частоты  $\gamma$  внешней силы дается вблизи резонанса формулой (26,7), которую напомним в виде

$$b^2 (\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (29,2)$$

Нелинейность колебаний приводит к появлению зависимости их собственной частоты от амплитуды; напомним ее в виде

$$\omega_0 + \kappa b^2, \quad (29,3)$$

где постоянная  $\kappa$  выражается определенным образом через коэффициент ангармоничности (см. (28,13)). Соответственно этому заменяем в формуле (29,2) (точнее в малой разности  $\gamma - \omega_0$ )  $\omega_0$  на  $\omega_0 + \kappa b^2$ .

Сохранив обозначение  $\varepsilon = \gamma - \omega_0$ , получим в результате уравнение

$$b^2 [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29,4)$$

или

$$\varepsilon = \kappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

Уравнение (29,4), кубическое по отношению к  $b^2$ , и его вещественные корни определяют амплитуду вынужденных колебаний.

Рассмотрим зависимость этой амплитуды от частоты внешней силы при заданной амплитуде силы  $f$ .

При достаточно малых значениях  $f$  амплитуда  $b$  тоже мала, так что можно пренебречь в (29,4) степенями  $b$  выше второй, и мы возвращаемся к зависимости  $b(\varepsilon)$  (29,2), изображающейся симметричной кривой с максимумом в точке  $\varepsilon=0$  (рис. 32, а). По мере увеличения  $f$  кривая деформируется, сохраняя сначала свой характер — с одним максимумом (рис. 32, б); последний смещается (при  $\kappa > 0$ ) в сторону положительных  $\varepsilon$ . Из трех корней уравнения (29,4) при этом вещественен лишь один.

Однако, начиная с определенного значения  $f = f_k$  (которое мы определим ниже), характер кривой меняется. При каждом значении  $f > f_k$  существует определенная область частот, в которой уравнение (29,4) имеет три вещественных корня; ей отвечает участок  $BCDE$  кривой на рис. 32, в.

Границы этой области определяются условием  $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$  в точках  $D$  и  $C$ . Продифференцировав уравнение (29,4) по  $\varepsilon$ , получим:

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4}.$$

Поэтому положение точек  $D$  и  $C$  определяется совместным решением уравнений

$$\varepsilon^2 - 4\kappa b^2\varepsilon + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (29,5)$$

и (29,4); соответствующие значения  $\varepsilon$  оба положительны. Наибольшее значение амплитуды достигается в точке, где  $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$ . При этом  $\varepsilon = \kappa b^2$ , и из (29,4) имеем:

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}; \quad (29,6)$$

это значение совпадает с максимумом, даваемым зависимостью (29,2).

Можно показать (на чем мы не будем здесь останавливаться<sup>1)</sup>), что из трех вещественных корней уравнения (29,4) средний (т. е.

<sup>1)</sup> Доказательство можно найти, например, в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний», Физматгиз, 1958.

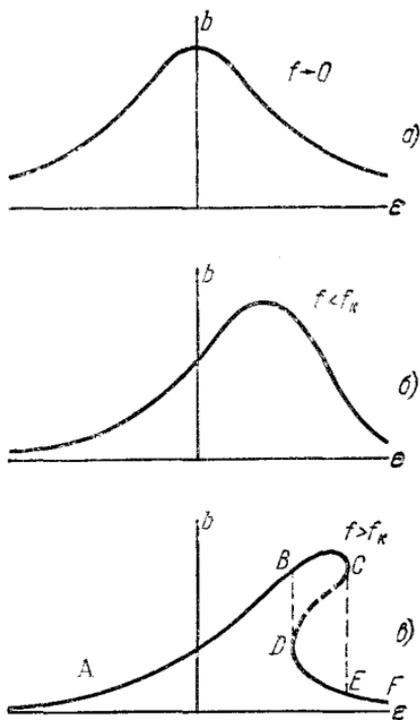


Рис. 32.

участок  $CD$  кривой, изображенный на рис. 32, в пунктиром) соответствует неустойчивым колебаниям системы: любое сколь угодно слабое воздействие на систему, находящуюся в таком состоянии, привело бы к переходу к колебательному режиму, отвечающему большему или меньшему корню (т. е. участкам  $BC$  или  $DE$ ). Таким образом, реальным колебаниям системы соответствуют лишь ветви  $ABC$  и  $DEF$ . Замечательной особенностью является при этом наличие области частот, допускающих две различные амплитуды колебаний. Так, при постепенном увеличении частоты внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет возрастать, следуя кривой  $ABC$ . В точке  $C$  произойдет «срыв» амплитуды, которая скачком упадет до значения, отвечающего точке  $E$ , и затем (при дальнейшем увеличении частоты) будет меняться вдоль кривой  $EF$ . Если теперь вновь уменьшать частоту, то амплитуда вынужденных колебаний будет меняться вдоль кривой  $FD$ , в точке  $D$  скачком возрастает до  $B$  и затем будет уменьшаться вдоль  $BA$ .

Для вычисления значения  $f_k$  замечаем, что это есть то значение  $f$ , при котором оба корня квадратного (по  $b^2$ ) уравнения (29,5) совпадают; при  $f=f_k$  весь участок  $CD$  сводится к одной точке перегиба. Приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения (29,5), получим  $\epsilon^2 = 3\lambda^2$ ; соответствующий корень уравнения:  $\kappa b^2 = 2\epsilon/3$ . Подставляя эти значения  $b$  и  $\epsilon$  в (29,4), найдем:

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|}. \quad (29,7)$$

Наряду с изменением характера резонансных явлений при частотах  $\gamma \approx \omega_0$  нелинейность колебаний приводит также к появлению новых резонансов, в которых колебания с частотой, близкой к  $\omega_0$ , возбуждаются внешней силой с частотой, существенно отличающейся от  $\omega_0$ .

Пусть частота внешней силы  $\gamma \approx \omega_0/2$ , т. е.

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \epsilon.$$

В первом, линейном, приближении она возбуждает в системе колебания с той же частотой и с амплитудой, пропорциональной амплитуде силы:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \epsilon\right)t$$

(согласно формуле (22,4)). Но при учете нелинейных членов, во втором приближении, эти колебания приведут к появлению в правой стороне уравнения движения (29,1) члена с частотой  $2\gamma \approx \omega_0$ . Именно, подставив  $x^{(1)}$  в уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

введя косинус удвоенного угла и сохраняя в правой стороне лишь резонансный член, получим:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t. \quad (29,8)$$

Это уравнение отличается от уравнения (29,1) лишь тем, что вместо амплитуды силы  $f$  в нем стоит выражение, пропорциональное квадрату  $f^2$ . Это значит, что возникает резонанс такого же характера, как и рассмотренный выше резонанс на частотах  $\gamma \approx \omega_0$ , но с меньшей интенсивностью. Зависимость  $b(\varepsilon)$  получается заменой  $f$  на  $-\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}$  (и  $\varepsilon$  на  $2\varepsilon$ ) в уравнении (29,4):

$$b^2 [(2\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}}. \quad (29,9)$$

Пусть теперь частота внешней силы

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

В первом приближении имеем:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

При подстановке  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  в уравнение (29,1) мы не получим членов, имеющих характер резонансной внешней силы, как это было в предыдущем случае. Возникнет, однако, резонанс параметрического типа от члена третьего порядка, пропорционального произведению  $x^{(1)}x^{(2)}$ . Если из всех нелинейных членов сохранить лишь этот, то для  $x^{(2)}$  получим уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

или

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29,10)$$

т. е. уравнение типа (27,8) (с учетом трения), приводящее, как мы уже знаем, к неустойчивости колебаний в определенном интервале частот.

Однако для определения результирующей амплитуды колебаний это уравнение недостаточно. Установление конечной амплитуды связано с эффектами нелинейности, для учета которых в уравнении движения должны быть сохранены также нелинейные по  $x^{(2)}$  члены:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \cdot x^{(2)}. \quad (29,11)$$

Исследование этой задачи можно очень упростить, заметив следующее обстоятельство. Положим в правой стороне уравнения (29,11)

$$x^{(2)} = b \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \delta \right]$$

(где  $b$  — искомая амплитуда резонансных колебаний,  $\delta$  — несущественный для дальнейшего постоянный сдвиг фазы) и представив

произведение двух периодических множителей в виде суммы двух косинусов, мы получим здесь член

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \delta \right]$$

обычного резонансного (по отношению к собственной частоте системы  $\omega_0$ ) характера. Поэтому задача снова сводится к рассмотренной в начале параграфа задаче об обычном резонансе в нелинейной системе с тем лишь отличием, что роль амплитуды внешней силы играет теперь величина  $\alpha f b / 3m\omega_0^2$  (а вместо  $\varepsilon$  стоит  $\varepsilon/2$ ). Произведя эту замену в уравнении (29,4), получим:

$$b^2 \left[ \left( \frac{\varepsilon}{2} - \kappa b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

Решая это уравнение относительно  $b$ , найдем следующие возможные значения амплитуды:

$$b = 0, \quad (29,12)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6m\omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (29,13)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6m\omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right]. \quad (29,14)$$

На рис. 33 изображена получающаяся отсюда зависимость  $b$  от  $\varepsilon$  (для  $\kappa > 0$ ; при  $\kappa < 0$  кривые направлены в обратную сторону). Точки  $B$  и  $C$  отвечают значениям

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{3m\omega_0^3} \right)^2 - 4\lambda^2}.$$

Слева от точки  $B$  возможно лишь значение  $b = 0$ , т. е. резонанс отсутствует и колебания с частотой  $\approx \omega_0$  не возбуждаются. В интервале между  $B$  и  $C$  имеем два корня:  $b = 0$  (отрезок  $BC$  на рис. 33) и выражение (29,13) (ветвь  $BE$ ). Наконец, справа от точки  $C$  существует все три корня (29,12) — (29,14). Однако не все эти значения отвечают устойчивому колебательному режиму. Значение  $b = 0$  неустойчиво на участке  $BC^1$ ), и можно показать также, что всегда неустойчив режим,

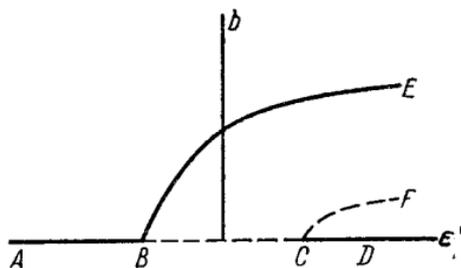


Рис. 33.

<sup>1)</sup> Этот интервал как раз соответствует области параметрического резонанса (27,12), причем из сравнения (29,10) с (27,8) имеем  $|h| = 2\alpha f / 3m\omega_0^4$ . Условие же

$$\left| \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3} \right| > 4\lambda,$$

при котором возможно существование рассматриваемого явления, отвечает неравенству  $h > h_k$ .

соответствующий корню (29, 14) (промежуточному между двумя другими). На рис. 33 неустойчивые значения  $b$  изображены пунктиром.

Проследим, например, за поведением первоначально «покоившейся»<sup>1)</sup> системы при постепенном уменьшении частоты внешней силы. До достижения точки  $C$  остается  $b=0$ , а затем происходит «срыв» этого состояния с переходом на ветвь  $EB$ . При дальнейшем уменьшении  $\varepsilon$  амплитуда колебаний уменьшается до нуля в точке  $B$ . При обратном же увеличении частоты амплитуда колебаний растет вдоль кривой  $BE$ <sup>2)</sup>.

Рассмотренные случаи резонансов являются основными из возникающих в нелинейной колебательной системе. В более высоких приближениях появляются резонансы и на других частотах. Строго говоря, резонанс должен возникать на всякой частоте  $\gamma$ , для которой  $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$  ( $n, m$  — целые числа), т. е. при всяком  $\gamma = p\omega_0/q$ , где  $p, q$  — снова целые числа. Однако с увеличением степени приближения интенсивность резонансных явлений (а также ширины областей частот, в которых они должны иметь место) столь быстро убывает, что реально могут наблюдаться лишь резонансы на частотах  $\gamma \approx p\omega_0/q$  с небольшими значениями  $p$  и  $q$ .

### Задача

Определить зависимость  $b(\varepsilon)$  для резонанса на частотах  $\gamma \approx 3\omega_0$ .  
Решение. В первом приближении

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)t.$$

Для второго приближения ( $x^{(2)}$ ) получаем из (29, 1) уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

где в правой стороне равенства написан лишь член, приводящий к рассматриваемому резонансу. Положив в нем  $x^{(2)} = b \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{3} \right) t + \delta \right]$  и выделяя из произведения трех косинусов резонансный член, получим в правой стороне уравнения выражение

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2} \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{3} \right) t - 2\delta \right].$$

<sup>1)</sup> Напомним, что мы рассматриваем здесь лишь резонансные колебания. Их отсутствие не означает поэтому буквального покоя системы, в которой будут происходить слабые вынужденные колебания с частотой  $\gamma$ .

<sup>2)</sup> Следует, однако, помнить, что все выведенные формулы справедливы лишь до тех пор, пока амплитуда  $b$  (а также  $\varepsilon$ ) остается достаточно малой. В действительности кривые  $BE$  и  $CF$  в своем дальнейшем ходе оканчиваются, соединяясь в некоторой точке; при достижении этой точки колебательный режим «срывается» и становится  $b=0$ .

Отсюда видно, что зависимость  $b$  от  $\varepsilon$  получится заменой в уравнении (29,4)  $f$  на  $3\beta b^2 f / 32\omega_0^2$  и  $\varepsilon$  на  $\varepsilon/3$ :

$$b^2 \left[ \left( \frac{\varepsilon}{3} - \kappa b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^6} b^4 \equiv A b^4.$$

Корни этого уравнения:

$$b = 0, \\ b^2 = \frac{\varepsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2}.$$

На рис. 34 изображен графически характер зависимости  $b$  от  $\varepsilon$  (при  $\kappa > 0$ ). Устойчивым режимам отвечают лишь значение  $b=0$  (ось абсцисс) и ветвь  $AB$ . Точке  $A$  соответствуют значения

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\kappa^2\lambda^2 - A^2)}{4\kappa A}, \quad b_k^2 = \frac{4\kappa^2\lambda^2 + A^2}{4\kappa^2 A}.$$

Колебательный режим существует лишь при  $\varepsilon > \varepsilon_k$ , причем амплитуда  $b > b_k$ . Поскольку состояние  $b=0$  всегда устойчиво, то для возбуждения колебаний необходим начальный «толчок».

Полученные формулы справедливы лишь при малых  $\varepsilon$ . Малость  $\varepsilon$  обеспечивается малостью  $\lambda$ , если при этом амплитуда силы удовлетворяет условию  $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\kappa \ll \omega_0$ .

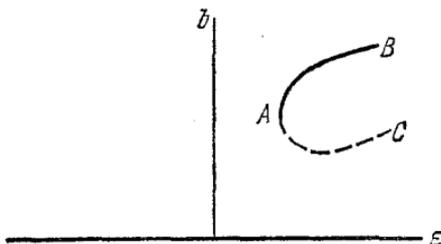


Рис. 34.

### § 30. Движение в быстро осциллирующем поле

Рассмотрим движение частицы, находящейся одновременно под действием постоянного поля  $U$  и силы

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t, \quad (30,1)$$

меняющейся со временем с большой частотой  $\omega$  ( $f_1, f_2$  — функции только от координат). Под «большой» мы понимаем при этом частоту, удовлетворяющую условию  $\omega \gg 1/T$ , где  $T$  — порядок величины периода движения, которое частица совершала бы в одном поле  $U$ . По своей величине сила  $f$  не предполагается слабой по сравнению с силами, действующими в поле  $U$ . Мы будем, однако, предполагать малым вызываемое этой силой колебательное смещение частицы (обозначенное ниже посредством  $\xi$ ).

Для упрощения вычислений рассмотрим сначала одномерное движение в поле, зависящем лишь от одной пространственной координаты  $x$ . Тогда уравнение движения частицы<sup>1)</sup>

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \quad (30,2)$$

<sup>1)</sup> Координата  $x$  — не обязательно декартова, а коэффициент  $m$  соответственно не обязательно есть масса частицы и не обязательно постоянен, как это предположено в (30,2). Такое предположение, однако, не отражается на окончательном результате (см. ниже).

Из характера действующего на частицу поля заранее ясно, что ее движение будет представлять собой перемещение вдоль некоторой плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями (с частотой  $\omega$ ) вокруг нее. Соответственно этому представим функцию  $x(t)$  в виде суммы

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (30,3)$$

где  $\xi(t)$  представляет собой указанные малые осцилляции.

Среднее значение функции  $\xi(t)$  за время ее периода  $2\pi/\omega$  обращается в нуль, функция же  $X(t)$  за это время меняется очень мало. Обозначая такое усреднение чертой над буквой, имеем поэтому:  $\bar{x} = \bar{X}(t)$ , т. е. функция  $X(t)$  описывает усредненное по быстрым осцилляциям «плавное» движение частицы. Выведем уравнение, определяющее эту функцию<sup>1)</sup>.

Подставляя (30,3) в (30,2) и разлагая по степеням  $\xi$  с точностью до членов первого порядка, получим:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (30,4)$$

В этом уравнении фигурируют члены различного характера—осциллирующие и «плавные»; они должны, очевидно, взаимно сокращаться в каждой из этих двух групп в отдельности. Для осциллирующих членов достаточно написать:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t), \quad (30,5)$$

остальные содержат малый множитель  $\xi$  и потому малы по сравнению с написанными (что касается производной  $\ddot{\xi}$ , то она пропорциональна большой величине  $\omega^2$  и потому не мала). Интегрируя уравнение (30,5) с функцией  $f$  из (30,1) (причем величина  $X$  рассматривается как постоянная), получим:

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \quad (30,6)$$

Усредним теперь уравнение (30,4) по времени (в указанном выше смысле). Поскольку средние значения первых степеней  $f$  и  $\xi$  обращаются в нуль, получим уравнение

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi \frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f \frac{\partial f}{\partial X}},$$

содержащее уже только функцию  $X(t)$ . Перепишем его окончательно в виде

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{эфф}}}{dX}, \quad (30,7)$$

<sup>1)</sup> Идея излагаемого ниже метода принадлежит П. Л. Капице (1951).

где «эффективная потенциальная энергия» определяется посредством <sup>1)</sup>

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2} (f_1^2 + f_2^2). \quad (30,8)$$

Сравнивая это выражение с (30,6), легко видеть, что дополнительный (по отношению к полю  $U$ ) член представляет собой нечто иное, как среднюю кинетическую энергию осцилляционного движения:

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{m}{2} \overline{\xi^2}. \quad (30,9)$$

Таким образом, усредненное по осцилляциям движение частицы происходит так, как если бы, помимо постоянного поля  $U$ , действовало еще и дополнительное постоянное поле, квадратично зависящее от амплитуды переменного поля.

Полученный результат может быть легко обобщен на случай системы с любым числом степеней свободы, описываемой обобщенными координатами  $q_i$ . Для эффективной потенциальной энергии получается (вместо (30,8)) выражение

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i, k} a_{ik}^{-1} \overline{f_i f_k} = U + \sum_{i, k} \frac{a_{ik}}{2} \overline{\xi_i \xi_k}, \quad (30,10)$$

где величины  $a_{ik}^{-1}$  (вообще говоря, — функции координат) — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов  $a_{ik}$  в кинетической энергии системы (см. (5,5)).

### Задачи

1. Определить положения устойчивого равновесия маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой частотой  $\gamma$  ( $\gamma \gg \sqrt{g/l}$ ).

Решение. Из полученной в задаче 3, в) § 5 функции Лагранжа видно, что в данном случае переменная сила

$$f = -ml\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi$$

(в качестве величины  $x$  выбран угол  $\varphi$ ). Поэтому «эффективная потенциальная энергия»

$$U_{\text{эфф}} = mgl \left( -\cos \varphi + \frac{a^2 \gamma^2}{4gl} \sin^2 \varphi \right).$$

Положения устойчивого равновесия отвечают минимуму этой функции.

<sup>1)</sup> Произведя несколько более длинные вычисления при зависящей от  $x$  величине  $m$ , легко убедиться в том, что формулы (30,7), (30,8) остаются справедливыми и в этом случае.

Направление вертикально вниз ( $\varphi=0$ ) всегда устойчиво. При выполнении условия

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

устойчивым является также положение вертикально вверх ( $\varphi=\pi$ ).

2. То же для маятника с горизонтально колеблющейся точкой подвеса.

Решение. По полученной в задаче 3, б) § 5 функции Лагранжа находим  $f = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi$  и затем

$$U_{\varphi\varphi} = mgl \left[ -\cos \varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \cos^2 \varphi \right].$$

Если  $a^2\gamma^2 < 2gl$ , то устойчиво положение  $\varphi=0$ . Если же  $a^2\gamma^2 > 2gl$ , то устойчивому равновесию отвечает значение

$$\cos \varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

## ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## § 31. Угловая скорость

*Твердое тело* можно определить в механике как систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Реально существующие в природе системы могут, конечно, удовлетворять этому условию лишь приближенно. Но большинство твердых тел в обычных условиях так мало изменяет свою форму и размеры, что при изучении законов движения твердого тела, рассматриваемого как нечто целое, мы вполне можем отвлечься от этих изменений.

В дальнейшем изложении мы будем часто рассматривать твердое тело как дискретную совокупность материальных точек, чем достигается некоторое упрощение выводов. Это, однако, ни в какой степени не противоречит тому обстоятельству, что в действительности твердые тела можно обычно рассматривать в механике как сплошные, совершенно не интересуясь их внутренней структурой. Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется просто заменой масс частиц на массу  $\rho dV$ , заключенную в элементе объема  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объему тела.

Для описания движения твердого тела введем две системы координат: «неподвижную», т. е. инерциальную систему  $XYZ$ , и движущуюся систему координат  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , которая предполагается жестко связанной с твердым телом и участвующей во всех его движениях. Начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела.

Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат вполне определяется заданием положения движущейся системы. Пусть радиус-вектор  $\mathbf{R}$  указывает положение начала  $O$  движущейся системы (рис. 35). Ориентация же осей этой системы относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами, так что вместе с тремя компонентами вектора  $\mathbf{R}$  мы имеем всего шесть координат. Таким образом, всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно представить в виде суммы двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая — бесконечно малый поворот вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело приходит в конечное положение.

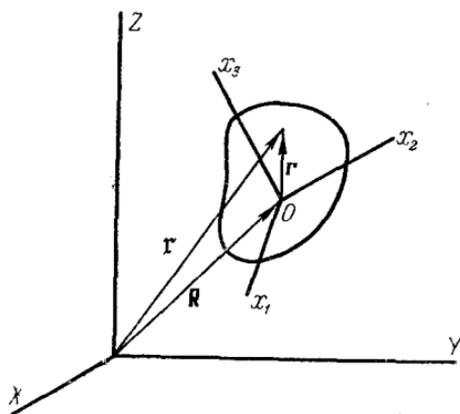


Рис. 35.

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела в подвижной системе координат посредством  $\mathbf{r}$ , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — посредством  $\mathbf{r}$ . Тогда бесконечно малое смещение  $d\mathbf{r}$  точки  $P$  складывается из перемещения  $d\mathbf{R}$  вместе с центром инерции и перемещения  $[d\varphi \cdot \mathbf{r}]$  относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол  $d\varphi$  (см. (9,1)):

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + [d\varphi \cdot \mathbf{r}].$$

Разделив это равенство на время  $dt$ , в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, и введя скорости

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (31,1)$$

получим соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]. \quad (31,2)$$

Вектор  $\mathbf{V}$  есть скорость центра инерции твердого тела; ее называют также скоростью его *поступательного* движения. Вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  называется *угловой скоростью* вращения твердого тела; его направление (как и направление  $d\varphi$ ) совпадает с направлением оси вращения. Таким образом, скорость  $\mathbf{v}$  любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела и угловую скорость его вращения.

Следует подчеркнуть, что при выводе формулы (31,2) специфические свойства начала координат как центра инерции тела совершенно не были использованы. Преимущества этого выбора выяснятся лишь позже при вычислении энергии движущегося тела.

Допустим теперь, что жестко связанная с твердым телом система координат выбрана так, что ее начало находится не в центре инерции  $O$ , а в некоторой точке  $O'$  на расстоянии  $a$  от точки  $O$ . Скорость перемещения начала  $O'$  этой системы обозначим через  $V'$ , а угловую скорость ее вращения — через  $\Omega'$ .

Рассмотрим снова какую-либо точку  $P$  твердого тела и обозначим ее радиус-вектор относительно начала  $O'$  через  $r'$ . Тогда  $r = r' + a$  и подстановка в (31,2) дает:

$$v = V + [\Omega a] + [\Omega' r'].$$

С другой стороны, по определению  $V'$  и  $\Omega'$ , должно быть  $v = V' + [\Omega' r']$ . Поэтому мы заключаем, что

$$V' = V + [\Omega a], \quad \Omega' = \Omega. \quad (31,3)$$

Второе из этих равенств весьма существенно. Мы видим, что угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент времени жестко связанная с телом система координат, оказывается совершенно не зависящей от этой системы. Все такие системы вращаются в заданный момент времени вокруг параллельных друг другу осей с одинаковой по абсолютной величине скоростью  $\Omega$ . Это обстоятельство и дает нам право называть  $\Omega$  угловой скоростью вращения твердого тела как такового. Скорость же поступательного движения такого «абсолютного» характера отнюдь не имеет.

Из первой формулы (31,3) видно, что если  $V$  и  $\Omega$  (в данный момент времени) взаимно перпендикулярны при каком-либо выборе начала координат  $O$ , то они (т. е.  $V'$  и  $\Omega'$ ) взаимно перпендикулярны и при определении по отношению к любому другому началу  $O'$ . Из формулы (31,2) видно, что в этом случае скорости  $v$  всех точек тела лежат в одной и той же плоскости — плоскости, перпендикулярной к  $\Omega$ . При этом всегда можно выбрать такое начало  $O'$ <sup>1)</sup>, скорость  $V'$  которого равна нулю, что движение твердого тела (в данный момент) будет представлено как чистое вращение вокруг оси, проходящей через  $O'$ . Эту ось называют *мгновенной осью вращения* тела<sup>2)</sup>.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что начало движущейся системы координат выбрано в центре инерции тела, так что и ось вращения тела проходит через этот центр. При движении тела меняются, вообще говоря, как абсолютная величина  $\Omega$ , так и направление оси вращения.

<sup>1)</sup> Оно может, конечно, оказаться лежащим и вне объема тела.

<sup>2)</sup> В общем же случае не взаимно перпендикулярных направлений  $V$  и  $\Omega$  начало координат можно выбрать таким образом, чтобы  $V$  и  $\Omega$  стали параллельными, т. е. движение (в данный момент времени) будет совокупностью вращения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.

## § 32. Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела рассматриваем его как дискретную систему материальных точек и пишем:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

где суммирование производится по всем точкам, составляющим тело. Здесь и ниже мы опускаем индексы, нумерующие эти точки, с целью упрощения записи формул.

Подставив сюда (31,2), получим:

$$T = \sum \frac{m}{2} (V + [\Omega r])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum mV [\Omega r] + \sum \frac{m}{2} [\Omega r]^2.$$

Скорости  $V$  и  $\Omega$  одинаковы для всех точек твердого тела. Поэтому в первом члене  $V^2/2$  выносится за знак суммы, а сумма  $\sum m$  есть масса тела, которую мы будем обозначать посредством  $\mu$ . Во втором члене пишем:

$$\sum mV [\Omega r] = \sum mr [V\Omega] = [V\Omega] \sum mr.$$

Отсюда видно, что если начало движущейся системы координат выбрано, как условлено, в центре инерции, то этот член обращается в нуль, так как тогда  $\sum mr = 0$ . Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения и в результате находим:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\Omega r)^2 \}. \quad (32,1)$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы двух частей. Первый член в (32,1) есть кинетическая энергия поступательного движения — она имеет такой вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второй член есть кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси, проходящей через центр инерции. Подчеркнем, что возможность такого разделения кинетической энергии на две части обусловлена выбором начала связанной с телом системы координат именно в его центре инерции.

Перепишем кинетическую энергию вращения в тензорных обозначениях, т. е. через компоненты  $x_i$ ,  $\Omega_i$  векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^1$ ). Имеем:

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

Здесь использовано тождество  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , где  $\delta_{ik}$  — единичный тензор (компоненты которого равны единице при  $i=k$  и нулю

<sup>1)</sup> В этой главе буквами  $i, k, l$  обозначаются тензорные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3. При этом везде применяется известное правило

при  $i \neq k$ ). Введя тензор

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (32,2)$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела в виде

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (32,3)$$

Функция Лагранжа твердого тела получается из (32,3) вычитанием потенциальной энергии

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (32,4)$$

Потенциальная энергия является в общем случае функцией шести переменных, определяющих положение твердого тела, например, трех координат  $X, Y, Z$  центра инерции и трех углов, определяющих ориентацию движущихся осей координат относительно неподвижных.

Тензор  $I_{ik}$  называется *тензором моментов инерции* или просто *тензором инерции* тела. Как ясно из определения (32,2), он симметричен, т. е.

$$I_{ik} = I_{ki}. \quad (32,5)$$

Выпишем для наглядности его компоненты в явном виде в следующей таблице:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m (x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (32,6)$$

Компоненты  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  иногда называют моментами инерции относительно соответствующих осей.

Тензор инерции, очевидно, аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в определении (32,2) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{ik} = \int \rho (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV. \quad (32,7)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответ-

суммирования, согласно которому знаки сумм опускаются, а по всем дважды повторяющимся (так называемым «немым») индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3; так,  $A_i B_i = \mathbf{AB}$ ,  $A_i^2 = A_i A_i = \mathbf{A}^2$  и т. д. Обозначение немых индексов можно, очевидно, менять произвольным образом (лишь бы оно не совпало с обозначением других фигурирующих в данном выражении тензорных индексов).

вующего выбора направлений осей  $x_1, x_2, x_3$ . Эти направления называют *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора — *главными моментами инерции*; обозначим их как  $I_1, I_2, I_3$ . При таком выборе осей  $x_1, x_2, x_3$  вращательная кинетическая энергия выражается особенно просто:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \quad (32,8)$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции не может быть больше суммы двух других. Так,

$$I_1 + I_2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m (x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (32,9)$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют *асимметрическим волчком*.

Если два главных момента инерции равны друг другу,  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то твердое тело называют *симметрическим волчком*. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости  $x_1 x_2$  произволен.

Если же все три главных момента инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком*. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции: в качестве их можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

Нахождение главных осей инерции очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной симметрией; ясно, что положение центра инерции и направления главных осей инерции должны обладать той же симметрией.

Так, если тело обладает плоскостью симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, и третья — перпендикулярна к ней. Очевидным случаем такого рода является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае существует простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Если плоскость системы выбрана в качестве плоскости  $x_1 x_2$ , то поскольку для всех частиц  $x_3 = 0$ , имеем:

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2),$$

так что

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (32,10)$$

Если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка, то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие — перпендикулярны к ней. При этом, если порядок оси симметрии выше второго, то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно повернуть тогда на угол, отличный от  $180^\circ$ , т. е. выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка.

Особым случаем является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси  $x_3$ , то для всех частиц  $x_1 = x_2 = 0$ , и потому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (32,11)$$

Такую систему называют *ротатором*. Характерной особенностью ротатора в отличие от общего случая произвольного тела является то, что он имеет всего две (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей  $x_1$  и  $x_2$ ; говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Наконец, сделаем еще одно замечание по поводу вычисления тензора инерции. Хотя мы определили этот тензор по отношению к системе координат с началом в центре инерции (только при таком определении справедлива основная формула (32,3)), но для его вычисления может иногда оказаться удобным вычислить предварительно аналогичный тензор

$$I'_{ik} = \sum m (x_i'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k'),$$

определенный по отношению к другому началу  $O'$ . Если расстояние  $OO'$  дается вектором  $\mathbf{a}$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ,  $x_i = x_i' + a_i$ ; учитывая также, что  $\sum m \mathbf{r} = 0$ , по определению точки  $O$ , найдем:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (32,12)$$

По этой формуле, зная  $I'_{ik}$ , легко вычислить искомый тензор  $I_{ik}$ .

### Задачи

1. Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в следующих случаях:

а) Молекула из атомов, расположенных на одной прямой.

Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \quad I_3 = 0,$$

где  $m_a$  — массы атомов,  $l_{ab}$  — расстояние между атомами  $a$  и  $b$ ; суммирование производится по всем парам атомов в молекуле (причем каждая пара значений  $a, b$  входит в сумму по одному разу).

Для двухатомной молекулы сумма сводится к одному члену, давая заранее очевидный результат — произведение приведенной массы обоих атомов на квадрат расстояния между ними:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

б) Трехатомная молекула в виде равнобедренного треугольника (рис. 36).

Ответ: Центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии  $X_2 = m_2 h / \mu$  от его основания. Моменты инерции:

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \quad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

в) Четырехатомная молекула с атомами, расположенными в вершинах правильной трехугольной пирамиды (рис. 37).

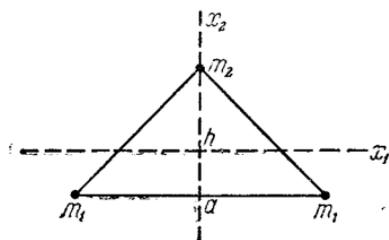


Рис. 36.

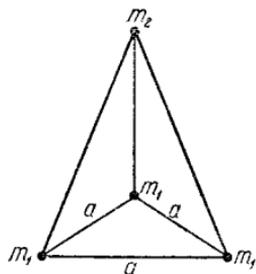


Рис. 37.

Ответ: Центр инерции лежит на высоте пирамиды на расстоянии  $X_3 = m_2 h / \mu$  от ее основания. Моменты инерции:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}, \quad I_3 = m_1 a^2.$$

При  $m_1 = m_2$ ,  $h = a\sqrt{2/3}$  мы получаем тетраэдрическую молекулу с моментами инерции

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2.$$

2. Определить главные моменты инерции сплошных однородных тел.

а) Тонкий стержень длиной  $l$ .

Ответ:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} \mu l^2$ ,  $I_3 = 0$  (толщиной стержня пренебрегаем).

б) Шар радиуса  $R$ .

Ответ:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \mu R^2$$

(вычислять следует сумму  $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$ ).

в) Круговой цилиндр радиуса  $R$  и высотой  $h$ .

Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

( $x_3$  — ось цилиндра).

г) Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Ответ:

$$I_1 = \frac{\mu}{12} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{12} (c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2)$$

(оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  параллельны ребрам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

д) Круговой конус с высотой  $h$  и радиусом основания  $R$ .

Решение. Вычисляем сначала тензор  $I'_{ik}$  по отношению к осям с началом в вершине конуса (рис. 38). Вычисление легко производится в цилиндрических координатах и дает:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5} \mu \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right), \quad I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

Центр тяжести находится, как показывает простое вычисление, на оси конуса на расстоянии  $a=3h/4$  от вершины. По формуле (32,12) находим окончательно

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20} \mu \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right), \quad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

е) Трехосный эллипсоид с полуосями  $a, b, c$ .

Решение. Центр инерции совпадает с центром эллипсоида, а главные оси инерции — с его осями. Интегрирование по объему эллипсоида может быть сведено к интегрированию по объему сферы путем преобразования координат  $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ , превращающего уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в уравнение поверхности единичной сферы

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Так, для момента инерции относительно оси  $x$  получаем:

$$I_1 = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho abc \int \int \int (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta = abc \frac{1}{2} I' (b^2 + c^2),$$

где  $I'$  — момент инерции шара единичного радиуса.

Учитывая, что объем эллипсоида равен  $4\pi abc/3$ , получим окончательно моменты инерции

$$I_1 = \frac{\mu}{5} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5} (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{5} (a^2 + b^2).$$

3. Определить частоту малых колебаний физического маятника (твердое тело, качающееся в поле тяжести около неподвижной горизонтальной оси).

Решение. Пусть  $l$  — расстояние от центра инерции маятника до оси вращения, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между направлениями его главных осей инерции и осью вращения. В качестве переменной координаты вводим угол  $\varphi$  между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось вращения. Скорость центра инерции  $V = l\dot{\varphi}$ , а проекции угловой скорости на главные оси инерции:  $\dot{\varphi} \cos \alpha, \dot{\varphi} \cos \beta, \dot{\varphi} \cos \gamma$ . Считая угол  $\varphi$  малым, находим потенциальную энергию в виде

$$U = \mu gl (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} \mu gl \varphi^2.$$

Поэтому функция Лагранжа

$$L = \frac{\mu l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma) \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu gl^2}{2} \varphi^2.$$

Отсюда для частоты колебаний имеем:

$$\omega^2 = \frac{\mu gl}{\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma}.$$

4. Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 39;  $OA$  и  $AB$  — тонкие однородные стержни длиной  $l$ , шарнирно скрепленные в точке  $A$ .

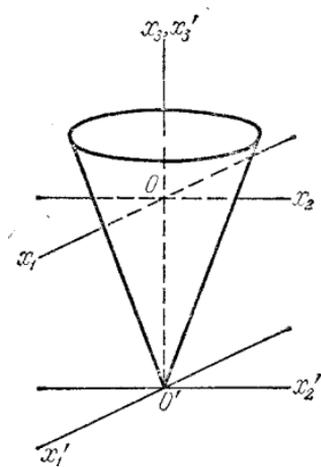


Рис. 38.

Стержень  $OA$  вращается (в плоскости рисунка) вокруг точки  $O$ , а конец  $B$  стержня  $AB$  скользит вдоль оси  $Ox$ .

Решение. Скорость центра инерции стержня  $OA$  (находящегося на его середине) есть  $l\dot{\varphi}/2$ , где  $\varphi$ —угол  $AOB$ . Поэтому кинетическая энергия стержня  $OA$

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8} \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2$$

( $\mu$ —масса одного стержня).

Декартовы координаты центра инерции стержня  $AB$ :  $X = \frac{3l}{2} \cos \varphi$ ,  $Y = \frac{l}{2} \sin \varphi$ . Так как угловая скорость вращения этого стержня тоже равна  $\dot{\varphi}$ , то его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{\mu}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8} (1 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{\mu l^2}{3} (1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$$

(подставлено  $I = \mu l^2/12$  согласно задаче 2, а).

5. Найти кинетическую энергию цилиндра (радиуса  $R$ ), катящегося по плоскости. Масса цилиндра распределена по его объему таким образом, что одна из главных осей инерции параллельна оси цилиндра и проходит на расстоянии  $a$  от нее; момент инерции относительно этой главной оси есть  $I$ .

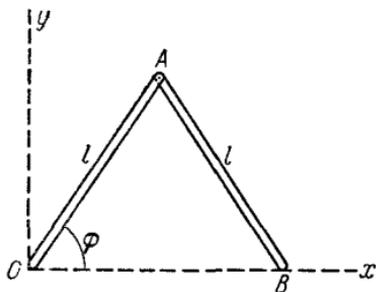


Рис. 39.

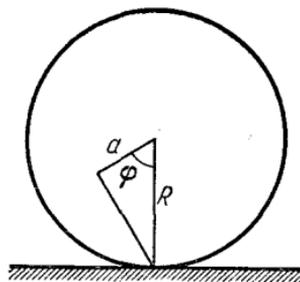


Рис. 40.

Решение. Вводим угол  $\varphi$  между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра тяжести на ось цилиндра (рис. 40). Движение цилиндра в каждый момент времени можно рассматривать как чистое вращение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией его соприкосновения с неподвижной плоскостью; угловая скорость этого вращения есть  $\dot{\varphi}$  (угловая скорость вращения вокруг всех параллельных осей одинакова). Центр инерции находится на расстоянии  $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$  от мгновенной оси и потому его скорость есть  $V = \dot{\varphi} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$ . Полная кинетическая энергия

$$T = \frac{\mu}{2} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2.$$

6. Найти кинетическую энергию однородного цилиндра радиуса  $a$ , катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса  $R$  (рис. 41).

Решение. Вводим угол  $\varphi$  между линией, соединяющей центры обоих цилиндров, и вертикалью. Центр инерции катящегося цилиндра находится на

оси и его скорость  $V = \dot{\varphi}(R-a)$ . Угловую скорость вычисляем, как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндров; она равна

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi} \frac{R-a}{a}.$$

Если  $I_3$  — момент инерции относительно оси цилиндра, то

$$T = \frac{\mu}{2} (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2} \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} \mu (R-a)^2 \dot{\varphi}^2$$

( $I_3$  — из задачи 2, в)).

7. Найти кинетическую энергию однородного конуса, катящегося по плоскости.

Решение. Обозначим посредством  $\theta$  угол между линией  $OA$  соприкосновения конуса с плоскостью и каким-либо неподвижным направлением в этой плоскости (рис. 42). Центр инерции находится на оси конуса и его скорость  $V = a \cos \alpha \cdot \dot{\theta}$ , где  $2\alpha$  — угол раствора конуса, а  $a$  — расстояние центра инерции от вершины. Угловую скорость вращения вычисляем, как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси  $OA$ :

$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha.$$

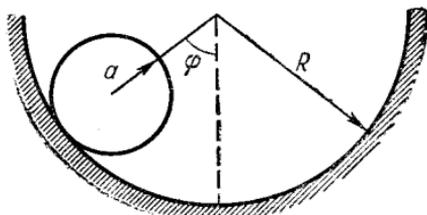


Рис. 41.

Одна из главных осей инерции (ось  $x_3$ ) совпадает с осью конуса, а другую (ось  $x_2$ ) выбираем перпендикулярно к оси конуса и линии  $OA$ . Тогда проекции вектора  $\Omega$  (направленного параллельно  $OA$ ) на главные оси инерции будут  $\Omega \sin \alpha$ ,  $0$ ,  $\Omega \cos \alpha$ . В результате находим для искомой кинетической энергии:

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} \dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\theta}^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha)$$

( $h$  — высота конуса,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $a$  — из задачи 2, д)).

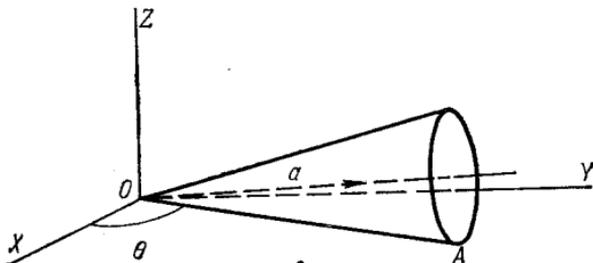


Рис. 42.

8. Найти кинетическую энергию однородного конуса, основание которого катится по плоскости, а вершина постоянно находится в точке над плоскостью на высоте, равной радиусу основания (так что ось конуса параллельна плоскости).

Решение. Вводим угол  $\theta$  между заданным направлением в плоскости и проекцией на нее оси конуса (рис. 43). Тогда скорость центра инерции

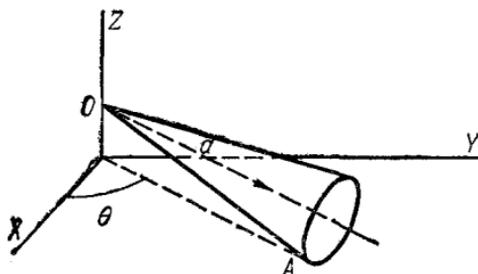


Рис. 43.

$V = a\dot{\theta}$  (обозначения те же, что в задаче 7). Мгновенной осью вращения является образующая конуса  $OA$ , проведенная в точку его соприкосновения с плоскостью. Центр инерции находится на расстоянии  $a \sin \alpha$  от этой оси и потому

$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\sin \alpha}.$$

Проекция вектора  $\Omega$  на главные оси инерции (ось  $x_2$  выбираем перпендикулярной к оси конуса и линии  $OA$ ):  $\Omega \sin \alpha = \dot{\theta}$ ,  $0$ ,  $\Omega \cos \alpha = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha$ . Поэтому кинетическая энергия

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\theta}^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 5 \right).$$

9. Найти кинетическую энергию однородного трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих осей ( $AB$ , рис. 44), причем последняя сама

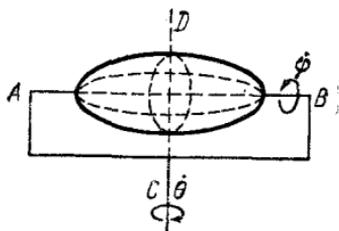


Рис. 44.

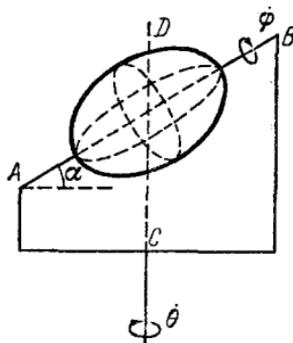


Рис. 45.

вращается вокруг направления  $CD$ , перпендикулярного к ней и проходящего через центр эллипсоида.

Решение. Угол поворота вокруг оси  $CD$  обозначим посредством  $\theta$ , а угол поворота вокруг оси  $AB$  (угол между  $CD$  и осью инерции  $x_1$ , перпендикулярной к  $AB$ ) — через  $\varphi$ . Тогда проекции  $\Omega$  на оси инерции будут:

$$\dot{\theta} \cos \varphi, \quad \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi}$$

(причем ось  $x_3$  совпадает с  $AB$ ). Поскольку центр инерции, совпадающий с центром эллипсоида, неподвижен, то кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}^2.$$

10. То же, если ось  $AB$  наклонена, а эллипсоид симметричен относительно этой оси (рис. 45).

Решение. Проекция  $\Omega$  на ось  $AB$  и на перпендикулярные к ней две другие главные оси инерции (которые можно выбрать произвольно):

$$\dot{\theta} \cos \alpha \cos \varphi, \quad \dot{\theta} \cos \alpha \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin \alpha.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{I_1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2.$$

### § 33. Момент импульса твердого тела

Величина момента импульса системы зависит, как мы знаем, от выбора точки, относительно которой он определен. В механике твердого тела наиболее рационален выбор в качестве этой точки начала подвижной системы координат, т. е. центра инерции тела. Ниже мы будем понимать под  $\mathbf{M}$  момент, определенный именно таким образом.

Согласно формуле (9,6) при выборе начала координат в центре инерции тела его момент  $\mathbf{M}$  совпадает с «собственным моментом», связанным лишь с движением точек тела относительно центра инерции. Другими словами, в определении  $\mathbf{M} = \sum m [\mathbf{r}\mathbf{v}]$  надо заменить  $\mathbf{v}$  на  $[\Omega\mathbf{r}]$ :

$$\mathbf{M} = \sum m [\mathbf{r} [\Omega\mathbf{r}]] = \sum m \{r^2\Omega - \mathbf{r}(\mathbf{r}\Omega)\},$$

или в тензорных обозначениях:

$$M_i = \sum m \{x_l^2 \Omega_l - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m \{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Наконец, учитывая определение (32,2) тензора инерции, получаем окончательно:

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (33,1)$$

Если оси  $x_1, x_2, x_3$  направлены вдоль главных осей инерции тела, то эта формула дает:

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (33,2)$$

В частности, для шарового волчка, когда все три главных момента инерции совпадают, имеем просто:

$$\mathbf{M} = I\Omega, \quad (33,3)$$

т. е. вектор момента пропорционален вектору угловой скорости и имеет одинаковое с ним направление.

В общем же случае произвольного тела вектор  $\mathbf{M}$ , вообще говоря, не совпадает по своему направлению с вектором  $\Omega$ , и лишь при вращении тела вокруг какой-либо из его главных осей инерции  $\mathbf{M}$  и  $\Omega$  имеют одинаковое направление.

Рассмотрим свободное движение твердого тела, не подверженного действию каких-либо внешних сил. Не представляющее интереса равномерное поступательное движение будем предполагать исключенным, так что речь идет о свободном вращении тела.

Как и у всякой замкнутой системы, момент импульса свободно вращающегося тела постоянен. Для шарового волчка условие  $\mathbf{M} = \text{const}$  приводит просто к  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ . Это значит, что общим случаем свободного вращения шарового волчка является просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

Столь же прост случай ротатора. Здесь тоже  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ , причем вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  перпендикулярен к оси ротатора. Поэтому свободное

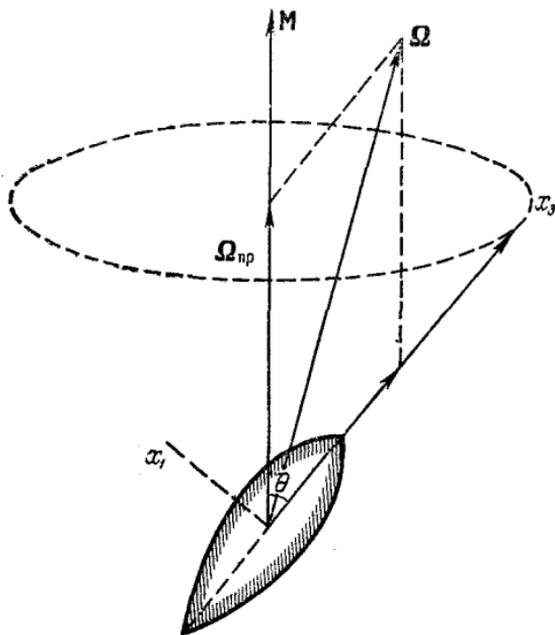


Рис. 46.

вращение ротатора есть равномерное вращение в одной плоскости вокруг направления, перпендикулярного к этой плоскости.

Закон сохранения момента достаточен и для определения более сложного свободного вращения симметричного волчка.

Воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции  $x_1$ ,  $x_2$  (перпендикулярных к оси симметрии волчка  $x_3$ ), выберем ось  $x_2$  перпендикулярной к плоскости, определяемой постоянным вектором  $\mathbf{M}$  и мгновенным положением оси  $x_3$ . Тогда  $M_2 = 0$ , а из формул (33,2) видно, что и

$\Omega_2 = 0$ . Это значит, что направления  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и оси волчка в каждый момент времени лежат в одной плоскости (рис. 46). Но отсюда в свою очередь следует, что скорости  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$  всех точек на оси волчка в каждый момент времени перпендикулярны к указанной плоскости; другими словами, ось волчка равномерно (см. ниже) вращается вокруг направления  $\mathbf{M}$ , описывая круговой конус (так называемая *регулярная прецессия* волчка). Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси.

Угловые скорости обоих этих вращений легко выразить через заданную величину момента  $M$  и угол наклона  $\theta$  оси волчка к направлению  $\mathbf{M}$ . Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть просто проекция  $\Omega_3$  вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  на эту ось:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \theta. \quad (33,4)$$

Для определения же скорости прецессии  $\Omega_{\text{пр}}$  надо разложить вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  по правилу параллелограмма на составляющие вдоль  $x_3$

и вдоль  $\mathbf{M}$ . Из них первая не приводит ни к какому перемещению самой оси волчка, а потому вторая и дает искомую угловую скорость прецессии. Из построения на рис. 46 ясно, что  $\sin \theta \Omega_{\text{пр}} = \Omega_1$ , а поскольку  $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \theta/I_1$ , то получаем:

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{M}{I_1}. \quad (33,5)$$

### § 34. Уравнения движения твердого тела

Поскольку твердое тело обладает в общем случае шестью степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде, определяющем производные по времени от двух векторов: импульса и момента тела.

Первое из этих уравнений получается просто путем суммирования уравнений  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$  для каждой из составляющих тело частиц, где  $\mathbf{p}$ —импульс частицы, а  $\mathbf{f}$ —действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

и полную действующую на него силу  $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$ , получим:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (34,1)$$

Хотя мы определили  $\mathbf{F}$  как сумму всех сил  $\mathbf{f}$ , действующих на каждую из частиц, в том числе со стороны других частиц тела, фактически в  $\mathbf{F}$  входят лишь силы, действующие со стороны внешних источников. Все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются; действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и всякой замкнутой системы, должен сохраняться, т. е. должно быть  $\mathbf{F} = 0$ .

Если  $U$ —потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила  $\mathbf{F}$  может быть определена путем дифференцирования ее по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \quad (34,2)$$

Действительно, при поступательном перемещении тела на  $\delta \mathbf{R}$  настолько же меняются и радиус-векторы  $\mathbf{r}$  каждой точки тела, а потому изменение потенциальной энергии

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta \mathbf{R} \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F} \delta \mathbf{R}.$$

Отметим в этой связи, что уравнение (34,1) может быть получено и как уравнение Лагранжа по отношению к координатам центра инерции

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$$

с функцией Лагранжа (32,4), для которой

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Перейдем к выводу второго уравнения движения, определяющего производную по времени от момента импульса  $\mathbf{M}$ . Для упрощения вывода удобно выбрать «неподвижную» (инерциальную) систему отсчета таким образом, чтобы в данный момент времени центр инерции тела покоился относительно нее. Полученное таким образом уравнение движения будет тем самым в силу галилеевского принципа относительности справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Имеем:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

В силу сделанного нами выбора системы отсчета (в которой  $\mathbf{V} = 0$ ) значение  $\dot{\mathbf{r}}$  в данный момент времени совпадает со скоростью  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Поскольку же векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  имеют одинаковое направление, то  $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = 0$ . Заменяя также  $\dot{\mathbf{p}}$  на силу  $\mathbf{f}$ , получим окончательно:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (34,3)$$

где

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}]. \quad (34,4)$$

Вектор  $[\mathbf{r}\mathbf{f}]$  называется *моментом силы*  $\mathbf{f}$ , так что  $\mathbf{K}$  есть сумма моментов всех сил, действующих на тело. Как и в полной силе  $\mathbf{F}$ , в сумме (34,4) фактически должны учитываться лишь внешние силы; в соответствии с законом сохранения момента импульса сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, должна обращаться в нуль.

Момент силы, как и момент импульса, зависит, вообще говоря, от выбора начала координат, относительно которого он определен. В (34,3), (34,4) моменты определяются относительно центра инерции тела.

При переносе начала координат на расстояние  $\mathbf{a}$  новые радиус-векторы  $\mathbf{r}'$  точек тела связаны со старыми  $\mathbf{r}$  посредством  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ . Поэтому

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \sum [\mathbf{r}'\mathbf{f}] + \sum [\mathbf{a}\mathbf{f}]$$

или

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{a}\mathbf{F}]. \quad (34,5)$$

Отсюда видно, в частности, что величина момента сил не зависит от выбора начала координат, если полная сила  $\mathbf{F} = 0$  (в таком случае говорят, что к телу приложена *пара сил*).

Уравнение (34,3) можно рассматривать как уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \Omega}$$

по отношению к «вращательным координатам». Действительно, дифференцируя функцию Лагранжа (32,4) по компонентам вектора  $\Omega$ , получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik} \Omega_k = M_i.$$

Изменение же потенциальной энергии  $U$  при повороте тела на бесконечно малый угол  $\delta\varphi$  равно:

$$\delta U = - \sum \mathbf{f} \delta \mathbf{r} = - \sum \mathbf{f} [\delta \varphi \cdot \mathbf{r}] = - \delta \varphi \sum [\mathbf{r} \mathbf{f}] = - \mathbf{K} \delta \varphi,$$

откуда

$$\mathbf{K} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (34,6)$$

так что

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mathbf{K}.$$

Предположим, что векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{K}$  взаимно перпендикулярны. В этом случае всегда можно найти такой вектор  $\mathbf{a}$ , чтобы в формуле (34,5)  $\mathbf{K}'$  обратилось в нуль, так что будет:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{a} \mathbf{F}]. \quad (34,7)$$

При этом выбор  $\mathbf{a}$  неоднозначен: прибавление к нему любого вектора, параллельного  $\mathbf{F}$ , не изменит равенства (34,7), так что условие  $\mathbf{K}' = 0$  даст не определенную точку в подвижной системе координат, а лишь определенную прямую линию. Таким образом, при  $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$  действие всех приложенных к нему сил может быть сведено к одной силе  $\mathbf{F}$ , действующей вдоль определенной прямой линии.

Таков, в частности, случай однородного силового поля, в котором действующая на материальную точку сила имеет вид  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — постоянный вектор, характеризующий поле, а величина  $e$  характеризует свойства частицы по отношению к данному полю<sup>1)</sup>. В этом случае имеем:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \sum e, \quad \mathbf{K} = [\sum e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}].$$

<sup>1)</sup> Так, в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$  есть напряженность поля, а  $e$  — заряд частицы. В однородном поле тяжести  $\mathbf{E}$  есть ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}$ , а  $e$  — масса частицы  $m$ .

Предполагая, что  $\sum e \neq 0$ , введем радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$ , определенный согласно

$$\mathbf{r}_0 = \sum_e \frac{e\mathbf{r}}{e}. \quad (34,8)$$

Тогда мы получим следующее простое выражение для полного момента сил:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}]. \quad (34,9)$$

Таким образом, при движении твердого тела в однородном поле влияние поля сводится к действию одной силы  $\mathbf{F}$ , «приложенной» в точке с радиус-вектором (34,8). Положение этой точки всецело определяется свойствами самого тела; в поле тяжести, например, она совпадает с центром инерции тела.

### § 35. Эйлеровы углы

Как уже указывалось, для описания движения твердого тела можно пользоваться тремя координатами его центра инерции и какими-либо тремя углами, определяющими ориентацию осей  $x_1, x_2, x_3$

движущейся системы координат относительно неподвижной системы  $X, Y, Z$ . В качестве этих углов часто оказываются удобными так называемые *эйлеровы углы*.

Так как нас сейчас интересуют только углы между осями координат, мы выберем начала обеих систем в одной точке (рис. 47). Подвижная плоскость  $x_1x_2$  пересекает неподвижную  $XU$  по некоторой прямой ( $ON$  на рис. 47), которую называют *линией узлов*. Эта линия, очевидно, перпендикулярна как к оси  $Z$ , так и к оси  $x_3$ ;

ее положительное направление выберем так, чтобы оно соответствовало направлению векторного произведения  $[\mathbf{z}\mathbf{x}_3]$  (где  $\mathbf{z}, \mathbf{x}_3$  — орты в направлении осей  $Z$  и  $x_3$ ).

В качестве величин, определяющих положение осей  $x_1, x_2, x_3$  относительно осей  $X, Y, Z$ , примем следующие углы: угол  $\theta$  между осями  $Z$  и  $x_3$ , угол  $\varphi$  между осями  $X$  и  $N$ , угол  $\psi$  между осями  $N$  и  $x_1$ . Углы  $\varphi$  и  $\psi$  отсчитываются в направлениях, определяемых пра-

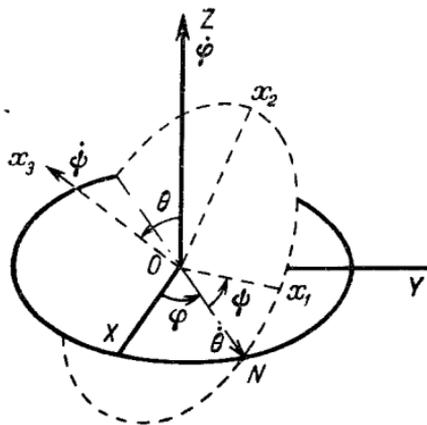


Рис. 47.

вилком винта, соответственно вокруг осей  $Z$  и  $x_3$ . Угол  $\theta$  пробегает значения от нуля до  $\pi$ , а углы  $\varphi$  и  $\psi$  — от нуля до  $2\pi$ <sup>1)</sup>.

Выразим теперь компоненты вектора угловой скорости  $\Omega$  по подвижным осям  $x_1, x_2, x_3$  через эйлеровы углы и их производные. Для этого надо спроектировать на эти оси угловые скорости  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ . Угловая скорость  $\dot{\theta}$  направлена по линии узлов  $ON$  и ее составляющие по осям  $x_1, x_2, x_3$  равны:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0.$$

Угловая скорость  $\dot{\varphi}$  направлена вдоль оси  $Z$ ; ее проекция на ось  $x_3$  равна  $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta$ , а проекция на плоскость  $x_1x_2$  равна  $\dot{\varphi} \sin \theta$ . Разлагая последнюю на составляющие по осям  $x_1$  и  $x_2$ , получим:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi.$$

Наконец, угловая скорость  $\dot{\psi}$  направлена по оси  $x_3$ .

Собирая все эти составляющие по каждой из осей, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (35,1)$$

Если оси  $x_1, x_2, x_3$  выбраны по главным осям инерции твердого тела, то вращательную кинетическую энергию, выраженную через эйлеровы углы, мы получим подстановкой (35,1) в (32,8).

Для симметрического волчка, у которого  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , найдем после простого приведения:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (35,2)$$

Заметим, что это выражение можно получить и проще, воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции  $x_1, x_2$  у симметрического волчка. Считая, что ось  $x_1$  совпадает с осью узлов  $ON$ , т. е. что  $\psi = 0$ , будем иметь для составляющих угловой скорости более простые выражения

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (35,3)$$

В качестве простого примера применения эйлеровых углов определим с их помощью известное уже нам свободное движение симметрического волчка.

<sup>1)</sup> Углы  $\theta$  и  $\varphi - \pi/2$  представляют собой соответственно полярный угол и азимут направления  $x_3$  по отношению к осям  $X, Y, Z$ . В то же время  $\theta$  и  $\pi/2 - \psi$  является соответственно полярным углом и азимутом направления  $Z$  по отношению к осям  $x_1, x_2, x_3$ .

Выберем ось  $Z$  неподвижной системы координат в направлении постоянного момента волчка  $\mathbf{M}$ . Ось  $x_3$  подвижной системы направлена по оси волчка, а ось  $x_1$  пусть совпадает в данный момент времени с осью узлов. Тогда для компонент вектора  $\mathbf{M}$  находим с помощью формул (35,3):

$$M_1 = I_1 \Omega_1 = I_1 \dot{\theta}, \quad M_2 = I_1 \Omega_2 = I_1 \dot{\varphi} \sin \theta, \quad M_3 = I_3 \Omega_3 = I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}).$$

С другой стороны, поскольку ось  $x_1$  (линия узлов) перпендикулярна к оси  $Z$ , имеем:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \sin \theta, \quad M_3 = M \cos \theta.$$

Приравнявая друг другу эти выражения, получим следующие уравнения:

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1 \dot{\varphi} = M, \quad I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = M \cos \theta. \quad (35,4)$$

Первое из этих уравнений дает  $\theta = \text{const}$ , т. е. постоянство угла наклона оси волчка к направлению  $\mathbf{M}$ . Второе определяет (в согласии с (33,5)) угловую скорость прецессии  $\dot{\varphi} = M/I_1$ . Наконец, третье определяет угловую скорость вращения волчка вокруг собственной оси  $\Omega_3 = M \cos \theta / I_3$ .

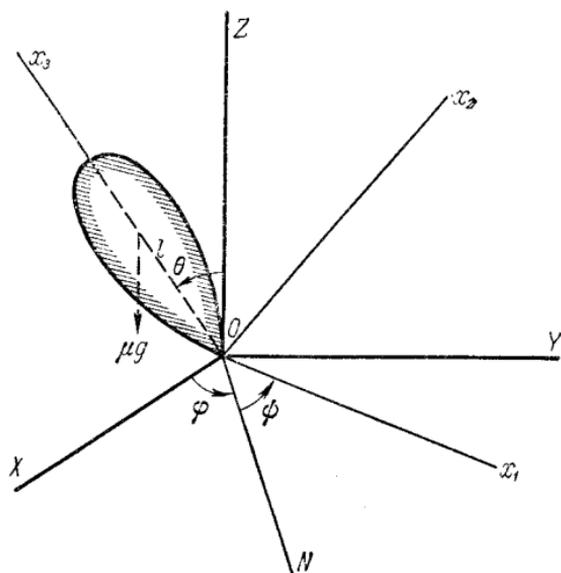


Рис. 48.

### Задачи

1. Привести к квадратурам задачу о движении тяжелого симметрического волчка с неподвижной нижней точкой (рис. 48).

Решение. Совместное начало подвижной и неподвижной систем координат выбираем в неподвижной точке волчка  $O$ , а ось  $Z$  направляем по вертикали

(рис. 48). Функция Лагранжа волчка в поле тяжести

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - \mu g l \cos \theta$$

( $\mu$  — масса волчка,  $l$  — расстояние от нижней точки до центра инерции).

Координаты  $\psi$  и  $\varphi$  — циклические. Поэтому имеем два интеграла движения:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const} \equiv M_3, \quad (1)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1' \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{const} \equiv M_z, \quad (2)$$

где введено обозначение  $I'_1 = I_1 + \mu l^2$  (величины  $p_\psi$  и  $p_\varphi$  представляют собой составляющие вращательного момента, определенного относительно точки  $O$ , соответственно по осям  $x_3$  и  $Z$ ). Кроме того, сохраняется энергия

$$E = \frac{I'_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \mu g l \cos \theta. \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}, \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

Исключив с помощью этих равенств  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  из энергии (3), получим:

$$E' = \frac{I'_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta),$$

где введены обозначения

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \quad U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I'_1 \sin^2 \theta} - \mu g l (1 - \cos \theta). \quad (6)$$

Определяя отсюда  $\dot{\theta}$  и разделяя переменные, получим:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I'_1} (E' - U_{\text{эфф}}(\theta))}} \quad (7)$$

(интеграл — эллиптический). После этого углы  $\psi$  и  $\varphi$  выражаются как функции от  $\theta$  в виде квадратур с помощью уравнений (4), (5).

Область изменения угла  $\theta$  при движении определяется условием  $E' \geq U_{\text{эфф}}(\theta)$ . Функция  $U_{\text{эфф}}(\theta)$  (при  $M_3 \neq M_2$ ) стремится к  $+\infty$  при значениях  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , а в промежутке между ними проходит через минимум. Поэтому уравнение  $E' = U_{\text{эфф}}(\theta)$  имеет два корня, определяющих предельные углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  наклона оси волчка к вертикали.

При изменении угла  $\theta$  от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  знак производной  $\dot{\varphi}$  остается неизменным или меняется, смотря по тому, остается ли неизменным или меняется в этом интервале знак разности  $M_z - M_3 \cos \theta$ . В первом случае ось волчка прецессирует вокруг вертикали монотонно, одновременно совершая колебания (так называемую *нутацию*) вверх и вниз (рис. 49, а; линия изображает след, который ось волчка чертила бы на поверхности сферы с центром в неподвижной точке волчка). Во втором случае направление прецессии противоположно на двух граничных окружностях, так что ось волчка перемещается вокруг вертикали, описывая петли (рис. 49, б). Наконец, если одно из значений  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  совпадает с нулем разности  $M_z - M_3 \cos \theta$ , на соответствующей предельной окружности  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\theta}$  одновременно обращаются в нуль, так что ось волчка описывает траекторию изображенного на рис. 49, в типа.

2. Найти условие, при котором вращение волчка вокруг вертикальной оси будет устойчивым.

Решение. При  $\theta=0$  оси  $x_3$  и  $Z$  совпадают, так что  $M_3 = M_z$ ,  $E' = 0$ . Вращение вокруг этой оси будет устойчивым, если значение  $\theta=0$  отвечает

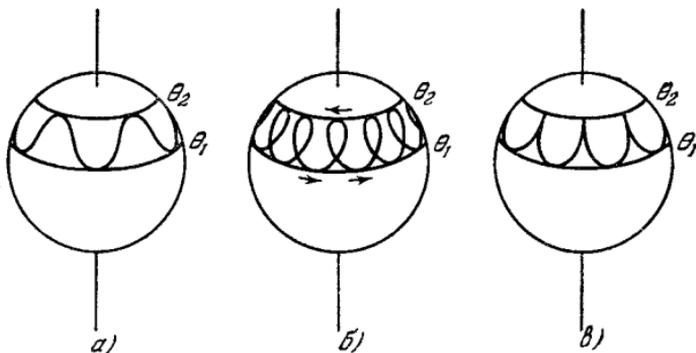


Рис. 49.

минимуму функции  $U_{\text{эфф}}(\theta)$ . При малых  $\theta$  имеем:

$$U_{\text{эфф}} \approx \left( \frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2} \right) \theta^2,$$

откуда находим условие  $M_3^2 > 4I_1' \mu g l$  или

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1' \mu g l}{I_3^2}.$$

3. Определить движение волчка в случае, когда кинетическая энергия его собственного вращения велика по сравнению с энергией в поле тяжести (так называемый «быстрый» волчок).

Решение. В первом приближении, если пренебречь полем тяжести, происходит свободная прецессия оси волчка вокруг направления момента  $\mathbf{M}$  (отвечающая в данном случае нутации волчка); она происходит согласно (33,5) с угловой скоростью

$$\Omega_{\text{нут}} = \frac{M}{I_1'}. \quad (1)$$

В следующем приближении появляется медленная прецессия момента  $\mathbf{M}$  вокруг направления вертикали (рис. 50). Для определения скорости этой прецессии усредним точное уравнение движения (34,3)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}$$

по периоду нутации. Момент сил тяжести, действующих на волчок, равен  $\mathbf{K} = \mu l [\mathbf{n}_3 \mathbf{g}]$ , где  $\mathbf{n}_3$  — единичный вектор в направлении оси волчка. Из соображений симметрии очевидно, что результат усреднения  $\mathbf{K}$  по «конусу нутации» сводится к замене вектора  $\mathbf{n}_3$  его проекцией  $\cos \alpha \cdot \mathbf{M}/M$  на направление  $\mathbf{M}$  ( $\alpha$  — угол между  $\mathbf{M}$  и осью волчка).

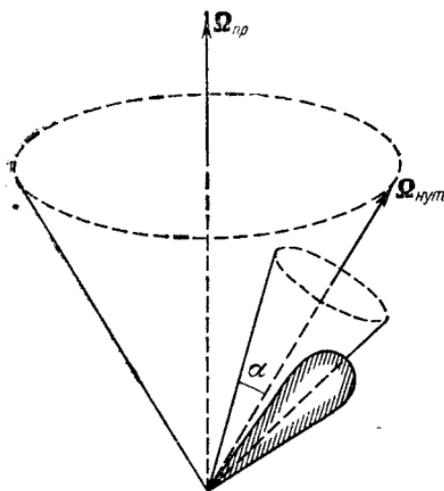


Рис. 50.

в направлении оси волчка. Из соображений симметрии очевидно, что результат усреднения  $\mathbf{K}$  по «конусу нутации» сводится к замене вектора  $\mathbf{n}_3$  его проекцией  $\cos \alpha \cdot \mathbf{M}/M$  на направление  $\mathbf{M}$  ( $\alpha$  — угол между  $\mathbf{M}$  и осью волчка).

Таким образом, получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\cos \alpha \frac{\mu l}{M} [g\mathbf{M}].$$

Оно означает, что вектор  $\mathbf{M}$  прецессирует вокруг направления  $\mathbf{g}$  (вертикали) со средней угловой скоростью

$$\bar{\Omega}_{\text{пр}} = -\frac{\mu l \cos \alpha}{M} g \quad (2)$$

(малой по сравнению с  $\Omega_{\text{врт}}$ ).

В рассматриваемом приближении входящие в формулы (1) и (2) величины  $M$  и  $\cos \alpha$  постоянны (хотя и не являются, строго говоря, интегралами движения). Они связаны, с той же точностью, со строго сохраняющимися величинами  $E$  и  $M_3$  соотношениями

$$M_3 = M \cos \alpha, \\ E \approx \frac{M^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{I_3} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_1} \right).$$

### § 36. Уравнения Эйлера

Написанные в § 34 уравнения движения относятся к неподвижной системе координат: производные  $d\mathbf{P}/dt$  и  $d\mathbf{M}/dt$  в уравнениях (34,1) и (34,3) представляют собой изменения векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  по отношению к этой системе. Между тем, наиболее простая связь между компонентами вращательного момента  $\mathbf{M}$  твердого тела и компонентами угловой скорости имеет место в подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции. Для того чтобы воспользоваться этой связью, необходимо предварительно преобразовать уравнения движения к подвижным координатам  $x_1, x_2, x_3$ .

Пусть  $d\mathbf{A}/dt$  — скорость изменения какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор  $\mathbf{A}$  не изменяется, то его изменение относительно неподвижной системы обусловлено только вращением, и тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\Omega\mathbf{A}]$$

(см. § 9, где было указано, что такие формулы, как (9,1), (9,2), справедливы для любого вектора). В общем случае к правой части этого равенства надо добавить скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  по отношению к подвижной системе; обозначив эту скорость, как  $d'\mathbf{A}/dt$ , получим:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\Omega\mathbf{A}]. \quad (36,1)$$

С помощью этой общей формулы мы можем сразу переписать уравнения (34,1) и (34,3) в виде

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + [\Omega\mathbf{P}] = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\Omega\mathbf{M}] = \mathbf{K}. \quad (36,2)$$

Поскольку дифференцирование по времени производится здесь в подвижной системе координат, то мы можем непосредственно спроецировать уравнения на оси этой системы, написав

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \quad \dots, \quad \left(\frac{d'\mathbf{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \quad \dots,$$

где индексы 1, 2, 3 означают компоненты по осям  $x_1, x_2, x_3$ . При этом в первом уравнении заменяем  $\mathbf{P}$  на  $\mu\mathbf{V}$  и получаем:

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) &= F_1, \\ \mu \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) &= F_2, \\ \mu \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) &= F_3. \end{aligned} \quad (36,3)$$

Предполагая оси  $x_1, x_2, x_3$  выбранными по главным осям инерции, пишем во втором из уравнений (36,2)  $M_1 = I_1 \Omega_1$  и т. д. и получаем:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_3. \end{aligned} \quad (36,4)$$

Уравнения (36,4) называют *уравнениями Эйлера*.

При свободном вращении  $\mathbf{K} = 0$ , так что уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (36,5)$$

В качестве примера применим эти уравнения к уже рассматривавшемуся нами свободному вращению симметрического волчка. Положив  $I_1 = I_2$ , имеем из третьего уравнения  $\dot{\Omega}_3 = 0$ , т. е.  $\Omega_3 = \text{const}$ . После этого первые два уравнения напишем в виде

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega \Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1,$$

где введена постоянная величина

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \quad (36,6)$$

Умножив второе уравнение на  $i$  и сложив с первым, получим:

$$\frac{d}{dt} (\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega (\Omega_1 + i\Omega_2),$$

откуда

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t},$$

где  $A$  — постоянная; последнюю можно считать вещественной (это сводится к надлежащему выбору начала отсчета времени), и тогда

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t. \quad (36,7)$$

Этот результат показывает, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную к оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью  $\omega$ , оставаясь постоянной по величине ( $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$ ). Поскольку проекция  $\Omega_3$  на ось волчка тоже постоянна, то мы заключаем, что и весь вектор  $\Omega$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси волчка, оставаясь неизменным по величине. Ввиду связи  $M_1 = I_1\Omega_1$ ,  $M_2 = I_2\Omega_2$ ,  $M_3 = I_3\Omega_3$  между компонентами векторов  $\Omega$  и  $\mathbf{M}$  такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает, очевидно, и вектор момента  $\mathbf{M}$ .

Полученная картина представляет собой, разумеется, лишь другой аспект того же движения волчка, которое уже было рассмотрено в §§ 33 и 35 по отношению к неподвижной системе координат. В частности, угловая скорость вращения вектора  $\mathbf{M}$  (ось  $Z$  на рис. 48) вокруг направления  $x_3$  совпадает, в терминах эйлеровых углов, с угловой скоростью  $-\dot{\psi}$ . С помощью уравнений (35,4) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{M \cos \theta}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta = M \cos \theta \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \\ \text{или} \quad -\dot{\psi} &= \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \end{aligned}$$

в согласии с (36,6).

### § 37. Асимметрический волчок

Применим уравнения Эйлера к более сложной задаче о свободном вращении асимметрического волчка, у которого все три момента инерции различны. Для определенности будем считать, что

$$I_3 > I_2 > I_1. \quad (37,1)$$

Два интеграла уравнений Эйлера известны заранее. Они даются законами сохранения энергии и момента и выражаются равенствами

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \quad (37,2)$$

где энергия  $E$  и абсолютная величина момента  $M$  — заданные постоянные. Эти же два равенства, выраженные через компоненты вектора  $\mathbf{M}$ , имеют вид

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \quad (37,3)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \quad (37,4)$$

Уже отсюда можно сделать некоторые заключения о характере движения волчка. Для этого заметим, что уравнения (37,3) и (37,4) представляют собой, геометрически в осях  $M_1, M_2, M_3$ , уравнения соответственно поверхности эллипсоида с полуосями

$$\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_2}, \sqrt{2EI_3}$$

и сферы с радиусом  $M$ . При перемещении вектора  $\mathbf{M}$  (относительно осей инерции волчка) его конец движется вдоль линии пересечения

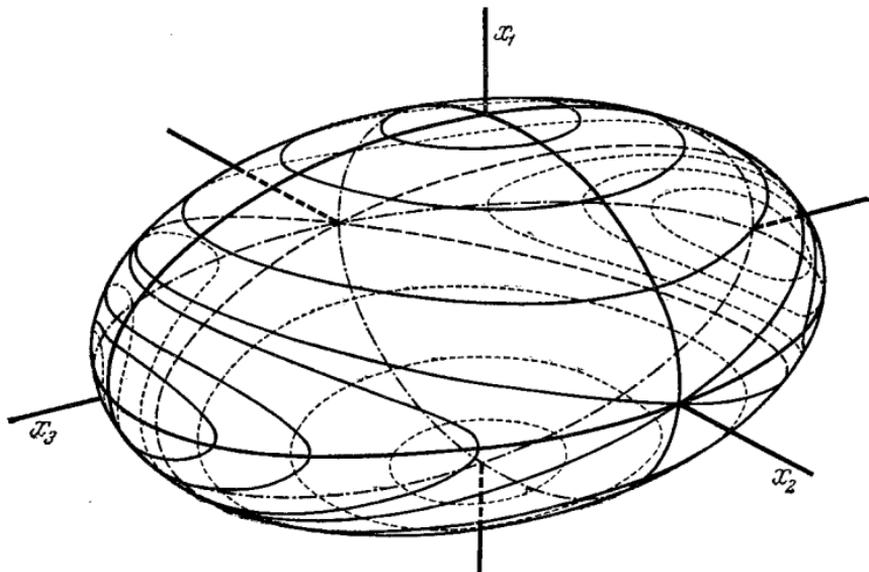


Рис. 51.

указанных поверхностей (на рис. 51 изображен ряд таких линий пересечения эллипсоида со сферами различных радиусов). Самое наличие пересечения обеспечивается очевидными неравенствами

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \quad (37,5)$$

геометрически означающими, что радиус сферы (37,4) лежит между наименьшей и наибольшей из полуосей эллипсоида (37,3).

Проследим за изменением характера этих «траекторий» конца вектора  $\mathbf{M}^1$  по мере изменения величины  $M$  (при заданной энергии  $E$ ). Когда  $M^2$  лишь немногим превышает  $2EI_1$ , сфера пересекает эллипсоид по двум замкнутым маленьким кривым, окружающим ось  $x_1$  вблизи соответствующих двух полюсов эллипсоида (при  $M^2 \rightarrow 2EI_1$  эти кривые стягиваются в точки — полюсы). По мере увеличения  $M^2$

<sup>1)</sup> Аналогичные кривые, описываемые концом вектора  $\mathbf{\Omega}$ , называются *полодиями*.

кривые расширяются, а при  $M^2 = 2EI_2$  превращаются в две плоские кривые (эллипсы), пересекающиеся друг с другом в полюсах эллипсоида на оси  $x_2$ . При дальнейшем увеличении  $M^2$  вновь возникают две отдельные замкнутые траектории, но окружающие уже полюсы на оси  $x_3$ ; при  $M^2 \rightarrow 2EI_3$  они стягиваются в эти две точки.

Отметим, прежде всего, что замкнутость траекторий означает периодичность перемещения вектора  $\mathbf{M}$  по отношению к телу волчка; за время периода вектор  $\mathbf{M}$  описывает некоторую коническую поверхность, возвращаясь в прежнее положение.

Далее отметим существенно различный характер траекторий, близких к различным полюсам эллипсоида. Вблизи осей  $x_1$  и  $x_3$  траектории расположены целиком в окрестности полюсов, а траектории, проходящие вблизи полюсов на оси  $x_2$ , в своем дальнейшем ходе удаляются на большие расстояния от этих точек. Такое различие соответствует разному характеру устойчивости вращения волчка вокруг его трех осей инерции. Вращение вокруг осей  $x_1$  и  $x_3$  (отвечающих наибольшему и наименьшему из трех моментов инерции волчка) устойчиво в том смысле, что при малом отклонении от этих состояний волчок будет продолжать совершать движение, близкое к первоначальному. Вращение же вокруг оси  $x_2$  неустойчиво; достаточно малого отклонения, чтобы возникло движение, уводящее волчок в положения, далекие от первоначального.

Для определения зависимости компонент  $\Omega$  (или пропорциональных им компонент  $\mathbf{M}$ ) от времени обратимся к уравнениям Эйлера (36,5). Выразим  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  через  $\Omega_2$  из двух уравнений (37,2), (37,3)

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \{ (2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2 \}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \{ (M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2 \}\end{aligned}\quad (37,6)$$

и подставив во второе из уравнений (36,5), найдем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 = \\ &= \frac{1}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}} \{ [(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2] [(M^2 - 2EI_1) - \\ &\quad - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2] \}^{1/2}.\end{aligned}\quad (37,7)$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим функцию  $t(\Omega_2)$  в виде эллиптического интеграла. При приведении его к стандартному виду будем считать для определенности, что

$$M^2 > 2EI_2$$

(в обратном случае во всех следующих ниже формулах надо переставить индексы 1 и 3). Вводим вместо  $t$  и  $\Omega_2$  новые переменные

$$\tau = t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s = \Omega_2 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}} \quad (37,8)$$

и положительный параметр  $k^2 < 1$  согласно

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}. \quad (37,9)$$

Тогда получим:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(начало отсчета времени условно выбираем в момент, когда  $\Omega_2 = 0$ ). При обращении этого интеграла возникает, как известно, одна из эллиптических функций Якоби

$$s = \operatorname{sn} \tau,$$

чем и определяется зависимость  $\Omega_2$  от времени. Функции  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_3(t)$  выражаются алгебраически через  $\Omega_2(t)$  согласно равенствам (37,6). Учитывая определение двух других эллиптических функций

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau},$$

получим окончательно следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned} \quad (37,10)$$

Функции (37,10) — периодические, причем их период по переменной  $\tau$  равен, как известно, величине  $4K$ , где  $K$  есть полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}. \quad (37,11)$$

Период же по времени дается, следовательно, выражением

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}. \quad (37,12)$$

По истечении этого времени вектор  $\Omega$  возвращается в свое начальное положение относительно осей волчка. (Самый же волчок при этом отнюдь не возвращается в свое прежнее положение относительно неподвижной системы координат — см. ниже.)

При  $I_1 = I_2$  формулы (37,10), разумеется, приводятся к формулам, полученным в предыдущем параграфе для симметрического волчка.

Действительно, при  $I_1 \rightarrow I_2$  параметр  $k^2 \rightarrow 0$ , эллиптические функции вырождаются в круговые:

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \sin \tau, \quad \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1,$$

и мы возвращаемся к формулам (36,7).

При  $M^2 = 2EI_3$  имеем:  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 = \text{const}$ , т. е. вектор  $\Omega$  постоянно направлен вдоль оси инерции  $x_3$ ; этот случай соответствует равномерному вращению волчка вокруг оси  $x_3$ . Аналогичным образом при  $M^2 = 2EI_1$  (при этом  $\tau \equiv 0$ ) имеем равномерное вращение вокруг оси  $x_1$ .

Перейдем к определению абсолютного (по отношению к неподвижной системе координат  $X, Y, Z$ ) движения волчка в пространстве как функции времени. Для этого вводим эйлеровы углы  $\psi, \varphi, \theta$  между осями волчка  $x_1, x_2, x_3$  и осями  $X, Y, Z$ , выбрав при этом неподвижную ось  $Z$  вдоль направления постоянного вектора  $\mathbf{M}$ . Поскольку полярный угол и азимут направления  $Z$  по отношению к осям  $x_1, x_2, x_3$  равны соответственно  $\theta$  и  $\frac{\pi}{2} - \psi$  (см. примечание на стр. 141), то, проектируя вектор  $\mathbf{M}$  на оси  $x_1, x_2, x_3$ , получим:

$$\begin{aligned} M \sin \theta \sin \psi &= M_1 = I_1 \Omega_1, \\ M \sin \theta \cos \psi &= M_2 = I_2 \Omega_2, \\ M \cos \theta &= M_3 = I_3 \Omega_3. \end{aligned} \quad (37,13)$$

Отсюда

$$\cos \theta = \frac{I_3 \Omega_3}{M}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{I_1 \Omega_1}{I_2 \Omega_2}, \quad (37,14)$$

и, используя формулы (37,10), найдем:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{\frac{I_3 (M^2 - 2EI_1)}{M^2 (I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau, \\ \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{\frac{I_1 (I_3 - I_2) \operatorname{cn} \tau}{I_2 (I_3 - I_1) \operatorname{sn} \tau}}, \end{aligned} \quad (37,15)$$

чем и определяется зависимость углов  $\theta$  и  $\psi$  от времени; вместе с компонентами вектора  $\Omega$  они являются периодическими функциями с периодом (37,12).

Угол  $\varphi$  в формулы (37,13) не входит, и для его вычисления надо обратиться к формулам (35,1), выражающим компоненты  $\Omega$  через производные по времени эйлеровых углов. Исключая  $\theta$  из равенств

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \end{aligned}$$

получим:

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi}{\sin \theta},$$

после чего, используя формулы (37,13), найдем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = M \frac{I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2}. \quad (37,16)$$

Отсюда функция  $\varphi(t)$  определяется квадратурой, но подинтегральное выражение содержит сложным образом эллиптические функции. Путем ряда довольно сложных преобразований этот интеграл может быть выражен через так называемые тэта-функции; не приводя вычислений<sup>1)</sup>, укажем лишь их окончательный результат.

Функция  $\varphi(t)$  может быть представлена (с точностью до произвольной аддитивной постоянной) в виде суммы двух членов

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad (37,17)$$

один из которых дается формулой

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} - ia\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} + ia\right)}, \quad (37,18)$$

где  $\vartheta_{01}$  — тэта-функция, а  $a$  — вещественная постоянная, определяющаяся равенством

$$\operatorname{sn}(i2\alpha K) = i \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{I_1(2EI_3 - M^2)}} \quad (37,19)$$

( $K$  и  $T$  — из (37,11), (37,12)). Функция в правой стороне (37,18) — периодическая с периодом  $T/2$ , так что  $\varphi_1(t)$  изменяется на  $2\pi$  за время  $T$ . Второе слагаемое в (37,17) дается формулой

$$\varphi_2(t) = 2\pi \frac{t}{T'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T} \frac{\vartheta'_{01}(ia)}{\vartheta_{01}(ia)}. \quad (37,20)$$

Эта функция испытывает приращение  $2\pi$  за время  $T'$ . Таким образом, движение по углу  $\varphi$  представляет собой совокупность двух периодических изменений, причем один из периодов ( $T$ ) совпадает с периодом изменения углов  $\psi$  и  $\theta$ , а другой ( $T'$ ) — несоизмерим с первым. Последнее обстоятельство приводит к тому, что при своем движении волчок никогда не возвращается, строго говоря, в свое первоначальное положение.

### Задачи

1. Определить свободное вращение волчка вокруг оси, близкой к оси инерции  $x_3$  (или  $x_1$ ).

Решение. Пусть  $\kappa$  направлению  $\mathbf{M}$  близка ось  $x_3$ . Тогда компоненты  $M_1$  и  $M_2$  являются малыми величинами, а компонента  $M_3 \approx M$  (с точностью

<sup>1)</sup> Их можно найти в книге Е. Т. Уиттекера, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

до величин первого порядка малости). С этой же точностью первые два из уравнений Эйлера (36,5) напишутся в виде

$$\frac{dM_1}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_0 M_2, \quad \frac{dM_2}{dt} = \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \Omega_0 M_1,$$

где мы ввели постоянную  $\Omega_0 = M/I_3$ . Следуя общим правилам, ищем решение для  $M_1$ ,  $M_2$  в виде, пропорциональном  $e^{i\omega t}$ , и для частоты  $\omega$  получаем значение

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}. \quad (1)$$

Для самих же величин  $M_1$  и  $M_2$  получим

$$M_1 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t, \quad M_2 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $a$  — произвольная малая постоянная. Этими формулами определяется движение вектора  $\mathbf{M}$  относительно волчка; в построении на рис. 51 конец вектора  $\mathbf{M}$  описывает (с частотой  $\omega$ ) малый эллипс вокруг полюса на оси  $x_3$ .

Для определения абсолютного движения волчка в пространстве определяем его эйлеровы углы. В данном случае угол наклона  $\theta$  оси  $x_3$  к оси  $Z$  (направлению  $\mathbf{M}$ ) мал, и согласно формулам (37,14)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_1}{M_2},$$

$$\theta^2 \approx 2(1 - \cos \theta) = 2 \left(1 - \frac{M_3}{M}\right) \approx \frac{M_1^2 + M_2^2}{M^2};$$

подставляя (2), получаем:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \operatorname{ctg} \omega t,$$

$$\theta^2 = a^2 \left[ \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right) \cos^2 \omega t + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \sin^2 \omega t \right]. \quad (3)$$

Для вычисления угла  $\varphi$  замечаем, что согласно третьей из формул (35,1) при  $\theta \ll 1$

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi}.$$

Поэтому

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi \quad (4)$$

(произвольную постоянную интегрирования опускаем).

Более наглядное представление о характере движения волчка получается, если проследить непосредственно за изменением направления его трех осей инерции (единичные векторы вдоль этих осей обозначим посредством  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_3$ ). Векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  равномерно вращаются в плоскости  $XY$  с частотой  $\Omega_0$ , одновременно испытывая малые колебания с частотой  $\omega$  в поперечном направлении; эти колебания определяются  $Z$ -компонентами указанных векторов, для которых имеем:

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t.$$

Для вектора  $\mathbf{n}_3$  имеем с той же точностью:

$$n_{3x} \approx \theta \sin \varphi, \quad n_{3y} \approx -\theta \cos \varphi, \quad n_{3z} \approx 1$$

(полярный угол и азимут направления  $\mathbf{n}_3$  по отношению к осям  $X, Y, Z$  равны  $\theta$  и  $\varphi - \frac{\pi}{2}$ ; см. примечание на стр. 141). Далее пишем (используя при этом формулы (37,13)):

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \theta \sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta \sin \Omega_0 t \cos \psi - \theta \cos \Omega_0 t \sin \psi = \\ &= \frac{M_2}{M} \sin \Omega_0 t - \frac{M_1}{M} \cos \Omega_0 t = \\ &= a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \Omega_0 t \sin \omega t - a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \Omega_0 t \cos \omega t, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\begin{aligned} n_{3x} &= -\frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 + \omega) t + \\ &\quad + \frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 - \omega) t. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} n_{3y} &= -\frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 + \omega) t + \\ &\quad + \frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 - \omega) t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что движение вектора  $\mathbf{n}_3$  представляет собой наложение двух вращений вокруг оси  $Z$  с частотами  $(\Omega_0 \pm \omega)$ .

2. Определить свободное вращение волчка при  $M^2 = 2EI_2$ .

Решение. Этот случай отвечает в построении на рис. 51 перемещению конца вектора  $\mathbf{M}$  по кривой, проходящей через полюс на оси  $x_2$ .

Уравнение (37,7) принимает вид

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = t \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}} \Omega_0, \quad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

где введено обозначение  $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$ . Интегрируя это уравнение, а затем воспользовавшись формулами (37,6), получим:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \\ \Omega_2 &= \Omega_0 \operatorname{th} \tau, \\ \Omega_3 &= \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \end{aligned}$$

Для описания абсолютного движения волчка вводим эйлеровы углы, определив  $\theta$  как угол между осью  $Z$  (направлением  $\mathbf{M}$ ) и осью инерции волчка  $x_2$  (а не  $x_3$ , как в тексте). В формулах (37,14), (37,16), связывающих компоненты вектора  $\mathbf{\Omega}$  с эйлеровыми углами, надо при этом сделать циклическую перестановку индексов  $123 \rightarrow 312$ . Подставив затем в эти формулы выражения (1), получим:

$$\cos \theta = \operatorname{th} \tau, \quad \varphi = \Omega_0 t + \operatorname{const}, \quad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}.$$

Из полученных формул видно, что вектор  $\mathbf{\Omega}$  асимптотически (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближается к оси  $x_2$ , которая одновременно асимптотически приближается к неподвижной оси  $Z$ .

### § 38. Соприкосновение твердых тел

Условия равновесия твердого тела, как это видно из уравнений движения (34,1) и (34,3), можно сформулировать в виде равенства нулю действующих на него полной силы и полного момента сил:

$$\begin{aligned} F &= \sum f = 0, \\ K &= \sum [rf] = 0. \end{aligned} \quad (38,1)$$

Суммирование производится здесь по всем приложенным к телу внешним силам, а  $r$  — радиус-векторы «точек приложения» сил; при этом точка (начало координат), относительно которой определяются моменты, может быть выбрана произвольным образом: при  $F = 0$  значение  $K$  не зависит от этого выбора (см. (34,5)).

Если мы имеем дело с системой соприкасающихся друг с другом твердых тел, то в равновесии условия (38,1) должны выполняться для каждого из тел в отдельности. При этом в число сил должны быть включены также и силы, действующие на данное тело со стороны остальных соприкасающихся с ним тел. Эти силы приложены в точках соприкосновения тел и называются *силами реакции*. Очевидно, что для каждых двух тел их взаимные силы реакции равны по величине и противоположны по направлению.

В общем случае как величины, так и направления реакций определяются в результате совместного решения системы уравнений равновесия (38,1) для всех тел. В некоторых случаях, однако, направления сил реакции задается уже условиями задачи. Так, если два тела могут свободно скользить по поверхности друг друга, то силы реакции между ними направлены по нормали к поверхности.

Если соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, то, кроме сил реакции, появляются также силы диссипативного характера — *силы трения*.

Возможны два типа движения соприкасающихся тел — *скольжение* и *качение*. При скольжении реакции перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям, а силы трения направлены по касательным к ним.

Чистое качение характеризуется тем, что в точках соприкосновения нет относительного движения тел; другими словами, катящееся тело в каждый момент времени как бы закреплено в точке соприкосновения. При этом направление силы реакции произвольно, т. е. не обязательно нормально к соприкасающимся поверхностям. Трение же при качении проявляется в виде дополнительного момента сил, препятствующего качению.

Если при скольжении трение настолько мало, что им можно вовсе пренебречь, то поверхности тел называются *абсолютно гладкими*.

Напротив, если свойства поверхности допускают лишь чистое качение тел без скольжения, а трением при качении можно пренебречь, то поверхности называют *абсолютно шероховатыми*.

В обоих случаях силы трения не фигурируют явным образом в задаче о движении тел, и потому задача является чисто механической. Если же конкретные свойства трения существенны для движения, то последнее не является уже чисто механическим процессом (ср. § 25).

Соприкосновение тел уменьшает число их степеней свободы по сравнению с тем, которым они обладали бы при свободном движении. До сих пор при рассмотрении такого рода задач мы учитывали это обстоятельство путем введения координат, непосредственно соответствующих реальному числу степеней свободы. При качении тел, однако, такой выбор координат может оказаться невозможным.

Условие, накладываемое на движение тел при качении, заключается в равенстве скоростей соприкасающихся точек (так, при качении тела по неподвижной поверхности скорость точки соприкосновения должна быть равна нулю). В общем случае такое условие выражается *уравнениями связи* вида

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0, \quad (38,2)$$

где  $c_{\alpha i}$  — функции только координат (индекс  $\alpha$  нумерует уравнения связей). Если левые стороны равенств не являются полными производными по времени каких-либо функций координат, то эти уравнения не могут быть проинтегрированы. Другими словами, они не сводятся к соотношениям между одними только координатами, которыми можно было бы воспользоваться для того, чтобы выразить положение тел через меньшее число координат в соответствии с реальным числом степеней свободы. Такие связи называют *неголономными* (в противоположность *голономным*, связывающим лишь координаты системы).

Рассмотрим, например, качение шара по плоской поверхности. Как обычно, обозначим посредством  $\mathbf{V}$  скорость поступательного движения (скорость центра шара), а посредством  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловую скорость вращения его. Скорость точки касания шара с плоскостью получится, если положить  $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$  в общей формуле  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$  ( $a$  — радиус шара,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости качения в точке соприкосновения). Искомая связь представляет собой условие отсутствия скольжения в точке касания, т. е. дается уравнением

$$\mathbf{V} - a[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}] = 0. \quad (38,3)$$

Оно не может быть проинтегрировано: хотя скорость  $\mathbf{V}$  представляет собой полную производную по времени от радиус-вектора центра шара, но зато угловая скорость не является в общем случае полной

производной каких-либо координат. Таким образом, связь (38,3) неголономна<sup>1)</sup>.

Поскольку уравнения неголономных связей нельзя использовать для уменьшения числа координат, то при наличии таких связей неизбежно приходится пользоваться координатами, которые не все независимы. Для составления соответствующих уравнений Лагранжа снова вернемся к принципу наименьшего действия.

Наличие связей вида (38,2) налагает определенные ограничения на возможные значения вариаций координат. Именно, умножив эти уравнения на  $\delta t$ , мы найдем, что вариации  $\delta q_i$  не независимы, а связаны соотношениями

$$\sum_i c_{\alpha i} \delta q_i = 0. \quad (38,4)$$

Это обстоятельство должно быть учтено при варьировании действия. Согласно общему методу Лагранжа для нахождения условных экстремумов, надо к подинтегральному выражению вариации действия

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

прибавить умноженные на неопределенные множители (функции координат)  $\lambda_\alpha$  уравнения (38,4), после чего потребовать обращения интеграла в нуль. При этом можно уже считать все вариации  $\delta q_i$  независимыми, и мы получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \quad (38,5)$$

Вместе с уравнениями связей (38,2) они составляют полную систему уравнений для неизвестных величин  $q_i$  и  $\lambda_\alpha$ .

В изложенном методе силы реакции вообще не фигурируют; соприкосновение тел целиком учитывается уравнениями связей. Существует, однако, и другой метод составления уравнений движения соприкасающихся тел, в котором силы реакции вводятся явным образом. Сущность этого метода (составляющего содержание так называемого *принципа д'Аламбера*) состоит в том, что для каждого из соприкасающихся тел пишутся уравнения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}], \quad (38,6)$$

причем в число действующих на тело сил  $\mathbf{f}$  включаются также и силы

<sup>1)</sup> Заметим, что такая же связь для качения цилиндра была бы голономной. В этом случае ось вращения сохраняет при качении постоянное направление в пространстве, и потому  $\Omega = d\varphi/dt$  является полной производной от угла поворота  $\varphi$  цилиндра вокруг своей оси. Соотношение (38,3) при этом интегрируется и дает связь между координатой центра инерции и углом  $\varphi$ .

реакции; эти силы заранее неизвестны и сами определяются вместе с движением тела в результате решения уравнений. Этот метод в равной степени применим как при голономных, так и при неголономных связях.

### Задачи

1. Пользуясь принципом д'Аламбера, найти уравнения движения однородного шара, катящегося по плоскости под действием приложенных к нему внешней силы  $F$  и момента сил  $K$ .

Решение. Уравнение связи (38,3) написано уже в тексте. Вводя силу реакции (обозначим ее, как  $R$ ), приложенную в точке касания шара с плоскостью, напишем уравнения (38,6):

$$\mu \frac{dV}{dt} = F + R, \quad (1)$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = K - a[nR] \quad (2)$$

(здесь учтено, что  $P = \mu V$  и что для шарового волчка  $M = I\Omega$ ). Дифференцируя уравнение связи (38,3) по времени, получим:

$$\dot{V} = a [\dot{\Omega}].$$

Подставив в уравнение (1) и исключая  $\dot{\Omega}$  с помощью (2), найдем уравнение

$$\frac{I}{a\mu} (F + R) = [Kn] - aR + an(nR),$$

Рис. 52.

связывающее силу реакции с  $F$  и  $K$ . Расписав это уравнение в компонентах и подставив  $I = \frac{2}{5} \mu a^2$  (см. задачу 2, б, § 32), будем иметь:

$$R_x = \frac{5}{7a} K_y - \frac{2}{7} F_x, \quad R_y = -\frac{5}{7a} K_x - \frac{2}{7} F_y, \quad R_z = -F_z$$

(плоскость  $x, y$  выбрана в плоскости качения). Наконец, подставив эти выражения в (1), получим уравнения движения, содержащие уже только заданные внешние силу и момент:

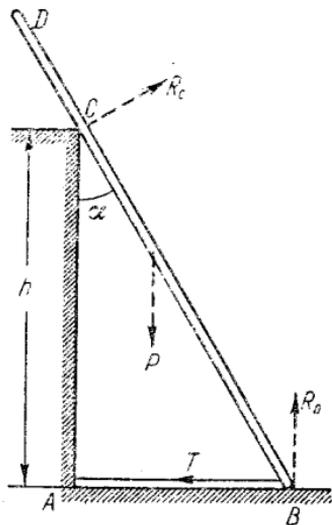
$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right), \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_y - \frac{K_x}{a} \right).$$

Компоненты  $\Omega_x, \Omega_y$  угловой скорости выражаются через  $V_x$  и  $V_y$  с помощью уравнения связи (38,3), а для  $\Omega_z$  имеем уравнение

$$\frac{2}{5} \mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

( $z$ -компонента уравнения (2)).

2. Однородный стержень  $BD$  весом  $P$  и длиной  $l$  опирается на стену, как показано на рис. 52; его нижний конец  $B$  удерживается нитью  $AB$ . Определить реакцию опор и натяжение нити.



Решение. Вес стержня представляется приложенной к его середине силой  $P$ , направленной вертикально вниз. Силы реакции  $R_B$  и  $R_C$  направлены

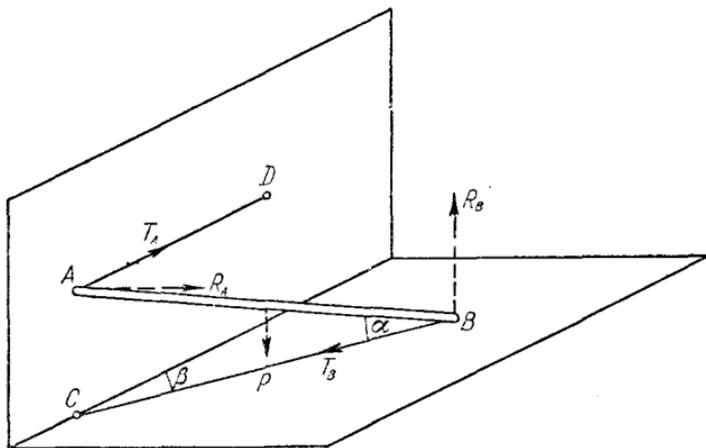


Рис. 53.

соответственно вертикально вверх и перпендикулярно к стержню; натяжение нити  $T$  направлено от  $B$  к  $A$ . Решение уравнений равновесия дает:

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha.$$

3. Стержень  $AB$  весом  $P$  опирается своими концами на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 53) и удерживается в этом положении двумя горизонтальными нитями  $AD$  и  $BC$ ; нить  $BC$  находится в одной (вертикальной) плоскости со стержнем  $AB$ . Определить реакции опор и натяжения нитей.

Решение. Натяжения нитей  $T_A$  и  $T_B$  направлены от  $A$  к  $D$  и от  $B$  к  $C$ . Реакции  $R_A$  и  $R_B$  перпендикулярны к соответствующим плоскостям. Решение уравнений равновесия дает:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad R_A = T_B \sin \beta, \\ T_A = T_B \cos \beta.$$

4. Два стержня длиной  $l$  соединены сверху шарниром, а снизу скреплены нитью  $AB$  (рис. 54). К середине одного из стержней приложена сила  $F$  (весом стержней пренебрегаем). Определить силы реакции.

Решение. Натяжение нити  $T$  действует в точке  $A$  от  $A$  к  $B$ , а в точке  $B$  — от  $B$  к  $A$ . Реакции  $R_A$  и  $R_B$  в точках  $A$  и  $B$  перпендикулярны к плоскости опоры. Посредством  $R_C$  обозначим силу реакции в шарнире, действующую на стержень  $AC$ ; тогда на стержень  $BC$  действует реакция  $-R_C$ . Условие равенства нулю суммы моментов сил  $R_B$ ,  $T$  и  $-R_C$ , действующих на стержень  $BC$ , приводит к результату, что вектор  $R_C$

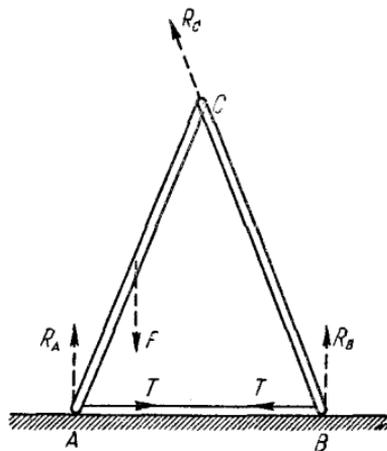


Рис. 54.

направлен вдоль  $BC$ . Остальные условия равновесия (для каждого из двух стержней) приводят к значениям

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4}, \quad R_C = \frac{F}{4 \sin \alpha}, \quad T = \frac{1}{4}F \operatorname{ctg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол  $CAB$ .

### § 39. Движение в неинерциальной системе отсчета

До сих пор, рассматривая движение любой механической системы, мы всегда относили его к инерциальной системе отсчета. Только в инерциальных системах отсчета функция Лагранжа, например, одной частицы во внешнем поле имеет вид

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U, \quad (39,1)$$

и соответственно уравнение движения

$$m \frac{dv_0}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

(мы будем в этом параграфе отличать индексом 0 величины, относящиеся к инерциальной системе отсчета).

Займемся теперь вопросом о том, как выглядят уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета. Отправным пунктом при решении этого вопроса снова является принцип наименьшего действия, применимость которого не ограничена никаким выбором системы отсчета; вместе с ним остаются в силе и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (39,2)$$

Однако функция Лагранжа уже не имеет вида (39,1), и для ее нахождения необходимо произвести соответствующее преобразование функции  $L_0$ .

Это преобразование мы произведем в два приема. Рассмотрим сначала систему отсчета  $K'$ , которая движется относительно инерциальной системы  $K_0$  поступательно со скоростью  $\mathbf{V}(t)$ . Скорости  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}'$  частицы относительно систем  $K_0$  и  $K'$  связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (39,3)$$

Подставив это выражение в (39,1), получим функцию Лагранжа в системе  $K'$

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + m\mathbf{v}'\mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U.$$

Но  $\mathbf{V}^2(t)$  есть заданная функция времени; она может быть представлена как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции,

и потому третий член в написанном выражении может быть опущен. Далее,  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ , где  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор частицы в системе координат  $K'$ ; поэтому

$$m\mathbf{V}(t)\mathbf{v}' = m\mathbf{V}\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}') - m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Подставив это в функцию Лагранжа и снова опустив полную производную по времени, получим окончательно:

$$L' = \frac{m{v'}^2}{2} - m\mathbf{W}(t)\mathbf{r}' - U, \quad (39,4)$$

где  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$  — ускорение поступательного движения системы отсчета  $K'$ .

Составляя с помощью (39,4) уравнение Лагранжа, получим:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \quad (39,5)$$

Мы видим, что в смысле своего влияния на уравнения движения частицы ускоренное поступательное движение системы отсчета эквивалентно появлению однородного силового поля, причем действующая в этом поле сила равна произведению массы частицы на ускорение  $\mathbf{W}$  и направлена в противоположную этому ускорению сторону.

Введем теперь еще одну систему отсчета,  $K$ , которая имеет общее с системой  $K'$  начало, но вращается относительно нее с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ ; по отношению же к инерциальной системе  $K_0$  система  $K$  совершает как поступательное, так и вращательное движение.

Скорость  $\mathbf{v}'$  частицы относительно системы  $K'$  складывается из ее скорости  $\mathbf{v}$  относительно системы  $K$  и скорости  $[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$  ее вращения вместе с системой  $K$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$$

(радиус-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  частицы в системах  $K$  и  $K'$  совпадают). Подставив это выражение в функцию Лагранжа (39,4), получим:

$$L = \frac{m{v}^2}{2} + m\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 - m\mathbf{W}\mathbf{r} - U. \quad (39,6)$$

Это есть общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета. Отметим, что вращение системы отсчета приводит к появлению в функции Лагранжа члена совершенно особого вида — линейного по скорости частицы.

Для вычисления производных, входящих в уравнение Лагранжа, пишем полный дифференциал

$$\begin{aligned} dL = m\mathbf{v}d\mathbf{v} + m d\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + m\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}d\mathbf{r}] + m[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}][\boldsymbol{\Omega}d\mathbf{r}] - \\ - m\mathbf{W}d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r} = m\mathbf{v}d\mathbf{v} + m d\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + m d\mathbf{r}[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \\ + m[[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]\boldsymbol{\Omega}]d\mathbf{r} - m\mathbf{W}d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Собирая члены, содержащие  $dv$  и  $dr$ , найдем:

$$\frac{\partial L}{\partial v} = mv + m[\Omega r],$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m[v\Omega] + m[\Omega r\Omega] - mW - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Подставив эти выражения в (39,2), получим искомое уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - mW + m[r\dot{\Omega}] + 2m[v\Omega] + m[\Omega[r\Omega]]. \quad (39,7)$$

Мы видим, что «силы инерции», обусловленные вращением системы отсчета, слагаются из трех частей. Сила  $m[r\dot{\Omega}]$  связана с неравномерностью вращения, а две другие присутствуют и при равномерном вращении. Сила  $2m[v\Omega]$  называется *силой Кориолиса*; в отличие от всех ранее рассматривавшихся (не диссипативных) сил она зависит от скорости частицы. Сила  $m[\Omega[r\Omega]]$  называется *центробежной*. Она направлена в плоскости, проходящей через  $r$  и  $\Omega$  перпендикулярно к оси вращения (т. е. направлению  $\Omega$ ), в сторону от оси; по величине центробежная сила равна  $m\rho\Omega^2$ , где  $\rho$  — расстояние частицы от оси вращения.

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного ускорения. Положив в (39,6) и (39,7)  $\Omega = \text{const}$ ,  $W = 0$ , получим функцию Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + mv[\Omega r] + \frac{m}{2}[\Omega r]^2 - U \quad (39,8)$$

и уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} + 2m[v\Omega] + m[\Omega[r\Omega]]. \quad (39,9)$$

Вычислим также энергию частицы в этом случае. Подставив

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv + m[\Omega r] \quad (39,10)$$

в  $E = pv - L$ , получим:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\Omega r]^2 + U. \quad (39,11)$$

Обратим внимание на то, что в энергии линейный по скорости член отсутствует. Влияние вращения системы отсчета сводится к добавлению в энергии члена, зависящего только от координат частицы и пропорционального квадрату угловой скорости. Эта дополнительная потенциальная энергия  $-\frac{m}{2}[\Omega r]^2$  называется *центробежной*.

Скорость  $v$  частицы относительно равномерно вращающейся системы отсчета связана с ее же скоростью  $v_0$  относительно инерциальной системы  $K_0$  посредством

$$v_0 = v + [\Omega r]. \quad (39,12)$$

Поэтому импульс  $\mathbf{p}$  (39,10) частицы в системе  $K$  совпадает с ее же импульсом  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$  в системе  $K_0$ . Вместе с ними совпадают также моменты импульсов  $\mathbf{M}_0 = [\mathbf{r}\mathbf{p}_0]$  и  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ . Энергии же частицы в системах  $K$  и  $K_0$  различны. Подставив  $\mathbf{v}$  из (39,12) в (39,11), получим:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m [\mathbf{r}\mathbf{v}_0] \boldsymbol{\Omega}.$$

Первые два члена представляют собой энергию  $E_0$  в системе  $K_0$ . Вводя в последний член момент импульса, получим:

$$E = E_0 - \mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}. \quad (39,13)$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе к равномерно вращающейся системе координат. Хотя мы вывели его для одной частицы, но очевидно, что вывод может быть непосредственно обобщен на случай любой системы частиц и приведет к той же формуле (39,13).

### Задачи

1. Найти отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли. (Угловую скорость вращения считать малой.)

Решение. В поле тяжести  $U = -m\mathbf{g}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести; пренебрегая в уравнении (39,9) центробежной силой, содержащей квадрат  $\boldsymbol{\Omega}$ , получим уравнение движения в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{g}. \quad (1)$$

Решаем это уравнение последовательными приближениями. Для этого полагаем:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , где  $\mathbf{v}_1$  — решение уравнения  $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$ , т. е.  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$  ( $\mathbf{v}_0$  — начальная скорость). Подставляя  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  в (1) и оставляя справа только  $\mathbf{v}_2$ , получим уравнение для  $\mathbf{v}_2$ :

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2[\mathbf{v}_1\boldsymbol{\Omega}] = 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}].$$

Интегрируя, получим:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + t^2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}], \quad (2)$$

где  $\mathbf{h}$  — вектор начального положения частицы.

Выберем ось  $z$  по вертикали вверх, а ось  $x$  — по меридиану к полюсу; тогда

$$g_x = \tilde{g}_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \lambda,$$

где  $\lambda$  — широта (которую для определенности предполагаем северной). Положив в (2)  $\mathbf{v}_0 = 0$ , найдем:

$$x = 0, \quad y = -\frac{t^3}{3}g\Omega \cos \lambda.$$

Подставив сюда время падения  $t \approx \sqrt{2/g}$ , найдем окончательно:

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3} \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} g\Omega \cos \lambda$$

(отрицательные значения  $y$  соответствуют отклонению на восток).

2. Определить отклонение от плоскости для тела, брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0$ .

Решение. Выбираем плоскость  $xz$  так, чтобы плоскость  $v_0$  лежала в ней. Начальная высота  $h=0$ . Для бокового отклонения получим из (2) (задача 1):

$$y = -\frac{t^3}{3} g \Omega_x + t^2 (\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

или, подставив время полета  $t \approx 2v_{0z}/g$ :

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2} \left( \frac{1}{3} v_{0z} \Omega_x - v_{0x} \Omega_z \right).$$

3. Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника (так называемый маятник Фуко).

Решение. Пренебрегая вертикальным смещением маятника как малой величиной второго порядка, можно считать движение тела происходящим в горизонтальной плоскости  $xy$ . Опуская члены, содержащие  $\Omega^2$ , напишем уравнения движения в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

где  $\omega$  — частота колебаний маятника без учета вращения Земли. Умножив второе уравнение на  $i$  и сложив с первым, получим одно уравнение

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

для комплексной величины  $\xi = x + iy$ . При  $\Omega_z \ll \omega$  решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = e^{-i\Omega_z t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

или

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t} (x_0 + iy_0),$$

где функции  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  дают траекторию маятника без учета вращения Земли. Влияние этого вращения сводится, следовательно, к повороту траектории вокруг вертикали с угловой скоростью  $\Omega_z$ .

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 40. Уравнения Гамильтона

Формулирование законов механики с помощью функции Лагранжа (и выводимых из нее уравнений Лагранжа) предполагает описание механического состояния системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание, однако, не является единственно возможным. Ряд преимуществ, в особенности при исследовании различных общих вопросов механики, представляет описание с помощью обобщенных координат и импульсов системы. В связи с этим возникает вопрос о нахождении уравнений движения, отвечающих такой формулировке механики.

Переход от одного набора независимых переменных к другому можно совершить путем преобразования, известного в математике под названием преобразования Лежандра. В данном случае оно сводится к следующему.

Полный дифференциал функции Лагранжа как функции координат и скоростей равен

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Это выражение можно написать в виде

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i, \quad (40,1)$$

поскольку производные  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  являются, по определению, обобщенными импульсами, а  $\partial L / \partial q_i = p_i$  в силу уравнений Лагранжа.

Переписав теперь второй член в (40,1) в виде

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

перенеся полный дифференциал  $d(\sum_i p_i \dot{q}_i)$  в левую сторону равенства и изменив все знаки, получим из (40,1):

$$d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала, представляет собой энергию системы (см. § 6); выраженная через координаты и импульсы,

она называется *гамильтоновой функцией* системы

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (40,2)$$

Из дифференциального равенства

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i, \quad (40,3)$$

следуют уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (40,4)$$

Это — искомые уравнения движения в переменных  $p$  и  $q$ , так называемые *уравнения Гамильтона*. Они составляют систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка для  $2s$  неизвестных функций  $p(t)$  и  $q(t)$ , заменяющих собой  $s$  уравнений второго порядка лагранжевого метода. Ввиду их формальной простоты и симметрии эти уравнения называют также *каноническими*.

Полная производная от функции Гамильтона по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

При подстановке сюда  $\dot{q}_i$  и  $\dot{p}_i$  из уравнений (40,4) последние два члена взаимно сокращаются, так что

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (40,5)$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то  $dH/dt = 0$ , т. е. мы снова приходим к закону сохранения энергии.

Наряду с динамическими переменными  $q$ ,  $\dot{q}$  или  $q$ ,  $p$  функции Лагранжа и Гамильтона содержат различные параметры — величины, характеризующие свойства самой механической системы или действующего на нее внешнего поля. Пусть  $\lambda$  — такой параметр. Рассматривая его как переменную величину, будем иметь вместо (40,1):

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

после чего вместо (40,3) получим:

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Отсюда находим соотношение

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{p, q} = - \left( \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{\dot{q}, q}, \quad (40,6)$$

связывающее частные производные по параметру  $\lambda$  от функций Лагранжа и Гамильтона; индексы у производных указывают, что дифференцирование должно производиться в одном случае при постоянных  $p$  и  $q$ , а в другом — при постоянных  $\dot{q}$  и  $q$ .

Этот результат может быть представлен и в другом аспекте. Пусть функция Лагранжа имеет вид  $L = L_0 + L'$ , где  $L'$  представляет

собой малую добавку к основной функции  $L_0$ . Тогда соответствующая добавка в функции Гамильтона  $H = H_0 + H'$  связана с  $L'$  посредством

$$(H')_{p, q} = -(L')_{\dot{q}, q}. \quad (40,7)$$

Заметим, что в преобразовании от (40,1) к (40,3) мы не писали члена с  $dt$ , учитывающего возможную явную зависимость функции Лагранжа от времени, поскольку последнее играло бы в данном аспекте лишь роль параметра, не имеющего отношения к производимому преобразованию. Аналогично формуле (40,6) частные производные по времени от  $L$  и от  $H$  связаны соотношением

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p, q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q}, q}. \quad (40,8)$$

### Задачи

1. Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Ответ. В декартовых координатах  $x, y, z$ :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся системе отсчета.

Решение. Из (39,11) и (39,10) получим:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega [\text{гр}] + U.$$

3. Найти функцию Гамильтона системы из одной частицы с массой  $M$  и  $n$  частиц с массами  $m$ , с исключенным движением центра инерции (см. задачу к § 13).

Решение. Энергия  $E$  получается из найденной в задаче к § 13 функции Лагранжа изменением знака перед  $U$ . Обобщенные импульсы:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v_a} = m v_a - \frac{m^2}{\mu} \sum_a v_a.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \sum p_a &= m \sum v_a - \frac{nm^2}{\mu} \sum v_a = \frac{mM}{\mu} \sum v_a, \\ v_a &= \frac{p_a}{m} + \frac{1}{M} \sum p_a. \end{aligned}$$

Подставив в  $E$ , найдем:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a p_a^2 + \frac{1}{2M} \left( \sum_a p_a \right)^2 + U.$$

### § 41. Функция Рауса

В некоторых случаях может оказаться целесообразным при переходе к новым переменным заменить на импульсы не все обобщенные скорости, а только некоторые из них. Соответствующее преобразование вполне аналогично произведенному в предыдущем параграфе.

Для упрощения записи формул предположим сначала, что имеются всего две координаты, которые мы обозначим, как  $q$  и  $\xi$ , и произведем преобразование от переменных  $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$  к переменным  $q, \xi, p, \dot{\xi}$ , где  $p$  — обобщенный импульс, соответствующий координате  $q$ .

Дифференциал функции Лагранжа  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  равен:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} = \\ &= \dot{p} dq + p d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p} dq - \dot{q} dp + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}.$$

Введем функцию (так называемую *функцию Рауса*)

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \quad (41,1)$$

в которой скорость  $\dot{q}$  выражена через импульс  $p$  при помощи равенства  $p = \partial L / \partial \dot{q}$ . Дифференциал

$$dR = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \quad (41,2)$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \quad (41,3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41,4)$$

Подставляя последние равенства в уравнение Лагранжа для координаты  $\xi$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \quad (41,5)$$

Таким образом, функция Рауса является гамильтоновой по отношению к координате  $q$  (уравнения (41,3)) и лагранжевой по отношению к координате  $\xi$  (уравнение (41,5)).

Согласно общему определению энергия системы

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

Ее выражение через функцию Рауса получается путем подстановки сюда (41,1) и (41,4)

$$E = R - \dot{\xi} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41,6)$$

Обобщение полученных формул на случай, когда имеется по нескольку координат  $q$  и  $\xi$ , очевидно.

Применение функции Рауса может быть целесообразным, в частности, при наличии циклических координат. Если координаты  $q$  — циклические, то они не входят явным образом в функцию Лагранжа, а потому и в функцию Рауса, так что последняя будет функцией только от  $p$ ,  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$ . Но импульсы  $p$ , соответствующие циклическим координатам, постоянны (это следует и из второго из уравнений (41,3), которое в этом смысле не дает ничего нового). После замены импульсов  $p$  их заданными постоянными значениями уравнения (41,5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}$$

превратятся в уравнения, содержащие только координаты  $\xi$ , так что циклические координаты тем самым исключаются полностью. Если эти уравнения решены и функции  $\xi(t)$  найдены, то, подставив их в правую часть уравнений

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p},$$

мы найдем прямым интегрированием функции  $q(t)$ .

#### Задача

Найти функцию Рауса симметрического волчка во внешнем поле  $U(\varphi, \theta)$ , исключив циклическую координату  $\psi$  ( $\psi, \varphi, \theta$  — эйлеровы углы).

Решение. Функция Лагранжа

$$L = \frac{I_1'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3'}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

(ср. задачу 1 § 35). Функция Рауса

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \dot{\varphi} \cos \theta - \frac{I_1'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + U(\varphi, \theta);$$

первый член в этом выражении представляет собой постоянную, которая может быть опущена.

### § 42. Скобки Пуассона

Пусть  $f(p, q, t)$  — некоторая функция координат импульсов и времени. Составим ее полную производную по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Подставив сюда вместо  $\dot{q}_k$  и  $\dot{p}_k$  их выражения из уравнений Гамильтона (40,4), получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \quad (42,1)$$

где введено обозначение

$$\{Hf\} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (42,2)$$

Выражение (42,2) называют *скобками Пуассона* для величин  $H$  и  $f$ .

Такие функции от динамических переменных, которые остаются постоянными при движении системы, называются, как мы знаем, интегралами движения. Мы видим из (42,1), что условие того, чтобы величина  $f$  была интегралом движения ( $df/dt = 0$ ), можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \quad (42,3)$$

Если же интеграл движения не зависит от времени явно, то

$$\{Hf\} = 0, \quad (42,4)$$

т. е. его скобки Пуассона с функцией Гамильтона должны обращаться в нуль.

Для любой пары величин  $f$  и  $g$  скобки Пуассона определяются аналогично (42,2):

$$\{fg\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (42,5)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами, легко выводимыми из определения.

Если переставить функции, то скобки переменяют знак; если одна из функций — постоянная ( $c$ ), то скобка равна нулю:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \quad (42,6)$$

$$\{fc\} = 0. \quad (42,7)$$

Далее,

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1g\} + \{f_2g\}, \quad (42,8)$$

$$\{f_1f_2, g\} = f_1\{f_2g\} + f_2\{f_1g\}. \quad (42,9)$$

Взяв частную производную от (42,5) по времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \quad (42,10)$$

Если одна из функций  $f$  или  $g$  совпадает с одним из импульсов или координат, то скобки Пуассона сводятся просто к частной производной:

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad (42,11)$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (42,12)$$

Формулу (42,11), например, получим, положив в (42,5)  $g = q_k$ ; вся сумма сведется при этом к одному члену, так как  $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$ , а  $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$ .

Положив в (42,11) и (42,12) функцию  $f$  равной  $q_i$  и  $p_i$ , получим, в частности,

$$\{q_i q_k\} = 0, \{p_i p_k\} = 0, \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \quad (42,13)$$

Между скобками Пуассона, составленными из трех функций, существует соотношение

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0; \quad (42,14)$$

оно называется *тождеством Якоби*.

Для его доказательства заметим следующее. Согласно определению (42,5) скобки Пуассона  $\{fg\}$  являются билинейной однородной функцией производных первого порядка от величины  $f$  и  $g$ . Поэтому, например, скобка  $\{h\{fg\}\}$  представляет собой линейную однородную функцию производных второго порядка от  $f$  и  $g$ . Вся же левая сторона равенства (42,14) в целом есть линейная однородная функция вторых производных от всех трех функций  $f, g, h$ . Соберем вместе члены, содержащие вторые производные от  $f$ . Первая скобка таких членов не содержит — в ней есть только первые производные от  $f$ . Сумму же второй и третьей скобок перепишем в символическом виде, введя линейные дифференциальные операторы  $D_1$  и  $D_2$  согласно

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} &= \{g\{hf\}\} - \{h\{gf\}\} = \\ &= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)f. \end{aligned}$$

Легко видеть, однако, что такая комбинация линейных дифференциальных операторов не может содержать вторых производных от  $f$ . В самом деле, общий вид линейных дифференциальных операторов есть

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где  $\xi_k, \eta_k$  — произвольные функции переменных  $x_1, x_2, \dots$ . Тогда

$$\begin{aligned} D_1 D_2 &= \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}, \\ D_2 D_1 &= \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

а разность этих произведений

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left( \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

есть снова оператор, содержащий только однократные дифференцирования. Таким образом, в левой стороне равенства (42,14) взаимно сокращаются все члены со вторыми производными от  $f$ , а поскольку то же самое относится, очевидно, и к функциям  $g$  и  $h$ , то и все выражение тождественно обращается в нуль.

Важное свойство скобок Пуассона состоит в том, что если  $f$  и  $g$  — два интеграла движения, то составленные из них скобки тоже являются интегралом движения

$$\{fg\} = \text{const} \quad (42,15)$$

(так называемая *теорема Пуассона*).

Доказательство этой теоремы совсем просто, если  $f$  и  $g$  не зависят от времени явно. Положив в тождестве Якоби  $h = H$ , получим:

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0.$$

Отсюда видно, что если  $\{Hg\} = 0$  и  $\{Hf\} = 0$ , то и  $\{H\{fg\}\} = 0$ , что и следовало доказать.

Если же интегралы движения  $f$  и  $g$  зависят явно от времени, то пишем на основании (42,1):

$$\frac{d}{dt} \{fg\} = \frac{\partial}{\partial t} \{fg\} + \{H\{fg\}\}.$$

Воспользовавшись формулой (42,10) и заменив скобку  $\{H\{fg\}\}$  двумя другими при помощи тождества Якоби, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{fg\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f\{gH\}\} - \{g\{Hf\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\} \right\} \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} \{fg\} = \left\{ \frac{df}{dt} g \right\} + \left\{ f \frac{dg}{dt} \right\}, \quad (42,16)$$

откуда очевидно доказательство теоремы Пуассона в общем случае.

Разумеется, применяя теорему Пуассона, мы не всегда будем получать новые интегралы движения, так как их число вообще ограничено ( $2s - 1$ , где  $s$  — число степеней свободы). В некоторых случаях мы можем получить тривиальный результат — скобки Пуассона сведутся к постоянной. В других случаях вновь полученный интеграл может оказаться просто функцией исходных интегралов  $f$  и  $g$ . Если же не имеет места ни тот, ни другой случай, то скобки Пуассона дают новый интеграл движения.

### Задачи

1. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса  $\mathbf{p}$  и момента импульса  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$  материальной частицы.

Решение. С помощью формулы (42,12) находим:

$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (y p_z - z p_y) = -p_z$$

и аналогичным образом еще две формулы

$$\{M_x p_x\} = 0, \quad \{M_x p_z\} = p_y.$$

Остальные скобки получаются отсюда циклической перестановкой индексов  $x, y, z$ .

2. Определить скобки Пуассона, составленные из компонент  $M$ .

Решение. Прямое вычисление по формуле (42,5) дает:

$$\{M_x M_y\} = -M_z, \quad \{M_y M_z\} = -M_x, \quad \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Поскольку импульсы и координаты различных частиц являются не зависимыми друг от друга переменными, то легко видеть, что полученные в задачах 1 и 2 формулы справедливы и для полных импульса и момента любой системы частиц.

3. Показать, что

$$\{ \varphi M_z \} = 0,$$

где  $\varphi$  — любая скалярная функция координат и импульса частицы.

Решение. Скалярная функция может зависеть от компонент векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  только в комбинациях  $r^2, p^2, \mathbf{r}\mathbf{p}$ . Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (r^2)} 2\mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{r}\mathbf{p})} \mathbf{p}$$

и аналогично для  $\partial \varphi / \partial \mathbf{p}$ . Искомое соотношение проверяется прямым вычислением по формуле (42,5) с учетом указанных правил дифференцирования.

4. Показать, что

$$\{ \mathbf{f} M_z \} = [\mathbf{f}\mathbf{n}],$$

где  $\mathbf{f}$  — векторная функция координат и импульса частицы, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ .

Решение. Произвольный вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  может быть написан в виде  $\mathbf{f} = r\varphi_1 + p\varphi_2 + [\mathbf{r}\mathbf{p}]\varphi_3$ , где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — скалярные функции. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением с помощью формул (42,9), (42,11), (42,12) и формулы, указанной в задаче 3.

### § 43. Действие как функция координат

При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (43,1)$$

взятый по траектории между двумя заданными положениями  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ , которые система занимает в заданные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . При варьировании же действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями  $q(t_1)$  и  $q(t_2)$ . Лишь одна из этих траекторий отвечает действительному движению — та, для которой интеграл  $S$  минимален.

Рассмотрим теперь понятие действия в другом аспекте. Именно, будем рассматривать  $S$  как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она имеет для траекторий, имеющих общее начало  $q(t_1) = q^{(1)}$ , но проходящих в момент  $t_2$  через различные положения. Другими словами, будем рассматривать интеграл действия для истинных траекторий как функцию значений координат в верхнем пределе интегрирования.

Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой траектории дается (при одной степени свободы) выражением (2,5)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Поскольку траектории действительного движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа, то стоящий здесь интеграл обращается в нуль. В первом же члене полагаем на нижнем пределе  $\delta q(t_1) = 0$ , а значение  $\delta q(t_2)$  обозначим просто, как  $\delta q$ . Заменяв также  $\partial L / \partial \dot{q}$  на  $p$ , получим окончательно:  $\delta S = p \delta q$  или в общем случае любого числа степеней свободы

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (43,2)$$

Из этого соотношения следует, что частные производные от действия по координатам равны соответствующим импульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (43,3)$$

Аналогичным образом действие можно понимать как явную функцию времени, рассматривая траектории, начинающиеся в заданный момент времени  $t_1$  в заданном положении  $q^{(1)}$ , но заканчивающиеся в заданном положении  $q^{(2)}$  в различные моменты времени  $t_2 = t$ . Понимаемую в этом смысле частную производную  $\partial S / \partial t$  можно найти путем соответствующего варьирования интеграла. Проще, однако, воспользоваться уже известной нам формулой (43,3), поступив следующим образом.

По самому определению действия его полная производная по времени вдоль траектории равна:

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43,4)$$

С другой стороны, рассматривая  $S$  как функцию координат и времени в описанном выше смысле и используя формулу (43,3), имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Сравнивая оба выражения, находим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

или окончательно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (43,5)$$

Формулы (43,3) и (43,5) вместе можно записать в виде выражения

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (43,6)$$

для полного дифференциала действия как функции координат и времени в верхнем пределе интегрирования в (43,1). Предположим теперь, что изменяются координаты (и время) не только конца, но и начала движения. Очевидно, что соответствующее изменение  $S$  будет даваться разностью выражений (43,6) на обоих концах, т. е.

$$dS = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \quad (43,7)$$

Это соотношение уже само по себе показывает, что, каково бы ни было внешнее воздействие на систему во время движения, ее конечное состояние не может быть произвольной функцией начального, — возможны только такие движения, при которых выражение в правой стороне равенства (43,7) является полным дифференциалом. Таким образом, уже самый факт существования принципа наименьшего действия, независимо от конкретного вида функции Лагранжа, накладывает на совокупность возможных движений определенные ограничения. В частности, оказывается возможным установить ряд общих закономерностей (не зависящих от вида имеющихся внешних полей) для пучков частиц, разлетающихся из заданных точек пространства. Изучение этих закономерностей составляет предмет так называемой *геометрической оптики*<sup>1)</sup>.

Интересно отметить, что уравнения Гамильтона могут быть выведены формальным образом из условия минимальности действия, если написать последнее, на основании (43,6), в виде интеграла

$$S = \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) \quad (43,8)$$

и рассматривать координаты и импульсы как независимо варьируемые величины. Предполагая снова для краткости, что имеется всего одна координата (и один импульс), пишем вариацию действия

$$\delta S = \int \left\{ \delta p dq + p \delta q - \frac{\partial I}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right\}.$$

Преобразование второго члена (интегрирование по частям) дает:

$$\delta S = \int \delta p \left( dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q \Big| - \int \delta q \left( dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right).$$

На границах интегрирования мы должны положить  $\delta q = 0$ , так что проинтегрированный член выпадает. Остающееся же выражение может быть равным нулю при произвольных независимых  $\delta p$  и  $\delta q$

<sup>1)</sup> См. «Теория поля», гл. VII.

лишь при условии обращения в нуль подинтегральных выражений в каждом из двух интегралов:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = - \frac{\partial H}{\partial q} dt,$$

т. е. мы получаем после деления на  $dt$  уравнения Гамильтона.

### § 44. Принцип Мопертюи

Принципом наименьшего действия движение механической системы определяется полностью: путем решения следующих из этого принципа уравнений движения можно найти как форму траектории, так и зависимость положения на траектории от времени.

Если ограничиться более узким вопросом об определении лишь самой траектории (оставляя в стороне временную часть задачи), то оказывается возможным установить для этой цели упрощенную форму принципа наименьшего действия.

Предположим, что функция Лагранжа, а с нею и функция Гамильтона не содержат времени явно, так что энергия системы сохраняется:

$$H(p, q) = E = \text{const.}$$

Согласно принципу наименьшего действия, вариация действия для заданных начальных и конечных значений координат и моментов времени (скажем,  $t_0$  и  $t$ ) равна нулю. Если же допускать варьирование конечного момента времени  $t$  при фиксированных по-прежнему начальных и конечных координатах, то имеем (ср. (43,7)):

$$\delta S = - H \delta t. \quad (44,1)$$

Будем теперь сравнивать не все виртуальные движения системы, а лишь те, которые удовлетворяют закону сохранения энергии. Для таких траекторий мы можем заменить  $H$  в (44,1) постоянной  $E$ , что дает

$$\delta S + E \delta t = 0. \quad (44,2)$$

Написав действие в виде (43,8) и снова заменяя  $H$  на  $E$ , имеем:

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_0). \quad (44,3)$$

Первый член в этом выражении

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \quad (44,4)$$

иногда называют *укороченным действием*. Подставив (44,3) в (44,2), найдем:

$$\delta S_0 = 0. \quad (44,5)$$

Таким образом, укороченное действие имеет минимум по отношению ко всем траекториям, удовлетворяющим закону сохранения энергии и проходящим через конечную точку в произвольный момент времени. Для того чтобы пользоваться таким вариационным принципом, необходимо предварительно выразить импульсы, а с ними и все подинтегральное выражение в (44,4) через координаты  $q$  и их дифференциалы  $dq$ . Для этого надо воспользоваться равенствами

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \left( q, \frac{dq}{dt} \right), \quad (44,6)$$

представляющими собой определение импульсов, и уравнением закона сохранения энергии

$$E \left( q, \frac{dq}{dt} \right) = E. \quad (44,7)$$

Выразив из последнего уравнения дифференциал  $dt$  через координаты  $q$  и их дифференциалы  $dq$  и подставив в формулы (44,6), мы выразим импульсы через  $q$  и  $dq$ , причем энергия  $E$  будет играть роль параметра. Получающийся таким образом вариационный принцип определяет траекторию системы; этот принцип называют обычно *принципом Мопертю* (хотя его точная формулировка была дана Эйлером и Лагранжем).

Произведем указанные действия в явном виде для обычной формы функции Лагранжа (5,5) как разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

При этом импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

а энергия

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

Из последнего равенства имеем

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E-U)}} \quad (44,8)$$

и, подставляя это выражение в

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i, k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i,$$

найдем укороченное действие в виде

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U) \sum_{i, k} a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (44,9)$$

В частности, для одной материальной точки кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$$

(где  $m$  — масса частицы, а  $dl$  — элемент длины траектории) и вариационный принцип для определения формы траектории

$$\delta \int \sqrt{2m(E-U)} dl = 0, \quad (44,10)$$

где интеграл берется между двумя заданными точками пространства. В таком виде он был представлен Якоби.

При свободном движении частицы  $U=0$ , и (44,10) дает тривиальный результат

$$\delta \int dl = 0,$$

т. е. частица движется по кратчайшему пути — по прямой.

Вернемся снова к выражению для действия (44,3) и произведем на этот раз его варьирование также и по параметру  $E$ :

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E - E \delta t.$$

Подставив это в (44,2), находим:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \quad (44,11)$$

Для укороченного действия в форме (44,9) это равенство приводит к соотношению

$$\delta \int \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E-U)}} = t - t_0, \quad (44,12)$$

которое представляет собой не что иное, как интеграл уравнения (44,8). Вместе с уравнением траектории оно полностью определяет движение.

### Задача

Из вариационного принципа (44,10) получить дифференциальное уравнение траектории.

Решение. Производя варьирование, имеем:

$$\delta \int \sqrt{E-U} dl = - \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\delta r}{2 \sqrt{E-U}} dl - \sqrt{E-U} \frac{dr}{dt} d \delta r \right\}.$$

Во втором члене учтено, что  $dl^2 = dr^2$  и потому  $dl d \delta l = dr d \delta r$ ; производя в этом члене интегрирование по частям и приравняв затем нулю коэффициент при  $d \delta r$  в подынтегральном выражении, получим дифференциальное уравнение траектории

$$2 \sqrt{E-U} \frac{d}{dl} \left( \sqrt{E-U} \frac{dr}{dl} \right) = - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Раскрыв производную в левой стороне равенства и вводя силу  $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{r}$ , можно представить это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{Ft}) \mathbf{t}}{2(E - U)},$$

где  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$  — единичный вектор касательной к траектории. Разность  $\mathbf{F} - (\mathbf{Ft}) \mathbf{t}$  есть нормальная к траектории компонента силы  $\mathbf{F}_n$ . Производная же  $d^2 \mathbf{r}/dt^2 = d\mathbf{t}/dt$ , как известно из дифференциальной геометрии, равна  $\mathbf{n}/R$ , где  $R$  — радиус кривизны траектории, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор главной нормали к ней. Заменив также  $E - U$  на  $mv^2/2$  получим:

$$\mathbf{n} \frac{mv^2}{R} = \mathbf{F}_n$$

в соответствии с известным выражением для нормального ускорения при движении по искривленной траектории.

### § 45. Канонические преобразования

Выбор обобщенных координат  $q$  не ограничен никакими условиями — ими могут быть любые  $s$  величин, однозначно определяющие положение системы в пространстве. Формальный вид уравнений Лагранжа (2,6) не зависит от этого выбора, и в этом смысле можно сказать, что уравнения Лагранжа инвариантны по отношению к преобразованию от координат  $q_1, q_2, \dots$  к любым другим независимым величинам  $Q_1, Q_2, \dots$ . Новые координаты  $Q$  являются функциями старых координат  $q$ , причем допустим и такой их выбор, при котором эта связь содержит в явном виде также и время, т. е. речь идет о преобразованиях вида

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (45,1)$$

(их называют иногда *точечными преобразованиями*).

Наряду с уравнениями Лагранжа при преобразовании (45,1) сохраняют, разумеется, свою форму (40,4) и уравнения Гамильтона. Последние, однако, допускают в действительности гораздо более широкий класс преобразований. Это обстоятельство естественным образом связано с тем, что в гамильтоновом методе импульсы  $p$  играют наряду с координатами  $q$  роль равноправных независимых переменных. Поэтому понятие преобразования может быть расширено так, чтобы включить в себя преобразование всех  $2s$  независимых переменных  $p$  и  $q$  к новым переменным  $P$  и  $Q$  по формулам

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t). \quad (45,2)$$

Такое расширение класса допустимых преобразований является одним из существенных преимуществ гамильтонового метода механики.

Однако отнюдь не при произвольных преобразованиях вида (45,2) уравнения движения сохраняют свой канонический вид. Выведем теперь условия, которым должно удовлетворять преобразование, для того чтобы уравнения движения в новых переменных  $P, Q$

имели вид

$$Q_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (45,3)$$

с некоторой новой функцией Гамильтона  $H'(P, Q)$ . Такие преобразования называют *каноническими*.

К формулам для канонических преобразований можно придти следующим путем. В конце § 43 было показано, что уравнения Гамильтона могут быть получены из принципа наименьшего действия, представленного в форме

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0 \quad (45,4)$$

(причем варьируются независимо все координаты и импульсы). Для того чтобы новые переменные  $P$  и  $Q$  тоже удовлетворяли уравнениям Гамильтона, для них тоже должен быть справедлив принцип наименьшего действия

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right) = 0. \quad (45,5)$$

Но два принципа (45,4) и (45,5) эквивалентны друг другу только при условии, что их подинтегральные выражения отличаются лишь на полный дифференциал произвольной функции  $F$  координат, импульсов и времени; тогда разность между обоими интегралами будет несущественной при варьировании постоянной (разность значений  $F$  на пределах интегрирования). Таким образом, должно быть:

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - H' dt + dF.$$

Всякое каноническое преобразование характеризуется своей функцией  $F$ , которую называют *производящей функцией* преобразования.

Переписав полученное соотношение в виде

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (45,6)$$

мы видим, что

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}; \quad (45,7)$$

при этом предполагается, что производящая функция задана как функция старых и новых координат (и времени):  $F = F(q, Q, t)$ . При заданной функции  $F$  формулы (45,7) устанавливают связь между старыми  $(p, q)$  и новыми  $(P, Q)$  переменными, а также дают выражение для новой гамильтоновой функции.

Может оказаться удобным выражать производящую функцию не через переменные  $q$  и  $Q$ , а через старые координаты  $q$  и новые импульсы  $P$ . Для вывода формул канонических преобразований в этом случае надо произвести в соотношении (45,6) соответствующее преобразование Лежандра. Именно, переписываем его в виде

$$d(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H) dt.$$

Выражение, стоящее под знаком дифференциала в левой стороне равенства, выраженное через переменные  $q, P$ , и является новой производящей функцией. Обозначив ее посредством  $\Phi(q, P, t)$ , имеем<sup>1)</sup>:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (45,8)$$

Аналогичным образом можно перейти к формулам канонических преобразований, выраженных через производящие функции, зависящие от переменных  $p$  и  $Q$  или  $p$  и  $P$ .

Отметим, что связь между новой и старой гамильтоновыми функциями всегда выражается одинаковым образом: разность  $H' - H$  дается частной производной по времени от производящей функции. В частности, если последняя не зависит от времени, то  $H' = H$ . Другими словами, в этом случае для получения новой функции Гамильтона достаточно подставить в  $H$  величины  $p, q$ , выраженные через новые переменные  $P, Q$ .

Широта канонических преобразований в значительной степени лишает в гамильтоновом методе понятие обобщенных координат и импульсов их первоначального смысла. Поскольку преобразования (45,2) связывают каждую из величин  $P, Q$  как с координатами  $q$ , так и с импульсами  $p$ , то переменные  $Q$  уже не имеют смысла чисто пространственных координат. Различие между обеими группами переменных становится в основном вопросом номенклатурным. Это обстоятельство весьма наглядно проявляется, например, в преобразовании  $Q_i = p_i, P_i = -q_i$ <sup>2)</sup>, явно не меняющем канонический вид уравнений и сводящемся просто ко взаимному переименованию координат и импульсов.

Ввиду этой условности терминологии переменные  $p$  и  $q$  в гамильтоновом методе часто называют просто *канонически сопряженными величинами*.

Условие канонической сопряженности можно выразить с помощью скобок Пуассона. Для этого докажем предварительно общую теорему об инвариантности скобок Пуассона по отношению к каноническим преобразованиям.

Пусть  $\{fg\}_{p,q}$  — скобка Пуассона величин  $f$  и  $g$ , в которой дифференцирование производится по переменным  $p, q$ , а  $\{fg\}_{P,Q}$  —

<sup>1)</sup> Заметим, что, взяв производящую функцию в виде

$$\Phi = \sum_i f_i(q, t) P_i,$$

(где  $f_i$  — произвольные функции), мы получим преобразование, при котором новые координаты  $Q_i = f_i(q, t)$ , т. е. выражаются только через старые координаты (но не импульсы). Это — точечные преобразования, которые естественным образом оказываются частным случаем канонических преобразований.

<sup>2)</sup> Ему отвечает производящая функция  $F = \sum q_i Q_i$ .

скобка Пуассона тех же величин, дифференцируемых по каноническим переменным  $P, Q$ . Тогда

$$\{fg\}_{p, q} = \{fg\}_{p, q}. \quad (45,9)$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться прямым вычислением с использованием формул канонического преобразования. Можно, однако, обойтись и без вычислений с помощью следующего рассуждения.

Прежде всего замечаем, что в канонических преобразованиях (45,7) или (45,8) время играет роль параметра. Поэтому, если мы докажем теорему (45,9) для величин, не зависящих явно от времени, то она будет верна и в общем случае. Рассмотрим теперь чисто формальным образом величину  $g$  как гамильтонovu функцию некоторой фиктивной системы. Тогда согласно формуле (42,1)  $\{fg\}_{p, q} = -df/dt$ . Но производная  $df/dt$  есть величина, которая может зависеть лишь от свойств движения (нашей фиктивной системы) как такового, а не от того или иного выбора переменных. Поэтому и скобка Пуассона  $\{fg\}$  не может измениться при переходе от одних канонических переменных к другим.

Из формул (42,13) и теоремы (45,9) получим:

$$\{Q_i Q_k\}_{p, q} = 0, \quad \{P_i P_k\}_{p, q} = 0, \quad \{P_i Q_k\}_{p, q} = \delta_{ik}. \quad (45,10)$$

Это — записанные с помощью скобок Пуассона условия, которым должны удовлетворять новые переменные, для того чтобы преобразование  $p, q \rightarrow P, Q$  было каноническим.

Интересно отметить, что изменение величин  $p, q$  при самом движении можно рассматривать как канонические преобразования. Смысл этого утверждения состоит в следующем. Пусть  $q_t, p_t$  — значения канонических переменных в момент времени  $t$ , а  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  — их значения в другой момент  $t + \tau$ . Последние являются некоторыми функциями от первых (и от величины интервала  $\tau$  как от параметра):

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau).$$

Если рассматривать эти формулы как преобразование от переменных  $q_t, p_t$  к переменным  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ , то это преобразование будет каноническим. Это очевидно из выражения  $dS = \sum (p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t)$  для дифференциала действия  $S(q_{t+\tau}, q_t)$ , взятого вдоль истинной траектории, проходящей через точки  $q_t$  и  $q_{t+\tau}$  в заданные моменты времени  $t$  и  $t + \tau$  (ср. (43,7)). Сравнение этой формулы с (45,6) показывает, что  $-S$  есть производящая функция преобразования.

## § 46. Теорема Лиувилля

Для геометрической интерпретации механических явлений часто пользуются понятием о так называемом *фазовом пространстве* как о пространстве  $2s$  измерений, на координатных осях которого откладываются значения  $s$  обобщенных координат и  $s$  импульсов данной механической системы. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую фазовой траекторией. Произведение дифференциалов

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

можно рассматривать как «элемент объема» фазового пространства. Рассмотрим теперь интеграл  $\int d\Gamma$ , взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям: если произвести каноническое преобразование от переменных  $p, q$  к переменным  $P, Q$ , то объемы соответствующих друг другу областей пространств  $p, q$  и  $P, Q$  одинаковы:

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s. \quad (46,1)$$

Как известно, преобразование переменных в кратном интеграле производится по формуле

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s,$$

где

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \quad (46,2)$$

есть так называемый якобиан преобразования. Поэтому доказательство теоремы (46,1) сводится к доказательству того, что якобиан всякого канонического преобразования равен единице:

$$D = 1. \quad (46,3)$$

Воспользуемся известным свойством якобианов, которое позволяет обращаться с ними в определенном смысле, как с дробями. «Разделив числитель и знаменатель» на  $\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)$ , получим:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \bigg/ \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}.$$

Согласно другому известному правилу якобиан, у которого в «числителе» и «знаменателе» фигурируют одинаковые величины, сводится к якобиану от меньшего числа переменных, причем при всех дифференцированиях в нем выпавшие одинаковые величины должны

считаться постоянными. Поэтому

$$D = \left\{ \frac{\partial (Q_1, \dots, Q_s)}{\partial (q_1, \dots, q_s)} \right\}_{P=\text{const}} / \left\{ \frac{\partial (p_1, \dots, p_s)}{\partial (P_1, \dots, P_s)} \right\}_{q=\text{const}}. \quad (46,4)$$

Рассмотрим якобиан, стоящий в числителе этого выражения. Согласно определению это есть определитель ранга  $s$ , составленный из элементов  $\partial Q_i / \partial q_k$  (элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца). Представив каноническое преобразование с помощью производящей функции  $\Phi(q, P)$  в форме (45,8), получим:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}.$$

Таким же образом найдем, что  $i, k$ -й элемент определителя в знаменателе выражения (46,4) равен  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}$ . Это значит, что оба определителя отличаются только заменой строк на столбцы и обратно. Поэтому они равны друг другу, так что отношение (46,4) равно единице, что и требовалось доказать.

Представим себе теперь, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом его объем остается неизменным:

$$\int d\Gamma = \text{const}. \quad (46,5)$$

Это утверждение (так называемая *теорема Лиувилля*) непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях и из того, что самое изменение  $p$  и  $q$  при движении можно рассматривать (как было указано в конце предыдущего параграфа) как каноническое преобразование.

Совершенно аналогичным образом можно доказать инвариантность интегралов

$$\begin{aligned} & \iint \sum_i dq_i dp_i, \\ & \iiint \sum_{i \neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

в которых интегрирование производится по заданным двух-, четырех- и т. д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве.

## § 47. Уравнение Гамильтона—Якоби

В § 43 было введено понятие о действии как функции координат и времени. Было показано, что частная производная по времени от этой функции  $S(q, t)$  связана с функцией Гамильтона соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

а ее частные производные по координатам совпадают с импульсами. Заменяя в соответствии с этим импульсы  $p$  в функции Гамильтона производными  $\partial S/\partial q$ , мы получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \quad (47,1)$$

которому должна удовлетворять функция  $S(q, t)$ . Это уравнение в частных производных первого порядка; оно называется *уравнением Гамильтона—Якоби*.

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями уравнение Гамильтона—Якоби также является основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движения.

Переходя к изложению этого метода, напомним предварительно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения. В механических приложениях, однако, основную роль играет не общий интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, а так называемый *полный интеграл*; так называется решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных.

В уравнении Гамильтона—Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому для системы с  $s$  степенями свободы полный интеграл этого уравнения должен содержать  $s+1$  произвольных постоянных. При этом, поскольку функция  $S$  входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом, т. е. полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A, \quad (47,2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  и  $A$  — произвольные постоянные<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Хотя общий интеграл уравнения Гамильтона—Якоби нам не понадобится, но укажем, что он может быть найден, если известен полный интеграл. Для этого будем считать величину  $A$  произвольной функцией остальных постоянных:

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Заменяя здесь величины  $\alpha_i$  функциями координат и времени, которые находим из  $s$  условий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0,$$

получим общий интеграл, зависящий от вида произвольной функции  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . Действительно, для полученной таким способом функции  $S$  имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

Но величины  $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$  удовлетворяют уравнению Гамильтона—Якоби, поскольку функция  $S(t, q; \alpha)$  есть по предположению полный интеграл этого уравнения. Поэтому удовлетворяют ему и производные  $\partial S/\partial q_i$ .

Выясним теперь связь между полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби и интересующим нас решением уравнений движения. Для этого произведем каноническое преобразование от величин  $q, p$  к новым переменным, причем функцию  $f(t, q, \alpha)$  выберем в качестве производящей функции, а величины  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  — в качестве новых импульсов. Новые координаты обозначим посредством  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Так как производящая функция зависит от старых координат и новых импульсов, мы должны пользоваться формулами (45,8):

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Но поскольку функция  $f$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби, то мы видим, что новая функция Гамильтона обращается тождественно в нуль:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Поэтому канонические уравнения для новых переменных имеют вид  $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$ , откуда следует, что

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \text{const}. \quad (47,3)$$

С другой стороны, с уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

дают возможность выразить  $s$  координат  $q$  через время и  $2s$  постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Тем самым мы найдем общий интеграл уравнений движения.

Таким образом, решение задачи о движении механической системы методом Гамильтона—Якоби сводится к следующим операциям.

По функции Гамильтона составляется уравнение Гамильтона—Якоби и находится полный интеграл (47,2) этого уравнения. Дифференцируя его по произвольным постоянным  $\alpha$  и приравнивая новым постоянным  $\beta$ , получаем систему  $s$  алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (47,4)$$

решая которую, найдем координаты  $q$  как функции времени и  $2s$  произвольных постоянных. Зависимость импульсов от времени можно найти затем по уравнениям  $p_i = \partial S / \partial q_i$ .

Если мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, зависящий от меньшего чем  $s$  числа произвольных постоянных, то хотя с его помощью нельзя найти общий интеграл уравнений движения, но можно несколько упростить задачу его нахождения. Так, если известна функция  $S$ , содержащая одну произвольную постоянную  $\alpha$ , то соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

дает одно уравнение, связывающее  $q_1, \dots, q_s$  и  $t$ .

Уравнение Гамильтона—Якоби принимает несколько более простую форму в том случае, когда функция  $H$  не зависит от времени явно, т. е. система консервативна. Зависимость действия от времени сводится при этом к слагаемому —  $Et$ :

$$S = S_0(q) - Et \quad (47,5)$$

(см. § 44), и подстановкой в (47,1) мы получаем для укороченного действия  $S_0(q)$  уравнение Гамильтона—Якоби в виде

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \quad (47,6)$$

### § 48. Разделение переменных

В ряде важных случаев нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби может быть достигнуто путем так называемого *разделения переменных*, сущность которого состоит в следующем.

Допустим, что какая-либо координата — обозначим ее  $q_1$  — и соответствующая ей производная  $\partial S/\partial q_1$  входят в уравнение Гамильтона—Якоби только в виде некоторой комбинации  $\Phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ , не содержащей никаких других координат (или времени) и производных, т. е. уравнение имеет вид

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \Phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0, \quad (48,1)$$

где  $q_i$  обозначает совокупность всех координат за исключением  $q_1$ .

Будем искать в этом случае решение в виде суммы

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1). \quad (48,2)$$

Подставив это выражение в уравнение (48,1), получим:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \Phi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\} = 0. \quad (48,3)$$

Предположим, что решение (48,2) найдено. Тогда после подстановки его в уравнение (48,3) последнее должно обратиться в тождество, справедливое, в частности, при любом значении координаты  $q_1$ . Но при изменении  $q_1$  может меняться только функция  $\Phi$ ; поэтому тождественность равенства (48,3) требует, чтобы и функция  $\Phi$  сама по себе была постоянной. Таким образом, уравнение (48,3) распадается на два уравнения:

$$\Phi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \quad (48,4)$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0, \quad (48,5)$$

где  $\alpha_1$  — произвольная постоянная. Первое из них есть обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого функция  $S_1(q_1)$  может

быть определена простым интегрированием. После этого остается дифференциальное уравнение в частных производных (48,5), но уже с меньшим числом независимых переменных.

Если таким способом можно последовательно отделить все  $s$  координат и время, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби целиком сводится к квадратурам. Для консервативной системы речь фактически идет лишь о разделении  $s$  переменных (координат) в уравнении (47,6), и при полном разделении искомый интеграл уравнения имеет вид

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s) t, \quad (48,6)$$

где каждая из функций  $S_k$  зависит лишь от одной из координат, а энергия  $E$  как функция произвольных постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  получается подстановкой  $S_0 = \sum S_k$  в уравнение (47,6).

Частным случаем разделения является случай циклической переменной. Циклическая координата  $q_1$  вовсе не входит в явном виде в функцию Гамильтона, а потому и в уравнение Гамильтона—Якоби. Функция  $\varphi(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1})$  сводится при этом просто к  $\partial S / \partial q_1$ , и из уравнения (48,4) имеем просто  $S_1 = \alpha_1 q_1$ , так что

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \quad (48,7)$$

Постоянная  $\alpha_1$  есть при этом не что иное, как постоянное значение импульса  $p_1 = \partial S / \partial q_1$ , отвечающего циклической координате. Отметим, что отделение времени в виде члена  $-Et$  для консервативной системы тоже соответствует методу разделения переменных для «циклической переменной»  $t$ .

Таким образом, все рассматривавшиеся ранее случаи упрощения интегрирования уравнений движения, основанные на использовании циклических переменных, охватываются методом разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. К ним добавляется еще ряд случаев, когда разделение переменных возможно, хотя координаты не являются циклическими. Все это приводит к тому, что метод Гамильтона—Якоби является наиболее могущественным методом нахождения общего интеграла уравнений движения.

Для разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби существен удачный выбор координат. Рассмотрим некоторые примеры разделения переменных в различных координатах, которые могут представить физический интерес в связи с задачами о движении материальной точки в различных внешних полях.

**1. Сферические координаты.** В этих координатах  $(r, \theta, \varphi)$  функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi)$$

и разделение переменных возможно, если

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

где  $a(r)$ ,  $b(\theta)$ ,  $c(\varphi)$  — произвольные функции. Последний член в этом выражении вряд ли может представить физический интерес, и потому мы рассмотрим поле вида

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \quad (48,8)$$

В этом случае уравнение Гамильтона—Якоби для функции  $S_0$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 = E.$$

Учитывая цикличность координаты  $\varphi$ , ищем решение в виде

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

и для функций  $S_1(r)$  и  $S_2(\theta)$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} &= \beta, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} &= E. \end{aligned}$$

Интегрируя их, получим окончательно:

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \\ + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr. \end{aligned} \quad (48,9)$$

Произвольными постоянными здесь являются  $p_\varphi$ ,  $\beta$ ,  $E$ ; дифференцируя по ним и приравнявая результат дифференцирования новым постоянным, найдем общее решение уравнений движения.

**2. Параболические координаты.** Переход к параболическим координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  совершается от цилиндрических координат (которые в этом параграфе мы будем обозначать, как  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ) по формулам

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \quad (48,10)$$

Координаты  $\xi$  и  $\eta$  пробегает значения от нуля до  $\infty$ ; поверхности постоянных  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой, как легко убедиться, два семейства параболоидов вращения (с осью  $z$  в качестве оси симметрии). Связь (48,10) можно представить еще и в другой форме, введя радиус

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta). \quad (48,11)$$

Тогда

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48,12)$$

Составим функцию Лагранжа материальной точки в координатах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$ . Дифференцируя выражения (48,10) по времени и подставляя в

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(функция Лагранжа в цилиндрических координатах), получим:

$$L = \frac{m}{8} (\xi + \eta) \left( \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) + \frac{m}{2} \xi \eta \dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48,13)$$

Импульсы равны

$$p_{\xi} = \frac{m}{4\xi} (\xi + \eta) \dot{\xi}, \quad p_{\eta} = \frac{m}{4\eta} (\xi + \eta) \dot{\eta}, \quad p_{\varphi} = m\xi\eta\dot{\varphi}$$

и функция Гамильтона

$$H = \frac{2}{m} \frac{\xi p_{\xi}^2 + \eta p_{\eta}^2}{\xi + \eta} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48,14)$$

Физически интересные случаи разделения переменных в этих координатах соответствуют потенциальной энергии вида

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r+z) + b(r-z)}{2r}. \quad (48,15)$$

Имеем уравнение

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E.$$

Циклическая координата  $\varphi$  отделяется в виде  $p_{\varphi}\varphi$ . Умножив затем уравнение на  $m(\xi + \eta)$  и перегруппировав члены, получим:

$$2\xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_{\varphi}^2}{2\xi} + 2\eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_{\varphi}^2}{2\eta} = 0.$$

Положив

$$S_0 = p_{\varphi}\varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta),$$

получим два уравнения

$$2\xi \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_{\varphi}^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_{\varphi}^2}{2\eta} = -\beta$$

и, интегрируя их, найдем окончательно:

$$S = -Et + p_{\varphi}\varphi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_{\varphi}^2}{4\xi^2}} d\xi + \\ + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_{\varphi}^2}{4\eta^2}} d\eta \quad (48,16)$$

с произвольными постоянными  $p_{\varphi}$ ,  $\beta$ ,  $E$ .

**3. Эллиптические координаты.** Эти координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  вводятся согласно формулам

$$\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \sigma \xi \eta. \quad (48,17)$$

Постоянная  $\sigma$  является параметром преобразования. Координата  $\xi$  пробегает значения от единицы до  $\infty$ , а координата  $\eta$  от  $-1$  до  $+1$ . Геометрически более наглядные соотношения получаются, если ввести расстояния  $r_1$  и  $r_2$  до точек  $A_1$  и  $A_2$  на оси  $z$  с координатами  $z = \sigma$  и  $z = -\sigma$ <sup>1)</sup>:  $r_1 = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$ .

Подставив сюда выражения (48,17), получим:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi - \eta), & r_2 &= \sigma(\xi + \eta), \\ \xi &= \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}, & \eta &= \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \end{aligned} \quad (48,18)$$

Преобразуя функцию Лагранжа от цилиндрических координат к эллиптическим, найдем:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\sigma^2}{2} (\dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \\ &+ \frac{m\sigma^2}{2} (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \end{aligned} \quad (48,19)$$

Отсюда для функции Гамильтона получим:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m\sigma^2} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\varphi^2 \right] + \\ &+ U(\xi, \eta, \varphi). \end{aligned} \quad (48,20)$$

Физически интересные случаи разделения переменных соответствуют потенциальной энергии

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left\{ a \left( \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \right) \right\}, \quad (48,21)$$

где  $a(\xi)$  и  $b(\eta)$  — произвольные функции. Результат разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби гласит:

$$\begin{aligned} S &= -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \\ &+ \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta. \end{aligned} \quad (48,22)$$

<sup>1)</sup> Линии постоянных  $\xi$  представляют собой семейство эллипсоидов

$$\frac{z^2}{\sigma^2 \xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2 (\xi^2 - 1)} = 1$$

с фокусами в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а линии постоянных  $\eta$  — семейство софокусных с ними гиперболоидов

$$\frac{z^2}{\sigma^2 \eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2 (1 - \eta^2)} = 1.$$

## Задачи

1. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби для движения частицы в поле

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(наложение кулоновского и однородного полей); найти специфическую для такого движения сохраняющуюся функцию координат и импульсов.

Решение. Данное поле относится к типу (48,15), причем

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2} \xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2} \eta^2.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби дается формулой (48,16) с этими функциями  $\alpha(\xi)$  и  $b(\eta)$ .

Для выяснения смысла постоянной  $\beta$  пишем уравнения

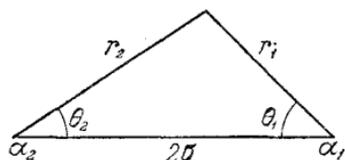


Рис. 55.

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta.$$

Вычтя одно из этих уравнений из другого и выразив импульсы  $p_\xi = \partial S / \partial \xi$  и  $p_\eta = \partial S / \partial \eta$  через импульсы  $p_\rho = \partial S / \partial \rho$  и  $p_z = \partial S / \partial z$  в цилиндрических координатах, получим после простого приведения:

$$\beta = -m \left[ \frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m} (z p_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\varphi^2}{m \rho^2} z \right] - \frac{m}{2} F \rho^2.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой интеграл движения, специфический для чисто кулоновского поля ( $z$ -компонента вектора (15,17)).

2. То же в поле

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(кулоновское поле двух неподвижных центров на расстоянии  $2\sigma$  друг от друга).

Решение. Данное поле относится к типу (48,21), причем

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma} \xi, \quad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma} \eta.$$

Действие  $S(\xi, \eta, \varphi, t)$  получается подстановкой этих выражений в (48,22). Смысл постоянной  $\beta$  выясняется аналогично тому, как это было сделано в задаче 1; она выражает собой в данном случае сохранение следующей величины:

$$\beta = \sigma^2 \left( p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) - M^2 + 2m\sigma (\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2),$$

где

$$M^2 = [\mathbf{r}\mathbf{p}]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z^2 \rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho,$$

а  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы, указанные на рис. 55.

## § 49. Адиабатические инварианты

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром  $\lambda$ , определяющим свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится<sup>1)</sup>.

Предположим, что параметр  $\lambda$  под влиянием каких-либо внешних причин медленно (как говорят, *адиабатически*) меняется со временем. Под медленным подразумевается такое изменение, при котором  $\lambda$  мало меняется за время периода движения системы  $T$ :

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (49,1)$$

При постоянном  $\lambda$  система была бы замкнутой и совершала бы строго периодическое движение с постоянной энергией  $E$  и вполне определенным периодом  $T(E)$ . При переменном параметре  $\lambda$  система не является замкнутой и ее энергия не сохраняется. Но в силу предположенной медленности изменения  $\lambda$  скорость  $\dot{E}$  изменения энергии будет тоже малой. Если усреднить эту скорость по периоду  $T$  и тем самым сгладить «быстрые» колебания в ее величине, то получающееся таким образом значение  $\bar{\dot{E}}$  определит скорость систематического медленного изменения энергии системы; об этой скорости можно утверждать, что она будет пропорциональна скорости  $\dot{\lambda}$  изменения параметра  $\lambda$ . Это значит, другими словами, что понимаемая в указанном смысле медленно меняющаяся величина  $E$  будет вести себя как некоторая функция от  $\lambda$ . Зависимость  $E$  от  $\lambda$  можно представить в виде постоянства некоторой комбинации из  $E$  и  $\lambda$ . Такую величину, остающуюся постоянной при движении системы с медленно меняющимися параметрами, называют *адиабатическим инвариантом*.

Пусть  $H(q, p; \lambda)$  — гамильтонова функция системы, зависящая от параметра  $\lambda$ . Согласно (40,5) скорость изменения энергии системы

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (49,2)$$

Выражение в правой стороне этой формулы зависит не только от медленно меняющейся переменной  $\lambda$ , но и от быстро меняющихся переменных  $q$  и  $p$ . Для выделения интересующего нас систематического хода изменения энергии надо, согласно сказанному выше, усреднить равенство (49,2) по периоду движения. При этом ввиду медленности

<sup>1)</sup> Для краткости записи формул мы предполагаем, что имеется всего один такой параметр, но все результаты остаются в силе и при любом числе параметров.

изменения  $\lambda$  (а с ним и  $\dot{\lambda}$ ) можно вынести  $\dot{\lambda}$  за знак усреднения:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}, \quad (49,3)$$

а в усредняемой функции  $\partial H/\partial \lambda$  рассматривать как изменяющиеся величины лишь  $q$  и  $p$ , но не  $\lambda$ . Другими словами, усреднение производится по такому движению системы, какое имело бы место при заданном постоянном значении  $\lambda$ .

Запишем усреднение в явном виде как

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Согласно уравнению Гамильтона  $\dot{q} = \partial H/\partial p$  имеем

$$dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p}.$$

С помощью этого равенства заменяем интегрирование по времени на интегрирование по координате, причем и период  $T$  записываем в виде

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}; \quad (49,4)$$

знаком  $\oint$  здесь обозначается интегрирование по полному изменению координаты («вперед» и «назад») за время периода<sup>1)</sup>. Таким образом, формула (49,3) принимает вид

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \quad (49,5)$$

Как уже было указано, интегрирования в этой формуле должны производиться по траектории движения при данном постоянном значении  $\lambda$ . Вдоль такой траектории функция Гамильтона сохраняет постоянное значение  $E$ , а импульс является определенной функцией переменной координаты  $q$  и двух постоянных независимых параметров  $E$  и  $\lambda$ . Понимая импульс именно как такую функцию  $p(q; E, \lambda)$  и дифференцируя равенство  $H(p, q; \lambda) = E$  по параметру  $\lambda$ , получим:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

<sup>1)</sup> Если движение системы представляет собой вращение, а координатой  $q$  является некоторый угол поворота  $\varphi$ , то интегрирование по  $d\varphi$  должно производиться по «полному обороту», т. е. от нуля до  $2\pi$ .

Подставив это в верхний интеграл в (49,5) и написав в нижнем подинтегральную функцию в виде  $\partial p/\partial E$ , имеем:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad \text{или} \quad \oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Это равенство можно окончательно переписать в виде

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (49,6)$$

где  $I$  обозначает интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (49,7)$$

взятый по траектории движения при заданных  $E$  и  $\lambda$ . Этот результат показывает, что величина  $I$  остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра  $\lambda$ , т. е. является адиабатическим инвариантом.

Величина  $I$  является функцией энергии системы (и параметра  $\lambda$ ). Ее частная производная по энергии определяет период движения: согласно (49,4) имеем

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \quad (49,8)$$

или иначе:

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega, \quad (49,9)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — частота колебаний системы.

Интегралу (49,7) может быть приписан наглядный геометрический смысл, если воспользоваться понятием о фазовой траектории системы. В данном случае (одна степень свободы) фазовое пространство сводится к двумерной системе координат  $p$ ,  $q$ , и фазовая траектория системы, совершающей периодическое движение, представляет собой замкнутую кривую в этой плоскости. Интеграл (49,7), взятый вдоль этой кривой, представляет собой заключенную внутри нее площадь. Он может быть написан и как двумерный интеграл по площади:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dp dq. \quad (49,10)$$

В качестве примера определим адиабатический инвариант для одномерного осциллятора. Его функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad (49,11)$$

где  $\omega$  — собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории дается законом сохранения энергии

$$H(p, q) = E.$$

Это есть эллипс с полуосями  $\sqrt{2mE}$  и  $\sqrt{2E/m\omega^2}$  и его площадь (деленная на  $2\pi$ )

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (49,12)$$

Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

### § 50. Канонические переменные

Пусть теперь параметр  $\lambda$  постоянен, так что рассматриваемая система замкнута.

Произведем каноническое преобразование переменных  $q, p$ , выбрав величину  $I$  в качестве нового «импульса». Роль производящей функции должно при этом играть «укороченное действие»  $S_0$ , выраженное в функции от  $q$  и  $I$ . Действительно,  $S_0$  определяется как интеграл

$$S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda) dq, \quad (50,1)$$

взятый при заданном значении энергии  $E$  (и параметра  $\lambda$ ). Но для замкнутой системы  $I$  является функцией одной только энергии; поэтому  $S_0$  можно с тем же правом выразить в виде функции  $S_0(q, I; \lambda)$ , а частная производная  $(\partial S_0 / \partial q)_E = p$  совпадает с производной  $(\partial S_0 / \partial q)_I$  при постоянном  $I$ . Поэтому имеем

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q}, \quad (50,2)$$

что соответствует первой из формул канонического преобразования (45,8). Вторая же формула определит новую «координату», которую обозначим через  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial I}. \quad (50,3)$$

Переменные  $I$  и  $\omega$  называют каноническими переменными, причем  $I$  называется в этой связи переменной действия, а  $\omega$  — угловой переменной.

Поскольку производящая функция  $S_0(q, I; \lambda)$  не зависит явно от времени, то новая функция Гамильтона  $H'$  совпадает со старой  $H$ , выраженной через новые переменные. Другими словами,  $H'$  есть энергия, выраженная в функции переменной действия,  $E(I)$ . Соответственно уравнения Гамильтона для канонических переменных имеют вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\omega} = \frac{dE(I)}{dI}. \quad (50,4)$$

Из первого имеем, как и следовало,  $I = \text{const}$  — вместе с энергией постоянна и величина  $I$ . Из второго же видим, что угловая переменная является линейной функцией времени:

$$\omega = \frac{dE}{dI} t + \text{const} = \omega(I) t + \text{const}; \quad (50,5)$$

она представляет собой фазу колебаний.

Действие  $S_0(q, I)$  — неоднозначная функция координат. По истечении каждого периода эта функция не возвращается к исходному значению, а получает приращение

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \quad (50,6)$$

как это очевидно из (50,1) и определения  $I$  согласно (49,7). За это же время угловая переменная получает приращение

$$\Delta \omega = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \Delta S_0 = 2\pi. \quad (50,7)$$

Обратно, если мы выразим  $q$  и  $p$  (или любую их однозначную функцию  $F(q, p)$ ) через канонические переменные, то эти функции не будут менять свои значения при изменении  $\omega$  на  $2\pi$  (при заданном значении  $I$ ). Другими словами, всякая однозначная функция  $F(q, p)$ , будучи выражена через канонические переменные, является периодической функцией  $\omega$  с периодом, равным  $2\pi$ .

Уравнения движения могут быть сформулированы в канонических переменных также и для незамкнутой системы с зависящим от времени параметром  $\lambda$ . Преобразование к этим переменным осуществляется по-прежнему формулами (50,2) — (50,3) с производящей функцией  $S_0$ , определяемой интегралом (50,1) и выраженной через переменную  $I$ , определяемую интегралом (49,7). Неопределенный интеграл (50,1) и определенный интеграл (49,7) вычисляются при этом так, как если бы параметр  $\lambda(t)$  имел заданное постоянное значение; другими сло-

вами,  $S_0(q, I; \lambda(t))$  — прежняя функция, вычисленная при постоянном  $\lambda$ , замененном затем заданной функцией  $\lambda(t)$ <sup>1)</sup>.

Поскольку производящая функция оказывается теперь (вместе с параметром  $\lambda$ ) явной функцией времени, то новая функция Гамильтона  $H'$  уже не будет совпадать со старой, т. е. с энергией  $E(I)$ . Согласно общим формулам канонического преобразования (45,8) имеем

$$H' = E(I; \lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I; \lambda) + \Lambda \dot{\lambda}, \quad (50,8)$$

где введено обозначение

$$\Lambda = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)_{q, I}, \quad (50,9)$$

причем  $\Lambda$  должна быть выражена (после осуществления дифференцирования по  $\lambda$ ) с помощью (50,3) через  $I$  и  $\omega$ .

Уравнения Гамильтона принимают теперь вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial \omega} = -\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \right)_{I, \lambda} \dot{\lambda}, \quad (50,10)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I; \lambda) + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial I} \right)_{\omega, \lambda} \dot{\lambda}, \quad (50,11)$$

где  $\omega = (\partial E / \partial I)_\lambda$  — частота колебаний (снова вычисленная так, как если бы  $\lambda$  было постоянным).

### Задача

Написать уравнения движения в канонических переменных для гармонического осциллятора (функция Гамильтона (49,11)) с частотой, зависящей от времени.

Решение. Поскольку в (50,1) — (50,3) все действия совершаются при постоянном  $\lambda$  (роль которого играет в данном случае сама частота  $\omega$ ), то связь  $q$  и  $p$  с  $\omega$  имеет тот же вид, что и при постоянной частоте (когда  $\omega = \omega I$ ):

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega t = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \omega t, \quad p = \sqrt{2I\omega m} \cos \omega t.$$

Отсюда

$$S_0 = \int p dq = \int p \left( \frac{\partial q}{\partial \omega} \right)_{I, \omega} d\omega = 2I \int \cos^2 \omega d\omega$$

<sup>1)</sup> Подчеркнем, однако, что определенная таким образом функция  $S_0$  уже отнюдь не совпадает с истинным укороченным действием для системы с зависящей от времени гамильтоновой функцией!

и затем

$$\Lambda = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_q, I = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \right)_q = \frac{I}{2\omega} \sin 2\omega.$$

Уравнения (50, 10), (50,11) принимают теперь вид

$$\dot{I} = -I \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\omega, \quad \dot{\omega} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2\omega.$$

### § 51. Точность сохранения адиабатического инварианта

Уравнение движения в форме (50,10) позволяет снова убедиться в адиабатической инвариантности переменной действия.

Функция  $S_0(q, I; \lambda)$  — неоднозначная функция  $q$ ; при возвращении координаты к первоначальному значению к  $S_0$  прибавляется целое кратное от  $2\pi I$ . Производная же (50,9) — однозначная функция, так как дифференцирование производится при постоянном  $I$  и прибавляющиеся к  $S_0$  приращения при этом исчезают. Как и всякая однозначная функция, функция  $\Lambda$ , будучи выражена через угловую переменную  $\omega$ , будет периодической функцией этой переменной. Среднее же (по периоду) значение производной  $\partial \Lambda / \partial \omega$  от периодической функции обращается в нуль. Поэтому, усредняя уравнение (50,10) и вынося при этом  $\dot{\lambda}$  (при медленном изменении  $\lambda$ ) из-под знака среднего, получим

$$\bar{\dot{I}} = - \overline{\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \right)}_I \dot{\lambda} = 0, \quad (51,1)$$

что и требовалось.

Уравнения движения (50,10), (50,11) позволяют рассмотреть и вопрос о точности, с которой сохраняется адиабатический инвариант. Поставим этот вопрос следующим образом: пусть параметр  $\lambda(t)$  стремится при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  к постоянным пределам  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$ ; задано начальное (при  $t = -\infty$ ) значение  $I_-$  адиабатического инварианта, и требуется найти его приращение  $\Delta I = I_+ - I_-$  ко времени  $t = +\infty$ .

Из (50,10) имеем

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \dot{\lambda} dt. \quad (51,2)$$

Как уже было указано, величина  $\Lambda$  — периодическая (с периодом  $2\pi$ )

функция переменной  $w$ ; разложим ее в ряд Фурье:

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw} \Lambda_l \quad (51,3)$$

(в силу вещественности  $\Lambda$  коэффициенты разложения связаны при этом соотношениями  $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$ ). Отсюда для производной  $\partial\Lambda/\partial w$  имеем

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial w} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l = 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l. \quad (51,4)$$

При достаточно малом  $\dot{\lambda}$  производная  $\dot{w}$  положительна (ее знак совпадает со знаком  $\omega$ , см. (50,11)), т. е.  $w$  — монотонная функция времени  $t$ . При переходе в (51,2)

от интегрирования по  $dt$  к интегрированию по  $dw$  пределы останутся поэтому прежними:

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Lambda}{\partial w} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{dw} dw. \quad (51,5)$$

Подставим сюда (51,4) и преобразуем интеграл, рассматривая в нем формальным образом  $w$  как комплексную переменную. Предположив, что подынтегральное выражение не имеет особых точек при вещественных значениях  $w$ , сместим путь интегрирования с вещественной оси  $w$  в верхнюю полуплоскость этой переменной. При этом контур «зацепляется» за особые точки подынтегрального выражения и, огибая их, принимает вид, показанный схематически на рис. 56. Пусть  $w_0$  — ближайшая к вещественной оси особая точка, т. е. точка с наименьшей по величине (положительной) мнимой частью. Главный вклад в интеграл (51,5) возникает от окрестности этой точки, причем каждый из членов ряда (51,4) дает вклад, содержащий множитель  $\exp(-l \operatorname{Im} w_0)$ . Сохраняя опять-таки лишь член с наименьшим по абсолютной величине отрицательным показателем (т. е. член с  $l=1$ ), найдем, что<sup>1)</sup>

$$\Delta I \propto \exp(-\operatorname{Im} w_0). \quad (51,6)$$

<sup>1)</sup> В специальных случаях может оказаться, что разложение (51,4) не содержит члена с  $l=1$  (см., например, задачу к этому параграфу); во всех случаях надо брать член с наименьшим имеющимся в ряду значением  $l$ .

Пусть  $t_0$  — «момент времени» (комплексное число!), отвечающий особой точке  $\omega_0$ :  $\omega(t_0) = \omega_0$ . По порядку величины  $|t_0|$  совпадает, вообще говоря, с характерным временем изменения параметров системы; обозначим это время через  $\tau$ <sup>1)</sup>. Порядок же величины показателя степени в (51,6) будет

$$\operatorname{Im} \omega_0 \sim \omega \tau \sim \frac{\tau}{T}. \quad (51,7)$$

Поскольку, по предположению,  $\tau \gg T$ , то этот показатель велик. Таким образом, разность  $I_+ - I_-$  убывает экспоненциально при уменьшении скорости изменения параметров системы<sup>2)</sup>.

Для определения  $\omega_0$  в первом приближении по  $T/\tau$  (т. е. с сохранением лишь члена  $\sim (T/\tau)^{-1}$  в показателе) можно отбросить в уравнении (50,11) малый член, содержащий  $\lambda$ , т. е. писать

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega(I, \lambda(t)), \quad (51,8)$$

причем аргумент  $I$  функции  $\omega(I, \lambda)$  полагается постоянным, скажем, равным  $I_-$ . Тогда

$$\omega_0 = \int_{t_0}^{t_0} \omega(I, \lambda(t)) dt \quad (51,9)$$

(в качестве нижнего предела можно взять любое вещественное значение  $t$ ; интересующая нас мнимая часть  $\omega_0$  от этого значения не зависит).

Интеграл же (51,5) с  $\dot{\omega}$  из (51,8) (и с одним членом ряда (51,4) в качестве  $\partial\Lambda/\partial\omega$ ) принимает вид

$$\Delta I \propto \operatorname{Re} \int i e^{i\omega} \frac{\lambda d\omega}{\omega(I, \lambda)}. \quad (51,10)$$

Отсюда видно, что в качестве конкурирующих (при отборе ближайшей к вещественной оси) особых точек фигурируют особенности

<sup>1)</sup> Если медленность изменения параметра  $\lambda$  выражается в том, что он зависит от  $t$  лишь в виде отношения  $\xi = t/\tau$  с большим  $\tau$ , то  $t_0 = \tau \xi_0$ , где  $\xi_0$  — не зависящая от  $\tau$  особая точка функции  $\lambda(\xi)$ .

<sup>2)</sup> Отметим, что если начальное и конечное значения функции  $\lambda(t)$  совпадают ( $\lambda_+ = \lambda_-$ ), то экспоненциально малой будет не только разность  $\Delta I$ , но вместе с нею также и разность  $\Delta E = E_+ - E_-$  конечной и начальной энергии; согласно (49,9) будем иметь  $\Delta E = \omega \Delta I$ .

(полюсы, точки ветвления) функций  $\dot{\lambda}(t)$  и  $1/\omega(t)$ . Напомним в этой связи, что заключение об экспоненциальной малости  $\Delta I$  связано с предположением, что указанные функции не имеют вещественных особых точек.

### Задача

Оценить  $\Delta I$  для гармонического осциллятора с частотой, медленно меняющейся по закону

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + ae^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}$$

от значения  $\omega_- = \omega_0$  при  $t = -\infty$  до  $\omega_+ = \sqrt{a} \omega_0$  при  $t = \infty$  ( $a > 0$ ,  $\alpha \ll \omega_0$ )<sup>1)</sup>.

Решение. Понимая под параметром  $\lambda$  саму частоту  $\omega$ , имеем

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a}{e^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{e^{-\alpha t} + 1} \right).$$

Эта функция имеет полюсы при  $e^{-\alpha t} = -1$  и  $e^{-\alpha t} = -a$ . Вычислив интеграл  $\int \omega dt$ , найдем, что наименьшее значение  $\text{Im } \omega_0$  происходит от одного из полюсов  $\alpha t_0 = -\ln(-a)$  и равно

$$\text{Im } \omega_0 = \begin{cases} \omega_0 \pi / \alpha & \text{при } a > 1, \\ \omega_0 \pi \sqrt{a} / \alpha & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

Для гармонического осциллятора  $\Lambda \propto \sin 2\omega$  (см. задачу к § 50), так что ряд (51,3) сводится к двум членам ( $s = \pm 2$ ). Поэтому для гармонического осциллятора

$$\Delta I \propto \exp(-2 \text{Im } \omega_0).$$

## § 52. Условно-периодическое движение

Рассмотрим замкнутую систему со многими степенями свободы, совершающую финитное (по всем координатам) движение. Предположим при этом, что задача допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона—Якоби. Это значит, что при соответствующем выборе координат укороченное действие представляет собой сумму

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \quad (52,1)$$

функций, каждая из которых зависит только от одной из координат.

Поскольку обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i},$$

<sup>1)</sup> Гармоничность осциллятора проявляется в независимости частоты колебаний от энергии.

то каждая из функций  $S_i$  может быть представлена в виде

$$S_i = \int p_i dq_i. \quad (52,2)$$

Эти функции неоднозначны. В силу финитности движения каждая из координат может пробегать значения лишь в определенном конечном интервале. При изменении  $q_i$  в этом интервале «вперед» и «назад» действие получает приращение

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \quad (52,3)$$

где  $I_i$  есть интеграл

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (52,4)$$

взятый по указанному изменению  $q_i$  (1).

Произведем теперь каноническое преобразование аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для случая одной степени свободы. Новыми переменными будут «переменные действия»  $I_i$  и «угловые переменные»

$$\omega_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i}, \quad (52,5)$$

где производящей функцией снова является действие, выраженное в функции координат и величин  $I_i$ ; уравнения движения в этих переменных

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\omega}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

дают:

$$I_i = \text{const}, \quad (52,6)$$

$$\omega_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{const}. \quad (52,7)$$

Мы найдем также аналогично (50,7), что полному изменению координаты  $q_i$  («вперед» и «назад») отвечает изменение соответствующего  $\omega_i$  на  $2\pi$ :

$$\Delta \omega_i = 2\pi. \quad (52,8)$$

Другими словами, величины  $\omega_i(q, I)$  являются неоднозначными функциями координат, которые при изменении последних с возвращением к первоначальным значениям могут изменяться на любое целое кратное от  $2\pi$ . Это свойство можно сформулировать также и как свой-

1) Подчеркнем, однако, что здесь идет речь о формальном изменении координаты  $q_i$  во всем допустимом интервале ее значений, а не об изменении за период реального движения (как это было в случае одномерного движения). Реальное финитное движение системы с несколькими степенями свободы не только не является в общем случае периодическим в целом, но даже изменение со временем каждой из ее координат в отдельности не является периодическим (см. ниже).

ство функции  $w_i(p, q)$  (выраженной через координаты и импульсы) в фазовом пространстве системы. Поскольку сами величины  $I_i$ , если их выразить через  $p$  и  $q$ , являются однозначными функциями этих переменных, то, подставив  $I_i(p, q)$  в  $w_i(q, I)$ , мы получим функцию  $w_i(p, q)$ , которая при обходе по любой замкнутой кривой в фазовом пространстве может измениться на целое кратное от  $2\pi$  (либо на нуль).

Отсюда следует, что всякая однозначная функция состояния системы  $F(p, q)^1$ , будучи выражена через канонические переменные, является периодической функцией угловых переменных с периодом  $2\pi$  по каждой из них. Ее можно поэтому разложить в кратный ряд Фурье вида

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} e^{i(l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s)}$$

( $l_1, l_2, \dots, l_s$  — целые числа). Подставив же сюда угловые переменные как функции времени, найдем, что временная зависимость  $F$  определяется суммой вида

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp \left\{ it \left( l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \dots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \quad (52,9)$$

Каждый из членов этой суммы есть периодическая функция времени с частотой

$$l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s, \quad (52,10)$$

представляющей собой сумму целых кратных от основных частот

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}. \quad (52,11)$$

Но поскольку все частоты (52,10) не являются, вообще говоря, целыми кратными (или рациональными частями) какой-либо одной из них, то вся сумма в целом не является строго периодической функцией. Это относится, в частности, и к самим координатам  $q$  и импульсам  $p$  системы.

Таким образом, движение системы не является в общем случае строго периодическим ни в целом, ни по какой-либо из координат. Это значит, что если система прошла через какое-либо состояние,

<sup>1</sup> «Вращательные координаты» — углы  $\varphi$  (см. примечание на стр. 194) — неоднозначно связаны с состоянием системы, так как значения  $\varphi$ , отличающиеся на целое кратное от  $2\pi$ , отвечают одному и тому же положению системы. Поэтому, если среди координат  $q$  имеются такие углы, то они могут входить в функцию  $F(q, p)$  лишь в виде таких выражений, как  $\cos \varphi$  или  $\sin \varphi$ , связь которых с состоянием системы однозначна.

то она не пройдет через него повторно ни через какое конечное время. Можно, однако, утверждать, что по истечении достаточно большого промежутка времени она пройдет сколь угодно близко от этого состояния. Это свойство имеют в виду, называя такое движение *условно-периодическим*.

В различных частных случаях две (или более) из основных частот  $\omega_i$  могут оказаться соизмеримыми (при произвольных значениях величин  $I_i$ ). В таких случаях говорят о наличии *вырождения*, а если все  $s$  частот соизмеримы, то движение системы называют *полностью вырожденным*. В последнем случае, очевидно, движение строго периодически и тем самым траектории всех частиц — замкнуты.

Наличие вырождения приводит, прежде всего, к уменьшению числа независимых величин ( $I_i$ ), от которых зависит энергия системы. Пусть две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  связаны соотношением

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \quad (52,12)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа. Отсюда следует, что величины  $I_1$  и  $I_2$  входят в энергию лишь в виде суммы  $n_2 I_1 + n_1 I_2$ .

Весьма важной особенностью вырожденных движений является увеличение числа однозначных интегралов движения по сравнению с их числом в общем случае невырожденной системы (с тем же числом степеней свободы). В последнем случае из полного числа ( $2s - 1$ ) всех интегралов движения однозначными являются всего  $s$  функций состояния системы; их полный набор составляют, например,  $s$  величин  $I_i$ . Остальные  $s - 1$  интегралов можно представить в виде разностей

$$\omega_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - \omega_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \quad (52,13)$$

Постоянство этих величин непосредственно следует из формулы (52,7), но ввиду неоднозначности угловых переменных они не являются однозначными функциями состояния системы.

При наличии же вырождения положение меняется. Так, ввиду связи (52,12) интеграл

$$\omega_1 n_2 - \omega_2 n_1 \quad (52,14)$$

хотя и является неоднозначным, но его неоднозначность сводится к прибавлению любого целого кратного  $2\pi$ . Поэтому достаточно взять тригонометрическую функцию этой величины, для того чтобы получить новый однозначный интеграл движения.

Примером вырожденного движения является движение в поле  $U = -\alpha/r$  (см. задачу к этому параграфу). Именно это обстоятельство приводит к появлению нового, специфического однозначного интеграла движения (15,17), помимо двух (рассматриваем движение

сразу как плоское) обычных однозначных интегралов,— момента  $M$  и энергии  $E$ ,— свойственных движению в любом центральном поле.

Отметим также, что появление дополнительных однозначных интегралов приводит в свою очередь еще к одному свойству вырожденных движений—они допускают полное разделение переменных при различных, а не при одном определенном<sup>1)</sup> выборе координат. Действительно, величины  $I_i$  в координатах, осуществляющих разделение переменных, являются однозначными интегралами движения. Но при наличии вырождения число однозначных интегралов превышает  $s$ , и потому становится неоднозначным выбор тех из них, которые мы хотим получить в качестве величин  $I_i$ .

В качестве примера снова упомянем кеплерово движение, допускающее разделение переменных как в сферических, так и в параболических координатах.

В предыдущем параграфе было показано, что при одномерном финитном движении переменная действия является адиабатическим инвариантом. Это утверждение остается в силе и для систем со многими степенями свободы. Оно доказывается в общем случае прямым обобщением способа, изложенного в начале § 51.

Для многомерной системы с переменным параметром  $\lambda(t)$  уравнения движения в канонических переменных дают для скорости изменения каждой из переменных действия  $I_i$  выражение, аналогичное (50,10):

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i} \dot{\lambda}, \quad (52,15)$$

где по-прежнему  $\Lambda = (\partial S_0 / \partial \lambda)_r$ . Усреднение этого равенства надо производить по промежутку времени, большому по сравнению с основными периодами системы, но малыми по сравнению со временем изменения параметра  $\lambda(t)$ . При этом  $\dot{\lambda}$  снова выносится из-под знака усреднения, а усреднение производных  $\partial \Lambda / \partial \omega_i$  производится так, как если бы движение происходило при постоянном  $\lambda$  и потому было условно периодическим. Тогда  $\Lambda$  будет однозначной периодической функцией угловых переменных  $\omega_i$  и средние значения ее производных  $\partial \Lambda / \partial \omega_i$  обращаются в нуль.

В заключение сделаем некоторые замечания по поводу свойств финитного движения замкнутых систем со многими ( $s$ ) степенями свободы в наиболее общем случае, не предполагающем разделимости переменных в соответствующем уравнении Гамильтона—Якоби.

Основным свойством систем с разделяющимися переменными является однозначность интегралов движения  $I_i$ , число которых равно числу степеней свободы. В общем же случае систем с неразделяющимися переменными набор однозначных интегралов движения огра-

<sup>1)</sup> Мы отвлекаемся при этом от таких тривиальных изменений координат, как преобразования вида  $q'_1 = q_1(q_1)$ ,  $q'_2 = q_2(q_1)$ .

ничивается теми, постоянство которых есть выражение свойств однородности и изотропии пространства и времени, т. е. законами сохранения энергии, импульса и момента.

Фазовая траектория системы проходит по тем областям фазового пространства, которые определяются заданными постоянными значениями однозначных интегралов движения. Для системы с разделяющимися переменными с ее  $s$  однозначными интегралами этими условиями определяется  $s$ -мерное многообразие (гиперповерхность) в фазовом пространстве. В течение достаточно долгого времени траектория системы покрывает эту гиперповерхность сколь угодно плотно.

У системы же с неразделяющимися переменными, с ее меньшим (при том же  $s$ ) числом однозначных интегралов фазовая траектория заполняет собой в фазовом пространстве (полностью или частично) области (многообразия) большего числа измерений.

Наконец, укажем, что если гамильтонова функция системы отличается от функции, допускающей разделение переменных, лишь малыми членами, то и свойства движения близки к свойствам условно-периодических движений, причем степень этой близости гораздо выше, чем степень малости дополнительных членов в функции Гамильтона.

### Задача

Вычислить переменные действия для эллиптического движения в поле  $U = -\alpha/r$ .

Решение. В полярных координатах  $r$ ,  $\varphi$  в плоскости движения имеем:

$$I_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi} d\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Отсюда энергия, выраженная через переменные действия:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_{\varphi})^2}.$$

Она зависит лишь от суммы  $I_r + I_{\varphi}$ , что означает вырождение движения — обе основные частоты (по  $\varphi$  и по  $r$ ) совпадают.

Параметры орбиты  $p$  и  $e$  (см. (15,4)) выражаются через  $I_r$ ,  $I_{\varphi}$  согласно

$$p = \frac{I_{\varphi}^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left( \frac{I_{\varphi}}{I_{\varphi} + I_r} \right)^2.$$

В силу адиабатической инвариантности величин  $I_r$ ,  $I_{\varphi}$ , при медленном изменении коэффициента  $\alpha$  или массы  $m$  эксцентриситет орбиты остается неизменным, а ее размеры меняются обратно пропорционально  $m$  и  $\alpha$ .

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ<sup>1)</sup>

- Абсолютно гладкая поверхность 155  
— шероховатая поверхность 156  
Аддитивность интегралов движения 23  
— массы 28  
Амплитуда 77  
Аперриодическое затухание 99
- Бениня 82, 91
- Вариация 11  
Бирриальная теорема 35  
Внутренняя энергия 28  
Болчок асимметрический 128, 147  
— быстрый 144  
— симметрический 128, 136, 142  
— шаровой 128  
Вырождение 205
- Геометрическая оптика 175  
Главные моменты инерции 128  
— оси инерции 128
- Действие 10  
— укороченное 176  
Декремент затухания 98  
Дисперсионное поглощение 102  
Диссипативная функция 99
- Задача двух тел 42  
Закон инерции 14  
— равенства действия и противодействия 26  
Законы Кеплера 34, 44  
Замкнутая система 17  
Замкнутые траектории 46
- Изотропия пространства 14, 29  
Инерциальная система отсчета 14  
Интеграл движения 23  
— площадей 44
- Канонические уравнения 166  
Канонически-сопряженные величины 181  
Качение 155  
Кинетическая энергия 18  
Комбинационные частоты 111  
Консервативная система 24
- Линия узлов 140
- Масса частицы 16  
Маятник двойной 21, 91  
— плоский 21, 39, 49, 121  
— сферический 47  
— физический 131  
— Фуко 164  
Мгновенная ось вращения 125  
Момент силы 138
- Нормальные колебания 89  
Нутация 143
- Обобщенная координата 9  
— сила 27  
Обобщенный импульс 28  
Однородное поле 20  
Однородность времени 24  
— пространства 25  
Осциллятор 77  
— пространственный 92
- Падение частицы в центр 47, 68  
Пара сил 138  
Параболические координаты 189  
Переменная действия 197  
Перигелия смещение 54  
Полюдия 148  
Поступательное движение 124  
Потенциальная энергия 18  
— яма 38  
Преобразование Галилея 15  
— Лежандра 165  
Прецессия регулярная 136  
Принцип д'Аламбера 157  
Производящая функция 180
- Резонанс 61  
Ротатор 129, 136
- Связи 20  
— голономные 156  
— неголономные 156  
Секториальная скорость 44  
Сила 19  
— Кориолиса 162  
— реакции 155  
— трения 97, 155  
— центробежная 162  
Скольжение 155  
Собственная частота 87  
Степени свободы 9, 92, 123
- Теорема Пуассона 172  
Тождество Якоби 171  
Точечное преобразование 179  
Точка останова 38
- Угловая переменная 197  
Уравнения Ньютона 19  
Условия равновесия твердого тела 155
- Фаза 77  
Фазовая траектория 182  
Фазовое пространство 182  
Финитное и инфинитное движение 32
- Циклическая координата 44, 168, 186  
— частота 77
- Эксцентриситет 50  
Эллиптические координаты 191  
Эффективное сечение 65

<sup>1)</sup> Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	7
Предисловие к первому изданию . . . . .	7
<b>Глава I. Уравнения движения . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Обобщенные координаты . . . . .	9
§ 2. Принцип наименьшего действия . . . . .	10
§ 3. Принцип относительности Галилея . . . . .	13
§ 4. Функция Лагранжа свободной материальной точки . . . . .	15
§ 5. Функция Лагранжа системы материальных точек . . . . .	17
<b>Глава II. Законы сохранения . . . . .</b>	<b>23</b>
§ 6. Энергия . . . . .	23
§ 7. Импульс . . . . .	25
§ 8. Центр инерции . . . . .	27
§ 9. Момент импульса . . . . .	29
§ 10. Механическое подобие . . . . .	33
<b>Глава III. Интегрирование уравнений движения . . . . .</b>	<b>37</b>
§ 11. Одномерное движение . . . . .	37
§ 12. Определение потенциальной энергии по периоду колебаний . . . . .	40
§ 13. Приведенная масса . . . . .	42
§ 14. Движение в центральном поле . . . . .	43
§ 15. Кеплерова задача . . . . .	49
<b>Глава IV. Столкновения частиц . . . . .</b>	<b>55</b>
§ 16. Распад частиц . . . . .	56
§ 17. Упругие столкновения частиц . . . . .	60
§ 18. Рассеяние частиц . . . . .	64
§ 19. Формула Резерфорда . . . . .	70
§ 20. Рассеяние под малыми углами . . . . .	73
<b>Глава V. Малые колебания . . . . .</b>	<b>76</b>
§ 21. Свободные одномерные колебания . . . . .	76
§ 22. Вынужденные колебания . . . . .	80
§ 23. Колебания систем со многими степенями свободы . . . . .	85
§ 24. Колебания молекул . . . . .	92
§ 25. Затухающие колебания . . . . .	97
§ 26. Вынужденные колебания при наличии трения . . . . .	100
§ 27. Параметрический резонанс . . . . .	103
§ 28. Ангармонические колебания . . . . .	109
§ 29. Резонанс в нелинейных колебаниях . . . . .	113
§ 30. Движение в быстро осциллирующем поле . . . . .	119

<b>Глава VI. Движение твердого тела</b>	123
§ 31. Угловая скорость	123
§ 32. Тензор инерции	126
§ 33. Момент импульса твердого тела	135
§ 34. Уравнения движения твердого тела	137
§ 35. Эйлеровы углы	140
§ 36. Уравнения Эйлера	145
§ 37. Асимметрический волчок	147
§ 38. Соприкосновение твердых тел	155
§ 39. Движение в неинерциальной системе отсчета	160
<b>Глава VII. Канонические уравнения</b>	165
§ 40. Уравнения Гамильтона	165
§ 41. Функция Рауса	167
§ 42. Скобки Пуассона	169
§ 43. Действие как функция координат	173
§ 44. Принцип Мопертюи	176
§ 45. Канонические преобразования	179
§ 46. Теорема Лиувилля	182
§ 47. Уравнение Гамильтона—Якоби	184
§ 48. Разделение переменных	187
§ 49. Адиабатические инварианты	193
§ 50. Канонические переменные	196
§ 51. Точность сохранения адиабатического инварианта	199
§ 52. Условно-периодическое движение	202
<b>Предметный указатель</b>	208