Ю.А.Митропольский, А.К.Лопатин

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД В АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Книга посвящена развитию метода усреднения Н. Н. Боголюбова на основе использования аппарата непрерывных групп преобразований. Доказываются новые теоремы об асимптотической декомпозиции систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются новые классы задач. Основные алгоритмы носят конструктивный характер и сводятся к простейшим задачам линейной алгебры.

Рассчитана на широкий круг инженерно-технических и научных работников, интересующихся современными методами исследования систем дифференциальных уравнений и их приложениями.

Содержание

Предисловия 5

Введение 6

Глава 1. Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой 12

§ 1. Система дифференциальных уравнений и ее обертывающая алгебра Ли 12

§ 2. Ряд Ли как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений и его свойства. Обертывающая группа системы 16

§ 3. Замена переменных в дифференциальной системе. Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа 32

§ 4. Теория Ли систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу преобразований 34

Глава 2. Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений 44

§ 1. Алгебраическая приводимость систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 44

§ 2. Декомпозиция систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами по нильпотентной составляющей 62

§ 3. Алгебраическая приводимость систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, матрица которых коммутирует со своим интегралом 65

§ 4. Декомпозиция систем нелинейных дифференциальных уравнений 69

§ 5. Понижение числа переменных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений 79

§ 6. Алгебраически приводимые системы 83

Глава 3. Асимптотическая декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром 92

§ 1. Общая схема алгоритма асимптотической декомпозиции 92

§ 2. Основные теоремы об интегрировании централизованной системы 98

§ 3. Сведение операторных уравнений к дифференциальным 105

§ 4. Реализация алгоритма асимптотической декомпозиции в области существования первых интегралов " системы нулевого приближения 108

§ 5. Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции для конечного числа приближений 118
§ 6. Алгоритм асимптотической декомпозиции в случае, когда нулевое приближение является декомпозируемым 125
§ 7. Почти инвариантные системы дифференциальных уравнений 134
Глава 4. Асимптотическая декомпозиция линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и малым параметром 142
§ 1. Обертывающие алгебры Ли исходной системы 142
§ 2. Сведение решения операторных уравнений к решению системы ал- 145
§ 3. Построение централизованной системы и нахождение приводящих преобразований 149
§ 4. Структура централизованной системы. Основные теоремы о декомпозируемости и разделении движений 157
§ 5. Асимптотическая декомпозиция почти алгебраически приводимых линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и малым параметром 164
§ 6. Общий случай структуры матрицы системы нулевого приближения 178
Глава 5. Асимптотическая декомпозиция почти линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и возмущениями в виде полиномов 183
§ 1. Обертывающие алгебры $\mathscr{B}$ и $\widetilde{\mathscr{B}}$ исходной системы 183
§ 2. Сведение решения операторных уравнений к решению системы алгебраических уравнений 186
§ 3. Построение централизованной системы и нахождение приводящих преобразований 190
§ 4. Структура централизованной системы. Основные теоремы о декомпозиции и разделении движений 196
§ 5. Примеры: классическая система В. Вольтерра «хищник — жертва» и система Ван-дер-Поля 210
Глава 6. Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром в пространстве представлений конечномерной группы Ли 234
§ 1. Почти инвариантные системы дифференциальных уравнений с компактной группой Ли инвариантности 234
§ 2. Алгоритм асимптотической декомпозиции в пространстве представлений конечномерной группы Ли 245
Глава 7. Обобщение алгоритма асимптотической декомпозиции на пфаффовы системы 254
§ 1. Постановка задачи. Формулировка основных теорем 254
§ 2. Метод локальной асимптотической декомпозиции 26U
Литературные комментарии 264
Список литературы 267

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является итогом многолетнего исследования авторов по развитию метода усреднения Н. Н. Боголюбова на основе использования аппарата непрерывных групп преобразований, заложенного в основополагающих трудах С. Ли и его учеников. Соединение двух конструктивных методов, имеющих широкое применение в современной математике и ее приложениях, с одной стороны, расширяет возможности методов теории возмущений, а с другой — может оказаться интересным и для теории непрерывных групп преобразований, так как позволяет рассматривать новые задачи, например почти инвариантные системы.

По нашему мнению, в данной работе впервые сделана попытка обобщить и описать указанные вопросы в монографии. Поэтому мы не стремились к возможно более полному охвату темы, а поставили цель ввести читателя в круг идей подхода, находящегося на стыке нескольких математических направлений. Центральное место в книге занимают разделы, в которых развивается метод усреднения Н. Н. Боголюбова. В главе 1 приведены необходимые сведения из теории групп Ли и рядов Ли. Более детальное знакомство с этими фундаментальными понятиями требует, безусловно, обращения к специальным источникам. В главе, посвященной теории декомпозиции систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в известной степени демонстрируется возможность теоретико-группового подхода. Все приведенные в книге основные теоретические положения иллюстрированы примерами. Список библиографии ни в коей мере не претендует на полноту. В основном это работы, в той или иной мере связанные с развиваемым нами направлением.

Считаем своим приятным долгом отметить, что неоднократное общение и обсуждение разрабатываемой темы с членом-корреспондентом АН СССР Л. В. Овсянниковым служило дополнительным стимулом в работе. Искреннюю благодарность выражаем доктору физико-математических наук В. И. Фущичу за постоянное внимание к работе и ряд полезных замечаний, которые были учтены при подготовке рукописи. Мы признательны кандидатам физико-математических наук А. Н. Никитину и Ю. Н. Сегеде, подвергших на различных этапах работы отдельные главы книги критическому разбору, а также коллегам, принимавшим участие в подготовке рукописи, среди которых особенно хочется отметить В. К. Крайневу.

Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, А. К. ЛОПАТИН

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотические методы нелинейной механики, развитые в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, положили начало новому большому направлению в теории возмущений. Они глубоко проникли в различные прикладные области (теоретическую физику, механику, прикладную астрономию, динамику космических полетов и др.) и послужили основой для многочисленных обобщений и создания разнообразных вариантов этих методов. Существует большое число подходов и методик, при этом рассматриваются различные классы математических объектов (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, уравнения с запаздыванием и др.). Состояние затронутых вопросов освещается в обзорных монографиях и оригинальных работах [9, 11, 12, 17, 19, 21, 22, 37, 38, 46, 68, 69, 70, 86, 87, 89, 90, 93, 106, 111].

В последние два десятилетия возникли новые обобщения асимптотических методов нелинейной механики, имеющие тенденцию к выработке общих концепций развития данных методов. Это прежде всего направление, названное методом усреднения с использованием рядов и преобразований Ли (см., например, работу [93]). Впервые ряды Ли в теории возмущений были применены Г. Хори [126] для канонических систем и распространены далее самим Г. Хори [127] и А. Кэмелом [128] на неканонические системы. Теория возмущений, основанная на рядах и преобразованиях Ли, имеет ряд преимуществ по сравнению с существующими методами. Одним из них является простота алгоритмов. С сутью этих методов и библиографией можно подробно ознакомиться в монографиях [27, 93, 129].

Другой подход, использующий в качестве преобразований ряды Ли по параметру, был предложен А. Я. Повзнером [134]. В этой работе, в отличие от упомянутых выше, в основу метода положена известная формула Кэмпбелла — Хаусдорфа. Специальные предположения о спектральных свойствах оператора, ассоциированного с системой нулевого приближения, позволили дать конструктивный алгоритм, сформулировать ряд тонких теорем о разделении переменных на быстрые и медленные в преобразованной системе и получить ряд других результатов [7, 119, 134]. Отметим работы В. Ф. Журавлева [31, 32] по развитию метода усреднения с использованием рядов Ли.

Связь между методом усреднения и теорией нормальных форм рассмотрена в работах А. Д. Брюно [14, 15].

Аксиоматический подход, характеризующий общие свойства асимптотических методов, описан в работе Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко [88].

В предлагаемой читателю книге излагается новый метод исследования систем дифференциальных уравнений с малым параметром, являющийся дальнейшим развитием метода усреднения Н. Н. Боголюбова и названный авторами методом асимптотической декомпозиции. Идея нового подхода заложена в самом методе усреднения Н. Н. Боголюбова, однако ее реализация потребовала привлечения существенно нового аппарата — теории непрерывных групп преобразований.

Поясним суть нового подхода. Как известно, отправным пунктом исследования по методу усреднения является система стандартного вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon), \tag{0.1}$$

где $x = \operatorname{colon} \|x_1, \ldots, x_n\|$, $X(x, t, \varepsilon)$ — n-мерный вектор [1]. Система (0.1) с помощью операции усреднения

$$X_0(\xi) \overset{\text{def}}{=} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\xi, t)\, dt$$

и специальных замен переменных приводится к усредненной системе

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon X_0^{(1)}(\bar{x}) + \varepsilon^2 X_0^{(2)}(\bar{x}) + \cdots, \tag{0.2}$$

не содержащей явно аргумента t. Перепишем исходную систему (0.1) в эквивалентном виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = 1 \tag{0.3}$$

и усредненную систему (0.2) соответственно в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = 1, \tag{0.4}$$

где $X_0(\bar{x}) = X_0^{(1)}(\bar{x}) + \varepsilon X_0^{(2)}(\bar{x}) + \ldots$ Интегрирование системы (0.4) проще интегрирования системы (0.3), так как в ней переменные разделены: система для медленных переменных $\bar{x}$ не содержит быстрой переменной $\bar{y}$ и интегрируется независимо от нее.

Сказанное выше позволяет интерпретировать метод усреднения следующим образом: метод усреднения преобразует систему (0.3) с неразделенными переменными в систему (0.4) с разделенными медленными и быстрыми переменными.

Описанное свойство асимптотического разделения движений в методе усреднения носит ярко выраженный теоретико-групповой ха-

---

[1] На функции $X_j(x, t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, налагается ряд специальных требований, которые мы опускаем ввиду их несущественности для проводимых рассуждений.

рактер. Действительно, положим в системах (0.3) и (0.4) $\varepsilon = 0$ и запишем исходные невозмущенные системы (системы нулевого приближения) в виде

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 1 \tag{0.5}$$

и соответственно

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = 1. \tag{0.6}$$

Системы (0.5) и (0.6) совпадают с точностью до обозначений. Пусть векторы X и X_0 в системах (0.3) и (0.4) имеют компоненты

$$X = \operatorname{colon} \| X_1, \ldots, X_n \|, \quad X_0 = \operatorname{colon} \| X_{10}, \ldots, X_{n0} \|.$$

Поставим в соответствие системе (0.3) линейный дифференциальный оператор в частных производных первого порядка

$$\mathrm{W}_0 = \mathrm{W} + \varepsilon \tilde{\mathrm{W}}, \tag{0.7}$$

где

$$\mathrm{W} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{\mathrm{W}} = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

а системе (0.4) — соответственно оператор

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon \tilde{\mathrm{U}}, \tag{0.8}$$

где

$$\mathrm{U} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad \tilde{\mathrm{U}} = X_{01} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + \cdots + X_{0n} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}.$$

Операторы (0.7) и (0.8) называются ассоциированными соответственно с системами (0.3) и (0.4). Если положить в формулах (0.7) и (0.8) $\varepsilon = 0$, то оператор (0.7) перейдет в оператор

$$\mathrm{W}_0' = \mathrm{W} \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \tag{0.9}$$

ассоциированный с системой нулевого приближения (0.5), а оператор (0.8) перейдет в оператор

$$\mathrm{U}_0' = \mathrm{U} \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \tag{0.10}$$

ассоциированный с системой нулевого приближения (0.6). Непосредственной проверкой легко убедиться, что скобка Пуассона от операторов U и $\tilde{\mathrm{U}}$ тождественно равна нулю:

$$[\mathrm{U}, \tilde{\mathrm{U}}] = \mathrm{U}\tilde{\mathrm{U}} - \tilde{\mathrm{U}}\mathrm{U} \equiv 0. \tag{0.11}$$

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, определяемую оператором U и задаваемую рядами Ли

$$\bar{x}_1 = e^{s\mathrm{U}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \bar{x}_{10},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{x}_n = e^{sU(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}\bar{x}_{n0}, \tag{0.12}$$

$$\bar{y} = e^{sU(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}\bar{y}_0,$$

где $\bar{x}_{10}, \ldots, \bar{x}_{n0}, \bar{y}_0$ — новые переменные; $U(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \partial/\partial\bar{y}_0$; s — параметр, характеризующий группу. Тождество (0.11), как известно из теории непрерывных групп преобразований, означает, что система дифференциальных уравнений (0.4) является инвариантной относительно группы (0.12), т. е. после замены переменных (0.12) переходит в систему

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt} = \varepsilon X_0(\bar{x}_0), \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = 1,$$

совпадающую с точностью до обозначений с исходной системой (0.4).

Факт инвариантности системы (0.4) относительно преобразований (0.12) в рассматриваемом случае легко установить непосредственной проверкой, так как соотношения (0.12) в конечном виде задаются формулами

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_{10}, \ \ldots, \ \bar{x}_n = \bar{x}_{n0}, \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + s.$$

В то же время также легко убедиться непосредственной проверкой, что в общем случае для операторов W, $\tilde{W}$ возмущенной системы тождество, аналогичное (0.11), не имеет места: $[W, \tilde{W}] = W\tilde{W} - \tilde{W}W \neq 0$, откуда следует, что система (0.3) не является инвариантной относительно однопараметрической группы:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{sW(x_0, y_0)}x_{10}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= e^{sW(x_0, y_0)}x_{n0}, \\ y &= e^{sW(x_0, y_0)}y_0, \end{aligned} \tag{0.13}$$

где $x_{10}, \ldots, x_{n0}, y_0$ — новые переменные; $W(x_0, y_0) = \partial/\partial y_0$ — параметр, характеризующий группу, порождаемую оператором W, ассоциированным с системой нулевого приближения.

Действительно, как и выше, соотношения (0.13) легко представить в конечном виде

$$x_1 = x_{10}, \ \ldots, \ x_n = x_{n0}, \ y = y_0 + s. \tag{0.14}$$

Под действием преобразования (0.14) система (0.3) переходит в систему

$$\frac{dx_0}{dt} = \varepsilon X(x_0, y_0 + s, \varepsilon), \quad \frac{dy_0}{dt} = 1,$$

не совпадающую с точностью до обозначений с исходной системой.

Сказанное выше позволяет дать следующую теоретико-групповую интерпретацию метода усреднения: метод усреднения преобразует систему (0.3), не являющуюся инвариантной относительно однопараметрической группы преобразований, порожденной оператором W

(0.9), ассоциированным с системой нулевого приближения (0.5), в усредненную систему (0.7), которая инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований, порожденной оператором U (0.10), ассоциированным с системой нулевого приближения (0.6).

В основу метода асимптотической декомпозиции положена указанная теоретико-групповая интерпретация метода усреднения. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) + \varepsilon\tilde{\omega}(x), \tag{0.15}$$

где

$$\omega(x) = \operatorname{colon}\|\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)\|; \quad \tilde{\omega}(x) = \|\tilde{\omega}_1(x), \ldots, \tilde{\omega}_n(x)\|.$$

Дифференциальный оператор, ассоциированный с возмущенной системой (0.15), представим таким образом:

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon\tilde{\mathrm{U}},$$

где

$$\mathrm{U} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\omega}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tilde{\omega}_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

С помощью некоторой замены переменных в виде ряда по ε

$$x = \varphi(\bar{x}, \varepsilon) \tag{0.16}$$

система (0.15) преобразуется к новой системе

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \omega(\bar{x}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} b^{(\nu)}(\bar{x}), \tag{0.17}$$

названной централизованной системой. Для этой системы оператор $\bar{\mathrm{U}}_0 = \bar{\mathrm{U}} + \varepsilon\bar{\tilde{\mathrm{U}}}$, где

$$\bar{\mathrm{U}} = \omega_1(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + \cdots + \omega_n(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n},$$

$$\bar{\tilde{\mathrm{U}}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathrm{N}_{\nu}, \quad \mathrm{N}_{\nu} = b_1^{(\nu)}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} + \cdots + b_n^{(\nu)}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}.$$

Выбор преобразований (0.16) подчиним условию, согласно которому централизованная система (0.17) должна быть инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований

$$\bar{x} = e^{s\bar{\mathrm{U}}(\bar{x}_0)} \bar{x}_0, \tag{0.18}$$

где $\bar{x}_0$ — вектор новых переменных. Следовательно, после замены переменных (0.18) система (0.17) переходит в систему

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt} = \omega(\bar{x}_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} b^{(\nu} (\bar{x}_0),$$

совпадающую с исходной с точностью до обозначений. Это означает, что для операторов $\bar{\mathrm{U}}$, N_{ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$, имеют место тождества $[\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{N}_{\nu}] \equiv 0$.

Существенным моментом в реализации указанной схемы алгоритма асимптотической декомпозиции является то, что преобразование (0.16) выбирается в виде ряда Ли.

Оставляя подробное обсуждение метода до соответствующей главы в книге, отметим ряд характерных особенностей, обусловленных привлечением аппарата теории непрерывных групп.

1. Централизованная система обнаруживает прежде всего структурные свойства, т. е. свойства, которые не зависят от выбора системы координат. К таковым относятся возможность разделения переменных на быстрые и медленные, возможность декомпозируемости централизованной системы на независимо интегрируемые подсистемы и др.

2. Структурные и аналитические свойства централизованной системы учитываются при исследовании алгебр Ли, порождаемых системой нулевого приближения и возмущенной системой. Это обстоятельство позволяет расширить диапазон рассматриваемых задач по сравнению с методом усреднения, ориентированным на исследование колебательных процессов. Например, рассматривается задача о возмущении системы, допускающей некоторую группу Ли преобразований.

3. Привлечение аппарата теории представлений непрерывных групп Ли преобразований там, где это возможно, существенно упрощает алгоритм асимптотической декомпозиции, сводя его к простейшим задачам линейной алгебры.

4. Метод асимптотической декомпозиции легко переносится на исследование пфаффовых систем дифференциальных уравнений, интегрирование которых, как известно, равносильно интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных общего вида.

Первыми публикациями авторов по методу асимптотической декомпозиции являются работы [51—53, 132], которые появились после знакомства с работой А. Я. Повзнера [134].

Сделаем замечание по поводу используемого аппарата теории непрерывных групп. В настоящее время классическая теория непрерывных групп Ли получила существенное развитие как в теоретическом, так и в прикладном отношениях (см. работы [35, 67, 94, 96, 98, 106, 112]). Среди немногочисленных книг отметим монографии Л. В. Овсянникова [94, 96], которые можно без преувеличения назвать настольными книгами всех, кто начинает заниматься групповым анализом дифференциальных уравнений. Эти работы, а также монография Кэмпбелла [120] стали основными источниками по теории групп Ли, использованными в настоящей работе.

Часть ссылок на литературные источники дается по ходу изложения. Краткий библиографический обзор приводится в разделе «Литературные комментарии».

Основные результаты монографии, помимо журнальных статей, цитируемых в тексте, были опубликованы в виде серии препринтов [80—84].

ГЛАВА 1

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, АЛГЕБРЫ И ГРУППЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА ЛИ

Рассмотрим в области $\tilde{G} = I \times G$, $G \in \mathrm{R}^n$, существования и единственности решения автономной системы [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.1}$$

алгебру $\mathfrak{D}$ (P, G) функций $\mathfrak{D} = \{\varphi_1, (x), \varphi_2(x), \ldots\}$.

Алгебру функций $\mathfrak{D}$ определим как такую совокупность функций над полем P, которая вместе с каждой функцией содержит ее произведение на любое число $\alpha \in \mathrm{P}$ и вместе с каждыми двумя функциями содержит их сумму и произведение. Эта алгебра коммутативна, ассоциативна и обладает единицей. Функции $\mathfrak{D}$ могут быть вещественными или комплекснозначными, аналитическими, гладкими (т. е. бесконечно дифференцируемыми) или просто принадлежать классу C^k, $k < +\infty$. Открытое множество G вместе с дифференцируемой структурой $\mathfrak{D}$ (G) называется дифференцируемым многообразием. В том случае, когда алгебра $\mathfrak{D}$ (G) образована всевозможными аналитическими (вещественными или комплексными) функциями, многообразие $\mathfrak{D}$ (G) называется аналитическим (вещественным или комплексным). Чтобы подчеркнуть, над каким полем рассматривается многообразие, будем писать $\mathfrak{D}$ (K, G) для комплексного случая и $\mathfrak{D}$ (R, G) — для вещественного. Эти формы записи можно объединить в единую форму $\mathfrak{D}$ (P, C). Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать аналитические многообразия.

Произвольное линейное отображение многообразия $\mathfrak{D}$ (G), удовлетворяющее условию

$$\mathrm{X}(fg) = f\mathrm{X}g + \mathrm{X}fg, \quad f,g \in \mathfrak{D}(G),$$

называется векторным полем. Во множестве $\mathfrak{D}^1$ (G) векторных полей на многообразии $\mathfrak{D}$ (G) определены операции

$$\begin{gathered}(\mathrm{X} + \mathrm{Y})\, g = \mathrm{X}g + \mathrm{Y}g, \\ (f\mathrm{X})\, g = f\mathrm{X}g, \ \ \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathfrak{D}^1(G), \quad f, \ g \in \mathfrak{D}(G),\end{gathered} \tag{1.2}$$

т. е. $\mathfrak{D}^1$ (G) есть $\mathfrak{D}$ (G)-модуль относительно операции (1.2).

[1] Общий случай зависимости правой части от t легко сводится к рассматриваемому случаю введением новой переменной $t = x_{n+1}$ и дополнительного уравнения $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Базисом модуля $\mathfrak{D}^1(G)$ над $\mathfrak{D}(G)$ являются [101] частные производные $X_1 = \partial/\partial x_1, \ldots, X_n = \partial/\partial x_n$, а произвольное поле X выражается через них следующим образом:

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

где $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ — некоторые функции из многообразия $\mathfrak{D}(G)$. Эти функции однозначно определены векторным полем X и называются его компонентами в базисе $X_1, \ldots, X_n$.

Согласно определению векторного поля (что тоже можно установить непосредственной проверкой, учитывая выражения (1.3)) скобка Пуассона $[X, Y] = XY - YX$ двух векторных полей $X, Y \in \mathfrak{D}(G)$ также является векторным полем, т. е.

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} w_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{D}^1(G); \tag{1.4}$$

кроме того, справедливы тождества

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in \mathfrak{D}^1(G); \tag{1.5}$$

$$[X, Y] Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X] Y] \equiv 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{D}^1(G). \tag{1.6}$$

Последнее соотношение называется тождеством Якоби.

По определению алгебра $\mathfrak{D}(G)$ содержит единичную функцию, и поэтому соотношение (1.2) можно представить следующим образом:

$$(\alpha_1 X + \alpha_2 Y) f = \alpha_1 Xf + \alpha_2 Yf, \ (\alpha X) f = \alpha Xf, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in P.$$

Другими словами, множество векторных полей на многообразии $\mathfrak{D}(G)$ является линейным пространством. Совокупность векторных полей $\mathfrak{D}^1(G)$, рассматриваемая как векторное пространство $\mathfrak{D}^1(G)$ над P с определенным на нем правилом умножения (1.4), при помощи скобок Пуассона, для которых выполняются тождества (1.5), (1.6), образует алгебру Ли. Если это векторное пространство конечномерно над полем P, то алгебра называется конечномерной, в противном случае — бесконечномерной.

В конечномерном случае в $\mathfrak{D}^1(G)$ найдется базис из m элементов $X_1, \ldots, X_m$ такой, что любой $X \in \mathfrak{D}^1(G)$ представим как линейная комбинация $X = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i$, $c_i \in P$, с постоянными коэффициентами; соответственно скобка Пуассона двух элементов $X, Y \in \mathfrak{D}^1(G)$ также выражается через этот базис: $[X, Y] = \sum_{i=1}^{m} l_i X_i$, $l_i \in P$. Перейдем к описанию алгебры Ли, порождаемой дифференциальной системой (1.1).

Рассмотрим некоторую произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$ на траекториях $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, системы (1.1). Вычислим дифференциал от этой функции

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} dt = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dt = X\varphi dt, \tag{1.7}$$

где

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.8}$$

Поставим в соответствие системе (1.1) оператор **X**. Как только что было показано, оператор по этой системе строится однозначно. Справедливо и обратное: если дан оператор (1.8), то по нему может быть воспроизведена дифференциальная система. С этой целью в тождестве (1.7) вместо функции φ следует поочередно подставить функции $x_1, \ldots, x_n$. Между решением системы дифференциальных уравнений (1.1) и решением уравнения в частных производных первого порядка $\partial f/\partial t + \mathbf{X}f = 0$ существует глубокая связь. Оператор (1.8) будем называть ассоциированным дифференциальным оператором исходной системы (1.1).

Коэффициенты системы (1.1), как правило, зависят от вектора параметров $\alpha = \| \alpha_1, \ldots \alpha_l \|$, $\alpha_i \in \mathrm{P}$. Придавая этим параметрам произвольные значения из P, получаем некоторую бесконечную совокупность дифференциальных операторов $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots\}$, которую обозначим σ. Далее, введем рекуррентные последовательности множеств $\sigma^1 = \sigma \cup [\sigma, \sigma]$, $\sigma^2 = \sigma^1 \cup [\sigma^1, \sigma^1]$, ..., $\sigma^k = \sigma^{k-1} \cup [\sigma^{k-1}, \sigma^{k-1}]$. Здесь

$$[\sigma^i, \sigma^i] = \{\mathbf{Z}, \mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \sigma^{i-1}\}.$$

Ясно, что построенная совокупность образует алгебру Ли $\mathfrak{B}$ над полем P. Очевидно, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}^1(G)$. Эту алгебру будем называть обертывающей алгеброй Ли исходной системы (1.1). Таким образом, ассоциированный оператор **X** системы является элементом обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$. В ряде важных случаев, например линейных систем с постоянными коэффициентами, структура алгебры $\mathfrak{B}$ может быть определена по жордановой структуре матрицы коэффициентов. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1.1. Имеется система линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad a, b \in \mathrm{R}. \tag{1.9}$$

Здесь $f_1(x) = ax_1 + bx_2$, $f_2(x) = -bx_1 + ax_2$, следовательно, ассоциированный с системой линейный оператор

$$\mathbf{X} = a\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + b\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Очевидно, что при любой специализации параметров a, b структура обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$ системы (1.9) определяется операторами

$$\mathbf{X}_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbf{X}_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Эти операторы коммутативны, так как $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \equiv 0$, и составляют базис конечномерной коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{B}$ системы (1.9).

Пример 1.2. При исследовании уравнения Ван-дер-Поля возникает вспомогательная нелинейная система [113, с. 345]

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - r^2)\, x_1 - \sigma x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \sigma x_1 + (1 - r^2)\, x_2, \tag{1.10}$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\sigma = \text{const}$. Ассоциированный с системой (1.10) оператор представим в виде

$$\mathrm{X} = ((1 - r^2)\, x_1 - \sigma x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\sigma x_1 + (1 - r^2)\, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Перегруппировывая слагаемые и вводя обозначения

$$\mathrm{X}_1 = (1 - r^2) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \mathrm{X}_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

получаем $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 - \sigma \mathrm{X}_2$. Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ системы (1.10) порождена базисными операторами X_1, X_2, которые, как легко проверить, коммутируют между собой. Следовательно, $\mathfrak{B}$ конечномерна и коммутативна.

Пример 1.3. Рассмотрим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}_0 x, \quad \mathcal{A}_0 = \| a_{ij}^0 \|, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.11}$$

В этом случае

$$\begin{gathered} f_1(x) = a_{11}^0 x_1 + \cdots + a_{1n}^0 x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) = a_{n1}^0 x_1 + \cdots + a_{nn}^0 x_n \end{gathered}$$

и

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}^0 x_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^0 x_i \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Оператор X можно представить как результат произведения векторов $\mathrm{X} = f^T \partial$ (T — знак транспонирования), где

$$f = \operatorname{colon} \| f_1, \ldots, f_n \|, \quad \partial = \operatorname{colon} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|.$$

В свою очередь, вектор f^T, как нетрудно видеть, можно записать в виде произведения $f^T = x \mathcal{A}_0^T$.

Если ввести новые обозначения $\hat{x}_{m_1} = x^T$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^T$, то ассоциированный с системой (1.11) оператор X можно записать в компактной форме $\mathrm{X} = \hat{\hat{x}}_{m_1} \mathcal{A} \partial$. Предположим теперь, что матрица $\mathcal{A}$ имеет простую структуру. Из теории матриц известно, что в этом случае она представима суммой [44, с. 64] $\mathcal{A} = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \mathcal{P}_j$, где λ_j — характеристические числа матрицы $\mathcal{A}$ кратностей r_j, $r_1 + \ldots + r_m = n$, $\mathcal{P}_j$ — сопутствующие матрицы, обладающие свойствами $\sum\limits_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$ (1), $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0$, $i \neq j$ (2) и $\mathcal{P}_j^2 = \mathcal{P}_j$, $j = \overline{1, m}$ (3).

Введем дифференциальные операторы, используя приведенную выше запись

$$\mathrm{X}_j = \hat{\hat{x}}_{m_1} \mathcal{P}_j \partial. \tag{1.12}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что $[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j] \equiv 0$, $i, j = \overline{1, m}$. Следовательно, обертывающей алгеброй $\mathfrak{B}$ системы (1.11) можно считать алгебру, порожденную операторами (1.12).

Имея в виду зависимость этой алгебры от жордановой структуры матрицы коэффициентов $\mathcal{A}_0$ исходной системы, будем отмечать этот факт индексом g, т. е. писать $\mathfrak{B}_g$.

Заметим, что сопоставление системе (1.11) обертывающей алгебры $\mathfrak{B}_g$ всегда возможно, но не является единственным вариантом.

Вернемся к исследованию алгебры $\mathfrak{B}$. Операторы $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{D}^1(G)$ называются линейно независимыми в некоторой открытой области $G_1(x)$, содержащей точку x, $G_1(x) \subset G$, если они линейно независимы над полем Р как элементы алгебры $\mathfrak{D}^1(G)$, рассматриваемой как линейное пространство. Естественно, что они линейно независимы в алгебре $\mathfrak{B}$, если $G_1(x) \equiv G$. Операторы $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{D}^1(G)$ называются линейно несвязными в $G_1(x)$, если из тождества

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_h X_h \equiv 0, \quad \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_h \in \mathfrak{D}(G),$$

следует $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n \equiv 0$. Обозначим через $X_1, \ldots, X_r$ линейно несвязные операторы порождающей совокупности σ и через $X_1, X_2, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_{r+p_1}$ — линейно несвязные операторы совокупности σ^1 в $G_1(x)$. Совершенно ясно, что $X_{r+1}, \ldots, X_{r+p_1}$ получены из $X_1, \ldots, X_r$ вычислением скобок Пуассона. Если имеет место тождество

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{r} a_{ij}^l(x) X_l, \quad i, \ j = \overline{1, \ r}, \ a_{ij}^l(x) \in \mathfrak{D}(G),$$

то $X_{r+1} = \ldots = X_{r+p_1} \equiv 0$ и система операторов $X_1, \ldots, X_r$ называется полной. Бесконечномерная алгебра $\mathfrak{B}$ строится в этом случае как обычно, однако все новые элементы, будучи линейно независимыми над полем Р, линейно связаны с операторами $X_1, \ldots, X_r$. Если на некотором шаге построения совокупности σ^i не получатся новые элементы, линейно несвязные с операторами из $\sigma^1, \ldots, \sigma^{i-1}$, то нетрудно показать, что они не появятся и во всех последующих совокупностях σ^{i+1}, σ^{i+2}. Таким образом, после конечного числа шагов придем к полной системе операторов

$$X_j = f_{1j} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_{nj} \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = \overline{1, \ h}. \tag{1.13}$$

Число h линейно несвязных операторов, естественно, не превышает числа переменных n, $h \leqslant n$. Несвязные операторы (1.13) во всей области G назовем базисными операторами обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$.

§ 2. РЯД ЛИ КАК РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА. ОБЕРТЫВАЮЩАЯ ГРУППА СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = f(x), \quad x(s_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $x = \operatorname{colon}\|x_1, \ldots, x_n\| \in \mathrm{R}^n$, $f = \operatorname{colon}\|f_1, \ldots, f_n\|$. В отличие от § 1 здесь в качестве независимой переменной выбрано не время, а некоторый параметр s. Будем считать, что s изменяется в промежутке $I = \langle a, b\rangle$ с включенными или невключенными концами. Через G обозначим открытую область из R^n, в которой определены функции $f(x)$. Пусть область G такова, что $\tilde{G} = I \times G \in R^{n+1}$ является областью существования и единственности решения уравнения (2.1). Всюду в дальнейшем предполагаем, что правые части системы (2.1) — аналитические функции из $\mathfrak{D}(G)$ (см. § 1). Рассмотрим некоторую замкнутую область V, $V \in G$, определенную неравенствами

$$V: |s - s_0| \leqslant \delta_0, \quad |x_1 - x_{01}| \leqslant \delta_1, \ \ldots, \ |x_n - x_{0n}| \leqslant \delta_n. \qquad (2.2)$$

Будем предполагать, что в области V правые части системы (2.1) представимы сходящимися рядами

$$f_i(x) = \sum_{m_1, \ldots, m_n}^{\infty} a^{(i)}_{m_1, \ldots, m_n} (x_1 - x_{01})^{m_1} \ldots (x_n - x_{0n})^{m_n}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (2.3)$$

Коэффициенты $a^{(i)}_{m_1, \ldots, m_n}$ рядов (2.3) являются функциями точки $x_0 = \| x_{01}, \ldots, x_{0n} \|$.

Решение задачи Коши для системы (2.1) будем искать в виде ряда Тейлора

$$x_i = x_{0i} + \frac{s - s_0}{1!} \left(\frac{dx_i}{ds} \right)_{s=s_0} + \frac{(s - s_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} \right)_{s=s_0} + \cdots \qquad (2.4)$$

Определение коэффициентов выписанного ряда производится последовательным нахождением производных $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}, \ldots$ из уравнений (2.1) и вычислением их значений в точке $x = x_0$.

Факт существования решения в виде ряда (2.4) устанавливается известной теоремой Коши.

Теорема 2.1 (Коши) [65, с. 365]. *Если правые части системы (2.1) аналитические в области V, то система имеет единственное решение задачи Коши, аналитическое в окрестности точки $s=s_0$ и представимое рядами*

$$x_i = x_{0i} + \sum_{p=1}^{\infty} c^{(i)}_p (s - s_0)^p, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эти ряды сходятся в области

$$|s - s_0| < \alpha < \delta_0, \quad \alpha = \delta_0 (1 - e^{-\beta/n\alpha m}), \qquad (2.5)$$

где $0 < \alpha < \delta_0$, $0 < \beta < \delta_i$, $i = \overline{1, n}$, $M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}$, $M_1, \ldots, M_n$ — максимальные значения функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, когда x изменяется в области V.

Если φ — произвольная функция вектора x, то согласно формуле (1.7)

$$\frac{d\varphi}{ds} = X\varphi, \qquad (2.6)$$

где $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial/\partial x_i$ — оператор, ассоциированный с системой (2.1). Производная $d\varphi/ds$ сама является функцией x, и поэтому справедливы формулы

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = (\mathrm{X})^2\varphi, \ \ldots, \ \frac{d^k\varphi}{ds^k} = (\mathrm{X})^k\varphi. \tag{2.7}$$

Подставляя в ряд (2.4) значения производных, выражаемых формулами (2.6), (2.7) (предварительно вычислив их в точке $s = s_0$), получаем для ряда (2.4) выражение

$$x_i = x_{0i} + \frac{s - s_0}{1!}\mathrm{X}(x_0)\,x_{0i} - \frac{(s - s_0)^2}{2!}\mathrm{X}^2(x_0)\,x_{0i} + \cdots, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.8}$$

Здесь $\mathrm{X}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)\,\partial/\partial x_{0i}$, т. е. оператор $\mathrm{X}(x_0)$ получается из оператора $\mathrm{X}(x)$ заменой x на x_0. Степени оператора $\mathrm{X}(x_0)$ определяются равенствами

$$\mathrm{X}^0(x_0)\,f(x_0) = f(x_0), \ \ldots, \ \mathrm{X}^k(x_0)\,f(x_0) = \mathrm{X}(x_0)\,(\mathrm{X}^{k-1}(x_0))\,f(x_0), \quad k \in \mathrm{Z}^+.$$

Введем для ряда, стоящего в правой части равенств (2.8), сокращенное обозначение

$$e^{((s-s_0)\mathrm{X}(x_0))}x_{0i} \equiv \left(1 + \frac{s - s_0}{1!}\mathrm{X}(x_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}\mathrm{X}^2(x_0) + \cdots\right)x_{0i}. \tag{2.9}$$

Так как ряд (2.8) (соответственно (2.9)) является видоизмененной записью ряда (2.4), который сходится согласно теореме Коши в области (2.5), то ряд (2.8) также сходится в этой области. Следовательно, решение системы (2.1) можно записать сокращенно в виде

$$x_i = e^{((s-s_0)\mathrm{X}(x_0))}x_{0i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.10}$$

где правая часть соотношений (2.10) представляется рядом (2.9). Запись решения системы (2.1) в виде ряда (2.10) называется представлением этого решения с помощью рядов Ли. Приведем точное определение.

Определение 2.1. Пусть $\mathrm{X} \in \mathfrak{D}^1(G)$ — производный линейный дифференциальный оператор первого порядка, тогда рядом Ли называется ряд

$$e^{(s\mathrm{X}(x))}f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{s^i}{i!}\mathrm{X}^i(x)\,f(x), \quad f \in \mathfrak{D}(G), \tag{2.11}$$

где s — некоторый параметр.

Нашей ближайшей целью является изучение основных свойств рядов Ли и в первую очередь — выяснение условий их сходимости. Далее будут рассмотрены те преимущества, которые дает запись решения системы (2.1) в виде ряда Ли (2.10) по сравнению с обычной записью в виде ряда Тейлора (2.4). Важнейшее из них состоит в возможности по обертывающей алгебре Ли $\mathfrak{B}$ исходной системы (2.1) ввести еще один алгебраический объект — порождаемые этими алгебрами группы.

Запись решения нелинейного уравнения в виде экспоненты (2.10) оператора $\mathrm{X}(x_0)$ напоминает запись решения линейного уравнения

$\frac{dx}{ds} = \mathcal{A}x$, $x(s_0) = x_0$ в виде матричной экспоненты

$$x = e^{((s-s_0)\mathcal{A}}x_0. \tag{2.12}$$

Указанная аналогия не случайна, так как ряды Ли (2.10) в действительности обладают набором алгебраических свойств, хорошо известных для матричных рядов (2.12). Прежде чем приступить к дальнейшему изложению материала, приведем простой пример нахождения решения в виде рядов Ли.

Пример 2.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = y, \quad \frac{dy}{ds} = -x, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{2.13}$$

Ассоциированный оператор этой системы $\mathbf{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Легко проверить, что результатом последовательного действия оператора на переменные x, y является:

$$\mathbf{X}^g x = \begin{cases} (-1)^{n-1}\ y, & g = 2n-1, \\ (-1)^n x, & g = 2n, \ n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$\mathbf{X}^g y = \begin{cases} (-1)^n x, & g = 2n-1, \\ (-1)^n y, & g = 2n, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Тогда, вводя обозначения $\mathbf{X}(x_0) = y_0\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial y_0}$, получаем

$$x = \left(x_0 + \mathbf{X}_0 x_0\frac{s}{1!} + \mathbf{X}_0^2 x_0\frac{s^2}{2!} + \ldots\right) = x_0 + \frac{s}{1!}y_0 - \frac{s^2}{2!}x_0 - \frac{s^3}{3!}y_0 + \ldots$$

$$\ldots = x_0\left(1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \ldots\right) +$$

$$+ y_0\left(\frac{s}{1!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \ldots\right) = x_0\cos s + y_0\sin s.$$

Совершенно аналогично получим $y = -x_0\sin s + y_0\cos s$. Следовательно, решение задачи Коши для исходной системы (2.13) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= e^{(s\mathbf{X}_0)}x_0 \equiv x_0\cos s + y_0\sin s; \\ y &= e^{(s\mathbf{X}_0)}y_0 \equiv -x_0\sin s + y_0\cos s. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ряды Ли (2.14) сходятся при всех $s \in \mathrm{R}$. Решение (2.14) в действительности является общим. В самом деле, уравнения (2.14) легко разрешаются относительно начальных значений x_0, y_0 с помощью операции вычисления «обратной экспоненты» (по аналогии с матричными рядами):

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{(-s\mathbf{X})}x \equiv x\cos s - y\sin s; \\ y_0 &= e^{(-s\mathbf{X})}y \equiv x\sin s + y\cos s, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\mathbf{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

Функции в правых частях формул (2.15) являются первыми интегралами исходной системы (2.13).

Приведем ряд утверждений о сходимости ряда Ли (2.11).

Теорема 2.2. *Пусть функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — аналитические в области V, $V \in G$:*

$$V: |s - s_0| \leqslant \delta_0, \ |x_i - x_{i0}| \leqslant \delta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

и представимы в ней сходящимися рядами

$$f_i(x) = \sum_{m_1,\ldots,m_n}^{\infty} a^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n} (x_1 - x_{01})^{m_1} \ldots (x_n - x_{0n})^{m_n}, \quad i = \overline{0, n}; \tag{2.16}$$

тогда ряд Ли

$$e^{(s\mathbf{X}(x))} f_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} \mathbf{X}^j(x) f_0(x), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, *является аналитической функцией в области*

$$|s - s_0| < \min\left\{\chi, \frac{\alpha}{N(n+1)}\left(1 - \frac{\chi}{\alpha}\right)^{n+1}\right\}, \; |x_i - x_{i0}| \leqslant \chi < \alpha, \tag{2.18}$$

где

$$\alpha = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n), \; M_j = \max_{x \in V} f_j, \quad j = \overline{1, n}, \; N = \sum_{j=0}^{n} M_j.$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится методом мажорантных функций Коши. Предпошлем доказательству необходимые определения и сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Так как ряды (2.16), представляющие функции f_j, $i = \overline{0, n}$, сходятся в области V, то, как известно, они сходятся в этой области абсолютно, т. е.

$$\sum_{m_1,\ldots,m_n}^{\infty} |a^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n}| \rho_1^{m_1}, \ldots, \rho_n^{m_n} = \tilde{M}_i, \tag{2.19}$$

где $0 < \rho_i \leqslant \delta_i$, $\tilde{M} \leqslant M_i$, $i = \overline{0, n}$. Следовательно, для коэффициентов ряда (2.19) справедлива оценка

$$|a^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n}| \leqslant \frac{M_i}{\delta_1^{m_1} \ldots \delta_n^{m_n}} \equiv b^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Введем вещественные переменные $\chi_1, \ldots, \chi_n$, определяемые неравенствами $|x_i - x_{0i}| \leqslant x_i < \alpha$, где $\alpha = \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Функции

$$\frac{M_i}{\left(1 - \frac{\chi_1}{\delta_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{\chi_n}{\delta_n}\right)} = \sum_{m_1,\ldots,m_n}^{\infty} b^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n} \chi_1^{m_1} \ldots \chi_n^{m_n} \tag{2.20}$$

будут мажорантами соответственно для функций f_0, f_i, $i = \overline{1, n}$. Очевидно выполнение неравенств

$$\frac{1}{1 - \chi_i/\delta_i} \leqslant \frac{1}{1 - \chi/\alpha}, \tag{2.21}$$

где $|x_i - x_{i0}| \leqslant \chi_i \leqslant \chi < \alpha$. С учетом неравенства (2.21) из мажорант (2.20) легко получить новые можоранты

$$F(\chi) = \frac{M_0}{(1 - \chi/\alpha)^n}, \; \Phi_i(\chi) = \frac{M_i}{(1 - \chi/\alpha)^n}$$

соответственно для функций $f_0(x)$ и $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Для введенных мажорантных функций справедливы соотношения

$$
\begin{gathered}
|f_0| \leqslant F(\chi), \quad \left| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right| \leqslant \frac{d^m F}{d\chi^m}, \\
|f_i| \leqslant \Phi_i(\chi), \quad \left| \frac{\partial^m f_i}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right| \leqslant \frac{d^m \Phi_i}{d\chi^m}.
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Если обозначить $N = \sum_{i=1}^{n} M_i$, то можно ввести общую мажоранту [1]

$$
\Phi(\chi) = \frac{N}{(1 - \chi/\alpha)_n},
$$

справедливую для всех функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Введем дифференциальный оператор

$$
\mathbf{W} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{N}{(1 - \chi/\alpha)^n} \frac{d}{d\chi}.
$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *При* $|x_i - x_{0i}| \leqslant \chi < \alpha$, $i = \overline{1, n}$, *справедливо неравенство*

$$
|\mathbf{X}^m f_0(x)| \leqslant \mathbf{W}^m F(\chi), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.23}
$$

Доказательство. При $m = 0$ неравенство (2.23) очевидно. В силу неравенств (2.22) при $m = 1$ получаем

$$
|\mathbf{X} f_0(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{(1 - \chi/\alpha)^n} \frac{dF}{d\chi} =
$$

$$
= \frac{N}{(1 - \chi/\alpha)^n} \frac{d}{d\chi} F(\chi) = \mathbf{W} F(\chi).
$$

Далее доказательство проводится методом математической индукции. Предположим, что оно справедливо при некотором $m > 1$, тогда

$$
|\mathbf{X}^{m+1} f| = |\mathbf{X}(\mathbf{X}^m f)| = \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \mathbf{X}^m f}{\partial x_i} \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{M_i}{\left(1 - \dfrac{\chi}{\alpha}\right)^n} \cdot \frac{d\mathbf{W}^m F}{d\chi} = \mathbf{W}^{m+1} F(\chi).
$$

Совершенно аналогично доказывается следующая рекуррентная формула.

---

[1] В качестве N можно выбрать также число $N = \max\{M_i\}$ [110].

Лемма 2.2. *При* $m = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{W}^m F(\chi) = \frac{Mm!}{\left(1 - \frac{\chi}{\alpha}\right)^n} \cdot \frac{N^m \prod\limits_{k=1}^{m}\left(n + 1 - \frac{1}{k}\right)}{\alpha^m \left(1 - \frac{\chi}{\alpha}\right)^{m(n+1)}}.$$

Доказательство теоремы 2.2. На основании лемм 2.1 и 2.2 ряд Ли (2.17) можно оценить следующим образом:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|s - s_0|^m}{m!} |\mathbf{X}^m f| \leqslant \frac{M}{(1 - \chi/\alpha)^n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|s - s_0|^m}{m!} \mathbf{W}^m F =$$

$$= \frac{M}{(1 - \chi/\alpha)^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|s - s_0|^m M}{(1 - \chi/\alpha)} \frac{N^m \prod\limits_{k=1}^{m} (n + 1 - 1/k)}{\alpha^m (1 - \chi/\alpha)^{m(n+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{(1 - \chi/\alpha)^n} \left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{|s - s_0| N (n+1)}{\alpha (1 - \chi/\alpha)^{n+1}}\right)^m\right\}.$$

Последний ряд сходится при $|s - s_0| < \frac{\alpha}{N(n+1)} (1 - \chi/\alpha)^{n+1}$. Если учесть, что $|s - s_0| \leqslant \chi < \alpha$, то получим условия абсолютной сходимости ряда Ли в виде неравенства (2.18).

Обозначим через $\bar{\bar{G}} = \bar{G} \times (|s - s_0| \leqslant h)$ конечную замкнутую область пространства R^{n+1}, $\bar{G} \in \mathrm{R}^n$, в которой коэффициенты оператора $\mathbf{X}$ и функция $f(x)$ аналитичны. Справедливо следующее утверждение о сходимости ряда Ли (2.11) во всей области $\bar{\bar{G}}$.

Теорема 2.3. *В замкнутой области* $\bar{\bar{G}}$ *найдется такое число* h $(h > 0)$, *что ряд Ли*

$$e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} f \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - s_0)^m}{m!} \mathbf{X}^m f(x) \tag{2.24}$$

при $|s - s_0| \leqslant h$ *будет сходиться абсолютно и равномерно во всей области* $G \times \{|s - s_0| \leqslant h\}$ *и представляться там аналитической функцией переменных* s, x. *Ряд Ли внутри области* $G \times \{|s - s_0| \leqslant h\}$ *можно дифференцировать почленно произвольное число раз. Справедливы равенства*

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} f(x) = \mathbf{X}(x)\, e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} f(x); \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - s_0)^m}{m!} \mathbf{X}^m f\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - s_0)^m}{m!} \frac{\partial \mathbf{X}^m f}{\partial x_i}. \tag{2.26}$$

Доказательство. По теореме 2.2 ряд Ли (2.24) абсолютно сходится в области, определяемой неравенствами (2.18). Зафиксируем в (2.18) число χ и введем параметр $0 < \theta < 1$.

В области

$$|s - s_0| \leqslant h_0 < \min\left\{\theta\alpha, \frac{\alpha(1-\theta)^{n+1}}{N(n+1)}\right\}, \quad |x_i - x_{0i}| \leqslant \alpha\theta,$$

которую будем обозначать как $\overline{V}_n$, ряд (2.24) сходится абсолютно и равномерно и является аналитической функцией от переменных s, x. Точка $(s_0, x_0) \in \bar{\bar{G}}$ — произвольная. Следовательно, множество областей типа $\overline{V}_n$ представляет собой некоторое покрытие области G. По теореме Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Каждому элементу этого покрытия соответствует свое число δ_0. Обозначив через h наименьшее из них, получим, что при $|s - s_0| \leqslant h$ ряд (2.24) сходится абсолютно и равномерно во всей области $\bar{G}$.

Сходимость ряда (2.25) следует из теоремы 2.2. Доказательство формул (2.26) приведено в работе [110, с. 15].

Следующая теорема имеет исключительно важное значение в дальнейшем изложении.

Теорема 2.4. *Пусть ряд Ли (2.11) используется в качестве замены переменных*

$$x_1' = e^{((s-s_0))\mathbf{X}(x))} x_1, \ \ldots, \ x_n' = e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} x_n. \tag{2.27}$$

Тогда преобразования (2.27) являются точечными, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$ *имеет место тождество*

$$\varphi(e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} x_1, \ \ldots, \ e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} x_n) \equiv e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} \varphi(x_1, \ \ldots, \ x_n), \tag{2.28}$$

или

$$\varphi(x_1', \ \ldots, \ x_n') = e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} \varphi(x_1, \ \ldots, \ x_n).$$

Доказательство. Запишем левую часть соотношений (2.28) в развернутом виде:

$$\varphi(x') = \varphi(x_1', \ \ldots, \ x_n') = \varphi(e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} x_1, \ \ldots, \ e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))} x_n)$$

и разложим функцию $\varphi(x')$ в ряд по $s - s_0$ в окрестности точки s_0:

$$\varphi(x') = \varphi(x')|_{s=s_0} + \frac{s-s_0}{1!} \left.\frac{d\varphi(x')}{ds}\right|_{s=s_0} + \cdots \tag{2.29}$$

Ясно, что $\varphi(x')|_{s=s_0} = \varphi(x)$. Далее, для производных $d^k\varphi(x')/ds^k$, $k = 1, 2, \ldots$, справедливы выведенные выше формулы (2.7) и $(d^k\varphi(x')/ds^k)|_{s=s_0} = \mathbf{X}^k\varphi(x)$. Следовательно, для разложения (2.29) окончательно получаем доказываемую формулу (2.28):

$$\varphi(x') = \left(\varphi(x) + \frac{(s-s_0)}{1!}\mathbf{X}(x)\varphi(x) + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\mathbf{X}^2(x)\varphi(x) + \cdots\right) = e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))}\varphi(x).$$

Пусть ряд Ли (2.11) рассматривается в области V, задаваемой неравенствами (2.2). Подставим в него вместо переменных x переменные x_0, а вместо функции $f(x)$ — поочередно функции x_{0i}, $i = \overline{1, n}$.

В результате получим n функций $e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x_0))}x_{0i}$, которые согласно теореме 2.2 сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области

$$|s-s_0|\leqslant h=\min\left\{\mu\alpha,\ \frac{\alpha(1-\mu)^{n+1}}{N(n+1)}\right\},$$
$$(x_i-x_{0i})\leqslant\mu\alpha,\quad 0<\mu<1. \tag{2.30}$$

Обозначим эту область V. Как следует из изложенного выше, функции

$$x_i(s)=e^{(s-s_0)\mathbf{X}(x_0)}x_{0i},\quad i=\overline{1,\ n}, \tag{2.31}$$

являются аналитическими решениями системы (2.1) в замкнутой области $\overline{V}$, обращающимися в x_0 при $s=s_0$. Наряду с рядами (2.31) введем ряды Ли

$$x_{0i}=e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i,\quad i=\overline{1,\ n}. \tag{2.32}$$

Эти ряды также представляют собой аналитические функции в области $\overline{V}$, т. к. имеют те же мажорантные функции, что и ряды (2.31).

Для упрощения записей введем следующие обозначения для функций (2.31) и (2.32):

$$\varphi_i(x_0)=e^{(s-s_0)\mathbf{X}(x_0)}x_{0i},\ \Psi_i(x)=e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i,\quad i=\overline{1,\ n}.$$

Тогда $x_i=\varphi_i(x_0)$ и $x_{i0}=\Psi_i(x)$.

Теорема 2.5. *Функции $x_{i0}=\Psi_i(x)$ (2.32) являются обратными по отношению к функциям $x_i=\varphi_i(x_0)$ (2.31), т. е.*

$$x_i=\varphi_i(\Psi_1(x),\ \ldots,\ \Psi_n(x))\equiv x_i,\quad i=\overline{1,\ n}, \tag{2.33}$$

и представляют n независимых аналитических первых интегралов системы (2.1) в области $\overline{V}$.

Доказательство. Подставим в функции (2.33) значения $x_{0i}=\Psi_i(x)$:

$$\varphi_i(\Psi_1(x),\ \ldots,\ \Psi_n(x))=\varphi_i(e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_1,\ \ldots,\ e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_n). \tag{2.34}$$

Воспользуемся результатами теоремы 2.4 о точечности преобразований (2.32):

$$\varphi_i(\Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_n)=e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}\varphi_i(x)=e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}e^{(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i.$$

Но из элементарных алгебраических вычислений следует, что $e^{(-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x))}\equiv 1$. Поэтому из (2.34) немедленно получаем доказываемые тождества (2.33).

Чтобы показать, что функции $\Psi_i(x)$ являются первыми интегралами системы (2.1), нужно убедиться, что они обращают уравнение $\partial f/\partial s+\mathbf{X}(x)f=0$ в тождество. Действительно, согласно формулам (2.25), (2.26)

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}=-\mathbf{X}(x)e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i$$

и

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}+\mathbf{X}(x)\varphi_i=-\mathbf{X}(x)e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i+\mathbf{X}(x)e^{-(s-s_0)\mathbf{X}(x)}x_i\equiv 0.$$

Остается доказать независимость этих интегралов. Пусть, например, функция $\varphi_1(x) = e^{(-(s-s_0)X(x))}x_1$ является комбинацией остальных интегралов:

$$e^{-(s-s_0)X(x)}x_1 = \Psi(e^{-(s-s_0)X(x)}x_2, \ldots, e^{-(s-s_0)X(x)}x_n),$$

где Ψ — некоторая аналитическая функция. Используя формулы (2.27), найдем $e^{(-(s-s_0)X(x))}(x_1 - \Psi(x_2, \ldots, x\ )) \equiv 0$. Это тождество справедливо при любых s из области сходимости и, в частности, при $s = s_0$. В этом случае $x_1 - \Psi(x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, что невозможно, так как переменные x независимы.

Переходим к изучению важной связи, которую устанавливает ряд Ли (2.11) между обертывающими алгебрами Ли системы (1.1), введенными в § 1, и некоторыми группами.

Выделим в области $\bar{V}$ (2.30) некоторую подобласть $\bar{W}$, определяемую неравенствами

$$\bar{W}: |s-s_0| \leqslant a, \quad |x_i - x_{0i}| \leqslant b, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$a = h, \ b = \frac{\mu a}{M}, \quad M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}.$$

Теорема 2.6. *На отрезке Пеано* $|s - s_0| \leqslant \tilde{h}$, $h = \min\{h, b/M\}$, *ряды Ли (2.31) представляют аналитическое решние задачи Коши системы (2.1), не выходящее из области* $\bar{W}$.

Доказательство. Фактически нужно убедиться, что ряд (2.31) представляет единственное аналитическое решение задачи Коши. Применение метода последовательных приближений на отрезке Пеано к системе 2.1 приводит к аналитическому решению (см. [104, с. 106]). В силу единственности это решение совпадает с рядами Ли (2.31).

Перенесем на аналитические решения в виде рядов Ли (2.31) следующий результат, известный из общей теории дифференциальных уравнений.

Теорема 2.7 [65, с. 307]. *Пусть система (2.1) определена в области* $\bar{W}$ *и удовлетворяет там условиям Липшица по* x *в области* G *локально, тогда решение задачи Коши* $x_i = \varphi(s, s_0, x_{01}, \ldots, x_{0n})$, *определенное на отрезке Пеано* $|s - s_0| \leqslant \tilde{h}$, $\tilde{h} = \min\{h, b/M\}$, *в области*

$$\bar{W}_0: |s-s_0| \leqslant \tilde{h}/4, \ |x_i - x_{0i}| \leqslant b/4, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.35}$$

дает общее решение.

При доказательстве теоремы используется тот факт, что решение на отрезке Пеано не выходит из области $\bar{W}$. Далее, существен факт непрерывной зависимости решений от начальных данных в области [1]

$$|s-s_0| \leqslant \tilde{h}/2, \ |x_{0i}^* - x_{0i}| \leqslant b/2, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.36}$$

---

[1] Здесь варьируются лишь фазовые переменные x_0.

Но оба эти свойства также присущи и системе (2.1) в случае аналитических коэффициентов. Из теоремы 2.6 следует выполнимость первого условия. Вывод неравенств (2.36) для систем с аналитическими коэффициентами можно найти в упоминаемой выше работе [104, с. 109].

Следствие 2.1. В области $\overline{W}_0$ (2.35) ряды Ли (2.31) задают общее решение системы (2.1).

Следовательно, если в формулах (2.31) зафиксировать параметр s на некоторой точке s', $s' \in |s - s_0| \leqslant h/4$, то точка x', полученная в результате преобразования

$$x_i' = e^{((s-s_0)\mathbf{X}(x_0))}x_{0i}, \quad i = \overline{1,\ n}, \tag{2.37}$$

принадлежит области $\overline{W}_0$. Справедливо также и обратное утверждение. Если $x' \in \overline{W}_0$, то решив уравнения (2.37) относительно

$$x_{0i} = e^{(-(s-s_0)\mathbf{X}(x'))}x_i', \quad i = \overline{1,\ n}, \tag{2.38}$$

получим точку $x_0 \in \overline{W}_0$. Формулы (2.37) можно интерпретировать как некоторое определяемое параметром $\Delta_1 = s' - s_0$ преобразование T точек x области $\overline{W}_0$ в себя, $\overline{W}_0 \in \mathrm{R}^n$. Тогда соотношения (2.37) сокращенно можно представить в виде

$$x' = x_0 T(\Delta_1). \tag{2.39}$$

Формулы (2.38) показывают, что для преобразования $T(\Delta_1)$ существует обратное, причем $T^{-1}(\Delta_1) = T(-\Delta_1)$, следовательно,

$$x_0 = xT^{-1}(\Delta_1) = xT(-\Delta_1). \tag{2.40}$$

Очевидно, что любой ряд Ли

$$e^{(\Delta\mathbf{X}(x))}x, \quad x \in \overline{W}_0, \tag{2.41}$$

определяет некоторое преобразование $T(\Delta)$ области $\overline{W}_0$ в себя, если параметр Δ удовлетворяет следующему условию малости:

$$|\Delta| \leqslant \tilde{h}/4. \tag{2.42}$$

Обозначим множество преобразований $T(\Delta)$ при выполнении условий (2.42) буквой $\mathcal{G}$. Преобразования (2.39) и (2.40) взаимно однозначны и аналитичны и, следовательно, являются локальными аналитическими диффеоморфизмами области $\overline{W}_0$ в себя T: $\overline{W}_0 \to \overline{W}_0$. Определим произведение двух последовательных преобразований

$$x'' = e^{(\Delta_2\mathbf{X}(x'))}x' \equiv \varphi_1(x') \equiv x'T(\Delta_2) \tag{2.43}$$

и

$$x' = e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x_0))}x_0 \equiv \varphi_0(x_0) \equiv x_0T(\Delta_1). \tag{2.44}$$

Подставим значение x' из (2.44) в (2.43):

$$x'' = \varphi_1(e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x_0))}x_{01}, \ \ldots, \ e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x_0))}x_{0n}) \equiv$$
$$\equiv e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x_0))}\varphi_1(x_{01}, \ \ldots, \ x_{0n}) \equiv e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x_0))}e^{(\Delta_2\mathbf{X}(x_0))}x_0 \equiv x_0T(\Delta_1)\,T(\Delta_2).$$

(Здесь использованы результаты теоремы (2.5)). Элементарные алгебраические вычисления дают

$$e^{\Delta_1 \mathbf{X}(x_0)} e^{\Delta_2 \mathbf{X}(x_0)} = e^{(\Delta_1+\Delta_2)\mathbf{X}(x_0)} x_0. \tag{2.45}$$

Чтобы преобразование (2.45) принадлежало совокупности $\mathfrak{G}$, достаточно выполнения дополнительного условия $|\Delta_1 + \Delta_2| \leqslant h/4$. Соотношения (2.45) представим в символической форме

$$e^{\Delta_1 \mathbf{X}(x_0)} e^{\Delta_2 \mathbf{X}(x_0)} x_0 = x_0 T(\Delta_1) T(\Delta_2) = x_0 T(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Используя свойство (2.45), легко убедиться, что преобразования совокупности $\mathfrak{G}$ обладают свойством ассоциативности, т. е.

$$x_0 (T(\Delta_1) T(\Delta_2)) T(\Delta_3) = x_0 T(\Delta_1) ((T(\Delta_2) T(\Delta_3)). \tag{2.46}$$

Очевидно, что конечное число преобразований $x_0 T(\Delta_1) T(\Delta_2) \ldots$ $\ldots T(\Delta_m) = x_0 T(\Delta_1 + \ldots + \Delta_m)$ приводит к преобразованию из совокупности $\mathfrak{G}$, когда выполняется дополнительное условие

$$|\Delta_1 + \cdots + \Delta_m| < \tilde{h}/4. \tag{2.47}$$

Рассмотренные свойства преобразований из множества $\mathfrak{G}$ показывают, что совокупность $\mathfrak{G}$ является локальной однопараметрической группой Ли. Чтобы пояснить это понятие, приведем необходимые определения.

Определение 2.2 [36, с. 14] (абстрактная группа). Множество $\mathfrak{U}$ с бинарной операцией умножения называется группой, если:

1) операция ассоциативна, т. е. $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in \mathfrak{U}$;
2) в $\mathfrak{U}$ существует единичный элемент e, т. е. $ea = ae$, $a \in \mathfrak{U}$;
3) для любого элемента $a \in \mathfrak{U}$ существует обратный $a^{-1} \in \mathfrak{U}$ такой, что $a \cdot a^{-1} = e$.

Очевидно, что в множестве $\mathfrak{G}$ выполняются все групповые аксиомы. В качестве единичного элемента выступает тождественное преобразование $T(0) \equiv 1$. Для любого элемента $T(\Delta) \in \mathfrak{G}$ существует обратный $T(-\Delta)$: $T(\Delta)\, T(-\Delta) = 1$. Наконец, выполняется условие ассоциативности (2.46).

Единственная оговорка, которую следует сделать, состоит в том, что нельзя производить неограниченное число умножений, не учитывая условий (2.47). То, что элементами множества $\mathfrak{G}$ являются диффеоморфизмы, позволяет конкретизировать введенное абстрактное определение группы. Так как функции (2.41) зависят от переменных x, Δ непрерывно, то группа $\mathfrak{G}$ называется непрерывной. Групповые свойства для преобразований множества $\mathfrak{G}$ выполняются при дополнительном ограничении (2.47), т. е. если они не выводят преобразуемую точку из окрестности $\overline{W}_0$, и тем самым выполняются локально. Наконец, существенно то, что каждое преобразование T (2.41) параметризуется числом Δ. Как следует из (2.45), произведение двух преобразований $T(\Delta_1)$ и $T(\Delta_2)$ можно записать в виде

$$x_0 T(\Delta_1) T(\Delta_2) = x_0 T(\varphi(\Delta_1, \Delta_2)),$$

где $\varphi(\Delta_1, \Delta_2) \equiv \Delta_1 + \Delta_2$.

Пусть $\mathfrak{D}$ обозначает интервал изменения параметра Δ: $\mathfrak{D}\{a\in\in\mathfrak{D}: |a|\leqslant\tilde{h}/4\}$. Функция $\varphi(\Delta_1, \Delta_2)$, как легко проверить, удовлетворяет следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
&1)\ a\in\mathfrak{D}\Rightarrow\varphi(O, a)=\varphi(a, O)=a;\\
&2)\ a, b, c\in\mathfrak{D};\quad \varphi(a, b), \varphi(b, c)\in\mathfrak{D},\\
&\quad \varphi(a, \varphi(b, c))\in\mathfrak{D}, \varphi(\varphi(a, b), c)\in\mathfrak{D}\ \Rightarrow\varphi(a, \varphi(b, c))=\varphi(\varphi(a, b), c);\\
&3)\ \varphi\in C_\infty(\mathfrak{D}\times\mathfrak{D})
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

и называется законом умножения в группе $\mathfrak{G}$.

Множество преобразований $\mathfrak{G}$ с законом умножения $\varphi(a, b)$, a, $b\in\mathfrak{D}$, удовлетворяющим аксиомам (2.48), образует локальную однопараметрическую группу Ли преобразований.

Введенное понятие однопараметрической группы допускает естественное обобщение на r-параметрические группы преобразований. Пусть имеется множество локальных диффеоморфизмов, определенных в некоторой окрестности V точки $x_0\in\mathrm{R}^n$, заданных функциями

$$
x''=h(x', a_2),\ x'=h(x_0, a_1),\ h=\|h_1, \ldots, h_n\|. \tag{2.49}
$$

Не теряя общности можно считать, что $h_i\in\mathfrak{D}(V)$, $i=\overline{1, n}$. Функции (2.49) зависят от векторов параметров $a_2=\|a_{21}, \ldots, a_{2r}\|$, $a_1=\|a_{11}, \ldots, a_{1r}\|$. Вектор a изменяется в некоторой окрестности $\mathfrak{D}^{(r)}$ нуля в пространстве R^r, т. е. $\mathfrak{D}^{(r)}\in\mathrm{R}^r$, $\|\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}\|\in\mathfrak{D}^{(r)}$.

Произведение двух преобразований (2.49) дает $x''=h(h(x_0, a_1), a_2)=h(x_0, a_3)$, где $a_3=\Psi(a_1, a_2)$, $\Psi=\|\Psi_1, \ldots, \Psi_r\|$.

Функция $\Psi(a_1, a_2)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
&1)\ a\in\mathfrak{D}^{(r)}\Rightarrow\Psi(O, a)=\Psi(a, O)=a;\\
&2)\ a, b, c\in\mathfrak{D}^{(r)};\quad \Psi(a, b), \Psi(b, c), \Psi(a, \Psi(b, c));\\
&\quad \Psi(\Psi(a, b), c)\in\mathfrak{D}^{(r)}\Rightarrow\Psi(a, \Psi(b, c))=\Psi(\Psi(a, b), c);\\
&3)\ \Psi\in C_\infty(\mathfrak{D}^{(r)}\times\mathfrak{D}^{(r)})
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

и называется законом умножения r-параметрической группы. Множество преобразований $\mathfrak{G}_r$, определяемых формулами (2.49) с законом умножения (2.50), называется локальной r-параметрической группой Ли.

r-Параметрические группы дают пример конечномерных групп, в отличие от бесконечномерных групп, параметризуемых бесконечным числом параметров, или «произвольными функциями».

Конечномерные группы Ли достаточно хорошо изучены, однако представляют слишком узкий класс систем дифференциальных уравнений. Поэтому введем определение более общего объекта — псевдогруппы (бесконечномерной группы).

Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает множество локальных диффеоморфизмов T: $\chi\to\chi$, χ — область, $\chi\in R^n$, $T\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$ и $\mathfrak{W}$ — некоторое подмножество множества $\mathfrak{N}$. Вектор $\xi\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$, $\xi\neq 0$, называется касательным к $\mathfrak{W}$, если существуют последовательности $\{T_n\}\subset$

$\subset \mathfrak{N}$ и $\{K_n\} \subset R$, для которых

$$n \to \infty \Rightarrow K_n (T_n x - x) \overset{C^\infty}{\Rightarrow} \xi (x).$$

В дальнейшем $\mathfrak{G}$ будет обозначать однопараметрическую группу, порожденную вектором ξ.

Определение 2.3 [95, с. 31]. Множество $\mathfrak{N}$ локальных C^∞-диффеоморфизмов $T: \chi \to \chi$ называется псевдогруппой, если существует подмножество $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{N}$ такое, что выполнены аксиомы

1) $\forall\, T_1,\ T_2 \in \mathfrak{W} \Rightarrow T_1 T_2 \subset \mathfrak{W},\ T_1^{-1} \in \mathfrak{W}$;

2) для всякого вектора, касательного к $\mathfrak{N}$, группа $\mathfrak{G}(\xi) = \{T(\Delta)\}$ локально содержится в $\mathfrak{W}$ в том смысле, что

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \in \{|\Delta| < \delta\} \to T_\Delta \in \mathfrak{W}.$$

Конечная непрерывная группа $\mathfrak{G}_r$ является псевдогруппой. Псевдогруппа, которая параметризуется бесконечным числом параметров, называется бесконечной группой. Существуют широкие классы бесконечномерных групп: С. Ли, Э. Картана, аналитические группы Г. Биркгофа и др. (см., например, [95]).

Исходным пунктом построения псевдогруппы в рассматриваемом случае является обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ для системы дифференциальных уравнений (1.1). Пусть эта алгебра порождена элементами $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$. Будем считать, что в области $\overline{W}_0$ (2.35) каждый элемент алгебры $\mathbf{X}_i$, $i = 1, 2, \dots$, порождает однопараметрическую группу преобразований, которую будем обозначать $\mathfrak{G}(\mathbf{X}_i)$, т. е. элементы этой группы $T^{(i)}(\Delta)$ образованы рядами Ли:

$$x' = xT^{(i)}(\Delta) \equiv e^{(\Delta \mathbf{X}_i(x))} x, \quad x \in \overline{W}_0,\ |\Delta| \leqslant \tilde{h}/4. \tag{2.51}$$

Таким образом, в качестве элементов псевдогруппы следует выбрать набор преобразований $T^{(i)}(\Delta)$ (2.51), $i = 1, 2, \dots$ В силу введенного определения выполняется аксиома 2 определения 2.3. Очевидно также существование для каждого преобразования $T^{(i)}(\Delta)$ обратного ему.

Остается определить произведение двух произвольных преобразований — $T_\mathbf{X}$ и $T_\mathbf{Y}$:

$$x'' \equiv x' T_\mathbf{Y} \equiv e^{(\Delta_2 \mathbf{Y}(x'))} x', \quad x' \equiv x T_\mathbf{Y} \equiv e^{(\Delta_1 \mathbf{X}(x))} x.$$

Пользуясь свойством точечности преобразований (2.51), легко показать, что преобразования $T_\mathbf{X} T_\mathbf{Y}$ определяются формулами

$$x'' \equiv x T_\mathbf{X} T_\mathbf{Y} = e^{(\Delta_1 \mathbf{X}(x))} e^{(\Delta_2 \mathbf{Y}(x))} x. \tag{2.52}$$

Заметим, что в общем случае операторы $\mathbf{Y}(x)$ и $\mathbf{X}(x)$ не коммутативны, т. е. $\mathbf{YX} - \mathbf{XY} \neq 0$, и поэтому

$$e^{(\Delta_1 \mathbf{X}(x))} e^{(\Delta_2 \mathbf{Y}(x))} \neq e^{(\Delta_1 \mathbf{X}(x) + \Delta_2 \mathbf{Y}(x))}.$$

Введем обозначения $\mathbf{Y} \equiv \Delta_1 \mathbf{Y}(x)$ и $\mathbf{X} \equiv \Delta_2 \mathbf{X}(x)$. Тогда имеет место формула

$$e^{\mathbf{X}} e^{\mathbf{Y}} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \mathbf{X}^p \mathbf{Y}^q. \tag{2.53}$$

Чтобы убедиться, что результат преобразования принадлежит к обсуждаемой псевдогруппе, следует рассмотреть ряд

$$\ln (e^{\mathbf{X}} e^{\mathbf{Y}}) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{2.54}$$

где $Z_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — некоторые многочлены в общем случае от некоммутирующих переменных. Этот ряд называется рядом Кэмпбелла — Хаусдорфа. Примечательным является то, что многочлены $Z_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ могут быть выражены через скобки Пуассона для операторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Например,

$$\begin{gathered} Z_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} + \mathbf{Y}; \quad Z_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]; \\ Z_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{12}[\mathbf{X}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + \frac{1}{12}[\mathbf{Y}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]], \ \ldots \end{gathered} \tag{2.55}$$

Последние называются лиевыми многочленами. Ниже будет доказано, что при соответствующем выборе значений параметров Δ_1, Δ_2 ряд (2.53) сходится. Следовательно, выполняется первая аксиома определения 2.3. Из структуры лиевых многочленов (2.54) следует, что

$$Z_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathfrak{B}, \ Z_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathfrak{B}, \text{ так как } \mathbf{X}_1 \equiv [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathfrak{B},$$

$$Z_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathfrak{B}, \text{ так как } \frac{1}{12}[\mathbf{X}, \mathbf{X}_1] - \frac{1}{12}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_1] \in \mathfrak{B} \text{ и т. д.}$$

По предположению ряд (2.54) сходится, и элемент $\mathbf{Z} \equiv \ln e^{\mathbf{X}} e^{\mathbf{Y}} \in \mathfrak{B}$. Таким образом, доказано, что в алгебре $\mathfrak{B}$ всегда существует такой элемент $\mathbf{Z}$, что $e^{\mathbf{X}} e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{Z}}$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{B}$.

Псевдогруппу, порожденную элементами алгебры $\mathfrak{B}$, назовем обертывающей группой системы и будем обозначать $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ или $\mathfrak{G}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m)$, явно указывая порождающие элементы алгебры $\mathfrak{B}$.

Полученный результат о связи обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{B}$ и порождаемой ею псевдогруппы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.8. *Существует однозначное (локальное) соответствие между элементами алгебры $\mathfrak{B}$ и группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ в том смысле, что любое конечное множество преобразований $T^{(1)}, \ldots, T^{(m)} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{B})$, порожденное операторами $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m \in \mathfrak{B}$, можно сопоставить с единственным преобразованием $T^{(m+1)}$, порожденным элементом $\mathbf{X}_{m+1} \in \mathfrak{B}$ таким, что имеет место тождество*

$$x' \equiv e^{(\Delta_1 \mathbf{X}_1)} e^{(\Delta_2 \mathbf{X}_2)} \ldots e^{(\Delta_m \mathbf{X}_m)} x \equiv e^{(\Delta_{m+1} \mathbf{X}_{m+1})} x, \ x, \ x' \in \overline{W}_0. \tag{2.56}$$

Доказательство. Тождество для случая $m = 2$ было доказано выше. Не представляет труда по индукции провести доказательство для произвольного конечного m. Пусть, кроме оператора

$\mathbf{X}_{m+1}$, осуществляющего преобразование

$$x' = e^{(\Delta_{m+1}\mathbf{X}_{m+1})}x, \tag{2.57}$$

существует другой оператор $\tilde{\mathbf{X}}_{m+1}$, осуществляющий это же преобразование

$$x' = e^{(\Delta_{m+1}\tilde{\mathbf{X}}_{m+1})}x. \tag{2.58}$$

Вычитая из соотношения (2.57) соотношение (2.58), получаем

$$\left(e^{(\Delta_{m+1}\mathbf{X}_{m+1})} - e^{(\Delta_{m+1}\tilde{\mathbf{X}}_{m+1})}\right)x \equiv 0. \tag{2.59}$$

Так как ряд (2.59) представляет собой аналитическую функцию в окрестности точки $\Delta_{m+1} \equiv 0$, то он тождественно равен нулю, откуда следует, что $\mathbf{X}_{m+1} \equiv \tilde{\mathbf{X}}_{m+1}$. Все рассуждения носят локальный характер, так как справедливы в достаточно малой окрестности $\Delta \equiv 0$.

Покажем теперь, что ряд, определяемый произведением конечного числа преобразований (2.56), сходится. Достаточно рассмотреть случай $m = 2$ (см. формулы (2.52)). Воспользуемся результатом теоремы 2.2. По предположению коэффициенты операторов $\mathbf{X}(x)$ и $\mathbf{Y}(x)$ являются аналитическими функциями в области (см. (2.35))

$$\overline{W}_0: |\Delta| \leqslant \tilde{h}/4, \quad |x_i - x_{0i}| \leqslant b/4.$$

По теореме 2.2 функция $\varphi_1(x) \equiv e^{(\Delta_2\mathbf{Y}(x))}x$ является аналитической в области

$$\overline{W}_{01}: |\Delta| < h_1 = \min\left\{\chi_1, \frac{\alpha_1}{N_1(n+1)}\left(1 - \frac{\chi_1}{\alpha_1}\right)^{n+1}\right\},$$

$$|x_i - x_{i0}| \leqslant \chi_1 < \alpha_1, \quad \alpha_1 = \min\{\tilde{h}/4, b/4\},$$

где $N_1 = \sum\limits_{j=0}^{n} M_{1j}$, $M_{1j} = \max\limits_{x\in\overline{W}_0} f_{1j}(x)$, $f_{1j}(x)$ — коэффициенты оператора $\mathbf{Y}(x)$. Очевидно, что $\overline{W}_{01} \subseteq \overline{W}_0$. В свою очередь функция $e^{(\Delta_1\mathbf{X}(x))}\varphi_1(x)$ также является аналитической (по теореме 2.2) в области

$$\overline{W}_{02}: |\Delta| \leqslant h_2 = \min\left\{\chi_2, \frac{\alpha_2}{N_1(n+1)}\left(1 - \frac{\chi_2}{\alpha_2}\right)^{n+1}\right\},$$

$$|x_i - x_{i0}| \leqslant \chi_2 \leqslant \alpha_2, \quad \alpha_2 = \min\{h_1, \chi_1\},$$

где $N_2 = \sum\limits_{j=0}^{n} M_{2j}$, $M_{2j} = \max\limits_{x\in\overline{W}_{01}} f_{2j}$, $f_{2j}(x)$ — коэффициенты оператора $\mathbf{X}(x)$.

Очевидно, что $\overline{W}_{02} \subseteq \overline{W}_{01} \subseteq \overline{W}_0$. Таким образом, для каждого конечного числа m можно указать область $\overline{W}_{0m} \subseteq \overline{W}_0$, в которой ряды (2.56), полученные в результате применения конечного числа преобразований из $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{B}$), сходятся.

§ 3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ. ФОРМУЛА КЭМПБЕЛЛА — ХАУСДОРФА

Предположим, что в системе уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = f(x'), \quad x'(0) = x_0 \tag{3.1}$$

необходимо произвести замену переменных

$$x = \varphi(x'), \quad x' = \varphi^{-1}(x), \tag{3.2}$$

где $\varphi(x')$, $\varphi^{-1}(x)$ — аналитические (или класса C^k) функции, определенные в некоторой подобласти $H \subseteq G$, $\varphi = \operatorname{colon} \| \varphi_1, \ldots, \varphi_n \|$, $\varphi^{-1} = \operatorname{colon} \| \varphi_1^{-1}, \ldots, \varphi_n^{-1} \|$.

Воспользовавшись установленной выше взаимосвязью уравнений (3.1) и ассоциированного с ними линейного оператора в частных производных $X' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{\partial}{\partial x_i'}$, преобразуем последний и далее перейдем к системе дифференциальных уравнений в новых переменных. Найдем выражения производных по старым переменным через новые. Условимся о следующих обозначениях. Всюду в дальнейшем переменные x' будут преобразовываться в переменные x. Для произвольных функций $f(x')$ и $f(x)$ примем обозначения f' и f, имея в виду зависимость f от x' или от x, т. е. $f' = f(x')$, $f = f(x)$.

Если Ψ — некоторая функция x', то с учетом формул (3.2)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k'} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x_k'} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n(x')}{\partial x_k'}.$$

Подставим значения найденных производных в функцию

$$X'\Psi(x') = \sum_{k=1}^{n} f_k' \frac{\partial \Psi}{\partial x_k'} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \sum_{k=1}^{n} f_k' \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x_k'} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{n} f_k' \frac{\partial \varphi_n(x')}{\partial x_k'} = X'\varphi_1(x') \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \cdots + X'\varphi_n(x') \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}.$$

Если обозначить через $F_j(x) \equiv \widetilde{X'}\widetilde{\varphi_j}\widetilde{(x')}$, $j = \overline{1, n}$, результат подстановки в эти функции значений $x' = \varphi^{-1}(x)$, то окончательно получим

$$X' \to X = \widetilde{X'}\widetilde{\varphi_1}\widetilde{(x')} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \widetilde{X'}\widetilde{\varphi_n}\widetilde{(x')} \frac{\partial}{\partial x_n} \equiv$$

$$\equiv F_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + F_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Система уравнений (3.1) в новых переменных согласно формулам (1.7) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x), \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x), \quad F_i(x) \equiv \widetilde{X'}\widetilde{\Psi_i}\widetilde{(x')}.$$

Центральное место в дальнейших рассуждениях занимает преобразование системы (3.1) с помощью замен в виде рядов Ли

$$x_k = \exp(-\varepsilon \mathrm{Y}')\, x_k', \quad x_k' = \exp(\varepsilon \mathrm{Y})\, x_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Здесь ε — некоторый параметр; оператор

$$\mathrm{Y} = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad v_j(x) \in \mathfrak{D}(G).$$

Очевидно, переменные x_k' можно интерпретировать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1'}{d\varepsilon} = v_1(x'), \ \ldots, \ \frac{dx_n'}{d\varepsilon} = v_n(x'), \quad x'|_{\varepsilon=0} = x.$$

Найдем явный вид ассоциированного с системой (3.1) оператора $\mathrm{X}' = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i' \frac{\partial}{\partial x_i'}$ в новых переменных x при замене (3.3). Воздействуем оператором X' на переменные x_k: $\mathrm{X}'x_k = \mathrm{X}' \exp(-\varepsilon \mathrm{Y}')\, x_k'$, и, пользуясь тем, что $\mathrm{X}' \exp(-\varepsilon \mathrm{Y}')\, x_k'$ есть функция переменных x', которые подвергаются точечным преобразованиям (3.3), получим

$$\mathrm{X}'x_k = e^{\varepsilon \mathrm{Y}} \mathrm{X} e^{-\varepsilon \mathrm{Y}} x_k. \tag{3.4}$$

Раскладывая $e^{(\varepsilon \mathrm{Y})} \mathrm{X} e^{(-\varepsilon \mathrm{V})}$ по степеням ε, найдем коэффициент при ε^r:

$$\frac{\mathrm{Y}^r\mathrm{X}}{r!} - \frac{\mathrm{Y}^{r-1}\mathrm{XY}}{(r-1)!} + \frac{\mathrm{Y}^{r-2}\mathrm{XY}^2}{(r-2)!\,2!} - \frac{\mathrm{Y}^{r-3}\mathrm{XY}^3}{(r-3)!\,3!} + \cdots$$

Докажем, что это выражение равно $(-1)^r X^{(r)}$, где

$$\mathrm{X}^{(1)} = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}, \ \mathrm{X}^{(2)} = \mathrm{X}^{(1)}\mathrm{Y} - \mathrm{YX}^{(1)}, \ \ldots, \ \mathrm{X}^{(r)} = \mathrm{X}^{(r-1)}\mathrm{Y} - \overset{r}{\mathrm{Y}}\mathrm{X}^{(r-1)}.$$

Доказательство проводим методом индукции. Полагая, что

$$(-1)^{r-1}\frac{\mathrm{X}^{(r-1)}}{(r-1)!} = \frac{\mathrm{Y}^{(r-1)}\mathrm{X}}{(r-1)!} - \frac{\mathrm{Y}^{(r-2)}\mathrm{XY}}{(r-2)!\,1!} + \frac{\mathrm{Y}^{(r-3)}\mathrm{XY}^2}{(r-3)!\,2!},$$

имеем

$$\frac{(-1)^r(\mathrm{X}^{(r-1)}\mathrm{Y} - \mathrm{YX}^{(r-1)})}{(r-1)!} = \frac{\mathrm{Y}^2\mathrm{X}}{(r-1)!} - (r-1)\frac{\mathrm{Y}^{(r-1)}\mathrm{XY}}{(r-1)!\,1!} +$$

$$+ (r-2)\frac{\mathrm{Y}^{(r-2)}\mathrm{XY}^2}{(r-2)!\,2!} - \cdots - \frac{\mathrm{Y}^{(r-1)}\mathrm{XY}}{(r-1)!\,1!} +$$

$$+ 2\frac{\mathrm{Y}^{(r-2)}\mathrm{XY}^2}{(r-2)!\,2!} - \cdots = \frac{\mathrm{Y}^2\mathrm{X}}{(r-1)^2} - r\frac{\mathrm{Y}^{(r-1)}\mathrm{XY}}{(r-1)!\,1!} + r\frac{\mathrm{Y}^{(r-2)}\mathrm{XY}^2}{(r-2)!\,2!} - \cdots$$

и, следовательно, получаем требуемый результат:

$$(-1)^r\frac{\mathrm{X}^{(r)}}{r!} = \frac{\mathrm{Y}^{(r)}\mathrm{X}}{r!} - \frac{\mathrm{Y}^{(r-1)}\mathrm{XY}}{(r-1)!\,1!} + \frac{\mathrm{Y}^{(r-2)}\mathrm{XY}^2}{(r-2)!\,2!} - \cdots$$

Итак,

$$e^{(\varepsilon Y)}Xe^{(-\varepsilon Y)} = X - \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^{(2)} - \frac{\varepsilon^3}{3!}X^{(3)} + \dots$$

Оператор $e^{(\varepsilon Y)}Xe^{(-\varepsilon Y)}$ является линейным и может быть представлен в стандартной форме

$$\sum_{i=1}^{n} (e^{(\varepsilon Y)}Xe^{(-\varepsilon Y)}x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.5}$$

или, если учесть равенство (3.4),

$$X' \to \sum_{i=1}^{n} X'x_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.6}$$

Сопоставляя формулы (3.5) и (3.6), приходим к выводу, что исходный оператор X' в новых переменных имеет вид

$$X' \Rightarrow X - \frac{\varepsilon}{1!}X^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^{(2)} - \frac{\varepsilon^3}{3!}X^{(3)} + \dots$$

Эта формула и называется формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа.

§ 4. ТЕОРИЯ ЛИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x'), \tag{4.1}$$

где $x = \mathrm{colon}\,\|x_1, \dots, x_n\|$, $\omega = \mathrm{colon}\,\|\omega_1(x_1), \dots, \omega_n(x_n)\|$, $\omega_i(x) \in \in \mathfrak{D}(G)$, $\tilde{G} = I \times G \subset \mathrm{R}^{n+1}$, $G \in \mathrm{R}^n$,— область существования и единственности решения задачи Коши системы.

Система (4.1) называется инвариантной относительно преобразования[1] $x' = \varphi(x)$, $x = \varphi^{-1}(x')$, определенного в области G, если в результате преобразования она остается неизменной, т. е. переходит в систему $\frac{dx}{dt} = \omega(x)$. Изучим вопрос об инвариантных преобразованиях в виде однопараметрических подгрупп из $\mathfrak{G}$, т. е.

$$x_j' = \exp(sX)\,x_j, \quad x_j = \exp(-sX')\,x_j', \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.2}$$

действующих loc G. Здесь X — некоторый оператор из алгебры $\mathfrak{B}$.

Обозначим, как и выше, через U оператор, ассоциированный с системой (4.1):

$$U = \omega_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \omega_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы уравнение* (4.1) *было инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований* (4.2),

---

[1] Общий случай зависимости преобразований от t легко сводится к рассматриваемому введением новой переменной $t = x_{n+1}$ и дополнительного уравнения $\dot{x}_{n+1} = 1$.

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathbf{X}$ *был коммутативен с оператором* $\mathbf{U}$, *т. е. выполнялось тождество* $[\mathbf{U}, \mathbf{X}] \equiv 0$.

Доказательство. Обозначим независимую переменную t через x_{n+1}, т. е. $t \equiv x_{n+1}$. Пусть $\mathbf{U}_0 = \partial/\partial x_{n+1} + \mathbf{U}$ и вместо преобразования (4.2) введено новое

$$x_j' = \exp(s\mathbf{X}_0)\, x_j, \quad x_j = \exp(-s\mathbf{X}_0')\, x_j', \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{X}_0 = \partial/\partial x_{n+1} + \mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ — некоторый оператор из алгебры $\mathfrak{B}$, фигурирующий в формулах (4.2).

Это преобразование учитывает то обстоятельство, что независимая переменная t (обозначенная через x_{n+1}) при замене (4.2) переходит в себя. Поэтому преобразование (4.4) эквивалентно преобразованию (4.2) при дополнительном условии $x_{n+1} = x_{n+1}'$, или $t = t'$.

По оператору $\mathbf{U}_0'$ дифференциальное уравнение (4.1) восстанавливается однозначно, и поэтому после замены (4.2) оператор $\mathbf{U}_0'$ перейдет в оператор $a(x)\,\mathbf{U}_0'$, где $a(x)$ — некоторая функция. Если учесть формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа (3.19), то в результате преобразования получим тождество

$$\left(\mathbf{U}_0 - \frac{s}{1!}[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0] + \frac{s^2}{2!}[\mathbf{U}_0, [\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0]] - \cdots\right) \equiv \mathbf{U}_0(x),$$

справедливое при всех значениях параметра s. Как нетрудно заметить, выписанное тождество выполняется тогда и только тогда, когда $a(x) \equiv 1$ и

$$[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0] \equiv 0. \tag{4.5}$$

Операторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{X}$ не содержат переменной $x_{n+1} \equiv t$ и поэтому перестановочны с оператором $\partial/\partial t$. Подстановка значений $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{X}_0$ в (4.5) с учетом сделанного замечания приводит к доказываемому тождеству (4.3). ■

Совершенно ясно, что если в формулах (4.2) положить $\mathbf{X} \equiv \mathbf{U}$, то получим однопараметрическую группу, относительно которой уравнения (4.1) инвариантны. Этот случай считается тривиальным и всюду в дальнейшем предполагается, что $\mathbf{X} \neq \mathbf{U}$.

Знание преобразования (4.2) облегчает интегрирование исходной системы. Структура оператора $\mathbf{X}$ может оказаться проще, чем $\mathbf{U}$, и поэтому уравнение $\mathbf{X}f = 0$ будет допускать некоторые решения $\Omega_1 = \{\psi_1(x), \ldots, \psi_{m_1}(x)\}$. Эти решения могут быть «размножены» при помощи оператора $\mathbf{U}$. Действительно, из тождества $\mathbf{XU}\psi_j \equiv \equiv \mathbf{UX}\psi_j$ следует $\mathbf{XU}\psi_j \equiv 0$, т. е. $\mathbf{U}\psi_j$ — также интегралы. Если среди них имеются функционально независимые от совокупности Ω_1, то ее можно расширить до совокупности $\Omega_2 = \{\psi_1, \ldots, \psi_{m_1}, \psi_{m_1+1}, \ldots \ldots, \psi_{m_2}\}$. Применяя к совокупности Ω_2 те же рассуждения, придем к совокупности Ω_3 и т. д. Ясно, что после конечного числа шагов получим совокупность $\Omega = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$, не расширяемую далее по указанному алгоритму. Такую совокупность интегралов назовем полной относительно оператора $\mathbf{U}$.

Теорема 4.2. *Если имеется совокупность интегралов* $\Omega = \{\psi_1, \ldots \ldots, \psi_m\}$, *полная относительно оператора* $\mathbf{U}$, *то можно указать* *замену переменных* $x' = \psi(x)$, $x = \psi^{-1}(x')$, *которая, по крайней мере* loc G, *приводит систему к квазитреугольной*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, \ldots, x_m), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{dx_j}{dt} &= F_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = \overline{m+1, n}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказательство. Выше предполагалось, что интегралы совокупности Ω определены во всей области G. Функции $\psi_1(x), \ldots$ $\ldots, \psi_m(x)$ всегда можно loc G дополнить до системы n обратимых функций, например приняв $\psi_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, \psi_n = x_n$. Тогда, совершив замену переменных, получим для ассоциированного оператора выражение

$$\mathbf{U}(x) = F_1(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + F_m(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_m} + \\ + F_{m+1}(x)\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} + F_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Система (4.1) соответственно перейдет в систему (4.6). Следовательно, возможность преобразования системы во всей области G зависит от того, удастся ли подобрать такие функции $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n$, которые вместе с совокупностью Ω образовали бы функционально независимую систему во всей области G. ■

В общей ситуации для нахождения интегралов уравнения $\mathbf{X}f = 0$ требуется решение системы уравнений более низкого порядка, чем исходная. Приведем необходимое в дальнейшем определение. Говорят, что оператор $\overline{\mathbf{U}}$ допускает оператор $\mathbf{X}$, если скобка Пуассона $[\overline{\mathbf{U}}, \mathbf{X}]$ линейно связана с оператором $\overline{\mathbf{U}}$, т. е.

$$[\overline{\mathbf{U}}, \mathbf{X}] = \omega_0(x)\overline{\mathbf{U}}, \tag{4.7}$$

где $\omega_0(x)$ — некоторая известная функция.

Теорема 4.3 (С. Ли). *Если уравнение* (4.1) *допускает однопараметрическую группу* (4.2), *то порядок системы уравнений* loc G *может быть понижен на единицу. Для нахождения приводящего преобразования требуется решение системы дифференциальных уравнений порядка* $n - 1$.

Доказательство. Разрешим уравнение $\mathbf{U}f = 0$ относительно какой-либо производной $\partial/\partial x_i$, отдавая предпочтение той, при которой коэффициент $\omega_i(x) \neq 0$ ни в одной точке области G. По крайней мере, это можно сделать loc G. Будем считать, что $\omega_n(x) \neq 0$. Тогда $\mathbf{U} = \omega_n \overline{\mathbf{U}}$, где

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\omega_1}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что оператор $\overline{\mathbf{U}}$ допускает оператор $\mathbf{X}$ и имеет место тождество (4.7), где $\omega_0(x) = -(\mathbf{X}\frac{1}{\omega_n})\omega_n$. Но оператор $\overline{\mathbf{U}}$ всегда допускает оператор $a(x)\overline{\mathbf{U}}$, где

$a(x)$ — некоторая произвольная функция, и поэтому допускает сумму операторов $a(x)\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{X}$. Выберем коэффициент $a(x) \equiv -f_n(x)$ так, чтобы в $\mathbf{X}$ исчезла производная $\partial/\partial x_n$, и обозначим $\bar{\mathbf{X}} = -f_n(x)\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{X}$. Построенный таким образом оператор коммутирует с $\bar{\mathbf{U}}$, т. е. $[\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{X}}] \equiv 0$. Оператор $\bar{\mathbf{X}}$ называется приведенным и имеет вид

$$\bar{\mathbf{X}} = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},$$

где $a_i(x) = f_i(x) - f_n(x)\dfrac{\omega_i(x)}{\omega_n(x)}$, $i = \overline{1, n}$.

Интегрирование уравнения $\bar{\mathbf{X}}f = 0$ сводится к нахождению общего решения системы дифференциальных уравнений порядка $n-1$

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{a_{n-1}(x)} = dt.$$

Переменную x_n следует считать параметром. Пусть $u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, $u_n(x) \equiv x_n$ — независимые loc G решения уравнения $\bar{\mathbf{X}}f = 0$. Дополнив их независимой функцией $u_1(x)$, совершим в $\bar{\mathbf{X}}$ замену переменных $y_j = u_j(x)$, $j = \overline{1, n}$. Оператор $\bar{\mathbf{X}}$ перейдет в оператор $\bar{\mathbf{X}} = v(y)\,\partial/\partial y_1$, где $v(y) = \bar{\mathbf{X}}u_1(x)$ (см. § 3). Пусть $w(y)$ — решение уравнения $v(y)(\partial w/\partial y_1) = 1$. Обозначим $\tilde{y}_1 = w(y) = w(u_1(x), \ldots, u_n(x))$. В переменных $\tilde{y}_1, y_2, \ldots, y_n$ оператор $\bar{\mathbf{X}} \equiv \partial/\partial\tilde{y}_1$. Запишем оператор $\bar{\mathbf{U}}$ в этих переменных:

$$\bar{\mathbf{U}} = \tilde{\omega}_1(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \tilde{\omega}_n(y)\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Из тождества $\left[\dfrac{\partial}{\partial\tilde{y}_1}, \bar{\mathbf{U}}\right] \equiv 0$ следует, что $\partial\tilde{\omega}_j/\partial\tilde{y}_1 = 0$, и коэффициенты $\tilde{\omega}_j(y)$ не зависят от переменной $\tilde{y}_1$. Вследствие этого исходная система (4.1) распадается на две подсистемы

$$\frac{d\tilde{y}_1}{dt} = \tilde{\omega}_1(y_2, \ldots, y_n);$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \tilde{\omega}_2(y_2, \ldots, y_n), \ldots, \frac{dy_n}{dt} = \tilde{\omega}_n(y_2, \ldots, y_n). \tag{4.8}$$

Система (4.8) порядка $n-1$ интегрируется независимо. После ее интегрирования переменная $\tilde{y}_1$ находится в квадратурах. ■

Если имеются две однопараметрические подгруппы с операторами $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, относительно которых система (4.1) инвариантна, т. е. выполняются соотношения $[\mathbf{U}, \mathbf{X}_j] \equiv 0$, $j = 1, 2$, то из тождества Якоби (см. формулу (1.6)) следует, что однопараметрическая подгруппа с оператором $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ также оставляет систему (4.1) инвариантной. Последовательно выполняя операции вычисления скобок Пуассона, придем к некоторой полной системе операторов $\{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m\}$

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \sum_{n=1}^{m} c_{ij}^h \mathbf{X}_h,$$

коммутирующей с $\mathbf{U}$. Эта система порождает алгебру Ли $\mathfrak{V}_1 \in \mathfrak{V}$, которой соответствует подгруппа $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{V})$. Число линейно несвязных операторов в алгебре $\mathfrak{V}_1$ не превышает $n-1$. Более точный результат устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4.4. *В области $H_0 \subseteq G$ существования первых интегралов системы (4.1) имеется $n-1$ линейно несвязных операторов, коммутирующих с* $\mathbf{U}$.

Доказательство. Пусть $x = \varphi(\tilde{t}, y)$ (здесь $\tilde{t} \equiv t - t_0$, $y = \operatorname{colon} \| y_1, \ldots, y_{n-1} \|$ — произвольные постоянные) — общее решение системы (4.1). В области H_0 функции $\varphi(\tilde{t}, y) = x$ разрешимы относительно переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t}$:

$$y_j = v_j(x), \quad j = \overline{1, n-1}, \ \tilde{t} = w(x).$$

Применяя их в качестве новых переменных, находим, что оператор $\mathbf{U}$ принимает особенно простой вид: $\mathbf{U} \equiv \partial/\partial\tilde{t}$. С этим оператором коммутируют несвязные операторы $\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_{n-1}$. ■

Обозначим через $\mathfrak{V}(\mathbf{U})$ максимальную подалгебру коммутирующих с $\mathbf{U}$ операторов, порожденную $n-1$ несвязными операторами $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}$. Знание некоторой подалгебры $\mathfrak{V}_1 \in \mathfrak{V}(\mathbf{U})$ с базисом $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ $(m < n)$ облегчает интегрирование исходной системы. Будем считать, что операторы $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ уже приведены:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = a_{1j}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_{n-1,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Скобка Пуассона двух операторов $[\overline{\mathbf{X}}_i, \overline{\mathbf{X}}_j] = \sum_{h=1}^{m} c_{ij}^h(x) \overline{\mathbf{X}}_h$ также коммутирует с $\overline{\mathbf{U}}$. Подстановка этой скобки в тождество $[\overline{\mathbf{U}}, [\overline{\mathbf{X}}_i, \overline{\mathbf{X}}_j]] \equiv 0$ приводит к равенствам $\overline{\mathbf{U}} c_{ij}^h(x) \equiv 0$. Таким образом, коэффициенты $c_{ij}^h(x)$, $i, j, h = \overline{1, m}$, которые определяются чисто алгебраическими действиями, являются либо постоянными, либо интегралами уравнения $\mathbf{U}f = 0$. Предположим, что среди этих функций имеется q независимых интегралов: $\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)$. Эти интегралы можно размножить при помощи операторов $\overline{\mathbf{X}}_i$, т. е. функции $\overline{\mathbf{X}}_i \psi_j(x)$ — также интегралы уравнения $\mathbf{U}f = 0$. Будем считать, что совокупность $\psi(x) = \{\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)\}$ полна относительно операторов из $\mathfrak{V}_1$. Выбирая интегралы совокупности $\psi(x)$ в качестве новых переменных и дополняя их независимыми функциями до n функционально независимых, приведем, как нетрудно заметить, операторы $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{X}}_j$ к виду (для упрощения записи используем те же обозначения переменных)

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial x_n} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_{n-q-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_{n-q-1}};$$
$$\overline{\mathbf{X}}_j = c_{1j}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_{n-1,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{4.9}$$

Операторы $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{X}}_j$ по-прежнему коммутативны, и из тождеств $[\overline{\mathbf{U}}, \overline{\mathbf{X}}_j] \equiv 0$ легко получается, что

$$\overline{\mathbf{U}}c_{n-q,j}(x) \equiv 0, \ \ldots, \ \overline{\mathbf{U}}c_{n-1,j}(x) \equiv 0.$$

Таким образом, функции $c_{n-q,j}(x), \ldots, c_{n-1,j}(x)$ — либо интегралы, либо постоянные. Если среди них имеются независимые от совокупности $\psi(x)$, то указанную процедуру следует повторить. Предположим, что данный алгоритм применен нужное число раз и дальнейшие операции не приводят к появлению новых интегралов в совокупности $\psi(x)$. Тогда коэффициенты операторов (4.9) — функции интегралов $x_{n-q}, \ldots, x_{n-1}$.

Введем новые операторы $\vec{\mathbf{Z}} \equiv \operatorname{colon} \| \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m \|$, определяемые из уравнений

$$\vec{\mathbf{Z}} = \mathcal{P}\vec{\mathbf{X}}, \ \vec{\mathbf{X}} \equiv \operatorname{colon} \| \overline{\mathbf{X}}_1, \ \ldots, \ \overline{\mathbf{X}}_m \|. \tag{4.10}$$

Здесь матрица $\mathcal{P} = \| \rho_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, m}$, имеет размерность $m \times m$. Вектор $\vec{\mathbf{X}}$ представим в виде

$$\vec{X} = \begin{Vmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \cdots \\ \overline{\mathbf{X}}_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,n-q-1} & c_{1,n-q} & \ldots & c_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{m,n-q-1} & c_{m,n-q} & \ldots & c_{m,n-1} \end{Vmatrix} \partial_1, \tag{4.11}$$

где $\partial_1 = \operatorname{colon} \| \partial/\partial x_1, \ \ldots, \ \partial/\partial x_{n-1} \|$.

Выражение (4.11) подставим в соотношение (4.10) и определим матрицу $\mathcal{P}$ из условия

$$\begin{Vmatrix} \rho_{11} & \ldots & \rho_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{m1} & \ldots & \rho_{mm} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{1,n-q} & \ldots & c_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m,n-q} & \ldots & c_{m,n-1} \end{Vmatrix} = 0, \quad \det \mathcal{P} \neq 0. \tag{4.12}$$

Если указанный выбор матрицы $\mathcal{P}$ возможен, то в операторах $\mathbf{Z}_j$ коэффициенты при производных $\partial/\partial x_{n-q}, \ldots, \partial/\partial x_{n-1}$ равны тождественно нулю и запись этих операторов соответственно упростится:

$$\mathbf{Z}_j = q_{1j}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + q_{n-q-1,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_{n-q-1}}.$$

Остальные коэффициенты — это функции от интегралов $x_{n-q}, \ldots, x_{n-1}$, и поэтому они по-прежнему перестановочны с $\overline{\mathbf{U}}$. Так как операторы $\mathbf{Z}_j$ получены из $\overline{\mathbf{X}}_j$ чисто алгебраической операцией, то будем называть их алгебраически приведенными.

Замечательной особенностью приведенных операторов $\mathbf{Z}_j$, $j = \overline{1, m}$, является то, что они образуют конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{B}_f$. Коэффициенты этих операторов не содержат переменных $x_1, \ldots, x_{n-q-1}$, и поэтому в тождестве

$$[\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j] = \sum_{l=1}^{m} h_{ij}^l \mathbf{Z}_l$$

коэффициенты h_{ij}^l — функции $x_{n-q}, \ldots, x_{n-1}$, т. е. постоянные. Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4.5 (С. Ли). *Если уравнение (4.1) допускает группу преобразований $\mathfrak{G}_1 \in \mathfrak{G}$, которой соответствует алгебра $\mathfrak{B}_1$, порожденная операторами $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$, то чисто алгебраическими операциями может быть найдено $q \geqslant 0$ интегралов уравнения $\mathbf{U}f = 0$, и изучение структуры оператора $\mathbf{U}$ сведется при выполнении условий (4.12) к исследованию структуры конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{B}_j$, порожденной алгебраически приведенными операторами $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m$.*

Значение сформулированной теоремы состоит в том, что исследование вопроса о выделении в конечномерной алгебре $\mathfrak{B}_f$ идеалов и, следовательно, выяснение возможности расщепления уравнений (4.1) может быть проведено чисто алгебраическим путем.

Рассмотрим полную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $\mathbf{U}f = 0$, $\mathbf{Z}_j f = 0$, $j = \overline{1, m}$. Эта система содержит $m + 1$ уравнений от $n - q$ переменных. Если $m + 1 < n - q$, то можно найти $(n - q) - (m + 1) = n - (m + q + 1)$ ее интегралов. Причем придется интегрировать системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка не выше $n - (m + q + 1)$.

Пример 4.1. Рассмотрим однопараметрическую группу вращения

$$x_1' = \exp(s\mathbf{W})\, x_1; \quad x_2' = \exp(s\mathbf{W})\, x_2, \tag{4.13}$$

где $\mathbf{W} = x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, и установим общий вид дифференциальной системы второго порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2), \tag{4.14}$$

инвариантной относительно групп преобразований (4.13). Согласно теореме 4.1 оператор

$$\mathbf{U} = F_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

ассоциированный с системой (4.14), должен удовлетворять соотношению

$$[\mathbf{U}, \mathbf{W}] = 0. \tag{4.15}$$

После подстановки значений $\mathbf{W}$ и $\mathbf{U}$ в уравнение (4.15), выполнения всех вычислений и приравнивания коэффициентов при производных $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$ приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{U}F_1 = F_2, \quad \mathbf{U}F_2 = -F_1. \tag{4.16}$$

Найдем вначале частное решение системы (4.16) в классе линейных функций, полагая

$$F_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \quad F_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2. \tag{4.17}$$

Подстановка значений (4.17) в уравнения (4.16), как нетрудно убедиться, приводит к матричному уравнению

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}.$$

Это уравнение имеет два независимых решения:

$$\mathscr{A}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathscr{A}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

которым соответствуют дифференциальные операторы

$$\mathrm{E} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathrm{X} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{4.18}$$

Определитель, составленный из коэффициентов операторов (4.18), имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2),$$

и, следовательно, в области G, не содержащей точки $x_1 = x_2 = 0$, эти операторы линейно несвязны. Поэтому общее решение уравнения (4.15) будем искать в виде

$$\mathrm{U} = \alpha_1 \mathrm{E} + \alpha_2 \mathrm{W}. \tag{4.19}$$

Подставим сумму (4.19) в уравнение (4.15). В результате получим

$$[\mathrm{U}, \mathrm{W}] = -\mathrm{W}\alpha_1\mathrm{E} - \mathrm{W}\alpha_2\mathrm{W} - \alpha_1 [\mathrm{W}, \mathrm{E}] - \alpha_2 [\mathrm{W}, \mathrm{W}] \equiv 0. \tag{4.20}$$

В силу тождеств $[\mathrm{W}, \mathrm{E}] \equiv 0$, $[\mathrm{W}, \mathrm{W}] \equiv 0$ и линейной несвязности операторов E, W из соотношения (4.20) следует

$$\mathrm{W}\alpha_1 \equiv 0, \quad \mathrm{W}\alpha_2 \equiv 0. \tag{4.21}$$

Так как уравнение $\mathrm{W}f = 0$ имеет частное решение $\rho = x_1^2 + x_2^2$, то на основании (4.21) α_1 и α_2 — произвольные функции $x_1^2 + x_2^2$. Таким образом, установлен общий вид оператора, коммутирующего с оператором W:

$$\mathrm{U} = \alpha_1 (x_1^2 + x_2^2)\, \mathrm{E} + \alpha_2 (x_1^2 + x_2^2)\, \mathrm{W}.$$

Этот оператор также можно представить в виде

$$\mathrm{U} = \mathrm{E} + F (x_1^2 + x_2^2)\, \mathrm{W}, \tag{4.22}$$

где F — произвольная функция из $\mathfrak{D}(G)$.

Восстанавливая по оператору U систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой он является ассоциированным оператором, получаем общий вид системы (4.14):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 F (x_1^2 + x_2^2); \quad \frac{dx_2}{dt} = + x_2 - x_1 F (x_1^2 + x_2^2), \tag{4.23}$$

инвариантной относительно группы вращений (4.13).

Обратимся теперь к упрощению системы (4.23), достигаемому за счет знания группы инвариантности. Во-первых, известно решение $\rho_1 = x_1^2 + x_2^2$ уравнения $\mathrm{W}f = 0$. Чтобы найти вторую функцию для замены переменных, решим неоднородное уравнение

$$\mathrm{W}v = 1. \tag{4.24}$$

Функция v обладает тем замечательным свойством, что оператором U она переводится в функцию от $\rho = x_1^2 + x_2^2$. Действительно, рассмотрим тождество $\mathrm{UW} = \mathrm{WU}$ и воздействуем на функцию $v(x)$ операторами, стоящими справа и слева: $\mathrm{UW}v(x) \equiv \mathrm{WU}v(x)$; так как $\mathrm{W}v(x) \equiv 1$, то левая часть тождества равна нулю и, значит, $\mathrm{WU}v(x) \equiv 0$, откуда следует доказываемое утверждение. В качестве решения уравнения (4.24) примем функцию $v = \operatorname{arctg}(x_1/x_2)$. Совершим в системе (4.23) замену переменных $y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $y_2 = \operatorname{arctg}(x_1/x_2)$. Запишем оператор (4.22) в новых переменных:

$$\mathrm{U} \to y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + F(y_1) \frac{\partial}{\partial y_2}. \tag{4.25}$$

По оператору (4.25) легко восстанавливается система (4.23) в новых переменных:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1; \quad \frac{dy_2}{dt} = F(y_1^2).$$

Таким образом, система распалась на две последовательно интегрируемые подсистемы.

Теория С. Ли инвариантности дифференциальных уравнений, построенная на основе теории инвариантов продолженных операторов (см., например, работы [1, 96]), позволяет находить операторы X, допустимые для оператора U, т. е. для которых выполняется соотношение (см. формулу (4.7))

$$[\mathrm{U}, \mathrm{X}] = \lambda \mathrm{U}. \tag{4.26}$$

Если коэффициенты оператора U не обращаются в нуль одновременно в некоторой точке x из области G, то, по крайней мере локально, в окрестности $V(x) \in G$ этой точки по оператору X всегда можно построить оператор X_0, коммутирующий с U, т. е. для которого справедливо тождество $[\mathrm{U}, \mathrm{X}_0] \equiv 0$. Действительно, представим оператор X_0 в виде суммы $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X} + a(x)\mathrm{U}$. Подставляя значение X_0 в уравнение $[\mathrm{U}, \mathrm{X}_0] = 0$, получаем

$$[\mathrm{U}, \mathrm{X}_0] \equiv [\mathrm{U}, \mathrm{X}] + \mathrm{U}a\mathrm{U} + a[\mathrm{U}, \mathrm{U}] \equiv \lambda\mathrm{U} + \mathrm{U}a\mathrm{U} \equiv (\lambda + \mathrm{U}a)\mathrm{U} \equiv 0.$$

Следовательно, функция $a(x)$ подбирается в виде решения неоднородного уравнения $\mathrm{U}a(x) = -\lambda(x)$. Это уравнение при сделанных предположениях всегда разрешимо в области $V(x)$.

Пример 4.2. Система уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = F\left(\frac{x_1}{x_2}\right); \quad \frac{dx_2}{dt} = 1, \tag{4.27}$$

где $F(U)$ — однородная функция от U, не является инвариантной относительно группы перспективных преобразований

$$x_1' = \exp(s\mathrm{X})\, x_1, \quad x_2' = \exp(s\mathrm{X})\, x_2,$$

где

$$\mathrm{X} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Однако оператор

$$\mathrm{U} = F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$

ассоциированный с системой (4.27), допускает оператор X. Как легко проверить, имеет место тождество $[\mathrm{U}, \mathrm{X}] = \mathrm{U}_0$. Найдем решение неоднородного уравнения $\mathrm{U}v = 1$. Это уравнение, как известно, можно заменить уравнением

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Оно имеет частное решение $f = x_2 + v$, и, следовательно $v = -x_2$. Оператор $\mathbf{X}_0$ представим в виде суммы:

$$\mathbf{X}_0 = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) - x_2\left(F\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \\ = \left(x_1 - x_2 F\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{4.28}$$

Следовательно, исходная система (4.27) инвариантна относительно группы преобразований

$$x_1' = \exp(s\mathbf{X}_0)\,x_1; \quad x_2' = \exp(s\mathbf{X}_0)\,x_2,$$

где оператор $\mathbf{X}_0$ выражается формулой (4.28).

Нахождение операторов $\mathbf{X}$, перестановочных с $\mathbf{U}$, является в общем случае задачей, по сложности сопоставимой с интегрированием исходной системы дифференциальных уравнений (4.1). Поэтому аппарат теории алгебр и групп Ли становится эффективным, когда допустимые операторы найдены из дополнительных условий, например геометрических. Тем не менее указанный аппарат дает эффективное средство для исследования в общей теории дифференциальных уравнений. Теория групп и алгебр Ли стала самостоятельной теорией и находит широкое применение в физике, механике и других дисциплинах.

ГЛАВА 2

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, представленное в матричной форме:

$$\frac{dY}{dt} = \mathcal{A}(t)\,Y, \tag{1.1}$$

где Y — искомая матрица фундаментальных решений; $\mathcal{A}(t)$ — матрица, элементами которой являются действительные функции $a_{ij}(t)$, $i,j = \overline{1, n}$, непрерывные на сегменте действительной оси $[t_0, t_c]$. Примем, что $Y(t_0) = \mathcal{E}$.

Найдем условия, при которых существует постоянная неособенная матрица S с элементами из поля комплексных чисел K такая, что после замены переменной $Y = SZ$ система (1.1) принимает вид

$$\frac{dZ}{dt} = S^{-1}\mathcal{A}(t)\,SZ, \tag{1.2}$$

где матрица коэффициентов $S^{-1}\mathcal{A}(t)\,S$ имеет либо квазитреугольную (треугольную) структуру

$$S^{-1}\mathcal{A}(t)\,S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11}(t) & \mathcal{A}_{12}(t) & \dots & \mathcal{A}_{1m}(t) \\ \dots & \mathcal{A}_{22}(t) & \dots & \mathcal{A}_{2m}(t) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \dots & \dots & \dots & \mathcal{A}_{mm}(t) \end{Vmatrix}, \tag{1.3}$$

либо квазидиагональную (диагональную) структуру

$$S^{-1}\mathcal{A}(t)\,S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{A}_{mm}(t) \end{Vmatrix}$$

($\mathcal{A}_{ii}(t)$, $i = \overline{1, m}$,— блоки размерностей $n_1, \dots, n_m$). Систему (1.1) назовем в этом случае соответственно алгебраически приводимой или вполне приводимой.

Частным случаем полной приводимости является тот, когда в матрице один из приведенных блоков — нулевой:

$$S^{-1}\mathcal{A}(t)S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\mathcal{A}_1(t)$ — матрица размерности $k \times k$. Будем говорить, что в этом случае система (1.1) допускает уменьшение числа переменных на $n - k$ единиц.

Образуем совокупность $\sigma = \{\mathcal{A}_\alpha \mid \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}(\alpha),\ \alpha \in [t_0,\ t_c]\}$ постоянных матриц. Пусть среди них имеется h_1 линейно независимых над полем P: $\sigma^0 = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{h_1}\}$. Ясно, что h_1 ограничено сверху числом n^2. Далее, вычислим всевозможные попарные произведения совокупности σ^0: $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j$, $i, j = \overline{1, h_1}$, и дополним совокупность σ^0 новыми линейно независимыми матрицами, если таковые имеются. Пусть, например, $\mathcal{A}_{h_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{h_2}$ линейно независимы от совокупности σ^0 и между собой. Образуем совокупность $\sigma^1 = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{h_1}, \mathcal{A}_{h_1+1}, \ldots$ $\ldots, \mathcal{A}_{h_2}\}$ и применим к ней те же вычисления. После конечного числа шагов придем к некоторой максимальной системе линейно независимых матриц

$$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h, \quad h \leqslant n^2, \tag{1.4}$$

которую уже нельзя расширить за счет вычисления различных конечных произведений. Совокупность элементов вида

$$\mathcal{U} = a_1\mathcal{A}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{A}_h^{\alpha_h} + \cdots + a_h\mathcal{A}_1^{\mu_1} \ldots \mathcal{A}_h^{\mu_h},$$

где $a_1, \ldots, a_h \in \mathrm{P}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_h \in \mathrm{Z}^+$, образует конечномерную ассоциативную алгебру над полем P. Будем обозначать эту алгебру $\mathfrak{R}$ и называть обертывающей алгеброй для системы (1.1).

Приведем точное определение таких алгебр и необходимые для дальнейшего сведения.

Определение 1.1. Множество элементов Ω, в котором для любых двух элементов $a, b \in \Omega$ однозначно определены сумма $a + b \in \Omega$ и произведение $a \cdot b \in \Omega$, называется кольцом, если выполняются следующие аксиомы:

I. Ассоциативность сложения: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (1); коммутативность сложения: $a + b = b + a$ (2) и разрешимость уравнения $a + x = b$ для всех $a, b \in \Omega$, $x \in \Omega$ (3).

II. Ассоциативность умножения: $a(bc) = (ab)c$.

III. Дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$ (1) и $(b + c)a = ba + ca$ (2).

Определение 1.2. Если кольцо Ω наряду с элементом a содержит также все элементы $\alpha \cdot a$, где α — произвольный элемент поля P, то оно называется алгеброй.

Таким образом, элементы алгебры Ω могут быть представлены суммами (в общем случае бесконечными)

$$a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_h a_h \tag{1.5}$$

и по сложению образуют линейное пространство. Если число линейно независимых элементов в алгебре Ω конечно и, например, базис составлен из элементов $a_1, \ldots, a_h$, то формула (1.5) представляет общий элемент алгебры Ω. Число h элементов базиса будем называть рангом обертывающей алгебры для системы (1.1).

Пример 1.1. Рассмотрим полную матричную алгебру $\mathfrak{K}_n$. Обозначим через $\mathscr{E}_{ij}$ матрицу n-го порядка, у которой на пересечении i-й строки и j-й колонки стоит единица, а на остальных местах — нули. Легко проверяются соотношения $\mathscr{E}_{ij}\mathscr{E}_{jk} = \mathscr{E}_{ik}$, $\mathscr{E}_{ij}\mathscr{E}_{lk} = 0$, $j \neq l$. Следовательно, имеется n^2 линейно независимых над P элементов $\mathscr{E}_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, которые образуют базис алгебры $\mathfrak{K}_n$. Общий элемент этой алгебры представим матрицей $\mathcal{A} = \sum\limits_{i,k} \alpha_{ik}\mathscr{E}_{ik}$, где α_{ik} — произвольные элементы поля P.

Проверку выполнимости аксиом I—III определения 1.1 легко осуществить несложными вычислениями. Алгебра $\mathfrak{K}_n$ называется полной матричной алгеброй. Ее ранг равен n^2.

Введенная выше алгебра $\mathfrak{K}$ либо совпадает с $\mathfrak{K}_n$, либо составляет ее правильную часть: $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_n$, т. е. является подалгеброй полной матричной алгебры. Ниже изучаются главным образом алгебры, элементами которых являются матрицы или матричные алгебры.

Определение 1.3. Матричную алгебру $\mathfrak{K}$ назовем вполне приводимой, если существует постоянная неособая матрица S, которая одновременно приводит все базисные элементы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$ алгебры $\mathfrak{K}$ ранга h к квазидиагональному виду

$$S^{-1}\mathcal{A}_j S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11}^{(j)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{A}_{mm}^{(j)} \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, h}. \tag{1.6}$$

Алгебру $\mathfrak{K}$ назовем приводимой, если имеет место приведение базиса к квазитреугольному виду

$$S^{-1}\mathcal{A}_j S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11}^{(j)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{A}_{mm}^{(j)} \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, h}; \tag{1.7}$$

здесь $\mathcal{A}_{11}^{(j)} \in \mathfrak{R}^{(\nu_1, \nu_1)}, \ldots, \mathcal{A}_{mm}^{(j)} \in \mathfrak{R}^{(\nu_m, \nu_m)}$, $\nu_1 + \cdots + \nu_m = h$.

Частным случаем вполне приводимых матричных алгебр будет тот, когда матрицы $\mathcal{A}_j$ можно представить в виде

$$S^{-1}\mathcal{A}_j S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_j' & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.8}$$

где $\mathcal{A}_j'$ — матрица размерности $k \times k$.

Будем говорить, что в этом случае алгебра $\mathfrak{K}$ допускает представление матрицами $k \times k$, $k < n$.

Сделаем следующее замечание. Если все матрицы совокупности

σ^0 одновременно приводятся к квазитреугольному (квазидиагональному) виду, то и базисные матрицы (1.4) также приводятся к аналогичному виду. Действительно, если две матрицы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ алгебраически приводимы, т. е. $S^{-1}\mathcal{A}_1 S$ и $S^{-1}\mathcal{A}_2 S$ имеют одинаковую квазитреугольную (квазидиагональную) структуру, то и их произведение $S^{-1}\mathcal{A}_1 S \cdot S^{-1}\mathcal{A}_2 S = S^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 S$ имеет ту же структуру. Окончательное утверждение следует из описанного выше способа получения матрицы (1.4).

Теперь легко сформулировать условия алгебраической приводимости исходной системы (1.1) в терминах алгебры $\mathfrak{K}$.

Теорема 1.1. *Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.1) была вполне приводима (приводима), необходимо и достаточно, чтобы была вполне приводима (приводима) обертывающая матричная алгебра $\mathfrak{K}$ системы (1.1).*

Доказательство. Пользуясь линейной независимостью элементов базиса (1.4) алгебры $\mathfrak{K}$, можно представить матрицу коэффициентов $\mathcal{A}(t)$ в виде суммы $\mathcal{A}(t) = a_1(t)\mathcal{A}_1 + \ldots + a_{h_1}(t)\mathcal{A}_{h_1}$, где $a_1(t), \ldots, a_{h_1}(t)$ — известные скалярные функции.

Если алгебра $\mathfrak{K}$ приводима, то приводима и матрица $\mathcal{A}(t)$, т. е. имеют место соотношения (1.2), (1.3). Справедливо также и обратное утверждение. ■

Всюду в дальнейшем будем (для краткости) говорить просто об алгебраической приводимости, подразумевая под этим либо квазитреугольную, либо квазидиагональную структуру приведенных матриц.

Докажем следующую основную теорему об алгебраической приводимости.

Теорема 1.2. *Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.1) была алгебраически приводима, необходимо и достаточно, чтобы ранг h обертывающей алгебры $\mathfrak{K}$ системы был меньше n^2, т. е. выполнялось строгое неравенство $h < n^2$.*

Необходимость условий теоремы сразу следует из структуры приведенных матриц (1.6) или (1.7). Так как сумма и произведение таких матриц также являются матрицами аналогичной структуры, то линейно независимых элементов в алгебре $\mathfrak{K}$ будет меньше n^2. Для доказательства достаточности потребуется ряд вспомогательных определений и утверждений из теории конечномерных ассоциативных алгебр. Метод доказательства будет состоять, по существу, в указании алгоритма построения приводящей матрицы S.

Следует установить таких два фундаментальных факта:

1) полная приводимость системы (1.1) имеет место тогда и только тогда, когда обертывающая алгебра $\mathfrak{K}$ полупроста;

2) система (1.1) приводима тогда и только тогда, когда обертывающая алгебра $\mathfrak{K}$ содержит некоторую подалгебру, называемую радикалом.

Если даны два множества $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ и элементы $a_1 \in \mathfrak{K}_1$ и $a_2 \in \mathfrak{K}_2$, то множество всех элементов $a_1 a_2$ будем обозначать $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$.

Определение 1.4. Если часть $\mathfrak{K}_1$ элементов $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}$) сама составляет алгебру, то она называется подалгеброй алгебры $\mathfrak{K}$.

Таким образом, условие, заключающееся в том, что подмножество $\mathfrak{K}_1$ образует подалгебру, можно сокращенно записать как $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_1$.

Определение 1.5. Если подалгебра $\mathfrak{K}_1$ обладает тем свойством, что элементы из $\mathfrak{K}_1$, умножаемые справа (слева) на элементы из $\mathfrak{K}$, дают опять элементы из $\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1$ ($\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_1$), то подалгебра называется (левым) идеалом алгебры $\mathfrak{K}$. Если же соблюдаются оба условия, то $\mathfrak{K}_1$ называется двусторонним идеалом.

Рассмотрим множество элементов $\mathcal{X}$ из $\mathfrak{K}$, перестановочных со всеми элементами алгебры $\mathfrak{K}$: $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$. Очевидно, что для двух матриц $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, перестановочных с элементами $\mathfrak{K}$, также выполняются соотношения

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \pm \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_1 \pm \mathcal{B}_2)\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2\mathcal{B}_1\mathcal{A}.$$

Множество перестановочных элементов будем обозначать буквой $\mathfrak{Z}$. Это множество образует подалгебру (но в общем случае не идеал) подалгебры $\mathfrak{K}$, называемую ее центром.

Любой элемент центра $\mathcal{B}_1 \in \mathfrak{Z}$ может быть разложен по базису: $\mathcal{B} = \alpha_1\mathcal{A} + \ldots + \alpha_h\mathcal{A}_h$. Если $\mathcal{B}_1 \in \mathfrak{Z}$, то $\mathcal{B}\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_1\mathcal{B}$, так как $\mathcal{A}_i\mathcal{B}_1 \equiv \equiv \mathcal{B}_1\mathcal{A}_i$, $i = \overline{1, h}$. Следовательно, элементы центра перестановочны между собой. Другими словами, центр $\mathfrak{Z}$ — коммутативная алгебра.

Пример 1.2. Рассмотрим полную матричную алгебру из примера 1.1. Совокупность элементов (строка матрицы общего элемента) $R_i = \{\mathscr{E}_{i1}, \mathscr{E}_{i2}, \ldots, \mathscr{E}_{in}\}$, $i = \overline{1, n}$, образует, как легко проверить, правый идеал. А совокупность элементов (столбец матрицы общего элемента) $L_j = \{\mathscr{E}_{j1}, \mathscr{E}_{j2}, \ldots, \mathscr{E}_{jn}\}$, $j = \overline{1, n}$, образует левый идеал. Эти идеалы простые, так как не содержат никаких подидеалов. Вместе с тем, полная матричная алгебра $\mathfrak{K}_n$ не содержит двусторонних идеалов, не совпадающих с самой алгеброй. Действительно, допустим противное: существует двусторонний идеал $\tilde{\mathfrak{K}}$, Обозначим через M общий элемент этого идеала: $M = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}\mathscr{E}_{ij}$, $\alpha_{ij} \in$ K. Предположим, что хотя бы один коэффициент в этой сумме, например $\alpha_{i'j'}$, отличен от нуля. Тогда в $\tilde{\mathfrak{K}}$ будет содержаться также элемент

$$\frac{1}{\alpha_{i'j'}}\mathscr{E}_{ki'}M\mathscr{E}_{j's} = \frac{1}{\alpha_{i'j'}}\mathscr{E}_{ki'}\sum_{i,j}\alpha_{ij}\mathscr{E}_{ij}\mathscr{E}_{j's} = \mathscr{E}_{ks},$$

где k и s — значения индексов. Это показывает, что $\tilde{\mathfrak{K}}$ совпадает с $\mathfrak{K}_n$.

Единственными элементами центра полной матричной алгебры $\mathfrak{K}_n$ являются матрицы, кратные единичной, т. е. $\lambda\mathscr{E}$, $\alpha \in$ K. Действительно, если предположить, что существует матрица $\mathscr{Z} = \sum\limits_{i,j}\alpha_{ij}\mathscr{E}_{ij}$, перестановочная с любым элементом $\mathscr{E}_{\mu\nu}$ алгебры $\mathfrak{K}_n$, то получим

$$\mathscr{E}_{\mu\nu}\mathscr{Z} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{\nu j}\mathscr{E}_{\mu j}, \quad \mathscr{Z}\mathscr{E}_{\mu\nu} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{j\mu}\mathscr{E}_{j\nu}.$$

Приравнивая эти два соотношения, находим $\alpha_{\nu\nu} = \alpha_{\mu\mu}$, $\alpha_{\mu j} \equiv 0$, $j \neq \mu$, $\alpha_{j\nu} \equiv 0$, $j \neq \nu$, $\nu, \mu = \overline{1, n}$. Следовательно, $\mathcal{X} = \lambda\mathcal{E}$.

Перейдем к рассмотрению важнейших подалгебр алгебры $\mathfrak{K}$. Матрица $\mathcal{A}$ называется нильпотентной, если существует показатель $\alpha \in Z^+$, такой, что $\mathcal{A}^\alpha \equiv 0$. Как известно из курса алгебры, $\alpha \leqslant n$. Легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Матрица $\mathcal{A}$ нильпотентна в том и только в том случае, когда все ее характеристические числа равны нулю.*

Определение 1.6. Алгебра $\mathfrak{K}$ называется нильпотентной, если произведение ее любых α элементов равно нулю.

Если все элементы алгебры $\mathfrak{K}$ нильпотентны, то она называется слабо нильпотентной. Для конечномерных алгебр понятия слабо нильпотентная алгебра и нильпотентная алгебра совпадают в силу следующего утверждения.

Теорема 1.4 [116, с. 25]. *Всякая слабо нильпотентная алгебра конечного ранга нильпотентна.*

Определение 1.7. Элемент $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$ называется идемпотентом, если выполняется условие $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.5 [116, с. 27]. *Если алгебра $\mathfrak{K}$ не нильпотентна, то она содержит идемпотент.*

Пусть матрица $\mathcal{A}$ задана элементами a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда следом матрицы $\mathcal{A}$ называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали $\operatorname{tr} \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. След матрицы $\mathcal{A}$ равен сумме ее характеристических чисел, т. е. $\operatorname{tr} \mathcal{A} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, и обладает следующими свойствами: $\operatorname{tr}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \operatorname{tr} \mathcal{A} + \operatorname{tr} \mathcal{B}$, $\operatorname{tr} \mathcal{A}\mathcal{B} = \operatorname{tr} \mathcal{B}\mathcal{A}$. Пользуясь понятием следа, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.6 [116, с. 29]. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{K}$ была нильпотентна, необходимо и достаточно, чтобы для элементов ее базиса $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$ имело место равенство*

$$\operatorname{tr} \mathcal{A}_1 = 0, \ \ldots, \ \operatorname{tr} \mathcal{A}_h = 0. \tag{1.9}$$

Определение 1.8. Назовем собственно нильпотентными нильпотентные матрицы $\mathcal{X}$, для которых матрицы $\mathcal{X}\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{X}$ при всяком $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{K}$ нильпотентны.

Теорема 1.7 [116, с. 31]. *Чтобы матрица $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$, была собственно нильпотентна, необходимо и достаточно соблюдение для всех элементов $\mathcal{A}_j$ базиса равенств*

$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}\mathcal{A}_j) \equiv 0, \quad j = \overline{1, h}. \tag{1.10}$$

Если условия (1.10) выполняются для матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то они выполняются и для матрицы $\mathcal{A} \pm \mathcal{B}$. Рассмотрим произведение произвольной матрицы $\mathcal{X} \in \mathfrak{K}$ на собственно нильпотентный элемент $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{X}\mathcal{A}_i$ раскладывается по базису $\mathcal{X}\mathcal{A}_i = \beta_{i1} \mathcal{A}_1 + \ldots + \beta_{ih}\mathcal{A}_h$, тогда $\operatorname{tr}(\mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A}_i) = \beta_{i1} \operatorname{tr} \mathcal{A}\mathcal{A}_1 + \ldots + \beta_{ih} \operatorname{tr} \mathcal{A}\mathcal{A}_h \equiv 0$. Аналогично убеждаемся, что $\operatorname{tr}(\mathcal{A}_i\mathcal{X}\mathcal{A}) \equiv 0$. Следовательно, совокупность всех собственно нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{K}$ образует ее двусторонний идеал. Его нильпотентность следует из теоремы 1.4.

Этот идеал носит название радикала алгебры $\mathfrak{K}$. Будем обозначать его $\mathfrak{T}$. Полученный результат сформулируем в виде утверждения.

Теорема 1.8. *Совокупность собственно нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{K}$ образует нильпотентную подалгебру, являющуюся двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{K}$.*

Существует эффективный алгоритм нахождения элементов радикала. Пусть для матрицы $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}$ имеет место разложение

$$\mathcal{A} = \alpha_1 \mathcal{A}_1 + \cdots + \alpha_h \mathcal{A}_h. \tag{1.11}$$

Подчиним элемент матрицы $\mathcal{A}$ условиям (1.10). Получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1)\alpha_1 + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1)\alpha_2 + \cdots + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_1)\alpha_h = 0;\\ \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)\alpha_1 + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_2)\alpha_2 + \cdots + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_2)\alpha_h = 0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_h)\alpha_1 + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_h)\alpha_2 + \cdots + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_h)\alpha_h = 0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Всевозможные решения этой системы дают собственно нильпотентные матрицы $\mathcal{A}$ алгебры $\mathfrak{K}$. Система имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда ее определитель (дискриминант алгебры $\mathfrak{K}$)

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1) & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1) & \dots & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_1) \\ \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_2) & \dots & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_h) & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_h) & \dots & \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_h) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Определение 1.9. Если алгебра не содержит отличного от нуля радикала, то она называется полупростой алгеброй.

Приведенные выше результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.9. *Чтобы алгебра $\mathfrak{K}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы ее дискриминант был отличен от нуля.*

Приведем основной результат об алгебраической приводимости обертывающей алгебры $\mathfrak{K}$.

Теорема 1.10. *Если обертывающая алгебра $\mathfrak{K}$ ранга $h < n^2$ не является полупростой, то она приводима к квазитреугольному виду* (1.7). *Справедливо также обратное утверждение.*

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что алгебра $\mathfrak{K}$ сама не является нильпотентной, т. е. ее радикал $\mathfrak{T}$ не совпадает с $\mathfrak{K}$, а составляет ее правильную часть: $\mathfrak{T} \in \mathfrak{K}$. Наличие радикала означает, что дискриминант D алгебры равен нулю. Пусть общее решение системы (1.12) зависит от m произвольных постоянных, например $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда

$$\begin{gathered}\alpha_{m+1} = a_{m+1,1}\alpha_1 + \cdots + a_{m+1,m}\alpha_m;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_h = a_{h,1}\alpha_1 + \cdots + a_{h,m}\alpha_m.\end{gathered}$$

Подставим значения $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_h$ в формулу (1.11) и перегруппируем слагаемые:

$$\mathcal{A} = \alpha_1 \mathcal{N}_1 + \cdots + \alpha_m \mathcal{N}_m. \tag{1.13}$$

Матрицы $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$ являются базисными для радикала $\mathfrak{r}$ и известным образом выражаются через базис $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$. Матрица $\mathcal{A}$ (1.13) при произвольном выборе коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ является собственно нильпотентной. Обозначим через L_1 подпространство из R^n, аннулируемое общим элементом радикала $\mathfrak{r}$: $L_1 = \{\xi \mid \mathcal{A}\xi = 0, \xi \in \mathrm{R}^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{P}\}$. В подпространство L_1 входят те векторы, которые являются решениями системы уравнений $\mathcal{N}_1\xi = 0, \ldots$ $\ldots, \mathcal{N}_m\xi = 0$.

Далее, вводим подпространство $L_2 = \{\xi \mid \mathcal{A}^2\xi = 0, \xi \in \mathrm{R}^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{P}\}$. В подпространство L_2 входят те векторы, которые являются решениями системы уравнений $\mathcal{N}_i\mathcal{N}_j\xi = 0$, $i, j = \overline{1, m}$. Очевидно, что $L_1 \subset L_2$. По индукции определим подпространство $L_j = \{\xi \mid \mathcal{A}^j\xi = 0, \xi \in \mathrm{R}^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{P}\}$. В подпространство L_j входят те векторы, которые являются решениями системы уравнений $\mathcal{N}_1^{\beta_1} \ldots \mathcal{N}_m^{\beta_m}\xi = 0$, $\beta_1 + \ldots + \beta_m = j$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathrm{Z}^+$. Так как алгебра $\mathfrak{r}$ нильпотентна, то существует число $\alpha \leqslant n$ такое, что $\mathcal{A}^\alpha \equiv 0$ и, следовательно, $L_\alpha = \mathrm{R}^n$. Примем $L_0 \equiv 0$. В итоге построена цепочка подпространств $0 \equiv L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_\alpha = \mathrm{R}^n$, причем $\mathcal{N}_i L_j \subset L_{j-1}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, \alpha}$.

Те элементы алгебры $\mathfrak{R}$, которые не входят в радикал $\mathfrak{r}$, переводят подпространства L_j, $j = \overline{1, \alpha}$, в себя. Действительно, если $\mathcal{B} \in \mathfrak{R}$, $\mathcal{B} \notin \mathfrak{r}$, то $\mathcal{N}_i\mathcal{B} \in \mathfrak{r}$, $i = \overline{1, m}$. Разложим $\mathcal{N}_i\mathcal{B}$ по базису $\mathfrak{r}$:

$$\mathcal{N}_i\mathcal{B} = \alpha_{i1}\mathcal{N}_1 + \cdots + \alpha_{im}\mathcal{N}_m. \tag{1.14}$$

Воздействуем на векторы подпространства L_j матрицей (1.14). В результате получим

$$\mathcal{N}_i\mathcal{B}L_j \equiv 0 \pmod{L_{j-1}}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.15}$$

Из тождеств (1.15) следует доказываемое утверждение $\mathcal{B}L_j \subseteq L_j$. Приведение матриц $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$ базиса к квазитреугольному виду можно осуществить поэтапно. Выберем базисные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_{\nu_1}$ подпространства L_1 в качестве первых столбцов матрицы S_1, $\det S_1 \neq$ $\neq 0$. В итоге получим

$$S_1^{-1}\mathcal{A}_j S_1 = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11}^{(j)} & \mathcal{A}_{12}^{'(j)} \\ 0 & \mathcal{A}_{22}^{'(j)} \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, h}; \quad S_1^{-1}\mathcal{N}_i S_1 =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{N}_{12}^{'(i)} \\ 0 & \mathcal{N}_{22}^{'(i)} \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.16}$$

Здесь $\mathcal{A}_{11}^{(j)}$ — матрица размерности $\nu_1 \times \nu_1$. В силу (1.15) для последних $n - \nu_1$ координат векторов $\eta' = S_1^{-1}\eta \in S_1^{-1}L_2$, линейно независимых над $S_1^{-1}L_2$, и матриц $\mathcal{A}_{22}^{'(j)}$, $j = \overline{1, h}$, получаем тождества $\mathcal{N}_{22}^{'(i)}\mathcal{A}_{22}^{'(j)}\eta' \equiv 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, h}$. Следовательно, верны все рассуждения, приведенные выше. После конечного числа шагов матрица $\mathcal{A}$ (t) преобразуется к квазитреугольной матрице (1.7).

Если теперь предположить, что радикал $\mathcal{T}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{R}$, то базис $\mathfrak{R}$ будет состоять только из матриц $\mathcal{N}_i$, $i = \overline{1, h}$. Но только что было показано, что эти матрицы также приводятся к квазитреугольному виду (1.16).

Необходимость. Матрицы

$$\mathcal{N}_j = \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{N}_{12}^{(j)} & \mathcal{N}_{13}^{(j)} & \ldots & \mathcal{N}_{1m}^{(j)} \\ 0 & 0 & \mathcal{N}_{23}^{(j)} & \ldots & \mathcal{N}_{2m}^{(j)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathcal{N}_{m-1,m}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, h},$$

полученные из приведенных матриц (1.7) подстановкой в них на квазидиагонали нулей, дадут часть собственно нильпотентных элементов радикала. Вычислением произведений по ним можно построить радикал $\mathcal{T}$ алгебры $\mathfrak{R}$ и найти базисные элементы $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$. ■

Перейдем к изучению вопроса о полной приводимости алгебры $\mathfrak{R}$. В силу теоремы 1.10 следует считать, что эта алгебра полупроста.

Теорема 1.11 [116, с. 34]. *Полупростая алгебра $\mathfrak{R}$ всегда содержит главную единицу $\mathcal{E}_0$, обладающую свойством $\mathcal{A}\mathcal{E}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{E}_0\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для всех $\mathcal{A} \in \mathfrak{R}$.*

Главная единица обладает свойством $\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_0$, т. е. является идемпотентной матрицей. Эта матрица имеет характеристическое число 1 кратности k и характеристическое число 0 кратности $n - k$. Главная единица $\mathcal{E}_0$ является также матрицей простой структуры, т. е. приводится преобразованием подобия к чисто диагональному виду.

Используя понятие главной единицы, докажем следующее утверждение.

Теорема 1.12. *Полупростая матричная алгебра $\mathfrak{R}$ с элементами в виде матриц n-го порядка допускает представление матрицами k-го порядка, $k < n$, тогда и только тогда, когда главная единица $\mathcal{E}_0$, представимая матрицей n-го порядка, имеет ранг k.*

Доказательство. *Достаточность*. Матрица $\mathcal{E}_0$ обладает k собственными векторами $\mathcal{E}_0\eta_j = \eta_j$, $j = \overline{1, k}$, и $n - k$ собственными векторами $\mathcal{E}_0\eta_i = 0$, $i = \overline{k + 1, n}$. В силу перестановочности элемента $\mathcal{E}_0$ с любым элементом $\mathcal{A}$ алгебры $\mathfrak{R}$ указанные корневые подпространства матрицы $\mathcal{E}_0$ инвариантны относительно матрицы $\mathcal{A}$. Выбирая векторы $\eta_1, \ldots, \eta_n$ в качестве столбцов преобразования S, приведем элементы алгебры $\mathfrak{R}$ к виду (1.8). *Необходимость* легко следует из вида матриц (1.8). ■

Введем понятие прямой суммы двух (и более) подалгебр. Пусть $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ — два взаимно простых двусторонних идеала алгебры $\mathfrak{R}$. Совокупность элементов $\mathcal{B} + C$, где $\mathcal{B}$ пробегает $\mathfrak{R}_1$ и C пробегает $\mathfrak{R}_2$, называется прямой суммой $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$. Легко доказать, что $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ составляет алгебру. Всякое произведение $\mathcal{B}C$ в силу двусторонности идеалов $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ содержится и в $\mathfrak{R}_1$, и в $\mathfrak{R}_2$, а потому из-за их взаимной простоты равно нулю. Точно так же $C\mathcal{B} = 0$. В силу этого произведение $(\mathcal{B} + C)(\mathcal{B}_1 + C_1) = \mathcal{B}\mathcal{B}_1 + CC_1$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1 \in \mathfrak{R}_1$, C, $C_1 \in \mathfrak{R}_2$, входит в $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, так как $\mathcal{B}\mathcal{B}_1 \in \mathfrak{R}_1$, $CC_1 \in \mathfrak{R}_2$.

Теорема 1.13 [116, с. 36]. *Если алгебра $\mathfrak{R}$ содержит двусторонний идеал $\mathfrak{R}$, имеющий главную единицу, то $\mathfrak{R}$ распадается в прямую сумму идеала $\mathfrak{R}$ и некоторого другого двустороннего идеала.*

Определение 1.10. Алгебра называется простой, если она не содержит отличных от самой себя двусторонних идеалов.

Из этого определения следует, что простая алгебра может только тогда иметь отличный от нуля радикал, когда она с ним совпадает, т. е. когда она сама нильпотентна: $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$. В последнем случае существует число $\alpha \in Z^+$ такое, что $\mathfrak{T}^\alpha \equiv 0$. Но $\mathfrak{T}^{\alpha-1}$ является двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{T}$. В силу предполагаемой простоты $\mathfrak{T}$ следует потребовать $\mathfrak{T}^{\alpha-1} = \mathfrak{T}$, откуда следует $\alpha = 2$. Алгебра со свойством $\mathfrak{T}^2 \equiv 0$ называется нулевой. Если $\{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_h\}$ — ее базис, то линейная система $\{\mathcal{N}_1\}$ порождает ее двусторонний идеал. Так что нулевая алгебра может быть простой только в случае $h = 1$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1.14. *Всякая простая алгебра полупроста, за исключением нулевой алгебры ранга 1.*

В дальнейшем изложении нулевые алгебры порядка 1 будем из рассмотрения исключать.

Теорема 1.15 [116, с. 37]. *Всякий двусторонний идеал полупростой алгебры есть также полупростая алгебра.*

Из сформулированных теорем следует такой важный результат для полупростых алгебр.

Теорема 1.16 [116, с. 38]. *Всякая полупростая алгебра $\mathfrak{R}$ может быть разложена в прямую сумму простых алгебр. Это разложение однозначно.*

Ограничимся доказательством первой части теоремы. Если алгебра $\mathfrak{R}$ не проста, то она содержит двусторонний идеал $\mathfrak{R}_1$, который по теореме 1.13 является полупростой алгеброй. Следовательно, в ней согласно теореме 1.11 содержится главная единица и согласно теореме 1.13 она разлагается в прямую сумму $\mathfrak{R}_1$ и другого двустороннего идеала $\mathfrak{R}_2 : \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

Если алгебры $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ не просты, то применяем к ним те же рассуждения. В итоге получаем разложение

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_m, \tag{1.17}$$

где $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_m$ суть простые алгебры и $\mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j = 0$ при $i \neq j$. ■

Теорема 1.16 допускает обращение.

Теорема 1.17. *Всякая прямая сумма простых алгебр, из которых ни одна не нильпотентна, полупроста.*

Пусть алгебра $\mathfrak{R}$ вполне приводима и имеет место разложение (1.27). Разложим единицу $\mathcal{E}$ алгебры $\mathfrak{R}$ по компонентам $\mathfrak{R}_j$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_m, \quad \mathcal{E}_j \in \mathfrak{R}_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Из равенства $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$, так как $\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j = 0$, $i \neq j$, следует

$$\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \cdots + \mathcal{E}_m^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_m. \tag{1.18}$$

Так как $\mathcal{E}_j^2 \in \mathfrak{K}_j$, то в силу однозначности разложения (1.18) должно иметь место тождество $\mathcal{E}_j^2 = \mathcal{E}_j$, т. е. $\mathcal{E}_j$ являются идемпотентами. Докажем, что $\mathcal{E}_j$ являются главными единицами в алгебрах $\mathfrak{K}_j$, $j = \overline{1, m}$. В самом деле, пусть $\mathcal{X} \in \mathfrak{K}_i$, тогда $\mathcal{X}\mathcal{E}_j \equiv 0$, $j \neq i$. Но $\mathcal{X}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{X} = \mathcal{X}$, откуда

$$\mathcal{X}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_m) = \mathcal{X}\mathcal{E}_i = \mathcal{X}, \quad (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_m)\mathcal{X} = = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}.$$

Таким образом, доказано, что $\mathcal{E}_j$ — главная единица в алгебре $\mathfrak{K}_j$.

Установим теперь связь между полной приводимостью матричной алгебры $\mathfrak{K}$ в смысле определения 1.3 и разложением алгебры $\mathfrak{K}$ в прямую сумму идеалов.

Обозначим через n_j ранг матрицы $\mathcal{E}_j$, представляющей идемпотент-единицу в алгебре $\mathfrak{K}_j$. Будем считать, что $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Пусть $\eta_1^{(j)}, \ldots, \eta_{n_j}^{(j)}$, $j = \overline{1, m}$,— собственные векторы матрицы $\mathcal{E}_j$ в числе n_j. Из условия $\mathcal{E}_j^2 = \mathcal{E}_j$ следует, что столбцы и строки матрицы $\mathcal{E}_j$ составлены из ее собственных нулевых векторов. Эти векторы аннулируются любой матрицей $\mathcal{E}_i$, $i \neq j$, $\mathcal{E}_i\eta_1^{(j)} \equiv 0, \ldots, \mathcal{E}_i\eta_{n_j}^{(j)} \equiv 0$.

Теорема 1.18. *Если полупростая матричная алгебра $\mathfrak{K}$ ранга n раскладывается в прямую сумму m простых алгебр $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \ldots + \mathfrak{K}_m$, то ее элементы неособым преобразованием S приводятся к квазидиагональному виду*

$$S^{-1}\mathcal{A}S = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11} & & & & 0 \\ & \mathcal{A}_{12} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \mathcal{A}_{mm} \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{K}, \tag{1.19}$$

где $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \ldots, \mathcal{A}_{mm}$ — квадратные матрицы размерностей $n_1 \times n_1, \ldots, n_m \times n_m$; $n_1, \ldots, n_m$ — ранги матриц $\mathcal{E}_j$, представляющих единицы в подалгебрах $\mathfrak{K}_j$; столбцы матриц S составлены из последовательности независимых столбцов матриц $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m$.

Справедливо также обратное утверждение.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный элемент алгебры $\mathfrak{K}$ и имеет место разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_j \in \mathfrak{K}_j$, $j = \overline{1, m}$. Тогда из тождества $\mathcal{A}_j\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j\mathcal{A}_j$ следует тождество $\mathcal{E}_j\mathcal{A}_j\eta_k^{(j)} \equiv \mathcal{A}_j\mathcal{E}_j\eta_k^{(j)} \equiv \mathcal{A}_j\eta_k^{(j)}$, где $\eta_k^{(j)}$, $k = \overline{1, \eta_j}$,— собственные векторы матрицы $\mathcal{E}_j$. Другими словами, вектор $\mathcal{A}_j\eta_k^{(j)}$ также является собственным вектором матрицы $\mathcal{E}_j$:

$$\mathcal{A}_j\eta_k^{(j)} = a_{k1}^{(j)}\eta_1^{(j)} + \cdots + a_{kn_j}^{(j)}\eta_{n_j}^{(j)}.$$

Запишем теперь тождество $\mathcal{A}(\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_m) \equiv (\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_m)\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_m$ и умножим его справа на вектор $\eta_k^{(j)}$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_m)\eta_k^{(j)} \equiv \mathcal{A}\eta_k^{(j)} \equiv \mathcal{A}_j\eta_k^{(j)},$$

т. е. вектор $\mathcal{A}\eta_k^{(j)}$ является собственным вектором матрицы $\mathcal{E}_j$. Доказано, что линейное пространство, натянутое на векторы $\eta_1^{(j)}, \ldots, \eta_{n_j}^{(j)}$, переводится матрицей $\mathcal{A}$ в себя. Выбирая указанные n независимых векторов в качестве столбцов матрицы преобразования S, получим то, что требовалось доказать.

Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть полупростая алгебра $\mathfrak{R}$ составлена из квазидиагональных матриц (1.19). По-прежнему, базис $\mathfrak{R}$ образуют матрицы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$. Рассмотрим совокупность матриц

$$\mathcal{A}_i^{(j)} = \operatorname{diag} \| 0, \ldots, 0, \mathcal{A}_{ii}^{(j)}, 0, \ldots, 0 \|, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\mathcal{A}_{ii}^{(j)}$, $j = \overline{1, h}$ — квадратные матрицы размерностей $n_i \times n_i$. Эта совокупность матриц порождает подалгебру $\mathfrak{R}_i$ алгебры $\mathfrak{R}$, являющуюся, как легко заметить, ее двусторонним идеалом. На основании теоремы 1.13 этот идеал является полупростой алгеброй. Следовательно, $\mathfrak{R}$ распадается в прямую сумму (1.19). ■

Существует глубокая связь между структурой алгебры $\mathfrak{R}$ и ее центра $\mathfrak{Z}$. Выясним сначала структуру матричной простой алгебры.

Теорема 1.19. *Пусть простая матричная алгебра $\mathfrak{R}$ над полем* **K** *имеет в качестве базиса матрицы*

$$\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_h \tag{1.20}$$

размерности $n \times n$, тогда единственным ее элементом центра является элемент $Z = \lambda\mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0$ — главная единица алгебры.

Доказательство. Если $h = n^2$, то $\mathfrak{R}$ совпадает с полной матричной алгеброй и $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — единичная матрица размерности n. Как показано в примере 1.2, в этом случае $Z = \lambda\mathcal{E}$.

Пусть $h < n^2$. Если главная единица $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}$, то ее ранг k меньше n и согласно теореме 1.12 матрицы $\mathcal{B}_j$, $j = \overline{1, h}$, приводятся к квазидиагональному виду

$$S^{-1}\mathcal{B}_j S = \begin{Vmatrix} \mathcal{B}_j' & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\mathcal{B}_j'$ — матрицы порядка $k \times k$.

Следовательно, не теряя общности рассуждений, можно сразу положить, что элементы базиса (1.20) не допускают представления матрицами меньшего порядка. В этом случае $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Покажем, что не существует элементов центра $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{R}$, отличных от $\lambda\mathcal{E}$. Предположим противное: существует элемент $Z = \alpha_1\mathcal{B} + \ldots + \alpha_h\mathcal{B}_h$, перестановочный с базисом (1.62):

$$\mathcal{B}_j Z = Z\mathcal{B}_j, \quad j = \overline{1, h}. \tag{1.21}$$

Покажем, что матрица Z не может обладать различными характеристическими числами. Предположим, что имеется два различных характеристических числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда наряду с тождеством (1.21) имеют место тождества $\mathcal{B}_j (Z - \lambda_1\mathcal{E}) = (Z - \lambda_1\mathcal{E}) \mathcal{B}_j$, $j = \overline{1, h}$, и $\mathcal{B}_j (Z - \lambda_2\mathcal{E}) = (Z - \lambda_1\mathcal{E}) \mathcal{B}_j$, $j = \overline{1, h}$. Корневое подпространство

L_1 матрицы Z, образованное решениями $\eta_1, \ldots, \eta_k$, уравнения $(Z - \lambda_1\mathscr{E})\eta = 0$ остается инвариантным под действием преобразования $\mathscr{B}_j : \mathscr{B}_j(Z - \lambda_1\mathscr{E})L_1 \equiv \mathscr{B}_j(Z - \lambda_1\mathscr{E})L_1 \equiv 0$. Аналогично корневое подпространство L_2 матрицы Z, образованное решениями $\xi_1, \ldots, \xi_k$, уравнения $(Z - \lambda_2\mathscr{E})\xi = 0$, остается инвариантным под действием преобразований $\mathscr{B}_j : \mathscr{B}_j(Z - \lambda_2\mathscr{E})L_2 \equiv \mathscr{B}_j(Z - \lambda_2\mathscr{E})L_2 \equiv 0$. Сумма подпространств L_1 и L_2 прямая и $k_1 + k_2 = n$. Выбирая в качестве столбцов матрицы преобразования S_1 векторы $\eta_1, \ldots, \eta_{k_1}, \xi_1, \ldots, \xi_{k_2}$, для матриц базиса (1.20) получаем в новых координатах

$$S_1^{-1}\mathscr{B}_jS_1 = \begin{Vmatrix} \mathscr{B}_j' & 0 \\ 0 & \mathscr{B}_j'' \end{Vmatrix}, \tag{1.22}$$

где $\mathscr{B}_j'$ и $\mathscr{B}_j''$ — матрицы размерностей соответственно $k_1 \times k_1$ и $k_2 \times k_2$.

Представление матриц $\mathscr{B}_j$ базиса алгебры $\mathfrak{K}$ в виде (1.22) означает, что алгебра $\mathfrak{K}$ не является простой. Следовательно, получилось противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда Z имеет единственное характеристическое число λ. Матрица $Z_1 = Z - \lambda\mathscr{E}$ также входит в центр $\mathfrak{Z}$. Предположим, что $Z_1 \not\equiv 0$, т. е. является нильпотентной матрицей: $\mathscr{B}_jZ_1 = Z_1\mathscr{B}_j$, $j = \overline{1, h}$, $Z_1^\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathrm{Z}^+$. Как показано в теореме 2.2 (см. ниже), каждая из матриц $\mathscr{B}_j$ может быть в этом случае приведена к квазитреугольному виду

$$S^{-1}\mathscr{B}_jS = \begin{Vmatrix} \mathscr{B}_{11}^{(j)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathscr{B}_{mm}^{(j)} \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, h}.$$

В этом случае по теореме 1.10 алгебра $\mathfrak{K}$ содержит радикал $\mathfrak{J} \not\equiv 0$, что противоречит ее предполагаемой простоте. Единственное оставшееся предположение о том, что $Z_1 \equiv 0$, т. е. $Z = \lambda\mathscr{E}$, приводит к требуемому результату. ■

Определение 1.11. Простая алгебра $\mathfrak{K}$, центр которой состоит только из элементов $\lambda\mathscr{E}_0$, где $\mathscr{E}_0$ — главная единица алгебры $\lambda \in \mathrm{K}$, называется нормальной.

Таким образом, доказано, что простая матричная алгебра является нормальной. Приведем без доказательства следующий фундаментальный результат о структуре простых нормальных алгебр.

Теорема 1.20. [116, с. 55]. *Всякая простая нормальная алгебра над полем* K *является полной матричной алгеброй и ее ранг равен квадрату целого числа.*

Из приведенной теоремы следует, что блоки $\mathscr{B}_j'$, $j = \overline{1, h}$, размерности k в соотношениях (1.22) порождают полную матричную алгебру $\mathfrak{K}$ и что ее ранг $h = k^2$.

Докажем теорему о структуре полупростой алгебры.

Теорема 1.21. *Для того чтобы полупростая матричная алгебра $\mathfrak{K}$ над полем* K *распадалась в прямую сумму m простых подалгебр, необходимо и достаточно, чтобы общий элемент Z центра алгебры $\mathfrak{Z}$ зависел от $m \geqslant 2$ произвольных постоянных и был представим в виде*

$$Z = \alpha_1 \mathcal{E}_1 + \cdots + \alpha_m \mathcal{E}_m, \tag{1.23}$$

где $\mathcal{E}_j$, $j = \overline{1, m}$,— *идемпотентная матрица ранга* n_j, $n_1 + \ldots + n_m = n$, $\mathcal{E}_j^2 = \mathcal{E}_j$, $\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \equiv 0$, $i \neq j$.

Доказательство. Необходимость указанных в теореме условий следует из теорем 1.18 и 1.19. Докажем достаточность. Пусть базис центра алгебры $\mathfrak{Z}$ содержит m элементов Z_1, Z_2, ..., Z_m, коммутирующих со всеми элементами алгебры $\mathfrak{K}$ и, следовательно, между собой. Общий элемент Z представи́м в виде суммы $Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \ldots + \alpha_m Z_m$ и зависит от m произвольных постоянных.

Как следует из теоремы 2.2 (см. ниже), ни одна из матриц центра $\mathfrak{Z}$ не может быть нильпотентной. Отсюда, как нетрудно показать, матрицы $Z \in \mathfrak{Z}$ являются матрицами простой структуры. Если Z — матрица простой структуры, то она может быть представлена в виде суммы

$$Z = \lambda_1 \mathcal{E}_1 + \lambda_2 \mathcal{E}_2 + \cdots + \lambda_m \mathcal{E}_m, \tag{1.24}$$

где $\mathcal{E}_j$ — идемпотентные матрицы, $\mathcal{E}_j \mathcal{E}_i \equiv 0$, $\mathcal{E}_j^2 = \mathcal{E}_j$, λ_1, ..., λ_m — характеристические числа кратностей r_1, ..., r_m, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$.

Идемпотентные матрицы $\mathcal{E}_j$ являются проекторами на корневые подпространства $P(\lambda_j)$, соответствующими корню λ_j. Они могут быть, как известно из линейной алгебры, построены по формуле

$$\mathcal{E}_j = g_j(Z) \frac{g(Z)}{(Z - \lambda_j \mathscr{E})^{r_j}},$$

где $g_j(\lambda)$ — составляющие в разложении характеристического многочлена $g(\lambda)$ матрицы Z на элементарные дроби

$$\frac{1}{g(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{r_j}}.$$

Идемпотенты $\mathcal{E}_j$, являясь многочленами от матрицы Z, принадлежат центру $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{K}$. Очевидно, разложение (1.24) можно записать для любого базисного элемента Z_j:

$$Z_j = \alpha_1^{(j)} \mathcal{E}_1^{(j)} + \cdots + \alpha_m^{(j)} \mathcal{E}_m^{(j)}, \tag{1.25}$$

где m зависит от выбора индекса j.

Выберем среди возможных идемпотентов $\mathcal{E}_1^{(j)}$, ..., $\mathcal{E}_m^{(j)}$ ν линейно независимых в качестве нового базиса. Обозначим элементы этого базиса $\mathcal{E}_1$, ..., $\mathcal{E}_\nu$. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} Z_1 &= \alpha_{11} \mathcal{E}_1 + \alpha_{12} \mathcal{E}_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \mathcal{E}_\nu; \\ Z_2 &= \alpha_{21} \mathcal{E}_1 + \alpha_{22} \mathcal{E}_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \mathcal{E}_\nu; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_m &= \alpha_{m1} \mathcal{E}_1 + \alpha_{m2} \mathcal{E}_2 + \cdots + \alpha_{m\nu} \mathcal{E}_\nu. \end{aligned}$$

Очевидно, что ν не превосходит m, $\nu \leqslant m$, так как это означало бы, что ранг подалгебры $\mathfrak{Z}$ больше m. С другой стороны, тождество $\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \ldots + \beta_m Z_m \equiv 0$ может выполняться только при $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m \equiv 0$. Из соотношений (1.25) следует, что вектор $\| \beta_1, \ldots, \beta_m \|$ является в таком случае единственным решением однородной системы

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{21}\beta_2 + \cdots + \alpha_{m1}\beta_m = 0;\\
&\alpha_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{m2}\beta_m = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{1\nu}\beta_1 + \alpha_{2\nu}\beta_2 + \cdots + \alpha_{m\nu}\beta_m = 0,
\end{aligned}$$

и поэтому ее ранг в точности равен m, т. е. $\nu = m$.

Доказано, что $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m$ можно выбрать в качестве базиса алгебры $\mathfrak{Z}$ и ее общий элемент представить в виде суммы (1.23). Разложение алгебры $\mathfrak{K}$ в прямую сумму m подалгебр может быть осуществлено при помощи идемпотентов, как это показано при доказательстве теоремы 1.18. ■

Приведем теперь доказательство теоремы 1.2.

Достаточность условий теоремы 1.2. Если алгебра $\mathfrak{K}$ не полупроста, то по теореме 1.10 она приводима. Если алгебра полупроста и имеет центр размерности $m \geqslant 2$, то согласно теореме 1.21 она приводима к квазидиагональному виду.

Если алгебра $\mathfrak{K}$ проста и имеет главную единицу $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}$, то согласно теореме 1.12 она имеет представление матрицами меньшей размерности, т. е. в конечном счете является вполне приводимой.

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathfrak{K}$ — простая алгебра и $Z = \lambda\mathcal{E}$. Алгебра $\mathfrak{K}$ является в этом случае нормальной и согласно теореме 1.20 полной матричной алгеброй. Ее ранг h равен квадрату целого числа k, т. е. $h = k^2$. Покажем, что $k = n$. В самом деле, полная алгебра $\mathfrak{K}$ содержит k идемпотентов $\mathcal{E}_{11}, \ldots, \mathcal{E}_{kk}$. Обозначим через η_j собственный вектор матрицы $\mathcal{E}_{jj}$, $\mathcal{E}_{jj}\eta_j = \eta_j$. Он существует, так как $\mathcal{E}_{jj}^2 = \mathcal{E}_{jj}$; в качестве такого вектора можно выбрать ненулевой столбец. В силу независимости матриц $\mathcal{E}_{11}, \ldots, \mathcal{E}_{kk}$ найдется k независимых векторов $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Элементы полной матричной алгебры $\mathcal{E}_{j\nu}$, $j, \nu = \overline{1, n}$, удовлетворяют соотношениям $\mathcal{E}_{jj}\mathcal{E}_{j\nu} = \mathcal{E}_{j\nu}$, и, следовательно, их столбцы состоят из собственных векторов матрицы $\mathcal{E}_{jj}$. Выберем векторы $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в качестве первых столбцов матрицы преобразования S и дополним их произвольной независимой системой. В результате замены переменных получим для базиса алгебры

$$S^{-1}\mathcal{E}_{ij}S = \begin{Vmatrix} \mathcal{E}'_{ij} & * \\ 0 & * \end{Vmatrix}, \quad i, j = \overline{1, k}, \tag{1.26}$$

где $\mathcal{E}'_{ij}$ — квадратные матрицы $k \times k$ с единицей на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Из структуры матриц (1.26) и теоремы 1.10 следует, что алгебра $\mathfrak{K}$ содержит радикал, а это противоречит ее простоте. Противоречие снимается, если положить, что $k = n$ и, следовательно, $h = n^2$. ■

В заключение опишем алгоритм алгебраического приведения системы (1.1), основанный на доказанных выше теоремах.

Первый шаг. Строится базис обертывающей алгебры $\mathfrak{K}$: $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$.

Второй шаг. Если $h < n^2$, то система алгебраически приводима. Вычисляем дискриминант D алгебры $\mathfrak{K}$.

Третий шаг. Если $D = 0$, то применяем теорему 1.10.

Четвертый шаг. Если $D \neq 0$, то находим общий элемент $Z = \alpha_1\mathcal{A}_1 + \ldots + \alpha_h\mathcal{A}_h$ алгебры центра из систем линейных алгебраических уравнений

$$Z\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j Z, \quad j = \overline{1, h}. \tag{1.27}$$

Вычисляя следы матриц от обеих частей, систему (1.27) представляем в виде

$$\begin{gathered}
\alpha_1 \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1) + \alpha_2 \operatorname{tr}(A_2\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) + \cdots \\
\cdots + \alpha_h \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{A}_h) = 0; \\
\alpha_1 \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1) + \alpha_2 \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_2) + \cdots \\
\cdots + \alpha_h \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_h) = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_1 \operatorname{tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_h\mathcal{A}_1) + \alpha_2 \operatorname{tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_h\mathcal{A}_2) + \cdots \\
\cdots + \alpha_h \operatorname{tr}(\mathcal{A}_h\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_h\mathcal{A}_h) = 0.
\end{gathered}$$

Далее применяем теорему 1.21.

Пример 1.3. Пусть система (1.1) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2t^3 + t^2 - t & t^3 + t^2 - t & t \\ -2t^3 - 2t^2 + 2t & -t^3 - 2t^2 + 2t & -t^2 \\ 2t & t & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}. \tag{1.28}$$

Матрицу коэффициентов этой системы можно представить суммой $\mathcal{A}(t) = t^3\mathcal{A}_1 + t^2\mathcal{A}_2 + t\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$, где

$$\mathcal{A}_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathcal{A}_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, совокупность $\sigma^0 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\}$. Непосредственным вычислением легко получить максимальную систему линейно независимых матриц

$$\sigma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}, \tag{1.29}$$

где

$$\mathcal{A}_5 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, базис матричной алгебры $\mathfrak{K}$ составлен из пяти матриц (1.29). Основное условие теоремы 1.2 $h < n^2$ выполняется, так как $h = 5$, $n^2 = 9$. Система (1.28) является алгебраически приводимой. Легко вычислить матрицу коэффициентов системы (1.12) и ее определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Установлено, что алгебра $\mathfrak{K}$ — полупростая, и, как следствие, система (1.28) *вполне приводима. Общий элемент алгебры центра* $\mathfrak{Z}$ *разыскивается в виде* $\mathcal{A} = \alpha_1\mathcal{A}_1 + \alpha_2\mathcal{A}_2 + \alpha_3\mathcal{A}_3 + \alpha_4\mathcal{A}_4 + \alpha_5\mathcal{A}_5$. Из условий коммутативности матрицы Z с элементами базиса (1.29) находим

$$Z = \alpha_1 \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} + \alpha_5 \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Положим поочередно $\alpha_5 = -\alpha_1$, $\alpha_5 = 2\alpha_1$. В результате получим два линейно независимых элемента алгебры центра

$$Z_1 = \begin{Vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad Z_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

которые можно принять в качестве базисных.

Матрица Z_1 имеет характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Раскладывая характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$ на элементарные дроби, получаем два проектора на корневые подпространства:

$$\mathcal{P}_1 = -\frac{1}{4}(Z_1^2 - \mathcal{E}) - \frac{1}{2}(Z - \mathcal{E}) = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{4}(Z_1 + \mathcal{E})^2 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Аналогично, для матрицы Z_2 с характеристическими числами $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$ получаем

$$\mathcal{P}_1' = -Z_2(Z_2 - 2\mathcal{E}) = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \mathcal{P}_2' = (Z_2 - \mathcal{E})^2 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, $\mathcal{P}_1' = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2' = \mathcal{P}_2$ и в качестве базисных элементов алгебры $\mathfrak{Z}$ примем матрицы $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$. Матрицу преобразования S составим из линейно независимых столбцов этих матриц. После преобразования $y = Sz$ получаем

$$S^{-1}\mathcal{A}(t)\,S = \begin{Vmatrix} t^3 & t^2 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t^3 - t^2 + t \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, система (1.28) вполне алгебраически приводима и для нее в итоге находим

$$\begin{Vmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Vmatrix},$$

$$\dot{z}_3 = (-t^3 - t^2 + t)\,z_3.$$

Таким образом, исходная система распалась на две независимо интегрируемые подсистемы порядков 2 и 1.

Пример 1.4. Пусть система (1.1) имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}\dot y_1\\ \dot y_2\\ \dot y_3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} t^3-t^2+2t-1 & t^3-t^2+t-1 & t^3\\ -2t^3+2t^2-2t+1 & -2t^3+2t^2-t+1 & t^3\\ 2t^2-t & t^2-t & 1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{matrix}\right\|.$$

Матрица коэффициентов может быть представлена суммой $\mathcal{A}(t) = t^3\mathcal{A}_1 + t^2\mathcal{A}_2 + t\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$, где

$$\mathcal{A}_1 = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{A}_2 = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{matrix}\right\|,$$

$$\mathcal{A}_3 = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{A}_4 = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Выписанные матрицы образуют совокупность σ^0. Непосредственным вычислением легко получить максимальную систему линейно независимых образующих базис алгебры $\mathfrak{K}$ матриц $\sigma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7\}$, где

$$\mathcal{A}_5 = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{A}_6 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{A}_7 = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

Основные условия теоремы 1.2 выполняются, так как $h = 7$, $n^2 = 9$. Выпишем систему алгебраических уравнений (1.12) для вектора коэффициентов $\alpha = \|\alpha_1, \ldots, \alpha_7\|$ общего элемента $\mathcal{N} = \alpha_1\mathcal{A}_1 + \ldots + \alpha_7\mathcal{A}_7$ радикала:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\end{matrix}\right\| = 0.$$

Определитель этой системы (дискриминант алгебры $\mathfrak{K}$) равен нулю. Система имеет нетривиальное решение $\alpha = \|0, 0, \alpha_3, \alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_4, 0\|$ и, следовательно, нетривиальный радикал с общим элементом $\mathcal{N} = \alpha_3\mathcal{N}_1 + \alpha_4\mathcal{N}_2$, где

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_5 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \mathcal{N}_2 = \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_6 = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

Векторы подпространства L_1 образованы совместным решением системы уравнений $\mathcal{N}_1\xi = 0$, $\mathcal{N}_2\xi = 0$. При вычислении находим $\xi_1 = \|-1, 1, 0\|$, $\xi_2 = \|0, 0, 1\|$. Так как $\mathcal{N}_1^2 \equiv 0$, $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 \equiv 0$, $\mathcal{N}_2^2 \equiv 0$, то $L_2 = \mathrm{R}^3$. Дополним базис подпространства L_1 вектором $\xi_3 = \|0, 1, 0\|$ до полной системы линейно независимых векторов из R^3. Образуем из этих векторов матрицу преобразования S:

$$S = \left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\|,\quad S^{-1} = \left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|.$$

Произведя в исходной системе замену переменных $y = Sz$, для матрицы коэффициентов получаем

$$S^{-1}\mathcal{A}(t)\,S = \begin{Vmatrix} t & -t^3 & -t^3+t^2-t+1 \\ -t^2 & 1 & t^2-t \\ 0 & 0 & -t^3+t^2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, исходная система распадается на две последовательно интегрируемые подсистемы первого и второго порядков:

$$\begin{Vmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t & -t^3 \\ -t^2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -t^3+t^2-t+1 \\ t^2-t \end{Vmatrix} z_3,$$

$$\dot z_3 = (-t^3+t^2)\,z_3.$$

§ 2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО НИЛЬПОТЕНТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Пусть дана линейная система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x, \quad \mathcal{A} = \text{const}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу декомпозиции системы (2.1) на подсистемы меньшей размерности без использования непосредственной информации о характеристических числах матрицы $\mathcal{A}$. При этом могут представиться три случая.

1. Матрица $\mathcal{A}$ — простой структуры, т. е. найдется матрица с коэффициентами из поля K, которая преобразует матрицу к диагональному виду. Такая матрица имеет минимальный многочлен, равный произведению различных неприводимых многочленов. Матрицы простой структуры будем называть полупростыми. 2. Матрица $\mathcal{A}$ — нильпотентная, т. е. $\mathcal{A}^m = 0$, $m \in \mathrm{Z}^+$. В этом случае матрица фундаментальных решений имеет особенно простой вид:

$$X(t) = e^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{m} A^k \frac{t^k}{k!}.$$

3. Наконец, матрица $\mathcal{A}$ не является ни полупростой, ни нильпотентной. Назовем ее матрицей непростой структуры. Относительно таких матриц известен следующий результат.

Теорема 2.1 [28, с. 112]. *Пусть $\mathcal{A}$ — матрица размерности $\times$ $\times$ n над полем* K. *Тогда имеет место разложение*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n, \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{A}_s = g_0\mathcal{E} + g_1\mathcal{A} + \cdots + g_{m_1}\mathcal{A}^{m_1}, \quad \mathcal{A}_n = g_0\mathcal{E} + g_1\mathcal{A} + \cdots + g_{m_2}\mathcal{A}^{m_2},$$

m_1, $m_2 \in \mathrm{Z}^+$ — некоторые многочлены от матрицы $\mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}_s$ — полупростая, а $\mathcal{A}_n$ — нильпотентная матрицы.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_s + \mathcal{A}'_n$, *где* $\mathcal{A}'_s$ — *полупростая, а* $\mathcal{A}'_n$ — *нильпотентная составляющие, причем* $\mathcal{A}'_s$ и $\mathcal{A}'_n$ *коммутируют с* $\mathcal{A}$, *то* $\mathcal{A}_s \equiv \equiv \mathcal{A}'_s$, $\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}'_n$.

Именно этот случай рассмотрим в дальнейшем и получим следующие результаты.

По матрице общей структуры $\mathcal{A}$ построим нильпотентную матрицу $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\alpha \equiv 0$, $\alpha \in \mathrm{Z}^+$, коммутирующую с $\mathcal{A}$, и осуществим с ее помощью приведение матрицы $\mathcal{A}$ к квазитреугольному виду. Укажем простой алгебраический критерий полупростоты матрицы $\mathcal{A}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Матрица* $\mathcal{B} = a_1 E + a_2 \mathcal{A} + \ldots + a_n \mathcal{A}^{n-1}$, *где вектор* $a = \mathrm{colon}\, \| a_1, \ldots, a_n \|$, *определяется как решение системы линейных однородных алгебраических уравнений*

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0, \tag{2.3}$$

где $e_j = \mathrm{colon}\, \| \mathrm{tr}\, E \cdot \mathcal{A}^{j-1}, \mathrm{tr}\, \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{j-1}, \ldots, \mathrm{tr}\, \mathcal{A}^{n-1} \cdot \mathcal{A}^{j-1} \|$, $j = \overline{1, n}$, *является нильпотентной матрицей.*

Если $\mathcal{B} \not\equiv 0$, *то цепочка подпространств* $0 \equiv H_0 \subset H_1 \subset \ldots \ldots \subset H_{l-1} \subset H = \mathrm{R}^n$, *образованная решениями систем линейных однородных алгебраических уравнений* $H_i = \{\xi \in H_i \mid \mathcal{B}^i \xi = 0, \xi \in \mathrm{R}^n\}$, $i = \overline{1, l}$, *инвариантна относительно* $\mathcal{A}$ *и, следовательно, приводит матрицу* $\mathcal{A}$ *к квазитреугольному виду с квадратными блоками размерностей* $m_1, m_2 - m_1, \ldots, m_l - m_{l-1}$ *на главной диагонали* (m_i — *размерность подпространства* H_i, $0 \equiv m_0 < m_1 < \ldots < m_{l-1} < < m_l = n$).

Прежде чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний. Значение сформулированной теоремы состоит в том, что она не использует непосредственной информации о характеристических числах матрицы $\mathcal{A}$ или характеристическом (минимальном) многочлене [1].

Если $\mathcal{B} \equiv 0$, то $H_1 = \mathrm{R}^n$, матрица $\mathcal{A}$ — полупростая и указанный алгоритм непригоден. Следовательно, основной результат теоремы базируется на информации, которую несет в себе нильпотентная составляющая матрицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет характеристические числа λ_j кратностей r_j, $j = \overline{1, m}$, $r_1 + \ldots + r_m = n$. Тогда, вводя векторы $\Lambda_{ij} = \mathrm{colon}\, \| 1 \cdot \lambda_i^{j-1}, \ldots, \lambda_i \lambda_i^{j-1} \|$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, матрицу системы (2.3) можно записать в виде суммы:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m} r_i \| \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}, \ldots, \Lambda_{in} \|.$$

Умножая матрицу Λ на вектор a справа и приравнивая результат к нулю, придем к системе вида (2.3)

$$\Lambda a = \sum_{i=1}^{m} r_i (a_1 \Lambda_{i1} + \cdots + a_n \Lambda_{in}) = 0. \tag{2.4}$$

[1] Знание характеристических чисел матрицы $\mathcal{A}$ позволяет привести ее к жордановой нормальной форме и тем самым расщепить систему.

Примем во внимание структуру векторов $\Lambda_{i1}, \ldots, \Lambda_{in}$, $i = \overline{1, m}$, и преобразуем систему (2.4):

$$\sum_{i=1}^{m} r_i (a_1 + \lambda_i a_2 + \cdots + \lambda_i^{n-1} a_n) \Lambda_{i1} = 0.$$

Векторы $\Lambda_{11}, \ldots, \Lambda_{m1}$ линейно независимы, так как их первые m компонент образуют определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \ldots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} \equiv \prod_{\substack{\chi > \mu \\ \chi, \mu = \overline{1, m}}} (\lambda_\chi - \lambda_\mu) \not\equiv 0, \qquad (2.5)$$

который не равен нулю в силу сделанных предположений о том, что характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны. Следовательно, коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ определяются из системы уравнений

$$a_1 + \lambda_i a_2 + \cdots + \lambda_i^{n-1} a_n = 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (2.6)$$

Но выписанные суммы как раз и совпадают с характеристическими числами матрицы $\mathcal{B}$.

Система (2.6) имеет ранг m в силу неравенства нулю определителя (2.5). Таким образом, если не все характеристические числа матрицы $\mathcal{A}$ различны, то система уравнений (2.3) всегда имеет нетривиальное решение.

Пусть $\mathcal{B} \not\equiv 0$. Подпространство H_1 инвариантно относительно $\mathcal{A}$ вследствие тождеств $\mathcal{A}\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}\xi \equiv 0$, $\xi \in H_1$, а подпространство H_j инвариантно относительно $\mathcal{A}$ вследствие тождеств $\mathcal{A}\mathcal{B}^j \equiv \mathcal{B}^j\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}^j\xi \equiv 0$, $\xi \in H_j$ (которые вытекают из коммутативности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$). Обозначим через $H_{i+1} - H_i$ совокупность $m_{i+1} - m_i$ независимых векторов подпространства H_{i+1}, которые не входят в H_i. Тогда матрица преобразования Q составляется из этих векторов: $Q = \| H_1, H_2 - H_1, \ldots, H_l - H_{l-1} \|$. ■

Следствие 2.1. Если $\mathcal{B} \equiv 0$, то матрица $\mathcal{A}$ полупростая. Справедливо также обратное утверждение.

Пример 2.1. Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Проведем расщепление матрицы $\mathcal{A}$ по нильпотентной матрице, коммутирующей с ней. Для нахождения последней в виде $\mathcal{B} = a_1\mathcal{E} + a_2\mathcal{A} + \ldots + a_5\mathcal{A}^4$ составим уравнения

$$a_1 \operatorname{tr} \mathcal{E} + a_2 \operatorname{tr} \mathcal{A} + a_3 \operatorname{tr} \mathcal{A}^2 + a_4 \operatorname{tr} \mathcal{A}^3 + a_5 \operatorname{tr} \mathcal{A}^4 = 0;$$
$$a_1 \operatorname{tr} \mathcal{A} + a_2 \operatorname{tr} \mathcal{A}^2 + a_3 \operatorname{tr} \mathcal{A}^3 + a_4 \operatorname{tr} \mathcal{A}^4 + a_5 \operatorname{tr} \mathcal{A}^5 = 0;$$
$$a_1 \operatorname{tr} \mathcal{A}^2 + a_2 \operatorname{tr} \mathcal{A}^3 + a_3 \operatorname{tr} \mathcal{A}^4 + a_4 \operatorname{tr} \mathcal{A}^5 + a_6 \operatorname{tr} \mathcal{A}^6 = 0;$$
$$a_1 \operatorname{tr} \mathcal{A}^3 + a_2 \operatorname{tr} \mathcal{A}^4 + a_3 \operatorname{tr} \mathcal{A}^5 + a_4 \operatorname{tr} \mathcal{A}^6 + a_6 \operatorname{tr} \mathcal{A}^7 = 0;$$
$$a_1 \operatorname{tr} \mathcal{A}^4 + a_2 \operatorname{tr} \mathcal{A}^5 + a_3 \operatorname{tr} \mathcal{A}^6 + a_4 \operatorname{tr} \mathcal{A}^7 + a_6 \operatorname{tr} \mathcal{A}^8 = 0.$$

ентов этой системы:

$$\mathscr{M}=\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 14 & 22 & 50\\ 4 & 14 & 22 & 50 & 94\\ 14 & 22 & 50 & 94 & 194\\ 22 & 50 & 94 & 194 & 382\\ 50 & 94 & 194 & 382 & 770 \end{Vmatrix}.$$

Вектор решения a равен $\| 2,\ 1,\ -1,\ 0{,}0 \|$. Следовательно, нильпотентная матрица $\mathscr{B}$ выражается суммой:

$$\mathscr{B}=2\mathscr{E}+\mathscr{A}-\mathscr{A}^2=\begin{Vmatrix} -3 & 3 & -3 & 0 & 3\\ -3 & 3 & -3 & 0 & 3\\ 3 & -3 & 3 & 0 & -3\\ -3 & 6 & -3 & 0 & 6\\ 3 & -3 & 3 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $\mathscr{B}^2=0$.

Базис подпространства H_1, определяемый максимальным числом линейно независимых решений уравнения $\mathscr{B}\xi=0$, состоит из трех векторов: $l_1 = \operatorname{colon} \| 10-100 \|$, $l_2 = \operatorname{colon} \| 0100-1 \|$, $l_3 = \operatorname{colon} \| 00010 \|$. Дополним этот базис векторами из $H_2 = R^5$ $l_4 = \operatorname{colon} \| 00100 \|$ и $l_5 = \operatorname{colon} \| 00001 \|$. Выпишем матрицы преобразования Q и Q^{-1}:

$$Q=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица $\mathscr{A}$ в результате приводится к квазитреугольному виду

$$Q^{-1}\mathscr{A}Q=\begin{Vmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 & 2\\ -3 & -1 & 3 & -1 & 2\\ -3 & -3 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, МАТРИЦА КОТОРЫХ КОММУТИРУЕТ СО СВОИМ ИНТЕГРАЛОМ

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=Q(t)\,x, \tag{3.1}$$

где $Q(t)=\| q_{ij}(t) \|$, $i,\ j=\overline{1,\ n}$, — квадратная матрица размерности $n\times n$. В некоторых случаях система (3.1) допускает решение в замкнутой форме вида

$$x=e^{\int\limits_{t_0}^{t} Q(s)ds}\,x_0. \tag{3.2}$$

Именно для этого достаточно, чтобы матрица $\mathcal{H}(t) = \int\limits_{t_0} Q(s)\,ds$ коммутировала (при любом t) со своей производной [1]:

$$[\mathcal{H}, \dot{\mathcal{H}}] = \mathcal{H}\dot{\mathcal{H}} - \dot{\mathcal{H}}\mathcal{H} \equiv 0. \tag{3.3}$$

Возможность решения системы (3.1) в замкнутом виде (3.2) при выполнении условия (3.3) получила в теории дифференциальных уравнений название «случай интегрируемости Лаппо — Данилевского» (см., например, работу [65]). Такие системы в дальнейшем будем называть системами Лаппо — Данилевского.

Как оказалось, системы Лаппо — Данилевского являются в действительности алгебраически приводимыми, что было показано в ряде работ. В настоящем параграфе рассматривается задача об алгебраической приводимости систем Лаппо — Данилевского. Для выполнения условий (3.3) достаточно, чтобы матрица $\mathcal{H}(t)$ (или, что равносильно, матрица $\dot{\mathcal{H}}(t) = Q(t)$) была функционально-коммутативна, т. е. чтобы ее значения при любых значениях аргумента из области определения матриц коммутировали между собой: $[\mathcal{H}(t_1), \mathcal{H}(t_2)] \equiv 0$.

Для функционально-коммутативных матриц справедлив следующий результат.

Теорема 3.1 [91]. *Каждая функционально-коммутативная матрица может быть представлена в виде*

$$Q(t) = b_1(t)\,Q_1 + \cdots + b_m(t)\,Q_m, \tag{3.4}$$

где $b_1(t), \ldots, b_m(t)$ *— линейно независимые функции и* $Q_j \equiv \mathrm{const}$, $j = \overline{1, m}$, *— линейно независимые коммутативные матрицы с постоянными элементами; обратно: каждая матрица вида* (3.4) (*где* Q_j, $j = \overline{1, m}$, *— коммутативные матрицы) — функционально-коммутативна.*

Функционально-коммутативная матрица (3.4) посредством постоянной неособой матрицы S приводится к треугольному виду

$$S^{-1}Q(t)\,S = \begin{Vmatrix} \lambda_1(t) & & & & * \\ & \lambda_2(t) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n(t) \end{Vmatrix}, \tag{3.5}$$

где $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ *— известные функции, т. е. система (3.1) является алгебраически приводимой и интегрируемой в квадратурах.*

В общем случае матрица, коммутирующая со своей производной, не обязательно должна быть функционально-коммутативной, как

---

[1] Для того чтобы формула (3.2) давала решение системы (3.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $\frac{d}{dt}\left(e^{\mathcal{H}(t)}\right) = \frac{d\mathcal{H}}{dt}\, e^{\mathcal{H}(t)}$. Условия выполнимости этого соотношения рассматриваются в работе [8].

показывает следующий пример [8]:

$$Q(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_1 t^2 \text{ при } t \leqslant 0, \\ \mathcal{A}_2 t^2 \text{ при } t > 0, \end{cases}$$

где $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — постоянные некоммутирующие матрицы.

В работе [8] показано, что в том случае, когда коэффициенты матрицы $Q(t)$ не являются аналитическими, условие коммутативности $\mathcal{H}(t)$ и $\dot{\mathcal{H}}(t)$ при каждом значении t по существу локально и слабо связывает значения матриц на всем интервале. В дальнейшем имеет существенное значение дополнительное требование о консервативности матриц $\mathcal{H}(t)$.

Определение 3.1. Матрица $\mathcal{H}(t)$ называется консервативной в интервале $t \in (a, b)$, если она сохраняет в этом интервале жорданову нормальную форму, т. е. имеет в каждой точке интервала одну и ту же характеристику Сегре.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2 [8]. *Матрица $\mathcal{H}(t)$, консервативная и коммутирующая со своей производной в интервале (a, b), имеющая всюду дифференцируемые (или абсолютно-непрерывные) коэффициенты в этом интервале, постоянным преобразованием S приводится к блочно-диагональной форме*

$$S^{-1}\mathcal{H}(t)S = \begin{Vmatrix} \mathcal{H}_{11}(t) & & & 0 \\ & \mathcal{H}_{22}(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{H}_{mm}(t) \end{Vmatrix},$$

где каждый блок имеет единственное собственное значение, причем

$$\mathcal{H}_{jj}(t)\dot{\mathcal{H}}_{jj}(t) \equiv \dot{\mathcal{H}}_{jj}(t)\mathcal{H}_{jj}(t), \quad j = \overline{1, m}.$$

Таким образом, теорема 3.2 утверждает, что система (3.1) является алгебраически вполне приводимой. При некоторых дополнительных предположениях о структуре матрицы $\mathcal{H}(t)$ оказывается, что она функционально-коммутативна.

Критерий Лаппо — Данилевского (3.4) был обобщен в работе [109], а дальнейшее его обобщение проведено в работах [48, 49].

Теорема 3.3 [49]. *Пусть матрица $\mathcal{H}(t)$ консервативна в интервале (a, b), имеет всюду дифференцируемые (или абсолютно непрерывные) коэффициенты и выполняются следующие условия:*

1) *матрица $\mathcal{H}(t)\dot{\mathcal{H}}(t) - \dot{\mathcal{H}}(t)\mathcal{H}(t) \equiv \mathcal{N}(t)$ нильпотентна, т. е. существует целое число $k \leqslant n$ такое, что $\mathcal{N}^k \equiv 0$;*

2) *корневые подпространства $L_j = \{\xi \mid \mathcal{N}^j\xi = 0\}$, $j = \overline{1, m}$, удовлетворяют условию*

$$\mathcal{N}\mathcal{H}L_j \equiv 0 \bmod (L_1, \ldots, L_{j-1}), \quad j = \overline{1, m}, \quad L_0 \overset{\text{def}}{\equiv} 0; \qquad (3.6)$$

тогда существует постоянная матрица S, которая приводит матрицу $\mathcal{H}(t)$ к квазитреугольному виду

$$S^{-1}\mathcal{H}(t)S = \begin{Vmatrix} \mathcal{H}_{11}(t) & \mathcal{H}_{12}(t) & \dots & \mathcal{H}_{1m}(t) \\ 0 & \mathcal{H}_{22}(t) & \dots & \mathcal{H}_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{H}_{mm}(t) \end{Vmatrix}, \qquad (3.7)$$

где каждый блок имеет единственное собственное значение и коммутирует со своей производной: $\mathcal{H}_{jj}(t)\dot{\mathcal{H}}_{jj}(t) \equiv \dot{\mathcal{H}}_{jj}(t)\mathcal{H}_{jj}(t)$, $j = \overline{1, m}$.

Сравнивая теорему 3.3 с теоремой 3.2, видим, что она действительно является ее обобщением. Если выполняется условие (3.3), то это значит, что $\mathcal{N}(t) \equiv 0$ и все подпространства L_j сливаются с пространством L, в котором действует матрица $\mathcal{H}(t)$.

Пример 3.1. Рассмотрим систему (3.1) с матрицей

$$\mathcal{H}(t) = f_1(t)\mathcal{F}_1 + f_2(t)\mathcal{F}_2, \quad f_1 \neq \pm f_2,$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 \neq \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$, и поэтому матрица не является функционально-коммутативной; для матрицы $\mathcal{H}(t)$ также не выполняется критерий Лаппо — Данилевского, так как $\dot{\mathcal{H}}\mathcal{H} \neq \mathcal{H}\dot{\mathcal{H}}$. Проверим выполняемость условий теоремы 3.3. Подпространство $L_1 = \{\eta \mid (\dot{\mathcal{H}}\mathcal{H} - \mathcal{H}\dot{\mathcal{H}})\eta = 0\}$, натянутое на векторы $\eta_1 = \operatorname{colon}\|\gamma_1(t), 0, 0, 0\|$, $\eta_2 = \operatorname{colon}\|0, \gamma_2(t), 0, 0\|$, инвариантно относительно $\mathcal{H}(t)$, так как $\mathcal{N}\mathcal{H}(t)\eta_1 \equiv 0$, $\mathcal{N}\mathcal{H}(t)\eta_2 \equiv 0$. Условия теоремы 3.3 выполняются, и подпространство L_1 имеет неподвижный базис $\eta_{10} = \operatorname{colon}\|1, 0, 0, 0\|$, $\eta_{20} = \operatorname{colon}\|0, 0, 1, 0\|$. Тогда, например, матрица

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

приводит $\mathcal{H}(t)$ к квазитреугольному виду

$$S_1^{-1}\mathcal{H}(t)S_1 = \begin{Vmatrix} 0 & f_1 & 0 & 2f_2 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_2 & -f_1 \\ 0 & 0 & -f_1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ 0 & \mathcal{H}_{22} \end{Vmatrix},$$

причем $\mathcal{H}_1 = f_1\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ является функционально-коммутативной матрицей: $\dot{\mathcal{H}}_{11}\mathcal{H}_{11} \equiv \mathcal{H}_{11}\dot{\mathcal{H}}_{11}$.

§ 4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим условия декомпозируемости нелинейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) \tag{4.1}$$

в области $\tilde{G} = I \times G$, $t \in I$, $x \in G$, $I \in \mathrm{R}$, $G \in \mathrm{R}^n$. Пусть системе (4.1) соответствует обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ с n базисными операторами

$$\mathrm{X}_1, \ \ldots, \ \mathrm{X}_n, \quad \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.2}$$

Предполагается также, что система (4.1) и ее обертывающая алгебра рассматриваются на многообразии $\mathfrak{D}(G)$.

Разобьем вектор переменных $x = \operatorname{colon} \| x_1, \ldots, x_n \|$ на группы векторов следующим образом:

$$x = \operatorname{colon} \| x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ \ldots, \ x_{\nu_g} \|,$$

где $x_{\nu_1} = \operatorname{colon} \| x_{1\nu_1}, \ldots, x_{\nu_1\nu_1} \|, \ \ldots, x_{\nu_g} = \operatorname{colon} \| x_{1\nu_g}, \ldots, x_{\nu_g\nu_g} \|$ и выполняются равенства $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_g = n$.

Определение 4.1. Система (4.1) называется вполне приводимой (декомпозируемой) в области G (loc G), если существует обратимая замена переменных

$$z = \psi(x), \quad x = \psi^{-1}(z), \quad \psi, \psi^{-1} \in \mathfrak{D}(G), \tag{4.3}$$

где $z = \operatorname{colon} \| z_1, \ldots, z_n \|$, $\psi = \operatorname{colon} \| \psi_1, \ldots, \psi_n \|$, которая преобразует исходную систему к совокупности независимых подсистем по новым переменным

$$\begin{gathered} \frac{dz_{1\nu_j}}{dt} = f_{1\nu_j}(z_{1\nu_j}, \ \ldots, \ z_{\nu_j\nu_j}); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dz_{\nu_j\nu_j}}{dt} = f_{\nu_j\nu_j}(z_{1\nu_j}, \ \ldots, \ z_{\nu_j\nu_j}), \quad i = \overline{1, \nu}, \quad j = \overline{1, g}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Частным случаем вполне приводимых систем является диагонализируемая система

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_i), \quad i = \overline{1, n},$$

т. е. распадающаяся на n независимо интегрируемых подсистем.

Определение 4.2. Система (4.2) называется приводимой (агрегируемой) в области G (loc G), если существует обратимая замена (4.3), преобразующая исходную систему к совокупности g последовательно интегрируемых подсистем

$$\frac{dz_{\nu_1}}{dt} = f_{\nu_1}(z_{\nu_1});$$

$$\frac{dz_{\nu_2}}{dt} = f_{\nu_2}(z_{\nu_1}, z_{\nu_2}); \tag{4.5}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dz_{\nu_g}}{dt} = f_{\nu_g}(z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_g}),$$

где $f_{\nu_j} = \operatorname{colon} \| f_{1\nu_j}, \dots, f_{\nu_j\nu_j} \|$, $z_{\nu_j} = \operatorname{colon} \| z_{1\nu_j}, \dots, z_{\nu_j\nu_j} \|$.

Частным случаем приводимой (агрегируемой) системы является триангулизируемая

$$\frac{dz_1}{dt} = f_1(z_1), \quad \frac{dz_2}{dt} = f_2(z_1, z_2), \quad \dots, \quad \frac{dz_n}{dt} = f_n(z_1, \dots, z_n).$$

Системы, диагонализируемые и триангулизируемые, интегрируются в квадратурах. Такие системы будем называть разрешимыми.

Прежде чем перейти к формулировке условий приводимости (вполне приводимости), введем некоторые необходимые понятия. Будем рассматривать действие обертывающей группы $\mathfrak{G}$ на элементах многообразия $\mathfrak{D}(G)$. Если $h(x')$ — функция из $\mathfrak{D}(G)$ и $x' = \exp(s\mathbf{X})\,x$ — некоторая однопараметрическая подгруппа из $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$, то результат действия группы на h, т. е. функция $T_{\mathbf{X}}h$, $T_{\mathbf{X}} \in \mathfrak{G}(\mathbf{X})$, принадлежит $\mathfrak{D}(G)$ (см. § 2 гл. 1). Или, если использовать прямую подстановку, $h(\exp(s\mathbf{X})\,x) = \exp(s\mathbf{X})\; h(x) \in \mathfrak{D}(G)$.

Таким образом, множество элементов, где действует группа $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$, — функции многообразия $\mathfrak{D}(G)$. Функция $q(x')$ называется неподвижной точкой множества $\mathfrak{D}(G)$ относительно однопараметрической группы $\exp(s\mathbf{X})$, если имеет место тождество $q(\exp(s\mathbf{X})\,x) \equiv q(x)$.

Теорема 4.1. *Для того чтобы элемент $q(x)$ был неподвижной точкой однопараметрической подгруппы $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$ с оператором $\mathbf{X} \in \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно выполнение тождества*

$$\mathbf{X}q(x) \equiv 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством точечности преобразований из $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$ и представим оператор $\exp(s\mathbf{X})$ в виде ряда:

$$\exp(s\mathbf{X})\,g(x) \equiv g(x) + \frac{s}{1!}\mathbf{X}g(x) + \frac{s^2}{2!}\mathbf{X}^2 g(x) + \cdots$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях параметра и, следовательно, всегда выполняется тождество (4.6). ■

Решения уравнения $\mathbf{X}f = 0$ будем называть инвариантами однопараметрической подгруппы $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$ с оператором $\mathbf{X}$. Если функция $q(x)$ — инвариант групп $\mathfrak{G}(\mathbf{X})$ и $\mathfrak{G}(\mathbf{Y})$ одновременно, то она удовлетворяет уравнениям $\mathbf{X}q(x) \equiv 0$, $\mathbf{Y}g(x) \equiv 0$ и, как следует из тождества Якоби (1.6) гл. 1, уравнению $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\, q(x) \equiv 0$. Операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ порождают некоторую подалгебру $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$. Этой подалгебре соответствует подгруппа $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}$. Если $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$ — базисные операторы этой группы, то, очевидно, $\mathbf{X}_j\, q(x) \equiv 0$, $j = \overline{1, r}$, и соответственно $q(x)$ — инвариант всех однопараметрических подгрупп из $\mathfrak{G}_1$.

Группа $\mathfrak{G}$ называется транзитивной группой преобразования множества $\mathfrak{D}(G)$, если для любых двух элементов $h(x), q(x) \in \mathfrak{D}(G)$ найдется такой элемент $T_Z \in \mathfrak{G}$, что $T_Z h(x) = q(x)$. Группу, не являющуюся транзитивной, называют **интранзитивной**. Множество (в рассматриваемом случае многообразие) $\mathfrak{D}(G)$, в котором действует транзитивная группа преобразований $\mathfrak{G}$, называется **однородным пространством** с группой преобразований $\mathfrak{G}$. Приведем условие транзитивности группы $\mathfrak{G}$.

Теорема 4.2. *Группа $\mathfrak{G}$ на многообразии $\mathfrak{D}(G)$, ($\mathfrak{D}(\mathrm{loc}\, G)$) транзитивна тогда и только тогда, когда базис обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$ содержит n линейно несвязных операторов.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\dim \mathfrak{B} = r$. Тогда система $\mathbf{X}_j f = 0$, $j = \overline{1, r}$, имеет, по крайней мере $\mathrm{loc}\, G$, $n - r$ независимых решений $u_1(x), \ldots, u_{n-r}(x)$. Если функция $v(x) \not\equiv 0$ не является инвариантом группы $\mathfrak{G}$, то, например, функция $u_1(x)$ не может быть преобразована в $v(x)$. Действительно, любой оператор $\mathbf{Z}$ из $\mathfrak{B}$ может быть представлен суммой $\mathbf{Z} = \xi_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \xi_r \mathbf{X}_r$, где $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — произвольные функции из $\mathfrak{D}(G)$. Но тогда $\mathbf{Z}\, u_1(x) \equiv \equiv 0$ и $v(x) \equiv 0$.

Достаточность. Пусть $\dim \mathfrak{B} = n$. Тогда система уравнений $\mathbf{X}_1 p(x) = h_1(x), \ldots, \mathbf{X}_n p(x) = h_n(x)$ всегда имеет решение при произвольном векторе $h(x) = \| h_1(x), \ldots, h_n(x \|$. Действительно, эту систему легко превратить в нормальную, если разрешить ее относительно $\partial p/\partial x_1, \ldots, \partial p/\partial x_n$. Предположим, что $u(x)$, $v(x)$ — произвольные функции из $\mathfrak{D}(G)$. Требуется подобрать оператор $\mathbf{Z} = \xi_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \xi_n \mathbf{X}_n$, удовлетворяющий условию $\mathbf{Z}\, u(x) = v(x)$. Не теряя общности можно считать, что $\mathbf{X}_1 u(x) \not\equiv 0$ для всех $x \in G$. Обозначим через $\rho_j(x)$ функцию, удовлетворяющую условию $\| \mathbf{X}_1 \rho_j, \ldots, \mathbf{X}_n \rho_j \| = = \| \underbrace{00\ldots, 1}_{j}, \ldots, 0, 0 \|$, тогда операторы $\mathbf{X}_i$ аннулируют $\rho_j(x)$ при всех $i = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и $\mathbf{X}_i \rho_j = 1$.

Рассмотрим линейную алгебраическую систему уравнений $\mathbf{Z} u(x) = v(x)$, $\mathbf{Z} \rho_j(x) = 0$ относительно вектора переменных $\xi \equiv \| \xi_1, \ldots, \xi_n \|$. При этом индекс j будет изменяться от 2 до n. Нетрудно убедиться, что определитель данной системы равен $\mathbf{X}_1 u(x)$ и она однозначно разрешима. Компоненты вектора ξ принадлежат $\mathfrak{D}(G)$. ■

Следствием доказанной теоремы является следующий результат.

Теорема 4.3. *Группа $\mathfrak{G}$, действующая на многообразии $\mathfrak{D}(G)$ ($\mathfrak{D}(\mathrm{loc}\, G)$), интранзитивна тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *базис обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$ содержит $r < n$ несвязных операторов* ($\dim \mathfrak{B} < n$);

2) *группа $\mathfrak{G}$ имеет нетривиальные инварианты в $\mathfrak{D}(G)$.*

Пусть в обертывающей алгебре $\mathfrak{B}$ существует подалгебра $\mathfrak{B}^{(r)} = = \mathfrak{B}^{(r)}\{\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_r\}$, порожденная r линейно несвязными операторами над $\mathfrak{D}(G)$. Эта алгебра порождает некоторую подгруппу $\mathfrak{G}^{(r)} \subset \subset \mathfrak{G}$. Подгруппа $\mathfrak{G}^{(r)}$ называется **нормальным делителем** группы $\mathfrak{G}$ (или **инвариантной подгруппой**), если для любого преобразования

$T_{\mathrm{X}} \in \mathfrak{G}$ и любого преобразования $T_{\mathrm{Y}} \in \mathfrak{G}^{(r)}$ имеет место соотношение

$$T_{\mathrm{X}} T_{\mathrm{Y}} T_{\mathrm{X}}^{-1} \in \mathfrak{G}^{(r)}. \tag{4.7}$$

Другими словами, нормальный делитель (в целом, а не его элементы) остается неизменным при преобразованиях типа (4.7). Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа позволяет выразить этот факт на языке алгебры Ли $\mathfrak{B}$. Запишем преобразование (4.7) подробнее:

$$e^{(\mathrm{Y}')} x_j \equiv e^{(s\mathrm{X})} e^{(s\mathrm{Y})} e^{(-s\mathrm{X})} x_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Преобразование $T_{\mathrm{Y}} \equiv e^{(s\mathrm{Y})}$ определяется своим оператором Y. Поэтому достаточно рассмотреть тождество $\mathrm{Y}'_{x_j} \equiv e^{(s\mathrm{X})} \mathrm{Y} e^{(-s\mathrm{X})} x_j$. Согласно формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. § 3 гл. 1) справедливо тождество

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} - \frac{s}{1!} \mathrm{Y}^{(1)} + \frac{s^2}{2!} \mathrm{Y}^{(2)} - \frac{s^3}{3!} \mathrm{Y}^{(3)} + \cdots$$

Для того чтобы $\mathrm{Y}' \in \mathfrak{B}^{(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $[\mathrm{Y}, \mathrm{X}]$ был связан с базисом алгебры $\mathfrak{B}^{(r)}$, т. е.

$$[\mathrm{Y}, \mathrm{X}] \equiv \alpha_1 \mathrm{Y}_1 + \cdots + \alpha_r \mathrm{Y}_r, \tag{4.8}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — некоторые функции переменных x. Подалгебра $\mathfrak{B}^{(r)} \subset \mathfrak{B}$ называется идеалом алгебры $\mathfrak{B}$, если при всех $\mathrm{X} \in \mathfrak{B}$ и любом $\mathrm{Y} \in \mathfrak{B}^{(r)}$ скобка Пуассона $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ линейно связна с базисом $\mathfrak{B}^{(r)}$, т. е. имеет место равенство (4.8). Это тождество можно также записать сокращенно в виде $[\mathfrak{B}^{(r)}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{B}^{(r)}$.

Очевидно, что справедливо также обратное утверждение: любому идеалу в $\mathfrak{B}^{(r)} \subset \mathfrak{B}$ соответствует нормальный делитель $\mathfrak{G}^{(r)} \subset \mathfrak{G}$. Если воспользоваться введенной в § 4 гл. 1 терминологией, то можно сказать, что идеал допускает операторы из алгебры $\mathfrak{B}$. Подытожим полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4.4. *Любому идеалу $\mathfrak{B}^{(r)} \subset \mathfrak{B}$ соответствует нормальный делитель $\mathfrak{G}^{(r)}$ группы $\mathfrak{G}$ и наоборот.*

Выше было показано, что если группа $\mathfrak{G}$ транзитивно действует на множестве $\mathfrak{D}(G)$, то не существует функций, инвариантных относительно всех элементов группы $\mathfrak{G}$. Однако может случиться, что имеется некоторый набор функций $\mathfrak{M}_1 = \{u_1(x), \ldots, u_l(x)\}$, который переводится элементами группы $\mathfrak{G}$ в себя:

$$\begin{gathered} u_j(e^{(s\mathrm{X})} x) = F_j(s, u_1(x), \ldots, u_l(x)), \quad j = \overline{1, l}, \\ F_j \in \mathfrak{D}(G), \quad \mathrm{X} \in \mathfrak{B}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Множество $\mathfrak{M}_1$ носит название системы импримитивности, а сама группа $\mathfrak{G}$ называется импримитивной на множестве $\mathfrak{D}(G)$.

Лемма 4.1. *Условие (4.9) эквивалентно условию $\mathrm{X}u_j(x) \in \mathfrak{M}_1$, $j = \overline{1, l}$.*

Доказательство. *Достаточность* очевидна. Для доказательства *необходимости* разложим правую часть равенства (4.9) в ряд по s:

$$F_j = F_0 + \frac{s}{1!} F_{j1} + \frac{s^2}{2!} F_{j2} + \cdots, \tag{4.10}$$

где $F_0 = F(0, u_1, \ldots, u_l)$, $F_{jk} = d^k F_j/ds^k|_{s=0}$ — функции $u_1, \ldots, u_l$. Это возможно, так как ряд $u_j(e^{(s\mathbf{X})}x) = e^{(s\mathbf{X})}u_j(x)$ сходится в G и принадлежит $\mathfrak{D}(G)$. Подставляя ряд (4.10) и ряд $e^{(s\mathbf{X})}u_j(x) = u_j(x) + \frac{s}{1!}\mathbf{X}u_j(x) + \cdots$ в тождества (4.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получаем $F_0 = F(0, u_1, \ldots, u_l) \equiv u_j(x)$, $F_{jk}(u_1, \ldots, u_l) \equiv \mathbf{X}^k u_j(x)$. ■

Выясним условия импримитивности группы $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{D}(G)$.

Теорема 4.5. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$, действующая на $\mathfrak{D}(G)$, была импримитивна, необходимо и достаточно, чтобы она имела собственный нормальный делитель $\mathfrak{G}^{(r)} \subset \mathfrak{G}$, $r \neq n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $u_1(x), \ldots, u_l(x)$ — максимальное число независимых функций из $\mathfrak{M}_1$. Дополним их $n-l$ независимыми функциями $u_{l+1}(x), \ldots, u_n(x)$ из $\mathfrak{D}(G)$ и сделаем в $\mathfrak{B}$ замену переменных $y_j = u_j(x)$, $j = \overline{1, n}$. В результате базисные операторы $\mathfrak{G}$ примут вид

$$\mathbf{X}_j = \varphi_{1j}(y_1, \ldots, y_l)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \varphi_{lj}(y_1, \ldots, y_l)\frac{\partial}{\partial y_l} + \\ + \varphi_{l+1,j}(y)\frac{\partial}{\partial y_{l+1}} + \cdots + \varphi_{nj}(y)\frac{\partial}{\partial y_n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Операторы

$$\mathbf{Y}_j = \varphi_{1j}(y_1, \ldots, y_l)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \varphi_{lj}(y_1, \ldots, y_l)\frac{\partial}{\partial y_l}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.11}$$

порождают подалгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{Y}) \subset \mathfrak{B}$ размерности l. В самом деле, если бы в $\mathfrak{B}(\mathbf{Y})$ имелось $l' < l$ несвязных операторов $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{l'}$, то это означало бы, что система $\mathbf{Y}_j f = 0$, $j = \overline{1, l'}$, имеет нетривиальные решения $v_\rho(y_1, \ldots, y_l) = c_\rho$, $\rho = l - l'$. Но тогда функции $y_l = u_j(x)$, $j = \overline{1, l}$, не могут быть независимыми. Следовательно, $l' = l$. Будем считать, что первые l операторов (4.11) — линейно несвязные.

Операторы

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}_j = \varphi_{l+1,j}(y)\frac{\partial}{\partial y_{l+1}} + \cdots + \varphi_{nj}(y)\frac{\partial}{\partial y_n}, \quad j = \overline{1, n},$$

порождают подалгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{Z}) \in \mathfrak{B}$. Нетрудно показать, что среди них имеется ровно $n-l$ линейно несвязных. Предположим, что это операторы $\mathbf{Z}_{l+1}, \ldots, \mathbf{Z}_n$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$[\mathbf{Z}_j, \mathbf{Y}_i] \equiv \sum_{n=l+1}^{n} c_{ji}^h Z_h.$$

Тем самым доказано, что $\mathfrak{B}(\mathbf{Z})$ — идеал в $\mathfrak{B}$ и подгруппа $\mathfrak{G}(\mathbf{Z}) \in \mathfrak{G}$, порожденная этим идеалом, — нормальный делитель.

Достаточность. Пусть операторы $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_r \in \mathfrak{B}$, $r = n - l$, образуют некоторую подалгебру $\mathfrak{B}^{(r)} \in \mathfrak{B}$, являющуюся идеалом в $\mathfrak{B}$. Тогда

$$[\mathbf{Z}_{i'}, \mathbf{Z}_{j'}] = \sum_{h=1}^{r} c_{i'j'}^{h} \mathbf{Z}_h, \quad i', j' = \overline{1, r};$$
$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_j] = \sum_{h=1}^{r} c_{ij}^{h} \mathbf{Z}_h, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{4.12}$$

Обозначим через $u_1(x), \ldots, u_l(x)$ l независимых решений полной системы $\mathbf{Z}_i f = 0$, $i = \overline{1, r}$, на многообразии $\mathfrak{D}(G)$. Из тождеств (4.12) следует, что $\mathbf{Z}_j \mathbf{X}_i u_k(x) = 0$, $k = \overline{1, l}$, и $\mathbf{X}_i u_k(x) = F_{ik}(u_1, \ldots$ $\ldots, u_l)$. Тем самым доказано, что функции $u_1, \ldots, u_l$ порождают систему импримитивности $\mathfrak{M}_1$. ■

Перейдем к доказательству основных теорем о приводимости.

Теорема 4.6. *Пусть обертывающая группа $\mathfrak{G}$ системы (4.1) интранзитивна над $\mathfrak{D}(G)$. Система (4.1) вполне приводима (декомпозируема) тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1. Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ системы может быть представлена в виде прямой суммы идеалов:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)} + \cdots + \mathfrak{B}^{(g)}, \quad [\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{B}^{(j)}] \equiv 0, \quad i \neq j;$$
$$[\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{B}^{(i)}] \in \mathfrak{B}^{(i)}, \quad \dim \mathfrak{B}^{(i)} = \nu_i, \quad \nu_1 + \cdots + \nu_g = n. \tag{4.13}$$

2. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ системы имеет g систем импримитивности $\mathfrak{M}_j$, определяемых функциями

$$\mathfrak{M}_j = \{u_{1\nu_j}(x), \ldots, u_{\nu_j \nu_i}(x)\}, \quad j = \overline{1, g}; \tag{4.14}$$

$$T_{\mathbf{X}} u_{i\nu_j}(x) = \Phi_{\mathbf{X} i \nu_j}(u_{1\nu_j}, \ldots, u_{\nu_j \nu_j}), \quad i = \overline{1, \nu}, \ \forall \mathbf{X} \in \mathfrak{N}; \ T_{\mathbf{X}} \in \mathfrak{G}. \tag{4.15}$$

3. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ обладает композиционным рядом

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(g-1)}, 1, \tag{4.16}$$

составленным из нормальных делителей, и рядом фактор-групп

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1 \ldots, \mathfrak{A}_{g-1}, \mathfrak{A}_g, \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G}^{(j)}/\mathfrak{G}^{(j+1)},$$

причем $\dim \mathfrak{N}_j = \nu_j$, и все члены ряда являются нормальными делителями, коммутирующими между собой. Замена переменных

$$z_{1\nu_j} = u_{1\nu_j}(x), \ldots, z_{\nu_j \nu_j} = u_{\nu_j \nu_j}(x), \quad j = \overline{1, g}, \tag{4.17}$$

преобразуют систему (4.1) к приведенной (4.4).

Доказательство. Рассмотрим условие 2. Докажем *достаточность*. Обозначим $u_{\nu_j} \equiv \| u_{1\nu_j}, \ldots, u_{\nu_j \nu_j} \|$. Операторы $\mathbf{X}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{X}_n$, составляющие базис, переводят функции (4.14) в функции от $u_{i\nu_j}$, i, $j=\overline{1,\ g}$:

$$\mathbf{X}_p u_{1\nu_j}(x)=F^{(p)}_{1\nu_j}(u_{\nu_j}),\ \ldots,\ \mathbf{X}_p u_{\nu_j\nu_j}(x)=F^{(p)}_{\nu_j\nu_j}(u_{\nu_j}),\quad p=\overline{1,\ n}.$$

В правых частях выписанных соотношений стоят либо нули, либо функции от u_{ν_j}, но найдется по меньшей мере одна функция из $F^{(p)}_{1\nu_j}$, ..., $F^{(p)}_{\nu_j\nu_j}$, не равная тождественно нулю. В новых переменных оператор примет вид

$$\mathbf{X}_p=\sum_{j=1}^{g}\left(F^{(p)}_{1\nu_j}(z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}}+\cdots+F^{(p)}_{\nu_j\nu_j}(z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}}\right),\quad j=\overline{1,\ n}.\quad (4.18)$$

Оператор $\mathbf{U}\in\mathfrak{B}$ и в новых переменных имеет идентичную структуру:

$$\mathbf{U}=\sum_{j=1}^{g}\left(\bar{\omega}_{1\nu_j}(z_{\nu_1})\frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}}+\cdots+\bar{\omega}_{\nu_j\nu_j}(z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}}\right).\quad (4.19)$$

С помощью оператора (4.19) переходим к приведенной системе (4.4).

Необходимость условий 2 следует из вида операторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}_p$, так как системы импримитивности порождаются функциями

$$\mathfrak{M}=\{z_{1\nu_j},\ \ldots,\ z_{\nu_j\nu_j}\},\quad j=\overline{1,\ g}.$$

Перейдем к доказательству эквивалентности условий 1 и 2. Покажем, что при выполнении соотношений (4.13) можно построить системы импримитивности (4.14). Пусть базис идеала $\mathfrak{B}^{(j)}$ образован ν_j несвязными операторами $\mathbf{X}_{1\nu_j}$, ..., $\mathbf{X}_{\nu_j\nu_j}$. Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{X}_{1\nu_1}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_1\nu_1}f=0,\quad (\Sigma_1);$$
$$\mathbf{X}_{1\nu_2}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_2\nu_2}f=0,\quad (\Sigma_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{X}_{1\nu_g}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}f=0,\quad (\Sigma_g).$$

Эта система образована набором полных систем (Σ_1), (Σ_2), ..., (Σ_g) и содержит n линейно несвязных операторов. Следовательно, ее единственное решение $f=\mathrm{const}$ тривиально. В то же время, система, составленная из подсистем

$$\mathbf{X}_{1\nu_1}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_1\nu_1}f=0,\quad (\Sigma_1);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{1\nu_{i-1}}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_{i-1}\nu_{i-1}}f=0,\quad (\Sigma_{i-1});$$
$$\mathbf{X}_{1\nu_{i+1}}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_{i+1}\nu_{i+1}}f=0,\quad (\Sigma_{i+1});$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{X}_{1\nu_g}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}f=0,\quad (\Sigma_g),$$

имеет $n - (\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1} + \nu_{i+1} + \ldots + \nu_g) = \nu_i$ независимых решений, которые обозначим

$$u_{1\nu_i}(x), \ \ldots, \ u_{\nu_i\nu_i}(x), \quad i = \overline{1, g}. \tag{4.20}$$

Так как операторы $\mathbf{X}_{1\nu_i}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}$ и $\mathbf{X}_{1\nu_j}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_j\nu_j}$ при $i \neq j$ коммутативны: $[\mathbf{X}_{i'}, \mathbf{X}_{j'}] \equiv 0$, $i' \in \{1\nu_i, \ldots, \nu_i\nu_i\}$, $j' \in \{1\nu_j, \ldots, \nu_j\nu_j\}$, то для функций (4.20) получим тождества

$$\mathbf{X}_{i'}\mathbf{X}_{j'}u_{1\nu_i}(x) \equiv 0, \ \ldots, \ \mathbf{X}_{i'}\mathbf{X}_{j'}u_{\nu_i\nu_i}(x) \equiv 0,$$

из которых немедленно следует, что $\mathbf{X}_{j'}u_{1\nu_i}(x), \ldots, \mathbf{X}_{j'}u_{\nu_i\nu_i}(x)$ — функции u_{ν_i}:

$$\mathbf{X}_{j'}u_{1\nu_i}(x) = \Phi_{1\nu_i}^{(j')}(u_{\nu_i}), \ \ldots, \ \mathbf{X}_{j'}u_{\nu_i\nu_i}(x) = \Phi_{\nu_i\nu_i}^{(j')}(u_{\nu_i}).$$

Полученные формулы доказывают, что функции (4.20) операторами из $\mathfrak{B}^{(i)}$ переводятся в себя, а операторами из $\mathfrak{B}^{(j)}$, $i \neq j$ аннулируются. Замена переменных (4.17), где в качестве $u_{1\nu_j}(x), \ldots, u_{\nu_j\nu_j}(x)$ следует выбрать функции (4.20), преобразует операторы $\mathbf{X}_p$ к виду (4.18). Следовательно, функции (4.20) порождают системы импримитивности группы со свойствами (4.15). Получение условий 2 из условий 1 очевидно, если воспользоваться приведенным видом (4.18) операторов $\mathbf{X}_p$. Докажем, что из условий 1 следуют условия 3. Обозначим через $\mathfrak{B}_{\nu_j+\ldots+\nu_g} \equiv \mathfrak{B}^{(j)} + \ldots + \mathfrak{B}^{(g)}$, $j = \overline{1, g}$, идеал в $\mathfrak{B}$ и через $\mathfrak{G}^{(j-1)}$ — соответствующую ему подгруппу в $\mathfrak{G}$, которая согласно теореме 4.4 является нормальным делителем в $\mathfrak{G}$. В полученном таким образом композиционном ряде (4.16) фактор-алгебрам $\mathfrak{B}_{\nu_{j+1}+\ldots+\nu_g}/\mathfrak{B}_{\nu_j+\ldots+\nu_g} \equiv \mathfrak{B}^{(j)}$ соответствуют подгруппы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}^{(j)})$, являющиеся его фактор-группами $\mathfrak{M}_j$. Обратный переход от условий 3 к условиям 1 также базируется на теореме 4.4, устанавливающей взаимно однозначное соответствие между идеалами в $\mathfrak{B}$ и нормальными делителями в $\mathfrak{G}$. ■

Следствие 4.1. Для того чтобы система (4.1) была диагонализируема, необходимо и достаточно, чтобы в условиях теоремы 4.6 алгебры $\mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(g)}$ были одномерны и их базисные элементы $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ коммутировали между собой: $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] \equiv 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

Сформулируем утверждение о приводимости (агрегируемости) исходной системы.

Теорема 4.7. *Пусть обертывающая группа $\mathfrak{G}$ системы (4.1) транзитивна над $\mathfrak{D}(G)$. Система (4.1) приводима (агрегируема) тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1. Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ системы имеет цепочку идеалов

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_0, \ \mathfrak{B}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{B}_{g-1};$$

$$\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{g-1}, \quad [\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_{j+p}] \subset \mathfrak{B}_{j-p}, \quad p \geqslant 1,$$

в которой фактор-алгебры $\mathfrak{B}^{(j)} = \mathfrak{B}_{j-1}/\mathfrak{B}_j$ имеют размерности ν_j, $\nu_1 + \ldots + \nu_g = n$.

2. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ системы имеет g систем импримитивности $\mathfrak{M}_j$, определяемых функциями

$$\mathfrak{M}_j = \{u_{1\nu_1}(x),\ \ldots,\ u_{\nu_1\nu_1}(x),\ \ldots,\ u_{1\nu_j}(x),\ \ldots,\ u_{\nu_j\nu_j}(x)\},\quad j = \overline{1,\ g},$$

таких, что для всех $T_X \in \mathfrak{G}$ имеют место соотношения

$$T_X u_{1\nu_j}(x) = \Phi_{X1\nu_j}(u_{1\nu_1},\ \ldots,\ u_{\nu_1\nu_1},\ u_{1\nu_j},\ \ldots,\ u_{\nu_j\nu_j});$$

$$T_X u_{\nu_j\nu_j}(x) = \Phi_{X\nu_j\nu_j}(u_{1\nu_1},\ \ldots,\ u_{\nu_1\nu_1},\ \ldots,\ u_{1\nu_j},\ \ldots,\ u_{\nu_j\nu_j}),\quad j = \overline{1,\ g}.$$

3. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ обладает композиционным рядом $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(g-1)}, 1$, составленным из нормальных делителей, и рядом фактор-групп $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{g-1}, \mathfrak{A}_g$; $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{G}^{(j)}/\mathfrak{G}^{(j+1)}$, $\dim \mathfrak{A}_j = \nu_j$, причем $\mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_{j+p} \subset \mathfrak{A}_{j+p}$, $p \geqslant 1$.

Замена переменных

$$z_{1\nu_j} = u_{1\nu_j}(x),\ \ldots,\ z_{\nu_j\nu_j} = u_{\nu_j\nu_j}(x),\quad j = \overline{1,\ g}, \tag{4.21}$$

преобразует систему (4.1) к приведенной (4.5).

Доказательство. Рассмотрим условие 2. Замена переменных (4.21) преобразует базисные операторы $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ алгебры $\mathfrak{B}$ к виду

$$\mathbf{X}_p = \sum_{j=1}^{g}\left[F_{1\nu_j}^{(p)}(z_{\nu_1},\ \ldots,\ z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}} + \cdots + F_{\nu_j\nu_j}^{(p)}(z_{\nu_1},\ \ldots\ z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}}\right]. \tag{4.22}$$

Оператор $\mathbf{U} \in \mathfrak{B}$ и в новых переменных имеет идентичную структуру:

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{g}\left[\bar{\omega}_{1\nu_j}(z_{\nu_1},\ \ldots,\ z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}} + \cdots + \bar{\omega}_{\nu_j\nu_j}(z_{\nu_1},\ \ldots,\ z_{\nu_j})\frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}}\right]. \tag{4.23}$$

По оператору (4.23) легко найти вид приведенной системы (4.5). Необходимость условия 2 сразу следует из вида приведенных операторов (4.22) базиса.

Покажем, как при выполнении условия 1 найти системы импримитивности (4.21). Обозначим базисные элементы фактор-алгебр $\mathfrak{B}^{(j)}$ через $\mathbf{X}_{1\nu_j}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_j\nu_j}$. Очевидно, что подалгебра $\mathfrak{B}_1$ может быть образована элементами из $\mathfrak{B}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(g)}$.

Рассмотрим полную систему уравнений в частных производных

$$\mathbf{X}_{1\nu_2}f = 0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_2\nu_2}f = 0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{1\nu_g}f = 0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}f = 0.$$

Эта система замкнута и имеет ν_1 независимых решений $u_{1\nu_1}(x), \ldots, u_{\nu_1\nu_1}(x)$. Операторы из $\mathfrak{B}_1$ допускают операторы $\mathfrak{B}^{(1)}$:

$$[\mathbf{X},\ \mathbf{Y}] = \sum_{j=2}^{g} c_{1\nu_j}\mathbf{X}_{1\nu_j} + \cdots + c_{\nu_j\nu_j}\mathbf{X}_{\nu_j\nu_j}\quad \forall\, \mathbf{X} \in \mathfrak{B}_1 \text{ и } \mathbf{Y} \in \mathfrak{B}^{(1)}.$$

Как видно из выписанных равенств, функции $u_{1\nu_1}, \ldots, u_{\nu_1\nu_1}$ переводятся операторами из $\mathfrak{B}^{(1)}$ в функции от $u_{1\nu_1}, \ldots, u_{\nu_1\nu_1}$, а следовательно, и любым оператором $\mathbf{X} \in \mathfrak{B}$ в функции от $u_{1\nu_1}, \ldots, u_{\nu_1\nu_1}$.

Далее, рассмотрим систему

$$\mathbf{X}_{1\nu_3}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_3\nu_3}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{1\nu_g}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}f=0,$$

образованную из базисных операторов подалгебры $\mathfrak{B}_2$. В качестве ее решений можно выбрать ν_1 функций $u_{1\nu_1}, \ldots, u_{\nu_1\nu_1}$, дополнив их еще ν_2 независимыми функциями $u_{1\nu_2}, \ldots, u_{\nu_2\nu_2}$. Система функций

$$\mathfrak{M}_2=\{u_{1\nu_1},\ \ldots,\ u_{\nu_1\nu_1},\ u_{1\nu_2},\ \ldots,\ u_{\nu_2\nu_2}\}$$

образует систему импримитивности. Действительно, так как $\mathfrak{B}_2$ — идеал в $\mathfrak{B}$, то для всех $\mathbf{X}\in\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathbf{Y}\in\mathfrak{B}^{(2)}$ имеем

$$[\mathbf{X},\ \mathfrak{B}^{(1)}]\in\mathfrak{B}_2,\quad [\mathbf{Y},\ \mathfrak{B}^{(2)}]\in\mathfrak{B},$$

и, как следствие, функции из $\mathfrak{M}_2$ переводятся в функции от $u_{1\nu_1}, \ldots$
$\ldots, u_{\nu_1\nu_1}, u_{1\nu_2}, \ldots, u_{\nu_2\nu_2}$.

После конечного числа шагов получим систему уравнений

$$\mathbf{X}_{1\nu_g}f=0,\ \ldots,\ \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}f=0,$$

образованную из базисных операторов алгебры $\mathfrak{B}_{g-1}=\mathfrak{B}^{(g)}$.

В качестве ее решений можно выбрать $n-\nu_g$ функций

$$\mathfrak{M}_{g-1}=\{u_{1\nu_1},\ \ldots,\ u_{\nu_1\nu_1};\ u_{1\nu_{g-1}},\ \ldots,\ u_{\nu_{g-1}\nu_{g-1}}\}.$$

Операторы $\mathbf{X}_{1\nu_g}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_g\nu_g}$ допускают полную систему операторов $\mathbf{X}_{1\nu_1}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_1\nu_1}, \ldots, \mathbf{X}_{1\nu_{g-1}}, \ldots, \mathbf{X}_{\nu_{g-1}\nu_{g-1}}$ и, как следствие, функции $\mathfrak{M}_{g-1}$ переводятся элементами группы $\mathfrak{G}$ в функции от элементов $\mathfrak{M}_{g-1}$. Тем самым доказано, что $\mathfrak{M}_{g-1}$ — система импримитивности. Наконец, последнюю систему импримитивности можно получить, дополнив множество функций $\mathfrak{M}_{g-1}\nu_g$ независимыми функциями $u_{1\nu_g}, \ldots, u_{\nu_g\nu_g}$ до полной системы n независимых функций в G. Остальные пункты теоремы доказываются аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 4.6. ■

***Следствие* 4.2.** Для того чтобы система (4.1) была триангулизируемой, необходимо и достаточно, чтобы в условиях теоремы 4.7 алгебры $\mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(n)}$ были одномерны и их базисные элементы $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ удовлетворяли условиям

$$[\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2]=\lambda_{12}\mathbf{X}_2,\quad [\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_3]=\lambda_{13}\mathbf{X}_3,\ \ldots,\ [\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_{n-1}]=$$
$$=\lambda_{1,n-1}\mathbf{X}_{n-1},\quad [\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_n]=\lambda_{1n}\mathbf{X}_n;$$
$$[\mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_3]=\lambda_{23}\mathbf{X}_3,\ \ldots,\ [\mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_{n-1}]=\lambda_{2,n-1}\mathbf{X}_{n-1},\quad [\mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_n]=\lambda_{2n}\mathbf{X}_n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[\mathbf{X}_{n-2},\ \mathbf{X}_{n-1}]=\lambda_{n-2,n-1}\mathbf{X}_{n-1}\ [\mathbf{X}_{n-2},\ \mathbf{X}_n]=$$
$$=\lambda_{n-2,n-1}\mathbf{X}_n;$$
$$[\mathbf{X}_{n-1},\ \mathbf{X}_n]=\lambda_{n-1,n}\mathbf{X}_n.$$

Проиллюстрируем теорию примером.

П р и м е р 4.1. Как было установлено выше (см. пример 1.2 гл. 1), система дифференциальных уравнений имеет обертывающую алгебру Ли $\mathfrak{B}$, порожденную коммутативными операторами

$$\mathbf{X}_1 = (1 - r^2)\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \mathbf{X}_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Найдем систему импримитивности $\mathfrak{M}_1$, решив уравнение $\mathbf{X}_2 f = 0$: $\mathfrak{M}_1 = \{u_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$. Аналогично находим систему импримитивности $\mathfrak{M}_2$, решив уравнение $\mathbf{X}_1 f = 0$: $\mathfrak{M}_2 = \{u_2 = x_1/x_2\}$. Нетрудно проверить, что для функций u_1, u_2 справедливы соотношения

$$\mathbf{X}_1 u_1 = u_1(1 - u_1^2), \quad \mathbf{X}_1 u_2 = 0, \quad \mathbf{X}_2 u_1 = 0, \quad \mathbf{X}_2 u_2 = 1 + \frac{x_1^2}{x_2^2}.$$

Произведем в системе (4.16) замену переменных $z_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $z_2 = x_1/x_2$. В результате ассоциированный с системой (4.16) оператор (4.17) принимает вид

$$\mathbf{U} = z_1(1 - z_1^2)\frac{\partial}{\partial z_1} - \sigma(1 + z_2^2)\frac{\partial}{\partial z_2},$$

а приведенная система распадается на две подсистемы

$$\frac{dz_1}{dt} = z_1(1 - z_1^2) \text{ и } \frac{dz_2}{dt} = -\sigma(1 + z_2^2). \tag{4.24}$$

Если вместо функций x_1/x_2 в качестве новой переменной выбрать функцию $z_2 = \operatorname{arctg}(x_1/x_2)$ (угловую переменную), то второе уравнение системы (4.24) упростится: $dz_2/dt = -\sigma$.

§ 5. ПОНИЖЕНИЕ ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ В СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^{l} \alpha_{1j}(a_1, \ldots, a_m, t)\,\varphi_{1j}(x_1, \ldots, x_n); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{j=1}^{l} \alpha_{nj}(a_1, \ldots, a_m, t)\,\varphi_{nj}(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\alpha_{i'j'}(a_1, \ldots, a_m, t)$, $i' = \overline{1, n}$, $j' = \overline{1, l}$ — непрерывные функции параметров $a_1, \ldots, a_m$ и независимой переменной t, $\varphi_{i'j'} \in \mathfrak{D}(G)$.

Выясним условия, при которых существует замена переменных

$$x = \psi(z), \quad z = \psi^{-1}(x), \tag{5.2}$$

преобразующая систему к меньшему числу переменных $p < n$, т. е. к виду

$$\frac{dz_1}{dt} = \sum_{j=1}^{h} \beta_{1j}(a_1, \ldots, a_m, t)\,\eta_{1j}(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_n);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz_p}{dt}=\sum_{j=1}^{h}\beta_{pj}(a_1,\ \ldots,\ a_m,\ t)\,\eta_{pj}(z_1,\ \ldots\ z_p,\ z_{p+1},\ \ldots,\ z_n); \qquad (5.3)$$

$$\frac{dz_{p+k}}{dt}\equiv 0,\quad k=\overline{1,\ n-p}. \qquad (5.4)$$

Системы такого рода нередко встречаются в приложениях. Суть подобной приводимости состоит в существовании в системе (5.1) интегралов, не зависящих явным образом от параметров $a_1, \ldots, a_m$ и независимой переменной.

Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ для системы (5.2) строится просто. Представим оператор $\mathbf{U}$, ассоциированный с системой, в форме

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_{1j}\varphi_{1j}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ \cdots\ +\left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_{nj}\varphi_{nj}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\equiv$$

$$\equiv\beta_1(a_1,\ \ldots,a_m,\ t)\,\mathbf{X}_1+\ \cdots\ +\beta_h(a_1,\ \ldots,\ a_m,\ t)\,\mathbf{X}_h,$$

где операторы $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_h$ получены в результате перегруппировки слагаемых и имеют вид

$$\mathbf{X}_j=f_{j1}(x_1,\ \ldots,\ x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ \cdots\ +f_{jn}(x_1,\ \ldots,\ x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},\quad j=\overline{1,\ h}.$$

По операторам $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_h$ строим обертывающую алгебру $\mathfrak{B}$ (см. § 2 гл. 1). Пусть базис этой алгебры содержит p несвязных операторов $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_{h+1}, \ldots, \mathbf{X}_p$.

Теорема 5.1. *Для того чтобы система (5.1) допускала понижение числа переменных в системе с помощью обратимого* loc G *преобразования (5.2), не зависящего явно от параметров $a_1, \ldots, a_m, t$, необходимо и достаточно, чтобы обертывающая группа $\mathfrak{B}$ была интранзитивна и имела $n-p$ инвариантов. Нахождение приводящих преобразований сводится к нахождению общих решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка не выше $n-p$.*

Доказательство. *Достаточность.* Число линейно несвязных операторов в алгебре $\mathfrak{B}$ меньше n, и, следовательно, полная система $\mathbf{X}_j f=0,\ j=\overline{1,\ p}$, имеет, по крайней мере loc G, $n-p$ независимых решений $\psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$. Дополняя их p функциями до системы n независимых функций, получим необходимую замену переменных. Отыскание функций $\psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$ может быть осуществлено одним из методов [26, 127], сводящихся по существу к решению последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка не выше $n-p$. Необходимость очевидна. ■

Проиллюстрируем теорию примером.

Уравнения динамических маневров спутника с учетом возмущающих факторов. Эта задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [23]) и здесь приводится в несколько измененном виде.

Пусть движение спутника происходит относительно неподвижной системы координат $XOYZ$ и описывается с помощью подвижного трехгранника $xoyz$, причем всегда $\vec{r}=r\vec{i}$.

Направляющие косинусы осей $xoyz$ с осями $XOYZ$ задаются следующей таблицей:

	X	Y	Z
x	t_x	t_y	t_z
y	n_x	n_y	n_z
z	b_x	b_y	b_z

Уравнение движения точки A [23, с. 616] можно представить после перехода от уравнений для векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ к уравнениям для их проекций в виде

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u = \frac{1}{M^2}\left(1 - \frac{g_x}{u} - \frac{g_y}{u^3}\frac{du}{d\nu}\right), \quad \frac{dM}{d\nu} = \frac{g_y}{u};$$

$$\frac{dt_i}{d\nu} = n_i,$$

$$\frac{dn_i}{d\nu} = \frac{g_z}{M^2u^3}b_i - t_i, \quad i = x,\ y,\ z, \tag{5.5}$$

$$\frac{db_i}{d\nu} = -\frac{g_z}{M^2u^2}n_i,$$

где $u = r^{-1}$; $M = \omega_z r^2$; ω_z — угловая скорость; ν — угол, определяемый дифференциальным уравнением $\frac{d\nu}{dt} = \omega_z = M/r^2$; g_x, g_y, g_z — проекции действующих на точку A сил на оси координат.

Вычислим проекцию g_z. Ее можно представить в виде суммы: $g_z = a + g_z'$, где a — управляющее ускорение, под воздействием которого плоскость орбиты спутника поворачивается в направлении вектора $\vec{k}$; g_z' — возмущения, вызванные различными факторами. Ограничимся здесь лишь влиянием нецентральности поля притяжения Земли.

При сделанных предположениях вектор возмущающих сил можно записать в виде

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} R,$$

где

$$R = \varepsilon k \frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right), \quad k = fm_0r_0^2, \quad \varepsilon = 0{,}00108.$$

Тогда

$$\vec{F} = \frac{\partial R}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{k}' = \frac{\varepsilon k}{r^4}\left(\frac{15}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{i} - 3\frac{\varepsilon k}{r^4}\frac{z}{r}\vec{k}',$$

где $\vec{k}'$ — единичный вектор оси oz. Замечаем далее, что

$$\frac{z}{r} = (\vec{k}\cdot\vec{i}) = t_z; \quad (\vec{k}'\cdot\vec{j}) = n_z; \quad (\vec{k}'\cdot\vec{k}) = b_z;$$

$$\vec{F} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k}; \quad g_z = (\vec{F}, \vec{k}) = -\frac{3\varepsilon k}{r^4}t_zb_z.$$

При наличии постоянного управления $a = \text{const}$ окончательно получим $g_z = a - \frac{3\varepsilon k}{r^4} t_z b_z$.

Выпишем теперь систему (5.5) при $i = z$:

$$\frac{dt_z}{d\nu} = n_z; \quad \frac{dn_z}{d\nu} = \frac{g_z}{M^2u^3} b_z - t_z; \quad \frac{db_z}{d\nu} = -\frac{g_z}{M^2u^3} n_z. \tag{5.6}$$

К системе (5.6) применим приведенные выше рассуждения. Ассоциированным с системой (5.6) является оператор

$$n_z \frac{\partial}{\partial t_z} + \left(\frac{g_z}{M^2u^3} b_z - t_z\right) \frac{\partial}{\partial n_z} - \frac{g_z}{M^2u^3} n_z \frac{\partial}{\partial b_z} =$$

$$= \left(n_z \frac{\partial}{\partial t_z} - t_z \frac{\partial}{\partial n_z}\right) + \frac{g_z}{M^2u^3}\left(b_z \frac{\partial}{\partial n_z} - n_z \frac{\partial}{\partial b_z}\right). \tag{5.7}$$

Операторы

$$\mathbf{X}_1 = n_z \frac{\partial}{\partial t_z} - t_z \frac{\partial}{\partial n_z}, \quad \mathbf{X}_2 = b_z \frac{\partial}{\partial n_z} - n_z \frac{\partial}{\partial b_z} \tag{5.8}$$

образуют замкнутую систему, так как

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = -\frac{b_z}{n_z} \mathbf{X}_1 - \frac{t_z}{n_z} \mathbf{X}_2.$$

Следовательно, система уравнений

$$n_z \frac{\partial\varphi}{\partial t_z} - t_z \frac{\partial\varphi}{\partial n_z} = 0; \quad b_z \frac{\partial\varphi}{\partial n_z} - n_z \frac{\partial\varphi}{\partial b_z} = 0 \tag{5.9}$$

имеет $3 - 2 = 1$ независимый интеграл. Легко определить общий интеграл системы (5.9): $n_z^2 + b_z^2 + t_z^2 = \text{const}$.

Вводим дополнительные функции $w_2 = t_z$, $w_3 = b_z$ и производим в (5.8) замену $w_1 = n_z^2 + b_z^2 + t_z^2$, $w_2 = t_z$, $w_3 = b_z$. В результате получаем для операторов $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ в новых переменных w следующие выражения, которые мы обозначим $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$:

$$\mathbf{Y}_1 = n_z \frac{\partial}{\partial w_2} = \sqrt{w_1 - w_2^2 - w_3^2} \frac{\partial}{\partial w_2};$$

$$\mathbf{Y}_2 = -n_z \frac{\partial}{\partial w_3} = \sqrt{w_1 - w_2^2 - w_3^2} \frac{\partial}{\partial w_3}.$$

Из выражения (5.7) в результате замены с учетом вида операторов $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial\nu} + \sqrt{w_1 - w_2^2 - w_3^2} \frac{\partial}{\partial w_2} - \frac{a - 3\varepsilon k u^4}{M^2u^3} w_2 w_3 \frac{\partial}{\partial w_3}.$$

Исходная же система (5.6) преобразуется к виду

$$\frac{dw_2}{d\nu} = \sqrt{w_1 - w_2^2 - w_3^2}; \quad \frac{dw_1}{dt} = 0;$$

$$\frac{aw_3}{d\nu} = -\left[-\frac{a}{M^2u^3} + \frac{3\varepsilon k}{M^2} u w_2 w_3\right] \sqrt{w_1 - w_2^2 - w_3^2}$$

и содержит уже две переменные w_2 и w_3. Переменная w_1 входит в эти уравнения в виде параметра $w_1 = w_{10} = \mathrm{const}$.

Выясним условия, при которых преобразованная система (5.3) не будет зависеть от переменных $z_{p+1}, \ldots, z_m$.

Теорема 5.2. *Для того чтобы переменные в преобразованной системе (5.3), (5.4) полностью разделялись, необходимо и достаточно, чтобы существовали $n-p$ несвязных операторов $\mathbf{X}_{p+1}, \ldots, \mathbf{X}_n$, коммутативных с базисными операторами $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p$:*

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] \equiv 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{p+1, n}.$$

Доказательство. *Достаточность.* Если существуют такие операторы, то они составляют полную систему и их независимые решения $\psi_1(x), \ldots, \psi_p(x)$ переводятся операторами $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p$ снова в функции от $\psi_1, \ldots, \psi_p$. Поэтому в уравнениях (5.3) функции не будут зависеть от переменных $z_{p+1}, \ldots, z_n$.

Необходимость очевидна. ■

Следствие 5.1. Если известна полная система операторов $\mathbf{X}_{p+1}, \ldots, \mathbf{X}_r$, $r < n$, коммутирующих с $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p$, то в преобразованной системе выделяется подсистема, зависящая от r переменных:

$$\frac{dz_\mu}{dt} = \sum_{j=1}^{h} \beta_{\mu j}(a, t)\, \eta_{\mu j}(z_1, \ldots z_r), \quad \mu = \overline{1, r};$$

$$\frac{dz_\rho}{dt} = \sum_{j=1}^{h} \beta_{\rho j}(a, t)\, \eta_{\rho j}(z_1, \ldots, z_n), \quad \rho = \overline{r+1, p};$$

$$\frac{dz_{p+k}}{dt} = 0, \quad k = \overline{1, n-p}.$$

§ 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПРИВОДИМЫЕ СИСТЕМЫ

Результаты § 1 могут быть распространены на широкий класс уравнений. Рассмотрим операторное уравнение

$$\mathcal{A}_1(a, y) L_1 x + \cdots + \mathcal{A}_k(a, y) L_k x = \mathcal{A}_0 x, \tag{6.1}$$

где $L_1, \ldots, L_k$ — некоторые линейные операторы, зависящие от переменных $y = \| y_1, \ldots, y_m \|$ и действующие на вектор $x = \mathrm{colon}\, \| x_1, \ldots, x_n \|$; $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ — квадратные матрицы n-го порядка, зависящие в общем случае от параметров $a = \| a_1, \ldots, a_r \|$ и переменных x.

Операторы L_i — перестановочные с матрицами $\mathcal{A}_j$, т. е. $\mathcal{A}_j L_i x \equiv L_i \mathcal{A}_j x$, $i, j = \overline{1, k}$. Переменные x, y, a изменяются в некоторых областях соответственно $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_a$ ($\Omega_x \in \mathrm{R}^n$, $\Omega_y \in \mathrm{R}^m$, $\Omega_a \in \mathrm{R}^r$). К уравнениям могут быть добавлены матричные соотношения для граничных и начальных условий.

Под алгебраической приводимостью системы (6.1) будем понимать возможность ее разбиения на подсистемы меньшей размерности (в совокупности эквивалентные (6.1)) с помощью замены $x = Sz$, где S — постоянная матрица размерности $n \times n$, $z = \mathrm{colon}\, \| z_1, \ldots, z_n \|$ — вектор новых переменных.

Таким образом, в новых переменных система (6.1) распадается на подсистемы меньшего порядка в соответствии со структурой матрицы коэффициентов

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 L_1 z + \cdots + \tilde{\mathcal{A}}_k L_k z = \tilde{\mathcal{A}}_0 z, \tag{6.2}$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_i = S^{-1}\mathcal{A}_i S = \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_{\nu_1 i}, \ldots, \mathcal{A}_{\nu_r i}\}$, $i = \overline{0, k}$, — квазидиагональная (диагональная) матрица либо

$$\tilde{\mathcal{A}}_i = S^{-1}\mathcal{A}_i S = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\nu_1 i} & & * \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & & \mathcal{A}_{\nu_n i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, k_1}, \tag{6.3}$$

— квазитреугольная (треугольная) матрица, причем $\nu_1 + \ldots + \nu_n = n$.

В случае полного распадания системы (6.1) (структура матриц задается уравнениями (6.2)) будем ее называть алгебраически вполне приводимой либо алгебраически приводимой, если имеют место соотношения (6.3).

Примерами систем вида (6.1) могут служить обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\mathcal{A}_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + \mathcal{A}_k \frac{d^k x}{dt^k} = \mathcal{A}_0 x$$

с заданными начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \ \ldots, \ x^{(k)}(t_0) = x_0^{k};$$

системы дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i x(t - h_i) = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{F}_i x(t - h_i)$$

с начальными условиями

$$x(t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant h_k, \quad 0 < h_0 < h_1 < \cdots < h_k.$$

Можно привести и многие другие примеры.

Исследование приводимости общей системы вида (6.1) принципиально не отличается от исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (см. § 1) и сводится к построению порождающей совокупности матриц $\beta\{Q_1, \ldots, Q_m\}$, а по ним — обертывающей матричной алгебры $\mathfrak{K}$. Поэтому при исследовании полной приводимости системы (6.1) остановимся еще на одном подходе, отличном от описанного в предыдущих параграфах.

Согласно теореме 1.21 в случае полной приводимости алгебры система алгебраических уравнений

$$Q_j \mathcal{X} = \mathcal{X} Q_j, \quad Q_j \in \beta, \tag{6.4}$$

имеет нетривиальное решение $\mathcal{X} \neq \lambda\mathcal{E}$. Будем называть матрицу $\mathcal{R} \neq \lambda\mathcal{E}$, $\det \mathcal{R} \neq 0$, удовлетворяющую равенствам (6.4), нетривиальным коммутантом и обозначать множество таких матриц символом $\mathfrak{f}_\beta$. Если $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathfrak{f}_\beta$, то и $\mathcal{R}_1^{-1}$, $\mathcal{R}_2^{-1}$, $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \in \mathfrak{f}_\beta$. Следовательно, совокупность $\mathfrak{f}_\beta$ является в действительности группой. В свете сказанного любая замена переменных $x = \mathcal{R}z$, $\mathcal{R} \in \mathfrak{f}_\beta$, оставляет систему (6.1) инвариантной (см. § 4 гл. 1). Та часть теоремы 1.21, которая касается полной приводимости, может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 6.1. *Система (6.1) алгебраически вполне приводима в том и только в том случае, когда она инвариантна относительно преобразований из группы* [1] $\mathfrak{f}_\beta$.

Группа $\mathfrak{f}_\beta$ является в общем случае конечномерной группой Ли. При ее исследовании полезно перейти к групповой алгебре $\mathfrak{Z}_\beta$, образованной элементами

$$a_1\mathcal{R}_1 + \cdots + a_m\mathcal{R}_m, \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{K}, \quad \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m \in \mathfrak{f}_\beta,$$

и их всевозможными конечными произведениями.

Второй подход, указанный выше, состоит в исследовании группы $\mathfrak{f}_\beta$, допускаемой системой (6.1), или ее алгебры $\mathfrak{Z}_\beta$. Между двумя указанными подходами существует полная однозначность. Так, если общий элемент $\mathcal{X} \in \mathfrak{R}$ приводится к виду

$$\mathcal{X} = \left\| \begin{array}{cccccccc} \mathcal{A}_{\nu_1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \mathcal{A}_{\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \mathcal{A}_{\nu_2} & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \mathcal{A}_{\nu_2} & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathcal{A}_{\nu_3} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|, \tag{6.5}$$

то любой элемент $\mathcal{G} \in \mathfrak{Z}_\beta$ будет иметь (в силу коммутативности) вид

$$\mathcal{G} = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_{11}\mathcal{E}_{\nu_1} & \ldots & \lambda_{1\nu_1}\mathcal{E}_{\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{\nu_1}\mathcal{E}_{\nu_1} & \ldots & \lambda_{\nu_1\nu_1}\mathcal{E}_{\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_{21}\mathcal{E}_{\nu_2} & \ldots & \lambda_{2\nu_2}\mathcal{E}_{\nu_2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_{\nu_2 1}\mathcal{E}_{\nu_2} & \ldots & \lambda_{\nu_2\nu_2}\mathcal{E}_{\nu_2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|.$$

В первом блоке матрицы (6.5) есть k_1 одинаковых квадратных матриц $\mathcal{A}_{\nu_1}$, во втором блоке — k_2 одинаковых квадратных матриц $\mathcal{A}_{\nu_2}$ и т. д.; так как $\mathcal{X}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{R}$, то $\mathcal{A}_{\nu_1}$, $\mathcal{A}_{\nu_2}$, ... уже далее неприводимы.

Применение каждого из рассмотренных подходов зависит от конкретных условий задачи и сложности реализации получаемых алгоритмов. При этом необходимо учитывать такое общее замечание.

---

[1] Тривиальный случай, когда группа $\mathfrak{f}_\beta$ содержит лишь единичный элемент, исключается.

К достоинству метода алгебраической приводимости следует отнести принципиальную простоту его реализации, так как матрица S не зависит от параметров и ее вычисление даже для систем высокого порядка окупается достигаемыми преимуществами от редукции исходной системы (6.1).

Недостатком же данного метода является узость класса приводимых в указанном выше смысле систем. Поэтому достоинства метода могут в известной степени компенсировать его недостатки лишь в том случае, когда будут существовать достаточно просто проверяемые априорные критерии приводимости (см. теорему 1.2).

Случай конечности допускаемой группы. Пусть установлена каким-либо способом нетривиальная группа $\mathfrak{f}$ всех коммутантов системы равенств (6.4). Наиболее полно исследован случай, когда $\mathfrak{f}$ — конечная группа [1], т. е. число элементов в группе конечно. Метод приведения матричных конечных групп давно используется в квантовой механике, в частности в теории колебаний молекул [66].

Такой подход оказался плодотворным при решении ряда задач механики [34], а также в теории автоматического управления [41—43].

Остановимся вкратце на идее приведения групповых алгебр $\mathfrak{f}_\beta$.

Конечность группы позволяет полностью установить ее тип. Пусть группа содержит k элементов, которые будем записывать в виде матриц $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k$. Тогда общий элемент алгебры $\mathfrak{Z}_\beta$ можно представить как $a_1\mathcal{G}_1 + \ldots + a_k\mathcal{G}_k$, где $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные постоянные из К.

Знание типа группы позволяет определить (обычно с помощью заранее составленных таблиц) все возможные матрицы — блоки $\mathcal{A}_{\nu_1}$, $\mathcal{A}_{\nu_2}, \ldots$, входящие в приведенное представление элемента (6.5). Матрицы $\mathcal{A}_{\nu_1}, \mathcal{A}_{\nu_2}, \ldots$ отнесены к некоторому стандартному базису и, следовательно, имеют вполне определенные числовые значения. Поэтому задача приведения принципиально сводится к решению следующих матричных уравнений относительно матрицы приведения:

$$\mathcal{G}_i S = S \operatorname{diag}\{\mathcal{G}^{(i)}_{\nu_1}, \ \ldots, \ \mathcal{G}^{(i)}_{\nu_2}, \ \ldots\}, \quad i = \overline{1, \ k}, \tag{6.6}$$

где $\mathcal{G}_i$ пробегают все элементы группы; $\mathcal{G}^{(i)}_{\nu_1}, \mathcal{G}^{(i)}_{\nu_2}, \ldots,$ — известные квадратные матрицы.

В действительности можно не решать системы (6.6), а из элементов $\mathcal{G}^{(i)}_{\nu_1}, \mathcal{G}^{(i)}_{\nu_2}, \ldots$ и $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k$, $i = \overline{1, k}$, построить матрицы-проекторы $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l$, с помощью которых разложить пространство V в прямую сумму инвариантных подпространств $V_{\nu_1}, V_{\nu_2}, \ldots$. Матрица S, составленная из базисных векторов этих подпространств, и будет искомой приводящей для $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{f}_\beta$.

Замечание 6.1. Совершенно очевидна связь результатов теоремы 6.1 с результатами § 1. Поэтому не представляет принципиальных трудностей переформулировка теорем 1.10, 1.21 в терминах допускаемых групп и соответствующих им алгебр.

---

[1] Обычно здесь используется симметрия изучаемого объекта.

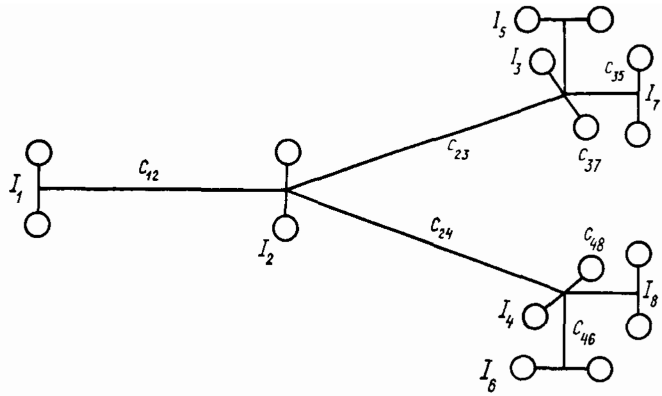


Рис. 1

В заключение приведем ряд примеров из механики, которые служат иллюстрацией возможностей описанного подхода.

П р и м е р 6. 1. Уравнение движения редуктора, кинематическая схема которого изображена на рис. 1, можно представить в виде

$$\mathcal{J}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Q\varphi, \tag{6.7}$$

где $\mathcal{J} = \operatorname{diag}\{J_1, \ldots, J_8\}$ — матрица моментов инерции соответствующих приведенных масс, изображенных на рис. 1; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_8)$ — вектор углов поворотов соответствующих связей; Q — матрица упругостей соответствующих связей, имеющая вид

$$Q = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} -c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & p_1 & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & p_2 & 0 & c_{35} & 0 & c_{37} & 0 \\ 0 & c_{24} & 0 & p_3 & 0 & c_{46} & 0 & c_{48} \\ \hline 0 & 0 & c_{35} & 0 & -c_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & -c_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{37} & 0 & 0 & 0 & -c_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{48} & 0 & 0 & 0 & -c_{48} \end{array} \right\|;$$

$$p_1 = -c_{12} - c_{23} - c_{24}, \quad p_2 = -c_{23} - c_{35} - c_{37}, \quad p_3 = -c_{24} - c_{48} - c_{46}.$$

Составим для системы (6.7) соответствующую систему (6.4):

$$\mathcal{J}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{J}, \quad Q\mathcal{R} = \mathcal{R}Q. \tag{6.8}$$

Если моменты инерции $J_1, \ldots, J_8$ разные, то система (6.8) не имеет решения, кроме тривиального $\mathcal{R} = \lambda\mathcal{E}$, так как коммутантом $\mathcal{J}$ являются лишь диагональные матрицы.

Вместе с тем попробуем выяснить, при каких значениях параметров система (6.7) будет алгебраически приводимой. Обратимся к рис. 1. Совершенно ясно, что при $J_3 = J_4$, $J_5 = J_6$, $J_7 = J_8$, $c_{35} = c_{46}$, $c_{23} = c_{24}$, $c_{37} = c_{48}$ граф на рис. 1, изображающий кинематическую схему редуктора, допускает отображение на себя: $J_3 \to J_4$, $J_5 \to J_6$, $J_7 \to J_8$, $J_1 \to J_1$, $J_2 \to J_2$, что соответствует в системе

(6.7) замене переменных:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{Vmatrix} = \mathscr{R}\boldsymbol{\psi}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица $\mathscr{R}$ из (6.8) коммутирует с матрицами

$$\mathscr{I} = \operatorname{diag}\{I_1,\ I_2,\ I_3\ I_3,\ I_5,\ I_5,\ I_7,\ I_7\}$$

и

$$\mathscr{C} = \left\Vert \begin{array}{cccc|cccc} -c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & p_1 & c_{23} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21} & p_2 & 0 & c_{35} & 0 & c_{37} & 0 \\ 0 & c_{23} & 0 & p_2 & 0 & c_{35} & 0 & c_{37} \\ \hline 0 & 0 & c_{35} & 0 & -c_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{35} & 0 & -c_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{37} & 0 & 0 & 0 & -c_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{37} & 0 & 0 & 0 & -c_{37} \end{array} \right\Vert,$$

где

$$p_1 = -c_{12} - c_{23} - c_{24};\quad p_2 = -c_{23} - c_{35} - c_{37};\quad p_3 = -c_{23} - c_{35} - c_{37}.$$

Следовательно, $\mathscr{R} \neq \lambda\mathscr{E}$ и система (6.1) алгебраически приводима.

Матрица $\mathscr{R}$ обладает свойством $\mathscr{R}^2 = \mathscr{E}$, т. е. порождает конечную коммутативную группу, состоящую из двух элементов $\{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$.

Используем теорему 1.21. Характеристический многочлен матрицы $\mathscr{R}$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^5 (\lambda - 1)^3. \tag{6.9}$$

Можно построить операторы проектирования $\mathscr{P}_1$ на подпространство V_5 размерности 5 и $\mathscr{P}_2$ на подпространство V_3 размерности 3 в соответствии с кратностью корней (6.9). Однако проще определить базисные векторы V_5 из системы

$$(\mathscr{R} - \lambda_1\mathscr{E})^5\, \omega = (\mathscr{R} - \mathscr{E})^5\, \omega = 0 \tag{6.10}$$

и базисные векторы V_3 из системы

$$(\mathscr{R} - \lambda_2\mathscr{E})^3\, \omega = (\mathscr{R} + \mathscr{E})^3\, \omega = 0. \tag{6.11}$$

Решая (6.10) и (6.11), получаем соответственно базисные векторы

$$\omega_1 = \operatorname{colon}\|1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,\qquad \omega_2 = \operatorname{colon}\|0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,$$

$$\omega_3 = \operatorname{colo}\|0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,\qquad \omega_4 = \operatorname{colon}\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\|$$

$$\omega_5 = \operatorname{colon}\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1\|,\qquad \omega_6 = \operatorname{colon}\|0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,$$

$$\omega_7 = \operatorname{colon}\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0\|,\qquad \omega_8 = \operatorname{colon}\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1\|.$$

Таким образом, $S = \|\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\|$; легко также вычислить обратную матрицу: $S^{-1} = \|e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\|$, где

$$e_1 = \operatorname{colon}\|1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,\qquad e_2 = \operatorname{colon}\|0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|,$$

$$e_3 = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ -{}^1/_2,\ 0,\ 0,\|,$$
$$e_4 = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0\|,$$
$$e_5 = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ -{}^1/_2,\ 0\|,$$
$$e_6 = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0\|,$$
$$e_7 = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ -{}^1/_2\|,$$
$$e_8 = \mathrm{colon}\,\|0.\ 0,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2\|,$$

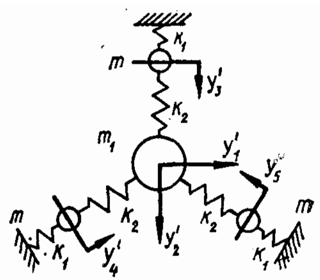


Рис. 2

При этом

$$\mathcal{J}\,\frac{d^2\psi}{\partial t^2} = S^{-1}\mathcal{C}S\psi,$$

где $S^{-1}\mathcal{C}S$ имеет следующую квазидиагональную структуру:

$$S^{-1}\mathcal{C}S = \left\| \begin{array}{ccccc|ccc} -c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & & & \\ c_{12} & p_1 & 2c_{23} & 0 & 0 & & & \\ 0 & c_{23} & p_2 & c_{35} & c_{37} & & 0 & \\ 0 & 0 & c_{35} & -c_{35} & 0 & & & \\ 0 & 0 & c_{37} & 0 & -c_{37} & & & \\ \hline & & & & & p_2 & c_{35} & c_{37} \\ & & 0 & & & c_{35} & -c_{35} & 0 \\ & & & & & c_{37} & 0 & -c_{37} \end{array} \right\|.$$

Таким образом, исходная система порядка 16 распалась на две независимые подсистемы 10 и 6-го порядков.

П р и м е р 6.2. Рассмотрим уравнения движения механической системы, представленной на рис. 2:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{ccccc} \frac{3}{2}a_1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \\ 0 & \frac{3}{2}a_1 & -a_1 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_1 \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_2 & 0 & a_2+a_3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_2 & 0 & 0 & a_2+a_3 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right\| = 0. \tag{6.12}$$

Здесь $a_1 = k_2/m_1$, $a_2 = k_2/m_1$, $a_3 = k_1/M$; k_1, k_2 — жесткости пружин; m_1, m_2 — массы колебающихся тел.

Система (6.12) рассматривалась в работе [41], где было показано, что она допускает конечную группу преобразований, на основе чего выполнена декомпозиция системы на подсистемы меньшей размерности. Декомпозируем системы в соответствии с результатами § 6. Матрицу системы (6.12), которую обозначим через $\mathcal{C}$, представим в виде суммы:

$$\mathcal{C} = a_1\mathcal{C}_1 + a_2\mathcal{C}_2 + a_3\mathcal{C}_3,$$

где

$$\mathcal{C}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{C}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из матричного уравнения $\mathcal{C}_j\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{C}_j$, $j = \overline{1, 3}$, находим общий элемент групповой алгебры $З_\beta$, соответствующей системе (6.12), в виде

$$\mathcal{X} = b_1\mathcal{E}_5 + b_2\mathcal{X}_1 + b_3\mathcal{X}_2, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathrm{K},$$

где

$$\mathcal{X}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{X}_2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Выполним приведение системы нулевого приближения по матрице $\mathcal{X}_1$. Характеристические числа этой матрицы таковы: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -2$, $\lambda_5 = 1$. В качестве матрицы преобразования выберем матрицу

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

Столбцы матрицы S — независимые векторы из корневых подпространств $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}_4'(-2)$, $\mathscr{P}(1)$ матрицы $\mathcal{X}_1$. Тогда преобразованная система (6.12) в результате замены

$$y = Sz, \quad z = \mathrm{colon}\,\| z_1, \ldots, z_5 \|$$

распадается на три независимо интегрируемые подсистемы порядков 4, 4 и 2:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \frac{3}{2}a_1 & \sqrt{3}\,a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & a_2+a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}a_1 & 3a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_2 & a_2+a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+a_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{matrix} \right\| = 0.$$

ГЛАВА 3

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

§ 1. ОБЩАЯ СХЕМА АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x = \mathrm{colon}\,\| x_1, \ldots, x_n \|$; $\omega = \mathrm{colon}\,\| \omega_1(x), \ldots \omega_n(x) \|$; $\omega_i(x) \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$; $G_0 = I \times G \in \mathrm{R}^{n+1}$, $G \in \mathrm{R}^n$, $t \in I$, — область существования и единственности решения задачи Коши системы (1.1); $\mathfrak{D}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенных в G.

Пусть $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$ обозначает множество линейных дифференциальных операторов в частных производных первого порядка (в дальнейшем просто операторов) с коэффициентами из $\mathfrak{D}(G)$.

В основу изучения системы (1.1) под действием малых возмущений положим структурные свойства, характеризуемые некоторой группой инвариантности. Система (1.1) инвариантна относительно локальной однопараметрической группы Ли преобразований, имеющей вид ряда

$$x = \exp(\mu \mathbf{Z}(\bar{x}))\,\bar{x} \tag{1.2}$$

(μ — параметр, характеризующий группу; $\mathbf{Z}$ — некоторый оператор из $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$), если под действием этого преобразования она переходит в систему $d\bar{x}/dt = \omega(\bar{x})$, совпадающую с исходной с точностью до обозначений). Как известно, для того чтобы система (1.1) была инвариантной относительно преобразования вида (1.2), необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathbf{Z}$ был решением уравнения (см., например, § 4 гл. 1)

$$[U, S] = 0, \tag{1.3}$$

где $U = \omega_1(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots \omega_n(x)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ — линейный дифференциальный оператор, ассоциированный с системой (1.1); [,] — скобка Пуассона.

Если $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ — какие-либо решения уравнения (1.3), то их решением также является скобка Пуассона $[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2]$, как это следует из тождества Якоби

$$[\mathbf{U}, [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2]] + [\mathbf{Z}_2, [\mathbf{U}, \mathbf{Z}_1]] + [\mathbf{Z}_1 [\mathbf{Z}_2, \mathbf{U}]] \equiv 0.$$

Множество всех решений уравнения (1.3) образует алгебру Ли $\mathfrak{B}_0$, которая вполне характеризует исходную систему (1.1). Заметим, что алгебра $\mathfrak{B}_0$ не пуста, так как содержит элемент $\mathbf{S} = \mathbf{U}$. Совершенно ясно, что для любого элемента $\mathbf{Z} \in \mathfrak{B}_0$ преобразование (1.2) оставляет инвариантной систему (1.1).

Совокупность преобразований (1.2), где $\mathbf{Z} \in \mathfrak{B}_0$, порождает некоторую псевдогруппу $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_0)$. Однако во всех дальнейших рассуждениях достаточно рассматривать лишь алгебру $\mathfrak{B}_0$, порождающую эту псевдогруппу. Алгебру Ли $\mathfrak{B}_0$ будем называть алгеброй централизатора элемента $\mathbf{U}$ (более подробно этот вопрос рассматривается ниже).

Замечание 1.1. Существование псевдогруппы инвариантности (или, что одно и то же, алгебры, определяемой решением операторного уравнения (1.3)) не является каким-либо существенным ограничением, накладываемым на систему нулевого приближения. Например, если система (1.1) обладает общим решением в некоторой подобласти V из G, то можно показать, что существует n линейно несвязных решений уравнения (1.3) в V. Справедливо также обратное утверждение. В процессе обоснования алгоритма асимптотической декомпозиции обнаруживается, что существование псевдогруппы инвариантности связано с наличием интегралов системы дифференциальных уравнений, сохраняющих точку покоя, и рядом других фундаментальных понятий.

Подвергнем систему (1.1), которую в дальнейшем будем называть системой нулевого приближения, малым возмущениям $\varepsilon\tilde{\omega}(x')$:

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0, \tag{1.4}$$

где $\tilde{\omega}(x') = \operatorname{colon}\|\tilde{\omega}_1(x_1'), \ldots, \tilde{\omega}_n(x')\|$, $\tilde{\omega}_i(x') \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$, ε — малый положительный параметр. Через $G_{0\varepsilon} = J \times J_\varepsilon \times G \in \mathrm{R}^{n+2}$, $J_\varepsilon = [0, 1]$, обозначим область существования и единственности решения задачи Коши системы (1.4), которую назовем возмущенной системой. В соответствии с общей идеей, высказанной во введении, сопоставим систему (1.4) с некоторой эталонной системой. С этой целью произведем в системе (1.4) замену переменных в виде ряда Ли

$$x_j = \exp(\varepsilon\mathbf{S})\, x_{j_1}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.5}$$

где

$$\exp(\varepsilon\mathbf{S}) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!}\mathbf{S} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\mathbf{S}^2 + \ldots;$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon\mathbf{S}_2 + \ldots; \quad \mathbf{S}_i = \gamma_{i1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_{in}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{S}_i \in \mathfrak{D}^{(1)}(G), \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко выписать обратное к (1.5) преобразование: $x_j = \exp(-\varepsilon\mathbf{S}')\, x_j$. Используя тесную связь системы (1.4) с ассоциированным с ней дифференциальным оператором

$$\mathrm{U}_0' = \mathrm{U}' + \varepsilon\tilde{\mathrm{U}}', \tag{1.7}$$

где

$$\tilde{\mathrm{U}}' = \tilde{\omega}_1(x')\frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + \tilde{\omega}_n(x')\frac{\partial}{\partial x_n'},$$

подвергнем этот оператор преобразованию (1.5) и затем перейдем к преобразованной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Вид оператора U_0' после преобразований (1.5) дает формула Кэмпбелла — Хаусдорфа (подробнее см. в § 3 гл. 1)

$$\mathrm{U}_0' \to \mathrm{U}_0 - \frac{\varepsilon}{1!}[\mathrm{U}_0, \mathrm{S}] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[[\mathrm{U}_0, S], \mathrm{S}] - \frac{\varepsilon^3}{3!}[[[\mathrm{U}_0, \mathrm{S}], \mathrm{S}], \mathrm{S}] + \cdots$$

Подставляя в эту формулу значения операторов S и U_0, задаваемые соотношениями (1.6) и (1.7), после несложных выкладок для оператора U_0' в новых переменных получаем

$$\mathrm{U}_0' \to \mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon(-[\mathrm{U}, \mathrm{S}_1] + \mathrm{F}_1) + \cdots + \varepsilon^{\nu}(-[\mathrm{U}, \mathrm{S}_\nu] + F_\nu) + \ldots, \tag{1.8}$$

где $\mathrm{F}_1 = \mathrm{U}$; $\mathrm{F}_2 = -[\tilde{\mathrm{U}}, \mathrm{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \mathrm{S}_1]], \ldots$; F_ν — известная функция от операторов U, $\tilde{\mathrm{U}}$, $\mathrm{S}_1, \ldots \mathrm{S}_{\nu-1}$, явный вид которой можно найти, выполнив соответствующие вычисления [1].

Вид преобразованного оператора U_0, а следовательно, и соответствующей ему системы дифференциальных уравнений зависит от способа выбора последовательности операторов

$$\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \tag{1.9}$$

которые пока не определены. Для нахождения этих операторов образуем последовательность операторных уравнений

$$[\mathrm{U}, \mathrm{S}_j] = \mathrm{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

Образованная бесконечная последовательность имеет рекуррентный характер, как это следует из структуры правых частей F_1, F_2, ... Решив первые уравнения системы, определим правую часть F_2 второй системы и т. д. Так как уравнения системы (1.10) имеют одну и ту же однородную часть, то для исследования вопроса о ее разрешимости достаточно рассмотреть одно уравнение

$$[\mathrm{U}, \mathrm{S}] = \mathrm{F}, \tag{1.11}$$

которое будем называть уравнением-представителем системы (1.10). В правой части уравнения (1.11) может стоять, вообще говоря, произвольный оператор $\mathrm{F} \in \mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Разрешимость операторного уравнения (1.11) определяется структурой решения однородного уравне-

[1] Здесь для упрощения записи использованы принятые в § 3 гл. I обозначения функций $f(x') \equiv f'$ и $f(x) = f$.

ния (1.3), которое в свою очередь порождает алгебру централизатора [1] $\mathfrak{B}_0$.

Неоднородное уравнение (1.11) должно иметь решения с определенными аналитическими свойствами. Например, оно не должно содержать секулярных членов на траекториях системы нулевого приближения, сохранять точку покоя и т. д. Это возможно лишь в том случае, если правая часть уравнения (1.11) не содержит элементов из $\mathfrak{B}_0$.

Реализация нужных свойств решения операторных уравнений осуществляется заменой системы (1.10) системой

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_j] = \mathbf{F}_j - \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{1.12}$$

где $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_j$ обозначает проекцию оператора $\mathbf{F}_j$ на алгебру $\mathfrak{B}_0$ (точное определение этого понятия приводится ниже). Пусть последовательность операторов (1.9) определена из системы уравнений (1.12), тогда преобразованный оператор (1.8) $\mathbf{U}_0$ примет вид

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \cdots + \varepsilon^\nu \mathbf{N}_\nu + \ldots, \tag{1.13}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{N}_\nu \equiv \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu \equiv \sum_{j=1}^{n} b_{\nu j0} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

По оператору (1.13) восстановим преобразованную систему:

$$\frac{\partial x_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon \mathbf{N}(x)\, x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{N}(x) = \mathbf{N}_1(x) + \ldots + \varepsilon^{\nu-1}\mathbf{N}_\nu(x) + \ldots$, или, учитывая структуру операторов (1.14), запишем ее с помощью известных коэффициентов:

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu b_{\nu j0}(x), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.16}$$

Обертывающей алгеброй Ли полученной системы (1.15) (или (1.16)) является алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$. Чтобы подчеркнуть эту связь системы (1.15) с алгеброй централизатора $\mathfrak{B}_0$, будем называть систему (1.15) централизованной. В теоретических выкладках будем отдавать предпочтение операторной форме (1.15) записи централизованной системы.

Таким образом, эталонной системой для исходной возмущенной системы (1.4) является централизованная система (1.15). Эта система получается из возмущенной с помощью преобразования в виде рядов (1.6), где операторы $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, ... являются решениями системы уравнений (1.12).

Централизованная система (1.15) обладает следующими свойствами: ее нулевое приближение совпадает с системой нулевого

---

[1] Централизатором множества P из алгебры Ли L называется совокупность элементов из L, перестановочных с этим множеством P. Централизатор множества P является подалгеброй в L (см. например, [16]). В рассматриваемом случае алгебра централизатора обозначает централизатор элемента U в $\widetilde{\mathfrak{B}}$.

приближения (1.1) и она инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований:

$$x = \exp(\mu \mathrm{U}(\bar{x}))\,\bar{x}, \tag{1.17}$$

где $\bar{x} = \operatorname{colon} \|\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\|$, U — оператор, ассоциированный с системой (1.1) нулевого приближения.

Описанный алгоритм перехода от возмущенной системы (1.4) к централизованной (1.12) назовем алгоритмом асимптотической декомпозиции.

Инвариантность централизованной системы относительно однопараметрической группы (1.17) можно принять в качестве ее определения и сформулировать полученный результат следующим образом: алгоритм асимптотической декомпозиции ставит в соответствие возмущенной системе (1.4) в качестве эталонной системы централизованную (1.15); централизованная система инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований (1.17), в то время как возмущенная система инвариантна относительно этой группы лишь в нулевом приближении.

Интегрирование централизованной системы (1.15) проще, чем исходной возмущенной системы (1.4). Соответствующие теоремы приводятся ниже.

Проведенные рассуждения поясняют суть алгоритма асимптотической декомпозиции, носят описательный характер и, естественно, нуждаются в строгом обосновании. Введем некоторые уточнения и вспомогательные понятия, которые были опущены при первом обсуждении проблемы.

Выше была указана определяющая роль в построении алгоритма асимптотической декомпозиции решений однородного уравнения (1.3). Эти решения будем искать в обертывающей алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{B}}$ возмущенной системы. Она порождается операторами U, $\tilde{\mathrm{U}}$ и содержит элементы U, $\tilde{\mathrm{U}}$, $[\mathrm{U}, \tilde{\mathrm{U}}]$, $[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \tilde{\mathrm{U}}]]$, ..., полученные путем вычисления скобок Пуассона от этих операторов. Очевидно, $\mathfrak{B}_0 \subset \tilde{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Наряду с уравнением (1.3) на алгебре $\tilde{\mathfrak{B}}$ можно рассмотреть также уравнение

$$[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \mathrm{Y}]] = 0. \tag{1.18}$$

Нетрудно показать, что все решения уравнения (1.18) из $\tilde{\mathfrak{B}}$ также образуют алгебру Ли $\mathfrak{B}^{(1)}$, причем[1] $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}^{(1)}$. Алгебру $\mathfrak{B}^{(1)}$ будем называть алгеброй централизатора второй степени (по числу скобок Пуассона в уравнении (1.18)). По индукции можно определить алгебру централизатора произвольной степени k. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, ограничимся рассмотре-

[1] Действительно, пусть Y — решение уравнения (1.18) и $\mathrm{Y} \notin \mathfrak{B}_0$, $\mathrm{Z} \in \mathfrak{B}_0$. Необходимо убедиться, что $[\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]$ удовлетворяет уравнению (1.18). Из тождества Якоби $[\mathrm{U}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]] + [\mathrm{Z}, [\mathrm{U}, \mathrm{Y}]] + [\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{U}]] \equiv 0$ следует, что оператор $[\mathrm{U}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]]$ принадлежит $\mathfrak{B}_0$, так как $[\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{U}]] \equiv 0$ и $[\mathrm{Z}, [\mathrm{U}, \mathrm{Y}]] \in \mathfrak{B}_0$.

нием алгебр централизатора первой степени, т. е. предполагаем выполнение тождества $\mathfrak{V}^{(1)} \equiv \mathfrak{V}_0$. Именно этот случай имеет наибольшее практическое значение. Рассмотрение же сразу общей ситуации, не внося принципиальных изменений в рассуждения, сильно усложняет выкладки.

Другой важнейшей подалгеброй наряду с $\mathfrak{V}_0$ является подалгебра $\mathfrak{V}_n \subseteq \tilde{\mathfrak{V}}$, допускаемая оператором $\mathbf{U}$. Ее элементы удовлетворяют соотношению $[\mathbf{U},\ \mathfrak{V}_n] = \mathfrak{V}_n$.

Определим линейное отображение $L_{\mathbf{U}}$, действующее на алгебре $\tilde{\mathfrak{V}}$, формулой $L_{\mathbf{U}}\mathbf{X} = [\mathbf{U},\ \mathbf{X}]$, $\mathbf{X} \in \tilde{\mathfrak{V}}$. Таким образом, алгебра централизатора $\mathfrak{V}_0$ является ядром отображения $L_{\mathbf{U}}$, а алгебра $\mathfrak{V}_n$ — его образом.

Возвращаясь к неоднородному уравнению (1.11), отметим, что выбор оператора $\operatorname{pr}\mathbf{F}$ и нахождение оператора $\mathbf{S}$ из уравнения $[\mathbf{U}, \mathbf{S}] = \mathbf{F} - \operatorname{pr}\mathbf{F}$ опирается на следующее основное свойство разложимости обертывающей алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{V}}$: любой элемент $\mathbf{F} \in \tilde{\mathfrak{V}}$ однозначно представим в виде суммы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{0\Delta} + \mathbf{F}_{0n}, \quad \mathbf{F}_{0\Delta} \in \mathfrak{V}_0, \quad \mathbf{F}_{0n} \in \mathfrak{V}_n. \tag{1.19}$$

Определение 1.1. В предположении о выполнении свойства разложимости (1.19) в качестве проекции оператора $\mathbf{F}$ примем $\operatorname{pr}\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{0\Delta}$.

Свойство разложимости (1.19) является определяющим при выборе систем, к которым применим алгоритм асимптотической декомпозиции, и будет доказываться в каждом отдельном случае. Остановимся на решении операторного уравнения (1.3), определяющего алгебру $\mathfrak{V}_0$. Могут представиться два принципиальных случая.

В первом случае система (1.1) нулевого приближения в рассматриваемой области не имеет точек покоя. Используя классические теоремы о существовании и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что решениями операторного уравнения (1.3) являются, по крайней мере локально (в окрестности каждой точки), n линейно несвязных операторов из $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Обоснование алгоритма в этом случае проводится особенно просто для систем нулевого приближения общего вида (1.1).

Во втором случае система (1.1) нулевого приближения содержит в рассматриваемой области точку покоя $x = 0$. Обозначим подмножество функций из $\mathfrak{D}(G)$, обращающихся в ноль при $x = 0$, через $\mathfrak{D}_0(G)$, соответственно дифференциальные операторы, определенные на $\mathfrak{D}_0(G)$, — через $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$. Так как по предположению $\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}} \in \mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$, то и $\tilde{\mathfrak{V}} \in \mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$. Здесь классические теоремы теории дифференциальных уравнений непригодны, а используется аппарат теории представлений групп и алгебр Ли в подходящих гильбертовых пространствах. Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции требует в этом случае, вообще говоря, знания более тонкой структуры системы нулевого приближения.

Чтобы различать два описанных случая, будем говорить, что $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \subseteq \mathfrak{D}^{(1)}(G)$, если область G не содержит точку покоя, и $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$, если область G содержит точку покоя.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Остановимся подробно на тех преимуществах, которые дает метод асимптотической декомпозиции, сводя интегрирование исходной возмущенной системы (1.4) к интегрированию централизованной системы

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon \mathrm{N}(x) x_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon \mathrm{N}_2(x) + \ldots$, а операторы $\mathrm{N}_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ задаются формулами (1.14).

Замечательной особенностью централизованной системы является возможность свести ее интегрирование к интегрированию системы нулевого приближения (1.1). Обозначим через $\overline{G}$ замкнутую подобласть из G, соответственно $\overline{G}_{0\varepsilon} = \overline{I} \times \overline{I}_{0\varepsilon} \times \overline{G}$, $\overline{I} = [a, b]$. Следующее утверждение о структуре централизованной системы справедливо для обертывающих алгебр как над $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$, так и над $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$.

Теорема 2.1. *Пусть в централизованной системе (2.1) коэффициенты оператора* $\mathrm{N}(x)$ *являются аналитическими функциями в области* $\overline{G}_{0\varepsilon} = \overline{I} \times \overline{I}_\varepsilon \times \overline{G} \in R^{n+2}$, $\varepsilon \in I_\varepsilon = [0, 1]$, $t \in \overline{I} = [a, b]$; *тогда можно указать такое число* $T_0 > 0$, *что решение системы (2.1) может быть представлено рядом Ли*

$$x_j = \exp(\tau(\mathrm{N}(z)) z_j, \quad \tau \equiv \varepsilon(t - t_0), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.2}$$

где $z = \mathrm{colon}\,\|z_1, \ldots, z_n\|$ — *решение системы нулевого приближения*

$$\frac{dz}{dt} = \omega(z), \quad z(t_0) = z_0 = x_0. \tag{2.3}$$

Ряд Ли (2.2) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{G}_{0\varepsilon T} = \left[t_0, t_0 + \frac{T_0}{\varepsilon}\right] \times \overline{I}_\varepsilon \times \overline{G}$.

Следствие 2.1. Пусть решение $z(t, t_0, x_0)$ системы (2.3) нулевого приближения может быть продолжено на интервал $[t_0, t_0 + L]$, $L < +\infty$; тогда существует такой интервал $I_\varepsilon(t_0, x_0) \in \overline{I}_\varepsilon$, что при всех $\varepsilon \in \overline{I}_\varepsilon(t_0, x_0)$ решение централизованной системы (2.1) можно представить в виде сходящегося на интервале $[t_0, t_0 + L]$ ряда Ли

$$x_j(t) = \exp\{\tau \mathrm{N}(z(t, t_0, z_0))\} z_j(t, t_0, z_0).$$

Следствие 2.2. Пусть решение системы (2.3) нулевого приближения представляется сходящимся рядом Ли

$$z(t) = \exp[(t - t_0)\,\mathrm{U}(x_0)]\, x_0, \quad t \in [t_0, t_0 + L]; \tag{2.4}$$

тогда можно указать такой интервал $I_\varepsilon(t_0 x_0) \in \bar{I}_\varepsilon$, что при всех $\varepsilon \in J_\varepsilon(t_0, x_0)$ решение централизованной системы (2.1) можно представить в виде сходящегося на интервале $[t_0, t_0 + L]$ ряда Ли

$$x_j(t) = \exp((t - t_0)\mathbf{U}(x_0)) \exp(\tau\mathbf{N}(x_0)) x_0. \tag{2.5}$$

Доказательство. В централизованной системе (2.1) сделаем замену переменных в виде ряда Ли

$$x = \exp(\tau\mathbf{N}(z)) z, \quad \tau \equiv \varepsilon(t - t_0). \tag{2.6}$$

Обратное преобразование задается формулой $z = \exp(-\tau\mathbf{N}(x))\, x$. Преобразуем вначале соответствующий централизованной системе (2.1) оператор $\mathbf{U}^{(1)} = \partial/\partial t + \mathbf{U}(x) + \varepsilon\mathbf{N}(x)$. В новых переменных для оператора $\mathbf{U}^{(1)}(x)$ получим выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}^{(1)} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{U}^{(1)}[\exp - \varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i\} \frac{\partial}{\partial z_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i) + \mathbf{U}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\mathbf{N}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i\right\} \frac{\partial}{\partial z_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \{-\varepsilon\mathbf{N}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i + \mathbf{U}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i +$$

$$+ \varepsilon\mathbf{N}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i\} \frac{\partial}{\partial z_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{U}(x)]\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)\, x_i] \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Коэффициенты полученного оператора являются функциями переменных x, которые подвергнуты точечным преобразованиям (2.6). Используя свойства этих преобразований, находим

$$\mathbf{U}(x)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(x)]\, x_i \equiv \exp[\varepsilon t\mathbf{N}(z)]\, \mathbf{U}(z)\exp[-\varepsilon t\mathbf{N}(z)]\, z_i \equiv$$

$$\equiv \mathbf{U}(z)\, z_i \equiv \omega_i(z).$$

При выводе последнего тождества следует принять во внимание коммутативность операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{N}$. Итак, в новых переменных z оператор $\mathbf{U}^{(1)}$ принимает вид $\mathbf{U}^{(1)}(z) = \partial/\partial t + \mathbf{U}(z)$, и ему соответствует система (2.3), с точностью до обозначений совпадающая с системой нулевого приближения исходной системы (2.1).

Обратимся к ряду Ли (2.6). В теореме 2.2 гл. 1 показано, что ряд Ли (2.6) сходится абсолютно при

$$|\tau| < \min\left\{\chi,\ (\alpha/k(n+2))\left(1 - \frac{\chi}{\alpha}\right)^{n+2}\right\}, \quad \tau = \varepsilon(t - t_0),$$

где постоянная k находится по коэффициентам оператора, а постоянные χ, α определяют параллелепипед из $\bar{G}$

$$|z_j| \leqslant \chi < \alpha, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{2.7}$$

Примем в неравенстве (2.7) $\chi = \theta\alpha$, $0 < \theta < 1$, тогда ряд (2.6) при

$$|\tau| \leqslant \tau_0 < \min\left\{\theta\alpha, \ \frac{\alpha(1-\theta)^{n+2}}{k(n+2)}\right\}$$

в области $\bar{Q}$, определяемой неравенствами $|z_j| \leqslant \alpha\theta$, будет сходиться абсолютно и равномерно (см. теорему 2.3 в гл. 1) и представлять в ней аналитическую функцию переменных τ, z_1, ..., z_n. Приведенные рассуждения для окрестности точки $\tau = z = 0$ можно повторить для любой точки из $\bar{G}_{0\varepsilon}$. Тем самым любой точке z области $\bar{G}_{0\varepsilon}$ можно поставить в соответствие число $\tau_0(z)$ и область $\bar{Q}(z)$ такие, что внутри этой области ряд (2.6) будет сходиться абсолютно и равномерно. Множество областей типа $\bar{Q}(z)$ образует некоторое покрытие области $\bar{G}_{0\varepsilon}$, из которого согласно теореме Бореля можно выделить конечное подпокрытие. В этом конечном множестве областей каждой подобласти соответствует свое число $\tau_0(z)$. Выберем среди этих чисел наименьшее и обозначим его T_0. Тогда при $|\tau| \leqslant T_0$, или $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{T_0}{\varepsilon}$ ряд (2.6) будет сходиться абсолютно и равномерно во всей области $\bar{G}_{0\varepsilon}$. ■

Для доказательства следствия 2.1 необходимо найти параметр ε_1 из уравнения $T_0/\varepsilon = L$, тогда искомым интервалом $I(t_0, x_0)$ является $[0, \varepsilon_1]$.

Для доказательства следствия 2.2 решение (2.4) в виде ряда Ли подставим в исходный ряд (2.2). Далее, примем во внимание точечность преобразований и найдем интервал $I(t_0, x_0)$ согласно следствию 2.1. В результате приходим к формулам (2.5).

Замечание 2.1. Для оператора $\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \mathbf{N}_\nu$, представимого бесконечной суммой операторов, требуются, вообще говоря, дополнительные условия для аналитичности коэффициентов. В ряде случаев она будет отсутствовать. Однако, если принять во внимание, что будут исследоваться асимптотические свойства применяемых степенных рядов по ε при $\varepsilon \to 0$ и решение точной системы будет сравниваться с решением укороченной системы, когда в операторе $\mathbf{N}$ оставляют конечное число первых m слагаемых, то вопрос об аналитичности коэффициентов отпадает. Подробно эти вопросы обсуждаются в § 5 настоящей главы.

Укажем еще один путь интегрирования централизованной системы, открываемый следующими теоремами.

Теорема 2.2. *Пусть в централизованной системе (2.1) решение системы нулевого приближения*

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x)$$

может быть представлено сходящимся на интервале $[t_0, t_0 + L]$ *рядом Ли*

$$x_j = \exp[(t - t_0)\mathbf{U}(\bar{x})]\,\bar{x}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \bar{x} \in G_{0\varepsilon}; \tag{2.8}$$

тогда, принимая в качестве новых переменных вектор $\bar{x} = \|\bar{x}_1, \ldots$ $\ldots, \bar{x}_n\|$ *и производя в централизованной системе (2.1) замену переменных (2.8), приводим ее к виду*

$$\frac{d\bar{x}_j}{d\tau} = \mathrm{N}(\bar{x})\,\bar{x}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \bar{x}(t_0) = x_0,$$

где $\mathrm{N}(\bar{x}) = \mathrm{N}_1(\bar{x}) + \varepsilon \mathrm{N}_2(\bar{x}) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon(t - t_0).$

Теорема 2.3. *Пусть в централизованной системе (2.1) известно общее решение системы нулевого приближения*

$$x = \varphi(t, t_0, c), \quad c = \mathrm{colon}\,\|c_1, \ldots, c_n\|, \tag{2.9}$$

определенное в области $G_{0\varepsilon}$; *тогда, принимая в качестве новых переменных вектор* c *и производя в централизованной системе замену переменных (2.9), приводим ее к системе с медленным временем*

$$\frac{dc}{d\tau} = \Phi_1(c) + \varepsilon\Phi_2(c) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon(t - t_0).$$

Доказательство сформулированных теорем 2.2 и 2.3 проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.

Одним из важнейших вопросов асимптотических методов нелинейной механики и метода усреднения является возможность разделения переменных в эталонной системе на быстрые и медленные. Исследуем условия такого разделения для централизованной системы (2.1) при помощи замены переменных

$$\begin{gathered} y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x); \\ z_1 = \varphi_1(x), \ldots, z_r = \varphi_r(x), \quad k + r = n. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Существенным обстоятельством, которое следует принять во внимание, является принадлежность преобразующих функций (2.10) к классу $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. эти функции должны обращаться в нуль в точке $x = 0$, являющейся точкой покоя централизованной системы (2.1). Будем говорить, что централизованная система (2.1) допускает разделение переменных над $\mathfrak{D}_0(G)$ на быстрые и медленные, если с помощью замены переменных (2.10) она преобразуется в совокупность двух последовательно интегрируемых подсистем порядков k и $n - k$. Причем система порядка k содержит медленные переменные и имеет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu}\Phi_{\nu j}(y_1, \ldots, y_k), \quad j = \overline{1, k}. \tag{2.11}$$

Соответственно система порядка $n - k$ содержит быстрые переменные $z_1, \ldots, z_r$:

$$\frac{dz_i}{dt} = F_i(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\chi=1}^{m_\nu} \varepsilon^{\nu}\Lambda_{\nu\chi}^{(i)}(y)\,\xi_{\nu\chi}^{(i)}(z). \tag{2.12}$$

Здесь $y = \mathrm{colon}\,\|y_1, \ldots, y_k\|$, $z = \mathrm{colon}\,\|z_1, \ldots, z_n\|$. Коэффициенты систем (2.11) и (2.12) принадлежат $\mathfrak{D}_0(G)$, что означает, что точка покоя $x = 0$ централизованной системы (2.1) переходит в точку покоя $y = 0$, $z = 0$ преобразованных систем (2.11), (2.12).

Для формулировки основного результата о разделении переменных в централизованной системе потребуются некоторые вспомогательные понятия. Для уравнения в частных производных вида

$$\mathbf{U}f = 0, \tag{2.13}$$

где $\mathbf{U}$ — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения, рассмотрим множество функций $\mathrm{P} = \{\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots\}$ из $\mathfrak{D}_0(G)$, являющихся его решениями. Может случиться, что в множестве P найдется конечное число независимых в G функций $\mathrm{P}_l = \{\rho_1(x), \ldots, \rho_l(x)\}$, такое, что любой элемент $\rho(x)$ из P может быть выражен через функции $\mathrm{P}_l : \rho(x) = a(\rho_1(x), \ldots, \rho_l(x))$ с помощью функций из $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $a(0, \ldots, 0) \equiv 0$. Если указанное множество P_l существует, то будем называть его базисным для множества решений P.

Остановимся на структуре алгебры централизатора $\mathfrak{V}_0$. Множество элементов $\mathfrak{V}_{0\mathrm{U}} \subset \mathfrak{V}_0$ вида $\rho(x)\mathbf{U}$, $\rho(x) \in \mathrm{P}$, является идеалом алгебры $\mathfrak{V}_0$. Действительно, пусть $\mathbf{Z} \in \mathfrak{V}_0$, $\mathbf{Z} \not\equiv \rho(x)\mathbf{U}$, тогда $[\rho(x)\mathbf{U}, \mathbf{Z}] \equiv -\mathbf{Z}\rho(x)\mathbf{U}$. В силу коммутативности элементов $\mathfrak{V}_0$ с $\mathbf{U}$ любой интеграл $\rho(x) \in \mathrm{P}$ переводится оператором $\mathbf{Z} \in \mathfrak{V}_0$ в интегралы совокупности P. Следовательно, элемент $\mathbf{Z}\rho(x)\mathbf{U} \in \mathfrak{V}_{0\mathrm{U}}$. Так как $\mathfrak{V}_{0\mathrm{U}}$ является линейным подпространством в алгебре $\mathfrak{V}_0$, рассматриваемой как линейное пространство, то произвольный элемент $\mathbf{Z}$ алгебры централизатора можно представить суммой:

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{N}_j + \rho_j(x)\mathbf{U}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

По алгебре централизатора можно построить фактор-алгебру $\mathfrak{V}_0/\mathfrak{V}_{0\mathrm{U}}$, образованную комплексами $\{\mathbf{N}_j + \mathfrak{V}_{0\mathrm{U}}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\mathbf{N}_j$ — представители классов, являющиеся составляющими в разложении (2.14).

Образуем множество, составленное из представителей классов смежности

$$\mathfrak{T} = \{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots\}.$$

Множество элементов $\mathfrak{T}$, как нетрудно заметить, само образует подалгебру алгебры централизатора $\mathfrak{V}_0$, не являющуюся, однако, идеалом. Если $\mathbf{N} \in \mathfrak{T}$, то и оператор $\rho(x)\mathbf{N} \in \mathfrak{T}$, $\rho(x) \in \mathrm{P}$. Обозначим через $\mathfrak{T}_0$ подмножество элементов из $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}_0 = \{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots\},$$

которые нельзя представить в виде произведения интеграла $\rho(x) \in \mathrm{P}$ на некоторый элемент из $\mathfrak{T} : \mathbf{M}_j \not\equiv \rho(x)\mathbf{N}_j$, $\mathbf{N}_j \in \mathfrak{T}$, $\rho(x) \in \mathrm{P}$. Множество $\mathfrak{T}_0$ образует подалгебру алгебры $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_0 \in \mathfrak{T}$, и, как следует из определения $\mathfrak{T}_0$, подалгебра $\mathfrak{T}$ получается из элементов $\mathfrak{T}_0$ умножением на интегралы из совокупности P. Подалгебру $\mathfrak{T}_0$ будем называть определяющей подалгеброй алгебры централизатора.

Предположим, что в подалгебре $\mathfrak{T}_0$ имеется идеал $\mathfrak{T}_0^{(1)}$, т. е. $[\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_0^{(1)}] = \mathfrak{T}_0^{(1)}$. Например, в качестве идеала $\mathfrak{T}_0^{(1)}$ может быть выбрана сама подалгебра $\mathfrak{T}_0$. Обозначим элементы идеала $\mathfrak{T}_0^{(1)}$ через $\mathbf{M}_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots$:

$$\mathfrak{T}_0^{(1)} = \{\mathbf{M}_1^{(1)}, \mathbf{M}_2^{(1)}, \ldots\}.$$

Пусть бесконечная совокупность дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, образованная элементами $\mathfrak{T}_0$: $\mathbf{M}_j^{(1)} f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, имеет нетривиальные решения из $\mathfrak{D}_0$ (G). Обозначим множество таких решений через $\mathrm{T} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$. Может случиться, что в множестве Т найдется конечное число функций $\mathrm{T}_r = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\}$, независимых в G, такое, что любой элемент $\varphi(x)$ из Т может быть выражен через функции T_r: $\varphi(x) = b(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$ с помощью функций из $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $b(0, \ldots, 0) = 0$. Если указанное множество T_r существует, то будем называть его базисным для множества решений Т.

Обозначим через $\mathfrak{G}(\mathbf{U})$ локальную однопараметрическую группу преобразований $x' = \exp(s\mathbf{U})x$, действующую на множестве функций $\mathfrak{D}_0(G)$ и определенную в области $\Delta_s \times G$, $s \in \Delta_s$. Тогда множество решений Р уравнения (2.13) образует систему неподвижных точек многообразия $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $\rho(\exp(s\mathbf{U})x) \equiv \rho(x)$, $\rho(x) \in \mathrm{P}$. Совокупность же функций Т образует систему импримитивности группы $\mathfrak{G}(\mathbf{U})$, т. е. $\varphi(\exp(s\mathbf{U})x) \in \mathrm{T}$. Этот факт легко доказывается. Действительно, из тождеств $[\mathbf{U}, \mathbf{M}_j^{(1)}] \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$, следует, что любое решение $\varphi(x) \in \mathrm{T}$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{M}_j^{(1)}\mathbf{U}\varphi(x) \equiv 0$, т. е. функция $\mathbf{U}\varphi(x)$ является решением системы $\mathbf{M}_j^{(1)} f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, принадлежит множеству Т. В том случае, когда Т имеет базисное конечное множество, для любой функции $\varphi_j(x) \in \mathrm{T}_r$ имеют место тождества $\mathbf{U}\varphi_j(x) = \Phi_j(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$, $j = \overline{1, r}$, где Φ_j — функция из $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $\Phi_j(0, \ldots, 0) = 0$.

Докажем основное утверждение о разделении переменных на быстрые и медленные в централизованной системе.

Теорема 2.4. *Пусть для однопараметрической группы* $\mathfrak{G}(\mathbf{U})$, *порожденной оператором* $\mathbf{U}$, *ассоциированным с системой нулевого приближения, выполняются следующие условия:*

1) *в* $\mathfrak{D}_0(G)$ *имеется система инвариантов с базисным множеством* $\mathrm{P}_k = \{\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x)\}$, *определяемым как решения уравнения* $\mathbf{U}f = 0$;

2) *в* $\mathfrak{D}_0(G)$ *имеется система импримитивности с базисным множеством* $\mathrm{T}_r = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\}$, *определяемым как решение системы уравнений* $\mathbf{M}_j^{(1)} f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, *где* $\mathbf{M}_j^{(1)}$ *являются образующими некоторого идеала* $\mathfrak{T}_0^{(1)} = \{\mathbf{M}_j^{(1)}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *входящего в определяющую алгебру* $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_0^{(1)} \subseteq \mathfrak{T}_0$;

3) *функции определяющих множеств* P_k *и* T_r *образуют совместно систему* $k + r = n$ *независимых функций в* G.

Тогда замена переменных

$$y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x); \qquad z_1 = \varphi_1(x), \ldots, z_r = \varphi_r(x) \tag{2.15}$$

преобразует централизованную систему

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon \mathbf{N} x_j \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

где

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \varepsilon \mathbf{N}_2 + \ldots, \quad \mathbf{N}_\nu \in \mathfrak{D}_0^{(1)}(G), \quad [\mathbf{U}, N_\nu] \equiv 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

в две последовательно интегрируемые подсистемы порядков k и $n - k$ для медленных и быстрых переменных.

Система для k медленных переменных

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{\chi=1}^{m_\nu} \Psi_{\chi\nu}(y)\,[\Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(y) + \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y)], \tag{2.17}$$

где

$$\Phi_{\chi\nu}(y), \quad \Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(y), \quad \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y) \in \mathfrak{D}_0(G),$$

интегрируется независимо и содержит медленное время $\tau = \varepsilon t$. Система для $r = n - k$ быстрых переменных

$$\frac{dz_i}{dt} = F_i(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{\chi=1}^{m_\nu} [\Phi_{0\nu}(y) F_i(z) + \Psi_{\chi\nu}(y)\,\Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z)], \tag{2.18}$$

где

$$\Phi_{0\nu}(y), \; F_i(z), \; \Phi_{\chi\nu}(y), \quad \Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z) \in \mathfrak{D}_0(G),$$

интегрируется после того, как проинтегрирована система для медленных переменных. Условия 1—3 являются не только достаточными, но и необходимыми для разделения переменных на быстрые и медленные в централизованной системе.

Доказательство. *Достаточность.* Выпишем явный вид операторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, после выполнения преобразований (2.15). Так как $\mathbf{U}\rho_j(x) \equiv 0$, $\mathbf{U}\varphi_i(z) = F_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, r}$, то оператор $\mathbf{U}$ имеет вид

$$\mathbf{U} = F_1(z)\,\partial/\partial z_1 + \cdots + F_r(z)\,\partial/\partial z_r. \tag{2.19}$$

Согласно структуре алгебры $\mathfrak{B}$ операторы $\mathbf{N}_\nu$, входящие в централизованную систему, представимы суммой

$$\mathbf{N}_\nu = \Psi_{0\nu}(\rho)\,\mathbf{U} + \sum_{\chi=1}^{m_\nu} \Psi_{\chi\nu}(\rho)\,(\mathbf{M}_{\chi\nu}^{(1)} + \mathbf{M}_{\chi\nu}), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

где $\Psi_{0\nu}(\rho)$, $\Psi_{\chi\nu}(\rho)$ — известные функции из множества P и $\mathbf{M}_{\chi\nu}^{(1)} \in \mathfrak{T}_0^{(1)}$, $\mathbf{M}_{\chi\nu} \in \mathfrak{T}_0$. Примем во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\chi\nu}^{(1)}\rho_j(x) &\equiv \Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(\rho) \equiv \Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(y); \\ \mathbf{M}_{\chi\nu}\rho_j(x) &\equiv \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(\rho) \equiv \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y), \end{aligned} \tag{2.20}$$

следующие из коммутативности операторов алгебры $\mathfrak{B}_0$ с $\mathbf{U}$. Так как $\mathfrak{T}_0^{(1)}$ является по условию идеалом в $\mathfrak{T}_0$, т. е. $[\mathfrak{T}_0^{(1)}, \mathfrak{T}_0] = \mathfrak{T}_0^{(1)}$, то множество функций T_r, аннулируемых операторами $\mathfrak{T}_0^{(1)}$, переводится операторами из $\mathfrak{T}$ снова в себя, как это следует из тождеств

$$\mathfrak{T}_0^{(1)}\mathfrak{T}_0\varphi(x) \equiv \mathfrak{T}_0^{(1)}\mathfrak{T}_0^{(1)}\varphi(x) \equiv 0, \quad \varphi(x) \in T_r.$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^{(1)}_{\chi\nu}\varphi_i(x)\equiv 0, \quad i=\overline{1,\ r};\\ \mathbf{M}_{\chi\nu}\varphi_i(x)\equiv\Phi^{(i)}_{\chi\nu}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_r)\equiv\Phi^{(i)}_{\chi\nu}(z), \quad \varphi_j(x)\in\mathrm{T}_r.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Используя формулы (2.20) и (2.21), перепишем оператор $\mathbf{N}_\nu$ в новых переменных:

$$\mathbf{N}_\nu=\sum_{i=1}^{r}\Psi_{0\nu}(y)F_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}+\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{\chi=1}^{m_\nu}\Psi_{\chi\nu}(y)(\Psi^{(j)}_{\chi\nu}(y)+\Psi^{(j)}_{\chi\nu}(y)\right]\frac{\partial}{\partial y_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{\chi=1}^{m_\nu}\Psi_{\chi\nu}(y)\,\Phi^{(i)}_{\chi\nu}(z)\right]\frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{2.22}$$

Восстанавливая по операторам (2.19), (2.22) систему централизатора, приходим к системе (2.17) для медленных и системе (2.18) для быстрых переменных.

Необходимость. Пусть в централизованной системе переменные разделены и она имеет вид систем (2.11) и (2.12). Тогда, как следует из структуры этой системы, оператор $\mathbf{U}=F_1(z)\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\ldots+F_r(z)\dfrac{\partial}{\partial z_r}$ и множество функций Р состоят из всех функций $F(y)\in\mathfrak{D}_0(G)$. Так как эти функции обращаются в ноль при $y_1=\ldots=y_k\equiv 0$, то в качестве базисного множества P_k можно выбрать функции $y_1,\ldots$ $\ldots,\ y_k$. Подалгебра $\mathfrak{T}_0$ порождается операторами

$$\mathbf{Y}_\nu=\sum_{j=1}^{k}\Phi_{\nu j}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad \nu=1,\ 2,\ldots, \tag{2.23}$$

и операторами

$$\mathbf{Z}_{\nu\chi}=\sum_{i=1}^{r}\xi^{(i)}_{\nu\chi}(z)\frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \chi=\overline{1,\ m_\nu}, \quad \nu=1,\ 2,\ldots$$

Как легко заметить, операторы $\mathbf{Y}_\nu$ (2.23) порождают идеал $\mathfrak{T}^{(1)}_0$ в алгебре $\mathfrak{T}_0$. Решениями системы уравнений $\mathbf{Y}_\nu f=0$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,$ являются функции $f(z_1,\ \ldots,\ z_r)\in\mathfrak{D}_0(G)$, а базисным множеством этой системы — функции $z_1,\ \ldots,\ z_r$.

По предположению централизованная система, образованная подсистемами (2.11) и (2.12), не может быть сведена к меньшему, чем n, числу переменных, и, следовательно, система функций $y_1,\ \ldots,\ y_k,$ $z_1,\ \ldots,\ z_r$, $k+r=n$, образует независимую систему функций в G. ■

§ 3. СВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ

Как было показано в предыдущих параграфах, реализация алгоритма асимптотической декомпозиции сводится к решению операторных уравнений вида

$$[\mathbf{U},\ \mathbf{S}]=\mathbf{F}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{U} = \omega_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n(x\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \mathbf{F} = b_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\cdots + b_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Приведенные операторы принадлежат к многообразиям $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$ или $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$ в зависимости от рассматриваемой задачи.

Отыскивая неизвестный оператор $\mathbf{S}$ в виде суммы

$$\mathbf{S} = \gamma_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{3.2}$$

где $\gamma_1(x). \ldots, \gamma_n(x) \in \mathfrak{D}(G)$ ($\mathfrak{D}_0(G)$), можно свести операторное уравнение к дифференциальному. В самом деле, вычислим левую часть уравнения (3.1). Подставим в скобку Пуассона оператор $\mathbf{S}$, выражаемый формулой (3.2):

$$\left[\mathbf{U},\ \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right].$$

Далее примем во внимание правило раскрытия скобок Пуассона

$$[\mathbf{A},\ \beta\mathbf{B}] = \mathbf{A}\beta\cdot\mathbf{B} + \beta[\mathbf{A},\ \mathbf{B}], \tag{3.3}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — операторы, β — скалярная функция. В результате от уравнения (3.1) перейдем к уравнению

$$\mathbf{U}\gamma_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{U}\gamma_n\frac{\partial}{\partial x_n} + \gamma_1(x)\left[\mathbf{U},\ \frac{\partial}{\partial x_1}\right] + \cdots$$
$$\cdots + \gamma_n\left[\mathbf{U},\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right] = b_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание вид оператора $\mathbf{U}$ и используя формулы (3.3), легко выписать скобки Пуассона:

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{U},\ \frac{\partial}{\partial x_1}\right] &= -\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\omega_n}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_n}\right);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\mathbf{U},\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right] &= -\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\omega_n}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

После подстановки значений (3.5) в уравнение (3.4) и приравнивания коэффициентов при производных получим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\gamma_1 &= \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\gamma_1 + \cdots + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n}\gamma_n + b_1(x);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{U}\gamma_n &= \frac{\partial\omega_n}{\partial x_1}\gamma_1 + \cdots + \frac{\partial\omega_n}{\partial x_n}\gamma_n + b_n(x).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Если обозначить $a_{ij} = \partial\omega_i/\partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$, то систему (3.6) можно представить следующим образом:

$$\mathrm{U}\gamma_j = a_{j1}(x)\gamma_1 + \cdots + a_{jn}(x)\gamma_n + b_j(x), \quad j = \overline{1, n}.$$

Введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{A} = \|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, векторы $\gamma = \mathrm{colon}\|\gamma_1, \ldots, \gamma_n\|$, $b(x) = \mathrm{colon}\|b_1(x), \ldots, b_n(x)\|$ и оператор $\mathrm{W} = \mathrm{U} \otimes \mathcal{E} - \mathcal{A}$, где $\mathrm{U} \otimes \mathcal{E} = \mathrm{diag}\|\underbrace{\mathrm{U}, \ldots, \mathrm{U}}_{n \text{ раз}}\|$, $\mathcal{E}$ — единичная матрица $n \times n$. Тогда систему (3.1) можно представить в компактном виде $\mathrm{W}\gamma = b$. Частным видом системы (3.6) является система

$$\mathrm{U}\gamma_1 = \tilde{b}_1(x), \ldots, \mathrm{U}\gamma_n = \tilde{b}_n(x). \tag{3.7}$$

Систему вида (3.6) или (3.7) будем называть системой Якоби. Наряду с неоднородной системой (3.6) будем также рассматривать однородную систему $\mathrm{W}\gamma = 0$. Очевидно, что к однородному уравнению приводит решение по описанному способу однородного операторного уравнения

$$[\mathrm{U}, \mathrm{S}] = 0. \tag{3.8}$$

Как легко убедиться, справедливо также обратное утверждение. Если $\gamma = \|\gamma_1, \ldots, \gamma_n\|$ — решение уравнения (3.6), то оператор

$$\mathrm{S} = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

является решением операторного уравнения (3.1). Таким образом, доказано, что задача решения операторного уравнения (3.1) эквивалентна задаче интегрирования системы Якоби (3.6).

За счет выбора специального базиса можно существенно упростить интегрирование операторного уравнения (3.1) и соответствующей ему системы Якоби (3.6). Подробно этот вопрос излагается в § 6 настоящей главы. Здесь же рассмотрим задачу сведения системы уравнений (3.6) к системе уравнений (3.7).

Пусть имеется n линейно несвязных решений $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n$ однородного операторного уравнения (3.8) и правые части уравнения (3.1) раскладываются по этому базису:

$$\mathrm{F} = \tilde{b}_1(x)\mathrm{Z}_1 + \cdots + \tilde{b}_n(x)\mathrm{Z}_n.$$

Решение S операторного уравнения (3.1) будем также искать в виде суммы

$$\mathrm{S} = \gamma_1(x)\mathrm{Z}_1 + \cdots + \gamma_n(x)\mathrm{Z}_n.$$

Для скобки Пуассона $[\mathrm{U}, \mathrm{S}]$ получим выражение

$$[\mathrm{U}, \gamma_1\mathrm{Z}_1 + \cdots + \gamma_n\mathrm{Z}_n] = \mathrm{U}\gamma_1\mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{U}\gamma_n\mathrm{Z}_n +$$
$$+ \gamma_1[\mathrm{U}, \mathrm{Z}_1] + \cdots + \gamma_n[\mathrm{U}, \mathrm{Z}_n] \equiv \mathrm{U}\gamma_1\mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{U}\gamma_n\mathrm{Z}_n,$$

так как $[\mathrm{U}, \mathrm{Z}_j] \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, соотношения (3.4) принимают вид

$$\mathrm{U}\gamma_1 \mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{U}\gamma_n \mathrm{Z}_n \equiv \tilde{b}_1 \mathrm{Z}_1 + \cdots + \tilde{b}_n \mathrm{Z}_n.$$

Приравнивая коэффициенты при базисных операторах, приходим к уравнениям Якоби в виде (3.7).

Интегрирование системы (3.6), как будет показано ниже, сводится к интегрированию системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а системы (3.7) — к квадратурам.

§ 4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим вопрос о реализации алгоритма асимптотической декомпозиции применительно к возмущенной системе

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x')$$

в том случае, когда в системе нулевого приближения[1]

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) \tag{4.1}$$

положение равновесия в некоторой замкнутой подобласти $\overline{G}$, $\overline{G} \subset G$, отсутствует. Это значит, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2(x) \neq 0 \tag{4.2}$$

выполняется во всех точках области $\overline{G}$.

Подобласть $H_0(x)$ области $\overline{G}$, $H_0(x) \subseteq \overline{G}$, в которой существуют $n-1$ независимых аналитических первых интегралов

$$v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x), \quad v_j(x) \in \mathfrak{D}(H_0), \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{4.3}$$

системы нулевого приближения (4.1), будем называть областью существования первых интегралов.

Таким образом, в области $H_0(x)$ уравнение в частных производных

$$\mathrm{U}f \equiv \omega_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{4.4}$$

имеет независимые аналитические решения (4.3), и любое решение $v(x) \in \mathfrak{D}(H_0)$ этого уравнения может быть выражено через эти решения: $v(x) = \varphi(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x))$, где $\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$ — аналитические в $H_0(x)$ функции. Выполнение условия (4.2) гарантирует наличие некоторой области $H_0(x)$ существования первых интегралов. В этой области алгоритм асимптотической декомпозиции может быть кон-

[1] Для упрощения записи штрих опускаем.

структивно реализован на основе классических теорем существования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этому вопросу будет посвящен настоящий параграф.

Прежде чем приступить к изложению основного материала, вкратце остановимся на построении области $H_0(x)$. Обозначим через $\overline{G}_i$ подобласть $\overline{G}$, в которой коэффициент $\omega_i(x) \neq 0$. Не исключено, что область $\overline{G}_i$ совпадает с $\overline{G}$ при некотором i. Зафиксируем один из коэффициентов $\omega_i(x)$, отдавая предпочтение тому из них, для которого область G_i максимальна. Для упрощения выкладок примем, что это коэффициент $\omega_n(x)$. Введем новые функции $f_1(x) = \frac{\omega_1}{\omega_n}, \ldots$ $\ldots, f_{n-1}(x) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$ и новые переменные $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, s = x_n$. Тогда уравнение (4.4) можно представить в виде

$$\partial f/\partial s + f_1(s, y)(\partial f/\partial y_1) + \cdots + f_{n-1}(s, y)(\partial f/\partial y_{n-1}) = 0,$$

где $y = \| y_1, \ldots, y_n \|$. Запишем соответствующую систему для характеристик

$$dy_1/ds = f_1(s, y), \ldots, dy_{n-1}/ds = f_{n-1}(s, y).$$

Обозначим через H_{0n} область $H_{0n} = [a_n, b_n] \times \overline{G}_n$, для которой любое аналитическое решение

$$y = y(s, s_0, y_0) \tag{4.5}$$

задачи Коши продолжается на весь интервал $[a_n, b_n]$. Очевидно, что этот интервал принадлежит максимальному интервалу существования решения задачи Коши для выбранных начальных условий (s_0, y_0).

Решение (4.5) является общим решением в форме Коши и однозначно разрешимо относительно переменных y_0 (см., например, [6, с. 135]):

$$y_{01} = y_1(s_0, s, y) \equiv v_1(x), \ldots, y_{0n-1} = y_{n-1}(s_0, s, y) \equiv v_{n-1}(x). \tag{4.6}$$

Функции (4.6) являются первыми интегралами системы нулевого приближения, независимыми в H_{0n}.

Так как в окрестности любой точки $x \in \overline{G}$ всегда в силу условий (4.2) можно найти коэффициент, не равный нулю, то по указанному алгоритму можно построить соответствующую область существования первых интегралов. Поэтому, не теряя общности рассуждений, будем считать, что $H_0(x) \equiv \overline{G}$.

Другой способ построения области $H_0(x)$ базируется на знании общего решения системы нулевого приближения (4.1), которое в форме Коши имеет вид

$$x_i = \varphi_i(t, t_0, x_0), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть в точке x_0 $\omega_n(x_0) \neq 0$. Тогда решением уравнения (4.1), проходящим через точку $y = \| y_1, \ldots, y_{n-1}, x_{0n} \|$, близкую к x_0, и обращающимся в y при $t = 0$, является

$$x_i = \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{4.7}$$

Теорема 4.1 [99, с. 193]. *Существует такая окрестность $\tilde{H}_0$ точки x_0, что при $x \in \tilde{H}_0$ система уравнений (4.7) разрешима относительно неизвестных $y_1, \ldots, y_{n-1}$, t и ее решение имеет вид*

$$y_1 = v_1(x), \; \ldots, \; y_{n-1} = v_{n-1}(x), \quad t = w(x), \tag{4.8}$$

где $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ — независимые первые интегралы системы (4.1) в области $\tilde{H}_0$.

Доказательство сформулированного утверждения основывается на использовании теоремы о неявных функциях. В качестве точки x_0 согласно неравенству (4.2) может быть выбрана произвольная точка области $\bar{G}$. Значит, последовательным продолжением можно получить всю однозначную ветвь функции (4.8). Утверждение теоремы 4.1 легко переносится на случай аналитических дифференциальных систем, когда функции (4.8) являются аналитическими в области $\tilde{H}_0$. ■

Перейдем непосредственно к исследованию алгоритма асимптотической декомпозиции в области H_0 существования первых интегралов. Определяющее значение при этом, как показано в § 1, имеет структура алгебры централизатора $\mathfrak{V}_0$, порождаемой всевозможными решениями операторного уравнения

$$[\mathbf{U}, \mathbf{Z}] = 0, \quad \mathbf{Z} \in \tilde{\mathfrak{V}}, \tag{4.9}$$

и алгебры $\mathfrak{V}_n \subset \tilde{\mathfrak{V}}$, допускаемой оператором $\mathbf{U}$: $[\mathbf{U}, \mathfrak{V}_n] = \mathfrak{V}_n$.

Множество функций P из $\mathfrak{D}(H_0)$, являющееся решением уравнения $\mathbf{U}f = 0$, где $\mathbf{U}$ — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения (4.1), обладает базисным множеством $\mathrm{P}_{n-1} = \{v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)\}$, составленным из первых интегралов (4.3).

Сформулируем основную теорему о структуре алгебр $\mathfrak{V}_0$ и $\mathfrak{V}_n$.

Теорема 4.2. *В области H_0 существования первых интегралов операторное уравнение $[\mathbf{U}, \mathbf{S}] = 0$, $\mathbf{S} \in \tilde{\mathfrak{V}}$, имеет n линейно несвязных решений $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$, $\mathbf{Z}_j \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0)$. Алгебра централизатора образована элементами вида*

$$\rho_1(x)\mathbf{Z}_1 + \cdots + \rho_n(x)\mathbf{Z}_n, \tag{4.10}$$

где $\rho_j(x) \in \mathrm{P}$, $j = \overline{1, n}$. Алгебра $\mathfrak{V}_n$, допускаемая оператором $\mathbf{U}$, образована элементами вида

$$\varphi_1(x)\mathbf{Z}_1 + \cdots + \varphi_n(x)\mathbf{Z}_n,$$

где $\varphi_j(x)$ — произвольные функции из $\mathfrak{D}(H_0)$. Произвольный элемент $\mathbf{F} \in \tilde{\mathfrak{V}}$ однозначно представим в виде суммы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{0\Delta} + \mathbf{F}_{0n}, \quad \mathbf{F}_{0\Delta} \in \mathfrak{V}_0, \quad \mathbf{F}_{0n} \in \mathfrak{V}_n. \tag{4.11}$$

Теорема 4.2 открывает путь к построению централизованной системы. Для этого в системе операторных уравнений вида (1.16)

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{4.12}$$

правые части представим в виде суммы: $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{\nu 0\Delta} + \mathbf{F}_{\nu 0n}$, где $\mathbf{F}_{\nu 0\Delta}$, $\mathbf{F}_{\nu 0n}$ — известные дифференциальные операторы, описываемые формулами

$$\mathbf{F}_{\nu 0_\Delta} = \sum_{j=1}^{n} g_{\nu j0}(x)\,\mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{F}_{\nu 0\Delta} \in \mathfrak{B}_0;$$
$$\mathbf{F}_{\nu 0n} = \sum_{j=1}^{n} g_{\nu j}(x)\,\mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{F}_{\nu 0n} \in \mathfrak{B}_n. \tag{4.13}$$

Определим проекцию $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$ оператора $\mathbf{F}_\nu$ в правой части уравнения (4.12) по формуле

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{F}_{\nu 0\Delta}. \tag{4.14}$$

Выбор оператора проектирования в виде (4.14) основывается на следующем утверждении.

Лемма 4.1. *Решение неоднородного уравнения*

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}] = \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{F}_0 \in \mathfrak{B}_0, \tag{4.15}$$

правая часть которого принадлежит алгебре централизатора $\mathfrak{B}_0$, *имеет вид*

$$\mathbf{S} = w(x)\,\mathbf{F}_0 + \mathbf{Z}, \tag{4.16}$$

где $w(x)$ *— решение неоднородного уравнения* $\mathbf{U}w(x) \equiv 1$, $\mathbf{Z}$ *— некоторый элемент алгебры* $\mathfrak{B}_0$.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой оператора (4.16) в уравнение (4.15).

Ниже будет показано, что если $x(t)$ — решение системы (4.1) нулевого приближения, то имеет место тождество $w(x(t)) \equiv t - t_0$, т. е. на траекториях системы нулевого приближения коэффициенты оператора (4.16) будут содержать члены, пропорциональные независимой переменной и называемые в нелинейной механике секулярными.

Следовательно, выбор оператора проектирования согласно соотношениям (4.14) гарантирует отсутствие в коэффициентах операторов преобразований $\mathbf{S}_\nu$ секулярных членов на траекториях системы нулевого приближения.

Введя обозначение $\mathbf{N}_\nu \equiv \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{F}_{\nu 0\Delta}$, представим централизованную систему (1.15) в виде

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon N x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.17}$$

где

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \varepsilon \mathbf{N}_2 + \cdots$$

Учитывая определение операторов $\mathbf{N}_\nu$ и формулы (4.13), централизованную систему можно записать более подробно:

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu g_{\nu j0}(x), \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.18}$$

Для завершения построения алгоритма декомпозиции в области H_0 существования первых интегралов остается доказать существование решения последовательности операторных уравнений

$$[\mathbf{U},\ \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu - \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{F}_{\nu(n)}, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots, \tag{4.19}$$

определяющих коэффициенты операторов преобразования $\mathbf{S}_\nu$.

Доказательству теоремы 4.2 и решению системы (4.19) будет посвящена оставшаяся часть параграфа. Однако, прежде чем перейти к изложению этого материала, рассмотрим свойства централизованной системы (4.18).

К системе (4.18) применимы основные теоремы § 2 настоящей главы. Формулировка теоремы 2.1 остается без изменений, поэтому нет необходимости ее повторять. В вопросе разделения переменных в централизованной системе на быстрые и медленные приходим к такому результату.

Используем в качестве новых переменных первые интегралы (4.3), а также функцию $w(x)$, являющуюся решением уравнения

$$\mathbf{U}w(x) = 1, \tag{4.20}$$

т. е. введем новые переменные по формулам

$$y_1 = v_1(x), \ldots,\ y_{n-1} = v_{n-1}(x), \quad s = w(x). \tag{4.21}$$

(Существование функции $w(x)$, аналитической в области H_0, а также обратимость преобразований (4.21) в H_0 будет доказана ниже.)

В результате замены (4.21) централизованная система (4.17) распадается на две подсистемы $n-1$-го и первого порядков. Система порядка $n-1$ содержит медленные переменные $y = \| y_1, \ldots, y_{n-1} \|$:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \Phi_{\nu j}(y_1, \ldots,\ y_{n-1}), \quad j = \overline{1,\ n-1}, \tag{4.22}$$

а система первого порядка содержит быструю переменную s:

$$\frac{ds}{dt} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \Lambda_\nu(y_1, \ldots,\ y_{n-1}) \tag{4.23}$$

и решается в квадратурах после интегрирования системы (4.22), зависящей от медленного времени $\tau = \varepsilon t$.

Нетрудно определить явный вид функций, входящих в правые части уравнений (4.22) и (4.23). Действительно, $\mathbf{U}v_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1,\ n-1}$, и $\mathbf{U}w(x) \equiv 1$. Далее,

$$\mathbf{N}_\nu v_j(x) \equiv \Phi_{\nu j}(y_1, \ldots,\ y_{n-1}),$$

так как операторы $\mathbf{N}_\nu$ и $\mathbf{U}$ коммутативны. Функция $w(x)$ переводится оператором $\mathbf{N}_\nu$ в некоторую функцию от $y_1, \ldots, y_{n-1}$, как это следует из тождества

$$(\mathbf{U}\mathbf{N}_\nu - \mathbf{N}_\nu\mathbf{U})\,w(x) \equiv \mathbf{U}\mathbf{N}_\nu w(x) \equiv 0, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots,$$

т. е.

$$\mathbf{N}_\nu w(x) \equiv \Lambda_\nu(y_1, \ldots,\ y_{n-1}).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3.2, найдем явный вид функции $w(x)$, являющейся решением уравнения (4.21).

Произведем в уравнении (4.20) замену переменных, используя в качестве новых переменных первые интегралы $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= v_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{n-1} &= v_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n);\\
z_n &= x_n.
\end{aligned} \qquad (4.24)
$$

Система функций (4.24) обратима в H_0 (см. формулы (4.6)):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n);\\
x_n &= z_n
\end{aligned} \qquad (4.25)
$$

В новых переменных уравнение (4.20) существенно упрощается:

$$
\omega_n(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z), \quad z_n)\frac{\partial f}{\partial z_n} = 1, \qquad (4.26)
$$

где принято $z = \| z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n \|$. Проинтегрируем уравнение (4.26):

$$
f = f_0 + \int\limits_{z_{n0}}^{z_n} \frac{dz_n}{\omega_n(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z), z_n)} \equiv F(z). \qquad (4.27)
$$

Уравнение (4.26) в новых переменных

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_1 &= z_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\tilde{z}_{n-1} &= z_{n-1};\\
\tilde{z}_n &= F(z_1, \ldots, z_{n-1}; z_n)
\end{aligned} \qquad (4.28)
$$

принимает особенно простой вид: $\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{z}_n} = 1$ и легко интегрируется: $f = \tilde{z}_n + \tilde{z}_{n0}$. Чтобы вернуться к исходным переменным, следует показать разрешимость в H_0 уравнения

$$
\tilde{z}_n = F(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, z_n). \qquad (4.29)
$$

Уравнение (4.29) имеет очевидное решение $\tilde{z}_n = \tilde{z}_{n0}$ при $z_n = \tilde{z}_n$. Кроме того,

$$
\frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z_n} = \frac{1}{\omega_n(\varphi(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}), z_n)} \neq 0,
$$

когда $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, \tilde{z}_n$ находятся в области H_0. Согласно теореме о неявных функциях существует аналитическое однозначное решение в окрестности каждой точки из H_0, которое можно продолжить на всю область H_0.

Приведем обратную к замене (4.28) систему функций:

$$z_1 = \tilde{z}_1;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$z_{n-1} = \tilde{z}_{n-1};$$
$$z_n = \psi(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, \tilde{z}_n).$$

Так как каждое из преобразований (4.24), (4.25) обратимо, то и композиция преобразований

$$\tilde{z}_1 = v_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n);$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\tilde{z}_{n-1} = v_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n);$$
$$\tilde{z}_n = F(v_1(x), \ldots, (v_{n-1}(x), x_n) \equiv w(x)$$

обратима в H_0 и представима функциями

$$x_1 = \varphi_1(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, \psi(\tilde{z}));$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x_{n-1} = \varphi_{n-1}(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, \psi(\tilde{z}));$$
$$x_n = \psi(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, \tilde{z}_n).$$

Таким образом, решение исходного уравнения (4.20) представимо функцией $w(x) = F(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x), x_n) + v(x)$, где $v(x)$ — произвольное решение однородного уравнения $Uf = 0$. Решение $w(x)$ неоднородного уравнения (4.20) обладает рядом интересных свойств.

Лемма 4.2. *Для функции $w(x)$ (4.27) на траекториях системы нулевого приближения имеет место тождество*

$$w(x(t)) \equiv t - t_0. \tag{4.30}$$

Доказательство. Продифференцируем левую часть тождества (4.30):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \equiv \omega_1(x)\frac{\partial w}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\cdots + \omega_n(x)\frac{\partial w}{\partial x_n}.$$

Здесь использованы тождества $\frac{dx_j(t)}{dt} \equiv \omega_j(x(t))$, $j = \overline{1, n}$. Согласно определению функции $w(x)$ при любом $x \in H_0$ для нее справедливо тождество $Uw(x) \equiv 1$ и, следовательно, $dw/dt \equiv 1$ или $w(x(t)) \equiv$

$\equiv t - t_0$, $t_0 = w(x_0)$. Для доказательства обратного утверждения продифференцируем обе части тождества по t:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n(t)}{dt} \equiv 1.$$

Заменим производные dx_j/dt функциями $\omega_j(x(t))$, $j = \overline{1, n}$, и положим $t = t_0$. В результате тождества (4.30) можно представить в виде

$$\omega_1(x_0)\frac{\partial w(x_0)}{\partial x_{10}} + \cdots + \omega_n(x_0)\frac{\partial w(x_0)}{\partial x_{n0}} \equiv 1. \tag{4.31}$$

Точка x_0 может быть выбрана в H_0 произвольно и поэтому в (4.31) x_0 можно заменить на x. Следовательно, $\mathrm{U}w(x) \equiv 1$. ■

Следствие 4.1. Функция $\tilde{t} = w(x)$, фигурирующая в формулировке теоремы 4.1, является решением неоднородного уравнения (4.20).

Доказательство теоремы 4.2. Будем искать оператор в уравнении (4.9) в виде $\mathrm{S} = \gamma_1\partial/\partial x_1 + \ldots + \gamma_n\partial/\partial x_n$. Согласно результатам § 3 от уравнения (4.9) можно перейти к системе Якоби

$$\begin{aligned} \mathrm{U}\gamma_1 &= a_{11}(x)\gamma_1 + \cdots + a_{1n}(x)\gamma_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{U}\gamma_n &= a_{n1}(x)\gamma_1 + \cdots a_{nn}(x)\gamma_n. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Произведем в системе (4.32) замену переменных по формулам (4.21). При этом оператор U в новых переменных примет особо простой вид: $\mathrm{U} = \partial/\partial s$, а система Якоби перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} &= \tilde{a}_{11}(s)\gamma_1 + \cdots + \tilde{a}_{1n}(s)\gamma_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\gamma_n}{\partial s} &= \tilde{a}_{n1}(s)\gamma_1 + \cdots + \tilde{a}_{nn}(s)\gamma_n. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Здесь $\tilde{a}_{ij}(s) = a_{ij}(\varphi_1(y, \psi(y, s)), \ldots, \varphi_{n-1}(y, \psi(y, s)))$, $i, j = \overline{1, n}$. Выпишем матрицу фундаментальных решений системы (4.33):

$$\Gamma(s, y) = \left\| \begin{matrix} \gamma_{11}(s, y) & \cdots & \gamma_{1n}(s, y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1}(s, y) & \cdots & \gamma_{nn}(s, y) \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma(s_0) = \mathscr{E}; \tag{4.34}$$

ее коэффициенты являются аналитическими функциями переменной s и параметров $y = \| y_1, \ldots, y_{n-1} \|$ в H_0. Каждый столбец матрицы (4.34) определяет дифференциальный оператор

$$\mathbf{Z}_j = \gamma_{1j}(v(x), w(x))\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_{nj}(v(x), w(x))\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{4.35}$$

где $v = \| v_1, \ldots, v_{n-1} \|$, $j = \overline{1, n}$. Эти операторы линейно несвязны в H_0, так как $\det\|\Gamma(s, y)\| \neq 0$.

Пусть $\mathbf{Z}$ — некоторые решения уравнения (4.8), $\mathbf{Z} \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0)$. Тогда, раскладывая $\mathbf{Z}$ по базису (4.35): $\mathbf{Z} = \rho_1(x)\,\mathbf{Z}_1 + \ldots + \rho_n(x)\,\mathbf{Z}_n$ и подставляя в формулу (4.9), получаем тождество

$$\mathrm{U}\rho_1(x)\,\mathbf{Z}_1 + \cdots + \mathrm{U}\rho_n(x)\,\mathbf{Z}_n = 0. \tag{4.36}$$

В силу линейной несвязности базисных операторов из тождества (4.36) следуют тождества $\mathrm{U}\rho_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$. Таким образом, $\rho_j(x) \in \mathrm{P}$ и тем самым доказано утверждение (4.10).

Перейдем к доказательству формулы (4.11). С этой целью рассмотрим произвольный линейный оператор

$$\mathbf{F} = g_1(x)\,\mathbf{Z}_1 + \cdots + g_n(x)\,\mathbf{Z}_n, \quad g_1(x), \ldots, g_n(x) \in \mathfrak{D}(H_0). \tag{4.37}$$

Для скобки Пуассона $[\mathbf{U}, \mathbf{F}]$ получаем выражение

$$[\mathbf{U}, \mathbf{F}] = \mathrm{U}g_1(x)\,\mathbf{Z}_1 + \cdots + \mathrm{U}g_n(x)\,\mathbf{Z}_n.$$

Следовательно, совокупность операторов вида (4.37) переводится оператором $\mathbf{U}$ в операторы того же вида и порождает алгебру $\mathfrak{B}_n$, допускаемую оператором $\mathbf{U}$. Очевидно, что любой из операторов $\mathbf{F} \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0)$ может быть записан в виде (4.37). Выделим в операторе (4.37) составляющую из алгебры централизатора $\mathfrak{D}_0$. С этой целью покажем, что коэффициенты $g_j(x)$ единственным образом могут быть представлены в виде суммы двух функций:

$$g_j(x) = g_{j0}(x) + \tilde{g}_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.38}$$

где $g_{j0}(x)$ — решение уравнения (4.4), т. е. $\mathrm{U}g_{j0}(x) \equiv 0$. Действительно, перейдем в коэффициентах $g_j(x)$ к переменным (4.21):

$$g_j(x) = g_j(\varphi_1(y, \psi(y, s)), \ldots, \varphi_{n-1}(y, \psi(y, s))). \tag{4.39}$$

Функции (4.39) аналитичны по переменным y и s. Разложим их в ряд по s:

$$g_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi) = g_{j0}(y) + \frac{s}{1!}\left.\frac{dg_j(s, y)}{ds}\right|_{s=0} + \cdots \tag{4.40}$$

Первый член этого разложения $g_{j0}(y)$ является решением уравнения $\partial f/\partial s = 0$ или в прежних переменных x — решением уравнения $\mathrm{U}f = 0$, т. е. $\mathrm{U}g_{j0}(v(x)) \equiv 0$. Возвращаясь к переменным x, получаем требуемое разложение (4.38). Из однозначности разложения (4.40) следует однозначность разложения (4.38). Следовательно, оператор $\mathbf{F}$ (4.37) может быть единственным образом представлен суммой $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{0\Delta} + \mathbf{F}_{0n}$, где

$$F_{0\Delta} = \sum_{j=1}^{n} g_{j0}(x)\,\mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{F}_{0n} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_j(x)\,\mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{F}_{0\Delta} \in \mathfrak{B}_0, \quad \mathbf{F}_{0n} \in \mathfrak{B}_n. \tag{4.41}$$

Тем самым доказано последнее утверждение теоремы 4.2. ■

Замечание 4.1. Матрица фундаментальных решений (4.34) может быть определена без интегрирования системы уравнений (4.33). Действительно, операторное уравнение (4.9) в переменных y, s

имеет вид $[\partial/\partial s, \mathbf{Y}] = 0$; при этом легко указать базисную систему операторов алгебры $\mathfrak{B}_0$, коммутирующих между собой:

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \mathbf{Y}_{n-1} = \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \quad \mathbf{Y}_n = \frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{4.42}$$

где принято $y_n \equiv s$. Пусть в прежних переменных x каждый из операторов (4.22) имеет вид

$$\mathbf{Y}_j = \eta_{j1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \eta_{jn}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.43}$$

Операторы $\mathbf{Y}_j$ являются решениями уравнения (4.8), а векторы их коэффициентов $\eta_j(x) = \mathrm{colon}\,\|\eta_{j1}(x), \ldots, \eta_{jn}(x)\|$ — решениями системы Якоби (4.32). Следовательно, матрица фундаментальных решений (4.34) может быть образована из векторов $\eta_j(\varphi(y, s), \psi(y, s))$, $j = \overline{1, n}$.

Перейдем к последнему этапу обоснования алгоритма асимптотической декомпозиции в H_0 — нахождению операторов преобразования $\mathbf{S}_\nu$ из последовательности неоднородных операторных уравнений (4.2).

Согласно доказанной теореме 4.2 правые части уравнений (4.19) определены и записываются в виде суммы (см. формулы (4.41)) $\mathbf{F}_{\nu 0n} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{\nu j}(x)\,\mathbf{Z}_j$. Как следует из изложенного выше, коэффициенты $\gamma_\nu = \|\gamma_{\nu 1}, \ldots, \gamma_{\nu n}\|$ оператора $\mathbf{S}_\nu$ определяются из неоднородной системы Якоби

$$\mathbf{U}\gamma_{\nu 1} = a_{11}(x)\gamma_{\nu 1} + \cdots + a_{1n}(x)\gamma_n + \tilde{g}_{\nu 1}(x);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{U}\gamma_{\nu n} = a_{n1}(x)\gamma_{\nu 1} + \cdots + a_{nn}(x)\gamma_{\nu n} + \tilde{g}_{\nu n}(x).$$

После перехода к переменным y, s (по формулам (4.21)) решение выписанной системы сводится к более простой задаче — нахождению частного решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_{\nu 1}}{\partial s} &= \tilde{a}_{11}(s)\gamma_{\nu 1} + \cdots + \tilde{a}_{1n}(s)\gamma_{\nu n} + \tilde{g}_{\nu 1}(s); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\gamma_{\nu n}}{\partial s} &= \tilde{a}_{n1}(s)\gamma_{\nu 1} + \cdots + \tilde{a}_{nn}(s)\gamma_{\nu n} + \tilde{g}_{\nu n}(s). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Так как фундаментальная матрица (4.34) соответствующей однородной системы известна, то нахождение частного решения системы (4.44) сводится к квадратурам и последующему переходу к переменным x.

З а м е ч а н и е 4.2. Если в качестве базиса алгебры $\mathfrak{B}$ вместо операторов (4.35) выбрать систему коммутирующих между собой операторов (4.43), то интегрирование системы (4.44) приводится непосредственным квадратурам (см. § 3):

$$\frac{\partial \gamma_{\nu 1}}{\partial s} = \tilde{g}_{\nu 1}(s);$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \gamma_{\nu n}}{\partial s} = \tilde{g}_{\nu n}(s).$$

§ 5. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПРИБЛИЖЕНИЙ

Основная идея метода асимптотической декомпозиции, рассмотренного в предыдущих параграфах, состояла в сопоставлении исходной возмущенной системы

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x') \tag{5.1}$$

с централизованной системой

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon \mathbf{N}(x)\, x_j, \quad j = \overline{1,\ n}, \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{N}_1(x) + \varepsilon \mathbf{N}_2(x) + \ldots, \quad [\mathbf{U},\ \mathbf{N}_\nu] \equiv 0, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots, \tag{5.3}$$

получаемой из исходной с помощью замены переменных в виде рядов Ли

$$x_j' = \exp(\varepsilon \mathbf{S})\, x_j, \quad j = \overline{1,\ n}. \tag{5.4}$$

Здесь

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon \mathbf{S}_2 + \varepsilon^2 \mathbf{S}_3 + \cdots \tag{5.5}$$

Вопросы обоснования алгоритма не затрагивались, так как для этого потребовалось бы доказывать аналитичность функций в правой части соотношений (5.2) и аналитичность функций преобразований (5.4), что в случае бесконечного числа слагаемых в суммах (5.3) и (5.5) представляет значительные трудности. Более того, в некоторых случаях она просто может отсутствовать.

Задача обоснования существенно упрощается, если ограничиться конечным числом слагаемых в суммах (5.3) и (5.5). Заметим, что в практических вычислениях ввиду их сложности именно так и поступают.

Поэтому будем сопоставлять возмущенную систему (5.1) с укороченной централизованной системой

$$\frac{dx_j^{(m)}}{dt} = \omega_j(x^{(m)}) + \varepsilon \mathbf{N}^{(m)}(x^{(m)})\, x_j^{(m)} + \varepsilon^{m+1}\, \Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)},\ \varepsilon), \quad j = \overline{1,\ n}, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{N}^{(m)}(x^{(m)}) = \mathbf{N}_1(x^{(m)}) + \varepsilon \mathbf{N}_2(x^{(m)}) + \cdots + \varepsilon^{m-1}\mathbf{N}_m(x^{(m)})$; $\Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)},\ \varepsilon)$ — известные аналитические функции.

Укороченная централизованная система (5.6) совпадает до членов порядка ε^m с централизованной системой. Индекс m в новых переменных $x_j^{(m)}$, $j = \overline{1, n}$, подчеркивает этот факт.

Для получения системы (5.6) вместо замены переменных (5.3) вводим укороченное преобразование

$$x_j' = \exp(\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(x^{(m)}))\, x_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{S}^{(m)}$ обозначает сумму m первых членов ряда (5.2):

$$\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon \mathbf{S}_2 + \cdots + \varepsilon^{m-1}\mathbf{S}_m. \tag{5.8}$$

Не представляет труда установить точный вид укороченной системы (5.6), т. е. функций $\Phi_j^{(m+1)}$, так как оператор $\mathbf{U}_0' = \tilde{\mathbf{U}} + \varepsilon\tilde{\mathbf{U}}'$, ассоциированный с системой (5.1), после укороченного преобразования принимает вид

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{N}_1 + \cdots + \varepsilon^m \mathbf{N}_m + \varepsilon^{m+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-m-1} \mathbf{F}_\nu(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_m).$$

Здесь первые $m + 1$ слагаемых полностью совпадают с таковыми в операторе (1.18) централизованной системы (5.2). Функции $\mathbf{F}_\nu$ легко определить, если в формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] + \mathbf{F}_1) + \cdots + \varepsilon^m(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_m] + \mathbf{F}_m) + \\ + \varepsilon^{m+1}(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_{m+1}] + \mathbf{F}_{m+1}), \ldots$$

положить $\mathbf{S}_{m+1} \equiv \mathbf{S}_{m+2} \equiv \ldots \equiv 0$. Таким образом,

$$\Phi_j^{(m+1)} \equiv \left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-m-1} \mathbf{F}_\nu \right) x_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Так как сумма (5.8) состоит из конечного числа слагаемых, то преобразование (5.7) является аналитическим. Следовательно, возмущенная система (5.1) преобразуется в систему (5.6), правые части которой также являются аналитическими функциями.

Систему (5.6) легко проинтегрировать приближенно с достаточно высокой (порядка ε^{m+1}) степенью точности, если рассмотреть вместо нее систему

$$\frac{d\bar{x}_j^{(m)}}{dt} = \omega_j(\bar{x}^{(m)}) + \varepsilon \mathbf{N}^{(m)} \bar{x}_j^{(m)}, \tag{5.9}$$

где $\bar{x}^{(m)} = \operatorname{colon} \| \bar{x}_1^{(m)}, \ldots, \bar{x}_n^{(m)} \|$, полученную из системы (5.6) отбрасыванием слагаемых порядка ε^{m+1}.

Систему (5.9) будем называть централизованной системой m-го приближения. К ней применимы основные теоремы 2.1 и 2.2, упрощающие интегрирование централизованной системы. Например, применяя к системе (5.9) теорему 2.1, можно ее решение представить в виде ряда Ли

$$\bar{x}_j^{(m)} = \exp(\tau \mathbf{N}^{(m)}(\bar{z}^{(m)}))\bar{z}_j^{(m)}, \quad \tau = \varepsilon(t - t_0), \tag{5.10}$$

где вектор $\bar{z}^{(m)} = \operatorname{colon} \| \bar{z}_1^{(m)}, \ldots, \bar{z}_n^{(m)} \|$ является решением системы

$$\frac{d\bar{z}^{(m)}}{dt} = \omega(\bar{z}^{(m)}), \tag{5.11}$$

совпадающей с точностью до обозначений с системой нулевого приближения

$$\frac{d\tilde{x}'}{dt} = \omega(\tilde{x}') \tag{5.12}$$

исходной возмущенной системы (5.1).

Подстановка в формулы (5.7) вместо точного решения $x^{(m)}(t)$ укороченной централизованной системы (5.6) решения $\bar{x}^{(m)}(t)$ централизованной системы m-го приближения (5.9) даст некоторое приближенное значение решения $x'(t)$ исходной возмущенной системы

$$x_j'(t) \sim \bar{x}_j^{(m)'} = \exp[\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(\bar{x}^{(m)})]\, x_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Нахождение точной оценки для модулей разностей $| x_j'(t) - x_j^{(m)'} |$, $j = \overline{1, n}$, является главной задачей настоящего параграфа. Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые дополнительные понятия.

Будем рассматривать систему (5.1) в области $G_{0\varepsilon} = I \times I_\varepsilon \times H_0(x)$, $t \in I$, $I = [a, b]$, $I_\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, где $H_0(x)$ — область существования первых интегралов системы нулевого приближения (5.12). Рассмотрим решение системы нулевого приближения (5.12) $\tilde{x}' = \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$, являющееся аналитической функцией t, t_0, x_0 в области задания $D = \{(t, t_0, x_0): t \in I(t_0, x_0),\ t_0, x_0 \in G_{0\varepsilon}\}$, где $I(t_0, x_0)$ — максимальный интервал существования решения. Так как правые части возмущенной системы (5.1) являются аналитическими функциями x', ε в области $G_{0\varepsilon}$, то к ней применима теорема Пуанкаре [20, 24]. Следовательно, можно указать область изменения параметра ε $I_{\varepsilon_0} = \{0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0\}$ такую, что решение возмущенного уравнения $x' = x'(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, $x'(t_0) = x_0$, где t, $t_0 \in [a, b]$, $[a, b] \in I(t_0, x_0)$, $\varepsilon(t_0, x_0) \in I_{\varepsilon_0}$, представляет собой аналитическую функцию переменных $(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, обращающуюся в решение системы нулевого приближения при $\varepsilon = 0$: $x'(t, t_0, x_0, 0) \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$. Область I_{ε_0} будем называть областью Пуанкаре. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть возмущенная система с вещественно-аналитическими коэффициентами (5.1) рассматривается в области $G_{0\varepsilon} = I \times I_{\varepsilon 0} \times H_0(x)$, где $H_0(x)$ — область существования первых интегралов системы нулевого приближения, $I_{\varepsilon 0}$ — область Пуанкаре изменения параметра ε, $I = [a, b]$ — интервал, входящий в максимальный интервал $I(t_0, x_0)$ существования аналитического решения $\tilde{x}'(t) = \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in G_{0\varepsilon}$, системы нулевого приближения (5.12); функция $x'(t, \varepsilon) \equiv x'(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, $x'(t_0) \equiv x_0$, где t, $t_0 \in [a, b]$, $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$, является аналитическим решением системы (5.1), совпадающим с решением системы нулевого приближения при $\varepsilon = 0$: $x'(t, t_0, x_0, 0) \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$.*

Тогда для произвольного $\delta > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon(\delta)$, *что при всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\delta)]$ *для решения* $x'(t)$ *исходной системы (5.1) и решения* $\tilde{x}^{(m)\prime}(t)$ *централизованной системы* m*-го приближения*

$$\bar{x}_j^{(m)\prime}(t, \varepsilon) = \exp[\tau \mathbf{N}^{(m)}(\bar{z}^{(m)})] \exp[\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(\bar{z}^{(m)})]\, \bar{z}_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.13}$$

где $\bar{z}_j^{(m)} \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$, $\tau = \varepsilon(t - t_0)$, *имеют место неравенства*

$$|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j^{\prime(m)}(t, \varepsilon)| < \delta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.14}$$

а также соотношения

$$|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j^{\prime(m)}(t, \varepsilon)| \equiv O(\varepsilon^{m+1}), \quad j = \overline{1, n}, \text{ для всех } t, t_0 \in [a, b]. \tag{5.15}$$

Следствие 5.1. Пусть любое решение $\tilde{x}'(t, t_0, x_0)$ системы нулевого приближения (5.12) в области $G_0 = (T_1, T_2) \times H_0(x)$ продолжимо на весь интервал (T_1, T_2), тогда можно указать такой интервал $I\varepsilon_{0T} = [0, \varepsilon_{0T}] \in I_{\varepsilon_0}$, что соотношения (5.14), (5.15) имеют место для произвольной точки

$$(t, t_0, x_0, \varepsilon) \in [a, b] \times [a, b] \times H_0 \times [0, \varepsilon_{0T}], \quad [a, b] \in (T_1, T_2).$$

Следствие 5.2. Пусть решение $\tilde{x}'(t, t_0, x_0)$ системы нулевого приближения (5.12), проходящее через точку $x_0 \in H_0(x)$, продолжимо на весь интервал $[0, \infty)$, ограничено при всех $t \in [0, \infty)$ и не выходит за пределы компакта $\bar{V}(x_0) \in H_0$, т. е.

$$V(x_0) \equiv \{(t, t_0, x) : t, t_0 \in [0, \infty), \ x = \tilde{x}'(t, t_0, x_0) \subseteq \bar{V}(x_0) \in H_0\},$$

и ряд Ли

$$\exp[t\mathbf{N}^{(m)}(x)]\, x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.16}$$

сходится при всех значениях $t \in [0, \infty)$, $x \in \bar{V}(x_0)$; тогда для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ и сколь угодно большого числа $L > 0$ можно указать такой интервал изменения ε, $I_{\varepsilon 0L} = [0, \varepsilon_{0L}]$, что соотношение (5.14) имеет место для произвольной точки

$$(t, t_0, \varepsilon) \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{\varepsilon^{m+1}}\right] \times \left[t_0, t_0 + \frac{L}{\varepsilon^{m+1}}\right] \times I_{\varepsilon 0L}, \quad t, t_0 \in [0, \infty). \tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем в укороченной централизованной системе (5.6) замену переменных

$$x_j^{(m)} = \exp[\tau \mathbf{N}^{(m)}(z^{(m)})]\, z_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.18}$$

где $z^{(m)} = \operatorname{colon} \| z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)} \|$ — вектор переменных, выбрав за основу вид преобразования (5.10), приводящего централизованную систему m-го приближения к системе (5.11) нулевого приближения. Дословно повторяя несложные выкладки, применяемые при доказательстве теоремы 2.1, приведем систему (5.6) к виду

$$\frac{dz_j^{(m)}}{dt} = \omega_j\left(z^{(m)}\right) + \varepsilon^{m+1}\Psi^{(m+1)}\left(z^{(m)},\ \varepsilon\right), \quad j = \overline{1,\ n}, \tag{5.19}$$

где $\Psi_j^{(m+1)}\left(z^{(m)},\ \varepsilon\right)$ — известные аналитические функции.

Система (5.19) является возмущенной по отношению к системе

$$\frac{dz^{(m)}}{dt} = \omega\left(z^{(m)}\right), \tag{5.20}$$

совпадающей с точностью до обозначений с системой нулевого приближения (5.12). Будем рассматривать поведение решения возмущенной системы (5.19) в окрестности решения $\bar{z}^{(m)}(t) \equiv \tilde{x}'(t,\ t_0,\ x_0)$, $\bar{z}^{(m)}(t_0) = x_0$ системы (5.20). С этой целью применим метод малого параметра Пуанкаре (см. [20, 24]). Произведем в системе (5.19) замену переменных $z^{(m)} = y + \bar{z}^{(m)}$, где $y = \operatorname{colon}\|y_1,\ \ldots,\ y_n\|$ — вектор новых переменных. В результате система (5.19) перейдет в систему

$$\frac{dy}{dt} = \omega\left(y + \bar{z}^{(m)}\right) - \omega\left(\bar{z}^{(m)}\right) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Psi}^{(m+1)}(t,\ y,\ \varepsilon), \tag{5.21}$$

где $\tilde{\Psi}^{(m+1)} = \operatorname{colon}\|\tilde{\Psi}_1^{(m+1)},\ \ldots,\ \tilde{\Psi}_n^{(m+1)}\|$ — известные аналитические функции.

Решение системы (5.21) будем искать в виде ряда

$$y = \varepsilon y^{(1)}(t) + \varepsilon^2 y^{(2)}(t) + \cdots \tag{5.22}$$

Опуская все выкладки, связанные с записью уравнений для определения функций $y^{(j)}(t)$, $y^{(j)}(t_0) \equiv 0$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ отметим, что ряд (5.22) будет начинаться с членов порядка ε^{m+1}, так как в правой части системы (5.21) разложения по ε также начинаются со степени ε^{m+1}. Таким образом,

$$y = \varepsilon^{m+1}y^{(m+1)}(t) + \varepsilon^{m+2}y^{(m+2)}(t) + \cdots \tag{5.23}$$

Пусть M обозначает верхнюю границу модуля функций, стоящих в правых частях уравнений (5.21), когда t, t_0 изменяются в интервале $[a,\ b]$ и переменные y и ε достаточно малы: $|y_j| \leqslant \rho$, $j = \overline{1,\ n}$, $|\varepsilon| \leqslant \rho$, где ρ — некоторое малое фиксированное число; тогда ряд (5.23) сходится при условии, что ε удовлетворяет неравенству (см. [20, с. 159])

$$\left| e^{n\frac{M}{\rho}(t-t_0)} \frac{\varepsilon\rho}{(\rho+\varepsilon)^2} \right| < \frac{1}{4}, \quad t,\ t_0 \in [a,\ b]. \tag{5.24}$$

Таким образом, решение исходной системы (5.19) можно представить в виде суммы:

$$z^{(m)}(t,\ \varepsilon) = \bar{z}^{(m)}(t) + \varepsilon^{m+1}y(t,\ \varepsilon), \tag{5.25}$$

где $z^{(m)}(t) = \tilde{x}'(t,\ t_0,\ x_0)$, $y(t,\ \varepsilon) = y^{(m+1)}(t) + \varepsilon y^{(m+2)}(t) + \cdots$ — ряд, полученный из соотношений (5.23). В силу сходимости ряда

(5.23) найдется постоянная $M_0^{(m)}$ такая, что имеет место неравенство $|y(t, \varepsilon)| \leqslant M_0^{(m)}$. Поэтому для модуля разности $|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t)|$ справедлива оценка

$$|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t)| \leqslant \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)}. \tag{5.26}$$

Как видно из оценки (5.26), разность $|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)|$ как функция ε эквивалентна бесконечно малой величине ε^{m+1}, т. е. $|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t)| = O(\varepsilon^{m+1})$. Из неравенств (5.26) следуют неравенства

$$\bar{z}_j^{(m)}(t) - \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)} \leqslant z_j^{(m)} \leqslant \bar{z}_j^{(m)}(t) + \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)}.$$

Итак, за счет выбора параметра ε можно добиться, чтобы решение $z^{(m)}(t, \varepsilon)$ находилось в сколь угодно малой окрестности решения системы нулевого приближения и не выходило из области $H_0(x)$.

Запишем последовательную композицию преобразований (5.7), (5.18) в виде одного выражения

$$x_j'(t, \varepsilon) = \exp[\tau \mathbf{N}^{(m)}(z^{(m)}) \exp(\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(z^{(m)})] z_j^{(m)}(t, \varepsilon). \tag{5.27}$$

Как следует из теоремы 2.3 гл. 1, за счет выбора достаточно малых значений $\tau = \varepsilon(b-a)$ и ε можно добиться, чтобы ряд Ли в правой части соотношений (5.27) сходился в любой замкнутой подобласти $H_0(x)$ и значения ряда не выходили из нее. Пусть этот факт имеет место при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1$. Аналитической функцией при изменении ε в указанном интервале будет также преобразование, обратное (5.27), и его значения не будут выходить из области $H_0(x)$.

Таким образом, если выбрать ε из условия $\varepsilon \in (0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1) \cap \cap (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$, то все проводимые выше преобразования делаются правомерными.

Для получения оценки решений в исходных переменных подставим решение (5.25) укороченной централизованной системы в формулы (5.27). В итоге получим

$$x_j'(t, \varepsilon) = x_j'^{(m)}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} y_j'^{(m)}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.28}$$

где $x_j'^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp[\tau \mathbf{N}^{(m)}(\bar{z}^{(m)})] \exp[\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(\bar{z}^{(m)})] \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)$ — решение централизованной системы m-го приближения, $y_j'^{(m)}(t, \varepsilon)$ — известная аналитическая функция.

В силу абсолютной сходимости рядов в правой и левой частях равенств (5.28) и свойств их перестановочности из (5.28) следует оценка $|x'(t, \varepsilon) - x_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)}$, где $M_0^{(m)}$ — константа, ограничивающая сверху сходящийся ряд $y_j'^{(m)}(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$. Выбирая ε из условия $\varepsilon^{m+1} M_0^{(m)} < \delta$, получаем доказываемые оценки (5.14), (5.15). ■

Следствие 5.1 очевидно, так как все рассуждения можно повторить для произвольной точки $(t_0, x_0) \in G_{0\varepsilon}$. Для доказательства следствия 4.2 обратимся к укороченной централизованной системе (5.19). Точка x_0 не является положением равновесия, и в некоторой ее окрестности $W(x_0)$ выражения

$$x = \tilde{x}'(t, t_0, x_0), \tag{5.29}$$

являющиеся решениями системы нулевого приближения, можно разрешить относительно переменных x_0 и получить n интегралов: $x_{0j} = \varphi_j(t, t_0, x)$, $j = \overline{1, n}$.

Так как решение системы (5.20), являющейся системой нулевого приближения для (5.19), также ищем в виде (5.29), то в системе (5.19) произведем замену переменных $z^{(m)} = \tilde{x}'(t, t_0, c)$, $c = \varphi(t, t_0, z^{(m)})$, считая $c = \operatorname{colon} \| c_1, \ldots, c_n \|$ новыми переменными. В результате система (5.19) переходит в новую систему

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon^{m+1} \Omega(t, c, \varepsilon), \tag{5.30}$$

где $\Omega(t, c, \varepsilon) = \operatorname{colon} \| \Omega_1, \ldots, \Omega_n \|$ — известные аналитические функции t, c, ε.

Особенностью системы (5.30) является пропорциональность ее правых частей параметру ε^{m+1}. Система нулевого приближения $dc/dt = 0$, полученная из (5.30) при $\varepsilon = 0$, имеет решение $c \equiv x_0$, $t = t_0$.

Совершим в системе (5.30) замену переменных $\bar{c} = c - x_0$, в результате получим систему

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \varepsilon^{m+1} \tilde{\Omega}(t, \bar{c}, \varepsilon), \quad c \equiv 0 \text{ при } t = t_0. \tag{5.31}$$

Функции $\tilde{\Omega}_j(t, \bar{c}, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, в правых частях системы (5.35) ограничены в силу сделанных предположений: $|\tilde{\Omega}_j(t, \bar{c}, \varepsilon)| < M$, t_0, $t \in [0, \infty)$, когда $\bar{c}$, ε достаточно малы и не выходят из области $|\bar{c}| \leqslant \rho$, $\varepsilon \leqslant \rho$.

Применяя к системе (5.31) метод малого параметра Пуанкаре, можно представить ее решение сходящимся по ε рядом

$$\bar{c} = \varepsilon^{m+1} \bar{c}^{(m+1)} + \varepsilon^{m+2} \bar{c}^{(m+2)} + \ldots, \tag{5.32}$$

если параметр ε достаточно мал и удовлетворяет неравенству

$$\left| e^{n \frac{M}{\rho} \varepsilon^{m+1}(t - t_0)} \frac{\varepsilon\rho}{(\rho + \varepsilon)^2} \right| < \frac{1}{4}. \tag{5.33}$$

Пусть интервал изменения независимой переменной t ограничен числом t_1 и пусть ε удовлетворяет неравенству (5.33). Тогда, обозначая $\varepsilon^{m+1}(t_1 - t_0) = L$, получаем $t_1 = t_0 + L/\varepsilon^{m+1}$. Возвращаясь к переменным $z^{(m)}$, находим

$$z^{(m)} = \tilde{x}(t, t_0, x_0 + \bar{c}), \tag{5.34}$$

где вектор $\bar{c}$ представляется сходящимся рядом (5.32). Выбирая ρ, ε достаточно малыми, можем добиться, чтобы значение $\bar{c}$ находилось в области $W(x_0)$. Раскладывая (5.34) по степеням параметра ε, получаем сходящийся ряд

$$z^{(m)} = \tilde{x}'(t, t_0, x_0) + \varepsilon^{m+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-m-1}\eta_\nu(t, \varepsilon), \tag{5.35}$$

где $\eta_\nu(t, \varepsilon)$ — известные функции.

Ряд (5.35) подставим в формулу (5.27). За счет выбора достаточно малого ε можно добиться, чтобы значения ряда $\exp(\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(z^{(m)}))\, z^{(m)}(t, \varepsilon)$, где $z^{(m)}(t, \varepsilon)$ выражается формулами (5.35), принадлежали $\overline{V}(x_0)$. Согласно сделанным предположениям сходится также ряд (5.16). Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 5.1 и в итоге приходим к оценкам (5.17). ■

Рассмотрим теперь уравнение (5.1) в некоторой замкнутой подобласти $\overline{V}_0 \subset H_0$. На основании теоремы 2.3 гл. 1 можно указать такой замкнутый интервал изменения независимой переменной $|t| \leqslant T$, что решение системы нулевого приближения (5.12) будет представляться в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Ли

$$\tilde{x}' = \exp(t\,\mathbf{U}(x_0))\, x_0 \tag{5.36}$$

по всей области $[|t| \leqslant T] \times \overline{V}_0$ и представлять там аналитическую функцию переменных t, x_0. Тогда, принимая в формуле (5.13) $\bar{z}_j^{(m)} = \exp(t\mathbf{U}(x_0))\, x_{0j}$, $j = \overline{1, n}$, и учитывая свойство точечности преобразований (5.37) для решения централизованной системы m-го приближения, находим

$$\bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp(t\mathbf{U}(x_0)) \exp(\tau N^{(m)}(x_0)) \exp(\varepsilon \mathbf{S}^{(m)}(x_0))\, x_{0j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Применяя теорему 5.1 к указанному случаю, получаем следующий результат.

Следствие 5.3. Пусть решение системы нулевого приближения (5.12) представляется рядом Ли (5.36) в замкнутой области $[t \leqslant T] \times \overline{V}_0$; тогда для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно указать такой интервал $I_{\varepsilon_{01}} = [0, \varepsilon_{01}]$, что при всех $\varepsilon \in I_{\varepsilon_{01}}$ выполняются неравенства

$$|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \delta(\varepsilon), \quad j = \overline{1, n},$$

для всех точек

$$(t, t_0, x_0, \varepsilon) \in [|t| \leqslant T] \times [|t| \leqslant T] \times \overline{V}_0(x) \times [0, \varepsilon_{01}],$$

причем модуль разности $|x_j'(t, \varepsilon) - x_j'^{(m)}(t, \varepsilon)|$ как функция ε есть величина порядка малости ε^{m+1}.

§ 6. АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В СЛУЧАЕ, КОГДА НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ ДЕКОМПОЗИРУЕМЫМ

Предположим, что система нулевого приближения

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) \tag{6.1}$$

декомпозируема в области G (см. § 4 гл. 2). Это значит, что если вектор $z = \mathrm{colon}\,\|z_1, \ldots, z_n\|$ разбить на группы $z = \mathrm{colon}\,\|z_{\nu 1}, z_{\nu 2}, \ldots, z_{\nu g}\|$, где $z_{\nu_1} = \operatorname{colon}\|z_{1\nu_1}, \ldots, z_{\nu_1\nu_1}\|, \ldots, z_{\nu_g} = \|z_{1\nu_g}, \ldots, z_{\nu_g\nu_g}\|$, то существует обратимая замена переменных

$$z = \psi(x), \quad x = \psi^{-1}(z), \quad \psi, \psi^{-1} \in \mathfrak{D}(G), \quad \psi = \operatorname{colon}\|\psi_1, \ldots, \psi_n\|, \tag{6.2}$$

которая преобразует исходную систему к совокупности независимых по новым переменным подсистемам

$$\frac{dz_{\nu_1}}{dt} = f_{\nu_1}(z_{\nu_1});$$

$$\frac{dz_{\nu_g}}{dt} = f_{\nu_g}(z_{\nu_g}) \quad \nu_1 + \cdots + \nu_g = n,$$

где $f_{\nu_j} = \operatorname{colon}\|f_{1\nu_j}, \ldots, f_{\nu_j\nu_j}\|$, $f_{\nu_j} \in \mathfrak{D}(G)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы обертывающая алгебра Ли $\mathfrak{B}$ системы (6.1) была представлена в виде прямой суммы идеалов

$$\begin{gathered}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{B}^{(g)}, \quad [\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{B}^{(j)}] \equiv 0, \quad i \neq j, \\ [\mathfrak{B}^{(j)}, \mathfrak{B}^{(j)}] \in \mathfrak{B}^{(j)}, \quad \dim \mathfrak{B}^{(j)} = V_j, \quad \nu_1 + \cdots + \nu_g = n.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Пусть базис идеала $\mathfrak{B}^{(i)}$ образован ν_i несвязными операторами

$$X_{1\nu_i}, \ldots, X_{\nu_i\nu_i}, \quad i = \overline{1, g}. \tag{6.4}$$

Выберем в качестве базиса $\mathfrak{B}$ операторы (6.4) и разложим правую часть уравнения (3.1) по этому базису:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{g} (b_{1\nu_i}X_{1\nu_i} + \cdots + b_{\nu_i\nu_i}X_{\nu_i\nu_i}).$$

Оператор $\mathbf{S}$ также ищем в виде суммы:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{g} (\gamma_{1\nu_i}X_{1\nu_i} + \cdots + \gamma_{\nu_i\nu_i}X_{\nu_i\nu_i}).$$

Примем во внимание, что оператор $\mathbf{U}$ представим суммой

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_g, \quad \mathbf{U}_j \in \mathfrak{B}^{(j)}, \quad j = \overline{1, g}. \tag{6.5}$$

Теорема 6.1. *Если нулевое приближение (6.1) возмущенной системы вполне декомпозируемо в соответствии со структурой обертывающей алгебры $\mathfrak{B}$, задаваемой соотношениями (6.3), то, выбирая в качестве базиса $\mathfrak{B}$ операторы (6.4), составляющие базис $\mathfrak{B}^{(i)}$, $i = \overline{1, g}$, систему Якоби можно привести к g независимо интегри-*

руемым подсистемам

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{U}_1\gamma_{1\nu_1} \\ \cdots \\ \mathbf{U}_1\gamma_{\nu_1\nu_1} \\ \mathbf{U}_2\gamma_{1\nu_2} \\ \cdots \\ \mathbf{U}_2\gamma_{\nu_2\nu_2} \\ \cdots \\ \mathbf{U}_g\gamma_{1\nu_g} \\ \cdots \\ \mathbf{U}_g\gamma_{\nu_g\nu_g} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccccccccccc} \alpha_{1\nu_1}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1\nu_1}^{(\nu_1)} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{\nu_1\nu_1}^{(1)} & \ldots & \alpha_{\nu_1\nu_1}^{(\nu_1)} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1\nu_2}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1\nu_2}^{(\nu_2)} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\nu_2\nu_2}^{(1)} & \ldots & \alpha_{\nu_2\nu_2}^{(\nu_2)} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{1\nu_g}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1\nu_g}^{(\nu_g)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{\nu_g\nu_g}^{(1)} & \ldots & \alpha_{\nu_g\nu_g}^{(\nu_g)} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \gamma_{1\nu_1} \\ \cdots \\ \gamma_{\nu_1\nu_1} \\ \gamma_{1\nu_2} \\ \cdots \\ \gamma_{\nu_2\nu_2} \\ \cdots \\ \gamma_{1\nu_g} \\ \cdots \\ \gamma_{\nu_g\nu_g} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} b_{1\nu_1} \\ \cdots \\ b_{\nu_1\nu_1} \\ b_{1\nu_2} \\ \cdots \\ b_{\nu_2\nu_2} \\ \cdots \\ b_{1\nu_g} \\ \cdots \\ b_{\nu_g\nu_g} \end{array} \right\|. \tag{6.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При подстановке F и $\mathbf{S}$ в уравнение (3.1) получаем

$$\sum_{i=1}^{g} (\mathbf{U}\gamma_{1\nu_i}\mathbf{X}_{1\nu_i} + \cdots + \mathbf{U}\gamma_{\nu_i\nu_i}\mathbf{X}_{\nu_i\nu_i} + \gamma_{1\nu_i}[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{1\nu_i}] + \cdots$$

$$\cdots + \gamma_{\nu_i\nu_i}[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}]) = \sum_{i=1}^{g} (b_{1\nu_i}\mathbf{X}_{1\nu_i} + \cdots b_{\nu_i\nu_i}\mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}). \tag{6.7}$$

С учетом разложения (6.5) находим

$$\begin{aligned} &[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{1\nu_i}] \equiv [\mathbf{U}_i, \mathbf{X}_{1\nu_i}] \equiv \alpha_{1\nu_i}^{(1)}\mathbf{X}_{1\nu_i} + \cdots + \alpha_{\nu_i\nu_i}^{(1)}\mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}] \equiv [\mathbf{U}_i, \mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}] \equiv \alpha_{1\nu_i}^{(\nu_i)}\mathbf{X}_{1\nu_i} + \cdots + \alpha_{\nu_i\nu_i}^{(\nu_i)}\mathbf{X}_{\nu_i\nu_i}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Подставляя (6.7) в (6.8), приходим к системе векторных тождеств

$$\| X_{1\nu_i}, \ldots, X_{\nu_i\nu_i} \| \left(\left\| \begin{matrix} U_i\gamma_{1\nu_i} \\ \cdots \\ U_i\gamma_{\nu_i\nu_i} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \alpha_{1\nu_i}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1\nu_i}^{(\nu_i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu_i\nu_i}^{(1)} & \ldots & \alpha_{\nu_i\nu_i}^{(\nu_i)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \gamma_{1\nu_i} \\ \cdots \\ \gamma_{\nu_i\nu_i} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} b_{1\nu_i} \\ \cdots \\ b_{\nu_i\nu_i} \end{matrix} \right\| \right) \equiv 0,$$

из которых немедленно следует система Якоби (6.6). ■

Обратимся к интегрированию каждого блока в системе (6.6):

$$U_j\gamma_{1\nu_j} + \alpha_{1\nu_j}^{(1)}\gamma_{1\nu_j} + \cdots + \alpha_{1\nu_j}^{(\nu_j)}\gamma_{\nu_j\nu_j} = b_{1\nu_j};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_j\gamma_{\nu_j\nu_j} + \alpha_{\nu_j\nu_j}^{(1)}\gamma_{1\nu_j} + \cdots + \alpha_{\nu_j\nu_j}^{(\nu_j)}\gamma_{\nu_j\nu_j} = b_{\nu_j\nu_j}.$$

Если обозначить через H_{0j} область существования n — 1-го независимого интеграла уравнения $U_j f = 0$, то к системе (6.8) применимы результаты § 3 с той лишь разницей, что система (6.8) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений размерности ν_j (меньшей n).

Интегрирование (6.8) существенно упростится, если перейти к переменным z по формулам (6.2). В этом случае

$$U_j = f_{1\nu_j}(z_{\nu_j}) \frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}} + \cdots + f_{\nu_j\nu_j}(z_{\nu_j}) \frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}},$$

и правая часть уравнения (3.1) представима суммой $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_g$, в которой

$$\mathbf{F}_{\nu_j} = b_{1\nu_j}(z) \frac{\partial}{\partial z_{1\nu_j}} + \cdots + b_{\nu_j}(z) \frac{\partial}{\partial z_{\nu_j\nu_j}}.$$

Система уравнений (6.8) будет содержать ν_j уравнений от ν_j переменных.

Из доказательства теоремы 6.1 следует, что декомпозируемость системы нулевого приближения существенно упрощает алгоритм. Однако пока не ясно, сохраняет ли свойства декомпозируемости централизованная система

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon N x_j, \quad j = \overline{1, g}, \tag{6.9}$$

где $N = N_1 + \varepsilon N_2 + \ldots$, под воздействием того же преобразования (6.2), которое декомпозирует систему нулевого приближения.

Рассмотрим этот вопрос подробно. Так как операторы $N_1, N_2, \ldots$ удовлетворяют операторному уравнению (см. § 1) $[U, N_j] \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$, а их коэффициенты — однородной системе Якоби, полученной из (6.6) отбрасыванием правых частей, то легко найти разложения этих операторов по базису (6.4):

$$N_j = \sum_{i=1}^{g} (\bar{b}_{1\nu_i}^{(0j)} X_{1\nu_i} + \cdots + \bar{b}_{\nu_i\nu_i}^{(0j)} X_{\nu_i\nu_i}).$$

Замена переменных (6.2) составлена из набора функций

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_1 = \{u_{1\nu_1}(x), \ldots, u_{\nu_1\nu_1}(x)\}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathfrak{M}_g = \{u_{1\nu_g}(x), \ldots, u_{\nu_g\nu_g}(x)\}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

являющихся системами импримитивности для подалгебр $\mathfrak{V}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{V}^{(g)}$ (подробнее см. теорему 4.6 гл. 2)

$$X_j u_{p\nu_j}(x) = \Phi_{jp}(u_{1\nu_j}(x), \ldots, u_{\nu_j\nu_j}(x)), \quad j \in \{1\nu_j, \ldots, \nu_j\nu_j\},$$

$$p = \overline{1, \nu_j}, \quad j = \overline{1, g}.$$

Поэтому вопрос о декомпозиции централизованной системы (6.9) под действием преобразований (6.2) сводится к изучению поведения систем импримитивности (6.10) под действием оператора $\mathbf{N}_j$.

Лемма 6.1. *Для того чтобы система функций*

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_p, \quad p < g, \tag{6.11}$$

являлась системой импримитивности оператора $\mathbf{N}_j$, *необходимо и достаточно, чтобы операторы*

$$X_{1\nu_{p+1}}, \ldots, X_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}, \ldots, X_{1\nu_g}, \ldots, X_{\nu_g\nu_g} \tag{6.12}$$

допускали оператор[1] $\mathbf{N}_j$, *т. е. выполнялись соотношения*

$$\left\| \begin{matrix} [U_j, X_{1\nu_{p+1}}] \\ \cdots\cdots \\ [U_j, X_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}] \\ \cdots\cdots \\ [U_j, X_{1\nu_g}] \\ \cdots\cdots \\ [U_j, X_{\nu_g\nu_g}] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_{1,\nu_{p+1}}^{(j,1\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}^{(j,1\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{1,\nu_g}^{(j,1\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{\nu_g\nu_g}^{(j,1\nu_{p+1})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{1,\nu_{p+1}}^{(j,\nu_{p+1}\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}^{(j,\nu_{p+1}\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{1\nu_g}^{(j,\nu_{p+1}\nu_{p+1})} & \ldots & \beta_{\nu_g\nu_g}^{(j,\nu_{p+1}\nu_{p+1})} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{1,\nu_{p+1}}^{(j,1\nu_g)} & \ldots & \beta_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}^{(j,1\nu_g)} & \ldots & \beta_{1\nu_g}^{(j,1\nu_g)} & \ldots & \beta_{\nu_g\nu_g}^{(j,1\nu_g)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{1,\nu_{p+1}}^{(j,\nu_g\nu_g)} & \ldots & \beta_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}^{(j,\nu_g\nu_g)} & \ldots & \beta_{1\nu_g}^{(j,\nu_g\nu_g)} & \ldots & \beta_{\nu_g\nu_g}^{(j,\nu_g\nu_g)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} X_{1,\nu_{p+1}} \\ \cdots\cdots \\ X_{\nu_{p+1},\nu_{p+1}} \\ \cdots\cdots \\ X_{1\nu_g} \\ \cdots\cdots \\ X_{\nu_g\nu_g} \end{matrix} \right\|. \tag{6.13}$$

[1] Полная система операторов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p$ допускает систему операторов $X_1, \ldots, X_r$, если выполняется условие $[X_\alpha, A_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{p} a_{\alpha\beta}^{\gamma} A\gamma$ (см., например, [118, с. 105], а также § 4 гл. 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Функции, входящие в систему (6.11), являются независимыми решениями полной системы

$$X_{1\nu_{p+1}}f = 0, \ \ldots, \ X_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}f = 0, \ \ldots, \ X_{1\nu_g}f = 0, \ \ldots, \ X_{\nu_g\nu_g}f = 0. \tag{6.14}$$

Если f — решение системы (6.14), то из соотношений (6.13) следуют тождества

$$[U_j, X_{1\nu_{p+1}}]f \equiv 0, \ \ldots, \ [U_j, X_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}]f \equiv 0, \ \ldots, \ [U_j, X_{1\nu_g}]f \equiv 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ [U_j, X_{\nu_g\nu_g}]f \equiv 0,$$

или

$$X_{1\nu_{p+1}}U_jf \equiv 0, \ \ldots, \ X_{\nu_{p+1}\nu_{p+1}}U_jf \equiv 0, \ \ldots, \ X_{1\nu_g}U_jf \equiv 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ X_{\nu_g\nu_g}U_jf \equiv 0.$$

Следовательно, оператор N_j переводит систему функций (6.11) снова в некоторые функции от этой системы. Другими словами, система (6.11) является системой импримитивности для U_j. Необходимость легко доказывается, если в операторах (6.12) осуществить фактическое приведение, т. е. перейти к переменным z. ■

Введем новое понятие, существенно упрощающее выкладки. Пусть вектор $X = \mathrm{colon}\,\| X_1, \ldots, X_n \|$ является базисом в $\mathfrak{B}$. Составим вектор из скобок Пуассона $\| [U_j, X_1], \ldots, [U_j, X_n] \|$. Его компоненты принадлежат алгебре $\mathfrak{B}$, и, следовательно, выполняется векторное равенство

$$\left\| \begin{matrix} [U_j & X_1] \\ \cdot & \cdot \\ [U_j & X_n] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_{11}^{(j)} & \ldots & \beta_{1n}^{(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}^{(j)} & \ldots & \beta_{nn}^{(j)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} X_1 \\ \cdot \\ X_n \end{matrix} \right\|. \tag{6.15}$$

Здесь матрица коэффициентов $\mathcal{B}^{(j)} = \| \beta_{i'j'}^{(j)} \|$, $j', i' = \overline{1, n}$, имеет размерность $n \times n$ и коэффициенты из $\mathfrak{D}(G)$. Введенная матрица $\mathcal{B}^{(j)}$ называется матрицей представления оператора U_j в базисе $\mathfrak{B}$. Разобьем группы операторов $X_{\nu_1} = \mathrm{colon}\,\|X_{1\nu_1}, \ldots, X_{\nu_1\nu_1}\|, \ldots, X_{\nu_g} = \mathrm{colon}\,\|X_{1\nu_g}, \ldots$ $\ldots, X_{\nu_g\nu_g}\|$, составляющих базис $\mathfrak{B}$, на новые подгруппы:

$$X^{(\mu_1)} = \mathrm{colon}\,\| X_{\nu_1}, \ \ldots, \ X_{\nu_{r_1}} \|;$$
$$X^{(\mu_2)} = \mathrm{colon}\,\| X_{\nu_{r_1+1}}, \ \ldots, \ X_{\nu_{r_1+r_2}} \|; \tag{6.16}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X^{(\mu_m)} = \mathrm{colon}\,\| X_{\nu_{r_1+\cdots+r_{m-1}+1}}, \ \ldots, \ X_{\nu_{r_1+\cdots+r_{m-1}+r_m}} \|,$$

где

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{r_1} = \mu_1, \ \ldots, \ \nu_{r_1+\cdots+r_{m-1}+1} + \cdots + \nu_{r_1+\cdots+r_m} = \mu_m;$$
$$\mu_1 + \cdots + \mu_m = n.$$

В новом базисе $\| \mathbf{X}^{(\mu_1)}, \mathbf{X}^{(\mu_2)}, \dots, \mathbf{X}^{(\mu_m)} \|$ векторное соотношение (6.15) примет вид

$$\left\| \begin{matrix} [\mathbf{N}_j \ \mathbf{X}^{(\mu_1)}] \\ \cdots\cdots \\ [\mathbf{N}_j \ \mathbf{X}^{(\mu_m)}] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathcal{B}_{11}^{(j)} & \dots & \mathcal{B}_{1m}^{(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{B}_{m1}^{(j)} & \dots & \mathcal{B}_{mm}^{(j)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^{(\mu_1)} \\ \cdots \\ \mathbf{X}^{(\mu_m)} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathcal{B}_{i'j'}^{(j)}$ — матрицы размерностей $\mu_{i'} \times \mu_{j'}$, $i', j' = \overline{1, m}$. Следовательно, матрица представления оператора $\mathbf{U}_j$ в $\mathfrak{B}$ $\mathcal{B}^{(j)} = \| \mathcal{B}_{i'j'}^{(j)} \|$, $i', j' = \overline{1, m}$, является блочной.

Переформулируем лемму 6.1 в терминах матриц представления оператора $\mathbf{N}_j$ в базисе $\mathfrak{B}$. С этой целью определим два вектора:

$$\mathbf{X}^{(\rho_1)} = \mathrm{colon} \| \mathbf{X}_{\nu_1}, \dots, \mathbf{X}_{\nu_p} \|, \quad \nu_1 + \dots + \nu_p = \rho_1;$$

$$\mathbf{X}^{(\rho_2)} = \mathrm{colon} \| \mathbf{X}_{\nu_{p+1}}, \dots, \mathbf{X}_{\nu_g} \|, \quad \nu_{p+1} + \dots + \nu_g = \rho_2, \tag{6.17}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = n.$$

Лемма 6.2. *Для того чтобы система функций (6.11) являлась системой импримитивности оператора $\mathbf{N}_j$, необходимо и достаточно, чтобы его представление в базисе (6.17) осуществлялось квазитреугольной матрицей, т. е. выполнялось равенство*

$$\left\| \begin{matrix} [\mathbf{N}_j & \mathbf{X}^{(\rho_1)}] \\ [\mathbf{N}_j & \mathbf{X}^{(\rho_2)}] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathcal{D}_{11}^{(j)} & \mathcal{D}_{12}^{(j)} \\ 0 & \mathcal{D}_{22}^{(j)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^{(\rho_1)} \\ \mathbf{X}^{(\rho_2)} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathcal{D}_{11}^{(j)}$ — матрица размерности $\rho_1 \times \rho_2$, $\mathcal{D}_{2}^{(j)}$ — матрица размерности $\rho_2 \times \rho_2$.

Доказательство очевидно, если сопоставить фигурирующие в лемме 6.2 соотношения с равенствами (6.13). Матрица $\mathcal{D}_{22}^{(j)}$ совпадает с матрицей системы векторных равенств (6.13). ■

Переход к матричному представлению оператора $\mathbf{N}_j$ в $\mathfrak{B}$ позволяет глубже уяснить структуру операторов $\mathbf{N}_j$, входящих в алгебру централизатора.

Лемма 6.3. *Для того чтобы матрица представления оператора $\mathbf{N}_j$ в базисе (6.17) имела квазитреугольную структуру*

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{D}_{11}^{(j)} & \mathcal{D}_{12}^{(j)} \\ 0 & \mathcal{D}_{22}^{(j)} \end{matrix} \right\|, \tag{6.18}$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\bar{b}_{1\nu_j}^{(0j)}(x), \dots, \bar{b}_{\nu_j\nu_j}^{(0j)}(x)$, $j = \overline{1, p}$, в разложении оператора $\mathbf{N}_j$ по векторам $\mathbf{X}^{(\rho_1)}, \mathbf{X}^{(\rho_2)}$

$$\mathbf{N}_j = \sum_{j'=1}^{p} (\bar{b}_{1\nu_{j'}}^{(0j)} \mathbf{X}_{1\nu_{j'}} + \dots + \bar{b}_{\nu_{j'}\nu_{j'}}^{(0j)} \mathbf{X}_{\nu_{j'}\nu_{j'}}) +$$
$$+ \sum_{i=p+1}^{n} (\bar{b}_{1\nu_i}^{(0j)} \mathbf{X}_{1\nu_i} + \dots + \bar{b}_{\nu_i\nu_i}^{(0j)} \mathbf{X}_{\nu_i\nu_i})$$

являлись интегралами полной системы уравнений $\mathbf{X}_{1\nu_i}f = 0,\ \ldots$ $\ldots,\ X_{\nu_i\nu_i}f = 0,\ i = \overline{p+1,\ g}$.

Доказательство. С целью упрощения выкладок проведем доказательство для $\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 2,\ \nu_3 = 2,\ p = \nu_1 + \nu_2 = 4$. Разложение $\mathbf{N}_j$ в этом случае примет вид

$$\mathbf{N}_j = \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1}\mathbf{X}_{1\nu_1} + \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1}\mathbf{X}_{2\nu_1} + \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2}\mathbf{X}_{1\nu_2} + \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2}\mathbf{X}_{2\nu_2} + \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3}\mathbf{X}_{1\nu_3} + \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3}\mathbf{X}_{2\nu_3}.$$

Введем векторы

$$\bar{b}^{(0j)} = \left\| \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1},\ \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1},\ \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2},\ \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2},\ \bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3},\ \bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \right\|;$$

$$\mathbf{X} = \mathrm{colon} \left\| \mathbf{X}_{1\nu_1},\ \mathbf{X}_{2\nu_1},\ \mathbf{X}_{1\nu_2},\ \mathbf{X}_{2\nu_2},\ \mathbf{X}_{1\nu_3},\ \mathbf{X}_{2\nu_3} \right\|.$$

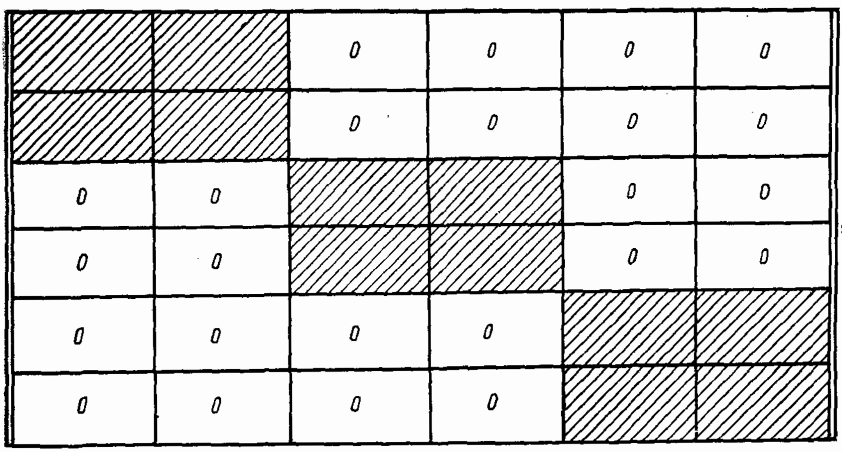
С учетом этих формул оператор $\mathbf{N}_j$ можно представить в виде

$$\mathbf{N}_j = \bar{b}^{(0j)}\mathbf{X}. \tag{6.19}$$

Вычислим скобку Пуассона от оператора $\mathbf{X}_\sigma$ и операторов в левой и правой частях соотношений (6.19):

$$[\mathbf{N}_j,\ \mathbf{X}_\sigma] = \bar{b}^{(0j)}[\mathbf{X},\ \mathbf{X}_\sigma] - \mathbf{X}_\sigma\bar{b}^{(0j)}\mathbf{X}. \tag{6.20}$$

Пусть индекс σ пробегает множество $\{1\nu_1,\ 2\nu_1,\ 1\nu_2,\ 2\nu_2,\ 1\nu_3,\ 2\nu_3\}$. Нетрудно показать, что первое слагаемое в тождествах (6.20) даст в матрице представления оператора квазидиагональную составляющую



,(6.21)

а второе слагаемое — составляющую

$$\left\| \begin{array}{cccc|cc}
\mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{1\nu_1}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \\
\mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \\
\mathbf{X}_{1\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{1\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \\
\mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{2\nu_2}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \\
\hline
\mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_2} & \mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{1\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} \\
\mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_1} & \mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_2} & \mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3} & \mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{1\nu_3} & \mathbf{X}_{2\nu_3}\bar{b}^{(0j)}_{2\nu_3}
\end{array} \right\|. \tag{6.22}$$

Сопоставляя матрицы (6.21) и (6.22), видим, что для того чтобы матрица представления имела требуемую квазидиагональную структуру, необходимо и достаточно, чтобы элементы в матрице (6.22), находящиеся на пересечении последних двух строк и первых четырех столбцов, были тождественно равны нулю:

$$\mathbf{X}_{1\nu_3}\overline{b}_{1\nu_1}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{1\nu_3}\overline{b}_{2\nu_1}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{1\nu_3}\overline{b}_{1\nu_2}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{1\nu_3}\overline{b}_{2\nu_2}^{(0j)} \equiv 0;$$

$$\mathbf{X}_{2\nu_3}\overline{b}_{1\nu_1}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{2\nu_3}\overline{b}_{2\nu_1}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{2\nu_3}\overline{b}_{1\nu_2}^{(0j)} \equiv 0; \quad \mathbf{X}_{2\nu_3}\overline{b}_{2\nu_2}^{(0j)} \equiv 0.$$

Для общего случая доказательство аналогично. ■

Приступим к непосредственной формулировке и доказательству теорем о декомпозиции централизованной системы. Разобьем группы переменных

$$x_{\nu_1} = \operatorname{colon}\|x_{1\nu_1}, \ \ldots, \ x_{\nu_1\nu_1}\|, \ \ldots, \ x_{\nu_g} = \operatorname{colon}\|x_{1\nu_g}, \ \ldots, \ x_{\nu_g\nu_g}\|$$

на подгруппы

$$x^{(\mu_1)} = \operatorname{colon}\|x_{\nu_1}, \ \ldots, \ x_{\nu_p}\|;$$

$$x^{(\mu_2)} = \operatorname{colon}\|x_{\nu_{p_1+1}}, \ \ldots, \ x_{\nu_{p_1+p_2}}\|;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(\mu_m)} = \operatorname{colon}\|x_{\nu_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1}}, \ \ldots, \ x_{\nu_{p_1+\cdots+p_m}}\|.$$

Аналогичное разбиение на подгруппы примем для новых переменных: $z_{\nu_1} = \operatorname{colon}\|z_{1\nu_1}, \ldots, z_{\nu_1\nu_1}\|; \ \ldots; \ z_{\nu_g} = \operatorname{colon}\|z_{1\nu_g}, \ldots, z_{\nu_g\nu_g}\|;$

$$z^{(\mu_1)} = \operatorname{colon}\|z_{\nu_1}, \ \ldots, \ z_{\nu_{p_1}}\|;$$

$$z^{(\mu_2)} = \operatorname{colon}\|z_{\nu_{p_1+1}}, \ \ldots, \ z_{\nu_{p_1+p_2}}\|;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{(\mu_m)} = \operatorname{colon}\|z_{\nu_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1}}, \ \ldots, \ z_{\nu_{p_1+\cdots+p_m}}\|,$$

где

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{p_1} = \mu_1, \quad \nu_{p_1+1} + \cdots + \nu_{p_1+p_2} = \mu_2;$$

$$\nu_{p_1+\cdots+p_{m-1}+1} + \cdots + \nu_{p_1+\cdots+p_m} = \mu_m, \quad \mu_1 + \mu_m = n.$$

Справедливо следующее утверждение о декомпозируемости централизованной системы.

Теорема 6.2. *Пусть операторы* $\mathbf{N}_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ *входящие в централизованную систему*

$$\frac{dx_i}{dt} = \omega(x) + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \varepsilon^2\mathbf{N}_2 + \cdots) x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

имеют в базисе (6.16) $\mathbf{X}^{(\mu_1)}, \mathbf{X}^{(\mu_2)}, \ldots, \mathbf{X}^{(\mu_m)}$ *алгебры* $\mathfrak{B}$ *квазидиагональные матрицы представления*

$$\begin{Vmatrix} [\mathbf{N}_j \ \ \mathbf{X}^{(\mu_1)}] \\ [\mathbf{N}_j \ \ \mathbf{X}^{(\mu_2)}] \\ \cdots\cdots \\ [\mathbf{N}_j \ \ \mathbf{X}^{(\mu_m)}] \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathcal{B}_{11}^{(j)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{22}^{(j)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{B}_{mm}^{(j)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{X}^{(\mu_1)} \\ \mathbf{X}^{(\mu_2)} \\ \cdots \\ \mathbf{X}^{(\mu_m)} \end{Vmatrix},$$

где $\mathcal{B}^{(j)}_{i'i'}$ — *матрицы размерностей* $\mu_{i'} \times \mu_{i'}$, $i' = \overline{1, m}$; *тогда замена переменных* $z = \psi(x)$, $x = \psi^{-1}(z)$, *осуществляющая декомпозицию системы нулевого приближения на подсистемы* $dz_{\nu_j}/dt = \omega_{\nu_j}(z_{\nu_j})$, $j = \overline{1, g}$, *приводит централизованную систему* к m *независимо интегрируемым подсистемам*

$$\frac{dz_{\nu_1}}{dt} = \omega_{\nu_1}(z_{\nu_1}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \Omega_{\nu}^{(\nu_1)}(z^{(\mu_1)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.23)$$
$$\frac{dz_{\nu_{p_1}}}{dt} = \omega_{\nu_{p_1}}(z_{\nu_{p_1}}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \Omega_{\nu}^{(\nu_{p_1})}(z^{(\mu_1)});$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dz_{\nu_{p_1+\dots+p_{m-1}+1}}}{dt} = \omega_{\nu_{p_1+\dots+p_{m-1}+1}}(z_{\nu_{p_1+\dots+p_{m-1}+1}}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \Omega_{\nu}^{(\nu_{p_1+\dots+p_{m-1}+1})}(z^{(\mu_m)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.24)$$
$$\frac{dz_{\nu_{p_1+\dots+p_m}}}{dt} = \omega_{\nu_{p_1+\dots+p_m}}(z_{\nu_{p_1+\dots+p_m}}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \Omega_{\nu}^{(\nu_{p_1+\dots+p_m})}(z^{(\mu_m)})$$

порядков соответственно $\mu_1, \dots, \mu_m$, $\mu_1 + \dots + \mu_m = n$.

Доказательство. Согласно леммам 6.1 и 6.2 системы функций

$$\mathfrak{M}^{(\mu_1)} = \{u_{\nu_1}(x), \dots, u_{\nu_{p_1}}(x)\};$$
$$\mathfrak{M}^{(\mu_2)} = \{u_{\nu_{p_1+1}}(x), \dots, u_{\nu_{p_1+p_2}}(x)\};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{M}^{(\mu_m)} = \{u_{\nu_{p_1+\dots+p_{m-1}+1}}(x), \dots, u_{\nu_{p_1+\dots+p_m}}(x)\}$$

составляют системы импримитивности оператора $\mathbf{U}_j$, $j = 1, 2, \dots$ Выбирая их в качестве новых переменных, согласованных с системой обозначений (6.13), приведем централизованную систему к виду (6.23), (6.24). ■

§ 7. ПОЧТИ ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Применим алгоритм асимптотической декомпозиции к возмущенной системе вида (1.4)

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \qquad (7.1)$$

в которой система нулевого приближения

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) \tag{7.2}$$

инвариантна относительно некоторой псевдогруппы преобразований y, представленной рядами Ли

$$y_1 = \exp(s\mathbf{X}_j)\, x_1, \ \ldots, \ y_n = \exp(s\mathbf{X}_j)\, x_n, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.3}$$

Здесь

$$\mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2, \ \ldots, \ \mathbf{X}_m \tag{7.4}$$

— известные дифференциальные операторы, образующие полную систему, s — параметр, характеризующий псевдогруппу.

Согласно определению, приведенному в § 4 гл. 1, система (7.2) под воздействием преобразований (7.3) переходит в систему $\frac{dy}{dt} = \omega(y)$, с точностью до обозначений совпадающую с исходной системой (7.2). Как показано в теореме 4.1 гл. 1, операторы $\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1, m}$, должны быть коммутативны с оператором $\mathbf{U}$, т. е.

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_j] \equiv 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.5}$$

Полнота системы операторов (7.4) означает, что среди них найдется $k \leqslant n$ линейно несвязных операторов, например

$$\mathbf{X}_1, \ \ldots, \ \mathbf{X}_k, \tag{7.6}$$

так что справедливы тождества

$$[\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i] = \sum_{\mu=1}^{k} c_{ij}^{\mu}(x)\, \mathbf{X}_\mu, \quad i, \ j = \overline{1, m},$$

где $c_{ij}^{\mu}(x)$ — известные функции.

Возмущенную систему (7.1), полученную из системы (7.2) добавлением малых возмущений $\varepsilon\tilde{\omega}(x')$, будем называть почти инвариантной системой. Подробно вопрос об интегрировании системы (7.2), инвариантной относительно некоторой группы преобразований, был рассмотрен в § 4 гл. 1. Здесь остановимся на тех упрощениях, которые вносит знание группы инвариантности системы (7.2) нулевого приближения при реализации алгоритма асимптотической декомпозиции применительно к возмущенной системе (7.1).

Согласно алгоритму асимптотической декомпозиции произведем в системе (7.1) замену переменных в виде рядов Ли (см. § 1)

$$x_j' = \exp(\varepsilon\mathbf{S})\, x_j, \quad j = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon\mathbf{S}_2 + \varepsilon^2\mathbf{S}_3 + \cdots$, $\mathbf{S}_i \in \mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Операторы $\mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, определяются из системы операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_i] = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{7.7}$$

где $\mathbf{F}_i$ — известные операторы, получаемые из формул (1.8).

Так как операторы (7.4) перестановочны с оператором $\mathbf{U}$, т. е. выполняются тождества (7.5), то алгебра операторов $\mathfrak{B}^{(m)}$, порожденная операторами (7.4), является подалгеброй централизатора: $\mathfrak{B}^{(m)} \subseteq \mathfrak{B}_0$.

Предположим, что известны все $n-1$ операторов, несвязных и перестановочных с $\mathbf{U}$. Следовательно, операторы $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}$, $\mathbf{X}_n \equiv \mathbf{U}$ можно принять в качестве базисных. Тогда правые части уравнений (7.7) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{F}_i = b_{i1}\mathbf{X}_1 + \cdots + b_{in}\mathbf{X}_n, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{7.8}$$

Операторы преобразования $\mathbf{S}$ также ищем в виде разложения

$$\mathbf{S}_i = \gamma_{i1}\mathbf{X}_1 + \cdots + \gamma_{in}\mathbf{X}_n.$$

Проекция $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$ от оператора $\mathbf{F}_i$ согласно § 4 определяется по формуле

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij0}\mathbf{X}_j, \tag{7.9}$$

где $b_{ij0}(x)$ — составляющая в разложении

$$b_{ij}(x) = b_{ij0}(x) + \tilde{b}_{ij}(x), \tag{7.10}$$

являющаяся интегралом уравнения $\mathbf{U}f = 0$. Однозначность разложения (7.10) доказана в § 4. Оператор $\mathbf{S}_i$ определяется из уравнения

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_i] = \mathbf{F}_i - \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i. \tag{7.11}$$

Подстановка значений $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{F}_i$ и $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$ в уравнение (7.11) приводит к системе n независимых однородных уравнений

$$\mathbf{U}\gamma_{i1} = \tilde{b}_{i1}(x), \ \ldots, \ \mathbf{U}\gamma_{in} = \tilde{b}_{in}(x). \tag{7.12}$$

Используя операторы $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, в форме (7.9), представим централизованную систему, соответствующую возмущенной системе (7.1), в виде

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) + \varepsilon\mathbf{N}_1(x) + \varepsilon^2\mathbf{N}_2(x) + \cdots \tag{7.13}$$

Как указывалось в § 1, централизованная система (7.13) инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований: $y = \exp(s\mathbf{U}(x))\,x$, где $\mathbf{U}(x)$ — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения (7.2). Система нулевого приближения (7.2) инвариантна относительно псевдогруппы $\mathfrak{G}$, однако централизованная система (7.13) в общем случае не является инвариантной относительно этой псевдогруппы. Таким образом, предположение об инвариантности системы нулевого приближения (7.2) относительно псевдогруппы $\mathfrak{G}$, существенно используется лишь при реализации алгоритма асимптотической декомпозиции.

Теорема 7.1. *Пусть в почти инвариантной системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x')$$

система нулевого приближения $dx/dt = \omega(x)$ *инвариантна относительно некоторой псевдогруппы преобразований* $\mathfrak{G}$, *представленной рядами Ли*

$$y_1 = \exp(s\mathrm{X}_j)\, x_1, \ \ldots, \ y_n = \exp(s\mathrm{X}_j)\, x_n, \quad j = \overline{1, n},$$

где среди m *дифференциальных операторов* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ *имеется* n *линейно несвязных* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1}$, $\mathrm{X}_n \equiv \mathrm{U}$; *тогда преобразование исходной возмущенной системы к соответствующей централизованной*

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x) + \cdots$$

путем замены переменных $x' = \exp(\varepsilon \mathrm{S})\, x_j$, $j = 1, n$, $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \varepsilon \mathrm{S}_2 + \ldots$ *сводится к нахождению коэффициентов операторов преобразований*

$$\mathrm{S}_j = a_{j1}\mathrm{X}_1 + \cdots + a_{jn}\mathrm{X}_n$$

из системы n *независимых неоднородных уравнений*

$$\mathrm{U}\gamma_{i1} = \tilde{b}_{i1}(x), \ \ldots, \ \mathrm{U}\gamma_{in} = \tilde{b}_{in}(x),$$

а операторы $\mathrm{N}_i(x)$ *имеют вид*

$$\mathrm{N}_i(x) = b_{i10}(x)\,\mathrm{X}_1 + \cdots + b_{in0}(x)\,\mathrm{X}_n,$$

где $b_{ij0}(x)$, $b_{ij}(x)$ — *составляющие в разложении (7.10).*

Если в совокупности (7.4) имеется меньше, чем n, линейно несвязных операторов, то система уравнений (7.12) будет иметь более сложный вид. Предположим, что среди операторов (7.4) имеется $k < n$ линейно несвязных операторов

$$\mathrm{X}_1, \ \ldots, \ \mathrm{X}_{k-1}, \quad \mathrm{X}_k = \mathrm{U}. \tag{7.14}$$

Дополним эти операторы до полной системы n несвязных операторов произвольными операторами $\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n$ и примем систему операторов $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{k-1}, \mathrm{X}_k = \mathrm{U}, \mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n$ в качестве базисной. Полагая $\mathrm{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\mathrm{X}_j$ и $\mathrm{F}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mathrm{X}_j$, сведем операторное уравнение (7.7) к системе Якоби от $n - k$ переменных

$$\begin{gathered}
\mathrm{U}\gamma_{i,k+1} + a_{k+1}^{(k+1)}\gamma_{i,k+1} + \cdots + a_{k+1}^{(n)}\gamma_{in} = b_{i,k+1};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathrm{U}\gamma_{in} + a_{k+1}^{(n)}\gamma_{i,k+1} + \cdots + a_{n}^{(n)}\gamma_{in} = b_{in}
\end{gathered} \tag{7.15}$$

и системе k независимо интегрируемых неоднородных уравнений

$$\begin{gathered}
\mathrm{U}\gamma_{i1} + a_{1}^{(k+1)}\gamma_{i,k+1} + \cdots + a_{1}^{(n)}\gamma_{in} = b_{i1};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathrm{U}\gamma_{ik} + a_{k}^{(k+1)}\gamma_{i,k+1} + \cdots + a_{k}^{(n)}\gamma_{in} = b_{in},
\end{gathered} \tag{7.16}$$

решение которых можно свести к квадратурам после нахождения решений системы (7.15). Коэффициенты в уравнениях (7.15) и (7.16) определяются тождествами

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{k+1}] \equiv a_1^{(k+1)}\mathbf{X}_1 + \cdots + a_n^{(k+1)}\mathbf{X}_n;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_n] \equiv a_1^{(n)}\mathbf{X}_1 + \cdots + a_n^{(n)}\mathbf{X}_n.$$

Следствие 7.1. Если среди операторов (7.4), порождающих псевдогруппу $\mathfrak{G}$, имеется k линейно несвязных операторов, то реализация алгоритма асимптотической декомпозиции сводится к последовательному интегрированию системы Якоби (7.15) от $n-k$ переменных и системе k независимо интегрируемых уравнений (7.16). (Подробно вопросы построения проекторов $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$ от операторов $\mathbf{F}_i$ и решения систем (7.15), (7.16) были рассмотрены в § 3,4.)

Резюмируя сказанное, отметим, что знание априори элементов (7.4), определяющих псевдогруппу инвариантности и входящих в алгебру централизатора $\mathfrak{B}_0$, существенно упрощает реализацию алгоритма асимптотической декомпозиции, так как сводит вопросы построения операторов $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$, $\mathbf{S}_i$ к системам уравнений вида (7.12) или (7.16), интегрируемых в квадратурах, либо к системам уравнений Якоби вида (7.15) с числом переменных $h < n$. Как отмечалось в § 4 гл. 1, с помощью теории инвариантности Ли, базирующейся на нахождении инвариантов продолженных операторов, можно получить операторы

$$\mathbf{X}_{k+1}, \ \dots, \ \mathbf{X}_l, \tag{7.17}$$

которые допускает уравнение $\mathbf{U}f = 0$, т. е. для которых выполняются тождества

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_j] = \lambda_j(x)\,\mathbf{U}, \quad j = \overline{k+1,\ l}. \tag{7.18}$$

Система операторов (7.17) является также полной. В § 4 гл. 1 показано, что по операторам (7.17) могут быть построены операторы $\mathbf{X}_{0,k+1}, \ \dots, \ \mathbf{X}_{0l}$, перестановочные с $\mathbf{U}$. Следовательно, система операторов (7.14) может быть расширена за счет присоединения этих операторов. Однако нахождение $\mathbf{X}_{0,k+1}, \ \dots, \ \mathbf{X}_{0l}$ требует интегрирования неоднородного уравнения $\mathbf{U}f = \lambda(x)$.

Составим базисную систему из операторов

$$\mathbf{X}_1, \ \dots, \ \mathbf{X}_k \equiv \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}_{k+1}, \ \dots, \ \mathbf{X}_l, \quad \mathbf{X}_{l+1}, \ \dots, \ \mathbf{X}_n,$$

где

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_i] \equiv 0, \quad i = \overline{1,\ k}; \quad [\mathbf{U}, \mathbf{X}_j] = \lambda_j(x)\,\mathbf{U}, \quad j = \overline{k+1,\ l};$$

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_{l+1}] = a_1^{(l+1)}\mathbf{X}_1 + \cdots + a_n^{(l+1)}\mathbf{X}_n;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[\mathbf{U}, \mathbf{X}_n] = a_1^{(n)}\mathbf{X}_1 + \cdots + a_n^{(n)}\mathbf{X}_n.$$

Полагая в уравнениях (7.7) $\mathbf{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\mathbf{X}_j$, $\mathbf{F}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\mathbf{X}_j$, получаем следующие три системы Якоби:

$$\mathbf{U}\gamma_{i,k+1} = a_{l+1}^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_{l+1}^{(n)}\gamma_{in} + b_{i,l+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{7.19}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{U}\gamma_{in} = a_n^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_n^{(n)}\gamma_{in} + b_{in};\\
&\mathrm{U}\gamma_{i,k+1} = a_{k+1}^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_{k+1}^{(n)}\gamma_{in} + b_{i,k+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathrm{U}\gamma_{il} = a_l^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_l^{(n)}\gamma_{in} + b_{il};
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{U}\gamma_{i1} = a_1^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_1^{(n)}\gamma_{in} + b_{i1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathrm{U}\gamma_{ik} = a_k^{(l+1)}\gamma_{i,l+1} + \cdots + a_k^{(n)}\gamma_{in} + b_{ik} + \gamma_{k+1}\lambda_{k+1} + \cdots + \gamma_l\lambda_l.
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

Система (7.19) интегрируется независимо. Решение системы (7.20) сводится к квадратурам после решения системы (7.19). Решение системы (7.21) сводится к квадратурам после решения систем (7.19) и (7.20).

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Следствие 7.2. Если известны k линейно несвязных операторов, входящих в псевдогруппу $\mathfrak{G}$: $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$, а также $l-k$ операторов $\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_l$, допускаемых оператором U (см. соотношения (7.18)), то реализация алгоритма асимптотической декомпозиции сводится к последовательному интегрированию системы Якоби (7.19) от $n - (l+k)$ переменных и подсистем уравнений (7.20) и (7.21), решение которых может быть сведено к квадратурам.

В заключение приведем пример почти инвариантной системы.

Пример 7.1. Рассмотрим систему вида (4.23) в гл. 1

$$
\frac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2); \quad \frac{dy_2}{dt} = y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2), \tag{7.22}
$$

инвариантную относительно группы вращения $x_1 = \exp(s\mathrm{Y})y_1$, $x_2 = \exp(s\mathrm{Y})y_2$, где $\mathrm{Y} = y_2\dfrac{\partial}{\partial y_1} - y_1\dfrac{\partial}{\partial y_2}$.

Подвергнем систему (7.22) малым возмущениям и перейдем к почти инвариантной системе

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1'}{dt} = y_1' + y_2'(y_1'^2 + y_2'^2) + \varepsilon\hat{F}_1(y_1', y_2');\\
&\frac{dy_2'}{dt} = y_2' - y_1'(y_1'^2 + y_2'^2) + \varepsilon\hat{F}_2(y_1', y_2'),
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

где $\hat{F}_1(y_1', y_2')$, $\hat{F}_2(y_1', y_2')$ — известные функции из $\mathfrak{D}(G)$.

Так как система нулевого приближения (7.22) возмущенной системы (7.23) допускает разделение переменных благодаря известной группе инвариантности, то перейдем в системе (7.23) к новым переменным (см. § 4 гл. 1)

$$
x_1' = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}; \quad x_2' = \operatorname{arctg}\frac{y_1'}{y_2'}. \tag{7.24}
$$

В результате система (7.23) примет вид

$$
\frac{dx_1'}{dt} = x_1' + \varepsilon F_1(x_1', x_2'); \quad \frac{dx_2'}{dt} = x_1'^2 + \varepsilon F_2(x_1', x_2'). \tag{7.25}
$$

При замене (7.24) оператор $\mathbf{Y}$ переходит в оператор $\mathbf{X}' = \dfrac{\partial}{\partial x_2'}$, а оператор $\mathbf{U}$, ассоциированный с системой нулевого приближения (7.22),— в оператор

$$\mathbf{U}' = x_1' \frac{\partial}{\partial x_1'} + x_1'^2 \frac{\partial}{\partial x_2'}.$$

Свойство коммутативности этих операторов $[\mathbf{X}', \mathbf{U}'] \equiv 0$ сохраняется.

Проведем все вычисления для алгоритма асимптотической декомпозиции для первого приближения. Рассмотрим уравнение (7.7) при $i = 1$

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] = \mathbf{F}_1, \tag{7.26}$$

где $\mathbf{F}_1 = F_1(x_1, x_2) \dfrac{\partial}{\partial x_1} + F_2(x_1, x_2) \dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Так как известны два оператора, перестановочных с $\mathbf{U}$, то примем их в качестве базиса: $\mathbf{X} = \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathbf{U}$. В этом базисе $\mathbf{F}_1 = \dfrac{f_1}{x_1}\mathbf{U} + (f_2 - y_1 f_1)\mathbf{X}$. Полагая $\mathbf{S}_1 = \gamma_1\mathbf{U} + \gamma_2\mathbf{X}$ и подставляя $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{F}_1$ в уравнение (7.26), вместо системы (7.26) получаем систему из двух независимых интегрируемых уравнений

$$\mathbf{U}\gamma_1 = \frac{f_1}{x_1}, \quad \mathbf{U}\gamma_2 = f_2 - x_1 f_1. \tag{7.27}$$

Чтобы найти оператор $\operatorname{pr}\mathrm{F}_1$, необходимо в правых частях уравнений (7.27) выделить составляющие, являющиеся решением однородного уравнения. С этой целью в системе (7.27) сделаем замену переменных

$$z_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \quad z_2 = \ln x_1, \tag{7.28}$$

где $x_2 - \dfrac{1}{2}x_1^2$ — интеграл уравнения $\mathbf{U}f = 0$, $\ln x_2$ — решение уравнения $\mathbf{U}f = 1$. Легко выписать обратную к (7.28) систему функций:

$$x_1 = e^{z_2}, \quad x_2 = z_1 + \frac{1}{2}e^{2z_2}.$$

После замены (7.28) система (7.27) примет вид

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} = \varphi_1(z_1, z_2); \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial z_2} = \varphi_2(z_1, z_2),$$

где

$$\varphi_1(z_1, z_2) = \frac{f_1\left(e^{z_2}, z_1 + \frac{1}{2}e^{2z_2}\right)}{e^{z_2}};$$

$$\varphi_2(z_1, z_2) = f_2\left(l^{z_2}, z_1 + \frac{1}{2}e^{2z_2}\right) - e^{z_2}f_1\left(e^{z_2}, z_1 + \frac{1}{2}e^{2z_2}\right).$$

Разложим функции φ_1, φ_2 в ряды по z_2 в окрестности точки $z_2 = 0$:

$$\varphi_1(z_1, z_2) = \varphi_1(z_1, 0) + \left.\frac{d\varphi_1}{dz_2}\right|_{z_2=0} z_2 + \cdots;$$

$$\varphi_2(z_1, z_2) = \varphi_2(z_1, 0) + \left.\frac{d\varphi_2}{dz_2}\right|_{z_2=0} z_2 + \cdots$$

Здесь

$$\varphi_1(z_1, 0) = f_1\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi_2(z_1, 0) = f_2\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right) - f_1\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right).$$

Согласно результатам § 4 гл. 3 оператор pr F_1 (в переменных z_1, z_2) может быть представлен в виде

$$\operatorname{pr} F_1 = \varphi_1(z_1, 0)\frac{\partial}{\partial z_2} + \varphi_2(z_1, 0)\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Таким образом, централизованная система, соответствующая возмущенной системе (7.25) в переменных z_1, z_2, в первом приближении принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \varepsilon\left(f_2\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right) - f_1\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right)\right); \\ \frac{dz_2}{dt} &= 1 + \varepsilon f_1\left(1,\ z_1 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{7.29}$$

Преобразование (1.5), переводящее возмущенную систему (7.25) в централизованную систему (7.29), в первом приближении имеет вид

$$x_1' = e^{z_2} + \varepsilon\gamma_1(z_1, z_2); \quad x_2' = z_1 + \frac{1}{2}e^{2z_2} + \varepsilon\gamma_2(z_1, z_2),$$

где функции

$$\gamma_1(z_1, z_2) = \left.\frac{d\varphi_1}{dz_2}\right|_{z_2=0}\frac{z_2^2}{2!} + \cdots; \qquad \gamma_2(z_1, z_2) = \left.\frac{d\varphi_2}{dz_2}\right|_{z_2=0}\frac{z_2^2}{2!} + \cdots$$

являются решениями уравнений

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} = \left.\frac{d\varphi_1}{dz_2}\right|_{z_2=0} z_2 + \cdots; \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial z_2} = \left.\frac{d\varphi_2}{dz_2}\right|_{z_2=0} z_2 + \cdots$$

ГЛАВА 4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

§ 1. ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = \mathcal{A}_0 x' + \varepsilon \mathcal{B}_0 x', \tag{1.1}$$

где $x' = \operatorname{colon} \| x_1', \ldots, x_n' \|$; $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ — постоянные матрицы размерности $n \times n$. Системе (1.1) соответствует линейный дифференциальный оператор в частных производных

$$\mathrm{U}_0' = = \mathrm{U}' + \varepsilon \tilde{\mathrm{U}},$$

где

$$\mathrm{U}' = \omega_1^{(1)}(x') \frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + \omega_n^{(1)}(x') \frac{\partial}{\partial x_n'};$$

$$\tilde{\mathrm{U}}' = \omega_1^{(2)}(x') \frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + \omega_n^{(2)}(x') \frac{\partial}{\partial x_n'};$$

векторы коэффициентов $\omega(x')^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \| \omega_1(x')^{(i)}, \ldots, \omega_n(x')^{(i)} \|$, $i = 1, 2$, определяются следующими матричными равенствами: $\omega(x')^{(1)} = \mathcal{A}_0 x'$, $\omega(x')^{(2)} = \mathcal{B}_0 x'$.

Будем считать, что матрица $\mathcal{A}_0$ в системе нулевого приближения

$$\dot{x}' = \mathcal{A}_0 x' \tag{1.2}$$

имеет простую структуру, т. е. в некотором базисе принимает диагональный вид. Случай общей структуры матрицы $\mathcal{A}_0$ будет рассмотрен ниже.

Прежде чем перейти к построению обертывающих алгебр Ли системы нулевого приближения (1.2) и возмущенной системы (1.1), напомним некоторые известные положения из теории линейных пространств. Существует глубокая связь между свойствами операторов U' и $\tilde{\mathrm{U}}'$ и соответствующих им матриц $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B}_0$.

Рассмотрим два линейных пространства V_1 и V_2 размерностей m и n над полем P. Векторам базиса $l_1, \ldots, l_m$ пространства V_1 поставим в соответствие какие-либо векторы $f_1, \ldots, f_m$ пространства V_2.

Пусть имеется линейный оператор X, действующий из V_1 в V_2, т. е. для любых $u, v \in V_1$ и чисел $\alpha, \beta \in P$ справедливо соотношение

$$X(\alpha u + \beta v) = \alpha X u + \beta X v, \quad Xu, \ Xv \in V_2.$$

Имеет место следующее утверждение (см., например, работу [18]).

Теорема 1.1. *Линейный оператор X, действующий из пространства V_1 в пространство V_2, полностью определяется совокупностью образов $Xl_1, \ldots, Xl_m$ любого фиксированного базиса $l_1, \ldots, l_m$ пространства V_1.*

Разложим векторы $Xl_1, \ldots, Xl_m$ по базису $f_1, \ldots, f_n$ пространства V_2:

$$X\hat{l} = \hat{f}\Gamma,$$

где $\hat{l} = \| l_1, \ldots, l_m \|$, $\hat{f} = \| f_1, \ldots, f_n \|$, $\Gamma = \| \gamma_{ij} \|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, — прямоугольная матрица размерности $n \times m$. Матрица Γ называется матрицей оператора X в выбранных базисах, причем любую наперед заданную матрицу размерности $n \times m$ можно единственным образом сопоставить с некоторым линейным оператором.

Теорема 1.2 [18, с. 206]. *Между линейными операторами и прямоугольными матрицами устанавливается взаимно однозначное соответствие при любых фиксированных базисах.*

Применительно к рассматриваемой системе (1.1) введем линейное пространство V над P, базис которого образован переменными $x_1', \ldots, x_n'$, т. е. общим элементом V является некоторая линейная функция

$$v(x') = a_1 x_1' + \cdots + a_n x_n', \quad a_1, \ldots, a_n \in P. \tag{1.3}$$

Предположим, что $V_1 \equiv V_2 \equiv V$. В качестве линейных операторов выберем линейные дифференциальные операторы в частных производных вида

$$\mathrm{X} = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{1.4}$$

где

$$a_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \in V, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.5}$$

Легко убедиться непосредственным вычислением, что векторы v (1.3) переводятся линейными операторами (1.4) снова в векторы V, т. е. $\mathrm{X}v \in V$. Вычислим образы базисных векторов $x_1, \ldots, x_n$ при действии оператора X:

$$\mathrm{X}x_1 = a_1, \ \ldots, \ \mathrm{X}x_n = a_n.$$

Для элементов $a_1, \ldots, a_n$ имеет место разложение по базису V_2 ($V_2 \equiv V$):

$$\| a_1, \ldots, a_n \| = \| x_1, \ldots, x_n \| \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Квадратная матрица $\mathcal{A} = \| a_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, n}$, и будет матрицей оператора X в базисе $x_1, \ldots, x_n$. В дальнейшем будем просто говорить, что $\mathcal{A}$ — матрица оператора X, так как базис считаем неизменным.

Заметим, что матрицами операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$ являются транспонированные из исходной системы матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (1.1), т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^T$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^T$.

Если имеются два оператора $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ вида (1.4), то очевидно, что и оператор $\alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{P}$ имеет аналогичную структуру. Следовательно, совокупность дифференциальных операторов вида (1.4) образует линейное пространство, которое будем обозначать $\mathfrak{B}(V)$. Совокупность всех квадратных матриц размерности $n \times n$ образует конечномерное векторное пространство над P размерности n^2. Будем обозначать его $\mathfrak{R}(n, n)$.

Теорема 1.3. *Отображение* $\varphi : \mathbf{X} \to \mathcal{A}$, *ставящее в соответствие оператору* $\mathbf{X}$ *его матрицу* $\mathcal{A}$, *т. е.* $\varphi(\mathbf{X}) = \mathcal{A}$, *является изоморфизмом линейных пространств* $\mathfrak{B}(V)$ *и* $\mathfrak{R}^{(n,n)}$.

Линейные пространства $\mathfrak{B}(V)$ и $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ можно превратить в конечномерные алгебры Ли, если ввести умножение Ли. Для $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2 \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$ определим скобку Пуассона: $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$. Очевидно, $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$. Алгебра Ли, полученная таким образом из $\mathfrak{R}^{(n,n)}$, называется полной линейной алгеброй и обозначается $\mathrm{gl}(n, \mathrm{P})$ (n — размерность матриц, P — поле коэффициентов). Для элементов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathfrak{B}(V)$ введем умножение

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1. \tag{1.6}$$

Докажем, что оператор $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \in \mathfrak{B}(V)$ и выясним его структуру.

Теорема 1.4. *Скобка Пуассона двух линейных дифференциальных операторов* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathfrak{B}(V)$ *с матрицами* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *является линейным дифференциальным оператором с матрицей* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{X}_1 = \zeta_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \zeta_n^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \mathbf{X}_2 = \zeta_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \zeta_n^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

и

$$\zeta^{(i)} = x^T\mathcal{A}_i, \quad i = 1, 2, \quad \zeta^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(1)}\|,$$

$$\partial \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{colon}\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|.$$

Вычислим скобку Пуассона:

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = (\mathbf{X}_1\zeta_1^{(2)} - \mathbf{X}_2\zeta_1^{(1)})\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (\mathbf{X}_1\zeta_n^{(2)} - \mathbf{X}_2\zeta_n^{(1)})\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Вектор коэффициентов выписанного оператора можно представить как разность двух векторов:

$$\|\mathbf{X}_1\zeta_1^{(2)} - \mathbf{X}_2\zeta_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}_1\zeta_n^{(2)} - \mathbf{X}_2\zeta_n^{(1)}\| = \|\mathbf{X}_1\zeta^{(2)}\| - \|\mathbf{X}_2\zeta^{(1)}\|.$$

Но

$$\|\mathbf{X}_1\zeta^{(2)}\| = \|\mathbf{X}_1x_1, \ldots, \mathbf{X}_1x_n\|\mathcal{A}_2 = \zeta^{(1)}A_2 = x^T\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2;$$

$$\|\mathbf{X}_2\zeta^{(1)}\| = \|\mathbf{X}_2x_1, \ldots, \mathbf{X}_2x_n\|\mathcal{A}_1 = \zeta^{(2)}\mathcal{A}_2 = x^T\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1.$$

Следовательно, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = x^T(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1)\,\partial \in \mathfrak{B}(V)$.

Таким образом, доказано, что введение в линейном пространстве $\mathfrak{V}(V)$ умножения (1.16) превращает его в алгебру. Будем обозначать эту алгебру тем же символом $\mathfrak{V}(V)$, что и порождающее ее линейное пространство.

Определение 1.1. Пусть β_1, β_2 — алгебры Ли над Р. Линейное отображение g: $\beta_1 \to \beta_2$ называется гомоморфизмом, если для $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \beta_1$

$$g[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = [g(\mathbf{X}_1), g(\mathbf{X}_2)] = g(\mathbf{X}_1)g(\mathbf{X}_2) - g(\mathbf{X}_2)g(\mathbf{X}_1). \qquad (1.7)$$

Справедливо следующее утверждение о связи алгебр $\mathfrak{V}(V)$ и gl (n, P).

Теорама 1.5. *Отображение* φ: $\mathbf{X} \to \mathcal{A}$, *ставящее в соответствие оператору* $\mathbf{X}$ *его матрицу* $\mathcal{A}$ *(т. е.* $\varphi(\mathbf{X}) = \mathcal{A}$*), является изоморфизмом алгебр Ли* $\mathfrak{V}(V)$ *и* gl (n, P).

Перейдем к построению обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{V}$ исходной системы (1.1). Обозначим через σ совокупность матриц $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ и определим совокупности рекуррентной последовательностью

$$\sigma^1 = [\sigma, \sigma], \quad \sigma^2 = [\sigma^1, \sigma^1], \ \ldots, \ \sigma^k = [\sigma^{k-1}, \sigma^{k-1}].$$

Здесь $\sigma^i = \{\mathcal{Z} : \mathcal{Z} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}], \ \mathcal{X}, \ \mathcal{Y} \in \sigma^{i-1},\}$ $[,]$ — скобка Пуассона. Обозначим через V^k линейное пространство над Р с базисом, составленным из линейно независимых матриц, входящих в совокупности $\{\sigma, \sigma^1, \ldots, \sigma^k\}$. Запись $V^{k+1} \subset V^k$ будет означать, что все элементы V^{k+1} можно линейно выразить через базис V^k, т. е. расширение V^k за счет множества σ^{k+1} невозможно, так как в последнем нет линейно независимых от V^k векторов.

Теорема 1.6. *Если на некотором шаге* $V^{k+1} \subset V^k$, *то и для всех последующих шагов имеет место включение* $V^N \subset V^k$ *для* $i \geqslant k + 2$.

Пусть V^k — максимальное линейное пространство размерности m при указанном расширении. Ясно, что $m \leqslant n^2$. Из способа построения простанства V^k видно, что оно порождает некоторую подалгебру полной линейной алгебры gl (n, P). Обозначим эту алгебру тем же символом V^k, $V^k \subseteq \mathcal{R}^{(n,n)}$. От алгебры V^k легко перейти к соответствующей алгебре $\mathfrak{V}(V^k)$ линейных дифференциальных операторов (для этого следует транспонировать матрицы V^k и воспользоваться формулами (1.4), (1.5)).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что V^k совпадает с $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ и, следовательно, $\mathfrak{V}(V^k)$ совпадает с $\mathfrak{V}(V)$. Противное предположение обозначало бы декомпозируемость исходной системы (1.1). Пример обертывающей алгебры $\mathfrak{V}_0$ системы нулевого приближения рассмотрен в § 1 гл. 1.

§ 2. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В соответствии с общим алгоритмом асимптотической декомпозиции (см. § 1 гл. 3) произведем в системе (1.1) замену переменных

$$x_k = \exp(-\varepsilon \mathrm{S})\, x'_k, \quad x'_k = \exp(\varepsilon \mathrm{S})\, x_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon\mathbf{S}_2 + \ldots$ Учитывая специфику линейной системы (1.1), выберем операторы $\mathbf{S}_i$ из алгебры $\mathfrak{B}(V)$, т. е.

$$\mathbf{S}_i = \gamma_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_n^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

где вектор $\gamma^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \| \gamma_1^{(i)}, \ldots, \gamma_n^{(i)} \|$ определяется равенством $\gamma^{(i)} = x^{\mathrm{T}}\Gamma_i$; Γ_i — постоянная матрица размера $n \times n$ с неопределенными пока коэффициентами.

Как показано в гл. 3, приходим к необходимости решения системы операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Правая часть $\mathbf{F}_\nu$ уравнений (2.1) получена вычислением скобок Пуассона от операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{S}_\nu$ и, следовательно (см. теорему 1.4), принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\mathbf{V})$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{A}$, Γ_ν, $\mathcal{B}_\nu$ — *матрицы операторов* $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}_\nu$, $\mathbf{F}_\nu$, *тогда решение системы операторных уравнений* $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu$ *равносильно решению системы матричных уравнений*

$$[\mathcal{A}, \Gamma_\nu] = \mathcal{B}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Доказательство. Используя результаты теоремы 1.3 и формулы (1.16) представления дифференциальных операторов, приведем систему уравнений (2.1) к виду

$$x^{\mathrm{T}}(\mathcal{A}\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\mathcal{A})\,\partial = x^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_\nu\partial. \tag{2.3}$$

Если имеет место тождество (2.3), то из него следуют соотношения (2.2) и обратно. ■

Приведем еще одну полезную в дальнейшем интерпретацию операторных уравнений (2.1). Напомним, что всякий гомоморфизм f из алгебры Ли $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathrm{gl}(k, \mathrm{P})$ называется представлением алгебры Ли $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — конечномерная алгебра Ли ранга k и U — некоторый фиксированный ее элемент. Скобка Пуассона $[\mathbf{U}, \mathbf{S}]$, $\mathbf{S} \in \mathfrak{B}$, является линейным оператором на алгебре $\mathfrak{B}$, рассматриваемой как конечномерное линейное пространство размерности k (по свойству скобки Пуассона $[\mathbf{U}, \alpha_1\mathbf{S}_1 + \alpha_2\mathbf{S}_2] = \alpha_1 [\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] + \alpha_2 [\mathbf{U}, \mathbf{S}_2]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{P}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathfrak{B}$, см. § 1 гл. 1). Обозначим этот оператор $\mathrm{ad}\,\mathbf{U}_0$. Это означает, что $\mathrm{ad}\,\mathbf{U}_0(\mathbf{S}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{U}, \mathbf{S}] = \mathbf{US} - \mathbf{SU}$. Обозначим через $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_k$ базис алгебры $\mathfrak{B}$ и воздействуем оператором $\mathrm{ad}\,\mathbf{U}$ на этот базис:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{ad}\,\mathbf{U}(\mathbf{U}_1), \ldots, \mathrm{ad}\,\mathbf{U}(\mathbf{U}_k)\| &= \|[\mathbf{U}, \mathbf{U}_1], \ldots, [\mathbf{U}, \mathbf{U}_k]\| = \\ &= \|\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_k\| G_U. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если ввести вектор $\hat{\hat{\mathbf{U}}} = \|\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_k\|$, то соотношения (2.4) можно представить в матричном виде:

$$\mathrm{ad}\,\mathbf{U}(\hat{\hat{\mathbf{U}}}) = [\mathbf{U}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}] = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_U.$$

Матрица $\mathcal{G}_U = \|g_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, k}$, является матрицей линейного оператора $\mathrm{ad}\,\mathbf{U}$, действующего из линейного пространства $\mathfrak{B}$ в себя.

Будем отождествлять операторы ad U и $\mathcal{G}_U$. Отображение g: $\mathfrak{B} \to$ $\to$ gl (n, P), осуществляемое формулой g (U) $=$ ad U $\equiv \mathcal{G}_U$, будет представлением алгебры Ли $\mathfrak{B}$, если докажем соотношение

$$\mathrm{ad}\,[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathrm{ad}\,\mathbf{X}, \mathrm{ad}\,\mathbf{Y}] = \mathrm{ad}\,\mathbf{X}\,\mathrm{ad}\,\mathbf{Y} - \mathrm{ad}\,\mathbf{Y}\,\mathrm{ad}\,\mathbf{X}. \tag{2.5}$$

Это представление называется присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{B}$. Перейдем к доказательству соотношений (2.5). Пусть

$$\delta^{(i)} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colon}\,\|\delta_1^{(i)}, \ \ldots, \ \delta_k^{(i)}\|, \quad \delta_j^{(i)} \in \mathrm{P}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, k};$$

$$\hat{\hat{\mathbf{U}}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colon}\,\|\mathbf{U}_1, \ \ldots, \ \mathbf{U}_k\|;$$

$\mathbf{X} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\delta^{(1)}$, $\mathbf{Y} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\delta^{(2)}$, $\mathbf{Z} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\delta^{(3)}$ — произвольные элементы алгебры Ли. Перепишем для них тождество Якоби (см. § 1 гл. 1) следующим образом:

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] = [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] - [\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]]. \tag{2.6}$$

С помощью выражений для элементов **X**, **Y**, **Z** скобки Пуассона [**X**, **Z**], [**Y**, **Z**] примут вид

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = [\mathbf{X}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}\delta^{(3)}] = [\mathbf{X}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}]\,\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_X\delta^{(3)};$$

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}\delta^{(3)}] = [\mathbf{Y}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}]\,\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_Y\delta^{(3)},$$

где $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_Y$ — матрицы операторов **X**, **Y**, определяемые равенствами

$$\mathrm{ad}\,\mathbf{X}\,[\hat{\hat{\mathbf{U}}}] = [\mathbf{X}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}] = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_X; \quad \mathrm{ad}\,\mathbf{Y}\,[\hat{\hat{\mathbf{U}}}] = [\mathbf{Y}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}] = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_Y.$$

Далее,

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] = [\mathbf{X}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_Y\delta^{(3)}] = [\mathbf{X}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}]\,\mathcal{G}_Y\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_X\mathcal{G}_Y\delta^{(3)};$$

$$[\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]] = [\mathbf{Y}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_X\delta^{(3)}] = [\mathbf{Y}, \hat{\hat{\mathbf{U}}}]\,\mathcal{G}_X\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_Y\mathcal{G}_X\delta^{(3)}.$$

Для левой части соотношения (2.6) получаем

$$\mathrm{ad}\,[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\,(\mathbf{Z}) = [[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] = [[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \hat{\hat{\mathbf{U}}}]\,\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_{[X,Y]}\delta^{(3)}.$$

Подставим выведенные выражения в равенства (2.6):

$$\hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_{[X,Y]}\delta^{(3)} = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\,(\mathcal{G}_X\mathcal{G}_Y - \mathcal{G}_Y\mathcal{G}_X)\,\delta^{(3)} \tag{2.7}$$

и приравняем матрицы в билинейных формах (2.7):

$$\mathcal{G}_{[X,Y]} \equiv \mathcal{G}_X\mathcal{G}_Y - \mathcal{G}_Y\mathcal{G}_X. \tag{2.8}$$

Так как по определению $\mathcal{G}_{[X,Y]} =$ ad [**X**, **Y**], $\mathcal{G}_X =$ **ad X**, $\mathcal{G}_Y =$ $=$ ad **Y**, то из тождеств (2.8) следуют доказываемые **соотношения** (2.5).

Вернемся к исходным уравнениям (2.1). Обозначим через $\mathcal{G}_U$ матрицу, соответствующую оператору U в присоединенном представлении g: $\mathfrak{B} \to$ gl (k, P). Если, как и выше, через $\hat{\hat{\mathbf{U}}}$ обозначим вектор-строку, составленную из базисных элементов $\mathbf{U}_1$, ..., $\mathbf{U}_k$ ($k = n^2$), то уравнение (2.1) можно преобразовать к виду

$$\hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_U\hat{\hat{\gamma}}_\nu = \hat{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\hat{f}}_\nu, \tag{2.9}$$

где $\hat{\hat{\gamma}}_\nu$, $\hat{\hat{f}}_\nu$ — векторы коэффициентов в разложении по базису операторов $\mathbf{S}_\nu$:

$$\mathbf{S}_\nu = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\nu j}\mathbf{U}_j, \quad \mathbf{F}_\nu = \sum_{j=1}^{k} f_{\nu j}\mathbf{U}_j,$$

т. е. $\hat{\hat{\gamma}}_\nu = \mathrm{colon}\,\|\gamma_{\nu_1}, \ldots, \gamma_{\nu_k}\|$, $\hat{\hat{f}}_\nu = \mathrm{colon}\,\|f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_k}\|$. Обозначим через $\mathcal{G}_A$ матрицу, соответствующую оператору $\mathbf{A}$ в присоединенном представлении g: $\mathfrak{R}^{(n,n)} \to \mathrm{gl}\,(k, \mathrm{P})$ $(k = n^2)$ матричной алгебры $\mathfrak{R}^{(n,n)}$, изоморфной $\tilde{\mathfrak{B}}$ (или $\mathfrak{B}\,(V)$).

Теорема 2.2. *Матрицы $\mathcal{G}_U$ и $\mathcal{G}_A$ операторов* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{A}$ *в присоединенных представлениях алгебр $\tilde{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ совпадают, т. е. $\mathcal{G}_U \equiv \mathcal{G}_A$.*

Доказательство немедленно следует из изоморфизма алгебр $\tilde{\mathfrak{B}} \equiv \mathfrak{B}\,(V)$ и $\mathfrak{R}^{(n,n)}$, устанавливаемого теоремой 1.5. Применяя линейное отображение к равенству (2.9), получаем

$$\varphi\,(\hat{\hat{\mathbf{U}}}\mathcal{G}_U\hat{\hat{\gamma}}_\nu) = \varphi\,(\hat{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\hat{f}}_\nu),$$

или

$$\varphi\,(\hat{\hat{\mathbf{U}}})\,\mathcal{G}_U\hat{\hat{\gamma}}_\nu = \varphi\,(\hat{\hat{\mathbf{U}}})\,\hat{\hat{f}}_\nu.$$

Базисные элементы $\mathbf{U}_j$ алгебры $\tilde{\mathfrak{B}}$ при отображении φ переходят в базисные элементы $\mathcal{A}_j$ алгебры $\mathfrak{R}^{(n,n)}$: $\varphi\,(\mathbf{U}_j) = \mathcal{A}_j$. Обозначим через $\hat{\hat{A}}$ вектор $\|\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k\|$. Следовательно,

$$\hat{\hat{A}}\mathcal{G}_U\hat{\hat{\gamma}}_\nu = \hat{\hat{A}}\hat{\hat{f}}_\nu. \tag{2.10}$$

С другой стороны, уравнения (2.2) можно представить в виде, аналогичном (2.9):

$$\hat{\hat{A}}\mathcal{G}_A\hat{\hat{\gamma}}_\nu = \hat{\hat{A}}\hat{\hat{f}}_\nu. \tag{2.11}$$

Сопоставляя выражения (2.10) и (2.11), получаем, что $\mathcal{G}_U \equiv \mathcal{G}_A$. ■

Установим структуру матрицы $\mathcal{G}_A$. Для этой цели понадобится определение прямого произведения матриц. Пусть имеются две матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ размерностей $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Таким образом, $\mathcal{A} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{R}^{(m,m)}$. Прямое произведение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ определяется как блочная матрица:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} & \ldots & a_{1m}\mathcal{B} \\ a_{21}\mathcal{B} & a_{22}\mathcal{B} & \ldots & a_{2m}\mathcal{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1}\mathcal{B} & a_{m2}\mathcal{B} & \ldots & a_{mm}\mathcal{B} \end{Vmatrix} \in \mathfrak{R}^{(nm,mn)}.$$

Свойства прямых произведений приведены в работе [44].

Наряду с линейным пространством $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ над P всех матриц порядка n введем изоморфное ему линейное пространство $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$, составленное из векторов, образованных из строк матриц. Таким образом, если матрица $\mathcal{A} \in \Re^{(n,n)}$, $\mathcal{A} = \| a_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, m}$, то ей соответствует в $\hat{\Re}^{(n,n)}$ вектор $\hat{\mathcal{A}} = \text{colon} \| a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn} \|$.

Теорема 2.3.

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^T.$$

Доказательство. Введем в $\Re^{(n,n)}$ базис Вейля, выбирая в качестве базисных элементов матрицы $\mathcal{E}_{ij}$ размерности $n \times n$, в которых на пересечении i-й строки и j-го столбца находится единица, а на всех остальных местах — нули. Матрицы $\mathcal{B}_\nu$, Γ_ν в уравнении (2.2) представим суммами:

$$\Gamma_\nu = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{\nu ij} \mathcal{E}_{ij}, \quad \mathcal{B}_\nu = \sum_{i,j=1}^{n} b_{\nu ij} \mathcal{E}_{ij}. \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в уравнения (2.2) приводит к равенствам

$$\hat{\hat{\mathcal{E}}} \mathcal{G}_A \hat{\hat{\gamma}}_\nu = \hat{\hat{\mathcal{E}}} \hat{\hat{f}}_\nu; \tag{2.13}$$

где

$$\hat{\hat{\mathcal{E}}} \stackrel{\text{def}}{=} \| \mathcal{E}_{11}, \ldots, \mathcal{E}_{1n}; \mathcal{E}_{21}, \ldots, \mathcal{E}_{2n}, \mathcal{E}_{n1}, \ldots, \mathcal{E}_{nn} \|;$$

$$\hat{\hat{\gamma}}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \text{colon} \| \gamma_{\nu 11}, \ldots, \gamma_{\nu 1n}; \gamma_{\nu 21}, \ldots, \gamma_{\nu 2n}; \gamma_{\nu n1}, \ldots, \gamma_{\nu nn} \|;$$

$$\hat{\hat{b}}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \text{colon} \| b_{\nu 11}, \ldots, b_{\nu 1n}; b_{\nu 21}, \ldots, b_{\nu 2n}; b_{\nu n1}, \ldots, b_{\nu nn} \|.$$

Приравнивая векторы при $\hat{\hat{\mathcal{E}}}$, из (2.13) получаем векторное уравнение

$$\mathcal{G}_A \hat{\hat{\gamma}}_\nu = \hat{\hat{b}}_\nu. \tag{2.14}$$

Однако матричные уравнения (2.2) в пространстве $\hat{\Re}^{(n,n)}$ можно представить в виде (см. [44])

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^{\text{T}}) \hat{\Gamma}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_\nu, \tag{2.15}$$

где $\hat{\mathcal{B}}_\nu$, $\hat{\Gamma}_\nu$ — вектор-столбцы, составленные из строк матриц $\mathcal{B}_\nu$, Γ_ν. Из определения векторов $\hat{\hat{f}}_\nu$, $\hat{\hat{\gamma}}_\nu$ следуют тождества $\hat{\hat{\gamma}}_\nu \equiv \hat{\Gamma}_\nu$, $\hat{\hat{b}}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_\nu$. Составляя разность уравнений (2.14) и (2.15), находим $(\mathcal{G}_A - (\mathcal{A} \otimes \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^{\text{T}}))\ \hat{\gamma}_\nu \equiv 0$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение. ■

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ И НАХОЖДЕНИЕ ПРИВОДЯЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В предыдущем параграфе рассматривалось сведение системы операторных уравнений к решению системы линейных алгебраических уравнений. Займемся решением этой системы

$$\mathcal{G}_A \hat{\Gamma}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_\nu, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{G}_A = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{T}})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Наряду с неоднородной системой (3.1) рассмотрим системы однородных уравнений

$$\mathcal{G}_A \hat{\Gamma}_\nu = 0, \quad \mathcal{G}_A^* \hat{\Gamma}_\nu = 0.$$

Здесь $\mathcal{G}_A^*$ — комплексно-сопряженная матрица по отношению к $\mathcal{G}_A$. При решении уравнений (3.1) будем опираться на следующее основное положение о разрешимости линейных алгебраических уравнений.

Теорема 3.1 [18, с. 291]. *Для того чтобы неоднородная система (3.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна ядру матрицы* $\mathcal{G}_A^*$.

Обозначим через $\tilde{N}_A^*$, $\hat{N}_{A*}$ ядра операторов $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_A^*$ (т. е. линейные подпространства в $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$, образованные решениями уравнений $\mathcal{G}_A \hat{X} = 0$ и $\mathcal{G}_A^* \hat{X} = 0$ соответственно) и через $\hat{T}_A$, $\hat{T}_{A*}$ образы этих операторов (т. е. линейные подпространства в $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$, порожденные векторами $\mathcal{G}_A \hat{X}$ или $\mathcal{G}_A^* X$, $\hat{X} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$).

Пространство $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ может быть разложено единственным образом в прямую сумму подпространств

$$\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)} = \hat{N}_A \oplus \hat{T}_A.$$

Следовательно, правая часть системы уравнений (3.1) может быть однозначно представлена в виде суммы

$$\hat{\mathcal{B}}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_{\nu N} + \hat{\mathcal{B}}_{\nu T}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu N} \in \hat{N}_A, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu T} \in \hat{T}_A, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Векторам $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N}$, $\hat{\mathcal{B}}_{\nu T}$ в пространстве $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ соответствуют матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$, $\mathcal{B}_{\nu T}$, которые можно в свою очередь сопоставить с дифференциальными операторами

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\nu &= b_{\nu N 1} \partial/\partial x_1 + \cdots + b_{\nu N n} \partial/\partial x_n; \\ \mathbf{Q}_\nu &= b_{\nu T 1} \partial/\partial x_1 + \cdots + b_{\nu T n} \partial/\partial x_n, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где векторы $b_{\nu N} = \| b_{\nu N 1}, \ldots, b_{\nu N n} \|$, $b_{\nu T} = \| b_{\nu T 1}, \ldots, b_{\nu T n} \|$ определяются равенствами $b_{\nu N} = x^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{\nu N}$, $b_{\nu T} = x^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{\nu T}$.

С учетом сказанного правую часть операторного уравнения $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu$, эквивалентного матричному уравнению (3.1), можно записать в виде $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{N}_\nu + \mathbf{Q}_\nu$. Операторы $\mathbf{N}_\nu$ перестановочны с оператором $\mathbf{U}$, т. е.

$$[\mathbf{U}, \mathbf{N}_\nu] = 0. \tag{3.4}$$

Согласно утверждениям § 1 гл. 3, для того чтобы в коэффициентах оператора $\mathbf{S}$ не появились секулярные члены, на решениях системы нулевого приближения следует в качестве проекции pr $\mathbf{F}_\nu$ принять

$$\mathrm{pr}\, \mathbf{F}_\nu = \mathbf{N}_\nu. \tag{3.5}$$

Как было показано там же, все решения операторного уравнения (3.4) образуют алгебру централизатора $\mathfrak{B}_0$. Следовательно, $\mathbf{N}_\nu \in \mathfrak{B}_0^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

В рассматриваемом случае линейных систем алгебра $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ конечномерна. Действительно, если оператору $\mathbf{U}$ соответствует матрица $\mathcal{A}$, а оператору $\mathbf{X}$ — матрица $\mathcal{X}$, то операторному уравнению $\mathbf{UX} - \mathbf{XU} = 0$ соответствует вследствие изоморфизма алгебры $\mathfrak{B}(V)$ операторов и матричной алгебры $\mathrm{gl}(n, \mathrm{P})$ (см. § 2) матричное уравнение

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = 0. \tag{3.6}$$

Но все решения уравнения (3.6) образуют конечномерную алгебру Ли, которую будем обозначать $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$. В самом деле, если $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ — матрицы из $\mathfrak{R}^{(n,n)}$, удовлетворяющие уравнению (3.6), то и матрицы $a_1\mathcal{X}_1 + a_2\mathcal{X}_2$, $a_1, a_2 \in \mathrm{P}$, $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2] \equiv \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2\mathcal{X}_1$, удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, $\mathfrak{Z}_0^{(1)} \subset \mathrm{gl}(n, \mathrm{P})$ и является конечномерной алгеброй.

После точного определения вида проектора $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$ от оператора $\mathbf{F}_\nu$ в форме равенств (3.5) можно составить централизованную систему, соответствующую исходной системе (1.1).

Оператор $\mathbf{U}_0'$ (1.2) после преобразований (2.1) с учетом выражений для $\mathbf{N}_\nu$ примет вид

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \varepsilon^2\mathbf{N}_2 + \cdots, \tag{3.7}$$

где операторы $\mathbf{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, задаются формулами (3.3).

По оператору (3.7) легко восстанавливается централизованная система

$$\frac{dx_i}{dt} = (\mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \varepsilon^2\mathbf{N}_2 + \cdots)\, x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

или с учетом того, что операторам $\mathbf{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, соответствуют матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$,

$$\frac{dx}{dt} = (\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{B}_{1N}^0 + \varepsilon^2\mathcal{B}_{2N}^0 + \cdots)\, x. \tag{3.8}$$

Здесь принято обозначение $\mathcal{B}_{\nu N}^T \equiv \mathcal{B}_{\nu N}^0$. Матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}^0$ коммутируют с матрицей $\mathcal{A}_0$, т. е. $\mathcal{A}_0\mathcal{B}_{\nu N}^0 - \mathcal{B}_{\nu N}^0\mathcal{A} \equiv 0$. Воспользуемся теоремой 3.1 для фактического нахождения составляющей $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N}$ в разложении (3.2). Введем обычным образом скалярное произведение для элементов $\hat{C} = \|c_1, \ldots, c_m\|$, $\hat{\mathcal{D}} = \|d_1, \ldots, d_m\|$, $\hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \in \hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$:

$$\langle \hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} c_1\bar{d}_1 + \cdots + c_m\bar{d}_m,$$

где черта над буквой — знак комплексного сопряжения в случае, когда $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ рассматривается над комплексным полем. Для вещественного поля

$$\langle \hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \rangle = c_1 d_1 + \cdots + c_m d_m,$$

где $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_m$ — векторы, являющиеся строками матриц C и $\mathcal{D}$.

Обозначим через $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_m$ базис пространства N_A и через $\hat{Z}_{1*}, \ldots$ $\ldots, \hat{Z}_{m*}$ базис пространства N_{A*}. Пусть $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{\nu i}\hat{Z}_i$. Разность $\hat{\mathcal{B}}_\nu - \hat{\mathcal{B}}_{\nu N} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu T}$ принадлежит $\hat{T}_A$ и, следовательно, ортогональна пространству N_{A*}:

$$\left\langle \hat{\mathcal{B}}_\nu - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{\nu i}\hat{Z}_i, \ \hat{Z}_{j*} \right\rangle \equiv 0. \tag{3.9}$$

Тождества (3.9) с учетом линейности операции скалярного произведения $\langle , \rangle$ можно представить в виде системы линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\alpha_{\nu i}$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\nu i} \ \langle \hat{Z}_i, \hat{Z}_{j*} \rangle = \langle \hat{\mathcal{B}}_\nu, \hat{Z}_{j*} \rangle, \quad j = \overline{1, m}. \tag{3.10}$$

Определитель Грама

$$\begin{vmatrix} \langle \hat{Z}_1 \ \hat{Z}_{1*} \rangle & \ldots & \langle \hat{Z}_m \ \hat{Z}_{1*} \rangle \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ \langle \hat{Z}_1 \ \hat{Z}_{m*} \rangle & \ldots & \langle \hat{Z}_m \ \hat{Z}_{m*} \rangle \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

соответствующий матрице коэффициентов системы (3.10), не равен нулю. Действительно, если допустить противное, то элемент $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\nu}\hat{Z}_i$ был бы ортогонален $\hat{N}_{A*}$ и, следовательно, принадлежал бы $\hat{T}_A$, что противоречило бы его принадлежности $\hat{N}_A$ ($\hat{N}_A \cap \hat{T}_A = \varnothing$). Если $\hat{\mathcal{B}}_\nu$ не содержит составляющих ядра (т. е. $\hat{\mathcal{B}}_\nu \in \hat{T}_A$), то $\langle \hat{\mathcal{B}}_\nu, \hat{Z}_{j*} \rangle \equiv 0$ и $\alpha_{\nu i} \equiv 0$.

Найдем аналог уравнений (3.10) в пространстве $\mathfrak{R}^{(n,n)}$. Введем на $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ как линейном пространстве билинейную форму $B_n(C, \mathcal{D}) = \operatorname{tr} C\mathcal{D}$, C, $\mathcal{D} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$, где tr — след матрицы. На основании свойства следа произведений матриц $\operatorname{tr} C\mathcal{D} = \operatorname{tr} \mathcal{D}C$ легко доказать симметричность формы $B_n(C, \mathcal{D}) = B_n(\mathcal{D}, C)$. Симметричная билинейная форма на алгебре $\mathfrak{B}$ называется инвариантной, если $w([X, Y], Z) \equiv$ $\equiv w(X, [Y, Z])$. Покажем инвариантность формы B_n на алгебре $\mathfrak{R}^{(n,n)}$. Действительно,

$$B_n([C, \mathcal{D}], \mathcal{M}) = \operatorname{tr}[C, \mathcal{D}]\mathcal{M} = \operatorname{tr}(C\mathcal{D}\mathcal{M} - \mathcal{D}C\mathcal{M}) = \operatorname{tr} C\mathcal{D}\mathcal{M} -$$
$$- \operatorname{tr} \mathcal{D}C\mathcal{M} = \operatorname{tr} C\mathcal{D}\mathcal{M} - \operatorname{tr} C\mathcal{M}\mathcal{D} = \operatorname{tr} C[\mathcal{D}\mathcal{M}] = B_n(C, [\mathcal{D}, \mathcal{M}]).$$

Свойство инвариантности формы B_n на алгебре $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ будет использовано в дальнейшем.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть векторам* $\hat{C} = \operatorname{colon} \| c_{11}, \ldots, c_{1n}; \ldots; c_{n1}, \ldots, c_{nn} \|$, $\hat{\mathcal{D}} = \operatorname{colon} \| d_{11}, \ldots, d_{1n}; \ldots; d_{n1}, \ldots, d_{nn} \|$ в $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ *соот-*

ветствуют матрицы $C = \| c_{ij} \|$, $\mathcal{D} = \| d_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, n}$, *тогда*

а) $\langle \hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \rangle \equiv B_n(C, \mathcal{D}^*)$ *при* $\mathrm{P} = \mathrm{K}$;

б) $\langle \hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \rangle \equiv B_n(C, \mathcal{D}^T$ *при* $\mathrm{P} = \mathrm{R}$,

где $\mathcal{D}^* = \| \overline{d}_{ij} \|^T$ — *комплексно-сопряженная матрица относительно* $\mathcal{D}$.

Доказательство. Рассмотрим случай комплексного поля ($\mathrm{P} = \mathrm{K}$). По определению

$$\langle \hat{C}, \hat{\mathcal{D}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (c_{i1}\overline{d}_{i1} + \cdots + c_{in}\overline{d}_{in}). \tag{3.12}$$

С другой стороны, учитывая, что элементы $\| \overline{d}_{ji} \|$ матрицы $\mathcal{D}^*$ получаются из матрицы $\| d_{ij} \|$ при транспонировании и переходе к комплексно-сопряженным числам, получаем

$$\operatorname{tr} C\mathcal{D}^* = \sum_{i=1}^{n} (c_{i1}\overline{d}_{i1} + \cdots + c_{in}\overline{d}_{in}). \tag{3.13}$$

Сопоставляя правые части равенств (3.12) и (3.13), приходим к доказываемому утверждению. Случай $\mathrm{P} = \mathrm{R}$ доказывается аналогично. ■

Следствие 3.1. Система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\nu i} \langle \hat{Z}_i, \hat{Z}_{j*} \rangle = \langle \hat{\mathcal{B}}_\nu, \hat{Z}_{j*} \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.14}$$

в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ эквивалентна системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\nu i} \operatorname{tr} Z_i Z_j = \operatorname{tr} \mathcal{B}_\nu Z_j, \quad Z_j \in N_A, \tag{3.15}$$

в пространстве $\mathfrak{R}^{(n,n)}$.

Доказательство. Пусть векторам $\hat{Z}_i$, $\hat{Z}_{i*}$ в $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ соответствуют матрицы Z_i, Z_{i*} в $\mathfrak{R}^{(n,n)}$. По определению матрицы Z_i удовлетворяют матричному уравнению

$$\mathcal{A}Z_i - Z_i\mathcal{A} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.16}$$

Матрицы Z_{i*} удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{A}^*Z_{i*} - Z_{i*}\mathcal{A}^* = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.17}$$

т. е. $\mathcal{G}_A^* = (\mathcal{A} \otimes E - E \otimes A^T)^* = A^* \otimes E - E \otimes (\mathcal{A}^*)^T$ (см. свойства прямых произведений в работе [44]). Если вычислить комплексно-сопряженные матрицы от обеих частей уравнения (3.16), то получим $\mathcal{A}^*Z_i^* - Z_i^*\mathcal{A}^* \equiv 0$. Сопоставление этого уравнения с (3.17) позволяет сделать вывод, что $Z_{i*} = Z_i^*$. По теореме 3.2 $\langle \hat{Z}_i, \hat{Z}_{j*} \rangle = \operatorname{tr} Z_i Z_{j*}^* = \operatorname{tr} Z_i (Z_j^*)^* = \operatorname{tr} Z_i Z_j$. Аналогично $\langle \hat{\mathcal{B}}_\nu \hat{Z}_{j*} \rangle = \operatorname{tr} \mathcal{B}_\nu Z_{j*}^* = \operatorname{tr} \mathcal{B}_\nu (Z_j^*)^* = \operatorname{tr} \mathcal{B}_\nu Z_j$. Переход от уравнений (3.14) к (3.15) теперь очевиден. ■

Определитель матрицы коэффициентов системы (3.15)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tr} Z_1 Z_1 & \dots & \operatorname{tr} Z_m Z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{tr} Z_1 Z_m & \dots & \operatorname{tr} Z_m Z_m \end{vmatrix}$$

легко получается из определителя (3.11) и также не равен нулю.

Полученные результаты подытожим в теореме.

Теорема 3.3. *Нахождение проекции оператора* $\operatorname{pr} F_\nu$ *от правых частей уравнений (2.5) сводится к решению систем линейных неоднородных алгебраических уравнений вида (3.14) или (3.15). Решение этих уравнений существует и единственно.*

Решение уравнения

$$\mathcal{A}\Gamma_\nu - \Gamma_\nu \mathcal{A} = \mathcal{B}_\nu - \mathcal{B}_{\nu N} \equiv \mathcal{B}_{\nu T},$$

или эквивалентного ему в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ уравнения

$$\mathcal{G}_A \hat{\Gamma}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_{\nu T} \tag{3.18}$$

необходимо на этапе построения замены переменных. По доказанному выше эти уравнения имеют единственные решения.

Обозначим базис образа пространства $\hat{T}_A$ через $\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_l$ ($l^2 = m$). Этот базис можно найти, например, из условия ортогональности подпространств $\hat{T}_A$ и $\hat{N}_{A*}$, т. е. из уравнений $\langle \hat{\mathcal{X}}, \hat{Z}_{i*} \rangle \equiv 0$, $\hat{Z}_{i*} \in \hat{N}_{A*}$. Представим неизвестный вектор Γ_ν в виде разложения по базису $\hat{T}_A$:

$$\hat{\Gamma}_\nu = \eta_{\nu 1} \hat{T}_1 + \cdots + \eta_{\nu l} \hat{T}_l = T \cdot \eta_\nu,$$

где T — матрица размерности $n^2 \times l$, составленная из столбцов $\hat{T}_1, \ldots \hat{T}_l$, $\hat{\eta}_\nu \overset{\text{def}}{=} \operatorname{colon} \| \eta_{\nu 1}, \ldots, \eta_{\nu l} \|$.

Подставим вектор $\hat{\Gamma}_\nu = T\hat{\eta}_\nu$ в уравнение (3.18):

$$\mathcal{G}_A T \hat{\eta}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_{\nu T}. \tag{3.19}$$

Полученная для вектора коэффициентов $\hat{\eta}_\nu$ система переопределена, так как имеет n^2 уравнений от неизвестных η_ν, $\nu = \overline{1, l}$. Чтобы избавиться от лишних уравнений и получить только l ($l = n^2 = m$) уравнений, умножим обе части равенств (3.19) на матрицу $T^* G_A^*$, сопряженную с $G_A T$. В результате получаем

$$T^* \mathcal{G}_A^* \mathcal{G}_A T \hat{\eta}_\nu = T^* \mathcal{G}_A^* \hat{\mathcal{B}}_{\nu T}, \quad T^* \mathcal{G}_A^* \mathcal{G}_A T \in \mathfrak{R}^{(l,l)}. \tag{3.20}$$

Окончательно оператор $\mathbf{S}_\nu$ как решение уравнения

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu - \operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu \tag{3.21}$$

можно записать в виде

$$\mathbf{S}_\nu = \gamma_1^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_n^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{3.22}$$

где $\gamma^{(\nu)} = \| \gamma_1^{(\nu)}, \ldots, \gamma_n^{(\nu)} \|$ определяется равенством $\gamma^{(\nu)} = x^T\Gamma_\nu$, а матрица Γ_ν — решение уравнений (3.20). Чтобы подчеркнуть роль выбора проекции $\mathrm{pr}\ \mathbf{F}_\nu$, приведем доказательство следующего утверждения, не зависящее от доказательства § 1 гл. 3. (В силу линейности исходной системы (1.1) в этом случае становится особенно ясным смысл проводимых преобразований.)

Теорема 3.4. *Выбор проекции* $\mathrm{pr}\ \mathbf{F}_\nu$ *от оператора* $\mathbf{F}_\nu$ *в виде (3.5) обеспечивает отсутствие в коэффициентах преобразования* $\mathbf{S}_\nu$ (2.1) *секулярных членов (пропорциональных независимой переменной* $t - t_0$) *на решениях системы нулевого приближения (1.6)* $\dot{x} = \mathcal{A}_0 x$.

Доказательство. Представим уравнение (2.5) следующим образом:

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{N}_\nu + \mathbf{Q}_\nu, \tag{3.23}$$

где операторам $\mathbf{N}_\nu$, $\mathbf{Q}_\nu$ соответствуют матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$, $\mathcal{B}_{\nu T}$ в разложении (3.2).

Как показано выше, оператор (3.22) находится как решение уравнения (3.21). Обратимся теперь к разрешимости уравнения (3.23). Наличие в правой части составляющей $\mathbf{N}_\nu$ делает неразрешимой соответствующую уравнению (3.23) алгебраическую систему (3.1). Следовательно, в этом случае не существует решения в виде линейного дифференциального оператора с коэффициентами в форме линейных функций по x, т. е. $S_\nu \notin \mathfrak{B}(V)$. Будем искать решение (3.23) в виде суммы $\mathbf{S}_\nu^0 + \mathbf{S}_\nu$, где $\mathbf{S}_\nu$ удовлетворяет тождеству $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] \equiv \mathbf{F}_\nu - \mathrm{pr}\ \mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{Q}_\nu$. Подстановка этой суммы в (3.23) приводит к уравнениям

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^0] = \mathbf{N}_\nu. \tag{3.24}$$

Пусть

$$\mathbf{S}_\nu^0 = \gamma_{\nu 1}^0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \gamma_{\nu n}^0 \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ и } \mathbf{N}_\nu = b_{\nu N1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_{\nu Nn} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

где вектор $b_{\nu N} = \| b_{\nu N1}, \ldots, b_{\nu Nn} \|$ определяется выражением

$$b_{\nu N} = x^T \mathcal{B}_{\nu N}. \tag{3.25}$$

После подстановки $\mathbf{S}_\nu^0$ и $\mathbf{N}_\nu$ в уравнение (3.24) получаем соотношения

$$\mathbf{U}\gamma_{\nu 1}^0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{U}\gamma_{\nu n}^0 \frac{\partial}{\partial x_n} = (\mathbf{S}_\nu^0 \omega_1^{(1)} - b_{\nu N1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\cdots + (\mathbf{S}_\nu^0 \omega_n^{(1)} - b_{\nu Nn}) \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{3.26}$$

Приравняем в (3.26) коэффициенты при одинаковых производных:

$$\mathbf{U}\gamma_{\nu 1}^0 = \mathbf{S}_\nu^0 \omega_1^{(1)} - b_{\nu N1}, \ \ldots, \ \mathbf{U}\gamma_{\nu n}^0 = \mathbf{S}_\nu^0 \omega_n^{(1)} - b_{\nu Nn}.$$

Полученная система линейных уравнений в частных производных первого порядка с одинаковыми главными частями может быть заменена интегрированием одного линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\omega_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+\omega_n^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+(\mathbf{S}_\nu^0\omega_1^{(1)}-b_{\nu N1})\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{\nu1}^0}+\cdots$$

$$\cdots+(\mathbf{S}_\nu^0\omega_n-b_{\nu Nn})\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{\nu n}^0}=0. \tag{3.27}$$

В свою очередь интегрирование этого уравнения можно заменить интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 3 гл. 3)

$$\frac{dx_1}{dt}=\omega_1^{(1)}(x),\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}=\omega_n^{(1)}(x);$$

$$\frac{d\gamma_{\nu1}^0}{dt}=\mathbf{S}_\nu^0\omega_1^{(1)}-b_{\nu N1},\ \ldots,\ \frac{d\gamma_{\nu n}^0}{dt}=\mathbf{S}_\nu^0\omega_n^{(1)}-b_{\nu Nn}.$$

Если учесть значения коэффициентов $\omega_i^{(1)}(x)$, задаваемых соотношениями (1.5), а также формулы (3.25), данную систему можно представить в матричном виде

$$\frac{dx}{dt}=\mathcal{A}_0x,\quad \frac{d\gamma_\nu^{0T}}{dt}=\mathcal{A}_0\gamma_{\nu N}^{0T}+\mathcal{B}_{\nu N}^Tx,\quad \gamma_\nu^0=\|\gamma_{\nu1}^0,\ \ldots,\ \gamma_{\nu n}^0\|. \tag{3.28}$$

Подставим решение первой системы (3.28) $x=\exp\mathcal{A}_0(t-t_0),\ c,\ c=\mathrm{const}$ во вторую:

$$\frac{d\gamma_\nu^{0T}}{dt}=\mathcal{A}_0\gamma_\nu^{0T}+\mathcal{B}_{\nu N}^T\exp\mathcal{A}_0(t-t_0)\,c. \tag{3.29}$$

Отыскивая частное решение системы (3.29) в виде $\gamma_\nu^0=\exp\mathcal{A}_0(t-t_0)\,D(t)$, для вектора $D(t)$ получаем уравнение

$$\frac{dD}{dt}=\exp(-\mathcal{A}_0(t-t_0))\,\mathcal{B}_{\nu N}^T\exp\mathcal{A}_0(t-t_0)\,c\equiv\mathcal{B}_{\nu N}^Tc, \tag{3.30}$$

где $\mathcal{A}_0\mathcal{B}_{\nu N}^T=\mathcal{B}_{\nu N}^T\mathcal{A}_0$ по условию выбора $\mathcal{B}_{\nu N}^T$.

Уравнение (3.30) легко проинтегрировать: $D(t)=(t-t_0)\,\mathcal{B}_{\nu N}^Tc$. Общее решение системы линейных уравнений (3.28) для определения переменных $\gamma_{\nu N}$ будет содержать составляющую

$$(\gamma_\nu^0)^T=\exp\mathcal{A}_0(t-t_0)\,\mathcal{B}_{\nu N}^Tc\,(t-t_0). \tag{3.31}$$

Следовательно, если в правых частях операторного уравнения (3.24) имеется составляющая $\mathbf{N}_\nu\not\equiv0$, то коэффициенты (3.31) содержат секулярные члены. При введении проекции оператора $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu\equiv\mathbf{N}_\nu$ в соответствии с определением (3.5) секулярные члены в коэффициентах (3.31) исчезают. ■

§ 4. СТРУКТУРА ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДЕКОМПОЗИРУЕМОСТИ И РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ

Исследуем детально структуру централизованной системы

$$\frac{dx}{dt} = (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{B}_{1N}^0 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_{2N}^0 + \cdots)\, \bar{x}, \tag{4.1}$$

в которой матрицы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_{\nu N}^0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, коммутируют:

$$\mathcal{A}_0 \mathcal{B}_{\nu N}^0 \equiv \mathcal{B}_{\nu N}^0 \mathcal{A}_0. \tag{4.2}$$

В предыдущем параграфе была введена конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, определяемая как всевозможные решения уравнения

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}. \tag{4.3}$$

Если учесть, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^T$, $\mathcal{B}_{\nu N} = (\mathcal{B}_{\nu N}^0)^T$, то тождества (4.2) в действительности эквивалентны тождествам $\mathcal{A}\mathcal{B}_{\nu N} - \mathcal{B}_{\nu N}\mathcal{A} = 0$.

Следовательно, $\mathcal{B}_{\nu N} \in \mathfrak{Z}_0^{(1)}$. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем исследовать структуру алгебры $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, порожденную решениями уравнения (4.3). Все выводы можно будет перенести автоматически на систему (4.1), если транспонировать ее, т. е. представить в виде

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}_{1N} + \varepsilon^2 \mathcal{B}_{2N} + \cdots), \tag{4.4}$$

где $x^T = \| x_1, \ldots, x_n \|$.

В случае необходимости легко операцией транспонирования перейти к исходной системе (4.1).

Введенная в § 3 инвариантная форма $B_n(C, \mathcal{D}) = \operatorname{tr} C\mathcal{D}$, $C, \mathcal{D} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$, на алгебре $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ важна тем, что ее можно использовать для разложения алгебры централизатора на простые подалгебры. Напомним что подалгебра $\mathfrak{P}$ ассоциативной алгебры проста, если $\mathfrak{P}^2 \neq 0$, и единственными ее идеалами являются 0 и $\mathfrak{P}$. Рассматривая алгебру централизатора $\mathfrak{Z}_0^{(1)} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$ как ассоциативную подалгебру ассоциативной алгебры $\mathfrak{P}$, можно применить к ней следующую теорему.

Теорема 4.1 (Э. Артина). *Пусть $\mathfrak{P}$ — алгебра, не имеющая ненулевых идеалов $\mathfrak{J}$, для которых $\mathfrak{J}^2 = 0$. Если она обладает невырожденной инвариантной симметричной билинейной формой, то ее можно представить в виде прямой суммы простых идеалов: $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_k$, где $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j = 0$, $i \neq j$. Это разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.*

В § 3 показано, что определитель (3.25) матрицы системы уравнений (3.23) не равен нулю и, следовательно, инвариантная билинейная форма B_n на алгебре $\mathfrak{B}_0$ является невырожденной. Сформулированная теорема дает теоретическую предпосылку для разложимости алгебры централизатора на подалгебры.

Приведем метод выделения в алгебре централизатора $\mathfrak{B}_0$ ее идеалов и сформулируем ряд теорем о декомпозируемости централизованной системы. Вначале сформулируем следующее определение.

Элемент $\mathcal{X}$ пространства $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ назовем правым собственным вектором матрицы $\mathcal{A}$, если он удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}\mathcal{X} = \lambda\mathcal{X}$, $\lambda \in P$, и левым собственным вектором, если он удовлетворяет соотношению $\mathcal{X}\mathcal{A} = \lambda\mathcal{X}$.

Теорема 4.2. *Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — кратности собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ матрицы $\mathcal{A}$; тогда решения системы уравнений*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \lambda_i\mathcal{X}, \quad \mathcal{X}\mathcal{A} = \lambda_i\mathcal{X}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.5}$$

порождают идеал алгебры централизатора $\mathfrak{Z}(\lambda_i)$ размерности k_i^2 и алгебра $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ раскладывается в прямую сумму идеалов:

$$\mathfrak{Z}_0^{(1)} = \mathfrak{Z}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Z}(\lambda_m).$$

Докажем предварительно два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Если $\mathcal{X}$ — правый собственный вектор матрицы $\mathcal{A}$ с собственным числом λ_i, $i = \overline{1, m}$, то он одновременно является левым собственным вектором матрицы $\mathcal{A}$ с собственным числом λ_j, $j = \overline{1, m}$, и наоборот. Равенство $i = j$ не обязательно.*

Доказательство. Операторы $\mathcal{A}\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mathcal{A}$ в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ примут вид $\mathcal{G}_{A1}\hat{\mathcal{X}}$, $\mathcal{G}_{A2}\hat{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{G}_{A1} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}_n$, $\mathcal{G}_{A2} = \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{A}^T$. Так как по предположению матрица $\mathcal{A}$ имеет простую структуру, то в некотором базисе она примет диагональный вид и матрицы $\mathcal{G}_{A1}$, $\mathcal{G}_{A2}$ также будут диагональными. Тогда из равенства $\mathcal{G}_{A1}\hat{\mathcal{X}} = \lambda_i\hat{\mathcal{X}}$ следует равенство $\mathcal{G}_{A2}\hat{\mathcal{X}} = \lambda_j\hat{\mathcal{X}}$ (напомним, что $\mathcal{G}_{A1}$ и $\mathcal{G}_{A2}$ имеют одни и те же собственные числа). Возвращаясь в пространство $\mathfrak{R}^{(n,n)}$, получим, что из равенства $\mathcal{A}\mathcal{X} = \lambda_i\mathcal{X}$ следует равенство $\mathcal{X}\mathcal{A} = \lambda\mathcal{X}$. Очевидно, что любая замена базиса не изменяет полученных соотношений. Доказательство обратного утверждения аналогично. ■

Лемма 4.2. *Решениями уравнения*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = 0 \tag{4.6}$$

являются те и только те векторы $\mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{(n,n)}$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \lambda_i\mathcal{X}, \quad \mathcal{X}\mathcal{A} = \lambda_i\mathcal{X}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Если матрица $\mathcal{X}$ удовлетворяет системе (4.7), то, образовав разность уравнений, входящих в систему, убеждаемся, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет уравнению (4.6). В качестве базиса $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ можно выбрать n^2 собственных правых векторов матрицы $\mathcal{A}$: $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, ..., $\mathcal{X}_{n^2}$. Пусть $\mathcal{X}$ удовлетворяет уравнению (4.6). Разложим $\mathcal{X}$ по указанному базису:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i\mathcal{X}_i. \tag{4.8}$$

Умножая (4.8) справа на матрицу $\mathcal{A}$, находим

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i\mathcal{A}\mathcal{X}_i = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i\mu_i\mathcal{X}_i,$$

где μ_i — одно из n характеристических чисел матрицы $\mathcal{A}$. Далее, вычисляя элемент $\mathcal{X}\mathcal{A}$ и пользуясь результатами леммы (4.1), получаем $\mathcal{X}\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i \eta_i \mathcal{X}_i$. В разности $\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A}$ только те слагаемые не равны тождественно нулю, в которых $\mu_i - \eta_i \equiv 0$. Разность $\mu_i - \eta_i$, равную нулю, можно получить k_i^2 способами для $\mu_i = \eta_i = \lambda_i$. Следовательно, размерность алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ равна $k_1^2 + \ldots + k_m^2$. Далее, очевидно, что, выделив в разложении те слагаемые, которые принадлежат $\mathfrak{B}(\lambda_i)$, можно разложить элемент $\mathcal{X}$ в сумму:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{X}_{i\lambda_i}, \quad \mathcal{X}_{i\lambda_i} \in \mathfrak{B}(\lambda_i).$$

Слагаемые $\mathcal{X}_{i\lambda_i}$ удовлетворяют системе (4.5).■

Доказательство теоремы 4.2. В леммах 4.1 и 4.2 показано, что подпространства $\mathfrak{B}(\lambda_i)$ имеют размерности k_i^2 и алгебра $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ разлагается как линейное пространство в прямую сумму этих подпространств. Докажем, что подпространство $\mathfrak{B}(\lambda_i)$ является алгеброй Ли. Действительно, если $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ — решения системы (4.5), то произведение элементов $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ также является ее решением, так как $\mathcal{A}\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 = \lambda_i\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{A} = \lambda_i\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$. Таким образом, наряду с $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ скобка Пуассона $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2]$ также удовлетворяет системе (4.5). Чтобы показать, что $\mathfrak{B}(\lambda_i)$ являются идеалами, нужно убедиться, что для $\mathcal{X}_i \in \mathfrak{B}(\lambda_i)$ и $\mathcal{X}_j \in \mathfrak{B}(\lambda_j)$ $[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] \equiv 0$. По лемме 4.2 элемент $[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j]$ должен быть одновременно правым и левым собственными векторами. Выпишем их:

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = \lambda_i\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j - \lambda_j\mathcal{X}_j\mathcal{X}_i; \quad [\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j]\mathcal{A} = \lambda_j\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j - \lambda_i\mathcal{X}_j\mathcal{X}_i.$$

Вычитая из первого тождества второе, получаем

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] - [\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j]\mathcal{A} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j + (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{X}_j\mathcal{X}_i. \tag{4.9}$$

Левая часть соотношения (4.9) тождественно равна нулю, следовательно, $(\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j + (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{X}_j\mathcal{X}_i = 0$. Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j \equiv 0$, $\mathcal{X}_j\mathcal{X}_i \equiv 0$. (Можно показать, что равенство $\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j + \mathcal{X}_j\mathcal{X}_i \equiv 0$ также невозможно.)

Теорема 4.2 доказана.■

Приведем еще один алгоритм разложения обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ на идеалы, существенно использующий алгебру проекторов.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ — алгебра централизатора и $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m$ — проекторы на корневые подпространства $\mathcal{P}(\lambda_{i0})$, $i = \overline{1, m}$, матрицы $\mathcal{A}$; тогда алгебра централизатора распадается на прямую сумму идеалов:*

$$\mathfrak{B}_0^{(1)} = \mathfrak{B}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}(\lambda_m), \quad [\mathfrak{B}(\lambda_i), \mathfrak{B}(\lambda_j)] \equiv 0, \quad i \neq j, \tag{4.10}$$

где идеалы определяются соотношениями

$$\mathfrak{B}(\lambda_i) = \mathfrak{B}_0^{(1)}\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i\mathfrak{B}_0^{(1)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

При доказательстве сформулированной теоремы понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.3. *Проекторы* $\mathcal{P}_i$, $i=\overline{1, m}$, *принадлежат алгебрам* $\mathfrak{B}(\lambda_i)$, $i=\overline{1, m}$

Доказательство. Убедимся, что матрица $\mathcal{P}_i$ удовлетворяет системе уравнений (4.5). Для этого воспользуемся разложением (1.27) матрицы $\mathcal{A}$ по проекторам и представим указанную систему в виде

$$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})\,\mathcal{X}=\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)\,\mathcal{P}_j\mathcal{X};$$
$$\mathcal{X}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})=\mathcal{X}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)\,\mathcal{P}_j. \tag{4.11}$$

Подставляя в эти уравнения $\mathcal{X}=\mathcal{P}_i$, получаем $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})\,\mathcal{P}_i\equiv 0$, $\mathcal{P}_i(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})\equiv 0$, так как $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j\equiv 0$ при $i\neq j$. ■

Лемма 4.4. *Если* $\mathcal{N}\in\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, *то*

$$\mathcal{P}_i\mathcal{N}\mathcal{P}_j\equiv 0 \text{ при } i\neq j. \tag{4.12}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{N}\in\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, то скобка Пуассона $[\mathcal{P}_i, \mathcal{N}]$ принадлежит $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ и, как следствие, должна быть решением уравнений (4.11). Подстановка вместо $\mathcal{X}$ во второе из этих уравнений выражения (4.11) приводит к тождеству

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)\,\mathcal{P}_i\mathcal{N}\mathcal{P}_j\equiv 0,\quad i=\overline{1, m},$$

или

$$\mathcal{P}_i\mathcal{N}\,((\lambda_1-\lambda_i)\,\mathcal{P}_1+\cdots+(\lambda_{i-1}-\lambda_i)\,\mathcal{P}_{i-1}+(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\,\mathcal{P}_i+\cdots$$
$$\cdots+(\lambda_m-\lambda_i)\,\mathcal{P}_m)\equiv 0,\quad i=\overline{1, m},$$

откуда следует справедливость формулы (4.12). ■

Лемма 4.5. *Элемент* $\mathcal{P}_i$, $i=\overline{1, m}$, *перестановочен с элементами алгебры* $\mathfrak{B}_0^{(1)}$.

Доказательство. Воспользуемся разложением единицы $\mathcal{E}=\mathcal{P}_1+\ldots+\mathcal{P}_m$ и запишем элемент $\mathcal{N}$ двумя способами:

$$\mathcal{N}=\mathcal{P}_1\mathcal{N}+\cdots+\mathcal{P}_i\mathcal{N}+\cdots+\mathcal{P}_m\mathcal{N},$$
$$\mathcal{N}=\mathcal{N}\mathcal{P}_1+\cdots+\mathcal{N}\mathcal{P}_i+\cdots+\mathcal{N}\mathcal{P}_m,\quad \mathcal{N}\in\mathfrak{Z}_0^{(1)}.$$

Первое из этих соотношений умножим на $\mathcal{P}_i$ справа, а второе слева. По лемме 4.5, учитывая, что $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j=0$ при $i\neq j$, находим

$$\mathcal{N}\mathcal{P}_i=\mathcal{P}_i\mathcal{N}\mathcal{P}_i,\quad \mathcal{P}_i\mathcal{N}=\mathcal{P}_i\mathcal{N}\mathcal{P}_i,$$

откуда сразу следует, что $\mathcal{P}_i\mathcal{N}=\mathcal{N}\mathcal{P}_i$. ■

Доказательство теоремы 4.3. Если $\mathcal{N}\in\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, то элемент $\mathcal{P}_i\mathcal{N}$ $(\mathcal{P}_i\mathcal{N}\equiv\mathcal{N}\mathcal{P}_i)$ удовлетворяет системе уравнений (4.11). Все элементы $\{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\} = \{\mathcal{P}_i\mathcal{N} : \mathcal{N} \in \mathfrak{Z}_0^{(1)}\}$ образуют подалгебру $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, которую будем обозначать $\{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}$. Действительно, сумма элементов $\alpha\mathcal{P}_i\mathcal{N}_1 + \beta\mathcal{P}_i\mathcal{N}_2 \in \{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{P}$, $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathfrak{Z}_0^{(1)}$, и произведения $\mathcal{P}_i\mathcal{N}_1\mathcal{P}_i\mathcal{N}_2 = \mathcal{P}_i\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 \in \mathfrak{Z}_0^{(1)}$. Следовательно, $\{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\} \in \mathfrak{Z}(\lambda_i)$. Убедимся в обратном, т. е. что $\mathfrak{Z}(\lambda_i) \in \{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}$. Пусть $\mathcal{N} \in \mathfrak{Z}(\lambda_i)$, тогда $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе (4.11). Из первого уравнения этой системы получаем $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})\mathcal{N} = \sum_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_j - \lambda_i)\mathcal{P}_j\mathcal{N}_i$, откуда следует, что $\mathcal{P}_j\mathcal{N}_i \equiv 0$, $j \neq i$. В разложении $\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{N}\mathcal{P}_m$ остается только член $\mathcal{N}\mathcal{P}_i$, т. е. $\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{N} \in \{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}$. Итак, доказано, что алгебры $\{\mathcal{N}\mathcal{P}_i\}$ и $\mathfrak{Z}(\lambda_0)$ совпадают. В действительности $\{\mathcal{N}\mathcal{P}_i\}$ — идеалы, так как для любого $Q \in \mathfrak{B}_0^{(1)}$ имеем $Q = Q\mathcal{P}_1 + \ldots + Q\mathcal{P}_m$ и $\mathcal{P}_iQ \in \{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}$. Кроме того, $\{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\}\{\mathcal{P}_j\mathcal{N}\} \equiv 0$. Пересечение алгебр $\{\mathcal{P}_i\mathcal{N}\} \cap \{\mathcal{P}_j\mathcal{N}\} \equiv 0$ и, следовательно, сумма алгебр (4.10) — прямые.

Покажем теперь, что интегрирование централизованной системы (4.4) проще по сравнению с исходной возмущенной системой (1.1) (которую для удобства сравнения предварительно транспонируем):

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}), \tag{4.13}$$

где $x^T = \| x_1, \ldots, x_n \|$.

Сформулируем основной результат о декомпозиции.

Теорема 4.4. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — характеристические числа кратностей $r_1, \ldots, r_m$ матрицы $\mathcal{A}$; тогда централизованная система*

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}_{1N} + \varepsilon^2\mathcal{B}_{2N} + \cdots) \tag{4.14}$$

преобразуется к квазидиагональному виду

$$\frac{dz}{dt} = \begin{Vmatrix} \lambda_1E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_mE_m \end{Vmatrix} z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \begin{Vmatrix} Q_{\nu1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q_{\nu2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & Q_{\nu m} \end{Vmatrix} z, \tag{4.15}$$

где матрицы $Q_{\nu1}, Q_{\nu2}, \ldots, Q_{\nu m}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, расположенные на квазидиагонали, имеют размерности соответственно $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, ..., $r_m \times r_m$. Вектор новых переменных $z = \| z_1, \ldots, z_m \|$ связан со старыми переменными с помощью матрицы приводящего преобразования $\mathcal{L}$, $\det \mathcal{L} \neq 0$, $x = z\mathcal{L}$. Матрица $\mathcal{L}$ составлена из базисных векторов корневых подпространств $\mathcal{P}(\lambda_i)$ матрицы $\mathcal{A}$.

Прежде чем привести доказательство сформулированной теоремы, сделаем некоторые замечания. Упрощение решения системы (4.15) по сравнению с решением исходной возмущенной системы (4.13) происходит за счет расщепления подсистемы на m подсистем меньшей размерности. Для приведения централизованной системы (4.14) к квазидиагональному виду (4.15) используется лишь информация о характеристических числах матрицы $\mathcal{A}$ системы нулевого приближения $\frac{dx^T}{dt} = x^T\mathcal{A}$, так как вычисление матриц $\mathcal{B}_{1\nu}$, $\mathcal{B}_{2\nu}$, ... не требует, вообще говоря, знания указанных характеристических чисел (см. § 3).

Доказательство теоремы 4.4. Из тождества $\mathcal{A}\mathcal{B}_{\nu N} - \mathcal{B}_{\nu N}\mathcal{A} \equiv 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, следует тождество $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})\mathcal{B}_{\nu N} - \mathcal{B}_{\nu N}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E}) \equiv 0$. Если $\eta = \| \eta_1, \ldots, \eta_n \|$ — вектор корневого подпространства $\mathcal{P}(\lambda_i)$, определяемого уравнением $\eta(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E}) = 0$, то очевидно соотношение

$$\eta\mathcal{B}_{\nu N}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E}) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{\nu N}$ переводит векторы $\mathcal{P}(\lambda_i)$ в себя и подпространство $\mathcal{P}(\lambda_i)$ инвариантно относительно матриц $\mathcal{B}_{\nu N}$.

В качестве строк матрицы преобразования $\mathcal{L}$ могут быть выбраны n линейно независимых строк матриц проектирования $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m$.

Следствие 4.1. Если матрица $\mathcal{A}$ имеет нулевой корень кратности, например r_1, то в централизованной системе (4.15) первые r_1 координат пропорциональны параметру ε, т. е. являются медленными переменными. Централизованная система (4.15) в этом случае имеет r_1 медленных и $n-r_1$ быстрых переменных.

В практических вычислениях применение теоремы 4.4 может оказаться затруднительным. Нахождение матриц $\mathcal{B}_{1N}, \ldots, \mathcal{B}_{\nu N}, \ldots$ централизованной системы, вообще говоря, не требует знания собственных чисел, в то время как при приведении централизованной системы (4.20) к квазидиагональному виду предполагается согласно теореме 4.4, что они известны. Следующее утверждение может оказаться в ряде случаев полезным.

Теорема 4.5. *Пусть матрица $\mathcal{A}$, действующая в пространстве R^n, обладает инвариантным подпространством $L_1 \subset \mathrm{R}^n$ размерности k_1, тогда в пространстве R^n можно указать подпространство $L_2 \subseteq \mathrm{R}^n$, $L_1 \subseteq L_2$, размерности k_2 ($k_2 \geqslant k_1$), которое инвариантно относительно матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_{\nu N}$, $\nu = 1, 2, \ldots$: $L_2\mathcal{A} = L_2$, $L_2\mathcal{B}_{\nu N} = L_2$. Используя базис этого подпространства в качестве новых координатных векторов, централизованную систему (4.14) можно привести к квазитреугольному виду с квадратными блоками размерностей $k_2 \times k_2$ и $(n - k_2) \times (n - k_2)$ на главной диагонали*

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \left\| \begin{matrix} \overset{\nu}{q}_{11} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{1k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{\nu}{q}_{k_2 1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2 k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \overset{\nu}{q}_{k_2+1,1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2+1,k_2} & \overset{\nu}{q}_{k_2+1,k_2+1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{\nu}{q}_{n1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{nk_2} & \overset{\nu}{q}_{n,k_2+1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{nn} \end{matrix} \right\| z. \qquad (4.16)$$

Доказательство. В силу простоты матрицы $\mathcal{A}$ базис пространства R^n можно составить из n собственных векторов матрицы $\mathcal{A}$. Обозначим этот базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Если $\eta_1, \ldots, \eta_{k_1}$ — базис инвариантного подпространства L_1, то он может быть линейно выражен через k_1 векторов из числа базисных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, например $\xi_1, \ldots, \xi_{k_1}$. Предположим, что вектор ξ_j из числа $\xi_1, \ldots, \xi_{k_1}$ принадлежит корневому подпространству $\mathcal{P}(\lambda_j)$ корня λ_j кратности r_j. Тогда из тождества $(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E})\mathcal{B}_{\nu N}=\mathcal{B}_{\nu N}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E})$ следует $\xi_j\mathcal{B}_{\nu N}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E})=0$. Значит, любой вектор ξ_j может перейти лишь в один из векторов корневого подпространства $\mathcal{P}(\lambda\ )$. Алгоритм вычисления состоит в следующем. Дополняем систему векторов $\eta_1, \ldots, \eta_{k_1}$ линейно независимыми из числа $\eta_1\mathcal{B}_{\nu N}, \ldots, \eta_{k_1}\mathcal{B}_{\nu N}$, $\nu=1, 2, \ldots$ Пусть это будут векторы $\eta_{k_1+1}, \ldots, \eta_{k_2}$. Далее повторяем процедуру: вычисляем векторы $\eta_{k_1+1}\mathcal{B}_{\nu N}, \ldots, \eta_{k_2}\mathcal{B}_{\nu N}$ и дополняем линейно независимыми из их числа совокупность векторов $\eta_1, \ldots, \eta_{k_1}, \eta_{k_1+1}, \ldots, \eta_{k_2}$. Ясно, что на каждом шаге либо найдется новый вектор, линейно независимый от предыдущих, либо процесс прекратится. После конечного числа шагов получим максимально возможное число линейно независимых векторов $\eta_1, \ldots, \eta_{k_1}, \eta_{k_1+1}, \ldots, \eta_{k_2}$. Обозначим через L_2 линейное подпространство, натянутое на эти векторы. Размерность пространства в пределе может равняться сумме размерностей корневых подпространств $\mathcal{P}(\lambda_j)$, $j=\overline{1, k_1}$, в которые входят векторы $\xi_1, \ldots, \xi_{k_1}$.

Если размерность k_2 подпространства L_2 меньше n, то выбираем в качестве первых k_2 строк матрицы преобразования $\mathcal{L}$ базис L_2 и в качестве остальных — $n-k_2$ строк, дополняющих базис пространства R^n до полного. При помощи замены переменных $x^T=z\mathcal{L}$ преобразуем матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_{\nu N}$ к квазидиагональному виду (4.26).

Введем обозначения

$$Q_{\nu 1}=\begin{Vmatrix} \overset{\nu}{q}_{11} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{1k_2} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \overset{\nu}{q}_{k_21} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2k_2}\end{Vmatrix},\quad Q_{\nu 2}=\begin{Vmatrix} \overset{\nu}{q}_{k_2+1,k_2+1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2+1,n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \overset{\nu}{q}_{n,k_2+1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{nn}\end{Vmatrix},$$

$$Q_{\nu 21}=\begin{Vmatrix} \overset{\nu}{q}_{k_21} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{k_2+1,k_2} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \overset{\nu}{q}_{n1} & \ldots & \overset{\nu}{q}_{nk_2}\end{Vmatrix},\quad Q_\nu=\begin{Vmatrix} Q_{\nu 1} & 0 \\ Q_{\nu 21} & Q_{\nu 2}\end{Vmatrix},\quad \nu=0, 1, 2, \ldots$$

Сформулируем следствие из теоремы 4.5.

Следствие 4.2. Пусть матрицы Q_{01} и Q_{02} не имеют общих характеристических чисел, тогда система (4.16) может быть преобразована к квазидиагональному виду.

Действительно, рассмотрим матричное уравнение

$$\begin{Vmatrix} \mathcal{E}_{k_2} & 0 \\ \mathcal{X} & \mathcal{E}_{n-k_2}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} Q_{01} & 0 \\ Q_{021} & Q_{02}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} Q_{01} & 0 \\ 0 & Q_{02}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \mathcal{E}_{k_2} & 0 \\ \mathcal{X} & \mathcal{E}_{n-k_2}\end{Vmatrix},$$

где $\mathcal{E}_{k_2}$ и $\mathcal{E}_{n-k_2}$ — единичные матрицы размерностей k_2 и $n-k_2$, $\mathcal{X}$ — неизвестная матрица размерности $k_2\times(n-k_2)$. Выполнив умножение, для матрицы $\mathcal{X}$ получим уравнение $Q_{02}\mathcal{X}-\mathcal{X}Q_{01}=+Q_{021}$, которое разрешимо при любом виде правой части. Обозначая через $\mathcal{B}$ матрицу

$$\mathcal{B}=\begin{Vmatrix} \mathcal{E}_{k_2} & 0 \\ \mathcal{X} & \mathcal{E}_{n-k_2}\end{Vmatrix},$$

находим, что матрица $\mathcal{A}$ матрицей $\mathcal{BL}$ приводится к квазидиагональному виду

$$\mathcal{BLAL}^{-1}\mathcal{B}^{-1} = \mathrm{diag}\,\|Q_{01}, Q_{02}\|.$$

Но тогда и все матрицы $Q_{\nu N}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, также приводятся матрицей $\mathcal{BL}$ к квазидиагональному виду. Если предположить противное, то из условий коммутативности матриц $Q_0 = \mathcal{BLAL}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$ и Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{Vmatrix} Q_{01} & 0 \\ 0 & Q_{02} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Q_{\nu 1} & 0 \\ Q_{\nu 21} & Q_{\nu 2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{\nu 1} & 0 \\ Q_{\nu 21} & Q_{\nu 2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Q_{01} & 0 \\ 0 & Q_{02} \end{Vmatrix}$$

будет следовать тождество $Q_{02}Q_{\nu 21} - Q_{\nu 21}Q_{01} \equiv 0$. Но из этого тождества при сделанных предположениях о том, что матрицы Q_{01} и Q_{02} не имеют общих характеристических чисел, следует $Q_{\nu 21} \equiv 0$.

Критерием отсутствия общих корней у матриц Q_{01}, Q_{02} является одно из следующих утверждений:

а) матричное уравнение $Q_{10}\mathcal{X} - \mathcal{X}Q_{02} \equiv 0$ имеет лишь нулевое решение;

б) определитель матрицы $\mathcal{G} = Q_{10} \otimes \mathcal{E}_{n-k_2} - \mathcal{E}_{k_2} \otimes Q_{20}^T$ не равен нулю.

В ряде случаев матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$, входящие в централизованную систему, могут стать удобным средством для построения инвариантных подпространств матрицы $\mathcal{A}$ и дальнейшей декомпозиции централизованной системы.

Теорема 4.6. *Пусть матрица $\mathcal{B}_{jN}$ имеет нулевой корень кратности k, тогда подпространство $L \subset \mathrm{R}^n$, определяемое решениями уравнения $\eta\mathcal{B}_{jN} = 0$, $\eta \in \mathrm{R}^n$, инвариантно относительно матрицы $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из условия коммутативности матриц $\mathcal{AB}_{jN} - \mathcal{B}_{jN}\mathcal{A} \equiv 0$ следует, что $\eta\mathcal{N}_j\mathcal{A} \equiv 0$.

Если с помощью указанной теоремы найдено подпространство L, инвариантное относительно матрицы $\mathcal{A}$, то для дальнейшей декомпозиции централизованной системы можно применить теорему 4.5.

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПОЧТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим случай возмущенной линейной системы (1.1), когда в нулевом приближении

$$\frac{dx'}{dt} = \mathcal{A}_0 x' \tag{5.1}$$

находится алгебраически приводимая система. Такие системы были подробно изучены в § 6 гл. 2. Не теряя общности рассуждений можно считать, что система (5.1) уже приведена к квазидиагональному виду. Рассмотрим наиболее общий случай структуры матрицы $\mathcal{A}_0$. Будем считать, что $\mathcal{A}_0$ имеет блочный квазидиагональный вид:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{011} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{022} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A}_{0mm} \end{Vmatrix}. \tag{5.2}$$

Блоки $\mathcal{A}_{011}, \mathcal{A}_{022}, \dots, \mathcal{A}_{0mm}$ размерностей $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, ..., $r_m \times r_m$ имеют в свою очередь также блочную структуру:

$$\mathcal{A}_{0ii} = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{0i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{0i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A}_{0i} \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.3}$$

Здесь блоки $\mathcal{A}_{0i}$, $i = \overline{1, m}$, имеют размерность $k_i \times k_i$, так что кратность вхождения блока $\mathcal{A}_i$ в матрицу $\mathcal{A}_{0ii}$ определяется как

$$\mu_i = r_i / k_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.4}$$

Теперь предположим, что система нулевого приближения (5.1) с матрицей $\mathcal{A}_0$, задаваемой формулами (5.2) и (5.3), подвержена малому возмущению матрицей $\mathcal{B}_0$ общей структуры. В рассматриваемом случае возмущенную систему представим следующим образом:

$$\frac{dx'}{dt} = \begin{Vmatrix} A_{011} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{021} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{0mm} \end{Vmatrix} x' - \varepsilon \begin{Vmatrix} \mathcal{B}_0 \end{Vmatrix} x', \tag{5.5}$$

где $x' = \operatorname{colon} \| x'_1, \dots, x'_n \|$. Матрица $\mathcal{B}_0$ размерности $n \times n$ имеет произвольную структуру, что обозначено сплошной штриховкой.

Наличие возмущения в виде матрицы $\mathcal{B}_0$ в правой части системы (5.5) нарушает, вообще говоря, возможность приведения этой системы к квазидиагональному виду, аналогичному виду системы нулевого приближения (5.1). Докажем теорему, устанавливающую возможность декомпозиции возмущенной системы (5.5) к квазидиагональному виду.

Чтобы не употреблять везде индекс нуль, вместо матриц $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ введем матрицы $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_0^T$, $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_0^T$ и транспонируем возмущенную систему (5.5), представив ее в виде (см. также § 4)

$$\frac{dx'^T}{dt} = x'^T (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}). \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. *Если блоки $\mathcal{A}_i$, $i = \overline{1, m}$, в матрице (5.3) системы нулевого приближения не имеют общих характеристических чисел, то* *централизованная система, соответствующая возмущенной оистеме (5.6), имеет квазидиагональную структуру*

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{Vmatrix} + x^T \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \left\{ \begin{Vmatrix} \mathcal{B}_{11}^{(\nu)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{22}^{(\nu)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{B}_{mm}^{(\nu)} \end{Vmatrix} \right\}, \tag{5.7}$$

где блочные матрицы $\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}$ размерностей $r_i \times r_i$, $i = \overline{1, m}$:

$$\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)} = \begin{Vmatrix} T_{11}^{(\nu i)} & T_{12}^{(\nu i)} & \dots & T_{1\mu_i}^{(\nu i)} \\ T_{21}^{(\nu i)} & T_{22}^{(\nu i)} & \dots & T_{2\mu_i}^{(\nu i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{\mu_i 1}^{(\nu i)} & T_{\mu_i 2}^{(\nu i)} & \dots & T_{\mu_i \mu_i}^{(\nu i)} \end{Vmatrix} \tag{5.8}$$

составлены из квадратных матриц $T_{j'j''}^{(\nu i)}$, $j', j'' = \overline{1, \mu_i}$, размерностей $k_i \times k_i$. Матрицы $T_{j'j''}^{(\nu i)}$, входящие в матрицу (5.8), перестановочны с матрицей $\mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{A}_i T_{j'j''}^{(\nu i)} = T_{j'j''}^{(\nu i)} \mathcal{A}_i, \quad j', j'' = \overline{1, \mu_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 5.1, сделаем следующее замечание. Интегрирование централизованной системы (5.7) существенно проще, чем интегрирование исходной возмущенной системы (5.6), так как она так же, как и система нулевого приближения, распадается на m независимо интегрируемых подсистем размерностей $r_1, \dots, r_m$. Докажем два вспомогательных утверждения, которые будут использованы при доказательстве теоремы 5.1. Они имеют и самостоятельный интерес, так как показывают, что за счет декомпозируемости системы нулевого приближения все вычисления существенно упрощаются.

Лемма 5.1. *Нахождение элементов алгебры централизатора $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ из уравнения порядка m*

$$\mathcal{G}_A \hat{\mathcal{X}} = 0, \tag{5.9}$$

где $\mathcal{G}_A = \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^T$, сводится к решению m независимых между собой алгебраических уравнений порядка k_i^2

$$\mathcal{G}_{A_i} \hat{\mathcal{X}}^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.10}$$

где $\mathcal{G}_{A_i} = \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E} - \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}_i^T$.

Доказательство. Представим систему (5.9) в виде эквивалентного матричного уравнения

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = 0. \tag{5.11}$$

Так как матрица $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид (5.2), то матрицу $\mathcal{X}$ также будем искать в виде блочной матрицы

$$\mathcal{X} = \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} & \dots & \mathcal{X}_{1m} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} & \dots & \mathcal{X}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{X}_{m1} & \mathcal{X}_{m2} & \dots & \mathcal{X}_{mm} \end{Vmatrix},$$

в которой элемент $\mathcal{X}_{ij}$ имеет размерность $r_i \times r_j$, $i, j = \overline{1, m}$.

Подстановка значений матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{X}$ в уравнение (5.11) приводит к системе m^2 независимых матричных уравнений

$$\mathcal{A}_{ii}\mathcal{X}_{ij} - \mathcal{X}_{ij}\mathcal{A}_{jj} = 0, \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{5.12}$$

Ввиду сделанного предположения о том, что матрицы $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ при $i \neq j$ не имеют общих характеристических чисел, матрицы $\mathcal{A}_{ii}$ и $\mathcal{A}_{jj}$ также не будут иметь общих характеристических чисел.

Следовательно, при $i \neq j$ единственным решением однородной системы (5.12) является тривиальное $\mathcal{X}_{ij} \equiv 0$. Из m^2 уравнений останутся лишь

$$\mathcal{A}_{11}\mathcal{X}_{11} - \mathcal{X}_{11}\mathcal{A}_{11} = 0, \ \dots, \ \mathcal{A}_{mm}\mathcal{X}_{mm} - \mathcal{X}_{mm}\mathcal{A}_{mm} = 0. \tag{5.13}$$

За счет квазидиагональности матриц $\mathcal{A}_{ii}$, $i = \overline{1, m}$, (5.3) возможно дальнейшее упрощение систем (5.13). Так как матрица $\mathcal{A}_{ii}$ имеет μ_i (см. (5.4)) блоков $\mathcal{A}_i$ на квазидиагонали, то матрицу $\mathcal{X}_{ii}$ отыскиваем в виде блочной матрицы

$$\mathcal{X}_{ii} = \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_{11}^{(i)} & \mathcal{X}_{12}^{(i)} & \dots & \mathcal{X}_{1\mu_i}^{(i)} \\ \mathcal{X}_{21}^{(i)} & \mathcal{X}_{22}^{(i)} & \dots & \mathcal{X}_{2\mu_i}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{X}_{\mu_i 1}^{(i)} & \mathcal{X}_{\mu_i 2}^{(i)} & \dots & \mathcal{X}_{\mu_i \mu_i}^{(i)} \end{Vmatrix},$$

где блок $\mathcal{X}_{j'j''}^{(i)}$, $j', j'' = \overline{1, \mu_i}$, имеет размерность $k_i \times k_i$, $i = \overline{1, m}$.

Подстановка значений $\mathcal{A}_{ii}$, $\mathcal{X}_{ii}$ в уравнения (5.13) с индексом i приводит к системе μ_i^2 независимых матричных уравнений

$$\mathcal{A}_i\mathcal{X}_{j',j''}^{(i)} = \mathcal{X}_{j',j''}^{(i)}\mathcal{A}_i, \quad j', j'' = \overline{1, \mu_i}.$$

Решение этих уравнений сводится к нахождению общего решения одного уравнения

$$\mathcal{A}_i\mathcal{X}^{(i)} = \mathcal{X}^{(i)}\mathcal{A}_i, \tag{5.14}$$

где $\mathcal{X}^{(i)}$ — квадратная матрица порядка k_i. Переходя от уравнений (5.14) к эквивалентной системе (5.10), получаем доказываемое утверждение.

Следствие 5.1. Размерность k алгебры централизатора $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ определяется по формуле

$$k = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 g_i,$$

где g_i — число линейно независимых решений системы алгебраических уравнений (5.14).

Пусть решениями уравнений (5.13) являются линейно независимые квадратные матрицы

$$\mathcal{X}_1^{(i)}, \ldots, \mathcal{X}_{q_i}^{(i)}, \quad i = \overline{1, m},$$

размерностей $r_i \times r_i$, где $q_i = \mu_i^2 g_i$. Тогда, обозначая через $0^{(i)}$ матрицу размерности $r_i \times r_i$, состоящую только из нулевых элементов, базис алгебры $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ можно представить следующим образом:

$$Z_j^{(i)} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0^{(1)} & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots 0^{(i-1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots 0 & X_j^{(i)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots 0 & 0 & 0^{(i+1)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots & 0^{(m)} \end{array} \right\|, \quad j = \overline{1, q_i}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.15}$$

Квазидиагональная структура матрицы $\mathcal{A}$ нулевого приближения также существенно упрощает задачу нахождения проекции $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$ от правых частей операторного уравнения (1.12) из гл. 3. Как показано в § 2, 3 настоящей главы, нахождение этой проекции сводится к решению системы алгебраических уравнений (3.1), которую с учетом выражений (5.15) для базисных операторов приведем к соответствующему виду. Запишем для матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$, соответствующей оператору $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$, разложение по базису $\mathbf{Z}_j^{(i)}$:

$$\mathcal{B}_{\nu N} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{\nu j}^{(i)} \mathbf{Z}_j^{(i)}.$$

Коэффициенты $\alpha_{\nu j}^{(i)}$ определяются из системы неоднородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{\nu j}^{(i)} \,\mathrm{tr}\, Z_j^{(i)} Z_{j'}^{(i')} = \mathrm{tr}\, \mathcal{B}_\nu Z_{j'}^{(i')}, \quad i' = \overline{1, m}, \quad j' = \overline{1, q_{i'}}. \tag{5.16}$$

Лемма 5.2. *Система алгебраических уравнений (5.16) для определения матрицы $\mathcal{B}_{\nu N}$ оператора проекции* $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$ *распадается на m независимо интегрируемых подсистем порядков q_i*

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{\nu j}^{(i)} \,\mathrm{tr}\, Z_j^{(i)} Z_j^{(1)} = \mathrm{tr}\, \mathcal{B}_\nu Z_j^{(1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{\nu j}^{(i)} \,\mathrm{tr}\, \mathbf{Z}_j^{(i)} \mathbf{Z}_j^{(q_i)} = \mathrm{tr}\, \mathcal{B}_\nu \mathbf{Z}_j^{(q_i)}, \quad i = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из структуры матриц $Z_j^{(i)}$ (5.17) следует, что $Z_j^{(i)}Z_{j'}^{(i)} \equiv 0$, если $i \neq i'$, и, значит, $\operatorname{tr} Z_j^{(i)}Z_{j'}^{(i')} \equiv 0$. Система (5.16) распадается на m подсистем вида (5.17).

Обратимая теперь к доказательству исходной теоремы 5.1. Централизованную систему, соответствующую возмущенной системе (5.6), можно записать в виде (см. § 3)

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}_{1N} + \varepsilon^2\mathcal{B}_{2N} + \cdots),$$

где матрицы $\mathcal{B}_{1N}$, $\mathcal{B}_{2N}$, ... перестановочны с матрицей $\mathcal{A}$.

Из леммы 5.2 следует, что множество матриц $\mathcal{B}_{1N}, \ldots, \mathcal{B}_{2N}, \ldots$ в общем случае не пусто. Кроме того, матрицы $\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}$ имеют структуру, о которой говорится в лемме 5.1.

Докажем еще два утверждения о структуре решения централизованной системы (5.7). Введем векторы

$$x^{(1)} = \operatorname{colon}\| x_{r_1 1}, \ \ldots, \ x_{r_1 r_1} \|, \ \ldots, \ x^{(m)} = \operatorname{colon}\| x_{1 r_m}, \ \ldots, \ x_{r_m r_m} \|;$$

вектор переменных x выражается через эти векторы следующим образом: $x = \| x^{(1)}, \ \ldots, \ x^m \|$.

Интегрирование системы (5.7) можно заменить интегрированием m независимых подсистем, $i = \overline{1, m}$,

$$\frac{dx^{(i)T}}{dt} = x^{(i)T}\begin{Vmatrix} \mathcal{A}_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_i & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{A}_i \end{Vmatrix} + x^{(i)T}\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu \left\{ \begin{Vmatrix} T_{11}^{(\nu i)} & T_{12}^{(\nu i)} & \ldots & T_{\mu_i}^{(\nu i)} \\ T_{21}^{(\nu i)} & T_{22}^{(\nu i)} & \ldots & T_{2\mu_i}^{(\nu i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{\mu_i 1}^{(\nu i)} & T_{\mu_i 2}^{(\nu i)} & \ldots & T_{\mu_i\mu_i}^{(\nu i)} \end{Vmatrix} \right\}. \tag{5.18}$$

Теорема 5.2. *Решение централизованной системы (5.7) может быть предотавлено в виде*

$$x^{(i)T} = \eta^{(i)T}(\tau)\begin{Vmatrix} e^{\mathcal{A}_i(t-t_0)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\mathcal{A}_i(t-t_0)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\mathcal{A}_i(t-t_0)} \end{Vmatrix}, \tag{5.19}$$

где вектор $\eta^{(i)}(\tau) = \operatorname{colon}\| \eta_{1r_i}(\tau), \ldots, \eta_{r_i r_i}(\tau) \|$ *является функцией медленных переменных* $\tau \equiv \varepsilon t$ *и определяется интегрированием системы уравнений с медленным временем*

$$\frac{d\eta^{(i)T}}{d\tau} = \eta^{(i)T}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu-1}\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}\right). \tag{5.20}$$

Таким образом, интегрирование централизованной системы (5.7) сводится к интегрированию m независимых подсистем

$$\frac{dy^{(i)T}}{dt} = y^{(i)T}\mathcal{A}_i \tag{5.21}$$

порядков k_i, $i = \overline{1, m}$, и m независимых подсистем порядков r_i, $i = \overline{1, m}$ (см. (5.20)), зависящих от медленного времени τ.

Доказательство. Представим соотношения (5.19) в сокращенном виде

$$x^{(i)T} = \eta^{(i)T} e^{\mathcal{A}_{ii}(t-t_0)}. \qquad (5.22)$$

Если считать вектор $\eta^{(i)T}$ постоянным, то формулы (5.22) представляют собой решение системы нулевого приближения

$$\frac{dx^{(i)T}}{dt} = x^{(i)T}\mathcal{A}_{ii}.$$

Считая в формулах (5.22) $\eta^{(i)T}$ новыми переменными, произведем замену в системе (5.18). После несложных вычислений получим уравнения

$$\frac{d\eta^{(i)T}}{dt} = \eta^{(i)T}\left(e^{\mathcal{A}_{ii}(t-t_0)}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}\right)e^{-\mathcal{A}_{ii}(t-t_0)}\right). \qquad (5.23)$$

Так как матрицы $\mathcal{A}_{ii}$ и $\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}$ коммутируют, то систему (5.23) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\eta^{(i)T}}{dt} = \eta^{(i)T}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\mathcal{B}_{ii}^{(\nu)}\right).$$

Вводя медленное время $\tau = \varepsilon t$, приходим к системе (5.23), что завершает доказательство.

Замечание 5.1. Выражение $e^{\mathcal{A}_i(t-t_0)}$, фигурирующее в формулах (5.19), можно заменить нормированной фундаментальной матрицей $X^{(i)}(t)$ системы (5.21).

До сих пор нигде не предполагалось, что известны характеристические числа матриц $\mathcal{A}_i$, $i = \overline{1, m}$, входящих в систему нулевого приближения. Если они действительно известны, то можно сформулировать еще один результат о декомпозиции централизованной системы (5.18). Поскольку в систему (5.18) входят идентичные по структуре подсистемы, то для упрощения формулировок рассмотрим систему-представитель в виде

$$\frac{d\tilde{x}^T}{dt} = \tilde{x}^T\begin{Vmatrix}\tilde{\mathcal{A}} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \tilde{\mathcal{A}} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathcal{A}}\end{Vmatrix} + \tilde{x}^T\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\left\{\begin{Vmatrix}T_{11}^{(\nu)} & T_{12}^{(\nu)} & \dots & T_{1\mu}^{(\nu)}\\ T_{21}^{(\nu)} & T_{22}^{(\nu)} & \dots & T_{2\mu}^{(\nu)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ T_{\mu1}^{(\nu)} & T_{\mu2}^{(\nu)} & \dots & T_{\mu\mu}^{(\nu)}\end{Vmatrix}\right\}, \qquad (5.24)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ — матрица размерности $k \times k$ с кратностью вхождения μ в матрицу коэффициентов; $T_{ij}^{(\nu)}$ — квадратные матрицы размерностей $k \times k$; $x = \operatorname{colon}\|\tilde{x}_{10}, \dots, \tilde{x}_s\|$, $s = k\mu$.

Здесь матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_* = \operatorname{diag}\{\tilde{\mathcal{A}}, \dots, \tilde{\mathcal{A}}\}$ и $Q_\nu = \{T_{ij}^{(\nu)}\}$, $i, j = \overline{1, \mu}$, предполагаются коммутативными, т. е.

$$\tilde{\mathcal{A}}_* Q_\nu \equiv Q_\nu \tilde{\mathcal{A}}_*, \quad \nu = 1, 2, \dots \qquad (5.25)$$

Теорема 5.3. *Пусть матрица $\tilde{\mathcal{A}}$ в системе (5.24) имеет характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ кратностей $m_1, \dots, m_p$; тогда можно* *указать такую замену переменных* $\tilde{x}^T = \tilde{z}^T = \mathcal{L}$, *которая расщепляет эту систему на* p *независимо интегрируемых систем размерностей* $m_1\mu, \ \dots, \quad m_p\mu \ \ ((m_1 + \dots + m_p)\,\mu = k\mu)$

$$\frac{d\tilde{z}^T}{dt} = \tilde{z}^T \begin{Vmatrix} \mathcal{D}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{D}_p \end{Vmatrix} + \tilde{z}^T \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \left\{ \begin{Vmatrix} \mathcal{R}_1^{(\nu)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^{(\nu)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{R}_p^{(\nu)} \end{Vmatrix} \right\},$$

где $\mathcal{D}_i = \operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_i, \ \dots, \ \lambda_i}_{m_i\mu}\}$, $\mathcal{R}_i^{(\nu)}$ — *квадратные матрицы размерности* $\mu_i\mu \times \mu_i\mu$, $i = \overline{1, \ p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $P(\lambda_i)$ корневое подпространство матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_*$, определяемое как всевозможные решения уравнения $\xi(\tilde{\mathcal{A}}_* - \lambda_i\mathcal{E}) = 0$, $\xi = \|\xi_1, \ \dots, \ \xi_s\|$, $s = k\mu$. Из тождества (5.25) следует тождество

$$(\tilde{\mathcal{A}}_* - \lambda_i\mathcal{E})\,Q_\nu \equiv Q_\nu\,(\tilde{\mathcal{A}}_* - \lambda_i\mathcal{E}).$$

Умножая обе части матричного тождества на вектор $\xi \in P(\lambda_i)$, получаем $\xi Q_\nu(\tilde{\mathcal{A}}_* - \lambda_i\mathcal{E}) \equiv 0$. Это означает, что подпространство $P(\lambda_i)$ инвариантно относительно матриц Q_ν, $\nu = 1, \ 2 \ \dots$ Приводящая матрица $\mathcal{L}$ составляется из векторов корневых подпространств $P(\lambda_i)$, $i = \overline{1, \ p}$.

П р и м е р 5.1. Вернемся к примеру 6.2 гл. 2. Предположим, что колеблющиеся массы рассмотренной механической системы подвергнуты малым возмущениям $\varepsilon\Delta_1$, $\varepsilon\Delta_2$ (рис. 3). В этом случае в матрице системы (6.12) гл. 2 появятся дополнительные слагаемые, пропорциональные параметру ε и характеризующие наличие возмущающих факторов:

$$\begin{Vmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ y_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_5 \end{Vmatrix} + \left\{ \begin{Vmatrix} \frac{3}{2}a_1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \\ 0 & \frac{3}{2}a_1 & -a_1 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_1 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_2 & 0 & a_2 + a_3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & \frac{3}{2}a_2 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \end{Vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 & c_{44} \end{Vmatrix} + \dots \right\} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Vmatrix} = 0, \qquad (5.26)$$

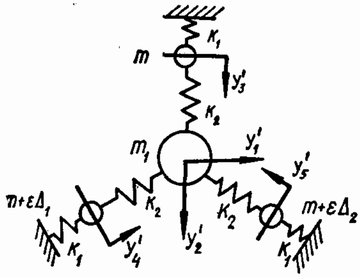


Рис. 3

где

$$c_{31} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 \frac{\Delta_1}{m}; \quad c_{32} = -\frac{1}{2} a_2 \frac{\Delta_1}{m};$$

$$c_{34} = -(a_2 + a_3)\frac{\Delta_1}{m};$$

$$c_{41} = -\frac{\sqrt{3}}{2} a_2 \frac{\Delta_2}{m}; \quad c_{42} = -\frac{1}{2} a_2 \frac{\Delta_2}{m};$$

$$c_{44} = -(a_2 + a_3)\frac{\Delta_2}{m}.$$

В системе (5.26) выписана лишь матрица возмущений при первой степени параметра ε. В результате замены переменных $y = Sy'$, $y' = \operatorname{colon} \| y_1', y_2', y_3', y_4', y_5' \|$ (явный вид матрицы S см. в § 6. гл. 2) система (5.26) примет вид

$$\begin{Vmatrix} \ddot{y}_1' \\ \ddot{y}_2' \\ \ddot{y}_3' \\ \ddot{y}_4' \\ \ddot{y}_5' \end{Vmatrix} + \left\{ \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} a_1 & 3a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} a_2 & a_2 + a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} a_1 & 3a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} a_2 & a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \end{Vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ q_{51} & q_{52} & q_{52} & q_{54} & q_{55} \end{Vmatrix} + \cdots \right\} \begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \end{Vmatrix} = 0, \tag{5.27}$$

где

$$q_{21} = -\frac{a_2(\Delta_1 + \Delta_2)}{4m}; \quad q_{22} = -\frac{(a_2 + a_3)(\Delta_1 + \Delta_2)}{2m}; \quad q_{23} = \frac{a_2(\Delta_1 - \Delta_2)}{4\sqrt{3}\, m};$$

$$q_{24} = q_{25} = \frac{(a_2 + a_3)(\Delta_1 - \Delta_2)}{2\sqrt{3}\, m}; \quad q_{31} = \frac{\sqrt{3}\, a_2(\Delta_1 - \Delta_2)}{12m};$$

$$q_{42} = -\frac{\sqrt{3}(a_2 + a_3)(\Delta_1 - \Delta_2)}{6m}; \quad q_{43} = -\frac{a_2(\Delta_1 + \Delta_2)}{12m};$$

$$q_{44} = q_{45} = -\frac{(a_2 + a_3)(\Delta_1 + \Delta_2)}{6m}; \quad q_{51} = \frac{\sqrt{3}a_2(\Delta_1 - \Delta_2)}{6m};$$

$$q_{52} = -\frac{\sqrt{3}(a_2 + a_3)(\Delta_1 - \Delta_2)}{3m}; \quad q_{53} = -\frac{a_2(\Delta_1 + \Delta_2)}{6m};$$

$$q_{54} = q_{55} = -\frac{(a_2 + a_3)(\Delta_1 + \Delta_2)}{3m}.$$

Перейдем от системы второго порядка (5.27) к нормальной системе дифференциальных уравнений, вводя новые переменные

$$y_1' = x_1', \quad y_2' = x_2', \quad \ddot{y}_1' = x_3', \quad \ddot{y}_2' = x_4', \quad y_3' = x_5', \quad y_4' = x_6',$$
$$\ddot{y}_3' = x_7', \quad \ddot{y}_4' = x_8', \quad y_5' = x_5', \quad \ddot{y}_5' = x_{10}'.$$

В результате получаем

$$\left\|\begin{matrix} \dot x_1' \\ \dot x_2' \\ \dot x_3' \\ \dot x_4' \\ \dot x_5' \\ \dot x_6' \\ \dot x_7' \\ \dot x_8' \\ \dot x_9' \\ \dot x_{10}' \end{matrix}\right\| = \left\{ \left\|\begin{array}{cccc|cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}a_1 & -3a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_2 & -(a_2+a_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}a_1 & -3a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_2 & -(a_2+a_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_2+a_3) & 0 \end{array}\right\| - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \left\|\begin{array}{cccc|cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 & q_{25} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{43} & q_{44} & 0 & 0 & q_{45} & 0 \\ \hline q_{51} & q_{52} & 0 & q_{53} & q_{54} & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| + \cdots \right\} \left\|\begin{matrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \\ x_5' \\ x_6' \\ x_7' \\ x_8' \\ x_9' \\ x_{10}' \end{matrix}\right\|. \qquad (5.28)$$

Обозначим через $\mathcal{A}_0$ матрицу нулевого приближения и через $\mathcal{B}_0$ матрицу возмущения. Если ввести обозначения

$$\mathcal{M}_0 = \left\|\begin{matrix} -\frac{3}{2}a_1 & -3a_1 \\ -\frac{1}{2}a_2 & (a_2+a_3) \end{matrix}\right\|, \quad \mathcal{A}_{01} = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}a_1 & -3a_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_2 & -(a_2+a_3) & 0 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$\mathcal{A}_{02} = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -(a_2+a_3) & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad (5.29)$$

то матрицу нулевого приближения можно записать следующим образом:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{02} \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_0^T.$$

Пользуясь изложенной в настоящем параграфе теорией, для системы (5.28) найдем централизованную систему в первом приближении. Вводя обозначения $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^T$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{01}^T$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{02}^T$, матричное уравнение для определения элементов алгебры централизатора $З_0^{(1)}$ представим в виде

$$\begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{X}_{13} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} & \mathcal{X}_{23} \\ \mathcal{X}_{31} & \mathcal{X}_{32} & \mathcal{X}_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{X}_{13} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} & \mathcal{X}_{23} \\ \mathcal{X}_{31} & \mathcal{X}_{32} & \mathcal{X}_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_2 \end{Vmatrix}, \quad (5.30)$$

где $\mathcal{X}_{11}, \mathcal{X}_{12}, \mathcal{X}_{21}, \mathcal{X}_{22} \in \mathfrak{R}^{(1,4)}$, $\mathcal{X}_{33} \in \mathfrak{R}^{(2,2)}$, $\mathcal{X}_{13}, \mathcal{X}_{23} \in \mathfrak{R}^{(4,2)}$, $\mathcal{X}_{31}$, $\mathcal{X}_{32} \in \mathfrak{R}^{(2,4)}$. Это уравнение распадается на девять независимых матричных уравнений

$$\mathcal{A}_1\mathcal{X}_{11} = \mathcal{X}_{11}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1\mathcal{X}_{12} = \mathcal{X}_{12}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1\mathcal{X}_{13} = \mathcal{X}_{13}\mathcal{A}_2,$$

$$\mathcal{A}_1\mathcal{X}_{21} = \mathcal{X}_{21}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1\mathcal{X}_{22} = \mathcal{X}_{22}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1\mathcal{X}_{23} = \mathcal{X}_{23}\mathcal{A}_2,$$

$$\mathcal{A}_2\mathcal{X}_{31} = \mathcal{X}_{31}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2\mathcal{X}_{32} = \mathcal{X}_{32}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2\mathcal{X}_{33} = \mathcal{X}_{33}\mathcal{A}_2.$$

В силу сделанных предположений о том, что матрицы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не имеют общих характеристических чисел, матрицы $\mathcal{X}_{13}$, $\mathcal{X}_{23}$, $\mathcal{X}_{31}$, $\mathcal{X}_{32}$ равны тождественно нулевым. Оставшиеся пять уравнений можно разбить на две группы. Уравнения для $\mathcal{X}_{11}$, $\mathcal{X}_{12}$, $\mathcal{X}_{21}$, $\mathcal{X}_{22}$ равносильны решению одного уравнения

$$\mathcal{A}_1\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{(4,4)}. \quad (5.31)$$

Вторая группа состоит из одного уравнения

$$\mathcal{A}_2\mathcal{X}_{33} = \mathcal{X}_{33}\mathcal{A}_2. \quad (5.32)$$

Найдем общее решение уравнения (5.31) в предположении, что матрица $\mathcal{M}$ имеет различные характеристические числа. Учитывая структуру матрицы $\mathcal{A}_1$ (см. формулы (5.29)), уравнение (5.31) представим в виде

$$\begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ E_2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ E_2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (5.33)$$

где $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$, $\mathcal{X}_4 \in \mathfrak{R}^{(2,2)}$, E_2 — единичная матрица. Система (5.33) распадается на четыре матричных уравнения

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3\mathcal{M}, \quad \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{M}\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_4\mathcal{M}, \quad \mathcal{M}\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2.$$

Система этих уравнений сводится к нахождению матриц $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_3$ из идентичных уравнений

$$\mathcal{M}\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1\mathcal{M}, \quad \mathcal{M}\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_3\mathcal{M}. \quad (5.34)$$

Так как мы предположили, что матрица $\mathcal{M}$ имеет различные характеристические числа, то легко найти общее решение системы (5.34):

$$\mathcal{X}_1 = \mu_1 E_2 + \mu_2\mathcal{M}, \quad \mathcal{X}_2 = \mu_3 E_2 + \mu_4\mathcal{M}, \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbf{R}.$$

Аналогично общее решение уравнения (5.32) имеет вид

$$\mathcal{X}_{33} = a_1 E_2 + a_2\mathcal{A}_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{P}.$$

Таким образом, общее решение $\mathcal{X}$ уравнения (5.31) зависит от четырех произвольных параметров и может быть представлено матрицей

$$\mathcal{X} = \begin{Vmatrix} \mu_1 E + \mu_2\mathcal{M} & \mu_3\mathcal{M}_2 + \mu_4\mathcal{M}^2 \\ \mu_3 E + \mu_4\mathcal{M} & \mu_1 E_2 + \mu_2\mathcal{M} \end{Vmatrix}.$$

Возвращаясь к уравнению (5.30) и учитывая структуру матриц $\mathscr{X}_{33}$ и $\mathscr{X}$, общий элемент $\mathscr{Z}$ алгебры централизатора $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ можем записать таким образом:

$$\mathbf{Z} = \left\| \begin{array}{cc|cc|c} \mu_1 E_2 + \mu_2 \mathscr{M} & \mu_3 \mathscr{M} + \mu_4 \mathscr{M}^2 & \mu_9 E_2 + \mu_{10} \mathscr{M} & \mu_{11} \mathscr{M} + \mu_{12} \mathscr{M}^2 & 0 \\ \mu_3 E_2 + \mu_4 \mathscr{M} & \mu_1 E_2 + \mu_2 \mathscr{M} & \mu_{11} E_2 + \mu_{12} \mathscr{M} & \mu_9 E_2 + \mu_{10} \mathscr{M} & 0 \\ \hline \mu_5 E_2 + \mu_6 \mathscr{M} & \mu_7 \mathscr{M} + \mu_8 \mathscr{M}^2 & \mu_{13} E_2 + \mu_{14} \mathscr{M} & \mu_{15} \mathscr{M} + \mu_{16} \mathscr{M}^2 & 0 \\ \mu_7 E_2 + \mu_8 \mathscr{M} & \mu_5 E_2 + \mu_6 \mathscr{M} & \mu_{16} E_2 + \mu_{16} \mathscr{M} & \mu_{12} E_2 + \mu_{14} \mathscr{M} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{17} E_2 + \mu_{18} \mathscr{A}_2 \end{array} \right\|.$$

Полагая $\mu_i = 1$, $\mu_j = 0$, $i \neq j$, где i, j пробегают значения от 1 до 18, получаем 18 независимых элементов алгебры централизатора $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$, которые обозначим $\mathscr{Z}_1, \ldots, \mathscr{Z}_{18}$.

Проекцию матрицы $\mathscr{B}_0$ на ядро оператора G_A (см. § 3) ищем в виде суммы

$$\mathscr{B}_{0N} = \sum_{i=1}^{18} \alpha_{0i} \mathscr{Z}_i. \tag{5.35}$$

Коэффициенты $\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{018}$ определяются из системы уравнений вида (3.16)

$$\sum_{i=1}^{18} \alpha_{0i} \operatorname{tr} \mathscr{Z}_{ij} \mathscr{Z}_i = \operatorname{tr} \mathscr{B}_0 \mathscr{Z}_j, \quad j = \overline{1,18}. \tag{5.36}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид уравнений (5.36):

$$\begin{gathered} 2m_1\alpha_{03} + 2m_2\alpha_{04} = p_1; \quad 4\alpha_{01} + 2m_1\alpha_{02} = 0; \\ 2m_2\alpha_{03} + 2m_3\alpha_{04} = q_1; \quad 2m_1\alpha_{01} + 2m_2\alpha_{02} = 0; \\ 2m_1\alpha_{011} + 2m_2\alpha_{012} = p_2; \quad 4\alpha_{09} + 2m_1\alpha_{010} = 0; \\ 2m_2\alpha_{011} + 2m_3\alpha_{012} = q_2; \quad 2m_2\alpha_{09} + 2m_2\alpha_{010} = 0; \\ 2m_1\alpha_{015} + 2m_2\alpha_{016} = p_3; \quad 4\alpha_{013} + 2m_1\alpha_{014} = 0; \\ 2m_2\alpha_{015} + 2m_3\alpha_{016} = q_3; \quad 2m_1\alpha_{013} + 2m_2\alpha_{014} = 0; \\ 2\alpha_{017} = q_{55}; \quad -2(a_2 + a_3)\alpha_{018} = 0; \end{gathered} \tag{5.37}$$

где

$$p_1 = -\frac{1}{2} a_2 q_{21} - q_{22}(a_1 + a_2); \quad p_2 = -\frac{1}{2} a_2 q_{23} - q_{24}(a_1 + a_2);$$

$$p_3 = -\frac{1}{2} a_2 q_{43} - q_{44}(a_1 + a_2); \quad m_1 = \operatorname{tr} \mathscr{M}; \quad m_2 = \operatorname{tr} \mathscr{M}^2, \quad m_3 = \operatorname{tr} \mathscr{M}^3;$$

$$q_1 = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{3}{2} a_1 q_{21} - 3a_1 q_{22} \right) + (a_2 + a_3) \left(\frac{1}{2} a_2 q_{21} + q_{22}(a_1 + a_2) \right),$$

$$q_2 = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{3}{2} a_1 q_{23} + 3a_1 q_{24} \right) + (a_2 + a_3) \left(\frac{1}{2} a_2 q_{23} + q_{24}(a_1 + a_2) \right),$$

$$q_3 = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{3}{2} a_1 q_{43} + 3a_1 q_{44} \right) + (a_2 + a_3) \left(\frac{1}{2} a_2 q_{43} + q_{44}(a_1 + a_2) \right).$$

Решить систему алгебраических уравнений (5.37) нетрудно:

$$\alpha_{03} = \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_1 m_3 - m_2^2} p_1 - \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1 m_3 - m_2^2} q_1;$$

$$\alpha_{04} = -\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1 m_3 - m_2^2} p_1 + \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_1 m_3 - m_2^2} q_1.$$

Аналогичные выражения получим для α_{011}, α_{012} и α_{015}, α_{016}:

$$\alpha_{017} = \frac{1}{2} q_{55}; \quad \alpha_{018} = 0.$$

Остальные коэффициенты равны тождественно нулю. Зная коэффициенты в разложении (5.35), легко составить централизованную систему в первом приближении:

$$\frac{dx^T}{dt} = x^T \left\{ \left\| \begin{array}{cc|cc|c} 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathcal{M} & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_2 \end{array} \right\| - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \left\| \begin{array}{cc|cc|c} 0 & \alpha_{03}\mathcal{M} + \alpha_{04}\mathcal{M}^2 & 0 & \alpha_{011}\mathcal{M} + \alpha_{012}\mathcal{M}^2 & 0 \\ \alpha_{03}E_2 + \alpha_{04}\mathcal{M} & 0 & \alpha_{011}E_2 + \alpha_{012}\mathcal{M} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_{015}\mathcal{M} + \alpha_{016}\mathcal{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{015}E_2 + \alpha_{016}\mathcal{M} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{017}E_2 \end{array} \right\| \right\}. \tag{5.38}$$

Здесь с использованием формул записи § 4 применена запись централизованной системы в транспонированном виде. Сравнивая систему (5.38) с исходной возмущенной (5.28), видим, что централизованная система распадается на две независимые подсистемы порядков 8×8 и 2×2. Система порядка 8×8 в свою очередь распадается на две последовательно интегрируемые подсистемы порядков 4×4 и 4×4.

Система (5.38) допускает дальнейшую декомпозицию на независимо интегрируемые подсистемы, если предположить, что известны характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 матрицы $\mathcal{A}_1$ (см. формулы (5.29)). В самом деле, пусть $\eta^{(j)} = \| \eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \eta_3^{(j)}, \eta_4^{(j)} \|$, $j = \overline{1, 4}$,— собственные векторы матрицы $\mathcal{A}_1$. Введем обозначения $\zeta_1^{(j)} = \| \eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)} \|$, $\zeta_2^{(j)} = \| \eta_3^{(j)}, \eta_4^{(j)} \|$, тогда справедливо соотношение

$$\| \zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)} \| \left\| \begin{matrix} 0 & \mathcal{M} \\ E_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \lambda_j \| \zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)} \|,$$

которое можно заменить двумя эквивалентными формулами

$$\zeta_1^{(j)}\mathcal{M} = \lambda_j \zeta_2^{(j)}, \quad \zeta_2^{(j)} = \lambda_j \zeta_1^{(j)},$$

или одной

$$\zeta_1^{(j)}\mathcal{M} = \lambda_j^2 \zeta_1^{(j)}.$$

Для упрощения расчетов будем считать, что характеристические числа матрицы $\mathcal{M}$ различны, тогда различны и характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 матрицы $\mathcal{A}_1$.

Введем матрицу

$$
S = \begin{Vmatrix}
\eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \lambda_1\eta_1^{(1)} & \lambda_1\eta_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \lambda_1\eta_1^{(1)} & \lambda_1\eta_2^{(1)} & 0 & 0 \\
\eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \lambda_2\eta_1^{(2)} & \lambda_2\eta_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \lambda_2\eta_1^{(2)} & \lambda_2\eta_2^{(2)} & 0 & 0 \\
\eta_1^{(3)} & \eta_2^{(3)} & \lambda_3\eta_1^{(3)} & \lambda_3\eta_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1^{(3)} & \eta_2^{(3)} & \lambda_3\eta_1^{(3)} & \lambda_3\eta_3^{(3)} & 0 & 0 \\
\eta_1^{(4)} & \eta_2^{(4)} & \lambda_4\eta_1^{(4)} & \lambda_4\eta_4^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1^{(4)} & \eta_2^{(4)} & \lambda_4\eta_1^{(4)} & \lambda_4\eta_4^{(4)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}.
$$

Замена переменных $x^T = y^T S$ декомпозирует централизованную систему (5.38) на пять независимо интегрируемых подсистем второго порядка

$$
\frac{dy^T}{dt} = y^T \left\{ \begin{Vmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_2 + a_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{Vmatrix} - \right.
$$

$$
\left. - \varepsilon \begin{Vmatrix}
b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{77} & b_{78} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{88} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{017} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{017}
\end{Vmatrix} \right\},
$$

где

$$
b_{11} = \lambda_1\alpha_{03} + \lambda_1^3\alpha_{04}, \quad b_{12} = \lambda_1\alpha_{011} + \lambda_1^3\alpha_{012}, \quad b_{22} = \lambda_1\alpha_{015} + \lambda_1^3\alpha_{016},
$$

$$
b_{33} = \lambda_2\alpha_{03} + \lambda_2^3\alpha_{04}, \quad b_{34} = \lambda_2\alpha_{011} + \lambda_2^3\alpha_{012}, \quad b_{44} = \lambda_2\alpha_{015} + \lambda_2^3\alpha_{016},
$$

$$b_{55} = \lambda_3\alpha_{03} + \lambda_3^2\alpha_{04}, \quad b_{56} = \lambda_3\alpha_{011} + \lambda_3^3\alpha_{012}, \quad b_{66} = \lambda_3\alpha_{015} + \lambda_3^3\alpha_{016},$$

$$b_{77} = \lambda_4\alpha_{03} + \lambda_4^2\alpha_{04}, \quad b_{78} = \lambda_4\alpha_{011} + \lambda_4^3\alpha_{012}, \quad b_{88} = \lambda_4\alpha_{015} + \lambda_4^3\alpha_{015}.$$

Каждая подсистема в свою очередь сводится к квадратурам. Остается определить матрицу коэффициентов оператора S. Эта процедура также сводится к решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (подробнее см § 2). Ввиду громоздкости записей эти результаты не приводим.

§ 6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СТРУКТУРЫ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь случай, когда матрица $\mathcal{A}$ имеет некоторую нормальную жорданову форму общего вида, что скажется прежде всего при решении операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{6.1}$$

и эквивалентных им матричных уравнений

$$\mathcal{A}\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\mathcal{A} = \mathcal{B}_\nu, \tag{6.2}$$

или

$$\mathcal{G}_A\hat{\Gamma}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_\nu, \quad \mathcal{G}_A = \mathcal{A} \otimes E_n - E_n \otimes \mathcal{A}^T.$$

Матрица $\mathcal{G}_A$ также не будет иметь простую структуру. Вследствие этого ядро $\hat{N}_A$ матрицы $\mathcal{G}_A$, определяемое как решение однородного уравнения $\mathcal{G}_A\hat{\mathcal{X}} = 0$, не будет совпадать с ядром $\hat{N}_A^{(2)}$ матрицы $\mathcal{G}_A^2$, определяемым как решение однородного уравнения $\mathcal{G}_A^2\hat{\mathcal{X}} = 0$. Для симметрии записи для ядра $\hat{N}_A$ матрицы $\mathcal{G}_A$ примем обозначение $\hat{N}_A^{(1)}$. Таким образом, $N_A^{(1)} \subset N_A^{(2)}$.

Очевидно, можно рассматривать и дальше цепочку подпространств $\hat{N}_A^{(j)}$, $j = \overline{1, r}$,

$$\mathcal{G}_A^j\hat{\mathcal{X}} = 0. \tag{6.3}$$

Из линейной алгебры известно, что цепочка подпространств

$$\hat{N}_A^{(1)} \subset \hat{N}_A^{(2)} \subset \cdots \subset \hat{N}_A^{(j)} \subset \hat{N}_A^{(j+1)}$$

обрывается, когда выполняется равенство $\hat{N}_A^{(j)} = \hat{N}_A^{(j+1)}$, причем число j не превышает кратности нулевого корня матрицы $\mathcal{G}_A$.

Высотой вектора $\hat{\mathcal{X}}$ называется наименьший показатель степени j уравнения (6.3), решением которого является этот вектор. Для пространства $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ цепочку уравнений (6.3) можно представить в виде

$$[\mathcal{A}, \mathcal{X}] = 0, \quad [\mathcal{A}\,[\mathcal{A}, \mathcal{X}]] = 0, \ \ldots, \ \underbrace{[\mathcal{A}, \ldots [\mathcal{A}}_{j}\mathcal{X}]] = 0. \tag{6.4}$$

Если j — высота вектора $\hat{\mathcal{X}}$, то очевидно, что $j - 1$ — высота вектора $\mathcal{G}_A\hat{\mathcal{X}}$. На языке алгебр Ли это будет означать следующее:

если элемент $\mathcal{X} \in N_A^{(j)}$, то элемент $[\mathcal{A}, \mathcal{X}] \in N_A^{(j-1)}$. Далее, легко показать, что если $\mathcal{X}' \in N_A^{(j')}, \mathcal{X}'' \in N_A^{(j'')}$, то $[\mathcal{X}', \mathcal{X}''] \in N_A^{(j_0-1)}$, где $j_0 = \max\{j'; j''\}$. Действительно, из тождества Якоби $[\mathcal{A}[\mathcal{X}', \mathcal{X}'']] + [\mathcal{X}''[\mathcal{A}, \mathcal{X}']] + [\mathcal{X}'[\mathcal{X}'', \mathcal{A}]] \equiv 0$ видно, что $[\mathcal{X}''[\mathcal{A}, \mathcal{X}'],$ $[\mathcal{X}'[\mathcal{X}'', \mathcal{A}]] \in N_A^{(j_0-2)}$ и, следовательно, $[\mathcal{X}', \mathcal{X}''] \in N_A^{(j_0)}$.

Обозначим максимальную высоту векторов матрицы $\mathcal{G}_A$ через r и число независимых решений уравнения $\mathcal{G}_A\mathcal{X} = 0$ через k.

Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 6.1. *Пусть оператору* $\mathbf{U}$ *в пространстве* $\hat{\mathfrak{R}}^{(n,n)}$ *соответствует матрица* $\mathcal{G}_A$ *с максимальной высотой векторов* r *и размерность ядра* $\mathcal{G}_A^{(r)}$ *равна* k*; тогда все операторы* $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(V_1)$, *удовлетворяющие уравнению*

$$\underbrace{[\mathbf{U}[\mathbf{U}\ \ldots\ [\mathbf{U};\ \mathbf{X}]\ \ldots]}_{r} = 0,$$

порождают конечномерную алгебру Ли ранга k.

Построение централизованной системы производится аналогично правилу, описанному в § 3 настоящей главы. Правая часть уравнения (6.2) раскладывается в прямую сумму подпространств $\hat{N}_A^{(r)}$ и $\hat{T}_A^{(r)}$:

$$\hat{\mathcal{B}}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)} + \hat{\mathcal{B}}_{\nu T}^{(r)}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)} \in \hat{N}_A^{(r)}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(T)} \in \hat{T}_A^{(r)}. \tag{6.5}$$

Согласно определению в качестве проекции от правой части (6.1) примем

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu = \mathbf{N}_\nu, \tag{6.6}$$

где $\mathbf{N}_\nu = \hat{\hat{x}}_{m_1}\hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)}\,\partial$. Из введенного определения следует, что матрица $\mathcal{B}_{\nu N}^{(r)}$ удовлетворяет тождеству

$$[\mathcal{A}, \ldots, [\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\nu N}^{(r)}] \ldots] \equiv 0,$$

а оператор $\mathbf{N}_\nu$ — соответственно тождеству

$$[\mathbf{U}, \ldots, [\mathbf{U}, \mathbf{N}_\nu] \ldots] \equiv 0.$$

Фактическое нахождение составляющей $\mathcal{B}_{\nu N}^{(r)}$ в (6.5) и решения Γ_ν уравнения

$$\mathcal{G}_A\hat{\Gamma}_\nu = \hat{\mathcal{B}}_\nu - \hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)} \tag{6.7}$$

принципиально не отличается от аналогичного случая матрицы простой структуры. Обозначим через $\hat{\mathscr{Z}}_1, \ldots, \hat{\mathscr{Z}}_k$ базис пространства $\mathcal{N}_A^{(r)}$ и через $\hat{\mathscr{Z}}_{1*}, \ldots, \hat{\mathscr{Z}}_{k*}$ — базис пространства $\hat{\mathcal{N}}_{A*}^{(r)}$. Представим $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)}$ в виде суммы: $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N}^{(r)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{\nu i}\hat{\mathscr{Z}}_i$ и коэффициенты $\alpha_{\nu i}$ найдем из условия ортогональности вектора $\mathcal{B}_\nu - \hat{\mathcal{B}}_N^{(r)}$ подпространству $\hat{N}_A^{(r)}$. Из этого условия получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{\nu i} \langle \hat{\mathscr{X}}_i, \hat{\mathscr{X}}_{j*} \rangle = \langle \hat{\mathscr{B}}_\nu, \hat{\mathscr{X}}_{j*} \rangle, \quad j = \overline{1, k}.$$

Определим базис пространства $T_A^{(r)}$ из условия ортогональности к $\hat{N}_A^{(r)}$, т. е. из системы уравнений

$$\langle \hat{\mathscr{X}}_{j*} \hat{\mathcal{X}} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Если этот базис составляют векторы $\hat{\mathcal{Y}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{Y}}_l$, $l = n^2 - k$, то, разлагая вектор $\hat{\Gamma}_\nu$ по этому базису: $\hat{\Gamma}_\nu = \eta_{1\nu}\hat{\mathcal{Y}}_1 + \ldots + \eta_{\nu l}\hat{\mathcal{Y}}_l$ и подставляя результат в уравнение (6.7), получаем

$$\mathscr{G}_A \vec{\mathcal{Y}} \eta = \hat{\mathscr{B}}_\nu - \hat{\mathscr{B}}_{\nu N}^{(r)}, \tag{6.8}$$

где $\eta = \operatorname{colon} \| \eta_{\nu 1}, \ldots, \eta_{\nu l} \|$, $\vec{\mathcal{Y}} = \| \hat{\mathcal{Y}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{Y}}_l \|$ — матрица размерности $n^r \times l$. Чтобы избавиться от переопределенности системы (6.8) и получить ровно l уравнений, умножим обе части системы на матрицу $(\mathscr{G}_A \mathcal{Y})^*$:

$$\mathcal{Y}^* \mathscr{G}_A \mathscr{G}_A \mathcal{Y} \eta = \mathcal{Y}^* \mathscr{G}_A^* (\hat{\mathscr{B}}_\nu - \hat{\mathscr{B}}_{\nu N}^{(r)}).$$

Централизованная система с матрицей $\mathcal{A}$ непростой структуры в значительной степени сохраняет все свойства централизованной системы с матрицей $\mathcal{A}$ простой структуры благодаря установленному факту о представимости матрицы $\mathcal{A}$ в виде суммы (см. теорему 2.1 в гл. 2):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n, \tag{6.9}$$

где $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_n$ — полупростая и нильпотентная составляющие, представляемые в виде полиномов от матрицы $\mathcal{A}$.

Как следствие формулы (6.9) оператор U также представим в виде суммы: $\mathrm{U} = \mathrm{U}_s + \mathrm{U}_n$, где

$$\mathrm{U}_s = \hat{\hat{x}}_{m_1} \mathcal{A}_s \partial; \quad \mathrm{U}_n = \hat{\hat{x}}_{m_1} \mathcal{A}_n \partial; \quad \mathcal{A}_s = \sum_{j=0}^{k'} c_i' \mathcal{A}^j,$$

$$\mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{k''} c_j'' \mathcal{A}^j, \quad k', k'' \in \mathbf{Z}^+.$$

Оператор U_s назовем полупростой составляющей, а U_n — нильпотентной составляющей оператора U. В отношении оператора U_s справедливо следующее важное для дальнейшего утверждение.

Теорема 6.2. *Полупростая составляющая оператора* U *коммутирует с операторами* $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_\nu$, *входящими в ассоциированный с централизованной системой оператор* $\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon \mathrm{N}_1 + \ldots + \varepsilon^\nu \mathrm{N}_\nu$:

$$[\mathrm{U}_s, \mathrm{N}_\nu] \equiv 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{6.10}$$

где операторы N_ν *определяются равенствами (6.6).*

Доказательство. Представим тождество (6.10) в виде эквивалентного матричного тождества

$$[\mathcal{A}_s, \mathcal{X}] \equiv 0, \quad \mathcal{X} \in N_A^{(r)}. \tag{6.11}$$

Проведем доказательство последовательно для элементов подпространств $N_A^{(1)}, N_A^{(2)}, \ldots, N_A^{(r)}$, определяемых последовательностью уравнений (6.4). Пусть $\mathcal{X} \in N_A^{(1)}$ и определяется как решение уравнения $[\mathcal{A}, \mathcal{X}] = 0$. Это значит, что матрица $\mathcal{X}$ перестановочна с $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{A}$. Но тогда $\mathcal{A}^2\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{X}\mathcal{A}^2$, и матрица $\mathcal{X}$ перестановочна с матрицей $\mathcal{A}^2$. Отсюда сразу следует, что любая целая положительная степень $\mathcal{A}^p$ перестановочна с $\mathcal{X}$ и сумма $\alpha_1\mathcal{A}^{p_1} + \alpha_2\mathcal{A}^{p_2}$, $p_1, p_2 \in Z^+$, также перестановочна с $\mathcal{X}$: $[\alpha_1\mathcal{A}^{p_1} + \alpha_2\mathcal{A}^{p_2}, \mathcal{X}] \equiv \alpha_1 [\mathcal{A}^{p_1}, \mathcal{X}] + \alpha_2 [\mathcal{A}^{p_2}, \mathcal{X}] \equiv 0$. Значит,

$$[\mathcal{A}_s, \mathcal{X}] \equiv \left[\sum_{j=0}^{k'} c_j\mathcal{A}^j, \mathcal{X}\right] \equiv 0, \quad \mathcal{X} \in N_A^{(1)}.$$

Далее применим метод индукции. Пусть для элементов пространства $N_A^{(j)}$, определяемых как решения уравнения

$$\underbrace{[\mathcal{A}, \ldots, [\mathcal{A}}_{j}, \mathcal{X}] \ldots] = 0, \quad \mathcal{X} \in N_A^{(j)}, \tag{6.12}$$

теорема выполняется и имеет место доказываемое тождество (6.11) при $r = j$: $[\mathcal{A}_s, \mathcal{X}] \equiv 0$, $\mathcal{X} \in N_A^{(j)}$. Для элементов пространства определяющее уравнение имеет вид

$$\underbrace{[\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}\, [\mathcal{A}}_{j+1}, \mathcal{X} \ldots] = 0, \quad \mathcal{X} \in N_A^{(j+1)}. \tag{6.13}$$

Если для $\mathcal{X}$ выполняется условие (6.13), то для $\mathcal{Y} = [\mathcal{A}, \mathcal{X}]$ выполняется условие (6.12) и по предположению $[\mathcal{A}_s, \mathcal{Y}] \equiv [\mathcal{A}_s[\mathcal{A}, \mathcal{X}]] \equiv 0$. Покажем, что тогда и для $\mathcal{A}^p$, где p — произвольное положительное число, имеет место тождество

$$[\mathcal{A}_s, [\mathcal{A}^p, \mathcal{X}]] \equiv 0, \quad p \in Z^+, \tag{6.14}$$

Для скобки Пуассона $[\mathcal{A}^p, \mathcal{X}]$ используем формулу

$$[\mathcal{A}^p, \mathcal{X}] \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{A}^{p-j-1} [\mathcal{A}, \mathcal{Y}]\, \mathcal{A}^j, \tag{6.15}$$

справедливость которой проверяется непосредственной подстановкой $[\mathcal{A}^p, \mathcal{X}] = \mathcal{A}^p\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A}^p$, $[\mathcal{A}\mathcal{X}] = \mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A}$. Умножим обе части (6.15) на $\mathcal{A}^p$ и воспользуемся индуктивным предположением о том, что $\mathcal{A}_s [\mathcal{A}, \mathcal{X}] \equiv [\mathcal{A}, \mathcal{X}]\ \mathcal{A}_s$:

$$\mathcal{A}_s [\mathcal{A}^p, \mathcal{X}] \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{A}_s\mathcal{A}^{p-j-1} [\mathcal{A}_s, \mathcal{X}]\, \mathcal{A}^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{A}^{p-j-1} [\mathcal{A}, \mathcal{X}]\, \mathcal{A}^j \mathcal{A}_s =$$
$$= [A^p, \mathcal{X}]\, \mathcal{A}_s.$$

Из доказанного тождества (6.14) немедленно следует тождество

$$[\mathcal{A}_s [\mathcal{A}_s, \mathcal{X}]] \equiv 0. \tag{6.16}$$

Обозначая через $\mathcal{G}_{A_s}$ матрицу уравнения $[\mathcal{A}_s, \mathcal{X}] = 0$ в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(n.n)}$, запишем тождество (6.16), эквивалентное $\mathcal{G}_{A_s}^2 \hat{\mathcal{X}} \equiv 0$.

Вследствие простой структуры матрицы $\mathcal{G}_{A_s}$ уравнения $\mathcal{G}_{A_s}\hat{\mathcal{X}} = 0$ и $\mathcal{G}^2_{A_s}\hat{\mathcal{X}} \equiv 0$ эквивалентны уравнению $[\mathcal{A}_s, \mathcal{X}] \equiv 0, \quad x \in N_A^{(j+1)}$. ■

Оператор U централизованной системы теперь можно представить следующим образом:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_n + \varepsilon \mathbf{N}_1 + \cdots + \varepsilon^\nu \mathbf{N}_\nu + \ldots,$$

а саму централизованную систему — соответственно в виде

$$\frac{dx}{dt} = (\mathcal{A}_{0s} + \mathcal{A}_{0n} + \varepsilon \mathcal{B}^0_{\nu 1} + \varepsilon^2 \mathcal{B}^0_{\nu 2} + \cdots)\, x, \tag{6.17}$$

где $\mathcal{A}_{0s} = \mathcal{A}^T_s$, $\mathcal{A}_{0n} = \mathcal{A}^T_n$, $\mathcal{B}^0_{\nu N} = (\mathcal{B}^{(r)}_{\nu N})^T$, T — знак транспонирования.

Учитывая доказанный факт о куммутативности операторов U_s и U_n с операторами U_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, можно автоматически применять теоремы § 4 настоящей главы о структуре централизованной системы (6.17), отнеся U_n к алгебре централизатора.

Сформулируем теперь теорему 4.4 для рассматриваемого в настоящем параграфе случая матрицы $\mathcal{A}$ общей структуры на основании доказанной теоремы 6.2.

Теорема 6.3. *Пусть матрица $\mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}^T$) неособой матрицей $\mathcal{L}$ приводится к нормальной жордановой форме*

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}_0\mathcal{L} = \operatorname{diag}\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m\},$$

где $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_m$ — жордановы блоки размерностей $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, ..., $r_m \times r_m$ *соответственно. Тогда замена переменных* $x = \mathcal{L}z$ *преобразует централизованную систему к квазидиагональному виду*

$$\frac{dz}{dt} = \begin{Vmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \mathcal{E}_m \end{Vmatrix} z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left(\begin{Vmatrix} Q_{\nu 1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q_{\nu 2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & Q_{\nu m} \end{Vmatrix} \right) z,$$

где $Q_{\nu 1}, Q_{\nu 2}, \ldots, Q_{\nu m}$ — квадратные блоки размерностей $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2, \ldots, r_m \times r_m$.

Следующее утверждение учитывает то, что $\mathcal{A}$ является матрицей непростой структуры.

Теорема 6.4. *Решение централизованной системы (6.17) может быть представлено как произведение:*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{t^j \mathcal{A}^j_{0n}}{t\,!}\, e^{\mathcal{A}_{0s} t}\, \eta(\tau), \tag{6.18}$$

где μ — наименьшее целое число такое, что $\mathcal{A}^\mu_{0n} \equiv 0$, и *вектор* $\eta(\tau) = \operatorname{colon} \| \eta_1(\tau), \ldots, \eta_n(\tau) \|$ *является решением системы уравнений*

$$\frac{d\eta}{d\tau} = (\mathcal{B}^0_{\nu 1} + \varepsilon \mathcal{B}^0_{\nu 2} + \cdots)\, \eta, \quad \eta(0) = x(0), \quad \tau \equiv \varepsilon t. \tag{6.19}$$

ГЛАВА 5

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ВИДЕ ПОЛИНОМОВ

§ 1. ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{B}$ И $\tilde{\mathfrak{B}}$ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему почти линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}' = \mathcal{A}_0 x' + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $\tilde{\omega}(x')$ — вектор-столбец, составленный из полиномов степени не выше k от n переменных $x'_1, \ldots, x'_n$.

Будем считать, что матрица $\mathcal{A}$ коэффициентов системы нулевого приближения, соответствующей системе (1.1), имеет простую структуру (см. § 2 гл. 2). Такое ограничение на матрицу $\mathcal{A}_0$ не является принципиальным, поскольку система (1.1) размерности n с матрицей непростой структуры может быть преобразована к системе размерности $n + 1$ с матрицей простой структуры. Для указанного преобразования следует разложить матрицу $\mathcal{A}$ одним из известных способов на полупростую и нильпотентную составляющие (см. § 2 гл. 2):

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{0s} + \mathcal{A}_{0n}, \quad \mathcal{A}_{0s}\mathcal{A}_{0m} \equiv \mathcal{A}_{0n}\mathcal{A}_{0s}, \quad \mathcal{A}_{0m}^k \equiv 0, \quad k \leqslant n.$$

Подставив выписанные тождества в исходную систему и заменив переменные $x' = \exp\mathcal{A}_{0n}(t - t_0)\,y' = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_{0n}^i \frac{t'}{i\,!}\,y'$, получим систему

$\dot{y}' = \mathcal{A}_{0s}y' + \varepsilon\tilde{\Omega}(t, y')$, где $\tilde{\Omega}(y') = \exp[-\mathcal{A}_{0n}(t - t_0)]\,\tilde{\omega}\,[\exp\mathcal{A}_{0n}(t - t_0)\,y']$ — однородный многочлен конечной степени. Вводя дополнительную переменную $y'_{n+1} \equiv t$, $\dot{y}'_{n+1} \equiv 1$, приходим к системе $n + 1$ уравнений с матрицей простой структуры.

Наряду с векторным пространством V над P, порожденным элементами $x_1, \ldots, x_n$, будем рассматривать векторное подпространство $V_{\otimes\nu}$ над P, равное прямому произведению пространства V, взятого ν раз: $V_{\otimes\nu} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}$.

Базис подпространства $V_{\otimes\nu}$ образован всеми возможными мономами вида $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$, $m_1 + \ldots + m_n = \nu$. Его размерность будем обозначать через m_ν. Через $\hat{\hat{x}}_\nu$ будем обозначать вектор-столбец, составленный из базисных элементов пространства $V_{\otimes\nu}$.

Очевидно, $m_1 = n$ и $\hat{\hat{x}}_1 = \operatorname{colon} \| x_1, \ldots, x_n \|$. Обозначим через $\mathfrak{T}(V)$ бесконечномерное пространство, равное прямой сумме подпространств $V_{\otimes\nu}$:

$$\mathfrak{T}(V) = \mathrm{P} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots \oplus (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{}) \oplus \cdots$$

С пространством $\mathfrak{T}(V)$ тесно связана бесконечномерная алгебра Ли, к построению которой мы сейчас переходим.

Пусть $\mathcal{B}$ — постоянная матрица размерности $m_\nu \times n$ с элементами $b_{ij} \in \mathrm{P}$, $i = \overline{1, m_\nu}$, $j = \overline{1, n}$, и $b_1, \ldots, b_n$ — элементы строки в равенстве

$$b = \hat{\hat{x}}_\nu \mathcal{B}, \quad b \overset{\text{def}}{=} \| b_1, \ldots, b_n \|. \tag{1.2}$$

Совокупность дифференциальных операторов

$$\mathrm{X} = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad b_i \in V_{\otimes\nu} \tag{1.3}$$

при произвольной матрице $\mathcal{B}$ порождает линейное пространство над P, которое будем обозначать через $\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu})$.

Ясно, что оператор X отображает подпространство V в $V_{\otimes\nu}$ и его матрица при этом отображении равна $\mathcal{B}$. С другой стороны, как легко проверить непосредственным вычислением, оператор X переводит все векторы из подпространств $V_{\otimes l}$ в подпространство $V_{\otimes l+\nu-1}$. Действуя оператором X на базис $V_{\otimes l}$, получим выражение

$$\mathrm{X}\hat{\hat{x}}_{m_l} = \hat{\hat{x}}_{m_{l+\nu-1}} \mathcal{F}_{l+\nu-1}, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{F}_{l+\nu-1}$ — прямоугольная матрица размерности $m_{l+\nu-1} \times m_\nu$, которая является матрицей оператора X в пространстве $V_{\otimes l}$.

Определение 1.1. Матрицу $\mathcal{F}_{l+\nu-1}$ действующего из подпространства $\mathfrak{B}(V_{\otimes l})$ в подпространство $\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu})$ оператора X, определяемую соотношением (1.4), назовем матрицей представления оператора X в пространстве $V_{\otimes l}$.

Таким образом, матрица $\mathcal{B}$ в выражении (1.2) является матрицей представления оператора X в подпространстве V.

Пусть Y — дифференциальный оператор из $\mathfrak{B}(V_{\otimes r})$:

$$\mathrm{Y} = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad g_i \in V_{\otimes r},$$

$$g = \hat{\hat{x}}_r \mathcal{D}, \quad g = \| g_1, \ldots, g_n \|, \quad \mathcal{D} \in \mathfrak{R}^{(m_r, n)}.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть операторы* X, Y *принадлежат подпространствам* $\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu})$ *и* $\mathfrak{B}(V_{\otimes r})$ *и* $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ *— матрицы представления этих операторов в подпространстве* V*; тогда скобка Пуассона*

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad c = \hat{\hat{x}}_{r+\nu-1} \mathcal{C}, \quad c = \| c_1, \ldots, c_n \|,$$

принадлежит подпространству $\mathfrak{B}(V_{\otimes r+\nu-1})$ *и ее матрицей представления является*

$$\mathcal{C} = \mathcal{R}_{\nu+r-1}\mathcal{D} - \mathcal{F}_{\nu+r-1}\mathcal{B}, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{R}_{\nu+r-1} \in \mathfrak{R}^{(\nu+r-1,\, m_r)}$, $\mathcal{F}_{\nu+r-1} \in \mathfrak{R}^{(\nu+r-1,\, m_\nu)}$ — *матрицы представления операторов* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *соответственно в подпространствах* $V_{\otimes r}$ и $V_{\otimes \nu}$.

Доказательство. Проведем непосредственные вычисления. Скобку Пуассона $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ можно записать следующим образом:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = (\mathbf{X}g_1 - \mathbf{Y}b_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (\mathbf{X}g_n - \mathbf{Y}b_n)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Но, как легко заметить, справедливы соотношения

$$\|\mathbf{X}g_1, \ldots, Xg_n\| = \mathbf{X}\hat{\hat{x}}_{m_r}\mathcal{D} = \hat{\hat{x}}_{m_{\nu+r-1}}\mathcal{R}_{\nu+r-1}\mathcal{D};$$

$$\|\mathbf{Y}b_1, \ldots, \mathbf{Y}b_n\| = \mathbf{Y}\hat{\hat{x}}_{m_\nu}\mathcal{B} = \hat{\hat{x}}_{m_{\nu+r-1}}\mathcal{F}_{\nu+r-1}\mathcal{B}.$$

Здесь $\mathcal{R}_{\nu+r-1}$, $\mathcal{F}_{\nu+r-1}$ — матрицы размерностей соответственно $(m_{\nu+r-1}) \times m_r$ и $(m_{\nu+r-1}) \times m_\nu$, матрица $\mathcal{D}$ имеет размерность $m_\nu \times n$ и матрица $\mathcal{B}$ — размерность $m_r \times n$. Значит,

$$\|\mathbf{X}g_1 - \mathbf{Y}b_1, \ldots, \mathbf{X}g_n - \mathbf{Y}b_n\| = \hat{\hat{x}}_{m_{\nu+r-1}}(\mathcal{R}_{\nu+r-1}\mathcal{D} - \mathcal{F}_{\nu+r-1}\mathcal{B}),$$

откуда следует доказываемое соотношение (1.5). ■

Теорема 1.1. *Пространство* $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$ *порождает бесконечномерную алгебру Ли.*

Доказательство является прямым следствием леммы 1.1, так как $[\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu}), \mathfrak{B}(V_{\otimes r})] \subset \mathfrak{B}(V_{\otimes\nu+r-1})$ и бесконечномерное пространство $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$ замкнуто относительно обычной операции взятия скобки Пуассона от двух произвольных операторов из $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$. ■

Вернемся к исходной системе (1.1). Выпишем ассоциированный с ней дифференциальный оператор

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\tilde{\mathbf{U}},$$

где

$$\mathbf{U} = \omega_1^{(1)}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n^{(1)}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\omega}_1^{(2)}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$$

$$\cdots + \tilde{\omega}_n^{(2)}(x)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

ε — малый параметр. Вектор коэффициентов $\omega^{(1)} = \|\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)}\|$ определяется, как и в § 1 гл. 4, матричным равенством $\omega^{(1)}(x) = x^T\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_0^T$, т. е. $\mathbf{U} \in \mathfrak{B}(V_{\otimes 1})$. Вектор $\tilde{\omega}^{(2)}(x) = \|\omega_1^{(2)}(x), \ldots, \omega_n^{(2)}(x)\|$ можно представить таким образом:

$$\tilde{\omega}^{(2)}(x) = \hat{\hat{x}}_{m_1}\mathcal{B}_{m_1} + \cdots + \mathcal{B}_{m_k}\hat{\hat{x}}_{m_k},$$

где $\mathcal{B}_{m_1}, \ldots, \mathcal{B}_{m_k}$ — прямоугольные постоянные матрицы размерностей $m_1 \times n, \ldots, m_k \times n$.

Векторы $\hat{\hat{x}}_{m_i}\mathcal{B}_{m_i}$ принадлежат пространству $V_{\otimes i}$, $i = \overline{1, k}$. Следовательно, оператор $\tilde{\mathrm{U}}$ представим суммой:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_{\otimes 1} + \cdots + \mathbf{U}_{\otimes m}, \quad \mathbf{U}_{\otimes i} \in \mathfrak{V}(\mathbf{U}_{\otimes i}), \quad i = \overline{1,\ k}.$$

Перейдем к рассмотрению обертывающих алгебр $\mathfrak{V}_0$ и $\tilde{\mathfrak{V}}$. Алгебра $\mathfrak{V}_0$ системы нулевого приближения построена в § 3 гл. 1. Построим обертывающую алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{V}}$. Обозначим через σ совокупность операторов $\{\mathbf{U},\ \tilde{\mathbf{U}}\}$. Далее, введем рекуррентную последовательность множеств $\sigma^1 = [\sigma, \sigma]$, $\sigma^2 = [\sigma^1, \sigma^1]$, ..., $\sigma^k = [\sigma^{k-1}, \sigma^{k-1}]$, где $\sigma^i = \{\mathbf{Z} : \mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}],\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \sigma^{k-1}\}$; [,] — скобка Пуассона. Ясно, что построенная совокупность образует алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{V}}$ над Р и $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{T}(V))$. Так как алгебра $\mathfrak{V}(\mathfrak{T}(V))$ как векторное пространство равна прямой сумме подпространств $\mathfrak{V}(V_{\otimes \nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, а каждое подпространство $\mathfrak{V}(V_{\otimes \nu})$ конечномерно и имеет размерность m_ν, то ясно, что после конечного числа шагов получим подпространство $\mathfrak{V}'(V_{\otimes \nu}) \subseteq \mathfrak{V}(V_{\otimes \nu})$. Доказательство этого факта аналогично приведенному в теореме 1.6 гл. 4 для линейных систем. Не теряя общности рассуждений можно считать, что $\mathfrak{V}'(V_{\otimes \nu}) = \mathfrak{V}(V_{\otimes \nu})$ и $\tilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}(\mathfrak{T}(V))$.

Эффективным средством исследования структуры алгебры $\tilde{\mathfrak{V}}$ является изучение ее гомоморфизмов в алгебру матриц. Для линейного случая такой алгеброй является полная матричная алгебра gl (n, P), а для рассматриваемого случая бесконечномерной алгебры Ли — бесконечномерные матрицы специальной структуры.

§ 2. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Дальнейшее развитие алгоритма асимптотической декомпозиции связано с решением операторных уравнений (см. § 1 гл. 3)

$$[\mathbf{U},\ \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots \tag{2.1}$$

Правые части $\mathbf{F}_\nu$ уравнений (2.1) получены вычислением скобок Пуассона от операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{S}_\nu$ конечное число раз и, следовательно,

$$\mathbf{F}_\nu \in \mathfrak{V}(V_{\otimes 1}) + \mathfrak{V}(V_{\otimes 2}) + \cdots + \mathfrak{V}(V_{\oplus g_\nu}), \tag{2.2}$$

т. е. $\mathbf{F}_\nu$ имеет в своих коэффициентах полиномы максимальной степени g_ν. Обозначим через $\mathbf{F}_{\otimes i\nu}$, $i = \overline{1, g_\nu}$, составляющие оператора в сумме подпространств (2.2):

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{\otimes 1\nu} + \mathbf{F}_{\otimes 2\nu} + \cdots + \mathbf{F}_{\otimes g_\nu \nu},$$

причем матрицей представления в $\mathbf{V}$ оператора $\mathbf{F}_{\otimes i\nu}$ является прямоугольная матрица $\mathcal{B}_{\nu i}$ размерности $m_{g_\nu} \times n$. Данный оператор можно представить в векторном виде:

$$\mathbf{F}_{\otimes i\nu} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\mathcal{B}_{\nu i}\partial, \quad \partial \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|, \quad i = \overline{1, g_\nu}. \tag{2.3}$$

Оператор $\mathbf{S}_\nu$ также будем искать в виде суммы:

$$\mathbf{S}_\nu = \mathbf{S}_{\otimes 1\nu} + \mathbf{S}_{\otimes 2\nu} + \cdots + \mathbf{S}_{\otimes g_\nu \nu},$$

где

$$\mathbf{S}_{\otimes i\nu} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{\nu i}\partial, \quad i = \overline{1, g_\nu}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_{g_\nu}$ — матрицы представлений оператора* $\mathbf{U}$ *в подпространствах $V_{\otimes 1}, V_{\otimes 2}, \ldots, V_{\otimes g_\nu}$ размерностей $m_1 \times m_1$, ..., $m_{g_\nu} \times m_{g_\nu}$. Тогда решение уравнения (2.1) сводится к решению g_ν независимых матричных уравнений*

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\nu 1}\mathcal{F}_1 - \mathcal{A}\Gamma_{\nu 1} = \mathcal{B}_{\nu 1};\\ &\Gamma_{\nu 2}\mathcal{F}_2 - \mathcal{A}\Gamma_{\nu 2} = \mathcal{B}_{\nu 2};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Gamma_{\nu g_\nu}\mathcal{F}_{g\nu} - \mathcal{A}\Gamma_{\nu g_\nu} = \mathcal{B}_{\nu g_\nu}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. Оператор $\mathbf{U}$ переводит $\mathfrak{V}(V_{\otimes i})$ в себя, т. е. $[\mathbf{U}, \mathfrak{V}(V_{\otimes i})] = \mathfrak{V}(V_{\otimes i})$. Следовательно, подставляя значения $\mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{S}_\nu$ в исходное уравнение (2.1), получаем g_ν независимых уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\otimes i\nu}] = \mathbf{F}_{\otimes i\nu}, \quad i = \overline{1, g_\nu}. \tag{2.5}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\otimes i\nu}] = (\mathbf{U}\hat{\hat{x}}_{m_i}\mathcal{F}_{\nu i} - \mathbf{S}_{\otimes i\nu}\hat{\hat{x}}_{m_1}\mathcal{A})\,\partial. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{U} = \hat{\hat{x}}_{m_1}\mathcal{A}\partial$, $\mathbf{U}\hat{\hat{x}}_{m_i} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\mathcal{F}_i$, $\mathbf{S}_{\otimes i\nu}\hat{\hat{x}}_{m_i} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{\nu i}$, следовательно, (2.6) принимает вид

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\otimes i\nu}] = \hat{\hat{x}}_{m_i}(\mathcal{F}_i\Gamma_{\nu i} - \Gamma_{\nu i}\mathcal{A})\,\partial. \tag{2.7}$$

Подставим выражения (2.3) и (2.7) в уравнение (2.5) и приравняем матрицы коэффициентов билинейной формы относительно $\hat{\hat{x}}_{m_i}$, ∂; в результате получим матричную систему (2.4). ■

Наряду с линейным пространством $\mathfrak{R}^{(k,n)}$ над полем P прямоугольных матриц размерности $k \times n$ введем изоморфное ему линейное пространство $\hat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$, составленное из вектор-столбцов, образованных из строк матриц, входящих в $\hat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$. Таким образом, если матрица $Q \in \mathfrak{R}^{(k,n)}$, $\hat{Q} = \| q_{ij} \|$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, то ей соответствует в $\hat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$ вектор $Q = \operatorname{colon} \| q_{11}, \ldots, q_{1n}; \ldots, q_{k1}, \ldots, q_{kn} \|$.

Обозначим $\mathcal{G}_A^{(i)} = \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_i} \otimes \mathcal{A}^T$, $i = \overline{1, g_\nu}$, где $\mathcal{E}_{m_i}$, $\mathcal{E}_n$ — единичные матрицы размерностей $m_i \times m_i$, $n \times n$. Эта матрица имеет размерность $m_i n \times m_i n$ и действует в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_i, n)}$.

Теорема 2.2. *Система матричных уравнений (2.4) эквивалентна системе алгебраических уравнений*

$$\mathcal{G}_A^{(1)} \hat{\Gamma}_{\nu 1} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu_1}, \ldots, \mathcal{G}_A^{g_\nu} \hat{\Gamma}_{\nu g_\nu} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu g_\nu}.$$

Доказательство основывается на свойствах прямых произведений матриц (см., например, работу [44]).

Приведем теперь другую интерпретацию уравнений (2.1). Так как эти уравнения имеют одну и ту же структуру, то с целью упрощения записей рассмотрим представителей этой системы

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu, \quad \mathbf{S}_\nu, \mathbf{F}_\nu \in \mathfrak{B}(V_{\otimes\nu}). \tag{2.8}$$

Операторы $\mathbf{S}_\nu$, $\mathbf{F}_\nu$ запишем в виде произведений:

$$\mathbf{S}_\nu = \hat{\hat{x}}_{m_\nu} \Gamma \partial, \quad \mathbf{F}_\nu = \hat{\hat{x}}_{m_\nu} \mathcal{B} \partial,$$

где $\Gamma = \| \gamma_{ij} \|$, $\mathcal{B} = \| b_{ij} \|$, $i = \overline{1, m_\nu}$, $j = \overline{1, n}$, — прямоугольные постоянные матрицы.

Обозначим компоненты вектора $\hat{\hat{x}}_{m_\nu}$ через $x_1, \ldots, x_{m_\nu}$. Тогда операторы $\mathbf{S}_\nu$, $\mathbf{F}_\nu$ можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{S}_\nu = \sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{F}_\nu = \sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.9}$$

Операторы $\mathbf{X}_{ji} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m_\nu}$, $j = \overline{1, n}$, в общем количестве $m_\nu n$ можно принять в качестве базисных в подпространстве $\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu})$. Подставляя $\mathbf{S}_\nu$ и $\mathbf{F}_\nu$, определяемые формулами (2.9), в уравнения (2.8), получаем

$$\sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} [\mathbf{U}, \mathbf{X}_{ji}] = \sum_{j=1}^{m_\nu} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \mathbf{X}_{ji}. \tag{2.10}$$

Вводя векторы

$$\hat{\Gamma} = \mathrm{colon} \| \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1,n}; \ldots; \gamma_{m_\nu,1}, \ldots, \gamma_{m_\nu,n} \|,$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \| \mathbf{X}_{11}, \ldots, \mathbf{X}_{1,n}, \ldots, \mathbf{X}_{m_\nu,1}, \ldots, \mathbf{X}_{m_\nu,n} \|,$$

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathrm{colon} \| b_{11}, \ldots, b_{1,n}, \ldots, b_{m_\nu,1}, \ldots, b_{m_\nu,n} \|,$$

приведем уравнение (2.10) к виду

$$[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{X}}] \hat{\Gamma} = \tilde{\mathbf{X}} \mathcal{B}. \tag{2.11}$$

Оператор $\mathbf{U}$ переводит подпространство $\mathfrak{B}(V_{\otimes\nu})$ в себя, поэтому

$$[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{X}}] = \tilde{\mathbf{X}} \mathcal{G}_U^{(\nu)}, \tag{2.12}$$

где $\mathcal{G}_U^{(\nu)}$ — квадратная матрица размерности $m_\nu n \times m_\nu n$. Подставим значение $[\mathrm{U}, \tilde{\mathrm{X}}]$ (2.12) в уравнение (2.11) и приравняем матрицы при векторе $\tilde{\mathrm{X}}$; тогда

$$\mathcal{G}_U^{(\nu)}\hat{\Gamma} = \hat{\mathcal{B}}. \tag{2.13}$$

Используя результаты теорем 2.1 и 2.2, можем переписать уравнения (2.8) в виде либо матричного уравнения

$$\mathcal{F}_\nu\Gamma - \Gamma\mathcal{A} = \mathcal{B},$$

либо эквивалентного ему матричного уравнения

$$\mathcal{G}_A^{(\nu)}\hat{\Gamma} = \hat{\mathcal{B}}. \tag{2.14}$$

С одной стороны, уравнение (2.8) эквивалентно матричному уравнению (2.13), с другой — уравнению (2.14). Подпространство $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_\nu, n)}$, где действуют операторы $\mathcal{G}_U^{(\nu)}$, $\mathcal{G}_A^{(\nu)}$, можно разложить в прямую сумму подпространств — ядро и образ операторов $\mathcal{G}_U^{(\nu)}$ или $\mathcal{G}_A^{(\nu)}$. Если вычесть из уравнения (2.13) уравнение (2.14), то получим однородное уравнение

$$(\mathcal{G}_U^{(\nu)} - \mathcal{G}_A^{(\nu)})\,\hat{\Gamma} \equiv 0, \tag{2.15}$$

которому удовлетворяют обе компоненты разложения пространства $\mathfrak{R}^{(m_\nu, n)}$, т. е. все векторы пространства $\mathfrak{R}^{(m_\nu, n)}$. Следовательно, матрица в уравнении (2.15) тождественно равна нулю: $\mathcal{G}_U^{(\nu)} - \mathcal{G}_A^{(\nu)} \equiv 0$, и поэтому имеет место тождество $\mathcal{G}_U^{(\nu)} \equiv \mathcal{G}_A^{(\nu)}$.

Если в скобку Пуассона $[\mathrm{X}, \mathrm{S}]$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$, в качестве элемента S подставить базис $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$, то получим некоторое отображение этого пространства в себя:

$$[\mathrm{X}, \hat{\hat{L}}] = \hat{\hat{L}}\mathcal{G}_L, \tag{2.16}$$

где $\hat{\hat{L}}$ — вектор, составленный из базисных операторов $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$, $\mathcal{G}_L$ — бесконечномерная матрица над полем P квазитреугольной структуры.

Отображение $\varphi: \mathrm{X} \to \mathcal{G}_X$ является присоединенным представлением алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$ в $\mathrm{gl}(\infty, V)$.

В частном случае, когда в соотношениях (2.16) вместо X подставить U, для $\mathcal{G}_U$ получим квазидиагональную матрицу

$$\mathcal{G}_U = \operatorname{diag}\{\mathcal{G}_U^{(1)}, \mathcal{G}_U^{(2)}, \ldots\},$$

составленную из блоков $\mathcal{G}_U^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Основной результат, полученный выше, можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.3. *Блочные матрицы в присоединенном представлении оператора* U *имеют структуру*

$$\mathcal{G}_U^{(\nu)} = (\mathcal{F}_\nu \otimes \mathcal{E}_{n_\nu} - \mathcal{E}_{m_\nu} \otimes \mathcal{A}^T), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, теорема 2.3 устанавливает эквивалентность двух описанных выше подходов — операторного и подхода с использованием присоединенных представлений при решении исходного уравнения (2.1).

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ И НАХОЖДЕНИЕ ПРИВОДЯЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Исследуем условия разрешимости основных уравнений

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_A^{(1)}\hat{\Gamma}_{\nu 1} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu 1};\\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{G}_A^{(g_\nu)}\hat{\Gamma}_{\nu g_\nu} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu g_\nu},\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\mathcal{G}_A^{(i)} = \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_i} \otimes \mathcal{A}^T$, $i = \overline{1, g_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Уравнения системы (3.1) решаются независимо друг от друга и поэтому достаточно рассмотреть одно из них:

$$\mathcal{G}_A^{(r)}\hat{\Gamma}_{\nu r} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu r}. \tag{3.2}$$

Системе (3.2) соответствует однородное уравнение

$$\mathcal{G}_A^{(r)}\hat{\Gamma}_{\nu r} = 0 \tag{3.3}$$

и сопряженное уравнение

$$\mathcal{G}_A^{(r)*}\hat{\Gamma}_{\nu r} = 0, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{G}_A^{(r)*} = \mathcal{F}_r^* \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_r} \otimes (\mathcal{A}^*)^T$ — комплексно-сопряженная по отношению к $\mathcal{G}_A^{(r)}$ матрица.

Обозначим через $\hat{N}_A^{(r)}$, $\hat{N}_{A*}^{(r)}$ ядра операторов $\mathcal{G}_A^{(r)}$, $\mathcal{G}_A^{(r)*}$ и через $\hat{T}_A^{(r)}$, $\hat{T}_A^{(r)}$ образы этих операторов.

Пространство $\mathfrak{R}^{(m_r, n)}$ может быть разложено единственным образом в прямую сумму подпространств $\hat{N}_A^{(r)}$, $\hat{T}_A^{(r)}$:

$$\hat{\mathfrak{R}}^{(m_r, n)} = \hat{N}_A^{(r)} \oplus \hat{T}_A^{(r)}.$$

Правую часть уравнения (3.2) представим в виде суммы

$$\hat{\mathcal{B}}_{\nu r} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu N r} + \hat{\mathcal{B}}_{\nu T r}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu N r} \in \hat{N}_A^{(r)}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{\nu N r} \in \hat{T}_A^{(r)}. \tag{3.5}$$

Вектору $\hat{\mathcal{B}}_{\nu N r}$ в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_r, n)}$ соответствует прямоугольная матрица $\mathcal{B}_{\nu N r}$, которая в свою очередь определяет дифференциальный оператор

$$\mathbf{N}_{\nu r} = \hat{\hat{x}}_{m_r}\mathcal{B}_{\nu N r}\partial, \quad \partial = \operatorname{colon}\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|.$$

Построенные операторы $\mathbf{N}_{\nu r}$, $r = \overline{1, g_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, коммутируют с оператором $\mathbf{U}$:

$$[\mathbf{U}, \mathbf{N}_{\nu r}] \equiv 0.$$

Согласно теореме 1.2 гл. 3 операторные уравнения (2.1) будут иметь на решениях системы (1.2) гл. 3 нулевого приближения секулярные члены. Чтобы избежать этого, необходимо в соответствии с определением 1.1 гл. 3 принять в качестве проекции от оператора $\mathbf{F}_\nu$ выражение

$$\operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu \overset{\text{def}}{=} \mathbf{N}_\nu \overset{\text{def}}{=} \mathbf{N}_{\nu 1} + \cdots + \mathbf{N}_{\nu g_\nu}. \tag{3.6}$$

Таким образом, оператор $\mathbf{U}_0$ (1.14) после преобразований (1.6) гл. 3, где $\mathbf{S}_\nu$ определяются соотношениями (2.5), перейдет в оператор

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \varepsilon^2\mathbf{N}_2 + \ldots, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{N}_\nu = \sum\limits_{j=1}^{g_\nu} \mathbf{N}_{\nu j}$. Централизованной системой, ассоциированной с оператором (3.7), будет

$$\frac{dx_j}{dt} = (\mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \varepsilon^2\mathbf{N}_2 + \cdots)\, x_j, \quad j = \overline{1, n},$$

или

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \varepsilon b_{1j}(x) + \varepsilon^2 b_{2j}(x) + \cdots + \varepsilon^\nu b_{\nu j}(x),$$

где $b_{\nu 1}, \ldots, b_{\nu n}$ — компоненты вектора b_ν, определяемого равенством $b_\nu = \hat{\hat{x}}_{m_\nu} \sum\limits_{r=1}^{g_\nu} \mathcal{B}_{\nu N r}$.

Переходим к фактическому нахождению матриц $\mathcal{B}_{\nu N i}$, $i = \overline{1, g_\nu}$, в разложении (3.5) и построению $\operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu$.

Введем скалярное произведение в пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_r, n)}$. Пусть $\mathcal{C} = \| c_{ij} \|$, $Q = \| q_{ij} \|$, $i = \overline{1, m_r}$, $j = \overline{1, n}$ — произвольные прямоугольные матрицы из пространства $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_r, n)}$. В пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_r, n)}$ им соответствуют векторы $\hat{C}$, $\hat{Q}$, составленные из строк этих матриц: $\hat{\mathcal{C}} = \operatorname{colon} \| c_{11}, \ldots, c_{1n}; \ldots; c_{m_r, 1}, \ldots, c_{m_r, n} \|$ и $Q = \operatorname{colon} \| q_{11}, \ldots, q_{1n}; \ldots; q_{m_r, 1}, \ldots, q_{m_r, n} \|$. Скалярное произведение вводится обычным образом:

$$\langle \hat{C}, \hat{Q} \rangle = c_{11}\bar{q}_{11} + \cdots + c_{1n}\bar{q}_{1n} + \cdots + c_{m_r 1}\bar{q}_{m_r 1} + \cdots + c_{m_r n}\bar{q}_{m_r n}$$

при $\mathrm{P} = \mathrm{K}$

и
$$\langle \hat{C}, \hat{Q} \rangle = c_{11}q_{11} + \cdots + c_{m_r n}g_{m_r n} \text{ при } \mathrm{P} = \mathrm{R}$$

(черта над буквой — знак комплексного сопряжения). Произведение прямоугольной матрицы C размерности $m_r \times n$ на прямоугольную матрицу Q^T размерности $n \otimes m_r$ даст квадратную матрицу размерности $m_r \otimes m_r$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\langle \hat{\mathcal{C}}, \hat{Q} \rangle = \operatorname{tr} \mathcal{C} \overline{Q}^T \text{ при } \mathrm{P} = \mathrm{K} \tag{3.8}$$

и

$$\langle \hat{\mathcal{C}}, \hat{Q} \rangle = \operatorname{tr} \mathcal{C} Q^T \text{ при } \mathrm{P} = \mathrm{R}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим уравнение (3.3), определяющее ядро $\hat{N}_A^{(r)}$ преобразования $\mathcal{G}_A^{(r)}$. Только при $r = 1$ эта система всегда имеет по меньшей мере k независимых решений (напомним, что $\mathcal{A}$ является матрицей простой структуры).

Если система (3.3) решений не имеет, то в разложении правой части (3.5) составляющая $\mathcal{B}_{\nu Nr}$ всегда тождественно равна нулю и, следовательно, оператор $\mathbf{N}_{\nu r}$, входящий в сумму (3.6), также тождественно равен нулю.

Предположим, что система (3.3) имеет линейно независимые решения $\hat{\mathcal{X}}_{1r}, \ldots, \hat{\mathcal{X}}_{k_r r}$ (базис $\hat{N}_A^{(r)}$). Тогда уравнение (3.4) также имеет k_r линейно независимых решений $\hat{\mathcal{X}}_{1r*}, \ldots, \hat{\mathcal{X}}_{k_r r*}$, так как размерности ядра оператора $\mathcal{G}_A^{(r)}$ и сопряженного оператора $\mathcal{G}_A^{(r)*}$ совпадают.

Разложим составляющую $\hat{\mathcal{B}}_{\nu Nr}$ в правой части (3.5) по базису $\hat{\mathcal{X}}_{1r}, \ldots, \hat{\mathcal{X}}_{k_r, r}$:

$$\mathcal{B}_{\nu Nr} = \sum_{i=1}^{k_r} \alpha_{\nu r_i} \hat{\mathcal{X}}_{ir}.$$

Разность $\hat{\mathcal{B}}_{\nu r} - \hat{\mathcal{B}}_{\nu Nr} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu Tr}$ принадлежит образу $\hat{T}_A^{(r)}$ и, следовательно, как известно из линейной алгебры, ортогональна подпространству $\hat{N}_A^{(r)}$:

$$\left\langle \hat{\mathcal{B}}_{\nu r} - \sum_{i=1}^{k_r} \alpha_{\nu r i} \hat{\mathcal{X}}_{ir}, \ \hat{\mathcal{X}}_{jr*} \right\rangle \equiv 0.$$

Из приведенных тождеств получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{k_r} \alpha_{\nu r i} \langle \hat{\mathcal{X}}_{ir}, \hat{\mathcal{X}}_{jr*} \rangle = \langle \hat{\mathcal{B}}_{\nu r}, \hat{\mathcal{X}}_{jr*} \rangle. \tag{3.10}$$

Определитель этой системы (определитель Грама) не равен нулю, и, следовательно, система (3.20) имеет единственное решение.

Если воспользоваться формулами (3.8), (3.9), то уравнения (3.10) можно в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_r, n)}$ записать через следы произведения матриц:

$$\sum_{i=1}^{k_r} \alpha_{\nu r i} \operatorname{tr} \mathcal{X}_{ir} (\overline{\mathcal{X}}_{jr*})^T = \operatorname{tr} \mathcal{B}_{\nu r} (\overline{\mathcal{X}}_{jr*})^T. \tag{3.11}$$

Полученный результат подытожим в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Нахождение проекции оператора* $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu = \mathbf{N}_{\nu 1} + \ldots + \mathbf{N}_{\nu g_\nu}$ *от правых частей уравнений (2.1) сводится к решению последовательности* g_ν *независимых между собой систем неоднородных алгебраических уравнений вида (3.10) или (3.11). Решение этих уравнений всегда существует и единственно. Оператор* $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$ *не содержит составляющей* $\mathbf{N}_{\nu r}$, *если однородное уравнение* $\mathscr{G}_A^{(r)}\Gamma_{\nu r} = 0$ *для определения матрицы коэффициентов имеет лишь тривиальное решение.*

Оператор $\mathbf{S}_\nu$ *определяется матрицей* $\Gamma_{\nu r}$, *которая находится как решение уравнения*

$$\mathscr{G}_A^{(r)}\hat{\Gamma}_{\nu r} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu T r}. \tag{3.12}$$

Система (3.12) совместна, и ее решение определяется однозначно с точностью до составляющей из ядра $N_A^{(r)}$. Более того, она содержит $m \times n$ уравнений от $\rho_r = m_r \times n - k_r$ переменных (k_r — размерность ядра $\hat{N}_A^{(r)}$). Чтобы избежать неоднозначности в решении и избавиться от лишних уравнений, можно поступить следующим образом. Пусть $\hat{\mathscr{Y}}_{1\rho_r}, \ldots, \hat{\mathscr{Y}}_{\rho_r\rho_r}$ — базис пространства $\hat{T}_A^{(r)}$, тогда вектор $\hat{\Gamma}_{\nu r}$ можно разложить по этому базису:

$$\hat{\Gamma}_{\nu r} = \gamma_{1\rho_r}^{(\nu r)}\hat{\mathscr{Y}}_{11} + \cdots + \gamma_{\rho_r\rho_r}^{(\nu r)}\hat{\mathscr{Y}}_{\rho_r\rho_r}.$$

С помощью вектора $\gamma_{\nu r} = \mathrm{colon}\,\| \gamma_{11}^{(\nu r)}, \ldots, \gamma_{\rho_r\rho_r}^{(\nu r)} \|$ и матрицы $Q_{\nu r}$, образованной векторами $\hat{\mathscr{Y}}_{11}, \ldots, \hat{\mathscr{Y}}_{\rho_r\rho_r}$, представим уравнение (3.12) в матричном виде $\mathscr{G}_A^{(r)}Q_r\gamma_{\nu r} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu T r}$. Это уравнение умножим на матрицу $Q_r^*\mathscr{G}_A^{(r)*}$, сопряженную с $\mathscr{G}_A^{(r)}Q_r$. В результате получаем систему

$$Q_r^*\mathscr{G}_A^{(r)*}\mathscr{G}_A^{(r)}Q_r\gamma_{\nu r} = Q_r^*G_A^{(r)*}\hat{\mathscr{B}}_{\nu T r}, \tag{3.13}$$

эквивалентную исходной и содержащую ровно ρ_r уравнений. Решение системы (3.13) однозначно и не содержит составляющих решения соответствующей однородной системы.

В заключение заметим, что базис подпространств $T_A^{(r)}$ может быть легко найден как ρ_r независимых решений однородной алгебраической системы

$$\langle \hat{\mathscr{Y}}, \hat{\mathscr{X}}_{jr*} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, k_r},$$

где $\hat{\mathscr{Y}}$ — искомый вектор, $\hat{\mathscr{X}}_{jr*}$ — базис ядра $\hat{N}_{A*}^{(r)}$, который был определен выше.

Если вернуться к операторной записи $\mathbf{S}_{\nu r} = \hat{\hat{x}}_{m_r}\Gamma_{\nu r}\partial$, то оператор $\mathbf{S}_\nu$, фигурирующий в уравнениях (2.1), может быть представлен суммой: $\mathbf{S}_\nu = \mathbf{S}_{\nu 1} + \ldots + \mathbf{S}_{\nu g_\nu}$.

Перейдем к выяснению условий разрешимости однородных уравнений (3.3) и (3.4). С этой целью рассмотрим структуру матрицы $\mathscr{G}_A^{(r)}$

в уравнениях (3.3) и определим условия, при которых она имеет нулевые характеристические числа. Обозначим через $\alpha_\nu = \text{colon}\,\|\alpha_{\nu 1}, \ldots \ldots, \alpha_{\nu m_\nu}\|$, $\alpha_{\nu j} \in \mathrm{P}$, вектор размерности m_ν. Элемент $v = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\alpha_\nu$ из векторного подпространства $V_{\otimes\nu}$ называется собственным элементом оператора $\mathbf{U}$, если он удовлетворяет условию

$$\mathbf{U}v = \lambda_\nu v, \quad \lambda_\nu \in \mathrm{P}. \tag{3.14}$$

Используя матрицу $\mathcal{F}_\nu$ представления оператора $\mathbf{U}$ в подпространстве $V_{\otimes\nu}$, определяемую соотношением $\mathbf{U}\hat{\hat{x}}_{m_\nu} = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\mathcal{F}_\nu$, для координат собственного вектора α_ν из (3.14) получаем уравнения

$$\mathcal{F}_\nu\alpha_\nu = \lambda\alpha_\nu. \tag{3.15}$$

Таким образом, число собственных векторов оператора $\mathbf{U}$ в пространстве $V_{\otimes\nu}$ определяется структурой матрицы представления $\mathcal{F}_\nu$.

Теорема 3.2. *Для выполнения одного из следующих эквивалентных условий: 1) уравнение* $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_r] = 0$ *имеет нетривиальное решение из пространства* $\mathfrak{B}\,(V_{\otimes\nu})$; *2) матрица коэффициентов* $\mathcal{G}_A^{(r)}$ *в уравнении* $\mathcal{G}_A^{(r)}\hat{\Gamma}_{\nu r} = 0$ *имеет нулевые характеристические числа необходимо и достаточно выполнения условия: матрица представления* $\mathcal{F}_\nu$ *имеет хотя бы одно собственное значение, совпадающее с собственным значением матрицы* $\mathcal{A}$.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Матрица* $\mathcal{F}_\nu$ *представления оператора* $\mathbf{U}$ *в подпространстве* $V_{\otimes\nu}$ *(рассматриваемом над полем* K*) имеет простую структуру и ее собственные значения* λ *определяются как* $\lambda = \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *характеристические числа матрицы (среди них могут быть и кратные),* $m_1, \ldots, m_n$ — *целые положительные числа, для которых выполняется соотношение* $m_1 + \ldots + m_n = \nu$ *(*ν — *степень многочленов из подпространства* $V_{\otimes\nu}$*).*

Доказательство. Пусть S — матрица, приводящая матрицу $\mathcal{A}$ к диагональному виду. Тогда, произведя в операторе $\mathbf{U}$ замену переменных $x = Sy$, приведем его к виду

$$\mathbf{U}\,(y) = \lambda_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_n y_n \frac{\partial}{\partial y_n}. \tag{3.16}$$

Переход к переменным y индуцирует преобразование базиса $\hat{\hat{x}}_{m_\nu}$ в новый базис $\hat{\hat{y}}_{m_\nu}$:

$$\hat{\hat{x}}_{m_\nu} = \hat{\hat{y}}_{m_\nu} S_\otimes, \quad S_\otimes^{(*)} \in \mathfrak{R}^{(m_\nu, m_\nu)}.$$

Установим структуру матрицы $\mathcal{F}_\nu$ в новых переменных. Подстановка $x = Sy$ и $\hat{\hat{x}}_{m_\nu} = \hat{\hat{y}}_{m_\nu} S_\otimes$ в уравнение (3.14) приводит эти уравнения к виду

$$\mathbf{U}\,(y)\,\hat{\hat{y}}_{m_\nu} S_\otimes \alpha_\nu = \lambda_\nu \hat{\hat{y}}_{m_\nu} S_\otimes \alpha_\nu.$$

Обозначая $S_{\otimes}\alpha_{\nu} = \eta_{\nu}$, находим $\hat{\hat{y}}_{m_\nu}\mathcal{F}_{\nu\otimes}\eta = \lambda_\nu \hat{\hat{y}}_{m_\nu}\eta_\nu$, или, приравнивая коэффициент при векторе $\hat{\hat{y}}_{m_\nu}$,

$$\mathcal{F}_{\nu\otimes}\eta_\nu = \lambda_\nu\eta_\nu. \tag{3.17}$$

Здесь $\mathcal{F}_{\nu\otimes}$ — диагональная матрица размерности $m_\nu \times m_\nu$, так как оператор $\mathrm{U}(y)$ переводит моном $y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}$ в моном $(\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n)\, y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}$. Если подставить в (3.17) значение $\eta_\nu = S_{\otimes}\alpha_\nu$, то получим $\mathcal{F}_{\otimes\nu}S_{\otimes}\alpha_\nu = \lambda_\nu S_{\otimes}\alpha_\nu$, или, умножая это равенство слева на матрицу $S_{\otimes}^{-1}$, обратную к $S_{\otimes}$,

$$S_{\otimes}^{-1}\mathcal{F}_{\otimes\nu}\, S_{\otimes}\alpha_\nu = \lambda_\nu\alpha_\nu. \tag{3.18}$$

Сопоставляя уравнения (3.15) и (3.18), находим, что матрицы $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{F}_{\otimes\nu}$ подобны: $\mathcal{F}_\nu = S_{\otimes}^{-1}\mathcal{F}_{\otimes\nu}S_{\otimes}$. Из доказанного подобия матриц $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{F}_{\otimes\nu}$ следует, что $\mathcal{F}_\nu$ — матрица простой структуры с характеристическими числами, выражаемыми формулами (3.15).

Чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения леммы, положим в операторе $\mathrm{U}(y)$ $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$, тогда $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n = m_1 + \ldots + m_n = \nu$. ■

Доказательство теоремы 3.2. Эквивалентность условий 1 и 2 теоремы была показана выше при доказательстве леммы 3.1. Из структуры матрицы $\mathcal{G}_A^{(r)} = \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_r} \otimes \mathcal{A}^T$ известно, что ее характеристические числа равны всевозможным разностям $\mu_i - \lambda_j$, $i = \overline{1, m_r}$, $j = \overline{1, n}$, где μ_i — характеристические числа матрицы $\mathcal{F}_r$, удовлетворяющие соотношениям (3.15), λ_i — характеристические числа матрицы $\mathcal{A}$. Следовательно, для существования нулевых корней $\mu_i - \lambda_j = 0$ матрицы $\mathcal{G}_A^{(r)}$ необходимо и достаточно выполнения условия $\det \mathcal{G}_A^{(r)} = 0$, которое приводит к соотношениям

$$\lambda_1 m_{1j} + \cdots + \lambda_n m_{nj} = \lambda_j, \quad m_{1j} + \cdots + m_{nj} = r. \quad ■$$

Следствие 3.1. Если $v_1, \ldots, v_k \in V_{\otimes\nu}$ — собственные векторы оператора U с собственными значениями λ_j, где λ_j — характеристические числа кратности r_j матрицы $\mathcal{A}$, то можно указать $l = kr_j$ линейно независимых операторов $W_1, \ldots, W_l$, которые коммутируют с оператором U.

Доказательство. Будем считать, что оператор U приведен к простейшему виду $\mathrm{U}(y)$ (см. формулу (3.16)). Не теряя общности рассуждений положим $j = 1$, тогда $\mathrm{U}(y)$ представим таким образом:

$$\mathrm{U}(y) = \lambda_1\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{r_1}\frac{\partial}{\partial y_{r_1}}\right) + \lambda_2 y_{r_1+1}\frac{\partial}{\partial y_{r_1+1}} + \cdots$$
$$\cdots + \lambda_n y_n\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Собственные функции $v_j(x)$, $j = \overline{1, k}$, оператора $\mathrm{U}(y)$ перейдут в функции $w_j(y) = v_j(Sy)$ (напомним, что $x = Sy$). Определим операторы $\mathbf{W}_{\chi j}$ соотношениями

$$\mathbf{W}_{\chi j} = w_j(y)\frac{\partial}{\partial y_\chi}, \quad j=\overline{1,\ k}, \quad \chi=\overline{1,\ r_1}. \tag{3.19}$$

Вычислим скобку Пуассона от операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}_{\chi j}$:

$$[\mathbf{U},\ \mathbf{W}_{\chi j}] = \mathbf{U}(y)\,\mathbf{W}_{\chi j} - \mathbf{W}_{\chi j}\mathbf{U}(y) = \mathbf{U}(y)\,w_j(y)\frac{\partial}{\partial y_\chi} -$$

$$- \lambda_1 \mathbf{W}_{\chi j} y_\chi \frac{\partial}{\partial y_\chi} = [\lambda_1 w(y) - \lambda_1 w_j(y)]\frac{\partial}{\partial y_\chi} \equiv 0.$$

Итак, доказано, что существует $l = kr_j$ коммутирующих с $\mathbf{U}$ операторов. ■

§ 4. СТРУКТУРА ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДЕКОМПОЗИЦИИ И РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ

Интегрирование централизованной системы (см. § 3)

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + \varepsilon b_{1j}(x) + \cdots + \varepsilon^\nu b_{\nu j}(x) + \ldots, \quad j=\overline{1,\ n}, \tag{4.1}$$

как будет показано ниже, проще, чем интегрирование исходной возмущенной системы (1.1). Докажем несколько важных теорем, упрощающих интегрирование системы (4.1). Первый результат связан с коммутативностью операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{N}_i$, входящих в ассоциированный с системой (4.1) оператор:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \varepsilon\mathbf{N}_2 + \cdots$$

Чтобы подчеркнуть зависимость этих операторов от новых переменных при переходе к последним, например z, будем их записывать в виде $\mathbf{U}(z)$, $\mathbf{N}(z)$.

Теорема 4.1. *Пусть матрица $\mathcal{A}$ системы нулевого приближения простой структуры имеет $p = 2r$ комплексных собственных чисел $\lambda_j = \rho_j \pm i\omega_j$, $j=\overline{1,\ r}$, и $n - p$ действительных собственных чисел $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ (среди корней могут быть кратные). Тогда, разбив вектор x на группы переменных*

$$x = \operatorname{colon}\|\underbrace{\underbrace{x_{11},\ x_{12}}, \ \underbrace{x_{21},\ x_{22}}, \ldots, \underbrace{x_{r1},\ x_{r2}}}_{r}, \ \underbrace{x_{p+1}, \ldots, x_p}_{n-p}\|,$$

решение централизованной системы (4.1) при начальных условиях $x(t_0) = x_0$ можно представить в виде векторных равенств

$$\begin{Vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Vmatrix} = \exp\rho_1(t-t_0)\begin{Vmatrix} \cos\omega_1(t-t_0), & \sin\omega_1(t-t_0) \\ -\sin\omega_1(t-t_0), & \cos\omega_1(t-t_0) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{Vmatrix}; \tag{4.2}$$

. . . .

$$\begin{Vmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{Vmatrix} = \exp\rho_r(t-t_0)\begin{Vmatrix} \cos\omega_r(t-t_0), & \sin\omega_r(t-t_0) \\ -\sin\omega_r(t-t_0), & \cos\omega_r(t-t_0) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \eta_{r1} \\ \eta_{r2} \end{Vmatrix}; \tag{4.3}$$

$$x_{p+1} = \exp(\lambda_{p+1}(t-t_0))\,\eta_{p+1}, \ldots, \ x_n = \exp(\lambda_n(t-t_0))\,\eta_n, \tag{4.4}$$

где $\eta_{11}(\tau)\,\eta_{21}(\tau), \ldots, \eta_{r1}(\tau), \eta_{r2}(\tau), \eta_{p+1}(\tau), \ldots, \eta_n(\tau)$ — функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Компоненты $\eta_{11}(\tau), \ldots, \eta_{r1}(\tau), \eta_{p+1}(\tau), \ldots$ $\ldots, \eta_n(\tau)$ определяются рядами Ли

$$\left\| \begin{matrix} \eta_{11}(\tau) \\ \eta_{12}(\tau) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{011} \\ \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{012} \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \eta_{r1}(\tau) \\ \eta_{r2}(\tau) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{0r1} \\ \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{0r2} \end{matrix} \right\|,$$

$$\eta_{p+1} = \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{0p+1}, \ldots, \eta_n = \exp(\tau \mathbf{N}(x_0))\, x_{0n},$$

являющимися решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \eta_j}{d\tau} = b_{1j}(\eta) + \varepsilon b_{rj}(\eta) + \cdots + \varepsilon^{\nu-1} b_{\nu j}(\eta), \quad \eta_j(0) = x_0,$$

в области $G \in R^n$, $x_0 \in G$, *полученной из исходной системы уравнений* (4.1) *опусканием линейной составляющей в правых частях и введением медленного времени* τ.

Доказательство. Рассмотрим систему нулевого приближения

$$\frac{\partial x_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \tag{4.5}$$

получаемую из централизованной системы при $\varepsilon = 0$. Решение этой системы при начальных условиях $x(t_0) = z$ можно представить рядом Ли (см. § 3, гл. 1)

$$x = \exp[(t - t_0)\,\mathbf{U}(z)]\, z, \quad z = \operatorname{colon}\|z_1, \ldots, z_n\|. \tag{4.6}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае линейной системы с постоянными коэффициентами ряд Ли (4.6) эквивалентен матричному ряду

$$x = \exp[(t - t_0)\,\mathbf{U}(z)]\, z = \exp[(t - t_0)\,\mathcal{A}]\, z. \tag{4.7}$$

Считая в решениях (4.7) z новыми переменными, произведем в исходной системе (4.1) замену переменных

$$x = \exp[(t - t_0)\,\mathbf{U}(z)]\, z, \quad t = t', \tag{4.8}$$

или

$$z = \exp[-(t - t_0)\,\mathbf{U}(x)]\, x, \quad t' = t. \tag{4.9}$$

Чтобы выписать систему (4.1) в новых переменных z, найдем выражения в этих переменных для ассоциированного с ней оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(x) + \varepsilon \mathbf{N}(x). \tag{4.10}$$

В результате замены (4.9) оператор (4.10) перейдет в оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(x) + \varepsilon \mathbf{N}(x)\right] \exp[-(t - t_0)\,\mathbf{U}(x)\, x_i]\, \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Для коэффициентов выписанного оператора справедливы соотношения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(x) + \varepsilon \mathbf{N}(x)\right] \exp[-(t - t_0)\,\mathbf{U}(x)]\, x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \exp[-(t - t_0)\,\mathbf{U}(x)]\, x + \mathbf{U}(x) \exp[-(t - t_0)\,\mathbf{U}(x)]\, x +$$

$$+ \varepsilon \mathbf{N}(x) \exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(x)]\, x = -\mathbf{U}(x)\exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(x)]\, x + \\ + \mathbf{U}(x)\exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(x)]\, x + \varepsilon \mathbf{N}(x)\exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(x)]\, x.$$

Согласно результатам § 3 гл. 1 для точечного преобразования (4.8) имеют место тождества

$$\varepsilon \mathbf{N}(x)\exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(x)]\, x = \exp[(t-t_0)\mathbf{U}(z)\mathbf{N}(z)] \times \\ \times \exp[-(t-t_0)\mathbf{U}(z)]\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{U}(z)\ldots[\mathbf{N}(z),\ \mathbf{U}(z)]\ldots\mathbf{U}(z)]}{n!} \equiv \mathbf{N}(z),$$

так как в силу коммутативности операторов $\mathbf{N}(z)$, $\mathbf{U}(z)$ все скобки Пуассона тождественно равны нулю. Следовательно, в переменных z оператор (4.10) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{N}(z),$$

а исходная система (4.1) переходит в систему уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = \varepsilon b_{1j}(z) + \varepsilon^2 b_{2j}(z) + \cdots + \varepsilon^\nu b_{\nu j}(z) + \cdots \tag{4.11}$$

Правые части системы (4.11) пропорциональны параметру ε, и поэтому можно ввести медленное время $\tau = \varepsilon(t - t_0)$:

$$\frac{dz_j}{d\tau} = b_{1j}(z) + \varepsilon b_{2j}(z) + \cdots + \varepsilon^{\nu-1} b_{\nu j}(z) + \ldots \tag{4.12}$$

Решение системы (4.12) вследствие наличия медленного времени, естественно, проще решения исходной системы (4.1). Запишем решение системы (4.12) при начальных условиях $z(0) = x_0$, $x_0 = \operatorname{colon}\|x_{01}, \ldots, x_{0n}\|$ в виде ряда Ли

$$z = \exp[\tau \mathbf{N}(x_0)]\, x_0. \tag{4.13}$$

Чтобы получить решение исходной системы (4.1) через решение систем (4.5) и (4.11), необходимо подставить значение z, выражаемое формулой (4.13), в выражения (4.6). На основании свойства точечного преобразования (3.28) гл. 1 имеем

$$x = \exp[\tau \mathbf{N}(x_0)]\exp[(t-t_0)\mathbf{U}(x_0)]\, x_0.$$

С помощью формул (4.7) получаем

$$x = \exp[\tau \mathbf{N}(x_0)]\exp[\mathcal{A}(t-t_0)]\, x_0 = \exp[\mathcal{A}(t-t_0)]\exp[\tau \mathbf{N}(x_0)]\, x_0. \tag{4.14}$$

Выписанным формулам для решения централизованной системы можно придать специальный вид. Так как по предположению $\mathcal{A}$ — матрица простой структуры, то над полем действительных чисел ее можно привести к квазидиагональному виду

$$S^{-1}\mathcal{A}S = \operatorname{diag}\|\mathcal{A}(\lambda_1), \ldots, \mathcal{A}(\lambda_p),\ \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\|, \tag{4.15}$$

где

$$\mathcal{A}(\lambda_i) = \begin{Vmatrix} \rho_j & \omega_j \\ -\omega_j & \rho_j \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Не теряя общности рассуждений можно считать, что в уравнениях (4.1) матрица коэффициентов $\mathcal{A}$ уже преобразована к квазидиагональному виду (4.15). Но известно, что экспоненту от квазидиагональной матрицы можно представить в виде

$$\exp[S^{-1}\mathcal{A}S(t-t_0)] = \operatorname{diag}\|\exp[(t-t_0)\mathcal{A}(\lambda_1)], \ldots$$
$$\ldots, \exp[(t-t_0)\mathcal{A}(\lambda_p)], \ldots, \exp[\lambda_{p+1}(t-t_0)], \ldots, \exp[\lambda_n(t-t_0)]\|; \tag{4.16}$$

тогда для блоков на квазидиагонали соответственно получаем

$$\exp[(t-t_0)\mathcal{A}(\lambda_j)] = e^{\rho_j(t-t_0)}\begin{Vmatrix} \cos\omega_j(t-t_0), & \sin\omega_j(t-t_0) \\ -\sin\omega_j(t-t_0), & \cos\omega_j(t-t_0) \end{Vmatrix}.$$

Из формул (4.14), (4.16) следуют доказываемые соотношения (4.2) — (4.6). ■

Следствие 4.1. Формулы решений (4.2), (4.3) можно представить в виде

$$\begin{Vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Vmatrix} = \exp\rho_1(t-t_0)\begin{Vmatrix} A_1(\tau)\sin(\omega_1(t-t_0)+\varphi_1(\tau)) \\ A_1(\tau)\cos(\omega_1(t-t_0)+\varphi_1(\tau)) \end{Vmatrix};$$

. . . .

$$\begin{Vmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{Vmatrix} = \exp\rho_r(t-t_0)\begin{Vmatrix} A_r(\tau)\sin(\omega_r(t-t_0)+\varphi_r(\tau)) \\ A_r(\tau)\cos(\omega_r(t-t_0)+\varphi_r(\tau)) \end{Vmatrix}.$$

Медленные амплитуды $A_j(\tau)$ и фазы $\varphi_j(\tau)$ определяются формулами

$$A_j = \sqrt{\eta_{j1}^2(\tau)+\eta_{j2}^2(\tau)}, \quad \varphi_j(\tau) = \operatorname{arctg}\frac{\eta_{j2}(\tau)}{\eta_{j1}(\tau)}.$$

Перейдем к выяснению условий разделения переменных на быстрые и медленные. В предыдущем параграфе показано, что собственный вектор v $(v \in V_{\otimes\nu})$ удовлетворяет условию $\mathrm{U}v = \lambda v$, $\lambda \in \mathrm{P}$, $v = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\alpha^{(\nu)}$. Вектор коэффициентов $\alpha^{(\nu)} = \operatorname{colon}\|\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu m\nu}\|$ находится из матричного уравнения

$$\mathcal{F}_\nu\alpha^{(\nu)} = \lambda\alpha^{(\nu)}. \tag{4.17}$$

Рассмотрим выписанные соотношения при $\nu = 1$, т. е. $\mathcal{A}\alpha^{(1)} = \lambda\alpha$. По предположению $\mathcal{A}$ — матрица простой структуры и, следовательно, имеет n собственных векторов $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ и им в пространстве $V_{\otimes 1}$ соответствуют n собственных векторов

$$\varphi_1 = \hat{\hat{x}}_{m_1}\alpha^{(1)}, \ldots, \varphi_n = \hat{\hat{x}}_{m_n}\alpha^{(n)}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим элемент из подпространства $V_{\otimes\nu}$

$$v = \varphi_1^{a_1}\ldots\varphi_n^{a_n}, \tag{4.19}$$

где $a = \|a_1, \ldots, a_n\|$ — вектор, компонентами которого являются целые неотрицательные числа.

Если в выражение (4.19) подставить значения $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из (4.18), то получим эквивалентную запись элемента v через базис $\mathfrak{T}(V_{\otimes\nu}): v = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\alpha^{(\nu)}$, $\nu = a_1 + \ldots + a_n$.

Определяя произведение двух элементов $v = \varphi_1^{a_1} \ldots \varphi_n^{a_n}$ и $w = \varphi_1^{b_1} \ldots \varphi_n^{b_n}$ на множестве $\Phi\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ естественным образом:

$$vw = \varphi_1^{a_1} \ldots \varphi_n^{a_n}\varphi_1^{b_1} \ldots \varphi_n^{b_n} = \varphi_1^{a_1+b_1} \ldots \varphi_n^{a_n+b_n},$$

можно ввести структуру свободной коммутативной полугруппы [1], которую будем также обозначать буквой Φ.

Отображение

$$f: \varphi_1^{a_1} \ldots \varphi_n^{a_n} \to a = \|a_1, \ldots, a_n\|, \tag{4.20}$$

ставящее в соответствие элементу $\varphi_1^{a_1} \ldots \varphi_n^{a_n}$ вектор $\|a_1, \ldots, a_n\|$, определяет изоморфизм полугруппы Φ в свободную коммутативную группу всех последовательностей $\|a_1, \ldots, a_n\|$ с целыми неотрицательными элементами. Единицей этой полугруппы является нулевой вектор $\|0 \ldots 0\|$. Будем обозначать такую полугруппу $\mathfrak{P}(n, \Phi)$.

Элемент v (4.19) является собственным вектором оператора $\mathbf{U}$ (в чем можно убедиться непосредственной проверкой) с собственным числом λ:

$$\mathrm{U}v \equiv \lambda v, \quad \lambda = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n, \quad a_1 + \cdots + a_n = \nu. \tag{4.21}$$

Тождество (4.21) может быть представлено в виде эквивалентного матричного соотношения (см. § 1)

$$\mathcal{F}_\nu\alpha^{(\nu)} = \lambda\alpha^{(\nu)}, \quad \lambda = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n, \quad a_1 + \cdots + a_n = \nu.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_\infty$ представление оператора $\mathbf{U}$ в бесконечномерном пространстве $\mathfrak{T}(V)$. Легко показать, что матрица $\mathcal{F}_\infty$ имеет квазидиагональную структуру.

Нахождение векторов из $\mathfrak{T}(V)$ с собственным числом λ сводится к решению бесконечной последовательности алгебраических уравнений

$$\mathcal{F}_1\alpha^{(1)} = \lambda\alpha^{(1)}, \quad \mathcal{F}_2\alpha^{(2)} = \lambda\alpha^{(2)}, \ \ldots, \ \mathcal{F}_\nu\alpha^{(\nu)} = \lambda\alpha^{(\nu)}.$$

В первую очередь будем рассматривать случаи, когда $\lambda \equiv 0$ или $\lambda = \lambda_j$, где λ_j — характеристическое число матрицы $\mathcal{A}$. Все собственные векторы v с нулевым собственным числом — будем называть их интегралами — являются решениями уравнения $\mathbf{U}f = 0$. Совокупность интегралов в $\mathfrak{T}(V)$ определяется всеми возможными решениями системы уравнений

$$\mathcal{F}_1\eta^{(1)} = 0, \quad \mathcal{F}_2\eta^{(2)} = 0, \ldots, \ \mathcal{F}_\nu\eta_\nu^{(\nu)} = 0, \ldots \tag{4.22}$$

Все собственные векторы v с собственным числом λ_j определяются решениями системы уравнений

$$\mathcal{F}_1\xi^{(1)} = \lambda_j\xi^{(1)}, \quad \mathcal{F}_2\xi^{(2)} = \lambda_j\xi^{(2)}, \ldots, \ \mathcal{F}_\nu\xi^{(\nu)} = \lambda_j\xi^{(\nu)}, \ldots \tag{4.23}$$

---

[1] Все используемые сведения по полугруппам можно найти в работе [64].

Важность выделения собственных векторов с собственными числами λ_j зависит от следующих факторов. Операторы в $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V))$, перестановочные с $\mathbf{U}$, определяются соотношениями (см. § 2)

$$W(V_{\otimes\nu}) = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\Gamma_\nu\partial, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{4.24}$$

где матрица Γ_ν размерности $m_\nu \times n$ является решением системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\mathcal{F}_\nu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\mathcal{A} = 0, \tag{4.25}$$

или эквивалентных им матричных уравнений

$$\mathcal{G}_A^{(\nu)}\hat{\Gamma}_\nu = 0. \tag{4.26}$$

В теореме 3.2 показано, что столбцы матрицы Γ_ν в решениях уравнений (4.25) или (4.26) представляют собой всевозможные собственные векторы матрицы представления $\mathcal{F}_\nu$:

$$\mathcal{F}_\nu\eta = \lambda_j\eta, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.27}$$

Следовательно, если ν-е уравнение (4.23) имеет k решений $\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_k^{(\nu)}$, то собственные векторы $v_i = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\xi_i^{(\nu)}$, $i = \overline{1, k}$, являются коэффициентами оператора (4.24).

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Лемма 4.1. Пусть $\hat{\Gamma}_\nu$ — *решение уравнения* $\mathcal{G}_A^{(\nu)}\hat{X} = 0$, *соответствующее нулевому характеристическому числу матрицы* $\mathcal{G}_A^{(\nu)}$, *определяемому соотношением* $\lambda_j = a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n$; *тогда* коэффициенты $\omega_{\nu 1}, \ldots, \omega_{\nu n}$ *оператора*

$$\mathbf{W}(V_{\otimes\nu}) = \omega_{\nu 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \omega_{\nu n}\frac{\partial}{\partial x_n} \equiv \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\Gamma_\nu\partial$$

являются собственными векторами оператора $\mathbf{U}$ *с собственным числом* $\lambda_j : \mathbf{U}w_{\nu 1} = \lambda_j w_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{U}w_{\nu n} = \lambda_j w_{\nu n}$.

Доказательство. Действуя на вектор $\|w_{\nu 1}, \ldots, w_{\nu n}\|$ оператором $\mathbf{U}$ и принимая во внимание соотношения (4.27), получаем

$$\|\mathbf{U}w_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{U}w_{\nu n}\| = \mathbf{U}\hat{\hat{x}}_{m_\nu}\Gamma_\nu = \hat{\hat{x}}_{m_\nu}\mathcal{F}_\nu\Gamma_\nu = \lambda_j\hat{\hat{x}}_{m_\nu}\Gamma_\nu =$$
$$= \lambda_j\|\omega_{\nu 1}, \ldots, \omega_{\nu n}\|. \quad \blacksquare$$

Вернемся к системам уравнений (4.22) и (4.23). Как показано в теореме 3.2, решение однородного уравнения $\mathcal{F}_\nu\eta^{(\nu)} = 0$ существует тогда и только тогда, когда для характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\mathcal{A}$ выполняется конечное число r_ν тождеств (напомним, что среди характеристических чисел могут быть и кратные)

$$\begin{aligned} m_{11}^{(\nu)}\lambda_1 + \cdots + m_{1n}^{(\nu)}\lambda_n &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ m_{r_\nu 1}^{(\nu)}\lambda_1 + \cdots + m_{r_\nu n}^{(\nu)}\lambda_n &= 0; \end{aligned} \tag{4.28}$$

здесь вектор $m_i^{(\nu)} = \| m_{i1}^{(\nu)}, \ldots, m_{in}^{(\nu)} \|$ составлен из целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих соотношению $m_{i1}^{(\nu)} + \cdots + m_{in}^{(\nu)} = \nu$, $i = \overline{1, r_\nu}$.

Аналогично, для существования решений уравнений $\mathcal{F}_\nu \xi_1^{(\nu)} = \lambda_1 \xi_1^{(\nu)}, \ldots, \mathcal{F}_\nu \xi_n^{(\nu)} = \lambda_1 \xi_n^{(\nu)}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось конечное число тождеств

$$\begin{gathered} \lambda_1 = g_{11}^{(1\nu)} \lambda_1 + \cdots + g_{1n}^{(1\nu)} \lambda_n; \ldots \lambda_n = g_{11}^{(n\nu)} \lambda_1 + \cdots + g_{1n}^{(n\nu)} \lambda_n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 = g_{\mu_\nu 1}^{(1\nu)} \lambda_1 + \cdots + g_{\mu_\nu n}^{(1\nu)} \lambda_n; \ldots \lambda_n = g_{\mu_\nu 1}^{(n\nu)} \lambda_1 + \cdots + g_{\mu_\nu n}^{(n\nu)} \lambda_n, \end{gathered} \tag{4.29}$$

где $g_{j1}^{(1\nu)} + \cdots + g_{jn}^{(1\nu)} = \nu, \ldots, g_{j1}^{(\nu n)} + \cdots + g_{jn}^{(n\nu)} = \nu$; коэффициенты $g_{ij''}^{(j'\nu)}$, $i = \overline{1, \mu_\nu}$, $j'', j' = \overline{1, n}$, являются целыми неотрицательными числами.

Тождества вида (4.28) будем называть резонансными соотношениями первого рода, а вида (4.29) — резонансными соотношениями второго рода.

Совокупность векторов $\{m_i^{(\nu)} = \| m_{i1}^{(\nu)}, \ldots, m_{in}^{(\nu)} \|\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, r_\nu}$, удовлетворяющих системе (4.28), образует полугруппу по сложению с нулевым элементом $\| 0, \ldots, 0 \|$. Будем обозначать эту полугруппу $\mathfrak{M}(0)$. Если векторы $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}(0)$, то вектор $m_1 + m_2 \in \mathfrak{M}(0)$ также и является решением уравнений (4.28). $\mathfrak{M}(0)$ — подполугруппа $\mathfrak{P}(n, \mathrm{P})$, т. е. $\mathfrak{M}(0) \subset \mathfrak{P}(n, \mathrm{P})$.

Рассмотрим множество целочисленных векторов из тождеств (4.29), зафиксировав индекс j (т. е. рассматривая все тождества для собственного числа λ_j):

$$(\lambda_j) = \{ g^{(j\nu)} = \| g_{j1}^{(j\nu)}, \ldots, g_{jn}^{(j\nu)} \| \}, \quad i = \overline{1, \mu_{\nu_j}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{4.30}$$

Складывая векторы этого множества произвольным образом, получаем свободную полугруппу, которую будем обозначать $\mathfrak{M}(\lambda_j)$. В общем случае число таких полугрупп равно числу различных характеристических чисел λ_j. Полугруппа $\mathfrak{M}(\lambda_j) \subset \mathfrak{P}(n, \mathrm{P})$ и является подполугруппой $\mathfrak{P}(n, \mathrm{P})$. Полугруппу $\mathfrak{M}(0)$ можно рассматривать как соответствующую нулевому корню матрицы $\mathcal{F}_\infty$.

Определение 4.1. Полугруппа $\mathfrak{M}(0)$ называется конечно-порожденной множеством $\mathfrak{U}\{a_i = \| a_{i1}, \ldots, a_{in} \|\}$, $i = \overline{1, k}$, целочисленных неотрицательных векторов, если произвольный элемент $b = \| b_1, \ldots, b_n \| \in \mathfrak{M}(0)$ может быть получен из элементов множества $\mathfrak{U}$ конечным числом сложений: $b = n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые положительные числа.

Определение 4.2. Множество $\mathfrak{U}$ называется минимальным (неприводимым), если никакое его собственное подмножество не является порождающим для $\mathfrak{M}(0)$.

Всюду в дальнейшем под порождающим множеством $\mathfrak{U}$ будем подразумевать минимальное множество.

Число элементов k множества $\mathfrak{U}$ будем называть размерностью полугруппы $\mathfrak{M}(0)$ и обозначать $k = \dim \mathfrak{M}(0)$. Для того чтобы подчеркнуть, что полугруппа $\mathfrak{M}(0)$ является конечно-порожденной, будем выражать ее явную зависимость от $\mathfrak{U}$ в виде $\mathfrak{M}(0, \mathfrak{U})$, или $\mathfrak{M}(0 \{a_1, \ldots, a_k\})$.

Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{M}(\lambda_j)$. Ее порождающее множество $\mathfrak{D}(\lambda_j)$ задается равенствами (4.30). Будем говорить, что два элемента $g_1 = \| g_{11}, \ldots, g_{1n} \|$ и $g_2 = \| g_{21}, \ldots, g_{2n} \|$, $g_1, g_2 \in \mathfrak{D}(\lambda_j)$, принадлежат одному классу, если их разность $g_1 - g_2$ знакоопределена (т. е. все компоненты либо неположительны, либо неотрицательны) и $| g_1 - g_2 | \in \mathfrak{M}(0)$. В этом случае будем писать $g_1 \equiv g_2 \pmod{\mathfrak{M}(0)}$. Последнее выражение будет означать справедливость одного из тождеств

$$g_1 \equiv g_2 + a, \quad g_2 \equiv g_1 + b, \quad a, b \in \mathfrak{M}(0).$$

Обозначим различные классы множеств $\mathfrak{D}(\lambda_j)$ через $\mathfrak{D}_1(\lambda_j)$, $\mathfrak{D}_2(\lambda_j)$, ... Два различных класса $\mathfrak{D}_{i'}(\lambda)$ и $\mathfrak{D}_{i''}(\lambda_j)$ не могут иметь общих элементов, т. е. $\mathfrak{D}_{i'}(\lambda_i) \cap \mathfrak{D}_{i''}(\lambda_{i''}) = \varnothing$. Действительно, если бы существовал общий элемент v в пересечении этих классов, то каждый класс можно было бы получить из v: $\mathfrak{D}_{i'}(\lambda_j) = v + \mathfrak{M}(0)$, $\mathfrak{D}_{i''}(\lambda_j) = v + \mathfrak{M}(0)$, т. е. два класса $\mathfrak{D}_{i'}(\lambda_j)$ и $\mathfrak{D}_{i''}(\lambda_j)$ совпали бы. Из сказанного следует, что $\mathfrak{D}(\lambda_j) = \mathfrak{D}_1(\lambda_j) \cup \mathfrak{D}_2(\lambda_j) \cup + \ldots$

Определение 4.3. Полугруппа $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ называется конечно-порожденной, если ее порождающее множество равно объединению конечного числа классов $\mathfrak{D}\{\mathfrak{M}_1(\lambda_j), \ldots, \mathfrak{M}_r(\lambda_j)\}$.

Число классов r в порождающем множестве $\mathfrak{D}(\lambda_j)$ конечно-порожденной полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ назовем размерностью полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$. Обозначая $r = \dim \mathfrak{M}(\lambda_j)$, каждый класс $\mathfrak{D}_i(\lambda_j)$ можно охарактеризовать некоторым элементом l_{ij} — представителем класса. Элемент $l_{ij} \in \mathfrak{D}(\lambda_j)$ будем считать элементарным, т. е. непредставимым в виде суммы $l'_{ij} + a$, где l'_{ji} удовлетворяет тождествам (4.29), а $a \in \mathfrak{M}(0)$.

Так как каждая компонента вектора l_{ji} — неотрицательное целое число и, следовательно, может быть представлена в виде суммы целых положительных чисел конечным числом способов, то составляющая $\mathfrak{M}(0)$ в любом векторе из $\mathfrak{M}_i(\lambda_j)$ может быть выделена в результате конечного числа шагов. Таким образом, задача нахождения элементарных элементов может быть проведена за конечное число шагов.

Пусть полугруппа $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ является конечно-порожденной и имеет размерность r, т. е. $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{D}_1(\lambda_j), \ldots, \mathfrak{D}_r(\lambda_j)\}$, и $l_{j1}, \ldots, l_{jr}$ — элементарные элементы полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$, представляющие различные классы $\mathfrak{D}$. Чтобы подчеркнуть этот факт, будем указывать явную зависимость полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_i)$ от $\mathfrak{D}$ и писать $\mathfrak{M}(\lambda_j, \mathfrak{D})$, или $\mathfrak{M}\{\lambda_j, \mathfrak{D}_1(\lambda_j), \ldots, \mathfrak{D}_r(\lambda_j)\}$.

Для элементарных элементов $l_{j1}, \ldots, l_{jr}, \ldots$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Элементарные элементы $l_j, l_{j1}, l_{j2}, \ldots,$ полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ независимы между собой, т. е. тождество*

$$l_j \equiv \eta_1 l_{j1} + \eta_2 l_{j2} + \ldots, \tag{4.31}$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — *целые положительные числа, невыполнимо.*

Доказательство. Предположим, что тождество (4.31) выполняется. Тогда, транспонируя векторы в его правой и левой частях и умножая их на вектор $\lambda = \| \vec{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n \|$, получаем

$$\vec{\lambda} \cdot l_j^T \equiv \eta_1 \vec{\lambda} \cdot l_{j1}^T + \eta_2 \vec{\lambda} \cdot l_{j2}^T + \ldots,$$

или

$$\lambda_j \equiv \lambda_j (n_1 + n_2 + \cdots), \tag{4.32}$$

так как $\vec{\lambda} \cdot l_j^T \equiv \lambda_j$, $\vec{\lambda} \cdot l_{j1}^T \equiv \lambda_j$, $\vec{\lambda} \cdot l_{j2} \equiv \lambda_j, \ldots$ Тождество (4.32) может иметь место лишь в том случае, когда элемент l_j совпадает с одним из элементов $l_{j1}, l_{j2}, \ldots$ ■

Описанные полугруппы $\mathfrak{M}(0)$, $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ индуцируются некоторыми подполугруппами полугруппы $\Phi \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Прежде чем приступить к их описанию, сделаем следующее замечание. Резонансные соотношения первого рода (4.28) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ над полем рациональных чисел. В этом случае найдется самое большое $\chi < n$ векторов $\| a_{j1}, \ldots, a_{jn} \|$, $j = \overline{1, \chi}$, через которые могут быть выражены все остальные векторы из выписанных тождеств. В общем случае все коэффициенты в этих тождествах — рациональные, но не обязательно целые и неотрицательные числа. Следовательно, изучение структуры полугруппы $\mathfrak{M}(0)$, в частности ее размерности, не является в общей постановке тривиальной задачей. Сказанное также справедливо и по отношению к резонансным соотношениям второго рода (4.29) и структуре полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$.

Определим в полугруппе Φ две подполугруппы, которые изоморфны описанным выше полугруппам. Сопоставим совокупность векторов $\mathfrak{M} = \{m_i^{(\nu)} = \| m_{i1}^{(\nu)}, \ldots, m_{in}^{(\nu)} \|\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, r_\nu}$, порождающих полугруппу $\mathfrak{M}(0)$, с векторами из Φ, причем для вектора $v \in \Phi$ примем обозначение $v(a) = \varphi_1^{a_1} \ldots \varphi_n^{a_n}$, если $a = \| a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \| \in \mathfrak{M}(0)$. Очевидно, $v^n(a) = v(na)$.

Полугруппу, порожденную элементами $\rho(m_i^\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, r_\nu}$, будем обозначать $\mathfrak{X}(0)$. Все элементы полугруппы $\mathfrak{X}(0)$ являются всевозможными целыми положительными степенями элементов $v(m_i^\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, r_\nu}$, и, как легко заметить, решениями уравнения $\mathsf{U}f = 0$, т. е. интегралами. Полугруппа $\mathfrak{X}(0)$ — подполугруппа полугруппы Φ, $\mathfrak{X}(0) \subset \Phi$.

Отображение (4.20), представляющее собой изоморфизм полугрупп Φ и $\mathfrak{P}(n, \mathrm{P})$, приводит к изоморфизму полугрупп $\mathfrak{X}(0)$ и $\mathfrak{M}(0)$.

Если полугруппа $\mathfrak{M}(0)$ является конечно-порожденной множеством $\mathfrak{U}\{ a_i = \| a_{i1}, \ldots, a_{in} \| \}$, $i = \overline{1, k}$, то $\mathfrak{X}(0)$ представляет собой полугруппу, конечно-порожденную множеством $\mathfrak{U}\{v(a_1), \ldots, v(a_k)\}$.

Совершенно аналогично, сопоставляя вектор $b = \| b_1, \ldots, b_n \|$ из порождающего множества (4.30) полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ с элементом из Φ: $v(b) = \varphi_1^{(b_1)} \ldots \varphi_n^{(b_n)}$, получаем порождающее множество $v(g^{(i\nu)})$, $j = \overline{1, \mu_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, некоторой полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$.

Полугруппа $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ является подполугруппой полугруппы Φ, т. е. $\mathfrak{M}(\lambda_j) \subset \Phi$. При отображении (4.20) полугруппа $\mathfrak{M}(\lambda_j)$ изоморфна полугруппе $\mathfrak{X}(\lambda_j)$. Произвольный элемент $v_1^{n_1}v_2^{n_2}\ldots v_r^{n_r}$ под действием оператора $\mathbf{U}$ переходит в элемент $\lambda_j(n_1 + n_2 + \ldots + n_r)\ v_1^{n_1}v_2^{n_2}\ldots v_r^{n_r}$:

$$\mathbf{U}v_1^{n_1}v_2^{n_2}\ \ldots\ v_r^{n_r} = \lambda_j(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)\, v_1^{n_1}v_2^{n_2}\ \ldots\ v_r^{n_r}.$$

Если $l_{j1}, \ldots, l_{jr_j}$ — представители классов $\mathfrak{D}_1(\lambda_1), \ldots, \mathfrak{D}_{r_j}(\lambda_j)$ порождающего множества $\mathfrak{D}$ полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_j)$, то в полугруппе $\mathfrak{X}(\lambda_j)$ элементы $v(l_{j1}), \ldots, v(l_{jr_j})$ являются представителями классов $\mathfrak{D}_1(\lambda_j), \ldots, \mathfrak{D}_{r_j}(\lambda_j)$ порождающего множества $\mathfrak{D}$ полугруппы $\mathfrak{X}(\lambda_j)$, причем элементы $\mathfrak{D}_i(\lambda_j)$, $i = \overline{1, r_j}$, получаются умножением $v(l_{ji})$ на произвольные элементы из $\mathfrak{X}(0)$:

$$\hat{\mathfrak{D}}_i(\lambda) = \{l \in \mathfrak{D}_i(\lambda) : l = v(l_{ji})\,\rho, \quad \rho \in \mathfrak{X}(0)\}.$$

Условимся обозначать через $\ker \mathcal{F}_\infty$ множество решений системы бесконечных алгебраических уравнений (4.22) и через $\ker \mathcal{G}_\infty$ множество решений уравнений $\mathcal{G}_A^{(2)}\hat{\Gamma}_2 = 0$, $\mathcal{G}_A^{(3)}\hat{\Gamma}_3 = 0, \ldots, \mathcal{G}_A^{(\nu)}\hat{\Gamma}_\nu = 0, \ldots$ для определения матрицы $\hat{\Gamma}_\nu$ коэффициентов оператора, коммутирующего с $\mathbf{U}$. Отметим, что уравнение

$$\mathcal{G}_A^{(1)}\hat{\Gamma}_1 = 0 \tag{4.33}$$

всегда имеет решение в силу эквивалентности с матричным уравнением $\mathcal{A}\Gamma_1 - \Gamma_1\mathcal{A} = 0$ (см. § 2 гл. 4).

Введенный выше аппарат позволяет сформулировать следующий основной результат о разделении переменных на быстрые и медленные в централизованной системе.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$ матрица — простой структуры с характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратностей $r_1, \ldots, r_m$ и выполняются следующие условия:*

а) *подпространства* $\ker \mathcal{F}_\infty$, $\ker \mathcal{G}_\infty$ *не пусты*, т. е. $\ker \mathcal{F}_\infty \not\equiv \varnothing$, $\ker \mathcal{G}_\infty \not\equiv \varnothing$;

б) *полугруппы* $\mathfrak{X}(0)$, $\mathfrak{X}(\lambda_j)$, $j = \overline{1, m}$, *являются конечно-порожденными и их порождающими элементами являются функции* $\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x) \in \mathfrak{X}(0)$, $v_{1\chi_i}(x), \ldots, v_{\chi_i\chi_i}(x) \in \mathfrak{X}(\lambda_i)$, $i = \overline{1, m}$;

в) *для некоторого набора индексов* $\Delta = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\} \in \{1, \ldots, m\}$ *выполняется тождество*

$$\dim \mathfrak{M}(0) + \sum_{\mu \in \Delta} \dim \mathfrak{M}(\lambda_\mu) \equiv n. \tag{4.34}$$

Тогда замена переменных

$$y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k(x) = \rho_k(x); \tag{4.35}$$

$$z_{1\chi_1}(x) = v_{1\chi_1}(x), \ldots, z_{\chi_1\chi_1} = v_{\chi_1\chi_1}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{1\chi_l}(x) = v_{1\chi_l}(x), \ \ldots, \ z_{\chi_l\chi_l} = v_{\chi_l\chi_l}(x), \tag{4.36}$$

$$k + \chi_1 + \cdots + \chi_l = n, \quad \Delta = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\},$$

расщепляет централизованную систему

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + \varepsilon b_{1j}(x) + \cdots + \varepsilon^\nu b_{\nu j}(x) + \cdots \tag{4.37}$$

на две подсистемы для k *медленных*

$$\frac{dy_1}{\partial t} = \varepsilon f_{11}(y) + \varepsilon^2 f_{12}(y) + \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial y_k}{dt} = \varepsilon f_{k1}(y) + \varepsilon^2 f_{k2}(y) + \cdots$$

и $n - k$ *быстрых переменных*

$$\frac{dz_{1\chi_i}}{dt} = \lambda_{\chi_1} z_{1\chi_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{\mu=1}^{\chi_i} h^{(\nu)}_{\mu 1\chi_i}(y)\, z_{\mu\chi_i};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz_{\chi_i\chi_i}}{dt} = \lambda_{\chi_i} z_{1\chi_i} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{\mu=1}^{\chi_i} h^{(\nu)}_{\mu\chi_i\chi_i}(y)\, z_{\mu\chi_i},$$

где $f_{i'j'}(y)$, $i' = \overline{1, k}$, $j' = 1, 2, \ldots, h^{(\nu)}_{\mu 1\chi_i}, \ldots, h^{(\nu)}_{\rho\chi_i\chi_i}, \ldots, \mu = \overline{1, \chi_i}$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — *известные полиномы от компонент вектора* $y = \| y_1, \ldots, y_k \|$.

Замена переменных (4.35) и (4.36) сохраняет неподвижную точку $x \equiv 0$ *централизованной системы (4.37).*

Доказательство. Рассмотрим преобразованный оператор $\mathbf{U}_0$ (3.10), соответствующий централизованной системе (4.37): $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1 + \ldots + \varepsilon^\nu \mathbf{N}_\nu + \ldots$, где $\mathbf{N}_\nu = \sum_{j=1}^{g_\nu} \mathbf{N}_{\nu_j}$. Условие $\ker \mathcal{F}_\infty \neq 0$, $\ker \mathcal{G}_\infty \neq 0$ обеспечивает существование нетривиальных полугрупп $\mathfrak{X}(0)$, $\mathfrak{X}(\lambda_j)$. В силу коммутативности операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{N}_\nu$ функции $\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x)$ переводятся операторами $\mathbf{N}_\nu$ в элементы $\mathfrak{X}(0)$, как это следует из тождества

$$(\mathbf{U}\mathbf{N}_\nu - \mathbf{N}_\nu\mathbf{U})\,\rho_j \equiv \mathbf{U}\mathbf{N}_\nu\rho - \mathbf{N}_\nu\mathbf{U}_\rho \equiv \mathbf{U}\mathbf{N}_\nu\rho \equiv 0.$$

Функции $v_{1_{\chi_i}}, \ldots, v_{\chi_i\chi_i}$ переводятся операторами снова в функции порождающего множества $\hat{\mathfrak{D}}(\lambda_i)$ полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_i)$. Действительно, из тождества

$$(\mathbf{U}\mathbf{N}_\nu - \mathbf{N}_\nu\mathbf{U})\, v_{j\chi_i} \equiv \mathbf{U}\mathbf{N}_\nu v_{i\chi_i} - \mathbf{N}_\nu \mathbf{U} v_{j\chi_i} \equiv \mathbf{U}\mathbf{N}_\nu v_{j\chi_i} - \lambda_i \mathbf{N}_\nu v_{j\chi_i} \equiv 0$$

следует, что $\mathbf{N}_\nu v_{j\chi_i}$ — собственная функция оператора $\mathbf{U}$ с собственным числом λ_i и поэтому принадлежит $\hat{\mathfrak{D}}(\lambda_i)$.

Вид расщепленной системы теперь очевиден в силу сделанных замечаний. Выполнение условий (4.34) весьма важно, так как гарантирует отсутствие в правых частях расщепленных уравнений дробно-рациональных выражений от новых переменных и, тем самым, сохранение точки покоя $x = 0$ исходной возмущенной системы (1.1) и централизованной системы (4.1). ■

Замечание 4.1. Выбор вида замены неоднозначен в том случае, когда соотношение (4.34) выполняется не единственным образом.

Замечание 4.2. Как видно из структуры системы уравнений размерности k для медленных переменных $y_1, \ldots, y_k$, она интегрируется независимо. Система размерности $n - k$ для быстрых переменных $z_{1\chi_i}, \ldots, z_{\chi_i\chi_i}$, $i = \overline{1, m}$, является нелинейной системой по переменным y, а переменные z входят в нее линейно. Поэтому после нахождения медленных переменных $y_1, \ldots, y_k$ как функций медленного времени τ для переменных z получаем линейную систему с медленно меняющимися коэффициентами.

Приведем несколько теорем, уточняющих в ряде важных случаев структуру расщепленной системы. Для этого в теоремах делается ряд дополнительных предположений о структуре матриц $\mathcal{F}_\infty$, $\mathcal{G}_\infty$.

Теорема 4.3. Если $\ker \mathcal{F}_\infty \equiv 0$ и $\ker \mathcal{G}_\infty \equiv 0$, *то централизованная система линеаризуется и имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{B}_{01} + \varepsilon^2 \mathcal{B}_{02} + \cdots)\, x, \tag{4.38}$$

где матрицы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_{01}$, $\mathcal{B}_{02}$ *являются транспонированными по отношению к матрицам* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... (см. § 1 гл. 4).

Матрицы $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... *являются матрицами операторов из* $\mathfrak{V}(V_{\otimes 1})$, *входящих в* $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, ... *(т. е. их линейными составляющими).*

Доказательство. При сделанных предположениях о том, что $\ker \mathcal{F}_\infty \equiv 0$ и $\ker \mathcal{G}_\infty \equiv 0$, интегралы не существуют и единственные коммутирующие с $\mathbf{U}$ операторы — это операторы с линейными коэффициентами, так как уравнение (4.33) всегда разрешимо. ■

Структура линейной системы (4.17) подробно изучена в гл. 4. Результаты теоремы 4.3 согласуются с известными. Приведем классический результат А. Пуанкаре по теории нормальных форм (см., например, [107]).

Теорема А. Пуанкаре. *Дана система*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \Phi_\nu(x), \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{4.39}$$

где $\Phi_\nu(x)$ — *аналитические в некоторой окрестности нуля функции, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка;* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *либо вещественные, либо комплексно-сопряженные величины и выполняются следующие условия:*

1) $\lambda_\nu \neq \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j$, $\nu = \overline{1, n}$, *при любых целых неотрицательных* p_j, *для которых* $p_1 + \cdots + p_n \geqslant 2$;

2) *на комплексной плоскости все точки* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *расположены по одну сторону от мнимой оси.*

Тогда существует единственное обратимое аналитическое в нуле преобразование, переводящее исходную систему (4.39) к системе

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu.$$

Выполнение условий теоремы Пуанкаре применительно к возмущенной системе (1.1) приводит к автоматическому выполнению условий теоремы 4.3 по отношению к централизованной системе (4.37). Действительно, как показано выше, условие 1 теоремы Пуанкаре эквивалентно условию $\ker \mathcal{G}_\infty \equiv 0$. Из условия 2 немедленно следует, что между характеристическими числами не существует резонансных соотношений первого рода

$$\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n \equiv 0, \tag{4.40}$$

так как все знаки действительных частей корней одинаковы, и, следовательно, условие (4.40) может выполняться только при $m_1 \equiv \ldots \ldots \equiv m_n \equiv 0$.

Наконец, если нелинейные части исходной системы начинаются с членов не ниже второго порядка малости, то в централизованной системе (4.38) $\mathcal{B}_{01} \equiv \mathcal{B}_{02} \equiv \ldots \equiv 0$ и она совпадает с системой нулевого приближения.

Теорема 4.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — матрица простой структуры с характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратностей $r_1, \ldots, r_m$ и $\ker \mathcal{F}_\infty \not\equiv 0$, $\ker \mathcal{G}_\infty \equiv 0$; тогда централизованная система (4.1) имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{Vmatrix} \lambda_1\mathcal{E}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mathcal{E}_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m\mathcal{E}_m \end{Vmatrix} x +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left\{ \begin{Vmatrix} Q_{11}^{(\nu)}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{22}^{(\nu)}(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{mm}^{(\nu)}(x) \end{Vmatrix} \right\} x, \tag{4.41}$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m$ — единичные матрицы размерностей $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2, \ldots, r_m \times r_m$, $Q_{11}^{(\nu)}(x), Q_{22}^{(\nu)}(x), \ldots, Q_{mm}^{(\nu)}(x)$ — квадратные матрицы размерностей $r_1 \times r_1, r_2 \times r_2, r_m \times r_m$, элементы которых — элементы алгебры $\mathfrak{M}_p(0)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сделаем следующее замечание. По виду система (4.41) — блочно-диагональная линейная. Однако элементы матриц $Q_{ij}^{(\nu)}(x)$ являются либо постоянными, либо интегралами уравнения $\mathrm{U}f = 0$. Следовательно, система (4.41) нелинейна, однако имеет специфичную блочную структуру.

Доказательство теоремы 4.4. Для упрощения рассуждений будем считать, что матрица системы нулевого приближения уже приведена к диагональному виду

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\{\lambda_1\mathcal{E}_1,\ \lambda_2\mathcal{E}_2,\ \ldots,\ \lambda_m\mathcal{E}_m\}.$$

Установим вид операторов $\mathbf{N}_i$, входящих в ассоциированный с централизованной системой оператор (3.7) из гл. 5. Обозначим через $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$ матрицу с единственным ненулевым элементом на пересечении i-й строки и j-го столбца (базис Вейля алгебры $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$ (см. § 4 гл. 4)). Матрицам $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$ в пространстве $\mathfrak{B}(V_{\otimes 1})$ линейных операторов соответствуют операторы

$$\mathbf{U}_{ij}^{(s)} = \hat{\hat{x}}_{m_1}\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}\partial_x \quad i,\ j = \overline{1,\ r_s},\ s = \overline{1,\ m},$$

где $\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$ — квазидиагональная матрица:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)} = \operatorname{diag}\{\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{s-1},\ \mathcal{E}_{ij}^{(s)},\ \ldots,\ 0\}.$$

Так как по предположению теоремы $\ker\mathcal{F}_\infty \not\equiv \varnothing$ и $\ker\mathcal{G}_\infty \equiv \varnothing$, то все операторы $\mathbf{N}_i$ перестановочны с $\mathbf{U}$ и имеют вид

$$\mathbf{N}_i = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i,j}^{r_s}\rho_{ij}(x)\,\mathbf{U}_{ij}^{(s)}, \tag{4.42}$$

где $\rho_{ij}(x) \in \mathfrak{M}_p(0)$, т. е. $\rho_{ij}(x)$ являются решениями уравнения $\mathbf{U}f = 0$ и среди них найдется хотя бы один не равный тождественно постоянной.

Совершенно очевидно, что структура операторов (4.42) обеспечивает структуру централизованной системы (4.41).

Частным случаем только что доказанной теоремы является следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть* $\ker\mathcal{F}_\infty \not\equiv 0$, $\ker\mathcal{G}_\infty \equiv 0$, *полугруппа* $\mathfrak{M}(0)$ *является конечно-порожденной и матрица* $\mathcal{A}$ *не имеет кратных характеристических чисел; тогда централизованная система распадается на две подсистемы: для* k *медленных переменных*

$$\frac{dy_1}{dt} = \varepsilon f_{11}(y) + \varepsilon^2 f_{12}(y) + \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \varepsilon f_{k1}(y) + \varepsilon^2 f_{k2}(y) + \cdots;$$

для $n - k$ *быстрых переменных*

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda_{\chi_1}z_1 + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu h_{1\nu}(y)\right)z_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz_{n-k}}{dt} = \lambda_{\chi_{n-k}}z_{n-k} + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu h_{n-k,\nu}(y)\right)z_{n-k};$$

здесь в качестве замены переменных используются k *порождающих элементов полугруппы* $\mathfrak{M}_p(0)$ *и* $n - k$ *произвольных элементарных* *собственных функций* $\varphi_{\chi_1}, \ldots, \varphi_{\chi_{n-k}}$ *оператора* $\mathbf{U}$ *с собственными значениями* $\lambda_{\chi_1}, \ldots, \lambda_{\chi_{n-k}}$.

Доказательство вытекает из теоремы 4.4, так как единственными элементарными собственными функциями оператора являются элементы $v_j = \hat{x}_{m_1}\eta_j$, $j = \overline{1, n}$, где η_j — собственные векторы матрицы $\mathcal{A} : \mathcal{A}\eta_j = \lambda_j\eta_j$. Следовательно, полугруппа $\mathfrak{X}(\lambda_j)$ является конечно-порожденной элементом $v_j(x)$.

§ 5. ПРИМЕРЫ: КЛАССИЧЕСКАЯ СИСТЕМА В. ВОЛЬТЕРРА «ХИЩНИК — ЖЕРТВА» И СИСТЕМА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Проиллюстрируем применение изложенной выше теории к конкретным примерам.

Пример 5.1. Рассмотрим модель сообщества «хищник — жертва», описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [105, с. 94]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - V(x)\,y; \quad \frac{dy}{dt} = -my + kyV(x). \tag{5.1}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ — численность жертв и хищников соответственно. Модель составлена в предположении, что численность жертв и отсутствие хищников растет экспоненциально с относительной скоростью α. Хищники в отсутствие жертв экспоненциально вымирают с относительной скоростью m. Функция $V = V(x)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемая одним хищником за единицу времени. Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией хищника или функциональным откликом хищника на плотность популяции жертвы.

Будем искать решение системы (5.1) в окрестности нуля, т. е. при малых x и y. Функцию $V(x)$ можно считать линейной, т. е. $V(x) = b_1x$. При $k = \text{const}$ система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - b_1xy; \quad \frac{dy}{dt} = kb_1xy - my. \tag{5.2}$$

Эта система называется классической моделью Вольтерра «хищник — жертва».

В настоящем исследовании примем трофическую функцию в виде многочлена второй степени

$$V(x) = b_1x + b_2x^2 \tag{5.3}$$

и будем считать, что введены безразмерные переменные и система содержит малый параметр ε $(0 < \varepsilon < 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1'}{dt} &= \alpha x_1' - \varepsilon\,(b_1x_1'x_2' + b_2x_1'^2x_2'); \\ \frac{dx_2'}{dt} &= -mx_2' + \varepsilon k\,(b_1x_1'x_2' + b_2x_1'^2x_2'). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Введение этого параметра может быть осуществлено, например, заменой $x = \varepsilon x_1'$, $y = \varepsilon x_2'$. В этом случае решение системы (5.4) изучается в окрестности положения равновесия $x = 0$, $y = 0$ (т. е. при малых x_1' и x_2').

Более общий вид трофической функции (5.3) по сравнению с классической моделью выбран для того, чтобы более четко проявились некоторые особенности предлагаемого метода. В дальнейших выкладках параметры b_1, b_2 на конкретных числовых значениях не фиксируются.

Применим к системе (5.4) метод, описанный в предыдущих параграфах. Предварительно сделаем следующее замечание. Общим решением системы нулевого приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = -mx_2$$

являются экспоненциальные функции

$$x_1 = \exp \alpha t c_1, \quad x_2 = \exp(-mt)\, c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Ввиду экспоненциального характера решения системы нулевого приближения к возмущенной системе (5.4) нельзя применять асимптотический метод [12]. Воспользуемся указанным общим решением для приведения возмущенной системы (5.4) к стандартному виду. Замена переменных

$$x_1' = \exp(\alpha t)\, c_1, \quad x_2' = \exp(-mt)\, c_2$$

переводит систему (5.4) в систему

$$\frac{dc_1}{dt} = +\varepsilon F_1(t), \quad \frac{dc_2}{dt} = -\varepsilon F_2(t),$$

где

$$F_1(t) = b_1 c_1 c_2 e^{-mt} + b_2 e^{(\alpha - m)t} c_1 c_2, \quad F_2(t) = b_1 c_1 c_2 e^{\alpha t} + b_2 e^{2\alpha t} c_1 c_2.$$

Как легко установить непосредственным вычислением

$$\int_0^T F_1(t)\, dt \equiv -\frac{1}{m} b_1 c_1 c_2 (e^{-mT} - 1) + \frac{1}{\alpha - m} b_2 c_1 c_2 (e^{(\alpha - m)T} - 1);$$

$$\int_0^T F_2(t)\, dt \equiv +\frac{1}{\alpha} b_1 c_1 c_2 (e^{\alpha T} - 1) + \frac{1}{2\alpha} b_2 c_1 c_2 (e^{2\alpha T} - 1);$$

соответственно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t)\, dt = \infty; \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_2(t)\, dt = \infty.$$

Таким образом, не существует среднего значения от правых частей выписанной системы в стандартной форме и к ней не может быть применен метод усреднения [12].

Согласно общей методике настоящей главы выпишем для системы (5.4) ассоциированный с ней дифференциальный оператор [1]

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon \tilde{\mathbf{U}},$$

где

$$\mathbf{U} = \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - m x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad \tilde{\mathbf{U}} = (b_1 x_1 x_2 + b_2 x_1^2 x_2) \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Коэффициенты нелинейной части исходной системы можно в соответствии с формулами (1.15) представить в виде

$$\| -b_1 x_1 x_2 - b_2 x_1^2 x_2, \ k b_1 x_1 x_2 + k x_2 x_1^2 x_2 \| = \hat{\hat{x}}_{m_2} \mathcal{B}_{m_2} + \hat{\hat{x}}_{m_3} \mathcal{B}_{m_3}.$$

Здесь векторы

$$\hat{\hat{x}}_{m_2} = \| x_1^2; \ x_1 x_2; \ x_2^2 \|; \quad \hat{\hat{x}}_{m_3} = \| x_1^3, \ x_1^2 x_2, \ x_1 x_2^2, \ x_2^3 \|$$

---

[1] Для упрощения записей штрих опускаем (см. § 3 гл. 1).

составлены из базисов пространств $V_{\otimes 2}$, $V_{\otimes 3}$; матрицы $\mathscr{B}_{m_2}$ и $\mathscr{B}_{m_3}$ определяются как

$$\mathscr{B}_{m_2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -b_1 & kb_1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathscr{B}_{m_3} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -b_2 & kb_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.5}$$

Этим матрицам соответствуют дифференциальные операторы $\tilde{\mathrm{U}}_2$, $\tilde{\mathrm{U}}_3$, принадлежащие алгебрам $\mathfrak{B}(V_{\otimes 2})$, $\mathfrak{B}(V_{\otimes 3})$:

$$\tilde{\mathrm{U}}_2 = \hat{\hat{x}}_{m_2}\mathscr{B}_{m_2}\partial \equiv -b_1x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + kb_1x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\tilde{\mathrm{U}}_3 = \hat{\hat{x}}_{m_3}\mathscr{B}_{m_3}\partial \equiv -b_2x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + kb_2x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

где $\partial = \operatorname{colon}\begin{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{Vmatrix}$. Таким образом,

$$\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{U}}_2 + \tilde{\mathrm{U}}_3, \quad \tilde{\mathrm{U}}_i \in \mathfrak{B}(V_{\otimes i}), \quad i = \overline{2,\ 3}.$$

Остановимся на двух приближениях в преобразованном операторе (см. формулу (1.26) гл. 3), т. е. оставим в сумме члены с ε в степени не выше двух:

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon\mathrm{N}_1 + \varepsilon^2\mathrm{N}_2. \tag{5.6}$$

В замене переменных (1.6) из гл. 3 вычислим операторы S_1, S_2. Найдем их из уравнений

$$[\mathrm{U},\ \mathrm{S}_1] = \tilde{\mathrm{U}} - \operatorname{pr}\tilde{\mathrm{U}}; \quad [\mathrm{U},\ \mathrm{S}_2] = \left\{-[\tilde{\mathrm{U}},\ \mathrm{S}_1] - \frac{1}{2}[\mathrm{U}[\mathrm{U},\ \mathrm{S}_1]]\right\} - \operatorname{pr}\{\cdots\}. \tag{5.7}$$

В соответствии с теорией настоящей главы (см. § 2) решение этих уравнений производится последовательно и сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, причем $\mathrm{S}_1 \in \mathfrak{B}(V_{\otimes 3})$, $\mathrm{S}_2 \in \mathfrak{B}(V_{\otimes 5})$. Решение первого уравнения ищем в виде

$$\mathrm{S}_1 \equiv \mathrm{S}_{\otimes 21} + S_{\otimes 31}, \tag{5.8}$$

где $\mathrm{S}_{\otimes i1} \equiv \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{1i}\partial$, $i = 2,\ 3$, Γ_{1i} — прямоугольные матрицы размерностей $m_i \times n$, являющиеся решениями системы независимых алгебраических уравнений

$$\mathscr{F}_i\Gamma_{1i} - \Gamma_{1i}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_i1} - \operatorname{pr}\mathscr{B}_{m_i1}, \quad i = 2.\ 3. \tag{5.9}$$

Теперь решаем второе уравнение. Как нетрудно заметить, его правые части принадлежат пространству $\mathfrak{B}(V_{\otimes 5})$, поэтому решение ищем в виде суммы: $\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_{\otimes 22} + \mathrm{S}_{\otimes 32} + \mathrm{S}_{\otimes 42} + \mathrm{S}_{\otimes 52}$, где $\mathrm{S}_{\otimes i2} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{2i}\partial$, $i = \overline{2,\ 5}$; Γ_{2i} — решение системы независимых алгебраических уравнений

$$\mathscr{F}_i\Gamma_{2i} - \Gamma_{2i}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_i2} - \operatorname{pr}\mathscr{B}_{m_i2}, \quad i = \overline{2,\ 5}. \tag{5.10}$$

От систем уравнений (5.9), (5.10) переходим к системам

$$\mathscr{G}_A^{(i)}\hat{\Gamma}_{1i} = \hat{\mathscr{B}}_{m_i1} - \operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_i1}, \quad i = \overline{2,\ 3}, \tag{5.11}$$

и

$$\mathscr{G}_A^{(z)}\hat{\Gamma}_{2i} = \hat{\mathscr{B}}_{m_i2} - \operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_i2}, \quad i = \overline{2,\ 5} \tag{5.12}$$

где $\mathcal{S}_A^{(i)} = \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{m_i} \otimes \mathcal{A}^T$, $i = \overline{2,\ 5}$. Прежде чем решать уравнения (5.9), (5.10) или (5.11), (5.12), необходимо определить проектор pr $\mathcal{B}$, что связано с решением однородной системы $\mathcal{S}_A^{(i)}\hat{\Gamma} = 0$.

Представим элементы, входящие в приведенные соотношения, в явном виде. Характеристическими числами матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -m \end{Vmatrix}$$

являются $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -m$. Матрица $\mathcal{A} = \mathrm{diag}\,\|\lambda_1,\ \lambda_2\|$ есть матрица оператора U.

Матрицы $\mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_5$ — представления оператора U в подпространствах $V_{\otimes 2}, \ldots, V_{\otimes 5}$ — определяются тождествами

$$\mathrm{U}\hat{\hat{x}}_{m_i} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\mathcal{F}_i, \quad i = \overline{2,\ 5}. \tag{5.13}$$

Приведем явный вид этих матриц:

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_2 = \mathrm{diag}\,\|2\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2,\ 2\lambda_2\|;\\
\mathcal{F}_3 = \mathrm{diag}\,\|3\lambda_1,\ 2\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+2\lambda_2,\ 3\lambda_2\|;\\
\mathcal{F}_4 = \mathrm{diag}\,\|4\lambda_1,\ 3\lambda_1+\lambda_2,\ 2\lambda_1+2\lambda_2,\ \lambda_1+3\lambda_2,\ 4\lambda_2\|;\\
\mathcal{F}_5 = \mathrm{diag}\,\|5\lambda_1,\ 4\lambda_1+\lambda_2,\ 3\lambda_1+2\lambda_2,\ 2\lambda_1+3\lambda_2,\ \lambda_1+4\lambda_2,\ 5\lambda_2\|.
\end{gathered} \tag{5.14}$$

Векторы $\hat{\hat{x}}_{m_2}, \ldots, \hat{\hat{x}}_{m_5}$ составляем из базисных элементов подпространств $V_{\otimes 2}$, $V_{\otimes 3}$, $V_{\otimes 5}$. Приводим явный вид этих векторов:

$$\hat{\hat{x}}_{m_2} = \|x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2\|;$$

$$\hat{\hat{x}}_{m_3} = \|x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^2,\ x_2^3\|;$$

$$\hat{\hat{x}}_{m_4} = \|x_1^4,\ x_1^3x_2,\ x_1^2x_2^2,\ x_1x_2^3,\ x_2^4\|;$$

$$\hat{\hat{x}}_{m_5} = \|x_1^5,\ x_1^4x_2,\ x_1^3x_2^2,\ x_1^2x_2^3,\ x_1x_2^4,\ x_2^5\|.$$

Приведем теперь в явном виде матрицы $\mathcal{S}_A^{(2)}, \ldots, \mathcal{S}_A^{(5)}$. По определению

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{E}_2 = \mathrm{diag}\,\|2\lambda_1,\ 2\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+\lambda_2,\ 2\lambda_2,\ 2\lambda_2\|;\\
\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{A} = \mathrm{diag}\,\|\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2\|.
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\mathcal{S}_A^{(2)} = \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{A} = \mathrm{diag}\,\|\lambda_1,\ 2\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2,\ \lambda_1,\ 2\lambda_2-\lambda_1,\ \lambda_2\|.$$

Аналогично получаем

$$\begin{gathered}
\mathcal{S}_A^{(3)} = \mathrm{diag}\,\|2\lambda_1,\ 3\lambda_1-\lambda_2,\ (2\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_1,\ (2\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_2,\\
(\lambda_1+2\lambda_2)-\lambda_1,\ (\lambda_1+2\lambda_2)-\lambda_2,\ 3\lambda_2-\lambda_1,\ 2\lambda_2\|;\\
\mathcal{S}_A^{(4)} = \mathrm{diag}\,\|3\lambda_1,\ 4\lambda_1-\lambda_2,\ (3\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_1,\ (3\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_2,\\
(2\lambda_2+2\lambda_2)-\lambda_1,\ (2\lambda_1+2\lambda_2)-\lambda_2,\ (\lambda_1+3\lambda_2)-\lambda_1,\\
(\lambda_1+3\lambda_2)-\lambda_2,\ 4\lambda_2-\lambda_1,\ 3\lambda_2\|;\\
\mathcal{S}_A^{(5)} = \mathrm{diag}\,\|4\lambda_1,\ 5\lambda_1-\lambda_2,\ (4\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_1,\ (4\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_2,\\
(3\lambda_1+2\lambda_2)-\lambda_1,\ (3\lambda_1+2\lambda_2)-\lambda_2,\ (2\lambda_1+3\lambda_2)-\lambda_1,\\
(2\lambda_1+3\lambda_2)-\lambda_2,\ (\lambda_1+4\lambda_2)-\lambda_1,\ (\lambda_1+4\lambda_2)-\lambda_2,\ 5\lambda_2-\lambda_1,\ 4\lambda_2\|.
\end{gathered} \tag{5.15}$$

Исследуем возможности применения теорем о разделении движений в рассматриваемом случае. Оператор $\mathrm{U} = \alpha x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - m x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ имеет в подпространстве $V_{\otimes 1}$ две собственные функции — $\varphi_1 = x_1$ и $\varphi_2 = x_2$ с собственными числами α и m соответственно. Общим элементом полугруппы Φ, определенной на множестве $\varphi\{\varphi_1, \varphi_2\}$, является выражение

$$v = x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \tag{5.16}$$

где a_1, a_2 — целые неотрицательные числа.

Каждый элемент вида (5.16) отображается в вектор $a = \| a_1, a_2 \|$, т. е. $f : x_1^{a_1} x_2^{a_2} \to a = \| a_1, a_2 \|$. Следовательно, общим элементом полугруппы $\mathfrak{P}(2, \Phi)$ являются всевозможные векторы $a = \| a_1, a_2 \|$, $a_i \in \mathrm{Z}^+$, с неотрицательными целыми коэффициентами.

Согласно анализу элементов диагональных матриц представлений $\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_5$ (5.14) следует, что существование нетривиального подпространства $\ker \mathscr{F}_{[5]}$ обеспечивается обращением в нуль хотя бы одного из выписанных ниже соотношений (напомним, что $\lambda_1 \equiv \alpha$, $\lambda_2 \equiv -m$, $\alpha > 0$, $m > 0$):

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{F}_2 : \lambda_1 + \lambda_2; & \mathscr{F}_3 : 2\lambda_1 + \lambda_2, & \mathscr{F}_4 : 3\lambda_1 + \lambda_2, & \mathscr{F}_5 : 4\lambda_1 + \lambda_2, \\
 & \quad\lambda_1 + 2\lambda_2; & \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2, & \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2, \\
 & & \quad \lambda_1 + 3\lambda_2; & \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2, \\
 & & & \quad \lambda_1 + 4\lambda_2.
\end{array} \tag{5.17}$$

Аналогично существование нетривиального ядра матрицы $\mathscr{G}_{A[5]}$ будет обеспечиваться при обращении в нуль хотя бы одного из следующих соотношений, полученных с помощью формул (5.15):

$$\begin{array}{lll}
\mathscr{G}_A^{(3)} : (2\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1, & \mathscr{G}_A^{(4)} : (3\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1, & \mathscr{G}_A^{(5)} : (4\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1, \\
\quad (\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_2; & \quad (2\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_1, & \quad (3\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_1, \\
 & \quad (2\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_2, & \quad (3\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_2, \\
 & \quad (\lambda_1 + 3\lambda_2) - \lambda_2; & \quad (2\lambda_1 + 3\lambda_2) - \lambda_1, \\
 & & \quad (2\lambda_1 + 3\lambda_2) - \lambda_2, \\
 & & \quad (\lambda_1 + 4\lambda_2) - \lambda_2.
\end{array} \tag{5.18}$$

Рассмотрим принципиально возможные реализации вариантов (5.17) и (5.18), осуществляемых при определенных числах матрицы $\mathcal{A}$.

П е р в ы й с л у ч а й. $\lambda_1 = -\lambda_2$, т. е. $\alpha \equiv m$, $\alpha > 0$, $m > 0$. Резонансные соотношения первого рода имеют вид тождеств, полученных из (5.17):

$$\mathscr{F}_2 : \lambda_1 + \lambda_2 \equiv \alpha + (-\alpha) \equiv 0; \quad \mathscr{F}_4 : 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \equiv 2\alpha + 2(-\alpha) \equiv 0. \tag{5.19}$$

Резонансные соотношения второго рода представляются тождествами, полученными из (5.18):

$$\begin{array}{ll}
\mathscr{G}_A^{(3)} : 2\lambda_1 + \lambda_2 \equiv \lambda_1, & \mathscr{G}_A^{(5)} : 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \equiv \lambda_1, \\
\quad \lambda_1 + 2\lambda_2 \equiv \lambda_2; & \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \equiv \lambda_2.
\end{array}$$

Эти тождества легко проверяются подстановкой $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$.

Совокупность векторов $\{m_1 = \| 1, 1 \|, m_2 = \| 2, 2 \|\}$ из (5.19) порождает полугруппу по сложению $\mathfrak{M}_{[5]}(0)$ с единичным элементом $\| 0, 0 \|$. Вектор m_2 получается из вектора $m_1 : m_2 = m_1 + m_1$. Поэтому минимальным множеством полугруппы $\mathfrak{M}(0)$ является множество $\mathfrak{U} = \{m_1 = \| 1, 1 \|\}$ с общим элементом

$$m = \| p, p \|, \quad p \in \mathrm{Z}^+.$$

В пространстве $\mathfrak{T}(V)$ полугруппа $\mathfrak{M}(0)$ изоморфна полугруппе $\mathfrak{X}(0)$ с общим элементом

$$v(m) = x_1^n x_2^n, \quad n \in \mathrm{Z}^+. \tag{5.20}$$

Из изложенного следует, что размерность полугруппы $\dim \mathfrak{X}(0) = 1$, так как она порождена элементом x_1x_2. Ясно, что любой элемент (5.20) из $\mathfrak{X}(0)$ является интегралом уравнения $\alpha\left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)f = 0$. Полугруппа $\mathfrak{X}(0)$ в свою очередь порождает полугрупповую алгебру $\mathfrak{X}_p(0)$ с общим элементом в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i x_1^{n_i} x_2^{n_i}$, $c_i \in \mathrm{P}$, $n_i \in \mathrm{Z}^+$.

Рассмотрим теперь полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{M}(\lambda_2)$. Их порождающими множествами *являются*

$$\mathfrak{D}(\lambda_1) = \{n_1 = \|2,\ 1\|,\ \ n_3 = \|3,\ 2\|\};$$
$$\mathfrak{D}(\lambda_2) = \{n_2 = \|1,\ 2\|,\ \ n_4 = \|2,\ 3\|\}.$$

Так как выполняются равенства

$$n_3 - n_1 \equiv \|1,\ 1\| \in \mathfrak{M}(0), \quad n_4 - n_2 = \|1,\ 1\| \in \mathfrak{M}(0),$$

то можно сделать заключение, что n_3 и n_1, n_4 и n_2 принадлежат соответственно к одному классу. Другими словами, порождающие множества $\mathfrak{M}(\lambda_1)$, $\mathfrak{M}(\lambda_2)$ содержат по одному классу. Согласно определению 4.3 полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{M}(\lambda_2)$ являются конечно-порожденными с размерностями $\dim \mathfrak{M}(\lambda_1) = 1$ и $\dim \mathfrak{M}(\lambda_2) = 1$.

Легко также выделить элементарные элементы из $\mathfrak{D}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{D}(\lambda_2)$. Согласно тождествам для элементов n_3, n_1 и n_4, n_2

$$n_3 \equiv \|1,\ 0\| + \|2,\ 2\|, \quad n_1 \equiv \|1,\ 0\| + \|1,\ 1\|;$$
$$n_4 \equiv \|0,\ 1\| + \|2,\ 2\|, \quad n_2 \equiv \|0,\ 1\| + \|0,\ 1\|$$

делаем заключение, что $l_1 = \|1, 0\|$ и $l_2 = \|0, 1\|$ — элементарные элементы соответственно множеств $\mathfrak{D}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{D}(\lambda_2)$.

В пространстве $\mathfrak{T}(V)$ полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{M}(\lambda_2)$ изоморфны полугруппам $\mathfrak{X}(\lambda_1)$ и $\mathfrak{X}(\lambda_2)$. Элементы полугруппы $\mathfrak{X}(\lambda_1)$ имеют вид

$$w = v(m)\,x_1^p, \text{ где } v(m) = x_1^n x_2^n \in \mathfrak{X}(0), \quad p,\ n \in \mathrm{Z}^+.$$

Соответственно для полугруппы $\mathfrak{M}(\lambda_2)$ общим элементом является

$$w = v(m)\,x_2^p, \text{ где } x_1^n x_2^n \in \mathfrak{X}(0), \quad p,\ n \in \mathrm{Z}^+.$$

Полугрупповые алгебры $\mathfrak{X}_p(\lambda_1)$, $\mathfrak{X}_p(\lambda_2)$ порождаются суммами

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_1^{n_i} x_2^{n_i} x_j^{p_i}, \quad j = \overline{1,\ 2}, \quad n_i,\ p_i \in \mathrm{Z}^+,\ c_i \in \mathrm{P}.$$

Подводя итог, можно сделать заключение, что выполняются условия «а» и «б» теоремы 4.2. Выполняется также и условие «в», так как

$$\dim \mathfrak{M}(0) + \dim \mathfrak{M}(\lambda_j) = 2, \quad j = \overline{1,\ 2}. \tag{5.21}$$

Следовательно, в централизованной системе можно выделить одну медленную и одну быструю переменные.

Вычислим составляющие $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ в операторе (5.61), порождающем централизованную систему, и произведем замену переменных, осуществляющую их разделение. Рассмотрим уравнение (5.11) для определения матрицы коэффициентов Γ_{12}, Γ_{13} преобразования $\mathbf{S}_1$. Матрицы $\mathscr{G}_A^{(2)}$, $\mathscr{G}_A^{(3)}$ имеют вид

$$\mathscr{G}_A^{(2)} = \operatorname{diag}\|\alpha,\ 3\alpha,\ -\alpha,\ \alpha,\ -3\alpha,\ -\alpha\|;$$

$$\mathscr{G}_A^{(3)} = \operatorname{diag}\|2\alpha,\ 4\alpha,\ 0,\ 2\alpha,\ -2\alpha,\ 0,\ -4\alpha,\ -2\alpha\|.$$

Пространство $\hat{N}_A^{(2)}$ определяется как решения однородного уравнения $\mathscr{G}_A^{(2)}\hat{\Gamma} = 0$. Матрица $\mathscr{G}_A^{(2)}$ неособая, и поэтому $\hat{N}_A^{(2)} \equiv \varnothing$. Следовательно, $\operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_21} \equiv 0$ и урав-

$$\mathcal{G}_A^{(2)}\hat{\Gamma}_{12} = \hat{\mathcal{B}}_{m_2,1},$$

где $\hat{\mathcal{B}}_{m_2,1} = \text{colon}\,\|0,\ 0, -b_1,\ kb_1,\ 0,\ 0\|$, имеет однозначное решение[1]:

$$\hat{\Gamma}_{12} = \text{colon}\left\|0,\ 0,\ \frac{b_1}{\alpha},\ \frac{kb_1}{\alpha},\ 0,\ 0\right\|.$$

Пространство $\hat{N}_A^{(3)}$ определяется как решения однородного уравнения $\hat{\mathcal{G}}_A\hat{\Gamma} = 0$. В качестве базиса $\hat{N}_A^{(3)}$ примем

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{X}}_{13} = \text{colon}\,\|0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|;\\ \hat{\mathcal{X}}_{23} = \text{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\|.\end{gathered} \tag{5.22}$$

Легко заметить, что проекция вектора $\hat{\mathcal{B}}_{m_3,1} = \text{colon}\,\|0,\ 0, -b_2,\ kb_2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|$ равна:

$$\text{pr}\,\hat{\mathcal{B}}_{m_3,1} = \text{colon}\,\|0,\ 0,\ -b_2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|.$$

Уравнение для определения матрицы Γ_{13}

$$\mathcal{G}_A^{(3)}\hat{\Gamma}_{13} = \hat{\mathcal{B}}_{m_3,1} - \text{pr}\,\hat{\mathcal{B}}_{m_3,1}$$

однозначно разрешимо:

$$\hat{\Gamma}_{13} = \text{colon}\left\|0,\ 0,\ 0,\ \frac{kb_2}{2\alpha},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\|.$$

Переходя к операторной записи, получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{N}_1 = \hat{\hat{x}}_{m_3}\,\text{pr}\,\mathcal{B}_{m_3,1}\partial = -b_2x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_1};\\ \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_{\otimes 21} + \mathbf{S}_{\otimes 31},\end{gathered} \tag{5.23}$$

где

$$\mathbf{S}_{\otimes 21} = \hat{\hat{x}}_{m_2}\Gamma_{12}\partial = \frac{b_1}{\alpha}x_1x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + k\frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

$$\mathbf{S}_{\otimes 31} = \hat{\hat{x}}_{m_3}\Gamma_{13}\partial = \frac{kb_2}{2\alpha}x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{U}_0$ (5.6) в первом приближении определяется как

$$\mathbf{U}_0 = \alpha\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \varepsilon b_2x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{5.24}$$

а централизованная система в первом приближении приобретает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 - \varepsilon b_2x_1^2x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2. \tag{5.25}$$

Принимая в качестве новых переменных порождающий элемент x_1x_2 полугруппы $\mathfrak{X}(0)$ и порождающий элемент x_1 полугруппы $\mathfrak{X}(\lambda_1)$, т. е.

$$y_1 = x_1x_2, \quad y_2 = x_1, \tag{5.26}$$

---

[1] Вектор-столбцы $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\mathcal{B}}$, как было определено в § 2 гл. 4, образованы строками матриц Γ и $\mathcal{B}$.

перейдем от оператора $\mathbf{U}_0$ (5.24) к оператору

$$\mathbf{U}_0(y) = -\varepsilon b_2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (\alpha y_2 - \varepsilon b_2 y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

и соответственно от системы (5.25) к системе

$$\frac{dy_1}{dt} = -\varepsilon b_2 y_1^2; \quad \frac{dy_2}{dt} = \alpha y_2 - \varepsilon b_2 y_1 y_2.$$

Переменная y_1 является медленной, а переменная y_2 — быстрой. Уравнение для y_1 интегрируется независимо от уравнения для y_2:

$$y_1 = \frac{y_{10}}{1 + \varepsilon y_0 b_2 (t - t_0)}. \tag{5.27}$$

Подставляя значения y_1 (5.27) во второе уравнение, получаем линейное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами, которое легко интегрируется в квадратурах:

$$y_2(t) = y_0 \exp \int_{t_0}^{t} (\alpha - \varepsilon b_2 y_1(t))\, dt.$$

Тождество (5.21) выполняется также для полугруппы $\mathscr{X}(\lambda_2)$. Поэтому в качестве замены переменных можно использовать базисный элемент x_2 полугруппы $\mathscr{X}(\lambda_2)$, т. е.

$$z_1 = x_1 x_2, \quad z_2 = x_2. \tag{5.28}$$

Оператор $\mathbf{U}_0$ (5.24) перейдет при этом в оператор

$$\mathbf{U}_0(z) = -\varepsilon b_2 z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha z_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

а централизованная система (5.25) примет соответственно вид

$$\frac{dz_1}{dt} = -\varepsilon b_2 z_1^2; \quad \frac{dz_2}{dt} = -\alpha z_2.$$

Эта система распадается на два независимых уравнения и легко интегрируется:

$$z_1 = \frac{z_{10}}{1 + \varepsilon z_{10} b_2 (t - t_0)}; \quad z_2 = e^{-\alpha(t - t_0)} z_{20}.$$

Применим теперь к централизованной системе (5.25) в первом приближении теорему 4.1. Решением этой системы является

$$x = \exp[\mathscr{A}(t - t_0)] \exp[\tau \mathbf{N}_1(x_0)]\, x_0. \tag{5.29}$$

Здесь

$$\exp(\mathscr{A}(t - t_0)) = \begin{Vmatrix} e^{\alpha(t - t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha(t - t_0)} \end{Vmatrix};$$

$$\exp \tau \mathbf{N}_1(x_0) = \operatorname{colon} \| \exp[\tau \mathbf{N}_1(x_0)]\, x_{10},\ \exp[\tau \mathbf{N}_1(x_0)]\, x_{20} \|.$$

Легко вычислить компоненты разложения $\exp[\tau \mathbf{N}_1(x_0)]\, x_{10}$:

$$\mathbf{N}_1(x_0)\, x_{10} = -b_2 x_{10}^2 x_{20}, \ \ldots, \ N_1^p(x_0)\, x_{10} = (-1)^p\, p!\, b_2^p x_{10}^p x_{20}^{p+1}.$$

Следовательно,

$$\exp \tau \mathbf{N}_1(x_0) = \left(x_{10} + \frac{\tau}{1!} \mathbf{N}_1 x_{10} + \frac{\tau^2}{2!} \mathbf{N}_2 x_{20} + \ldots \right) =$$

$$= x_{10}(1 - b_2 x_{10} x_{20} \tau + (b_2 x_{10} x_{20} \tau)^2 + \cdots + (-1)^p (b_2 x_{10} x_{20} \tau)^p + \ldots). \tag{5.30}$$

Если допустить, что в геометрической прогрессии, находящейся в правой части равенства (5.30), знаменатель $q = b_2 x_{10} x_{20} \tau$ удовлетворяет неравенству $|q| = |b_2 x_{10} x_{20} \tau| < 1$, $\tau = \varepsilon t$, то выражение (5.30) можно записать таким образом:

$$\exp[\tau \mathrm{N}_1(x_0)]\, x_{10} = \frac{x_{10}}{1 - b_2 x_{10} x_{20} \varepsilon (t - t_0)}. \tag{5.31}$$

Оператор $\mathrm{N}_1(x_0)$ не содержит производной по x_{20}, и поэтому

$$\exp(\tau \mathrm{N}_1(x_0))\, x_{20} = x_{20}. \tag{5.32}$$

Итак, с учетом формул (5.31), (5.32) решение (5.29) централизованной системы (5.25) в первом приближении можно представить в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e^{\alpha(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha(t-t_0)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \dfrac{x_{10}}{1-q} \\ x_{20} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{x_{10}}{1-q} & e^{\alpha(t-t_0)} \\ x_{20} & e^{-\alpha(t-t_0)} \end{matrix} \right\|.$$

Перейдем теперь к нахождению оператора N_2 и второго приближения централизованной системы. Для этого необходимо вычислить правую часть уравнения (5.7)

$$[\mathrm{S}, \tilde{\mathrm{U}}] + \frac{1}{2}[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \mathrm{S}_1]], \tag{5.33}$$

где оператор S_1 найден на предыдущем этапе: согласно формуле (5.23)

$$\mathrm{S}_1 = \frac{b_1}{\alpha} x_1 x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{k b_2}{2\alpha} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Как отмечалось в § 2, оператор S_1 определяется неоднозначно, так как в него может войти составляющая из алгебр $\mathfrak{B}(V_{\otimes 2})$ и $\mathfrak{B}(V_{\otimes 3})$, являющаяся решением однородного уравнения $[\mathrm{U}, \mathrm{S}] = 0$. Так как $\det \mathscr{S}_A^{(2)} \neq 0$, то однородная составляющая $\mathfrak{B}(V_{\otimes 2})$ отсутствует. Для $\mathfrak{B}(V_{\otimes 3})$ общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$\mathrm{S}_{10} = c_1 \hat{\hat{x}}_{m_3} \mathscr{X}_{13} \partial + c_2 \hat{\hat{x}}_{m_3} \mathscr{X}_{23} \partial = c_1 x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + c_2 x_1 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathrm{P},$$

где

$$\mathscr{X}_{13} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathscr{X}_{23} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

— матрицы, соответствующие базисным векторам (5.22) пространства $\hat{N}_A^{(3)}$. Постоянные c_1, c_2 выбираются из дополнительных условий. Положим $c_1 = c_2 \equiv 0$. В дальнейшем в операторе преобразования S_2 также будем полагать составляющую однородного уравнения тождественно равной нулю.

Приведем окончательный вид операторов $[\mathrm{S}_1, \mathrm{U}]$, $\frac{1}{2}[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \mathrm{S}_1]]$, опуская промежуточные выкладки:

$$[\mathrm{S}_1, \tilde{\mathrm{U}}] = -\left(\frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1^2 x_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} x_1^2 x_2^2 + \frac{5}{2} \frac{k b_1 b_2}{\alpha} x_1^3 x_2 + \frac{k b_2^2}{2\alpha} x_1^4 x_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} +$$
$$+ \left(\frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1 x_2^2 + 4 \frac{k b_1 b_2}{\alpha} x_1^2 x_2^2 - \frac{k^2 b_1 b_2}{2\alpha} x_1^3 x_2 + \frac{k b_2^2}{\alpha} x_1^3 x_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\frac{1}{2}[\mathrm{U}, [\mathrm{U}, \mathrm{S}_1]] = \frac{\alpha b_1}{2} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{k \alpha b_1}{2} x_1 x_2 + \alpha k b_2 x_1^2 x_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Используя введенные выше обозначения, оператор (5.33) представим в виде суммы:

$$[\mathbf{S},\ \tilde{\mathbf{U}}] + \frac{1}{2}[\mathbf{U}[\mathbf{U},\ \mathbf{S}]] = \mathbf{F}_{\otimes 22} + \mathbf{F}_{\otimes 2\,.} + \mathbf{F}_{\otimes 24} + \mathbf{F}_{\otimes 25},$$

где

$$\mathbf{F}_{\otimes 22} = \frac{\alpha b_1}{2} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{k\alpha b_1}{2} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{F}_{\otimes 23} = -\frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1 x_2^2 + \alpha k b_2 x_1^2 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{F}_{\otimes 24} = -\left(\frac{b_1 b_2}{\alpha} x_1^2 x_2^2 + \frac{5}{2}\,\frac{kb_1 b_2}{\alpha} x_1^3 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{4kb_1 b_2}{\alpha} x_1^2 x_2^2 - \frac{k^2 b_1 b_2}{2\alpha} x_1^3 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{F}_{\otimes 25} = -\frac{kb_2^2}{2\alpha} x_1^4 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{kb_2^2}{\alpha} x_1^3 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Повторяя проведенные выше вычисления, получаем следующий результат: $\mathbf{N}_2 = \operatorname{pr} \mathbf{F}_{\otimes 23}$, где

$$\operatorname{pr} \mathbf{F}_{\otimes 23} = -\frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1 x_2 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Далее для оператора $\mathbf{S}_2$ находим выражение

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{\otimes 22} + \mathbf{S}_{\otimes 23} + \mathbf{S}_{\otimes 24} + \mathbf{S}_{\otimes 25},$$

где

$$\mathbf{S}_{\otimes 22} = -\frac{b_1}{2} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + k\frac{b_1}{2} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{S}_{\otimes 23} = \frac{kb_2}{2} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{S}_{\otimes 24} = \left(-\frac{5}{2}\,\frac{kb_1 b_2}{\alpha^2} x_1^3 x_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha^2} x_1^2 x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-\frac{k^2 b_1 b_2}{6\alpha^2} x_1^3 x_2 - \frac{4kb_1 b_2}{3\alpha^2} x_1^2 x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\mathbf{S}_{\otimes 25} = -\frac{kb_2^2}{4\alpha^2} x_1^4 x_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{kb_2^2}{2\alpha^2} x_1^3 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Оператор $\mathbf{U}_0$ (5.6) во втором приближении определяется как

$$\mathbf{U}_0 = \alpha\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \varepsilon b_2 x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1 x_2 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{5.34}$$

а централизованная система соответственно принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 - \varepsilon b_2 x_1^2 x_2 - \varepsilon^2 \frac{3kb_1^2}{\alpha} x_1^2 x_2; \tag{5.35}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2 - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} x_1 x_2^2.$$

Выделим в централизованной системе второго приближения медленные и быстрые переменные, произведя замену (5.26). Оператор U_0 (5.34) перейдет в оператор

$$U_0(y) = -\varepsilon b_2 y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\alpha y_2 - \varepsilon b_2 y_1 y_2 - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} y_1 y_2\right) \frac{\partial}{\partial y_2},$$

централизованная система соответственно примет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = -\varepsilon b_2 x_1^2; \quad \frac{dy_2}{dt} = \alpha y_2 - \varepsilon b_2 y_1 y_2 - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} y_1 y_2. \tag{5.36}$$

При замене переменных (5.28) оператор $U_0(z)$ определяется как

$$U_0(z) = -\varepsilon b_2 z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \left(\alpha z_2 - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} z_1 z_2\right) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

а централизованная система принимает вид

$$\frac{dz_1}{dt} = -\varepsilon b_2 z_1^2; \quad \frac{dz_2}{dt} = -\alpha z_2 + \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} z_1 z_2. \tag{5.37}$$

Системы (5.36), (5.37) легко интегрируются аналогично тому, как это сделано выше:

$$y_1(t) = \frac{y_{10}}{1 + \varepsilon b_2 y_{10}(t - t_0)};$$

$$y_2(t) = y_{20} \exp \int_{t_0}^{t} \left[\alpha - \varepsilon b_2 y_1(t) - \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} y_1(t)\right] dt$$

и

$$z_1(t) = \frac{y_{20}}{1 + \varepsilon b_2 z_{10}(t - t_0)}; \quad z_2(t) = z_{20} \exp \int_{t_0}^{t} \left[-\alpha + \varepsilon^2 \frac{2kb_1^2}{\alpha} z_1(t)\right] dt.$$

Применим теорему 4.1 к централизованной системе второго приближения (5.35). Решение выпишем с точностью до ε^2:

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e^{\alpha(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha(t-t_0)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

где

$$a_1(\tau) = x_{10} + \frac{\tau}{1!}\left(-b_2 - \varepsilon \frac{2kb_1^2}{\alpha}\right) x_{10}^2 x_{20} + \frac{\tau^2}{2!}\left(b_2 + \varepsilon \frac{2kb_1^2}{\alpha}\right) \times$$

$$\times \left(2b_2 + \varepsilon \frac{2kb_1^2}{\alpha}\right) x_{10}^3 x_{20}^2;$$

$$a_2(\tau) = x_{20} + \frac{\tau}{1!} \varepsilon \frac{2kb_1^2}{\alpha} x_{10} x_{20}^2 + \frac{\tau^2}{2!} \varepsilon \frac{2kb_1^2}{\alpha}\left(-b_2 + \varepsilon \frac{2kb_1^2}{2}\right) x_{10}^2 x_{20}^3.$$

В т о р о й с л у ч а й. Не выполняется ни одно из резонансных соотношений (5.17) или (5.18). Этот случай имеет место, когда справедливы неравенства $\alpha \neq m$, $2\alpha \neq m$, $\alpha \neq 2m$, $3\alpha \neq m$, $4\alpha \neq m$, $3\alpha \neq 2m$, $2\alpha \neq 3m$, $\alpha \neq 4m$. Согласно теореме 4.5 централизованная система линеаризуется и система нулевого приближения имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = -mx_2.$$

Остановимся теперь подробно на вычислении преобразующего оператора S_1 для первого приближения. Согласно формулам (5.8)

$$S_1 = S_{\otimes 21} + S_{\otimes 31},$$

где

$$S_{\otimes 21} = \hat{\hat{x}}_{m_2} \Gamma_{12} \partial = \frac{b_1}{m} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{b_1}{\alpha} x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$S_{\otimes 31} = \hat{\hat{x}}_{m_3} \Gamma_{13} \partial = -\frac{b_1}{\alpha - m} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{b_2}{2\alpha} x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Матрицы Γ_{12}, Γ_{13} — это решения системы уравнений $\mathscr{F}_i \Gamma_{1i} - \mathscr{F}_{1i} \mathcal{A} = \mathscr{B}_{m_{i,1}}$, $i = 1, 2$, или эквивалентной ей системы уравнений $\hat{\mathscr{S}}_A^{(i)} \hat{\Gamma}_{1i} = \hat{\mathscr{B}}_{m_{i,1}}$, $i = 1, 2$. Входящие сюда величины таковы:

$$\mathscr{S}_A^{(2)} = \operatorname{diag} \| \alpha,\ 2\alpha + m,\ -m,\ \alpha,\ -\alpha - 2m,\ -m \|;$$

$$\mathscr{S}_A^{(3)} = \operatorname{diag} \| 2\alpha,\ 3\alpha + m,\ \alpha - m,\ 2\alpha,\ -2m,\ \alpha - m,\ \alpha - 3m,\ -2m \|;$$

$$\hat{\Gamma}_{12} = \operatorname{colon} \left\| 0,\ 0,\ \frac{b_1}{m},\ k\frac{b_1}{\alpha},\ 0,\ 0 \right\|;$$

$$\hat{\Gamma}_{13} = \operatorname{colon} \left\| 0,\ 0,\ -\frac{b_2}{\alpha - m},\ k\frac{b_2}{2\alpha},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \right\|.$$

Матрицы $\mathscr{B}_{m_2,1}$, $\mathscr{B}_{m_3,1}$ определены ранее (см. формулы (5.5)).

Из анализа резонансных соотношений (5.17), (5.18) следует, что, кроме разобранных двух случаев, не могут реализоваться никакие другие принципиально новые и фигурирующие в теоремах 4.2—4.5.

П р и м е р 5. 2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}_1' = -x_1' + \varepsilon (1 - x_1'^{(2)}) \dot{x}_1'.$$

Обозначая $\dot{x}_1' = x_2'$, представим это уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1' = x_2'; \quad \dot{x}_2' = -x_1' + \varepsilon (1 - x_1'^2) x_2'. \tag{5.38}$$

Ассоциированным с системой (5.38) дифференциальным оператором является $U_0' = U' + \varepsilon \hat{U}'$, где

$$U' = x_2' \frac{\partial}{\partial x_1'} - x_1' \frac{\partial}{\partial x_2'}; \quad \tilde{U}' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2'} - x_1'^2 x_2' \frac{\partial}{\partial x_2'}.$$

Опуская для упрощения записей штрих (см. § 3 гл. 1), запишем эти операторы в виде $U = \hat{\hat{x}}_{m_1} \mathcal{A} \partial$, $\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Оператор $\tilde{U}$ представим в виде суммы:

$$\tilde{U} = \tilde{U}_{\otimes 1} + \tilde{U}_{\otimes 3}, \quad \hat{U}_{\otimes i} \in \mathfrak{V}(V_{\otimes i}), \quad i = 1, 3, \tag{5.39}$$

где

$$\tilde{\mathrm{U}}_{\otimes 1} = \hat{\hat{x}}_{m_1}\mathscr{B}_{m_1,1}\partial, \quad \tilde{\mathrm{U}}_{\otimes 3} = \hat{\hat{x}}_{m_3}\mathscr{B}_{m_3,1}\partial;$$

$$\mathscr{B}_{m_1,1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathscr{B}_{m_3,1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Остановимся на вычислении двух приближений в преобразованном операторе (4.2):

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon\mathrm{N}_1 + \varepsilon^2\mathrm{N}_2. \tag{5.40}$$

В замене переменных (1.5) из гл. 3 вычислим операторы S_1 и S_2, которые находим из уравнений

$$\begin{gathered} [\mathrm{U},\ \mathrm{S}_1] = \tilde{\mathrm{U}} - \mathrm{pr}\,\tilde{\mathrm{U}}; \\ [\mathrm{U}_1,\ \mathrm{S}_2] = \left\{-[\tilde{\mathrm{U}},\ \mathrm{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathrm{U}\,[\mathrm{U},\ \mathrm{S}_1]]\right\} - \mathrm{pr}\,\{\cdots\}. \end{gathered} \tag{5.41}$$

Решаем эти уравнения в два этапа. На первом находим S_1:

$$\mathrm{S}_1 \equiv \mathrm{S}_{\otimes 11} + \mathrm{S}_{\otimes 31}, \quad \mathrm{S}_{\otimes i1} \in \mathfrak{B}(V_{\otimes i}), \quad i = 1,\ 3, \tag{5.42}$$

где $\mathrm{S}_{\otimes i1} \equiv \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{1i}\partial$, $i = 1, 3$; Γ_{1i} — прямоугольные матрицы размерностей $m_i \times \times n$, являющиеся решениями системы независимых алгебраических уравнений

$$\mathscr{F}_i\Gamma_{1i} - \Gamma_{1i}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_i,1} - \mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_i,1}, \quad i = 1,\ 3. \tag{5.43}$$

На втором этапе находим S_2. Как нетрудно заметить из структуры правых частей уравнения (5.41), $\mathrm{S}_2 \in \mathfrak{B}(V_{\otimes 5})$, и поэтому решение ищем в виде суммы:

$$\mathrm{S}_2 = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{S}_{\otimes i2}, \quad \mathrm{S}_{\otimes i2} = \hat{\hat{x}}_{m_i}\Gamma_{2i}\partial, \quad i = \overline{1,\ 5},$$

где Γ_{2i} — решения системы независимых алгебраических уравнений

$$\mathscr{F}_i\Gamma_{2i} - \Gamma_{2i}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_i,2} - \mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_i,2}, \quad i = \overline{2,\ 5}. \tag{5.44}$$

Проведем соответствующие вычисления.

Первое приближение. Рассмотрим уравнения (5.43). Матрицы $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ представления оператора U в подпространствах $V_{\otimes 2}$, $V_{\otimes 3}$ соответственно равны:

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{A} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathscr{F}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathscr{F}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрицы $\mathscr{B}_{m_1,1}$, $\mathscr{B}_{m_3,1}$ определены равенствами (5.39).

Перейдем от уравнений (5.43) к уравнениям в пространствах $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_1,n)}$, $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_2,n)}$

$$\mathscr{G}_A^{(i)}\hat{\Gamma}_{i1} = \hat{\mathscr{B}}_{m_i,1} - \mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_i1}, \tag{5.45}$$

где

$$\mathscr{G}_A^{(i)} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_{m_i} \otimes \mathscr{A}^T, \quad i = 1,\ 3;$$

$$\mathscr{S}_A^{(1)} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathscr{S}_A^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$\hat{\Gamma}_{1i}$, $\hat{\mathscr{B}}_{m_i,1}$ — вектор-столбцы, составленные из строк матриц Γ_{1i}, $\mathscr{B}_{m_i,1}$.

Для нахождения $\mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_i,1}$ необходимо найти базисы подпространств $\hat{N}_A^{(1)}$, $\hat{N}_A^{(3)}$ — ядер операторов $\mathscr{S}_A^{(1)}$, $\mathscr{S}_A^{(3)}$, образованных независимыми решениями уравнений $\mathscr{S}_A^{(i)}\hat{\mathscr{Z}} = 0$, $i = 1, 3$, а также базисы подпространств $\hat{N}_A^{(1)*}$, $\hat{N}_A^{(3)*}$ — ядер операторов $\mathscr{S}_A^{(1)T}$, $\mathscr{S}_A^{(3)T}$, образованных независимыми решениями уравнений $\mathscr{S}_A^{(i)T}\hat{\mathscr{Z}} = 0$, $i = 1, 3$. Приведем результаты вычислений:

$$\hat{N}_A^{(1)}: \hat{\mathscr{Z}}_{11} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 1,\ -1,\ 0\|;\quad \hat{N}_A^{(3)}: \hat{\mathscr{Z}}_{31} = \mathrm{colon}\,\|1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1\|;$$

$$\hat{\mathscr{Z}}_{12} = \mathrm{colon}\,\|1,\ 0,\ 0,\ 1\|;\quad \hat{\mathscr{Z}}_{32} = \mathrm{colon}\,\|0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0\|;$$

$$\hat{N}_A^{(1)*}: \hat{\mathscr{Z}}_{11*} = \mathrm{colon}\,\|0,\ -1,\ 1,\ 0\|;\quad \hat{N}_A^{(3)*}: \hat{\mathscr{Z}}_{31*} = \mathrm{colon}\,\|3,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 3\|;$$

$$\hat{\mathscr{Z}}_{12*} = \mathrm{colon}\,\|1,\ 0,\ 0,\ 1\|;\quad \hat{\mathscr{Z}}_{32*} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 3,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -3,\ 0\|.$$

Найдем проекцию от вектора $\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ 1\|$. Обозначая через $\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1N}$ проекцию $\mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1}$:

$$\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1N} = \alpha_{11}\hat{\mathscr{Z}}_{11} + \alpha_{12}\hat{\mathscr{Z}}_{12}$$

и учитывая, что разность $\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1} - \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1N}$ принадлежит образу $T_A^{(1)}$ оператора $\mathscr{S}_A^{(1)}$ и, следовательно, ортогональна пространству $\hat{N}_A^{(1)}$, для коэффициентов α_{11}, α_{12} получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\langle \hat{\mathscr{Z}}_{11},\ \hat{\mathscr{Z}}_{11*}\rangle\,\alpha_{11} + \langle \hat{\mathscr{Z}}_{12},\ \hat{\mathscr{Z}}_{11*}\rangle\,\alpha_{12} = \langle \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{11*}\rangle;$$

$$\langle \hat{\mathscr{Z}}_{11},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle\,\alpha_{11} + \langle \hat{\mathscr{Z}}_{12},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle\,\alpha_{12} = \langle \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle.$$

Здесь значения скалярных произведений равны:

$$\langle \hat{\mathscr{Z}}_{11},\ \hat{\mathscr{Z}}_{11*}\rangle = -2;\quad \langle \hat{\mathscr{Z}}_{12},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle = 0;\quad \langle \hat{\mathscr{Z}}_{11},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle = 0;\quad \langle \hat{\mathscr{Z}}_{12},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle = 2;$$

$$\langle \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{11}\rangle = 0;\quad \langle \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{12*}\rangle = 1.$$

В результате простых вычислений находим, что $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = 1/2$. Следовательно,

$$\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_1,1} \equiv \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1N} \equiv \mathrm{colon}\,\|1/2,\ 0,\ 0,\ 1/2\|. \tag{5.46}$$

Тем самым определена правая часть первого из уравнений (5.45):

$$\mathscr{S}_A^{(1)}\hat{\Gamma}_{11} = \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1T}; \quad \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1T} = \hat{\mathscr{B}}_{m_1,1} - \operatorname{pr}\mathscr{B}_{m_1,1} = \operatorname{colon}\| -{}^1/_2,\ 0,\ 0,\ {}^1/_2\|. \quad (5.47)$$

Так как матрица $\mathscr{S}_A^{(1)}$ особенная, то система (5.47) содержит зависимые уравнения. Чтобы избавиться от переопределенности, будем искать решение $\hat{\Gamma}_{11}$ в виде суммы: $\hat{\Gamma}_{11} = \gamma_{11}\hat{Y}_{11} + \gamma_{12}\hat{Y}_{12}$, где $\hat{Y}_{11}$, $\hat{Y}_{12}$ — базисные векторы пространства $T_A^{(1)}$. Эти векторы можно найти как решение системы уравнений

$$\langle \hat{Z}_{11*}\ \hat{Y}\rangle = 0, \quad \langle \hat{Z}_{12*},\ \hat{Y}\rangle = 0.$$

В результате вычислений находим $\hat{Y}_{11} = \operatorname{colon}\| -1, 0, 0, 1 \|$, $\hat{Y}_{12} = \| 0, 1, 1, 0 \|$. Подстановка значений $\hat{\Gamma}_{11}$, $\hat{\mathscr{B}}_{m_1,1T}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} {}^1/_2 \\ 0 \\ 0 \\ {}^1/_2 \end{Vmatrix}. \quad (5.48)$$

Чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, умножим обе части уравнений (5.48) на транспонированную матрицу этой же системы коэффициентов. Тогда

$$\begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \end{Vmatrix},$$

откуда находим, что $\gamma_{11} = 0$, $\gamma_{12} = {}^1/_4$. Следовательно,

$$\hat{\Gamma}_{11} = \operatorname{colon}\| 0,\ {}^1/_4,\ {}^1/_4,\ 0\|. \quad (5.49)$$

Перейдем к решению второго уравнения системы (5.45). Проекцию от вектора $\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} = \operatorname{colon}\| 0,\ 0,\ 0, -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \|$ будем искать в виде

$$\operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} = \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1N} = \alpha_{31}\hat{Z}_{31} + \alpha_{32}\hat{Z}_{32}$$

из условия ортогональности разности $\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} - \operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1}$ подпространству $\hat{N}_A^{(3)*}$, из которого в свою очередь получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_{31}\langle \hat{\mathscr{Z}}_{31},\ \hat{\mathscr{Z}}_{31*}\rangle + \alpha_{32}\langle \hat{\mathscr{Z}}_{32},\ \hat{\mathscr{Z}}_{31*}\rangle = \langle \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{31*}\rangle; \\ &\alpha_{31}\langle \hat{\mathscr{Z}}_{31},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle + \alpha_{32}\langle \hat{\mathscr{Z}}_{32},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle = \langle \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Здесь $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{31},\ \hat{\mathscr{Z}}_{31*}\rangle = 8$; $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{31},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle = 0$; $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{32},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle = 0$; $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{32},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle = -8$; $\langle \mathscr{B}_{m_3,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{31*}\rangle = -1$; $\langle \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1},\ \hat{\mathscr{Z}}_{32*}\rangle = 0$. В результате решения системы (5.50) находим $\alpha_{31} = {}^1/_8$, $\alpha_{32} = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{pr}\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} = \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1N} = \operatorname{colon}\| -{}^1/_8,\ 0,\ 0,\ -{}^1/_8,\ -{}^1/_8,\ 0,\ 0,\ {}^1/_8\|. \quad (5.51)$$

Для правой части $\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1T} = \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} - \operatorname{pr}\mathscr{B}_{m_3,1}$ второго уравнения системы (5.43) получаем

$$\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1T} = \| {}^1/_8,\ 0,\ 0,\ -{}^7/_8,\ {}^1/_8,\ 0,\ 0,\ {}^1/_8\|.$$

Базис пространства $T_A^{(3)}$, определяемый как решение системы уравнений $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{31*},\ Y\rangle = 0$, $\langle \hat{\mathscr{Z}}_{32*},\ Y\rangle = 0$, содержит шесть векторов:

$$\hat{Y}_{21} = \operatorname{colon}\| 1,\ 0,\ 0,\ -3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|; \quad \hat{Y}_{24} = \operatorname{colon}\| 0,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\|;$$

$\hat{Y}_{22} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\|;\quad \hat{Y}_{25} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\|;$

$\hat{Y}_{23} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ 0,\ -3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\|;\quad \hat{Y}_{26} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 0,\ -3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\|.$

Решение уравнения $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}^{(3)}\hat{\Gamma}_{13} = \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1T} \equiv \hat{\mathscr{B}}_{m_3,1} - \mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1}$ будем искать в виде разложения по базису подпространства $T_{\mathrm{A}}^{(3)}$ $\hat{\Gamma}_{13} = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{2i}\hat{Y}_{2i}$. При подстановке $\hat{\Gamma}_{13}$, $\hat{\mathscr{B}}_{m_3,1T}$ в приведенные выше уравнения получаем систему восьми уравнений с шестью переменными

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{24} \\ \gamma_{25} \\ \gamma_{26} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} {}^{1}/_{8} \\ 0 \\ 0 \\ -{}^{7}/_{8} \\ {}^{1}/_{8} \\ 0 \\ 0 \\ {}^{1}/_{8} \end{Vmatrix}.$$

Умножая обе части данного уравнения на транспонированную матрицу коэффициентов этого же уравнения, получаем систему, содержащую ровно шесть уравнений:

$$\begin{Vmatrix} 88 & 4 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 84 & 8 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 88 & 4 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & -8 & 100 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{24} \\ \gamma_{25} \\ \gamma_{26} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение ее находим без труда: $\gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{23} \equiv 0$, $\gamma_{24} = -{}^{5}/_{32}$, $\gamma_{25} = {}^{7}/_{32}$, $\gamma_{26} = -{}^{3}/_{32}$.

Итак, окончательно имеем

$$\hat{\Gamma}_{13} = \mathrm{colon}\,\|0,\ -{}^{5}/_{32},\ {}^{1}/_{32},\ 0,\ 0,\ {}^{7}/_{32},\ -{}^{3}/_{32},\ 0\|. \tag{5.52}$$

Подведем итог изложенному. С учетом формул (5.46) и (5.51) для матриц $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_1,1}$ и $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_3,1}$ выпишем оператор U_0 в первом приближении:

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{U} + \varepsilon\mathrm{N}_1, \tag{5.53}$$

где

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{pr}\,\tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{N}_{\otimes 11} + \mathrm{N}_{\otimes 13};$$

$$\mathrm{N}_{\otimes 11} = \hat{\hat{x}}_{m_1}\mathscr{B}_{m_1,1N}\partial = \frac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

$$\mathrm{N}_{\otimes 31} = \hat{\hat{x}}_{m_3}\mathscr{B}_{m_3,1N}\partial = -\frac{1}{8}\left((x_1^2 + x_2^2)\,x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 + x_2^2)\,x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

С учетом формул (5.49), (5.52) для матриц Γ_{11}, Γ_{13} оператор преобразования первого приближения (5.42) определяется как $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_{\otimes 11} + \mathrm{S}_{\otimes 31}$, где

$$\mathrm{S}_{\otimes 11} = \hat{\hat{x}}_{m_1}\Gamma_{11}\partial = \frac{1}{4}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

$$\mathrm{S}_{\otimes 31} = \hat{\hat{x}}_{m_3}\Gamma_{13}\partial = \left(\frac{1}{32}x_1^2x_2 - \frac{3}{32}x_2^3\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-\frac{5}{32}x_1^3 + \frac{7}{32}x_1x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Централизованная система первого приближения принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)\right\} x_1;$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)\right\} x_2. \tag{5.54}$$

Воспользуемся результатами теоремы 4.1 для представления решения системы (5.54) в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1(\tau) \\ \eta_2(\tau) \end{matrix} \right\|, \tag{5.55}$$

где вектор $\eta(\tau) = \operatorname{colon} \| \eta_1(\tau), \eta_2(\tau) \|$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \varepsilon \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\right\} \eta_1; \tag{5.56}$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \varepsilon \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\right\} \eta_2, \quad \eta_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2,$$

представляемого рядом Ли

$$\eta_i^{(\tau)} = x_{i0} + \mathrm{N}_{10} x_{i0} \frac{\tau}{1!} + \mathrm{N}_{10}^2 x_{i0} \frac{\tau^2}{2!} + \cdots, \quad \tau \equiv \varepsilon t, \quad i = 1, 2.$$

Здесь

$$\mathrm{N}_{10} \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_{10}^2 + x_{20}^2)\right)\left(x_{10}\frac{\partial}{\partial x_{10}} + x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{20}}\right).$$

Система (5.56), как нетрудно заметить, получается из централизованной отбрасыванием слагаемых при ε в нулевой степени.

Используя элементарный прием введения вспомогательного аргумента, решение (5.55) можно также представить формулами

$$x_1 = A(\tau)\sin[t + \varphi(\tau)]; \quad x_2 = + A(\tau)\cos[t + \varphi(\tau)], \tag{5.57}$$

в которых амплитуда $A(\tau)$ и фаза $\varphi(\tau)$ определяются как

$$A(\tau) = \sqrt{\eta_1^2(\tau) + \eta_2^2(\tau)} \ \text{и} \ \varphi(\tau) = \operatorname{arctg}\frac{\eta_1(\tau)}{\eta_2(\tau)}. \tag{5.58}$$

Исследуем возможность разделения переменных в централизованной системе (5.54). Из трех уравнений $\mathscr{F}_1\alpha_1 = 0$, $\mathscr{F}_2\alpha_2 = 0$, $\mathscr{F}_3\alpha_3 = 0$ (см. § 4) только второе имеет нетривиальное решение $\alpha_2 = \operatorname{colon}\| 1, 0, 1 \|$, и, как легко убедиться непосредственным вычислением, имеется единственный интеграл $\rho(x) = \hat{\hat{x}}_{m_2}\alpha_2 = x_1^2 + x_2^2$. Операторы $\mathrm{N}_{\otimes 11}$, $\mathrm{N}_{\otimes 31}$ переводят интегралы оператора U в его же интегралы:

$$\mathrm{N}_{\otimes 11}\rho(x) \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad \mathrm{N}_{\otimes 31}\rho(x) \equiv -\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2);$$

они принадлежат полугруппе $\mathfrak{M}(0, \rho(x))$, порожденной элементом $x_1^2 + x_2^2$. Оператор U над полем R не имеет собственных функций в $V_{\otimes 1}$, и поэтому в качестве второй переменной можно выбрать произвольный интеграл уравнения $x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Легко проверить, что общим интегралом этого уравнения является $v(x) = F\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Произведем в операторе (5.53) замену переменных

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}. \tag{5.59}$$

В результате получим

$$U_0(y) = \frac{\partial}{\partial y_2} + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} y_1^2\right) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

откуда можно выделить соответственно медленную и быструю переменные:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{4} y_1^2\right) y_1 \text{ и } \frac{dy_2}{dt} = 1. \tag{5.60}$$

Выбор функции F в виде арктангенса в замене (5.59) обусловлен тем, что обратными к ним являются функции

$$x_1 = y_1 \sin y_2, \quad x_2 = y_1 \cos y_2. \tag{5.61}$$

Этот факт можно установить либо подстановкой (5.61) в равенства (5.59), либо следующим элементарным выводом:

$$\sin^2 y_2 \equiv \frac{\sin^2 y_2}{\sin^2 y_2 + \cos^2 y_2} \equiv \frac{\operatorname{tg}^2 y_2}{\operatorname{tg}^2 y_2 + 1}.$$

Подставляя значение $\operatorname{tg} y_2 = \frac{x_1}{x_2}$ из (5.59), получаем

$$\sin^2 y = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2}{y_1^2},$$

откуда находим $x_1 = y_1 \sin y_2$. Аналогично находим $x_2 = y_1 \cos y_2$.

Таким образом, если будут получены решения $y_1(t)$, $y_2(t)$ системы (5.60), то решения централизованной системы (5.54) можно представить в виде

$$x_1(t) = y_1(\tau) \sin y_2(t); \quad x_2 = y_1(\tau) \cos y_2(t). \tag{5.62}$$

Система (5.60) легко интегрируется в квадратурах:

$$y_1(t) = \frac{y_{10} \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} y_{10}^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}}, \quad y_2 = t + y_{20},$$

и поэтому формулам (5.62) можно придать законченный вид

$$x_1(t) = \frac{x_{10} \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} x_{10}^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \sin(t + y_{20});$$

$$x_2(t) = \frac{x_{10} \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} x_{10}^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(t + y_{20}). \tag{5.63}$$

Аналогично можно проинтегрировать систему (5.56), если предварительно произвести замену переменных

$$\xi_1 = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}; \quad \xi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{5.64}$$

В новых переменных система расщепляется:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\xi_1^2\right)\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = 0;$$

$$\xi_{10} = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}, \quad \xi_{20} = \operatorname{arctg}\frac{x_{10}}{x_{20}}$$

и элементарно интегрируется:

$$\xi_1 = \frac{\xi_{10} e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10}^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}}, \quad \xi_2 = \xi_{20}.$$

После обращения функций (5.64) найдем явные выражения для функций $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$:

$$\eta_1(t) = \frac{\xi_{10} e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10} (e^{\varepsilon t} - 1)}} \sin\xi_{20}; \quad \eta_2(t) = \frac{\xi_{10} e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10}^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos\xi_{20}.$$

Подстановка найденных значений $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ в формулы (5.58), как нетрудно заметить, приводит к следующему результату:

$$A(\tau) \equiv \xi_1(\tau) = \frac{\xi_{10} e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10}^2 (e^{\tau} - 1)}}; \quad \varphi(\tau) \equiv \xi_2(t) \equiv \xi_{20},$$

а решение централизованной системы (5.57) принимает вид

$$x_1(t) = \frac{\xi_{10} e^{\tau/2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10}^2 (e^{\tau} - 1)}} \sin(t + \xi_{20}),$$

$$x_{20} = \frac{\xi_{10} e^{\tau/2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi_{10}^2 (e^{\tau} - 1)}} \cos(t + \varepsilon_{20}). \tag{5.65}$$

Подведем итог изложенному выше. Выражения для замены переменных (1.5) из гл. 3 в первом приближении (т. е. выписанные с точностью до ε) таковы:

$$x_i' = (1 + \varepsilon S_1) x_i, \quad i = 1, 2,$$

или с учетом тождества $S_1 \equiv S_{\otimes 11} + S_{\otimes 31}$

$$x_1' = x_1 + \varepsilon\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{32}x_1^2 x_2 - \frac{3}{32}x_2^3\right),$$

$$x_2' = x_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{32}x_1^3 + \frac{7}{32}x_1 x_2^2\right).$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решение централизованной системы. В качестве формы решений можно использовать либо формулы (5.63), полученные расщеплением централизованной системы, либо формулы (5.65), полученные расщеплением системы (5.56) на быстрые и медленные переменные.

Приведенные результаты согласуются с известными. В асимптотическом методе решение уравнения Ван-дер-Поля [12, с. 81]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

в первом приближении найдено в виде

$$x = a\cos\psi, \tag{5.66}$$

где переменные a, ψ находятся из вспомогательных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right); \quad \frac{d\psi}{dt} = 1. \tag{5.67}$$

Заметим, что уравнения (5.67) полностью совпадают с полученными выше уравнениями (5.60) (при $y_1 \equiv a$, $y_2 \equiv \psi$); совпадает также вид решения $x_2 = y_1 \cos y_2$ централизованной системы с видом решения (5.66).

В заключение сделаем следующее замечание. Форма замен (5.59) получена из общих теоретических положений, изложенных в предыдущих параграфах. Ее можно было бы получить и из традиционных рассуждений. Приведем общее решение системы нулевого приближения централизованной системы (5.54):

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|, \quad \eta_i(0) = x_{i0}. \tag{5.68}$$

Будем считать η_1, η_2 новыми переменными. После несложных выкладок для централизованной системы находим

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\right\}\eta_1; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\right\}\eta_2. \tag{5.69}$$

Данная система совпадает с системой (5.56). Представим далее решение (5.68) в эквивалентной форме

$$x_1 = \xi_1 \sin(t + \xi_2), \quad x_2 = -\xi_1\cos(t + \xi_2), \tag{5.70}$$

где

$$\xi_1 = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}, \quad \xi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\eta_1}{\eta_2}.$$

Поскольку формулы (5.70) совпадают с формулами (5.64), то дальнейшее интегрирование системы (5.69) полностью производится аналогично тому, как это сделано для системы (5.56), если принять ξ_1, ξ_2 в качестве новых переменных.

Второе приближение. Приведем выражение для оператора в правой части уравнения (5.41):

$$-[\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathbf{U}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}_1]] =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}x_2 + \frac{23}{32}x_1^2x_2 + \frac{9}{32}x_2^3 + \frac{1}{32}x_1^4x_2 - \frac{9}{32}x_1^2x_2^5\right)\frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{32}x_1^3 - \frac{55}{32}x_1x_2^2 + \frac{5}{32}x_1^5 + \frac{5}{32}x_1^3x_2^2 + \frac{6}{32}x_1x_2^4\right)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Видим, что правая часть уравнения (5.41) принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\mathfrak{T}(V_{\otimes 5}))$. Представим этот оператор суммой:

$$-[\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathbf{U}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}_1]] \equiv \mathbf{W}_{\otimes 21} + \mathbf{W}_{\otimes 23} + \mathbf{W}_{\otimes 25},$$

где

$$\mathbf{W}_{\otimes 12} = \hat{\hat{x}}\mathcal{B}_{m_1,1}\partial; \quad \mathbf{W}_{\otimes 32} = \hat{\hat{x}}_{m_3}\mathcal{B}_{m_3,2}\partial; \quad \mathbf{W}_{\otimes 35} = \hat{\hat{x}}_{m_5}\mathcal{B}_{m_5,2}\partial;$$

$$\mathscr{B}_{m_1,2} = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathscr{B}_{m_3,2} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{3}{32} \\ \frac{23}{32} & 0 \\ 0 & -\frac{55}{32} \\ \frac{9}{32} & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\mathscr{B}_{m_5,2} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{5}{32} \\ \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{5}{32} \\ -\frac{9}{32} & 0 \\ 0 & \frac{6}{32} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Только в трех уравнениях (5.44) для нахождения преобразования Γ_{2i}, $i = \overline{1, 5}$, правые части не равны нулю:

$$\mathscr{F}_1\Gamma_{21} - \Gamma_{21}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_1,2}; \quad \mathscr{F}_3\,\Gamma_{23} - \Gamma_{23}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_3,2}; \quad \mathscr{F}_5\Gamma_{53} - \Gamma_{53}\mathscr{A} = \mathscr{B}_{m_5,2}. \quad (5.71)$$

Матрицы представлений $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_3$ выписаны ранее, а

$$\mathscr{F}_5 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Проекции $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_1,2}$, $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_{m_3,2}$ находятся так же, как и выше. Поэтому приведем окончательный результат:

$$\mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_1,2} \equiv \hat{\mathscr{B}}_{m_1,2N} \equiv \| 0, -{}^1/_4 \ \ -{}^1/_4, 0 \|;$$

$$\mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_3,2} \equiv \hat{\mathscr{B}}_{m_3,2N} \equiv \| 0, -{}^3/_8, {}^3/_8, 0, 0, -{}^3/_8, {}^3/_8, 0 \|.$$

Этим векторам соответствуют операторы

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{W}_{\otimes 21} = \hat{\hat{x}} \begin{Vmatrix} 0 & {}^1/_4 \\ -{}^1/_4 & 0 \end{Vmatrix} \partial = -\frac{1}{4}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right);$$

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{W}_{\otimes 23} = \hat{\hat{x}}_{m_3} \begin{Vmatrix} 0 & -{}^3/_8 \\ {}^3/_8 & 0 \\ 0 & -{}^3/_8 \\ {}^3/_8 & 0 \end{Vmatrix} \partial = \frac{3}{8}(x_1^2 x_2 + x_2^3)\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{3}{8}(x_1^3 + x_1 x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Уравнения (5.71) для пространства $\hat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$ принимают вид

$$\mathscr{G}_A^{(5)}\hat{\Gamma}_{53} = \hat{\mathscr{B}}_{m_5,2}; \quad \mathscr{G}_A^{(5)} \equiv \mathscr{F}_5 \otimes \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_6 \otimes \mathscr{A}^T;$$

$$G_A^{(5)} = \left\| \begin{array}{cccc|cccccccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

(Все незаполненные места в матрице $\mathscr{G}_A^{(5)}$ равны нулю.)

Базисные векторы центров $\hat{N}_A^{(5)}$ и $\hat{N}_A^{(5)*}$ соответственно равны:

$$\hat{\mathscr{X}}_{51} = \mathrm{colon}\,\|1,\ 0,\ 0,\ 1,\quad 2,\ 0,\ 0,\ 2,\quad 1,\ 0,\ 0,\ 1\|,$$

$$\hat{\mathscr{X}}_{52} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 1,\ -1,\ 0,\quad 0,\ 2,\ -2,\ 0,\quad 0,\ 1,\ -1,\ 0,\|;$$

$$\hat{\mathscr{X}}_{51*} = \mathrm{colon}\,\|0,\ 5,\ -1,\ 0,\quad 0,\ 1,\ -1,\ 0,\quad 0,\ 1,\ -5,\ 0\|,$$

$$\hat{\mathscr{X}}_{52*} = \mathrm{colon}\,\|5,\ 0,\ 0,\ 1,\quad 1,\ 0,\ 0,\ 1,\quad 1,\ 0,\ 0,\ 5\|.$$

Проекции $\mathrm{pr}\,\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2} \equiv \hat{\mathscr{B}}_{m_5,2N}$ ищем в виде суммы: $\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2N} = \alpha_1\hat{\mathscr{X}}_{51} + \alpha_2\mathscr{X}_{52}$, в которой коэффициенты α_1, α_2 находятся из условия ортогональности вектора $\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2} - \hat{\mathscr{B}}_{m_5,2N}$ к подпространству $\hat{N}_A^{(5)*}$. В результате получаем систему уравнений

$$\alpha_1\langle\hat{\mathscr{X}}_{51},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle + \alpha_2\langle\hat{\mathscr{X}}_{52},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle = \langle\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle;$$

$$\alpha_2\langle\hat{\mathscr{X}}_{51},\hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle + \alpha_2\langle\hat{\mathscr{X}}_{52},\ \hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle = \langle\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2},\ \hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle,$$

в которой $\langle\hat{\mathscr{X}}_{51},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle = 0$, $\langle\hat{\mathscr{X}}_{52},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle = 16$, $\langle\hat{\mathscr{X}}_{51},\ \hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle = 16$, $\langle\hat{\mathscr{X}}_{52},\ \hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle = 0$, $\langle\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2},\ \hat{\mathscr{X}}_{51*}\rangle = {}^{11}/_{8}$, $\langle\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2},\ \hat{\mathscr{X}}_{52*}\rangle = 0$. В итоге находим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = {}^{11}/_{18}$ и соответственно

$$\hat{\mathscr{B}}_{m_5,2N} \equiv \mathrm{colon}\left\|0,\ \frac{11}{128},\ -\frac{11}{128},\ 0,\ 0,\ \frac{22}{128},\ -\frac{22}{128},\ 0,\ 0,\ \frac{11}{128},\ \frac{11}{128},\ 0\right\|;$$

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{W}_{\otimes 25} = \hat{\hat{x}}_{m_5}\left\|\begin{matrix} 0 & -\frac{11}{128} & 0 & -\frac{22}{128} & 0 & -\frac{11}{128} \\ \frac{11}{128} & 0 & \frac{22}{128} & 0 & \frac{11}{128} & 0 \end{matrix}\right\|^T \partial =$$

$$= -\frac{11}{128}(x_1^4x_2 + 2x_2^2x_2^3 + x_2^5)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{11}{128}(x_1^5 + 2x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4)\frac{\partial}{\partial x_2} =$$

$$= -\frac{11}{128}(x_1^2 + x_2^2)^2\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Итак, оператор U_0 (5.40), ассоциированный с централизованной системой, во втором приближении определяется как

$$U_0 = U + \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)\right)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{11}{128}(x_1^2 + x_2^2)^2\right)\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Соответствующая ему централизованная система имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)\right)x_1 + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{11}{128}(x_1^2 + x_2^2)^2\right)x_2; \qquad (5.72)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2)\right)x_2 - \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{11}{128}(x_1^2 + x_2^2)^2\right)x_1.$$

Здесь нет необходимости повторять все рассуждения по выбору замены переменных (5.59) для разделения переменных в системе (5.72), изложенные выше. В результате преобразований переменных по формулам (5.59) оператор U_0 описывается формулой

$$U_0 = \frac{\partial}{\partial y_2} + \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y_1^2\right)y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}y_1^4\right)\frac{\partial}{\partial y_2},$$

а централизованная система соответственно принимает вид

$$\frac{dy_1}{dt} = \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y_1^2\right)y_1;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 1 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}y_1^2 + \frac{11}{128}y_1^4\right). \qquad (5.73)$$

Система для переменных y_1, y_2 легко интегрируется в квадратурах:

$$y_1(t) = \frac{y_{10}e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}y_{10}^2(e^{\varepsilon t} - 1)}}, \quad y_{10} = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2};$$

$$y_2(t) = \int_0^t \left(1 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}y_1^2(t) + \frac{11}{128}y_1^4(t)\right)\right)dt + y_{20}, \quad y_{20} = \operatorname{arctg}\frac{x_{10}}{x_{20}}.$$

Чтобы получить решение системы (5.72), нужно подставить найденные значения функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ в формулы (5.61):

$$x_1(t) = y_1(t)\sin y_2(t), \quad x_2(t) = y_1(t)\cos y_2(t). \qquad (5.74)$$

Далее, переход к решению исходных уравнений (5.38) во втором приближении требует знания оператора S_2. Вычисление S_2 производится аналогично вычислению S_1. Окончательный результат таков:

$$S_1 = S_{\otimes 12} + S_{\otimes 32} + S_{\otimes 52},$$

где

$$S_{\otimes 12} = -0{,}25x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 0{,}25x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$S_{\otimes 32} = (-0{,}00764x_1^3 + 0{,}0558x_1x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$+ (-0{,}4775x_1^2x_2 + 0{,}1482x_2^3) \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$S_{\otimes 52} = (0{,}02511x_1^5 + 0{,}02195x_1^3x_2^2 + 0{,}05265x_1x_2^4) \frac{\partial}{\partial x_1} -$$

$$-(0{,}03785x_1^4x_2 + 0{,}03765x_1^2x_2^3 + 0{,}02493x_2^5) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Для нахождения решений централизованной системы второго приближения (5.72) можно также воспользоваться представлением решения в виде (см. теорему (4.1))

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1(\tau) \\ \eta_2(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

где вектор $\eta(\tau) = \operatorname{colon} \| \eta_1(\tau), \eta_2(\tau) \|$ является решением дифференциальной системы

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \eta_1 \right] + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{8} (\eta_1^2 + \eta_2^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{11}{128} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right] \eta_2; \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \eta_2 \right] - \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{8} (\eta_1^2 + \eta_2^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{11}{128} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right] \eta_1, \quad \eta_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{5.75}$$

представляемым рядами Ли.

Далее, по аналогии с тем, как это сделано выше для соответствующей системы первого приближения,

$$x_1 = \xi_1 \sin(t + \xi_2); \quad x_2 = \xi_1 \cos(t + \xi_2),$$

где $\xi_1 = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$; $\xi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{\xi_2}$. Считая ξ_1, ξ_2 новыми переменными, преобразуем уравнения (5.75) к системе с разделенными переменными

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \xi_1^2 \right) \xi_1; \quad \frac{d\xi_2}{dt} = 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \xi_1^2 + \frac{11}{128} \xi_1^4 \right),$$

совпадающей с точностью до обозначений с системой (5.73).

ГЛАВА 6

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

§ 1. ПОЧТИ ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ ЛИ ИНВАРИАНТНОСТИ

Рассмотрим почти инвариантную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \tag{1.1}$$

введенную в § 7 гл. 3. Будем предполагать, что система нулевого приближения

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x) \tag{1.2}$$

инвариантна относительно r-параметрической группы Ли $\mathfrak{G}_0$ преобразований, имеющей алгебру Ли $\mathfrak{B}^{(0)}$, порожденную системой базисных операторов

$$\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{Y}_r. \tag{1.3}$$

Система (1.3) замкнута, т. е. выполняются тождества

$$[\mathbf{Y}_i,\ \mathbf{Y}_j] = \sum_{n=1}^{r} c_{ij}^{h} X_h.$$

Коэффициенты c_{ij}^{h} в силу предположения о конечномерности алгебры Ли $\mathfrak{B}^{(0)}$ являются постоянными числами из поля P. Таким образом, согласно сделанным предположениям система (1.2) остается инвариантной относительно любого преобразования в виде ряда Ли

$$x = \exp(\mathbf{Y})\, y, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{Y} = s_1\mathbf{Y}_1 + \ldots + s_r\mathbf{Y}_r$ — произвольный элемент алгебры Ли $\mathfrak{B}^{(0)}$; $s_1, \ldots, s_r$ — параметры, характеризующие группу $\mathfrak{G}_0$, т. е. (1.2) переходит в систему $\frac{dy}{dt} = \omega(y)$.

Согласно теореме 4.1 гл. 1 операторы $\mathbf{Y} \in \mathfrak{B}^{(0)}$ перестановочны с оператором $\mathbf{U} = \omega_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \omega_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$, ассоциированным с системой нулевого приближения (1.2), т. е. выполняются тождества $[\mathbf{U},\ \mathbf{Y}_j] \equiv 0,\ j = \overline{1, r}$.

В дальнейшем существенно используется свойство компактности введенной группы $\mathfrak{G}_0$. Предположение о компактности этой группы

Ли, как известно, позволяет определить операцию усреднения на группе для любой непрерывной на ней функции $f(g)$, $g \in \mathfrak{G}_0$:

$$[f] = \frac{1}{|g_0|} \int f(g)\, dg, \tag{1.5}$$

где $|\mathfrak{G}_0|$ обозначает конечный объем на группе, существующий в силу сделанных предположений. Среднее значение (1.5) на группе $\mathfrak{G}_0$ позволяет ввести гильбертово пространство $\mathfrak{Y} = L^2(\mathfrak{G}_0)$ со скалярным произведением $(f, g) = \int f(g) \overline{\varphi}(g)\, dg$, где f, φ — произвольные функции из $\mathfrak{Y}$, и построить ряды Фурье на группе $\mathfrak{G}_0$.

Более точно: для компактных групп Ли справедлив следующий результат, известный под названием «глобальная теорема». Приведем его формулировку, следуя работе [30, с. 114].

Теорема 1.1. *Компактная группа Ли $\mathfrak{Y}_0$ обладает следующими свойствами.*

1. *Имеет точное линейное представление.*

2. *Все неприводимые представления группы $\mathfrak{G}_0$ имеют конечную размерность и содержатся в классе тензоров (над тем линейным пространством, где $\mathfrak{G}_0$ имеет точное представление).*

3. *Все конечномерные представления группы $\mathfrak{G}_0$ эквивалентны унитарным и обладают свойством полной приводимости.*

4. *Число неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}_0$ конечно или счетно, причем конечно только в случае, когда группа $\mathfrak{G}_0$ конечна.*

5. *Всякая непрерывная функция $f(g)$ на группе $\mathfrak{G}_0$ может быть равномерно, с любой степенью точности, аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов $\tau^l_{ij}(g)$, где индекс l означает нумерацию всевозможных неприводимых представлений, а индексы i, j — обычные матричные индексы относительно произвольного базиса.*

6. *Если матрица $T_l(g) = \| \tau^k_{ij}(g) \|$ записана в базисе, относительно которого она унитарна, то система матричных элементов $\tau^l_{ij}(g)$ представляет собой полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $\mathfrak{Y} = L^2(\mathfrak{G}_0)$. Все элементы $\tau^l_{ij}(g)$ при фиксированном l имеют одинаковую норму, равную $n^{-1/2}$, где $n = n(l)$ — размерность представления τ^l.*

7. *Если функция $f(g)$ содержится в $L^2(\mathfrak{G}_0)$, то ее рядом Фурье является*

$$f(g) \sim \sum_{l,i,j} c^l_{ij} \tau^l_{ij}(g), \tag{1.6}$$

где $c^l_{ij} = n(f, \tau^l_{ij})$ сходится к этой функции в среднем квадратичном.

Замечание 1.1. В рассматриваемом случае принадлежности функций f к классу аналитических ($f \in \mathfrak{D}(G)$) указанные ряды Фурье сходятся равномерно (см. [30, с. 116]).

Пусть алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$ системы (1.1) (см. § 1 гл. 3) порождается совокупностью операторов

$$\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{Z}_2,\ \ldots, \tag{1.7}$$

причем эта совокупность полная и среди них имеется p линейно несвязных операторов

$$\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{Z}_2,\ \ldots,\ \mathbf{Z}_p,\quad p \leqslant n. \tag{1.8}$$

По определению алгебры $\mathfrak{B}_0$ ее элементы перестановочны с оператором $\mathbf{U}$, т. е. $[\mathbf{U}, \mathbf{Z}_j] \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$ Таким образом, алгебра инвариантности $\mathfrak{B}^{(0)}$ является подалгеброй алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$: $\mathfrak{B}^{(0)} \subset \mathfrak{B}_0$. Не теряя общности рассуждений можно считать, что $\mathbf{Z}_i \equiv \mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, r}$. В операторе $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\tilde{\mathbf{U}}$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\omega}_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tilde{\omega}_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

является оператором возмущения, ассоциированным с возмущенной системой.

Введем некоторые дополнительные предположения о характере возмущений в системе (1.1).

Определение 1.1. Будем говорить, что почти инвариантная система (1.1) является *правильно возмущенной*, если выполняются следующие условия:

1) оператор возмущения $\tilde{\mathbf{U}}(x)$ разлагается по базису (1.7) алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$:

$$\tilde{\mathbf{U}}(x) = \sum b_{1j}(x)\,\mathbf{Z}_j,\quad \mathbf{Z}_j \in \mathfrak{B}_0; \tag{1.9}$$

2) коэффициенты $b_{1j}(x)$ в разложении (1.9), рассматриваемые как функции на группе (1.4), являются элементами гильбертова пространства $\mathfrak{Y} = L^2(\mathfrak{G}_0)$, т. е. выполняется условие

$$\int |b_j(g)|^2\,dg < \infty, \tag{1.10}$$

и, следовательно, для них имеет место разложение в ряд Фурье на группе $\mathfrak{G}_0$.

В дальнейшем будем считать, что система (1.1) является правильно возмущенной.

Применим к почти инвариантной системе (1.1) алгоритм асимптотической декомпозиции (см. § 1 гл. 3), произведя замену переменных

$$x' = \exp\varepsilon(\mathbf{S}_1 + \varepsilon\mathbf{S}_2 + \cdots + \varepsilon^{\nu-1}\mathbf{S}_\nu + \cdots)\,x, \tag{1.11}$$

где операторы $\mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ определяются из рекуррентной системы операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_i] = \mathbf{F}_i. \tag{1.12}$$

Здесь $\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F}_i$, $i > 2$,— известная функция от операторов $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_{i-1}$ (см. § 1 гл. 3).

Операторы $\mathbf{S}_i$ будем искать в виде разложения

$$\mathbf{S}_i = \gamma_{i1}\mathbf{Z}_1 + \cdots + \gamma_{ip}\mathbf{Z}_p, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_p$ — система линейно несвязных операторов из совокупности (1.8), являющаяся базисом алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$.

Рассмотрим уравнение (1.12) при $i = 1$:

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] = \mathbf{F}_1. \tag{1.14}$$

По предположению для оператора $\tilde{\mathbf{U}}(x)$ справедливо разложение (1.9). Подставим в уравнение (1.14) значения $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{S}_1$, задаваемые формулами (1.9) и (1.12):

$$[\mathbf{U}, \gamma_{11}\mathbf{Z}_1 + \cdots + \gamma_{1p}\mathbf{Z}_p] = b_{11}\mathbf{Z}_1 + \cdots + b_{1p}\mathbf{Z}_p. \tag{1.15}$$

Выполняя в левой части этого выражения операцию раскрытия скобок Пуассона (1.14) и принимая во внимание коммутативность операторов $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_l$ с оператором $\mathbf{U}$, получаем систему независимо интегрируемых линейных неоднородных уравнений

$$\mathbf{U}\gamma_{11} = b_{11}, \ \ldots, \ \mathbf{U}\gamma_{1p} = b_{1p}. \tag{1.16}$$

При решении этой системы воспользуемся результатами теоремы 1.1. Обозначим через $\mathfrak{Y}_l$ инвариантное подпространство из $\mathfrak{Y}$, образованное элементами $\| \tau_{ij}^l(g) \|$ матрицы представления $T_l(g)$ при фиксированном значении l. Индексы i, j принимают значения от 1 до $n(l)$ ($n(l)$ — размерность матрицы $\tau^l(g)$). Подпространство $\mathfrak{Y}_l$ инвариантно относительно преобразований из группы $\mathfrak{G}_0$, и, следовательно, операторы (1.3) алгебры $\mathfrak{V}^{(0)}$ переводят это подпространство в себя: $\mathbf{Y}_j\mathfrak{Y}_l = \mathfrak{Y}_l$, $j = \overline{1, r}$. Из коммутативности операторов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{U}$ следует, что этим свойством также обладает оператор $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}\mathfrak{Y}_l = \mathfrak{Y}_l. \tag{1.17}$$

Согласно предположению о том, что система (1.1) является правильно возмущенной, коэффициенты $b_{11}, \ldots, b_{1p}$ в правой части уравнений (1.16) можно разложить в ряды Фурье на группе $\mathfrak{G}_0^l$:

$$\begin{gathered} b_{11} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^l(b_{11})\, \tau_{ij}^l(g); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{lp} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^l(b_{lp})\, \tau_{ij}^l(g). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Решение каждого из уравнений системы (1.15) также будем искать в виде рядов на группе $\mathfrak{G}_0$:

$$\begin{gathered} \gamma_{11} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^l(\gamma_{11})\, \tau_{ij}^l(g); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{1p} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^l(\gamma_{1p})\, \tau_{ij}^l(g). \end{gathered} \tag{1.19}$$

Пусть $\tau^{(l)}$ обозначает вектор-строку, составленную из базисных элементов подпространства $\mathfrak{Y}_l$. Тогда в силу соотношений (1.17)

$$\mathbf{U}\tau^{(l)} \equiv \tau^{(l)}\mathcal{A}_l, \tag{1.20}$$

где $\mathcal{A}_l$ — квадратная матрица размерности $n^2(l) \times n^2(l)$. Матрицу $\mathcal{A}_l$ будем называть матрицей представления оператора $\mathbf{U}$ в подпространстве $\mathfrak{Y}_l$. Для сокращения записей условимся о следующих обозначениях. Выпишем часть ряда Фурье (1.6) на группе $\mathfrak{G}_0$ при фиксированном l:

$$\sum_{i,j} c_{ij}^l \tau_{ij}^{(l)}(g) \in \mathfrak{Y}_l. \tag{1.21}$$

Обозначим через $c^{(l)}$ вектор-столбец координат выписанного элемента в базисе $\tau^{(l)}$. Тогда выражение (1.21) можно переписать тождественно в виде произведения векторов $\tau^{(l)}$ и $c^{(l)}$:

$$\sum_{i,j} c_{ij}^l \tau_{ij}^l(g) \equiv \tau^{(l)} c^{(l)}.$$

Используя введенные обозначения и подставляя выражения (1.18) и (1.19) в систему уравнений (1.15), для последней находим

$$\sum_l (\mathrm{U}\tau^{(l)} c^{(l)}(\gamma_{11}) + \tau^{(l)}\mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{11})) = \sum_l \tau^{(l)} c^{(l)}(b_{11});$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_l (\mathrm{U}\tau^{(l)} c^{(l)}(\gamma_{1p}) + \tau^{(l)}\mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{lp})) = \sum_l \tau^{(l)} c^{(l)}(b_{1p}).$$

Далее воспользуемся тождеством (1.20):

$$\sum_l \tau^{(l)} \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{11}) = \sum_l \tau^{(l)} c^{(l)}(b_{11});$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_l \tau^{(l)} \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{1p}) = \sum_l \tau^{(l)} c^{(l)}(b_{1p}).$$

Приравнивая коэффициенты при базисных векторах $\tau^{(l)}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{11}) + \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{11}) = c^{(l)}(b_{11}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{1p}) + \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{1p}) = c^{(l)}(b_{1p}), \end{gathered} \tag{1.22}$$

где индекс l пробегает значения всевозможных неприводимых представлений.

В дальнейшем будем считать, что справедливы тождества

$$\mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{11}) \equiv 0, \ \dots, \ \mathrm{U}c^{(l)}(\gamma_{1p}) \equiv 0. \tag{1.23}$$

Это предположение эквивалентно условию, при котором оператор U содержит производные лишь по переменным, характеризующим группу $\mathfrak{G}_0$.

Кроме того, оно позволяет вместо дифференциальной системы (1.22) рассмотреть систему неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{11}) = c^{(l)}(b_{11}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{1p}) = c^{(l)}(b_{1p}), \end{gathered} \tag{1.24}$$

решаемых независимо друг от друга.

Для решения системы (1.24) воспользуемся альтернативой Фредгольма (см. также § 3 гл. 4 и § 3 гл. 5). Так как все уравнения системы (1.24) решаются независимо и имеют идентичную структуру, то достаточно рассмотреть одно из них, которое представим в виде

$$\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma) = c^{(l)}(b), \tag{1.25}$$

где $\mathcal{A}_l$ — квадратная матрица размерности $n^2(l)$, $c^{(l)}(b)$ — известный вектор-столбец размерности $n(l)$, $c^{(l)}(\gamma)$ — искомый вектор-столбец размерности $n(l)$.

Обозначим через $N(\mathcal{A}_l)$ базис линейного пространства, образованного решениями

$$\xi_{1l}, \ \ldots, \ \xi_{r_l l} \tag{1.26а}$$

однородного линейного уравнения $\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma) = 0$, и через $N^*(\mathcal{A}_l)$ базис линейного пространства, образованного решениями

$$\xi^*_{1l}, \ \ldots, \ \xi^*_{r_l l} \tag{1.26б}$$

однородного линейного уравнения $\mathcal{A}^*_l c^{(l)}(\gamma) = 0$ ($\mathcal{A}^*_l$ — матрица, сопряженная с $\mathcal{A}_l$). Таким образом, подпространства $N(\mathcal{A}_l)$ и $N^*(\mathcal{A}_l)$ являются ядрами матриц $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}^*_l$; $T(\mathcal{A}_l)$ и $T^*(\mathcal{A}_l)$ — их образы. Правая часть уравнения (1.25) может быть единственным образом представлена в виде суммы:

$$c^{(l)}(b) = c_N^{(l)}(b) + c_T^{(l)}(b), \quad c_N^{(l)}(b) \in N(\mathcal{A}_l), \quad c_T^{(l)}(b) \in T^*(\mathcal{A}_l).$$

Выпишем разложение составляющей $c_N^{(l)}(b)$ по базису (1.26а):

$$c_N^{(l)}(b) = \sum_{i=l}^{r_l} \alpha_{il} \xi_{il}. \tag{1.27}$$

Разность $c^{(l)}(b) - c_N^{(l)}(b) = c_T^{(l)}(b)$ принадлежит подпространству $T(\mathcal{A}_l)$ и, следовательно, ортогональна подпространству $N^*(\mathcal{A}_l)$:

$$\left\langle c^{(l)}(b) - \sum_{i=l}^{r_l} \alpha_{il} \xi_{il}; \ \xi^*_{jl} \right\rangle \equiv 0, \quad j = \overline{1, r_l}.$$

В результате получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения составляющей $c_N^{(l)}(b)$

$$\sum_{i=l}^{r_l} \alpha_{il} \langle \xi_{il}, \xi^*_{jl} \rangle = \langle c^{(l)}(b), \xi^*_{jl} \rangle.$$

В соответствии с общей теорией (см. гл. 3) определим проекцию от правой части операторного уравнения (1.14) в виде

$$\operatorname{pr} \mathbf{F}_1 \equiv \sum_{j=1}^{p} b_{1jN}(x) \, \mathbf{Z}_j, \tag{1.28}$$

где $b_{jN}(x)$ — составляющие, описываемые рядами

$$b_{11N} = \sum_{l,i,j} c_N^{(l)}(b_{11})\,\tau_{ij}^l(g);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{1pN} = \sum_{l,i,j} c_N^{(l)}(b_{1p})\,\tau_{ij}^l(g).$$

Здесь коэффициенты $c_N^{(l)}(b_{11}), \ldots, c_N^{(l)}(b_{1p})$ определяются формулой (1.27).

Как легко заметить, при определении проекции $\operatorname{pr}\mathbf{F}_1$ в соответствии с (1.28) решение операторного уравнения

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] = \mathbf{F}_1 - \operatorname{pr}\mathbf{F}_1 \tag{1.29}$$

сводится по описанной выше методике к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{11}) = c_T^{(l)}(b_{11});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{1p}) = c_T^{(l)}(b_{1p}),$$

которая, в отличие от системы (1.24), не содержит в правых частях составляющих из $N(\mathcal{A}_l)$ и, следовательно, разрешима.

Итак, полностью исследована структура операторного уравнения (1.14), определена проекция $\operatorname{pr}\mathbf{F}_1$ и установлена разрешимость уравнения (1.29) для определения оператора $\mathbf{S}_1$, входящего в преобразования переменных (1.11). Следовательно, полностью решена задача асимптотической декомпозиции для первого приближения.

Описанная методика будет верна для второго и высших приближений, если правые части $\mathbf{F}_i$ уравнений (1.29) при $i \geqslant 2$ удовлетворяют условию 1 определения 1.1.

Покажем, что это условие действительно выполняется. Оператор $\mathbf{F}_i$ (при $i \geqslant 2$) является известной функцией от скобок Пуассона, взятых от операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, ..., $\mathbf{S}_{i-1}$. Воспользуемся методом математической индукции. Для $i = 1$ утверждение доказано. Пусть оно верно для $i - 1$. Чтобы убедиться в его справедливости для i, достаточно убедиться, что скобка Пуассона от двух операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$, для которых имеет место разложение вида (1.9), т. е.

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{p} a_j(x)\,\mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{D} = \sum_{j=1}^{p} d_j(x)\,\mathbf{Z}_j, \tag{1.30}$$

также может быть представлена в виде суммы:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{D}] = \sum_{j=1}^{p} c_j(x)\,\mathbf{Z}_j. \tag{1.31}$$

Для нахождения коэффициентов $c_j(x)$ в правых частях формул (1.31) подставим выражения (1.30) в левую часть (1.31) и воспользуемся свойством коммутативности операторов $\mathbf{Z}_i$, $\mathbf{Z}_j$, $i, j = \overline{1, p}$. В результате несложных вычислений получаем

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \sum_{j=1}^{p} [A d_j(x) - \mathbf{D} a_j(x)] \mathbf{Z}_j.$$

Так как на каждом шаге выполняется конечное число операций вычисления скобок Пуассона, то условие (1.10) принадлежности коэффициентов $c_j(x)$ в (1.31) гильбертову пространству $\mathfrak{Y}$ также выполняется.

Операторы $\mathbf{S}_i$, $i \geqslant 2$, в уравнениях (1.12) будем искать в виде разложения $\mathbf{S}_i = \gamma_{i1}\mathbf{Z}_1 + \ldots + \gamma_{ip}\mathbf{Z}_p$, где коэффициенты $\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ip}$ представляются рядами на группе $\mathfrak{G}_0$

$$\gamma_{i1} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^{l}(\gamma_{i1}) \tau_{ij}^{l}(g);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{ip} = \sum_{l,i,j} c_{ij}^{l}(\gamma_{ip}) \tau_{ij}^{l}(g).$$

Повторяя все рассуждения, проведенные выше для проекции оператора $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$, находим

$$\mathbf{N}_i \equiv \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ijN}(x) \mathbf{Z}_j, \tag{1.32}$$

где $b_{ijN}(x)$ — составляющие, определяемые рядами

$$b_{i1N} = \sum_{l,i,j} c_N^{(l)}(b_{i1}) \tau_{ij}^{l}(g);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{ipN} = \sum_{l,i,j} c_N^{(l)}(b_{ip}) \tau_{ij}^{l}(g).$$

Решение операторного уравнения $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_i] = \mathbf{F}_i - \mathrm{pr}\,\mathbf{F}_i$ сводится по описанной методике к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{i1}) = c_T^{(l)}(b_{i1});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{A}_l c^{(l)}(\gamma_{ip}) = c_T^{(l)}(b_{ip}).$$

По операторам (1.32) легко составляется централизованная система

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{N}_{\nu} x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.33}$$

к которой, естественно, применимы теоремы 2.1 и 2.2 гл. 3, упрощающие ее интегрирование. Здесь этот вопрос подробно не обсуждается.

П р и м е р 1.1. Рассмотрим почти инвариантную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1'}{dt} = x_2' f(x_1'^2 + x_2'^2) + \varepsilon F_1(x_1', x_2'); \quad \frac{dx_2'}{dt} = -x_1' f(x_1'^2 + x_2'^2) + \varepsilon F_2(x_1', x_2'). \tag{1.34}$$

Здесь F_1, F_2 — некоторые функции из $\mathfrak{D}(G)$; f — произвольная аналитическая функция от $x_1^2 + x_2^2$.

Система нулевого приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 f(x_1^2 + x_2^2); \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 f(x_1^2 + x_2^2)$$

инвариантна относительно группы вращения на плоскости (см. § 5 гл. 1) SO (2):

$$x_1 = e^{sY} y_1, \ x_2 = e^{sY} y_2, \ Y = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}, \tag{1.35}$$

где s — параметр, характеризующий группу.

Легко убедиться, что эта группа компактна, если воспользоваться рядом Ли (1.35) и записать конечные уравнения группы (см. § 3 гл. 1):

$$x_1 = y_1 \cos s + y_2 \sin s \equiv \rho \sin (s + \theta);$$

$$x_2 = -y_1 \sin s + y_2 \cos s \equiv \rho \cos (s + \theta),$$

где $\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$; $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y_1}{y_2}$. Чтобы пространство представления группы SO (2) имело обычное описание в виде рядов Ферье по тригонометрическим функциям, удобнее в системе (1.34) перейти к переменным ρ и φ:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = s + \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}. \tag{1.36}$$

В этих преобразованиях можно положить $s = 0$. Система (1.34) в новых переменных примет вид

$$\frac{d\rho'}{dt} = \varepsilon F_1(\rho', \varphi'); \quad \frac{d\varphi'}{dt} = f(\rho') + \varepsilon F_2(\rho', \varphi'). \tag{1.37}$$

Здесь для функций возмущения условно приняты те же обозначения, что и в исходной системе. Оператор Y группы (1.34) в новых переменных имеет особенно простую форму $Y = \partial/\partial\varphi$. Как показано в работе [30], неприводимые представления группы SO (2) имеют вид $f(\varphi) = e^{in\varphi}$, $n \in Z$, а разложение по группе SO (2) представляет собой разложение в обычный ряд Фурье по тригонометрическим функциям. Как нетрудно проверить непосредственными вычислениями, общим элементом алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$, соответствующей системе (1.37), является оператор $Z = F(\rho) \dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{F(\rho)}{f(\rho)} \dfrac{\partial f(\rho)}{\partial\rho} \varphi \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, где $F(\rho)$ — произвольная аналитическая функция.

Базис алгебры $\mathfrak{B}_0$ можно составить из операторов

$$Z_1 = F(\rho) \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{F(\rho)}{f(\rho)} \frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho} \varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \ \text{и} \ Z_2 \equiv U \equiv f(\rho) \frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{1.38}$$

где U — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения.

Применим к возмущенной системе (1.37) алгоритм асимптотической декомпозиции и ограничимся вычислением первого приближения. Разложим оператор $\tilde{U} = F_1(\rho, \varphi) \dfrac{\partial}{\partial\varphi} + F_2(\rho, \varphi) \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ по базису (1.38):

$$U = b_1 Z_1 + b_2 Z_2,$$

где $b_1 = F_1(\rho, \varphi)/F(\rho)$; $b_2 = F_2(\rho, \varphi)/f(\rho) - (F_1(\rho, \varphi)/f^2(\rho)) (\partial f/\partial\rho) \varphi$.

Согласно предположению о том, что исходная система является правильно возмущенной, коэффициенты $b_1(\rho, \varphi)$, $b_2(\rho, \varphi)$ разлагаются в ряды Фурье по φ:

$$\begin{aligned} b_1(\rho, \varphi) &= b_{10}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n}(\rho) \cos n\varphi + B_{1n}(\rho) \sin n\varphi); \\ b_2(\rho, \varphi) &= b_{20}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n}(\rho) \cos n\varphi + B_{2n}(\rho) \sin n\varphi). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Оператор S_1 преобразования отыскиваем в виде суммы:

$$S_1 = \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2, \tag{1.40}$$

где коэффициенты γ_1, γ_2 согласно общей теории должны удовлетворять уравнениям

$$U\gamma_1 = b_1; \quad U\gamma_2 = b_2. \tag{1.41}$$

Подпространство представления $\mathfrak{D}_l$ группы SO (2) в действительной области образовано двумя функциями: $\tau_1^{(l)} = \cos l\varphi$ и $\tau_2^{(l)} = \sin l\varphi$. Легко составить матрицу представления оператора U в подпространстве $\mathfrak{D}_l$:

$$\mathcal{A}_l = \begin{Vmatrix} 0 & +lf(\rho) \\ -lf(\rho) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты γ_1, γ_2 в операторе (1.40) также будем искать в виде рядов Фурье по φ

$$\gamma_1(\rho, \varphi) = \gamma_{10}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n}(\rho)\cos n\varphi + D_{1n}(\rho)\sin n\varphi);$$

$$\gamma_2(\rho, \varphi) = \gamma_{20}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n}(\rho)\cos n\varphi + D_{2n}(\rho)\sin n\varphi).$$

Система дифференциальных уравнений (1.41) заменяется системой алгебраических уравнений

$$\begin{Vmatrix} 0 & lf(\rho) \\ -lf(\rho) & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{jl} \\ D_{jl} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{jl} \\ B_{jl} \end{Vmatrix}, \quad j = \overline{1,\ 2}, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots$$

Данная система однозначно разрешима при любом целом l. При $l = 0$ $\mathcal{A}_l \equiv 0$. Таким образом, для разрешимости уравнений (1.41) нужно, чтобы правые части в разложениях (1.39) не содержали свободных членов. Этого можно достичь, если ввести оператор проектирования pr $F_1 = b_{10}(\rho) Z_1 + b_{20}(\rho) Z_2$. Таким образом, централизованная система в первом приближении, получаемая из возмущенной системы (1.37), принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon b_{10}(\rho) F(\rho);$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\rho) + \varepsilon\left(b_{10}(\rho)\frac{F(\rho)}{f(\rho)}\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\varphi + b_{20}(\rho) f(\rho)\right).$$

Пример 1.2. Положив в системе (1.34) $f \equiv 1$, получим классический нелинейный осциллятор, широко используемый в асимптотических методах нелинейной механики [12]:

$$\frac{dx_1'}{dt} = x_2' + \varepsilon F_1(x_1', x_2'); \quad \frac{dx_2'}{dt} = -x_1' + \varepsilon F_2(x_1', x_2'),$$

В переменных (1.36) эта система имеет вид

$$\frac{d\rho'}{dt} = \varepsilon F_1(\rho', \varphi'); \quad \frac{d\varphi'}{dt} = 1 + \varepsilon F_2(\rho', \varphi'). \tag{1.42}$$

Базис алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$ составляется из операторов

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial\rho}; \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Предположение о правильности возмущения системы (1.42) сводится к предположению о периодической зависимости функций $F_1(\rho, \varphi,)$, $F_2(\rho, \varphi)$ от переменной φ.

Централизованная система в первом приближении, как это следует после повторения всех рассуждений, приведенных в примере 1.1, принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon F_{10}(\rho); \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1 + \varepsilon F_{20}(\rho),$$

где $F_{10}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_1(\rho, \varphi)\, d\varphi$, $F_{20}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_2(\rho, \varphi)\, d\varphi$ — первые члены разложения функций $F_1(\rho, \varphi)$, $F_2(\rho, \varphi)$ в ряды Фурье.

Следовательно, метод асимптотической декомпозиции в рассматриваемом случае приводит к системе, получаемой по методу усреднения Н. Н. Боголюбова.

Пример 1.3. Рассмотрим самый общий вид почти инвариантной системы относительно группы SO (2) (см. § 5 гл. 1):

$$\frac{dx_1'}{dt} = x_1' + x_2' f(x_1'^2 + x_2'^2) + \varepsilon F_1(x_1', x_2');$$

$$\frac{dx_2'}{dt} = x_2' - x_2' f(x_1'^2 + x_2'^2) + \varepsilon F_2(x_1', x_2').$$

В переменных (1.36) эта система представляется таким образом:

$$\frac{d\rho'}{dt} = \rho' + \varepsilon F_1(\rho', \varphi'); \quad \frac{d\varphi'}{dt} = f(\rho') + \varepsilon F_2(\rho', \varphi'). \tag{1.43}$$

Базис алгебры $\mathfrak{B}_0$ можно составить из операторов

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \ \mathbf{Z}_2 \equiv \mathbf{U} \equiv \rho\frac{\partial}{\partial\rho} + f(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

где $\mathbf{U}$ — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения.

Применим к системе (1.43) алгоритм асимптотической декомпозиции, ограничиваясь вычислением первого приближения. Разложим оператор $\mathbf{U} = F_1(\rho, \varphi)\,\partial/\partial\rho + F_2(\rho, \varphi)\,\partial/\partial\varphi$ по базису $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = b_1\mathbf{Z}_1 + b_2\mathbf{Z}_2,$$

где $b_1 = F_2(\rho, \varphi) - F_1(\rho, \varphi)\frac{f(\rho)}{\rho}$; $b_2 = \frac{F_1(\rho, \varphi)}{\rho}$.

Согласно предположению о том, что исходная система является правильно возмущенной, коэффициенты $b_1(\rho, \varphi)$, $b_2(\rho, \varphi)$ разлагаются в ряды Фурье (1.39). Оператор ρ_1 преобразования ищем в виде ряда (1.40). Как и в примере 1.1, коэффициенты γ_1, γ_2 определяются из системы уравнений (1.41). Однако в рассматриваемом случае вместо алгебраической системы получаем дифференциальную

$$\mathbf{U}\gamma_{j0}(\rho) = b_{j0}(\rho);$$

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{U}C_{jl} \\ \mathbf{U}D_{jl} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & lf(\rho) \\ -lf(\rho) & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_{jl} \\ D_{jl} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{jl} \\ B_{jl} \end{Vmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{1.44}$$

Все искомые функции в системе (1.44) зависят лишь от переменной ρ, и поэтому она заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho\frac{\partial\gamma_{j0}}{\partial\rho} = b_{j0}(\rho), \quad j = 1, 2; \tag{1.45}$$

$$\begin{Vmatrix} \rho\dfrac{\partial c_{jl}}{\partial\rho} \\ \rho\dfrac{\partial D_{jl}}{\partial\rho} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & lf(\rho) \\ -lf(\rho) & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_{jl} \\ D_{jl} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{jl} \\ B_{jl} \end{Vmatrix}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Система (1.45) является алгебраически приводимой (см. гл. 2) и может быть легко проинтегрирована. Проекция pr $F_1 \equiv$ pr $\tilde{U} \equiv 0$ и, следовательно, централизованная система совпадают с системой нулевого приближения

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho; \quad \frac{d\varphi}{dt} = f(\rho).$$

§ 2. АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

В настоящем параграфе метод асимптотической декомпозиции применяется к дифференциальным системам, нулевое приближение которых порождает конечномерную группу Ли. Использование пространства представления этой группы позволяет свести все алгоритмы метода к простейшим задачам линейной алгебры.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x); \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $x = \mathrm{colon}\,\| x_1, \ldots, x_n \|$; $\omega = \mathrm{colon}\,\| \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \|$; $\omega_i \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$; $G_0 = I \times G \in \mathrm{R}^{n+2}$, $G \in \mathrm{R}^n$, $t \in I$,— область существования и единственности задачи Коши системы (2.1); $\mathfrak{D}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенное на G. Предположим, что обертывающей алгеброй Ли $\mathfrak{B}_h$ системы (см. гл. 3) является конечномерная алгебра с базисными операторами

$$\mathbf{X}_j = \xi_{j1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{jn}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = \overline{1, h}. \tag{2.2}$$

Это значит, что для элементов (2.2) выполняются соотношения

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \sum_{\mu=1}^{h} c_{ij}^{\mu}\mathbf{X}_{\mu},$$

где c_{ij}^{μ} — постоянная, принадлежащая полю P (P — поле действительных R или комплексных K чисел), и оператор

$$\mathbf{U}(x) = \omega_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{2.3}$$

ассоциированный с системой (2.1), принадлежит $\mathfrak{B}_h$ и, следовательно, может быть выражен через базис (2.2):

$$\mathbf{U} = c_1\mathbf{X}_1 + \cdots + c_h\mathbf{X}_h, \; c_j \in \mathrm{P}, \quad j = \overline{1, h}. \tag{2.4}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{B}_h$ определяет конечную группу Ли $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_h)$, элементы которой можно задать сходящимися рядами Ли (см. гл. 1)

$$x' = e^{(s_1\mathbf{X}_1 + \cdots + s_h\mathbf{X}_h)}x, \tag{2.5}$$

где $s = \| s_1, \ldots, s_h \|$ — параметры группы, изменяющиеся в некоторой окрестности точки $s = 0$.

Воспользуемся разложением (2.4) и запишем решение системы (2.1) в виде ряда Ли

$$x = e^{((t-t_0)\mathbf{U}(x_0))}x_0. \tag{2.6}$$

Следовательно, решение (2.6) системы (2.1) является элементом группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_h)$ при достаточно малом $t - t_0$. Это свойство решения системы (2.1) можно принять в качестве общей характеристики данной системы при изучении влияния возмущающих факторов на ее поведение.

Далее будем предполагать, что группе $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_h)$ можно поставить в соответствие гильбертово пространство $\mathfrak{Y}$ представления, равное прямой ортогональной сумме линейных подпространств $\mathfrak{Y}_\nu$: $\mathfrak{Y} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{Y}_\nu$. Каждое линейное подпространство $\mathfrak{Y}_\nu$ над P размерности m_ν с базисом, состоящим из m_ν функций:

$$f^{(\nu)} \stackrel{\text{def}}{=} \| f_{1m_\nu}(x), \ \ldots, \ f_{m_\nu m_\nu}(x) \|, \tag{2.7}$$

является инвариантным относительно преобразований группы, т. е. если $f(x') \in \mathfrak{Y}_\nu$, то после замены переменной x' согласно формулам (2.5) $f(e^{(\rho_1 X_1 + \cdots + \rho_h X_h)} x) \in \mathfrak{Y}_\nu$.

Предположим, что пространство $\mathfrak{Y}$ содержит подпространство $\mathfrak{Y}_\nu$ размерности $m_1 = n$. Необходимым и достаточным условием инвариантности подпространства $\mathfrak{Y}_\nu$ относительно группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_h)$ является инвариантность подпространства $\mathfrak{Y}_\nu$ относительно базисных операторов (2.2) алгебры $\mathfrak{B}_h$, т. е. выполнение условий

$$\begin{gathered} X_j f_{1m_\nu} = c^1_{j1m_\nu} f_{1m_\nu} + \cdots + c^{m_\nu}_{j1m_\nu} f_{m_\nu m_\nu}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_j f_{m_\nu m_\nu} = c^1_{jm_\nu m_\nu} f_{1m_\nu} + \cdots + c^{m_\nu}_{jm_\nu m_\nu} f_{m_\nu m_\nu}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Эти соотношения можно представить в компактном виде $X_j f^{(\nu)} = f^{(\nu)} C_j^{(m_\nu)}$, где $C_j^{(m_\nu)}$ — квадратная матрица размерности $m_\nu \times m_\nu$. Матрицу $C_j^{(m_\nu)}$ будем называть представлением оператора X_j, $j = \overline{1, h}$, в инвариантном подпространстве $\mathfrak{Y}_\nu$.

Пусть система (2.1), которую в дальнейшем будем называть системой нулевого приближения, подвергнута малым возмущениям:

$$\frac{dx'}{dt} = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'); \quad x'(t_0) = x_0, \tag{2.9}$$

где $\tilde{\omega}(x') = \operatorname{colon} \| \tilde{\omega}_1(x'), \ldots, \tilde{\omega}_n(x') \|$, $\tilde{\omega}_i(x') \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$; ε — малый положительный параметр. Через $G_{0\varepsilon} = I \times I_\varepsilon \times G \in \mathrm{R}^{(n+2)}$, $I_\varepsilon = [0, 1]$, $\varepsilon \in I_\varepsilon$, обозначим область существования и единственности решения задачи Коши системы (2.9), которую в дальнейшем будем называть возмущенной системой.

Относительно свойств коэффициентов возмущенной системы сделаем следующее предположение. Пусть базис подпространства $\mathfrak{Y}_1$ задан $\mathfrak{Y}_1$ независимыми в G функциями

$$v_1(x), \ \ldots, \ v_n(x) \tag{2.10}$$

Обозначим через $L_1, \ldots, L_n$ дифференциальные операторы $\partial/\partial v_1, \ldots, \partial/\partial v_n$, представленные в переменных x. Как легко заметить, оператор $\mathbf{U}$, входящий в оператор

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\tilde{\mathbf{U}}(x), \tag{2.11}$$

(здесь $\tilde{\mathbf{U}}(x) = \tilde{\omega}_1(x)\,\partial/\partial x_1 + \cdots + \tilde{\omega}_n(x)\,\partial/\partial x_n$), ассоциированный с системой (2.9), представим в виде

$$\mathbf{U} = g_1(x)\,\mathbf{L}_1 + \cdots + g_n(x)\,\mathbf{L}_n,$$

где $g_1(x), \ldots, g_n(x) \in \mathfrak{Y}_1$. Будем предполагать, что для $\tilde{\mathbf{U}}(x)$ справедливо разложение $\tilde{\mathbf{U}} = q_1(x)\,\mathbf{L}_1 + \cdots + q_n(x)\,\mathbf{L}_n$, где коэффициенты $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ представимы в виде рядов по базису $\mathfrak{Y}$: $q_j(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_j^{(\nu)}(x)$, $q_j^{(\nu)}(x) \in \mathfrak{Y}_\nu$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(\mathfrak{Y}_\nu)$ линейное пространство операторов вида

$$\mathbf{L}^{(\nu)} = q_1^{(\nu)}(x)\,\mathbf{L}_1 + \cdots + q_n^{(\nu)}(x)\,\mathbf{L}_n, \tag{2.12}$$

у которого коэффициенты $q_1^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)} \in \mathfrak{Y}_\nu$; будем в этом случае также писать

$$\mathbf{L}^{(\nu)} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}_\nu). \tag{2.13}$$

Основная идея алгоритма асимптотической декомпозиции состоит в преобразовании возмущенной системы (2.9) к некоторой эталонной системе

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu b_{\nu j0}(x), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.14}$$

получившей название централизованной (см. гл. 3). Переход от системы (2.9) к системе (2.10) осуществляется при помощи замены переменных в виде рядов Ли

$$x_j' = \exp(\varepsilon\mathbf{S})\,x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon\mathbf{S}_2 + \cdots$; $\mathbf{S}_i = \gamma_{i1}\partial/\partial x_1 + \cdots + \gamma_{in}\partial/\partial x_n$. Интегрирование централизованной системы (2.14) проще по сравнению с интегрированием исходной возмущенной системы (2.9) благодаря тому, что в ней в максимальной степени используются свойства системы нулевого приближения. С вводом дифференциальных операторов

$$\mathbf{N}_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}_k(x), \text{ где } \mathbf{N}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{\nu j0}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

централизованная система принимает вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j(x) + \mathbf{N}(x)\,x_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.16}$$

Связь между системами (2.9) и (2.16) легко устанавливается, если оператор (2.11), ассоциированный с возмущенной системой в новых переменных после замены (2.15), представить в виде

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] + \mathbf{F}_1) + \cdots + \varepsilon^\nu(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] + \mathbf{F}_\nu) + \cdots,$$

где $\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F}_2 = -[\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathbf{U}[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1]]$, ..., $\mathbf{F}_\nu$ — известная функция от операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_{\nu-1}$.

Операторы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$, входящие в преобразование (2.16), определяются из системы операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu - \operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

где $\operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu$ — проекция оператора $\mathbf{F}_\nu$ на алгебру централизатора, определяемую решениями однородного уравнения [1] $[\mathbf{U}, \mathbf{S}] = 0$.

Если положить

$$\operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{N}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.18}$$

то после выбора операторов $\mathbf{S}_\nu$ как решений неоднородных операторных уравнений (2.17) оператор $\mathbf{U}_0$ примет вид

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{N}_1(x) + \varepsilon^2\mathbf{N}_2(x) + \cdots \tag{2.19}$$

Оператору $\mathbf{U}_0$ (2.19) соответствует централизованная система (2.16), причем $[\mathbf{U}, \mathbf{N}_\nu] \equiv 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Перейдем к решению системы операторных уравнений (2.17) и нахождению $\operatorname{pr}\mathbf{F}_\nu$ на основе использования пространства представления $\mathfrak{Y}$ группы $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{B}_h)$. В силу сделанных предположений и с учетом обозначений (2.12), (2.13) представим операторы $\mathbf{F}_\nu$ в правых частях уравнений (2.17) в виде суммы:

$$\mathbf{F}_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_\nu^{(j)}, \quad \mathbf{F}_\nu^{(j)} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}_j). \tag{2.20}$$

Решения $\mathbf{S}_\nu$ уравнений (2.17) будем также искать в виде разложений

$$\mathbf{S}_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}_\nu^{(j)}, \quad \mathbf{S}_\nu^{(j)} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}_j). \tag{2.21}$$

Оператор $\mathbf{F}_\nu^{(j)}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}_\nu^{(j)} = f^{(j)}\mathcal{B}_{\nu j}\mathbf{L}, \tag{2.22}$$

где $\mathbf{L} = \operatorname{colon}\|\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_n\|$, $\mathcal{B}_{\nu j}$ — известная матрица размерности $m_j \times n$, $f^{(j)}$ — базисный вектор подпространства $\mathfrak{Y}_j$ (см. гл. 4 и 5). Аналогично оператор $\mathbf{S}_\nu^{(j)}$ можно представить в виде $\mathbf{S}_\nu^{(j)} = f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathbf{L}$, где постоянная $\Gamma_{\nu j}$ — матрица размерности $m_j \times n$.

Обозначим через $\mathcal{F}_j$ матрицу представления оператора $\mathbf{U}$ в $\mathfrak{Y}_j$, определяемую тождеством

$$\mathbf{U}f^{(j)} = f^{(j)}\mathcal{F}_j. \tag{2.23}$$

Для $\mathcal{F}_1$ введем отдельное обозначение $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{A}$, тогда для оператора $\mathbf{U}$ справедлива векторная запись

$$\mathbf{U} = f^{(1)}\mathcal{A}\mathbf{L}, \quad f^{(1)} = \|v_1(x), \ldots, v_n(x)\|. \tag{2.24}$$

Теорема 2.1. *Решение операторного уравнения*

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = F_\nu \tag{2.25}$$

[1] Здесь и везде дальше рассматриваются алгебры централизатора первой степени.

равносильно решению системы независимых линейных матричных уравнений

$$\mathcal{F}_j\Gamma_{\nu j} - \Gamma_{\nu j}\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\nu j}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2.26}$$

Доказательство. Подставим выражения (2.20), (2.21) в уравнение (2.25):

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu^{(j)}. \tag{2.27}$$

Вычислим скобку Пуассона $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}]$, приняв во внимание соотношения (2.22), (2.24): $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = \mathbf{U}f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - \mathbf{S}_\nu^{(j)}f^{(1)}\mathcal{A}\mathbf{L}$. Далее, используя тождество (2.23) и тождество $\mathbf{S}_\nu^{(j)}f^{(1)} \equiv f^{(j)}\Gamma_{\nu j}$, окончательно находим

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = f^{(j)}\mathcal{F}_j\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathcal{A}\mathbf{L}. \tag{2.28}$$

Подставим выражения (2.22) и (2.28) в (2.27):

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f^{(j)}\mathcal{F}_j\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathcal{A}\mathbf{L}) = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}\mathcal{B}_{\nu j}\mathbf{L}$$

и приравняем коэффициенты при векторах $f^{(j)}$ и $\mathbf{L}$. В результате получим доказываемый результат (2.26). ▢

Обозначим $\mathcal{G}_A^{(j)} = \mathcal{F}_j \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_j} \otimes \mathcal{A}^T$, где $\mathcal{E}_{m_j}$, $\mathcal{E}_n$ — единичные матрицы размерностей $m_j \times m_j$, $n \times n$. Так как рассматриваются алгебры централизатора первой степени, $\mathcal{A}$ является матрицей простой структуры и, как следствие, матрицы $\mathcal{F}_j$ и $\mathcal{G}_A^{(j)}$ — также матрицы простой структуры.

Как известно из линейной алгебры, матричное уравнение (2.26) равносильно системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{G}_A^{(j)}\hat{\Gamma}_{\nu j} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu j}. \tag{2.29}$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Следствие 2.1. Решение операторного уравнения (2.25) равносильно решению линейной алгебраической системы (2.29).

Перейдем к построению проектора $\mathrm{pr}\,\mathbf{F}_\nu$. Рассмотрим соответствующее системе (2.29) однородное уравнение

$$\mathcal{G}_A^{(j)}\hat{\Gamma}_{\nu j} = 0 \tag{2.30}$$

и сопряженное уравнение

$$\mathcal{G}_A^{(j)*}\hat{\Gamma}_{\nu j} = 0, \tag{2.31}$$

где $\mathcal{G}_A^{(j)*} = \mathcal{F}_j^* \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_j} \otimes (\mathcal{A})^T$ — матрица, комплексно-сопряженная с $\mathcal{G}_A^{(j)}$.

Обозначим через $\hat{N}_A^{(j)}$, $\hat{N}_{A*}^{(j)}$ ядра матриц $\mathcal{G}^{(j)}$, $\mathcal{G}_A^{(j)*}$ и через $\hat{T}_A^{(j)}$, $\hat{T}_{A*}^{(j)}$ образы этих матриц. Пространство $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_j,n)}$ может быть разложено единственным образом в прямую сумму подпространств $\hat{N}_A^{(j)}$, $\hat{T}_A^{(j)}$:

$$\hat{\mathfrak{R}}^{(m_j,n)} = \hat{N}_A^{(j)} \oplus \hat{T}_A^{(j)}. \tag{2.32}$$

В соответствии с этим правую часть уравнения (2.29) также представим в виде суммы:

$$\hat{\mathscr{B}}_{\nu j} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj} + \hat{\mathscr{B}}_{\nu Tj}, \; \hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj} \in \hat{N}_A^{(j)}, \; \hat{B}_{\nu Tj} \in \hat{T}_A^{(j)}. \tag{2.33}$$

Вектору $\hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj}$ в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_j n)}$ соответствует прямоугольная матрица $\mathscr{B}_{\nu Nj}$, которая в свою очередь определяет дифференциальный оператор: $\mathbf{N}_{\nu j} = f^{(j)}\mathscr{B}_{\nu Nj}\mathbf{L}$. Построенные операторы $\mathbf{N}_{\nu j}$ коммутируют с оператором $\mathbf{U}$: $[\mathbf{U}, \mathbf{N}_{\nu j}] = 0$.

Определение 2.1.

$$\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{N}_{\nu j}.$$

Таким образом, после нахождения в явном виде операторов $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ определяется централизованная система (см. формулы (2.18), (2.19)).

Остановимся на фактическом нахождении матриц $\mathscr{B}_{\nu Nj}$. Пусть $C = \| c_{lr} \|$, $Q = \| q_{lr} \|$, $l = \overline{1, m_j}$, $r = \overline{1, n}$,— произвольные матрицы из пространства $\mathfrak{R}^{(m_j, n)}$. В пространстве $\hat{\mathfrak{R}}^{(m_j, n)}$ введем скалярное произведение обычным образом:

$$\langle \hat{C}, \hat{Q} \rangle = \sum_{l=1}^{m_j} s_{l1}\bar{q}_{l1} + \cdots + c_{ln}\bar{q}_{ln},$$

где черта над буквой — знак комплексного сопряжения. Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\langle \hat{C}, \hat{Q} \rangle = \operatorname{tr} (C \cdot \bar{Q}^T), \tag{2.34}$$

где tr — след матрицы. Предположим, что система (2.30) имеет k_j линейно независимых решений $\hat{\mathscr{Z}}_{1j}, \ldots, \hat{\mathscr{Z}}_{k_j j}$, которые можно принять в качестве базиса $\hat{N}_A^{(j)}$. Тогда уравнение (2.31) также имеет k_j линейно независимых решений $\hat{\mathscr{Z}}_{1j*}, \ldots, \hat{\mathscr{Z}}_{k_j j*}$, которые можно принять в качестве базиса $\hat{N}_{A*}^{(j)}$. Разложим составляющую $\hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj}$ в сумме (2.33) по базису $\hat{N}_A^j$:

$$\hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj} = \sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \hat{\mathscr{Z}}_{ij}.$$

Разность $\hat{\mathscr{B}}_{\nu j} - \hat{\mathscr{B}}_{\nu Nj} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu Tj}$ принадлежит образу $\hat{T}_A^{(j)}$ и, следовательно, как известно из линейной алгебры, ортогональна подпространству $\hat{N}_{A*}^{(j)}$:

$$\left\langle \hat{\mathscr{B}}_{\nu j} - \sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \hat{\mathscr{Z}}_{ij}, \hat{\mathscr{Z}}_{lj*} \right\rangle = 0, \quad l = \overline{1, k_j}.$$

Из приведенных тождеств получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\alpha_{\nu j i}$

$$\sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu j i} \langle \hat{\mathscr{X}}_{ij}, \hat{\mathscr{X}}_{lj*} \rangle = \langle \hat{\mathscr{B}}_{\nu j}, \hat{\mathscr{X}}_{lj*} \rangle, \quad l = \overline{1, k_j}. \tag{2.35}$$

Определитель этой системы (определитель Грама) не равен нулю, и, следовательно, система (2.35) имеет единственное решение.

Систему уравнений (2.35) можно представить в виде матричной системы в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_j, n)}$, воспользовавшись тождеством (2.34):

$$\sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu j i} \operatorname{tr} (\mathscr{X}_{ij} \bar{\mathscr{X}}_{lj*}^T) = \operatorname{tr} (\mathscr{B}_{\nu j} \bar{\mathscr{X}}_{lj*}^T), \quad l = \overline{1, k_j}. \tag{2.36}$$

Полученный результат подытожим в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Нахождение проекции оператора от правых частей уравнений (2.25) сводится к решению последовательности независимых между собой систем неоднородных алгебраических уравнений вида (2.35) или (2.36). Решение этих уравнений существует и единственно.*

Оператор S_ν определяется совокупностью матриц $\Gamma_{\nu j}$, $j = 1, 2, \ldots$, которые являются решениями уравнений

$$\mathscr{G}_A^{(j)} \hat{\Gamma}_{\nu j} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu T j}. \tag{2.37}$$

Система (2.37) совместна и содержит $m_j \times n$ уравнений от $\rho_j = m_j \times \times n - k_j$ переменных (k_j — размерность ядра $\hat{N}_A^{(j)}$). Чтобы избавиться от лишних уравнений и исключить из решения составляющие, входящие в ядро $\hat{N}_A^{(j)}$, можно поступить следующим образом. Пусть $\hat{\mathscr{Y}}_{1\rho_j}, \ldots, \hat{\mathscr{Y}}_{\rho_j \rho_j}$ — базис пространства $\hat{T}_A^{(j)}$, тогда вектор $\hat{\Gamma}_{\nu j}$ можно разложить по этому базису таким образом:

$$\hat{\Gamma}_{\nu j} = \gamma_{1\rho_j}^{(\nu j)} \hat{\mathscr{Y}}_{1\rho_j} + \cdots + \hat{\gamma}_{\rho_j \rho_j}^{(\nu j)} \mathscr{Y}_{\rho_j \rho_j}.$$

Вводя вектор $\gamma_{\nu j} = \operatorname{colon} \| \gamma_{1\rho_j}^{(\nu j)}, \ldots, \gamma_{\rho_j \rho_j}^{(\nu j)} \|$ и матрицу $Q_{\nu j}$, столбцы которой образованы векторами $\hat{\mathscr{Y}}_{1\rho_1}, \ldots, \hat{\mathscr{Y}}_{\rho_j \rho_j}$, представим уравнение (2.37) в матричном виде

$$\mathscr{G}_A^{(j)} Q_{\nu j} \gamma_{\nu j} = \hat{\mathscr{B}}_{\nu T j}.$$

Умножим полученное уравнение на матрицу $Q_{\nu j}^* \mathscr{G}_A^{(j)*}$, сопряженную с $\mathscr{G}_A^{(j)} Q_{\nu j}$. В результате получим систему

$$Q_{\nu j}^* \mathscr{G}_A^{(j)*} \mathscr{G}_A^{(j)} Q_{\nu j} \gamma_{\nu j} = Q_{\nu j}^* \mathscr{G}_A^{(j)*} \hat{\mathscr{B}}_{\nu T j},$$

эквивалентную по отношению к исходной, но содержащую ровно ρ_j уравнений.

Применим к централизованной системе (2.16) общие теоремы гл. 3, упрощающие ее интегрирование.

Теорема 2.3. *Если в централизованной системе (2.16) коэффициенты оператора* $\mathbf{N}(x)$ *являются аналитическими функциями в области* $\overline{G}_{0\varepsilon} = \overline{I} \times \overline{I}_{0\varepsilon} \times \overline{G} \in \mathrm{R}^{n+2}$, $I_\varepsilon = [0,\ 1]$, $\varepsilon \in I_\varepsilon$, $t \in \overline{I} = [a,\ b]$, *то можно указать такое положительное число* T_0, *при котором решение системы представимо рядом Ли*

$$x_j = \exp[\tau \mathbf{N}(z)]\, z_j,\quad \tau = \varepsilon(t - t_0),\quad j = \overline{1,\ n}, \tag{2.38}$$

где $z = \mathrm{colon}\,\|z_1,\ \ldots,\ z_n\|$ — *решение системы нулевого приближения*

$$\frac{dz}{dt} = \omega(z),\quad z(t_0) = x_0. \tag{2.39}$$

Ряд Ли сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{G}_{0\varepsilon T} = \left[t_0,\ t_0 + \frac{T_0}{\varepsilon}\right] \times \overline{I}_\varepsilon \times \overline{G}$.

З а м е ч а н и е 2.1. В силу сделанных предположений о свойствах системы нулевого приближения (2.1) система (2.39) может быть эффективно проинтегрирована и, следовательно, формулы для решения системы (2.39) приобретают законченный аналитический вид. Действительно, используем в качестве замены переменных в системе (2.39) функции

$$y_1 = v_1(z),\ \ldots,\ y_n = v_n(z). \tag{2.40}$$

Эта система функций предполагается обратимой в рассматриваемой области G: $z_1 = \varphi_1(y),\ \ldots,\ z_n = \varphi_n(y)$. Замена (2.40) сводит систему (2.39) к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами $dy/dt = \mathcal{A}_0 y$, $y(t_0) = y_0$, где $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}^T$, $\mathcal{A}$ — матрица оператора (2.24).

Выясним условия, при которых в централизованной системе выделяются медленные и быстрые переменные. Рассмотрим уравнение для определения интегралов системы нулевого приближения

$$\mathrm{U}\rho = 0, \tag{2.41}$$

где U — оператор (2.3). Интегралы будем искать в подпространствах $\mathfrak{Y}$ в виде векторного произведения

$$\rho = f^{(j)}\alpha^{(j)}, \tag{2.42}$$

где $f^{(j)}$ — базис $\mathfrak{Y}_j$; $\alpha^{(j)} = \mathrm{colon}\,\|\alpha_1^{(j)},\ \ldots,\ \alpha_{m_j}^{(j)}\|$ — вектор коэффициентов. При подстановке соотношений (2.42) в уравнения (2.41) получается матричное уравнение $\mathcal{F}_j\alpha^{(j)} = 0$, где $\mathcal{F}_j$ — матрица представления оператора U в $\mathfrak{Y}_j$.

Аналогично, уравнение для собственных векторов оператора

$$\mathrm{U}g = \lambda g,\ \ \lambda = \mathrm{const}, \tag{2.43}$$

где $g = f^{(j)}\beta^{(j)}$, $\beta^{(j)} = \mathrm{colon}\,\|\beta_1^{(j)},\ \ldots,\ \beta_{m_j}^{(j)}\|$, приводит к матричному уравнению

$$\mathcal{F}_j\beta^{(j)} = \lambda\beta^{(j)}.$$

По предположению $\mathcal{A}$ — матрица простой структуры и, следовательно, имеет в $\mathfrak{Y}_1 m_1$ собственных векторов $g_1^{(i)},\ \ldots,\ g_{m_i}^{(i)}$, соответствующих корню λ_i кратности m_i, $i=\overline{1, k}$, $m_1+\cdots+m_k=n$, т. е. $Ug_1^{(i)}=\lambda_i g_1^{(i)}$, ..., $Ug_{m_i}^{(i)}=\lambda_i g_{m_i}^{(i)}$. Как легко заметить, функции

$$\rho_1 g_1^{(i)}, \ \ldots, \ \rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)}, \tag{2.44}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_{m_i}$ — произвольные интегралы из $\mathfrak{Y}$ уравнения (2.43), также являются собственными функциями:

$$U(\rho_1 g_1^{(i)})=\lambda_i(\rho_1 g_1^{(i)}), \ \ldots, \ U(\rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)})=\lambda_i(\rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)}).$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. собственный вектор $g\in\mathfrak{Y}$ с собственным числом λ_i не обязательно представим в виде (2.44). Обозначим множество функций (2.44) буквой γ_i, а его размерность — буквой m_i. Сформулируем достаточный признак разделения переменных на быстрые и медленные в системе централизатора (2.16).

Теорема 2.4. *Пусть для системы централизатора (2.16) выполняются следующие условия:*

1) *любой интеграл $\rho(x)\in\mathfrak{Y}$ системы нулевого приближения, определяемый уравнением (2.41), выражается через конечную совокупность независимых интегралов*

$$\rho_1(x), \ \ldots, \ \rho_m(x)\in\mathfrak{Y}, \tag{2.45}$$

т. е. $\rho(x)=w(\rho_1(x), \ldots, \rho_m(x))$, где $w(\rho_1, \ldots, \rho_m)$ — аналитическая функция, обращающаяся в нуль при $\rho_1\equiv\ldots\equiv\rho_m\equiv 0$;

2) *собственные функции с собственными числами λ_i, $i=\overline{1, k}$, имеют вид (2.44);*

3) *функции (2.45) можно дополнить собственными функциями из системы функций $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ до полной системы n независимых функций в G, т. е. $m+m_1+\ldots+m_r=n$.*

Тогда централизованная система с помощью замены переменных $z_1=\rho_1(x)$, ..., $z_m=\rho_m(x)$; $y_1^{(i)}=g_1^{(i)}(x)$, ..., $y_{m_i}^{(i)}=g_{m_i}^{(i)}(x)$, $i=\overline{1, r}$, преобразуется к разделенной системе для m медленных

$$\frac{dz_1}{dt}=\varepsilon\Phi_{11}(z)+\varepsilon^2\Phi_{12}(z)+\cdots;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dz_m}{dt}=\varepsilon\Phi_{m1}(z)+\varepsilon^2\Phi_{m2}(z)+\cdots$$

и $n-m$ быстрых переменных

$$\frac{dy_1^{(i)}}{dt}=\Psi_1^{(i)}(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\rho_{\nu 1}^{(i1)}y_1^{(i)}+\cdots+\rho_{\nu m_i}^{(i1)}(z)\,y_{m_i}^{(i)};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_{m_i}^{(i)}}{dt}=\Psi_{m_i}^{(i)}(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\rho_{\nu 1}^{(im_i)}(z)\,y_1^{(i)}+\cdots+\rho_{\nu m_i}^{(im_i)}(z)\,y_{m_i}^{(i)}, \quad i=\overline{1, r}.$$

Система для быстрых переменных интегрируется после системы для медленных переменных и в свою очередь распадается на r независимо интегрируемых подсистем порядков $m_1, \ldots, m_r$.

Доказательство теоремы 2.4 проводится аналогично доказательству соответствующей более общей теоремы из гл. 3.

ГЛАВА 7

ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ НА ПФАФФОВЫ СИСТЕМЫ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Рассмотрим пфаффову систему вида

$$\begin{aligned} dz_1 &= q_{11}(x, z, u)\,dx_1 + \cdots + q_{1m}(x, z, u)\,dx_m; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_k &= q_{k1}(x, z, u)\,dx_1 + \cdots + q_{km}(x, z, u)\,dx_m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где коэффициенты $q_{ij}(x, z, u)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, являются функциями вектора $z = \| z_1, \ldots, z_k \|$ зависимых переменных, вектора $x = \| x_1, \ldots, x_m \|$ независимых переменных и вектора $u = \| u_1, \ldots \ldots, u_l \|$ параметрических переменных. Функции $q_{ij}(x, z, u)$ — аналитические в области G, $G = R^m \times R^k \times R^l$.

Основная задача при изучении пфаффовой системы (1.1) — отыскание m-мерных интегральных поверхностей $\mathfrak{M}_m$, отнесенных к параметрам $x_1, \ldots, x_m$:

$$z_i = z_i(x_1, \ldots, x_m),\ u_j = u_j(x_1, \ldots, x_m), \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, l},$$

и определение степени произвола в их построении. Эта задача равносильна аналогичной в исследовании произвольной дифференциальной системы.

Рассмотрим для простоты систему уравнений первого порядка

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_k; \ldots; \partial z_j/\partial x_i, \ldots) = 0, \quad \alpha = \overline{1, 3}. \tag{1.2}$$

Чтобы доказать равносильность указанных задач, предполагаем, что данная система не приводит к конечным зависимостям между $x_1, \ldots, x_m$ и $z_1, \ldots, z_k$, и решаем ее относительно наибольшего возможного числа производных. Пусть, например, это производные

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = g_{11}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_{\mu_1}} = g_{1\mu_1}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \mu_1 \leqslant m; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial z_k}{\partial x_1} = g_{k1}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \ldots, \frac{\partial z_k}{\partial x_{\mu_k}} = g_{k\mu_k}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \mu_k \leqslant m. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Вектор производных, которые не фигурируют в левых частях соотношений (1.3), обозначим через $\partial z/\partial x$. Компоненты этого вектора примем за параметрические переменные

$$u_{1,\mu_1+1}=\frac{\partial z_1}{\partial x_{\mu_1+1}}, \ \ldots, \ u_{1m}=\frac{\partial z_1}{\partial x_m};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{k,\mu_k+1}=\frac{\partial z_k}{\partial x_{\mu_k+1}}, \ \ldots, \ u_{km}=\frac{\partial z_k}{\partial x_m}.$$

Вводя вектор $u=\|u_{1,\mu_1+1}, \ldots, u_{1m}; \ldots; u_{k,\mu_k+1}, \ldots, u_{km}\|$, представим пфаффову систему в виде

$$\begin{gathered} dz_1=g_{11}(x, z, u)\,dx_1+\ \cdots\ +g_{1\mu_1}(x, z, u)\,dx_{\mu_1}+ \\ +u_{1,\mu_1+1}dx_{\mu_1+1}+\ \cdots\ +u_{1m}dx_m; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_k=g_{k1}(x, z, u)\,dx_1+\ \cdots\ +g_{k,\mu_k}(x, z, u)\,dx_{\mu_k}+ \\ +u_{k,\mu_k+1}dx_{\mu_k+1}+\ \cdots\ +u_{k,\mu_k+1}dx_m. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Отыскание m-мерных интегральных поверхностей $\mathfrak{M}_m$ пфаффовой системы (1.4)*

$$z_1=\varphi_1(x), \ \ldots, \ z_k=\varphi_k(x); \tag{1.5}$$

$$u_{j,\mu_j+1}(x)=\varphi_{j,\mu_j+1}(x), \ \ldots, \ u_{jm}(x)=\varphi_{jm}(x), \quad j=\overline{1, k},$$

равносильно интегрированию дифференциальной системы (1.2).

Доказательство. Пусть найдена интегральная поверхность $\mathfrak{M}_m$ пфаффовой системы (1.4). Тогда подстановка соотношений (1.5) в эту систему приводит к тождествам

$$\begin{gathered} \frac{\partial z_j}{\partial x_1}\equiv g_{j1}(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x); \ldots; \varphi_{j,\mu_j+1}(x), \ldots, \varphi_{jm}(x), \ldots); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z_j}{\partial x_{\mu_j}}\equiv g_{j\mu_j}(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x); \ldots; \varphi_{j,\mu_j+1}(x), \ldots, \varphi_{jm}(x), \ldots); \\ \partial z_j/\partial x_{\mu_j+1}\equiv\varphi_{j,\mu_j+1}(x), \ \ldots, \ \partial z_j/\partial x_m\equiv\varphi_{jm}(x). \end{gathered} \tag{1.6}$$

В свою очередь подстановка тождеств (1.6) в уравнения (1.2) обращает их в тождества.

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 1.2. *Если известно решение*

$$z_1=\varphi_1(x), \ \ldots, \ z_k=\varphi_k(x) \tag{1.7}$$

дифференциальной системы (1.2), то, определив функции u по формулам

$$u_{j,\mu_j+1}(x)\equiv\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_{\mu_j+1}}, \ \ldots; \ u_{jm}(x)\equiv\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}, \quad j=\overline{1, k}, \tag{1.8}$$

получим уравнения интегральной поверхности $\mathfrak{M}_m$ пфаффовой системы (1.4).

Доказательство. Интегрирование пфаффовой системы можно заменить интегрированием системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_1} = g_{j1}(x, z, u), \ \ldots, \ \frac{\partial z_j}{\partial x_{\mu_j}} = g_{j\mu_j}(x, z, u);$$
$$\frac{\partial z_j}{\partial x_{\mu_j+1}} = u_{j,\mu_j+1}(x, z, u), \ \ldots, \ \frac{\partial z_j}{\partial x_m} = u_{jm}(x, z, u), \quad j = \overline{1, k}. \tag{1.9}$$

Согласно определению функций $g_{j1}, \ldots, g_{j\mu_j}$ как решений системы уравнений (1.2) подстановка значений функций z и параметрических переменных u из формул (1.7), (1.8) обращает уравнения (1.9) в тождества.

В дальнейшем будем рассматривать автономные пфаффовы системы вида (1.1)

$$\begin{gathered} dz_1 = \omega_{11}(z, u)\, dx_1 + \cdots + \omega_{1m}(z, u)\, dx_m; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_k = \omega_{k1}(z, u)\, dx_1 + \cdots + \omega_{km}(z, u)\, dx_m, \end{gathered} \tag{1.10}$$

коэффициенты которой не содержат в явном виде независимые переменные $x_1, \ldots, x_m$.

Легко перейти от системы (1.1) к автономной. С помощью новых переменных $y_1 = z_1, \ldots, y_k = z_k, y_{k+1} = x_1, \ldots, y_{k+m} = x_m$ систему (1.1) представим в виде

$$\begin{gathered} dy_1 = q_{11}(y, u)\, dx_1 + \cdots + q_{1m}(y, u)\, dx_m; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dy_k = q_{k1}(y, u)\, dx_2 + \cdots + q_{km}(y, u)\, dx_m; \\ dy_{k+1} = dx_1; \\ \cdots\cdots \\ dy_{k+m} = dx_m. \end{gathered}$$

Параметрические переменные u являются функциями части переменных y.

Введем некоторые вспомогательные понятия, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть произвольная аналитическая функция $f(z)$ от переменных z определена в области G. Вычислим полный дифференциал от этой функции в силу уравнений (1.10):

$$df = \frac{df}{dz_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \equiv \mathrm{U}_1 f dx_1 + \cdots + \mathrm{U}_m f dx_m, \tag{1.11}$$

где

$$\begin{gathered} \mathrm{U}_1 = \omega_{11}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \omega_{k1}\frac{\partial}{\partial z_k}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{U}_m = \omega_{1m}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \omega_{km}\frac{\partial}{\partial z_k}. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Операторы (1.12) порождают обертывающую алгебру Ли пфаффовой системы (1.10). Обозначим эту алгебру $\mathfrak{B}$. Операторы (1.13) будем называть ассоциированными с системой (1.10).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Любое преобразование пфаффовой системы (1.10) при помощи замены переменных*

$$z = \varphi(z'), \quad z' = \varphi^{-1}(z), \tag{1.13}$$

не содержащей независимых переменных x, сводится к преобразованию системы операторов $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_m$, порождающих алгебру Ли $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Произведем замену переменных (1.13) в формулах (1.11):

$$df' = \mathrm{U}_1' f' dx_1 + \cdots + \mathrm{U}_m' f' dx_m. \tag{1.14}$$

Через $\mathrm{U}_1', \ldots, \mathrm{U}_m$ обозначим операторы (1.12) в новых переменных. Подставляя в формулу (1.14) вместо f' последовательно функции $z_1', \ldots, z_k'$, приходим к пфаффовой системе (1.10) в новых переменных z'.

Дополним систему операторов (1.12) до полной системы операторов за счет элементов алгебры $\mathfrak{B}$: $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_m, \mathrm{U}_{m+1}, \ldots, \mathrm{U}_r$. Система уравнений

$$\mathrm{U}_1 f = 0, \ \ldots, \ \mathrm{U}_r f = 0 \tag{1.15}$$

является вполне интегрируемой и называется характеристической для исходной пфаффовой системы (1.10). Если число переменных k в системе (1.15) меньше числа r уравнений, то имеется $k—r$ нетривиальных (т. е. не являющихся тождественными константами) решений $\rho_1(z), \ldots, \rho_\chi(z)$, $\chi = k - r$. Функции $\rho_1(z), \ldots, \rho_\chi(z)$ называются интегралами пфаффовой системы (1.10).

Предположим далее, что система пфаффовых уравнений (1.10) подвергнута малым возмущениям

$$\begin{gathered} dz_1' = (\omega_{11}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{11}')\, dx_1' + \cdots + (\omega_{1m}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{1m}')\, dx_m'; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_k' = (\omega_{k1}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{k1}')\, dx_1' + \cdots + (\omega_{km}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{km}')\, dx_m', \end{gathered} \tag{1.16}$$

где $\omega_{ij}', \tilde{\omega}_{ij}', i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m}$,— функции z' и u'.

Совершенно ясно, что задача о возмущении пфаффовой системы (1.10) в силу теорем 1.2 и 1.3 равносильна задаче о возмущении дифференциальной системы (1.2). Однако рассмотрение пфаффовой системы дает то преимущество, что, как следует из теоремы 1.3, она вполне характеризуется набором ассоциированных с ней дифференциальных операторов

$$\begin{gathered} \mathrm{U}_1' + \varepsilon\tilde{\mathrm{U}}_1 \equiv (\omega_{11}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{11}') \frac{\partial}{\partial z_1'} + \cdots + (\omega_{k1}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{k1}') \frac{\partial}{\partial z_k'}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{U}_m' + \varepsilon\tilde{\mathrm{U}}_m' \equiv (\omega_{1m}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{1m}') \frac{\partial}{\partial z_1'} + \cdots + (\omega_{km}' + \varepsilon\tilde{\omega}_{km}') \frac{\partial}{\partial z_k'}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Операторы (1.17) порождают обертывающую алгебру Ли возмущенной пфаффовой системы (1.16). Обозначим эту алгебру $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Систему операторов (1.17) дополним до полной системы за счет элементов алгебры $\tilde{\mathfrak{B}}$:

$$U'_{10} \equiv U'_1 + \varepsilon\tilde{U}'_1, \ \ldots, \quad U'_{m0} \equiv U'_m + \varepsilon\tilde{U}'_m,$$

$$U'_{m+1,0} \equiv U'_{m+1} + \varepsilon\tilde{U}'_{m+1}, \ \ldots, \ U'_{q0} \equiv U'_q + \varepsilon\tilde{U}'_q \tag{1.18}$$

Далее достаточно рассматривать задачу о возмущении вполне интегрируемой пфаффовой системы

$$(U'_1 + \varepsilon\tilde{U}'_1) f = 0, \ldots, (U'_1 + \varepsilon\tilde{U}'_q) f = 0. \tag{1.19}$$

При этом будем считать, что выполняются следующие условия: система (1.19) не подвергается алгебраическим преобразованиям и является вполне интегрируемой при любом значении параметра ε.

Применим к системе (1.19) алгоритм асимптотической декомпозиции, произведя в операторах (1.18) замену переменных в виде рядов Ли

$$z_k = \exp(-\varepsilon S') z'_k, \ z'_k = \exp(\varepsilon S) z_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{1.20}$$

где

$$\exp \varepsilon S = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} S + \frac{\varepsilon^2}{2!} S^2 + \cdots;$$

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \cdots, \ S_i = \gamma_{i1} \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \gamma_{ik} \frac{\partial}{\partial z_k}, \ i = 1, 2. \tag{1.21}$$

Коэффициенты операторов S_i, $i = 1, 2, \ldots,$— неопределенные пока функции. Операторы (1.18) под действием преобразования (1.20) перейдут в соответствии с формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа в следующие:

$$U'_{i0} \to U_{i0} = U_i + \varepsilon(-[U_i, S_1] + F_{1i}) + \cdots + \varepsilon^{\nu}(-[U_i, S_{\nu}] + $$
$$+ F_{\nu i}) + \cdots,$$

где $F_{1i} = \tilde{U}_i$, $F_{\nu i}$ — известные функции от U_i, $\tilde{U}_i$, $S_1, \ldots, \quad S_{\nu-1}$.

Обозначим через $N \equiv \mathrm{pr}\, F$ проекцию оператора $F \in \tilde{\mathfrak{B}}$ на алгебру централизатора $\mathfrak{B}_0$, образованную решениями системы операторных уравнений

$$[U_1, S] = 0, \ \ldots, \ [U_q, S] = 0, \quad S \in \tilde{\mathfrak{B}}. \tag{1.22}$$

Операторы $S_1, S_2, \ldots,$ входящие в преобразование (1.21), определяются как решения рекуррентной последовательности операторных уравнений

$$[U_1, S_{\nu}] = F_{1\nu} - \mathrm{pr}\, F_{1\nu}, \ \ldots, \ [U_q, S_{\nu}] = F_{\nu q} - \mathrm{pr}\, F_{\nu q}, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

Введем обозначение $N_j = \mathrm{pr}\, F_{1j} + \ldots + \varepsilon^{\nu-1}\, \mathrm{pr}\, F_{\nu j} + \ldots$, $j = \overline{1, q}$. Преобразованная полная система (1.19) может быть записана в виде

$$(U_1 + \varepsilon N_1) f = 0; \ \ldots; \quad (U_q + \varepsilon N_q) f = 0. \tag{1.23}$$

Систему (1.23) назовем централизованной полной системой. По операторам $\mathbf{U}_1 + \varepsilon \mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{U}_m + \varepsilon \mathbf{N}_m$ легко восстанавливается преобразованная пфаффова система

$$\begin{aligned} dz_1 &= (\omega_{11} + \varepsilon \mathbf{N}_1 z_1)\, dx_1 + \cdots + (\omega_{1m} + \varepsilon \mathbf{N}_m z_1)\, dx_m; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_k &= (\omega_{k1} + \varepsilon \mathbf{N}_1 z_k)\, dx_1 + \cdots + (\omega_{km} + \varepsilon \mathbf{N}_m z_k)\, dx_m. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Систему (1.24) назовем централизованной пфаффовой системой. Интегрирование системы (1.24) проще, чем интегрирование исходной возмущенной системы (1.16). Здесь можно сформулирсвать аналоги теорем § 2 гл. 3. В качестве примера приведем теорему о разделении переменных на быстрые и медленные в централизованной пфаффовой системе.

Теорема 1.4. *Пусть характеристическая система (1.15) системы нулевого приближения образована коммутирующими операторами* $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_m$ *и* G *является областью существования общего решения* $\rho_1(z), \ldots, \rho_\chi(z)$, $\chi = k - m$. *Тогда алгебра централизатора* $\mathfrak{B}_0$, *определяемая решениями операторных уравнений*

$$[\mathbf{U}_1, \mathbf{S}] = 0, \ \ldots, \ [\mathbf{U}_m, \mathbf{S}] = 0, \quad \mathbf{S} \in \tilde{\mathfrak{B}},$$

содержит k *несвязных операторов*

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{U}_1, \ \ldots; \ \mathbf{Z}_m = \mathbf{U}_m, \ \mathbf{Z}_{m+1} = \mathbf{U}_{m+1}, \ \ldots, \ \mathbf{Z}_k = \mathbf{U}_k.$$

Проекция $\mathrm{pr}\, \mathbf{F}$ *оператора* $\mathbf{F} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ *на алгебру* $\mathfrak{B}_0$ *имеет вид*

$$\mathrm{pr}\, \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{k} \rho_j \mathbf{Z}_j,$$

где ρ_j *— решения характеристической системы. Замена переменных*

$$y_1 = \rho_1, \ \ldots, \ y_\chi = \rho_\chi, \quad \chi = k - m;$$

$$s_1 = w_1, \ \ldots, \ s_m = w_m,$$

где w_j, $j = \overline{1, m}$,*— решения неоднородных систем*

$$\mathbf{U}_1 f = 0, \ \ldots, \ \mathbf{U}_{j-1} f = 0, \ \mathbf{U}_j f = 1, \ \mathbf{U}_{j+1} f = 0, \ \ldots, \ \mathbf{U}_m f = 0,$$

преобразует централизованную пфаффову систему (1.24) к χ *уравнениям для медленных переменных* $y_1, \ldots, y_\chi$

$$\begin{aligned} dy_1 &= \varepsilon \varphi_{11} dx_1 + \cdots + \varepsilon \varphi_{1m} dx_m; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dy_\chi &= \varepsilon \varphi_{\chi 1} dx_1 + \cdots + \varepsilon \varphi_{\chi m} dx_m, \end{aligned}$$

и к m *уравнениям для быстрых переменных*

$$\begin{aligned} ds_1 &= (1 + \varepsilon \psi_{11})\, dx_1 + \cdots + \varepsilon \psi_{1m} dx_m; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ds_m &= \psi_{m1} dx_1 + \cdots + (1 + \varepsilon \psi_{mm})\, dx_m, \end{aligned}$$

где $\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jm}, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{im}$, $j = \overline{1, \chi}$, $i = \overline{1, m}$,*— известные функции от* y, u, ε.

Если положить в исходной пфаффовой системе (1.1) число независимых переменных равным единице, т. е. $m \equiv 1$, а число параметрических переменных равным нулю, т. е. $l \equiv 0$, то придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следовательно, распространение алгоритма асимптотической декомпозиции на пфаффовы системы является прямым обобщением результатов, полученных в предыдущих главах. Следует отметить качественный скачок в методике обоснования алгоритма асимптотической декомпозиции, обусловленный переходом от одного операторного уравнения в системе (1.22) в случае обыкновенных дифференциальных уравнений к системе операторных уравнений в случае пфаффовой системы. В первом случае решение одного операторного уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, во втором исследование системы операторных уравнений приводит к необходимости решения вполне интегрируемых систем и систем в инволюции.

§ 2. МЕТОД ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Остановимся на одном специальном случае выбора оператора проектирования P на алгебру $\mathfrak{B}$ системы нулевого приближения (1.10) в предположении, что она декомпозируема (см. § 4 гл. II). В этом случае в операторах $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_m$ (1.12), ассоциированных с системой нулевого приближения, переменные разделяются. Например, в случае полной декомпозируемости вектор переменных $x = \| x_1 \ldots, x_n \|$ можно разбить на подгруппы $x_{\nu_j} = \| x_{1\nu_j}, \ldots, x_{\nu_j \nu_j} \|$, $i = \overline{1, g}$, $\nu_1 + \ldots + \nu_g = n$ так, что операторы $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r$ характеристической системы могут быть представлены в виде

$$\mathrm{U}_{i\nu_j} = \sum_{j=1}^{g} \omega_{1\nu_j}^{(i)} (x_{\nu_j}) \frac{\partial}{\partial x_{1\nu_j}} + \cdots + \omega_{\nu_j \nu_j}^{(i)} (x_{\nu_j}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu_j \nu_j}}, \quad i = \overline{1, \nu_j}, \quad j = \overline{1, g}. \tag{2.1}$$

Тогда операция проектирования произвольного оператора $\mathbf{F}$ на алгебру $\mathfrak{B}$ будет заключаться в том, что в разложении коэффициентов оставляются лишь переменные из той группы, по которым берутся производные в операторе (2.1). В результате в преобразованной системе (1.24) переменные разделяются так же, как и в операторах (2.1)

Как следствие интегрирование исходной возмущенной системы заменяется интегрированием последовательности подсистем с разделенными переменными. Поскольку теорема о разрешимости операторных уравнений

$$[\mathrm{U}_1, \mathrm{S}] = \mathbf{F}_1 - PF_1, \ \ldots, \ [\mathrm{U}_r, \mathrm{S}] = \mathbf{F}_r - P\mathbf{F}_r$$

носит локальный характер (см. [77]), то и сам метод будем называть методом локальной асимптотической декомпозиции. Напомним, что вопрос обоснования алгоритма в этом случае остается открытым и, следовательно, все выкладки носят формальный характер.

Приведем несколько примеров, решение которых основано на методе локальной асимптотической декомпозиции.

Рассмотрим задачу об асимптотическом расщеплении возмущенного движения летательного аппарата. Предположим, что летательный аппарат самолетного типа имеет вертикальную плоскость симметрии xOy_1. Неподвижную систему координат обозначим $Ax_3y_3z_3$. Систему координат, связанную с летательным аппаратом, обозначим $Ox_1y_1z_1$, полускоростную систему — $Ox^*y^*z^*$. Уравнения движения относительно полускоростной системы координат содержат 13 переменных. Продольные переменные: V — скорость центра тяжести; θ — угол наклона траектории к горизонту; ω_z — проекция вектора угловой скорости на ось Oz; ν — угол тангажа; x — координата центра тяжести вдоль оси Ox_1; H — высота полета; m — масса аппарата. Боковые переменные: Ψ — угол поворота траектории; ω_x — проекция вектора угловой скорости на ось Ox_1; ω_y — проекция вектора угловой скорости на ось Oy_1; ψ — угол рыскания; γ — угол крена летательного аппарата; z — координата центра тяжести вдоль оси Oz_1.

Продольное движение летательного аппарата складывается из поступательного движения центра тяжести вдоль осей Ox_1 и Oy_1 (т. е. в плоскости симметрии Ox_1y_1) и вращательного движения относительно оси Oz_1. Боковое движение состоит из поступательного движения центра тяжести летательного аппарата вдоль оси Oz_1 и вращательного движения относительно осей Ox_1 и Oy_1. Общее движение летательного аппарата складывается из указанных двух движений.

С учетом приведенных выше обозначений уравнения движения летательного аппарата принимают следующий вид (см., например, работу [45]).

Уравнения, характеризующие продольное движение:

$$\begin{gathered}
\frac{dV}{dt} = F_V(V, \theta, \vartheta, H, m, \Psi, \psi, \gamma);\\
\frac{d\theta}{dt} = F_\theta(V, \theta, \vartheta, H, m, \Psi, \psi, \gamma);\\
\frac{d\omega_z}{dt} = F_{\omega_z}(V, \theta, \vartheta, \omega_z, H, m, \Psi, \omega_x, \omega_y, \psi, \gamma);\\
\frac{d\vartheta}{dt} = F_\vartheta(\omega_z, \omega_y, \gamma),\quad \frac{dx}{dt} = F_x(V, \theta, \Psi);\\
\frac{dH}{dt} = F_H(V, \theta),\quad \frac{dm}{dt} = F_m(V, H, t).
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Уравнения, характеризующие боковое движение:

$$\begin{gathered}
\frac{d\Psi}{dt} = F_\Psi(V, \theta, H, \vartheta, m, \Psi, \psi, \gamma);\\
\frac{d\omega_x}{dt} = F_{\omega_x}(V, \theta, \omega_z, \vartheta, H, \Psi, \omega_x, \omega_y, \psi, \gamma);\\
\frac{d\omega_y}{dt} = F_{\omega_y}(V, \theta, \omega_z, \vartheta, H, \Psi, \omega_x, \omega_y, \psi, \gamma);\\
\frac{d\psi}{dt} = F_\psi(\omega_z, \vartheta, \omega_y, \gamma);\quad \frac{d\gamma}{dt} = F_\gamma(\omega_z, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \gamma);
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\frac{dz}{dt} = F_z(V, \theta, \Psi).$$

Явные выражения для правых частей уравнений (2.2) и (2.3) не приводим, их можно найти в работе [45].

В дальнейшем для системы уравнений (2.2), (2.3) будем использовать векторную форму $d\eta/dt = F(t, \eta)$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{13})$; $F = (F_1, F_2, \ldots, F_{13})$ — переменные и функции, находящиеся в правых частях уравнений движения в том же порядке, в котором они приведены выше.

Пусть $\eta = \eta_*$ — некоторое программное движение летательного аппарата и $d\eta_*/dt \equiv F(t, \eta_*)$. Рассмотрим движение в окрестности этого программного движения $\eta = \eta_* + \varepsilon\Delta\eta$, где малый параметр $\varepsilon > 0$ характеризует малость возмущенного движения.

Если в основном программном движении скольжение отсутствует ($\beta = 0$), то, учитывая симметрию летательного аппарата, систему уравнений возмущенного движения можно представить в сокращенном виде:

$$\begin{gathered}\frac{d\Delta\eta_i}{dt} = \left(\Sigma_n \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_i + \frac{\varepsilon}{2}\left(\Sigma\Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_i + \varepsilon^2 \ldots;\\ \frac{d\Delta\eta_j}{dt} \left(\Sigma_\delta \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_j + \frac{\varepsilon}{2}\left(\Sigma\Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_j + \varepsilon^2 \ldots,\\ i = \overline{1, 7}, \quad j = \overline{8, 13}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь для упрощения принято

$$\left(\Sigma\Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_i = \sum_{j=1}^{13} \Delta\eta_i \frac{\partial F_i(t, \eta_*)}{\partial\eta_j};$$

индексами n и δ обозначены аналогичные суммы, но содержащие только параметры продольного или соответственно бокового движения. При $\varepsilon = 0$ система уравнений возмущенного движения (2.4) распадается на две независимые системы.

Применяя изложенный метод, после ряда выкладок находим выражение для оператора S_1, и преобразование (с точностью до величин порядка ε включительно) имеет вид

$$\eta_i = \left(1 - \varepsilon\sum_{\varkappa=1}^{13} \gamma_\varkappa \frac{\partial}{\partial\eta_\varkappa}\right)\bar{\eta}_i, \quad i = \overline{1, 13}.$$

После этого исходная система уравнений возмущенного движения (2.4) расщепляется на две независимые системы (с точностью до величин порядка ε включительно)

$$\frac{d\Delta\bar{\eta}_i}{dt} = \left(\Sigma_n \Delta\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_i + \varepsilon\left(\Sigma_n \Delta\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_i, \quad i = \overline{1, 7};$$

$$\frac{d\Delta\eta_j}{dt} = \left(\Sigma_\delta \Delta\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_j + \varepsilon\left(\Sigma_\delta \Delta\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_j, \quad j = \overline{8, 13}.$$

Рассмотрим уравнения, описывающие изоэнтропическое течение политропного газа [103]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial t}+(\alpha s+\beta r)\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\nu(\gamma-1)(r^2-s^2)}{4x};\\
&\frac{\partial r}{\partial t}+(\alpha r+\beta s)\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\nu(\gamma-1)(r^2-s^2)}{4x}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\gamma-1}{4}>\frac{1}{2}>0,\ \beta=\frac{1}{2}-\frac{\gamma-1}{4};$$

переменные s, r — инварианты Римана $s=u-\varphi(\rho)$, $r=u+\varphi(\rho)$, выраженные через параметры движения; u — скорость течения; ρ — плотность; γ — показатель, характеризующий давление политропного газа; параметр ν характеризует симметрию течения газа. Полагая в уравнениях (2.5) $\nu=0$, получаем плоскосимметричные уравнения движения

$$\frac{\partial s}{\partial t}+(\alpha s+\beta r)\frac{\partial s}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial r}{\partial t}+(\alpha r+\beta s)\frac{\partial r}{\partial x}=0.\tag{2.6}$$

При $\gamma=3$ уравнения (2.6) разделяются на два независимых квазилинейных уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial s}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial r}{\partial t}+r\frac{\partial r}{\partial x}=0.\tag{2.7}$$

Рассмотрим уравнения движения, близкие к уравнениям (2.7) — плоскосимметричным и разделенным. Для этого положим

$$\nu=\varepsilon,\ \gamma=3+\varepsilon\Delta\gamma,\ 0<\varepsilon<1.\tag{2.8}$$

Подставляя ν и γ согласно формулам (2.8) в уравнения (2.5), получаем систему

$$\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial s}{\partial x}=\varepsilon F_1(x,r,s);\quad \frac{\partial r}{\partial t}+r\frac{\partial r}{\partial x}=\varepsilon F_2(x,r,s),\tag{2.9}$$

где

$$F_1(x,r,s)=\frac{r^2-s^2}{2x}-\frac{\Delta\gamma}{4}(s-r)\frac{\partial s}{\partial x}+\varepsilon\Delta\gamma\frac{r^2-s^2}{4x};$$

$$F_2(x,r,s)=-\frac{r^2-s^2}{2x}-\frac{\Delta\gamma}{4}(r-s)\frac{\partial r}{\partial x}-\varepsilon\Delta\gamma\frac{r^2-s^2}{4x}.$$

При $\varepsilon=0$ система (2.9) расщепляется на два независимых квазилинейных уравнения типа (2.7). При $\varepsilon\neq0$ после ряда выкладок, которые здесь не приводим, получаем следующую разделенную систему (с точностью до величин порядка ε включительно) для новых переменных z_1, z_2, связанных формулами найденной нами замены переменных:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+z_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}=\varepsilon\left(\frac{z_1^2}{2x_2}+\frac{\Delta\gamma}{4}z_1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right);$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}=-\varepsilon\left(\frac{z_2^2}{2x_2}+\frac{\Delta\gamma}{4}z_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРНЫЕ КОММЕНТАРИИ

К главе 1

§ 1. В основу изложения положены работы авторов настоящей монографии [47, 71, 75], в которых при изучении систем дифференциальных уравнений осуществляется переход к векторным полям и алгебрам Ли, порождаемым этой системой. Общие вопросы теории гладких многообразий, векторных полей и алгебр Ли можно найти в работах [4, 92, 101]. Алгебры формальных векторных полей и исследования на их основе структуры дифференциальных уравнений описаны в работах [122, 135]. В работе [3] развивается метод исчисления, основанный на экспоненциальном представлении потоков, определяемых нестационарными обыкновенными дифференциальными уравнениями, и отражающий наиболее общие теоретико-групповые свойства потоков. Рассмотрены различные прикладные аспекты такого подхода, в особенности в применении к задачам теории управления и оптимизации.

§ 2. Классическое определение 2.1 рядов Ли было дано самим С. Ли [130]. Наиболее полно теорию рядов Ли развил В. Гребнер [125]. А. Н. Филатов обобщил понятие ряда Ли [110]. Теоремы 2.2, 2.3 приведены для удобства изложения, при их доказательстве использована работа [110]. Классическая теория групп Ли разработана для конечномерных групп и алгебр Ли. Фундаментальным результатом теории локальных конечномерных групп Ли является установление факта соответствия между группами и алгебрами Ли. Алгоритм соответствия реализуется в так называемых трех теоремах Ли. По классической теории Ли существует обширная монографическая литература (см., например, работы [30, 96, 100, 102, 114, 115, 117, 118]). Указанное соответствие между конечномерными группами и алгебрами Ли осуществляется интегрированием дифференциальных уравнений. Этот подход был предложен С. Ли. Другой метод, основанный на рассмотрении однопараметрических групп, связан с идеями Кэмпбелла — Хаусдорфа [115, 118, 120]. В нем также используются ряды Ли, что позволяет получить ряд существенных обобщений [33]. Для поставленных в данной книге задач аппарат теории конечномерных непрерывных групп и алгебр Ли оказался явно недостаточным. Это потребовало рассмотрения более общего объекта — псевдогруппы. Примером псевдогрупп являются бесконечномерные группы С. Ли и Е. Картана, для которых существует хорошо разработанная теория [121, 130].

Представляет интерес перенесение ряда результатов из классической теории групп Ли на псевдогруппы. Подробно эти вопросы освещаются в монографии Л. В. Овсянникова [95]. В частности, показано, что фундаментальный результат о соответствии между группами и алгебрами Ли и Картана справедлив.

Введение обертывающей псевдогруппы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$, порождаемой алгеброй Ли $\mathfrak{B}$, является дальнейшим развитием работ [47, 71, 73].

Представление элементов псевдогруппы $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ в виде рядов Ли и доказательство теоремы 2.8 о локальном соответствии между алгебрами и псевдогруппой в приведенном контексте принадлежат авторам и ранее не публиковались.

§ 3. Вывод формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа заимствован из работы [120].

§ 4. Теория С. Ли применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений излагается в сравнительно небольшом числе работ. Элементарное введение приведено в книгах [1, 25]. Работа [123] посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям высокого порядка. Вопрос понижения порядка дифференциальных уравнений на основе нахождения однопараметрических допустимых групп преобразований изложен в небольшой главе работы [40]. Здесь же рассмотрены различные приложения в астрофизике. В основных руководствах по теории групп Ли [94, 96, 115, 118], базирующихся на теории продолженных операторов, как правило, изучаются более общие объекты — системы полных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной зависимой переменной.

Материал данного параграфа основывается на результатах работы [120]. Однако в ней изучается главным образом вопрос о том, как можно найти интегралы полной системы уравнений в частных производных первого порядка, если известна некоторая группа преобразований, допустимая этой системой. Задача считается положительно решенной, если в процессе нахождения интегралов используются либо алгебраические операции, либо операции по интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений более низкого порядка по сравнению с теми, которые получаются из исходной системы.

Цельное изложение теории Ли, приведенное в параграфе применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, является оригинальным и публикуется впервые. Наряду с воспроизведением теорем 4.3, 4.4, вскрывающих суть теоретико-группового подхода С. Ли, доказаны новые теоремы 4.1, 4.2. Основной результат цитированной выше книги [40] повторяет теорему 4.3, однако приведенное там доказательство — достаточно сложное.

К главе 2

§ 1. Теория ассоциативных конечномерных алгебр была применена для исследования алгебраической приводимости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в работе [46]. В ней был предложен термин «алгебраически приводимые дифференциальные системы». Изложение данного параграфа следует этой работе.

Специфика исследуемых алгебр состоит в том, что они являются матричными. Поэтому необходимость перехода к регулярным представлениям отпадает. Теоремы 1.1, 1.2, 1.10, 1.12, 1.18, 1.19 и 1.21 принадлежат авторам. Остальные теоремы, приведенные для полноты изложения, заимствованы из работ [29, 116].

Другой подход к задачам алгебраической приводимости, основанный на применении групповой симметрии, давно используется в теории колебаний молекул (см., например, [66]), в механике [34]. Плодотворным этот подход оказался и в задачах теории управления [41—43].

§ 2. Содержание данного параграфа следует работам [63, 81].

§ 3. Чтобы дать более полное представление о теории матриц, коммутирующих со своей производной, приводятся результаты других авторов. Основополагающей в этом вопросе является работа [8]. Теорема 3.3 была доказана после знакомства с этой работой (см. также [48, 49]).

§ 4. Развиваются результаты наших работ [71, 73]. Центральное место среди них занимают теоремы 4.6, 4.7, обобщающие условия декомпозируемости (агрегируемости). Эти теоремы публикуются впервые. Наряду с ними доказаны вспомогательные теоремы 4.1—4.5 и лемма 4.1. Эти теоремы также доказаны нами и в данном контексте являются новыми. С современным состоянием теории декомпозиции и ее приложениями можно ознакомиться по обзорным работам [2, 13]. Термин «агрегирование», заимствованный из работы [97], используется как синоним приводимости.

§ 5. Содержание параграфа следует работе [50].

§ 6. Результаты § 1 распространяются на широкий класс линейных систем. Содержание параграфа следует работе [72].

К главе 3

§ 1. В основу изложения положены работы авторов [51—63, 70, 131, 132, 71—85], использующие в качестве преобразований ряды Ли по малому параметру. В настоящей работе вместо термина «система централизатора», введенного в работе [78], используется термин «централизованная система».

§ 2. Частичные варианты теоремы 2.1 опубликованы в работах [78, 79, 85]. Теорема 2.2 была анонсирована в работе [60].

§ 3. Изложение следует нашей работе [78]. Системы (3.6) (или (3.7)) получили в литературе название систем дифференциальных уравнений с одинаковыми главными частями (см., например, работу [39, с. 146]). Системы вида (3.7) изучались Якоби (см. [124, с. 381]). Наряду с ними он рассматривал и более общие системы, получившие название обобщенных систем Якоби. По существу, принципиальной разницы в интегрировании систем вида (3.6) или (3.7) нет. Более того, система (3.6) может быть приведена к системе (3.7). Этим, на наш взгляд, оправдывается название «система Якоби» вместо более длинного «система уравнений в частных производных с одинаковыми главными частями» (см., например, работу [39]).

§ 4. Содержание параграфа является развернутым доказательством результатов работы [78].

§ 5. Материал полностью оригинален.

§ 6. Проведено развернутое доказательство результатов работ [78, 85].

§ 7. Содержание параграфа полностью оригинально. Задача рассматривалась ранее в работе [54].

К главе 4

§ 1. Приводятся известные результаты из теории линейных операторов и представлений алгебр Ли. Изложение в данном контексте оригинально и принадлежит авторам.

§ 2—6. Материал полностью оригинален и является конкретным применением результатов гл. 3 к линейным системам с постоянными коэффициентами. Обертывающие алгебры как нулевого приближения, так и возмущенной системы являются конечномерными. Импримитивные множества в этом случае — это линейные пространства. Вследствие перехода в этих пространствах к представлению операторов матрицами все основные задачи сводятся к задачам линейной алгебры. Неожиданными и, на наш взгляд, изящными являются результаты теоремы 3.2 и следствия 3.1, которые устанавливают связь обычного скалярного произведения в пространстве $\mathfrak{R}^{(n,n)}$ с формой Киллинга: $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,\mathscr{X}, \mathrm{ad}\,\mathscr{Y})$, где $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — элементы алгебры Ли, определяющей скалярное произведение в алгебре Ли. Материал главы опубликован в виде препринта [83].

К главе 5

§ 1—5 являются полностью оригинальными. Благодаря матричным представлениям операторов все вычисления сводятся к простейшим уравнениям линейной алгебры. Материал § 1—4 опубликован в препринте [84].

К главе 6

Содержание § 1, 2 является оригинальным и иллюстрирует возможности, представляемые привлечением аппарата теории представлений алгебр Ли. Материал § 1 опубликован в препринте [84]. Другой подход использован в работах авторов [74, 75, 133]. По теории представлений алгебр Ли см. работы [5, 10, 30, 92].

К главе 7

§ 1 носит характер введения в метод асимптотической декомпозиции на пфаффовых формах. Изложение следует работе [77]. Более подробно см. работы [57, 58, 77].

§ 2 иллюстрирует возможности локального подхода в методе асимптотической декомпозиции. Изложение следует работе [70].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков : ДНТВУ, 1938.— 720 с.

2. *Андреев Ю. Н.* Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Автоматика и телемеханика.— 1982.— № 10.— С. 5—46.

3. *Аргачев А. А., Гамкерлидзе Р. В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.— 1978.— **107**, № 4.— С. 467—532.

4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1974.— 431 с.

5. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения : В 2 т.— М. : Мир, 1980.— Т. 1—2.

6. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 232 с.

7. *Богаевский В. Н., Повзнер А. Я.* Линейные методы в нелинейной теории возмущений дифференциальных уравнений // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— С. 90—93.

8. *Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н.* О матрицах, коммутирующих со своей производной // Изв. вузов. Сер. Математика.— 1959.— **11**, № 4, С. 27—37.

9. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.

10. *Боголюбов Н. Н.* Лекции по теории симметрии элементарных частиц.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.— 210 с.

11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 440 с.

12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.

13. *Богоявленский А. А., Емельянова И. С., Мархашов Л. Н. и др.* Групповые методы исследований уравнений механики систем конечного числа степеней свободы // Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением.— М. : Наука, 1981.— С. 69—93.

14. *Брюно А. Д.* Нормальные формы и методы осреднения // Докл. АН СССР.— 1976.— **240**, № 2.— С. 257—260.

15. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1979.— 254 с.

16. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.— М. : Мир, 1976.— 496 с.

17. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.

18. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра.— М. : Наука, 1974.— 336 с.

19. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебаний систем.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971.— 506 с.

20. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1950.— 436 с.

21. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 432 с.

22. *Гребенников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах.— М. : Наука, 1986.— 256 с.
23. *Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой.— М. : Наука, 1966.— 679 с.
24. *Гурса Э.* Курс математического анализа.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1933.— Т. 3, ч. 1.— 276 с.
25. *Гурса Э.* Курс математического анализа.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1936.— Т. 2.— 564 с.
26. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.— М. ; Л. : ГТТИ, 1934.— 360 с.
27. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 320 с.
28. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли.— М. : Изд-во иностр. лит. 1964.— 356 с.
29. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры.— Киев : Вища шк., 1980.— 190 с.
30. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления.— М. : Наука, 1970.— 664 с.
31. *Журавлев В. Ф.* Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике // Прикл. математика и механика.— 1983.— 47, № 4.— С. 559—565.
32. *Журавлев В. Ф.* О применении одночленных групп Ли к проблеме асимптотического интегрирования уравнений механики // X Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям : Докл.— София : Изд-во БАН, 1985.— С. 77—80.
33. *Зайцев Г. А.* Алгебраические проблемы математической и теоретической физики.— М. : Наука, 1974.— 192 с.
34. *Злокович Дж.* Теория групп и *G*-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике.— М. : Стройиздат, 1977.— 164 с.
35. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике.— М. : Наука, 1983.— 280 с.
36. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1978.— 240 с.
37. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложения методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев : Изд-во АН УССР, 1934.— 112 с.
38. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
39. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
40. *Курт Р.* Анализ размерностей в астрофизике.— М. : Мир, 1975.— 230 с.
41. *Кухтенко А. И.* Основные направления развития теории управления сложными системами // Кибернетика и вычисл. техника.— 1968.— Вып. 4.— С. 3—15.
42. *Кухтенко А. И., Удилов В. В.* Применение теории представлений групп для решения задач стабилизации упругих космических объектов // Там же.— 1971.— Вып. 8.— С. 4—17.
43. *Кухтенко А. И., Семенов В. Н., Удилов В. В.* Геометрические и абстрактно-алгебраические методы в теории автоматического управления // Там же.— 1975.— Вып. 27.— С. 3—20.
44. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.
45. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов.— М. : Оборонгиз, 1962.— 548 с.
46. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
47. *Лопатин А. К.* Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1968.— 4, № 3.— С. 439—445.
48. *Лопатин А. К.* О критерии Лаппо-Данилевского // Тр. семинара по мат. физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1968.— Вып. 2.— С. 148—167.
49. *Лопатин А. К.* О критерии Лаппо-Данилевского // Докл. АН БССР.— 1969.— 13, № 2.— С. 107—109.
50. *Лопатин А. К.* Условия полноты порождающей линейной оболочки системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их приводи-

мость // Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1972.— С. 146—154.

51. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем нелинейных дифференциальных уравнений // Всесоюз. конф. «Инвариантность, автономность, устойчивость» : Тез. докл.— Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1976.— С. 8.

52. *Лопатин А. К.* Исследования асимптотического взаимодействия колебательных составляющих в методе гармонического баланса. // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977.— С. 138—143.

53. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Кибернетика и вычисл. техника.— 1978.—-Вып. 39.— С. 39—45.

54. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление почти инвариантных систем // Теоретико-групповые методы в физике : Междунар. симпоз., Звенигород.— М. : Наука, 1980.— Т. 2.— С. 342—347.

55. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление почти линейных систем // Аналитические методы нелинейной механики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 67—80.

56. *Лопатин А. К.* Метод асимптотической декомпозиции в задачах динамики систем // Теоретическая и прикладная механика : IV наук. конгр. по теорет. и прикл. механика (Варна, 14—18 сент. 1981 г.) — София : Изд-во БАН, 1982.— С. 149—157.

57. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление вполне интегрируемых пфаффовых систем.— // Методы нелинейной механики и их применение.— Киев : Ин-т математики АН УССР,— 1982.— С. 47—59.

58. *Лопатин А. К.* К вопросу построения интегрального многообразия пфаффовой системы в инволюции.— Там же.— С. 59—70.

59. *Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем дифференциальных уравнений высокой размерности и ее приложения // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 235—242.

60. *Лопатин А. К.* Теоретико-групповые критерии декомпозиции систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Тез. докл. II Всесоюз. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике, физике».— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 145—147.

61. *Лопатин А. К.* Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1985.— Вып. 3.— С. 33—37.

62. *Лопатин А. К.* Асимптотическое разделение движений на быстрые и медленные в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром и полиномиальными коэффициентами // Там же.— Вып. 4.— С. 48—53.

63. *Лопатин А. К.* Декомпозиция систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами по нильпотентной составляющей // Дифференц. уравнения.— 1986.— 22, № 8, С. 1449—1451.

64. *Ляпин Е. С.* Полугруппы.— М. : Физматгиз, 1960.— 592 с.

65. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1955.— 656 с.

66. *Маянц Л. С.* Теория и расчет колебаний молекул.— М. : Изд-во АН СССР, 1960.— 528 с.

67. *Миллер У. мл.* Симметрия и разделение переменных.— М. : Мир, 1981.— 342 с.

68. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.

69. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 431 с.

70. *Митропольский Ю. А.* Развитие метода усреднения // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 23—34.

71. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* О декомпозиции нелинейных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1972.— № 12.— С. 1078—1081.

72. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Понижение порядка линейных систем на основе алгебраического приведения и некоторые приложения к зада-

чам механики электротехники // Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1972.— С. 32—59.

73. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме // Мат. физика.— 1973.— Вып. 14.— С. 125—140.

74. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Развитие асимптотического метода применительно к исследованию колебательных и волновых процессов // VII Intern. Konf. über Nichtlinear Schwingung.— Berlin : Akad. Verl. 1977.— Bd 1/2.— С. 95—106.

75. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Обобщение асимптотического метода на основе операции «погружения» в теории колебаний систем с сосредоточенными параметрами // Там же.— С. 117—123.

76. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление дифференциальных систем // Тр. VIII Междунар. конф. по теории нелинейн. колебаний.— Прага, 1978.— С. 959—964.

77. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1979.— 68 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 79.2).

78. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 1,— С. 35—44.

79. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики // X Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям : Докл.— София : Изд-во БАН, 1985.— С. 103—106.

80. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и их свойства.— Киев, 1985.— 63 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 85.73).

81. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев, 1985.— 64 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 85.74).

82. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 86, 71).

83. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и малым параметром.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 86, 72).

84. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром в пространстве представлений конечномерной группы Ли.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.73).

85. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповые аспекты асимптотических методов линейной механики // Мат. физика и нелинейн. механика. 1986.— Вып. 5.— С. 34—45.

86. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

87. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 592 с.

88. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн.— 1976.— **31**, № 1.— С. 42—53.

89. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М. : Наука, 1975.— 247 с.

90. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.— М. : Наука, 1981.— 400 с.

91. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах // Учен. зап. Казан. ун-та.— 1952.— **112**, № 9,— С. 17—20.

92. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп.— М. : Наука, 1976.— 560 с.

93. *Найфе А. Х.* Методы возмущений.— М. : Мир, 1976.— 456 с.

94. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск : Б. И., 1962.— 130 с.
95. *Овсянников Л. В.* Аналитические группы.— Новосибирск : Новосиб. ун-т, 1972.— 238 с.
96. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
97. *Павловский Ю. Н.* К вопросу об интегрировании и построении иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1971.— **11**, № 6, С. 1510—1520.
98. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли.— М. : Мир, 1983.— 400 с.
99. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Физматгиз, 1961.— 312 с.
100. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М. : Наука, 1973.— 519 с.
101. *Постников М. Н.* Введение в теорию Морса.— М. : Наука, 1971.— 568 с.
102. *Постников М. Н.* Группы и алгебры Ли.— М. : Наука, 1982.— 448 с.
103. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 592 с.
104. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— Т. 2.— 346 с.
105. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ.— М. : Наука, 1978.— 352 с.
106. *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений.— Кишинев : Штиинца, 1982.— 168 с.
107. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1977.— 256 с.
108. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. И.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М. : Физматгиз, 1963.— 734 с.
109. *Федоров Ф. И.* Об одном обобщении критерия Лаппо-Данилевского // Докл. АН БССР.— 1960.— **4**, № 11.— С. 454—455.
110. *Филатов А. Н.* Обобщенные ряды Ли и их приложение.— Ташкент : Изд-во АН УзССР, 1963.— 108 с.
111. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 214 с.
112. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла.— Киев : Наук. думка, 1983.— 200 с.
113. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах.— М. : Мир, 1968.— 432 с.
114. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М. : Мир, 1964.— 534 с.
115. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1940.— 336 с.
116. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1949.— 88 с.
117. *Шевалле К.* Теория групп Ли: В 3 т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— Т. 1.— 312 с.
118. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 360 с.
119. *Bogaevsky V. N., Povzner A. Ya.* Linear methods in nonlinear problems with a small parameter // Lect. Notes Math., Asympt. anal.— 1983.— N 985.— P. 441—448.
120. *Campbell I. E.* Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformations of groups.— Oxford : Clarendon press, 1903 — 412 p.
121. *Cartan E.* Sur la structure des groups infinis de transformations. OEUVRES.— Paris, 1953.— Pt 2, vol. 2.— 794 p.
122. *Chen K. T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical points // Amer. J. Math.— 1963.— **85**, N 4.— P. 693—722.
123. *Dickson L. E.* Differential equations from the group stand point // Ann. Math.— 1924.— **25**, N 2.— P. 287—378.
124. *Coursat E.* Lecons sur l'entegration des equations aux derivees partielles du premier ordre, Deuxieme edition revul et augmentee.— Paris, 1921.— То же.

Гурса Е. Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка.— Киев : Рад. шк., 1941.— 404 с.
125. *Gröbner W.* Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.— Berlin : Dtsch. Verl. Wiss., 1960.— 176 S.
126. *Hori G.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // J. Japan. Astron. Soc.— 1966.— 18, N 4.— P. 287—296.
127. *Hori G.* Lie transformations in nonhamiltonian systems // Lecture notes, Summer Institute in Orbital Mechanics.— Austin : Univ. Texas, 1970.
128. *Kamel A.* A perturbations methods in the theory of nonlinear oscillations // Celest. Mech.— 1970.— 3, N 1.— P. 90—106.
129. *Kirchgraber U., Stiefel E.* Methoden der analytischen störungsrechnung und Anwedungen.— Stuttgart : Teubner, 1978.— 294 S.
130. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen.— Leipzig : Teubner, 1888—1893.— Bd 1—3.
131. *Lopatin A. K.* Asymptotische Zerlegung von systemen nichtlinearer gewönlicher Differentialgleichungen // Schriftenreiche Zentralinst. Math. und Mech.— 1978.— N 26.— P. 17—22.
132. *Mitropolsky Yu. A.* Sur la decompositions asymptotique des systemes differentiels fondee sur des transformations de Lie // Nonlinear differential equations, invariance, stability and bifurcation / Eds de Mottoni, L. Salvadori.— New York; London : Acad. press, 1981.— P. 283—326.
133. *Mitropolsky Yu. A., Lopatin A. K.* La méthode asymptotique dans la theorie des progressus nonlineaires ondulatoires et oscillatoires // Boll. Unione math. ital.— 1975.— 4, N 11.— P. 413—429.
134. *Povzner A.* Linear methods in problems of nonlinear differential equations with a small parameter // Int. J. Non-Linear Mech.— 1974.— 9, N 4.— P. 279—323.
135. *Sternberg S.* Infinite Lie groups and formal aspects of dynamical systems // J. Math. and Mech.— 1961.— 10, N 3.— P. 451—471.

Монография

Юрий Алексеевич Митропольский
Алексей Константинович Лопатин

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД В АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Утверждено к печати ученым советом Института математики АН УССР

Редактор *С. Д. Кошис.* Художественный редактор *И. П. Антонюк.* Технический редактор *Н. Н. Лукашенко.* Корректоры *Л. Н. Лембак, Т. В. Пантелеймонова*

ИБ № 9315

Сдано в набор 05.06.87. Подп. к печ. 22.10.87. БФ 25673. Формат 60×90/16. Бум. кн. журн. Обыкн. нов. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 17,0. Усл. кр.-отт. 17,0. Уч.-изд. л. 21,03. Тираж 1150 экз. Заказ 7—1641. Цена 4 р. 50 к.

Издательство «Наукова думка», 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057 Киев 57, ул. Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги. 252004, Киев 4, ул. Репина, 4. Зак. 7—850.