Т.Постон, И.Стюарт

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография содержит обзор по теориям особенностей и бифуркаций и их приложениям. Примерно половина книги посвящена математическому аппарату теории, который излагается с самых азов; не предполагаются известными даже простейшие понятия геометрии многообразий и линейной алгебры. Вторую половину занимают приложения — к теории упругости, теории остойчивости судов, оптике, термодинамике, теории фазовых переходов, гидродинамике и т. д. Книга рассчитана на математиков-прикладников, а также инженеров и других специалистов, работающих в указанных областях знания.

Содержание

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА	5
ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ	9
ПРЕДИСЛОВИЕ	12
1. ИЗМЕНЕНИЯ ПОСТЕПЕННЫЕ И ВНЕЗАПНЫЕ	**19**
1 Катастрофы	19
2 Зиманова машина катастроф	21
3 Качалки	24
4 Теория катастроф	25
2. МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	**28**
1 Теоретико-множественные обозначения	29
2 Эвклидовы пространства	32
3 Линейные преобразования	35
4 Матрицы	38
5 Квадратичные формы	42
6 Кубические формы от двух переменных	46
7 Геометрия многочленов	53
3. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ	**57**
1 Расстояние в эвклидовом пространстве	57
2 Производная как касательная	59
3 Горизонтали	63
4 Частные производные	64
5 Высшие производные	66
6 Ряд Тейлора	67
7 Усеченная алгебра	72
8 Теорема об обратной функции	73
9 Теорема о неявной функции	74
4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ	**76**
1 Критические точки	77
2 Лемма Морса	79
3 Функции одной переменной	82
4 Функции нескольких переменных	85
5 Лемма расщепления	87
6 Структурная устойчивость	89

7 Многообразия 92
8 Трансверсальность 93
9 Трансверсальность и устойчивость 97
10 Понятие трансверсальности для отображений 100
11 Коразмерность 101
5. СНОВА МАШИНЫ 103
1 Машина Зимана 103
2 Каноническая катастрофа сборки 107
3 Динамика машины Зимана 113
4 Качалки 117
5 Постановка общей проблемы 120
6. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ 121
1 Эквивалентность семейств 121
2 Структурная устойчивость семейств 124
3 Физическая интерпретация структурной устойчивости 126
4 Лемма Морса и лемма расщепления для семейств 128
5 Геометрия катастроф 130
7. КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТОМА 132
1 Функции и семейства функций 133
2 Однопараметрические семейства 134
3 Нетрансверсальность и симметрия 142
4 Двухпараметрические семейства 145
5 Трех-, четырех- и пятипараметрические семейства 150
6 Высшие катастрофы 157
7 Теорема Тома 161
8. КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ 164
1 Конечная определенность и сильная конечная определенность 165
2 Пространства струй от одной переменной 167
3 Инфинитезимальные замены переменных 172
4 Более слабые условия конечной определенности 179
5 Преобразования, сдвигающие начало 182
6 Касание и трансверсальность 184
7 Коразмерность и деформации 189
8 Трансверсальность и универсальность 198
9 Сильная эквивалентность деформаций 201
10 Числа, ассоциированные с особенностями 203
11 Некоторые неравенства 205
12 Сводка результатов и вычислительных приемов 207
13 Примеры и вычисления 216
14 Необходимые замечания о терминологии 222
9. ГЕОМЕТРИЯ СЕМИ ПЕРВЫХ КАТАСТРОФ 225
1 Объекты изучения 225
2 Катастрофа складки 227
3 Катастрофа сборки 228

4 Катастрофа ласточкина хвоста 230
5 Катастрофа бабочки 232
6 Эллиптическая омбилика 235
7 Гиперболическая омбилика 240
8 Параболическая омбилика 243
9 Линейчатые поверхности 248
10. ОСТОЙЧИВОСТЬ СУДОВ 251
СТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ 251
1 Плавучесть 251
2 Равновесие 252
3 Остойчивость 252
4 Судно с вертикальными бортами 253
5 Геометрия кривой центров величины 255
6 Метацентры 256
ФОРМЫ СУДОВ 258
7 Эллиптическое судно 258
8 Прямоугольное судно 261
9 Трехмерный случай 266
10 Плавучие буровые платформы 270
11 Сравнение с общепринятым подходом 272
11. ГЕОМЕТРИЯ ЖИДКОСТИ 278
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ 278
1 Что мы описываем 278
2 Функции тока 280
3 Примеры течений 284
4 Завихренность 284
5 Методы комплексной переменной 286
УСТОЙЧИВОСТЬ И ЭКСПЕРИМЕНТ 288
6 Замены переменных 288
7 Эвристическая программа 290
8 Экспериментальное воплощение 291
РАСЧЕСЫВАНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ МОЛЕКУЛ 294
9 Неньютоново поведение 294
10 Растягивающие течения 296
ВЫРОЖДЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ 299
11 Шестивалковая мельница 299
12 Нелокальное бифуркационное множество для эллиптической омбилики 305
13 Шестивалковая мельница в растворе полимера 303
14 2n-валковая мельница 312
12. ОПТИКА И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ 314
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА 315
1 Каустики 315
2 Радуга 321

3 Вариационные принципы 323
4 Рассеяние 325
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА 329
5 Асимптотические решения волновых уравнений 329
6 Быстро осциллирующие интегралы 331
7 Универсальные деформации 334
8 Порядки каустик 336
ПРИЛОЖЕНИЯ 339
9 Рассеяние на кристаллической решетке 339
10 Другие каустики 344
11 Миражи 346
12 Звуковые удары 343
13 Гигантские океанские волны 355
13. УПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ 359
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ 361
1 Тела под нагрузкой 361
2 Состояния упругого равновесия 364
3 Новые моменты, связанные с бесконечномерностью 366
ЭЙЛЕРОВЫ СТЕРЖНИ 368
4 Конечно-элементный подход 368
5 Классический (1744г.) вариационный подход 370
6 Анализ возмущений 376
7 Современный функциональный анализ 378
8 Выпучивание пружины 383
9 Предварительно выпученный стержень 389
ГЕОМЕТРИЯ ПРОЩЕЛКИВАНИЯ 391
10 Чувствительность к несовершенству 391
11 (r,s)-устойчивость 395
12 Оптимизация 399
13 Симметрия; стержни и оболочки 400
ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИН 404
14 Уравнения Кармана 404
15 Деформация двойного собственного значения 408
ДИНАМИКА 413
16 Мягкие моды 413
17 Жесткость 414
14. ТЕРМОДИНАМИКА И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ 416
УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ 417
1 Уравнение ван дер Ваальса 417
2 Ферромагнетизм 420
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ 422
3 Энтропия 422
4 Трансформации принципа максимума энтропии 424
5 Преобразование Лежандра 425

6 Явные потенциалы 427
7 Теория Ландау 430
ФЛЮКТУАЦИИ И КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ 433
8 Классические показатели 433
9 Топологические попытки починить теорию 435
10 Роль флюктуации 436
11 Пространственные вариации 439
12 Статистические суммы 440
13 Группа перенормировок 443
14 Структурная устойчивость ренормализации 444
РОЛЬ СИММЕТРИИ 446
15 Четные функции 446
16 Формы вращающихся звезд 447
17 Нарушения симметрии 448
18 Трикритические точки 450
19 Симметрии кристаллов 452
20 Особенности спектров 453
15. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА 454
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ 455
1 Атомы 455
2 Поле 458
3 Взаимодействие 459
4 Измерения 460
КАТАСТРОФЫ ЛАЗЕРА 462
5 Деформация гамильтониана 462
6 Уравнения движения 463
7 Приближение среднего поля 465
8 Граничные условия 467
9 Многообразие неравнозесных стационарных состояний 468
ЭКСПЕРИМЕНТЫ 470
10 Лазерный переход 470
11 Оптическая бистабильность 470
12 Распределение фотоответов 472
АНАЛИТИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ 476
13 Равновесные граничные условия 477
14 Многообразие равновесия 478
15 Термодинамический фазовый переход 478
16 Критическое поведение 479
17 Аналитическое соответствие между экспериментами 479
18 Перспективы 481
16. БИОЛОГИЯ И ЭКОЛОГИЯ 482
РАЗМЕРЫ СООБЩЕСТВ ПЧЕЛ 483
1 Пчелиная экономика 483
2 Преимущества объединения 484

3 Геометрия катастрофы 485
4 Пространственные вариации 487
5 Усложнения 488
КАТАСТРОФЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ 488
6 Граничные эффекты 488
7 Классификация 490
ДВИЖУЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ЭКОЛОГИИ 494
8 Выбор соглашений и модели 494
9 Границы 495
10 Численная проверка 498
11 Как стабилизируются границы 501
12 Как начинается дифференциация 502
ЭМБРИОЛОГИЯ 505
13 Дифференцировка клеток 505
14 Катастрофы переключения 509
17. ПРОБЛЕМЫ СОЦИОЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 514
1 Выбор переменных 514
2 Археология и внезапные изменения 518
3 Катастрофы как модели 519
4 Тюремные бунты 525
5 Бистабильность восприятия 527
6 Алкоголь и интроверты 529
7 За предэлами элементарной теории катастроф 532
18. ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ. ЧТО ДАЛЬШЕ? 537
1 Нынешнее состояние 537
2 Будущее 540
ДОПОЛНЕНИЕ 1
Д.Р.ОЛСЕН, С.Р.КАРТЕР И Э.РОКВУД. ПРОГРАММА ДЛЯ ПРОВЕРКИ НА КОНЕЧНУЮ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И НАХОЖДЕНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ 543
ДОПОЛНЕНИЕ 2
КАТАСТРОФЫ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ 555
ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ЛИТЕРАТУРЕ 558
ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ КАТАСТРОФ 561
ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ 576
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА 579
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ 589
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 594

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

активная переменная 224
алгебра Ли 456
алгебраическое множество 53
алгоритм приведения к расщепленному виду 210
аналитическая функция 68
аналитическое соответствие 479
Арнольда классификация 160
асимметричная точка бифуркации 396

асимптотическое разложение 331
- решение 330
Аугусти модель 400, 401
аффинное подпространство 94
бабочка 152, 162
- двойственная 152
базис 34
- стандартный 36
банахово многообразие 364, 376
- пространство 272, 376
бассейн притяжения 408
безвихревое течение 286
Бернрейтера шкала 529
Бертело жидкость 428
бесконечномерное пространство 35
бистабильность восприятия 527
- лазера 471
бифуркации точка асимметричная 396
бифуркационное множество 112, 226
- - локальное 306
- - нелокальное 306
- бифуркация 112, 130
- вторичная 394
близкодействие 441
Больцмана постоянная 417
Бореля теорема 69
браслет омбилик 52
Бриллюэна функция 422
быстро осциллирующий интеграл 331
- убывает 330
в общем положении 95
вандерваальсова жидкость 428
вблизи 59, 591
Вейсса модель 420
- уравнение 420
вектор 33
- дуальный 460
векторное пространство 33
вектор-столбец 42
вектор-строка 42
версальная деформация 194, 209
версальность 209
ветвление решений 408
вещественно-аналитическое соответствие 480
вигвам 152, 162
внешняя переменная 223
внутренняя переменная 193, 223
возмущение 192
восстанавливающий момент 252
вторая производная 66
выпучивание 361
- пластическое 360, 361
- упругое 361
вырожденная квадратичная форма 46
- критическая точка 78, 79
- матрица 41
вырожденность 37
- двойная 152
вырожденный многочлен 555
г.о. 246
Галеркина—Ритца метод 383
гамильтониан 459
- Дикке 461
гармоническая функция 287
гармонический осциллятор 414
гауссова неподвижная точка 445
Гельмгольца потенциал 425
гессиан 67
Гиббса свободная энергия 427
- функция 425
гильбертово пространство 298, 458
Гинзбурга критерий 444
гиперболическая омбилика 154
- - вторая 156
гипоциклоида 239
гистерезис 115
главная диагональ 39
гладкая функция 67
горизонталь 63
градиент 99
- среды 487
градиентное отображение 99
градиентно-подобныи 507
граничные условия неравновесные 467

- - равновесные 467
грубая система 126
группа 171
- Ли 171, 456
- перенормировок 443
губы 247, 353
д.в.г. 499
дважды дифференцируемая функция 66
двойная вырожденность 152
- сборка 53, 400
двойное лучепреломление 297
- отношение 158
двойственная катастрофа 163
- сборка 117
двояковогнутость 491
двулучепреломление 297
действие 323, 326
декартово произведение 29
дельтоида 239
дефект 37
деформация 121, 192, 193, 208, 360
- версальная 194, 209
- индуцированная 193, 209
- универсальная 194
динамическая система 276
диполия Курно 534
дираковские обозначения 458
дискриминант квадратичной формы 46
- кубического уравнения 107
дискриминантный конус 46, 137
Дитеричи жидкость 428
диффеоморфизм 73
- локальный 74
дифференцируемая функция 61, 62
дифференцируемость кусочная 67
- n-кратная 67
Долгачёва число 203
достаточная струя 87
дуальный вектор 460
единичная матрица 39
- сфера 53
желоба скрещенные 78
жёлоб 78
жёсткая замена 267
жёсткие науки 540
жидкость Вертело 428
- ван дёр Ваальса 428
- Дитеричи 428
- ньютонова 294
завихренность 284
задача об арке 390
закон инерции Сильвестра 44
замена гладкая 73
- жёсткая 267
- инфинитезимальная 172
- координат 38
- линейная 48
- малая 168
защемленный конец 382
зиманов закон параболической остановки 501, 511
зиманова машина катастроф 21
идеальная система 192
Изинга модель 437
изолированная точка 78
индекс особенности 338
индуцированная деформация 193, 209
инфинитезимальная замена 172
информация 539
карман 234, 556
карта 93
касательное пространство 183
каспоидная катастрофа 161
каспоиды 150
катастрофа 20
- второй гиперболической омбилики 156
- гиперболической омбилики 154
- двойственная 163
- двойственной сборки 148
- каспоидная 161
- нерасщепляемая 367
- обобщенная 21
- параболической омбилики 156
- переключения 513

- Римана—Гюгонио 348, 428
- с ограничениями 15, 398, 449, 482, 489
- сборки 106, 107, 148, 161
- складки 142, 161
- условная 388
- эквивариантная 346, 537
- элементарная 12, 21, 163
- эллиптической омбилики 154
катастрофический прыжок 115
- скачок 115
каустика 315
качалка 24
квадратичная форма 42
- - вырожденная 46
квадривий 350
квадрика 42
квазиклассика 339
квазистатика 113
квартика 155
класс C^r 67
классификация Арнольда 160, 161
клюв 247, 257, 264
клюв-к-клюву 247, 353
кобазис 35
Кокстера число 203
кома 328
коммутационные соотношения 457
композиция 31
компонента 32
конечно-определенная функция 87, 166
консервативность 413
конус Маха 348
координата 32, 93
коразмерность 35, 102, 187, 223, 543
- право-левая 203
- функции в нуле 189, 208
коранг 46, 89
корневое множество 47
корреляция 439
кривая метацентров 257
- сборок 153, 231
- складок 112
- сосуществования 434
- статической остойчивости 272
- центров величины 254
криволинейные координаты 93
критическая нагрузка 392
- область 444
- опалесценция 437
- точка 76, 77, 416
- - вырожденная 78, 79
- - невырожденная 78
критический показатель 422, 435, 439
критическое значение 77
кубика 47
кубическая форма 47
Курно диполия 534
кусочная дифференцируемость 67
Куэтта эксперимент 291
Кюри точка 421
лагранжев множитель 424
лагранжево многообразие 332
лазер 455
- Томпсона 493
Ландау теория 430
Ланжевена функция 422
лапласиан 285
ласточкин хвост 150, 161, 353
Лежандра преобразование 426
лемма Морса 76, 80
- - для семейств 129
- Накаямы 178
- расщепления 14, 76, 87
- - для семейств 128
линейная зависимость 34
- замена 48
- комбинация 34
- независимость 34
линейное преобразование (отображение) 35
- приближение 57
- - наилучшее 60
линия тока 280
лишний параметр 224
локальная система координат 93
- k-определенность 181

локально 59
макросостояние 423
Максвелла правило 418
- принцип 427—428
- страт 306
максимум 78
малая функция 89
Мальгранжа подготовительная теорема 189
матрица 38
- вырожденная 41
- Гессе 67, 78
- единичная 39
- квадратичной формы 43
- невырожденная 41
- нулевая 39
- обратная 41
- размера m*n 38
- симметричная 43
- транспонированная 42
Маха конус 348
машина катастроф 21
мельница двухвалковая 294
- четырехвалковая 293
- шесгивалковая 299
- валковая, 2n, 312
метастабильное состояние 433
метацентр 256
метацентрическая высота 257
метацентров кривая 257
метод ВКБ 333
- сечений 53
- статического возмущения 377
- стационарной фазы 333
микросостояние 423
минимум 78
многообразие 92
- катастрофы 109, 226
- равновесия 365
многочлен 53
- вырожденный 555
множество 28
- Максвелла 306
- соединения сёдел 307
мода выпучивания 367, 373
- колебании 413
модель Аугусти 400, 401
- генетического переключения 506
- Изинга 437
модуль 161
Морса лемма 76, 80, 129
морсовская критическая точка 76
- особенность 161
- функция 90
морсовское l-седло 81
мультистабильность 527
мягкая мода 414, 437
наблюдаемая 461
накачка 467
Накаямы лемма 178
начало 33
невырожденная критическая точка 78
- - форма семейства 161
- матрица 41
невырожденное отображение 37
некритическая область 451
- форма семейства 161
нелокальное бифуркационное множество 306
немая переменная 195
немой параметр 162, 224
неопределенная форма 197
непрерывная функция 58
непрерывно дифференцируемая функция 66
нерасщепляемая катастрофа 367
несжимаемое течение 282
несовершенство 192, 395
несущественная переменная 130, 224
нефроида 317
неявное дифференцирование 75
норма 57, 379
нормализационная группа 443
нормализованная форма струи 211
нормальный фактор 529
ньютонова жидкость 294
обезьянье седло 78
область значений 30

- определения 30
обобщенная катастрофа 21
- производная 380
обобщенные координаты 93
образ 30
обратимое отображение 37
обратная матрица 41
- функция 32
обратное отображение 37
общее положение 95
объединение 29
ограничение 32
одновременные моды 403
однопараметрическое семейство 134
одночлен 53
ожидаемое значение 461
окрестность 58—59
омбилика 154, 162
- высшая 157
- гиперболическая 154, 353
- коническая 157
- параболическая 156
- символическая 157
- эллиптическая 154, 353
омега-взрыв 535
Онсагера соотношения 416
оператор Лапласа 285
- плотности 462
- - приведенный 466
- рождения 458
- уничтожения 458
- числа фотонов 458
определённость конечная 166
определитель 42
орбита 171
- погруженная 174
особая точка 226
особенность 226
особое множество 226
- отображение 93
остойчивость 252, 259
острое ребро 238
открытый шар 58
отображение 30
- катастрофы 109, 110, 226
п.о. 246
параболическая омбилика 156
- остановка 501, 511
параметр 93
- деформации 223
- конструкции 388
- лишний 224
- нагрузки 388
- немой 162, 224
- несовершенства 392
- порядка 468
- управляющий 115
параметризация 93, 102
параметризованная кривая 100
пассивная переменная 224
переводит 30
переменная 31
- активная 224
- внешняя 223
- внутренняя 193, 223
- деформации 193
- немая 195
- несущественная 130, 224
- пассивная 224
- поведения 115
- состояния 115
- существенная 130
- управления 115
перенормировка 443
пересечение 29
- трансверсальное 94
Пирси функция 337
плечо восстанавливающего момента 252
- статической остойчивости 252
поведение 223
поведенческая переменная 115, 223
поверхность равновесия 109, 365
подготовительная теорема Мальгранжа 189
подкатастрофа 247
подкрепленная пластина 399
подмногообразие в R^n 92

подмножество 29
подпространство 33
- аффинное 94
показатель чувствительности к несовершенству 392
полиномиальная функция 48
полиномиальное выражение 48
полуалгебраическое множество 53
порождает 34
порядок каустики 334
- функции в нуле 61, 70
поток обратной связи 525
- - —быстрый 525
- - —медленный 525
почти все 441
правая эквивалентность 84—85
правило параллелограмма 33
- равных площадей 418
предельный показатель 393
приведение по строкам 40
принцип Максвелла 427—428
- максимального промедления 114, 413
- максимума энтропии 425
- наименьшего времени 315
- - действия 323
- одновременных мод 399
- Ферма — Гамильтона 315
произведение декартово 29
- скалярное 378
- тензорное 459
производная 61, 62
- вторая 66
- обобщенная 380
- частная 64
- сдвиг 284
пространство бесконечномерное 35
- векторное 33
- гильбертово 298, 458
- деформации 193, 223
- касательное 183
- поведения 223
- состояний 223, 226
- струи 167
- управления 223, 226
- Фока 458
- Фреше 379
- эвклидово 32
процесс приведения Ляпунова — Шмидта 366
прощёлкивание 387, 392
прыжок 115
пустое множество 29
равновесная кривая 364
- поверхность 365
равновесный путь 364
радиус кривизны 264
размерность 35
- внешняя 223
- деформации 193, 223, 226
- многообразия 93
- управления 223
ранг квадратичной формы 44
- отображения 37
расстояние 57
расходящийся ряд 58
расхождение 116
расчесывание 296
расщепляющий фактор 529
рестабилизация 387
росток 140, 174, 379
рогор 99
ряд расходящийся 58
- сходящийся 58
- Тейлора 67, 70
самодвойственность 154, 157
- самопересечения кривая 232
сборка 106, 107, 148, 150, 161, 229, 479
- двойная 53, 400
- двойственная 117, 148
- Уитни 107
сборки точка 109
сборок кривая (линия) 153, 231, 232
свободная опёртость 368, 405
- энтальпия 425
связь 434
сдвиг простои 284

- чистый 284
сдвигающий член 84, 118, 121
седло 78
- обезьянье 78
- одностороннее 489
семейство однопараметрическое 134
серия A 150
сечение 53
сигнатура 44
Сильвестра закон инерции 44
сильная эквивалентность деформаций 202
- k-определенность 166
символ Кронекера 473
симметричная матрица 43
сингулярное отображение 93
Сирсмы прием 213
- диаграмма 218
система координат локальная 93
- со связями 75
скалярное произведение 378
скачок 115, 435
складка 142, 161, 229
складки точка 228
складок кривая (линия) 109, 112
- поверхность 231, 232
скорость постоянного растяжения 298
скрещенные желоба 78
собственное состояние 461
содержит(ся) 29
соотношения Онсагера 416
составная точка выпучивания 412
состояние 223
сосуществования кривая 434
сохранение 281
спонтанное нарушение симметрии 449
стандартная деформация 226
стандартный базис 36
статистическая сумма 440
статическое возмущение 377
стационарное действие 323
- решение 329
- течение 281
степень асимптотического разложения 331
- многочлена 53
- негрубости 6
- упорядоченности 431
стержень 368
- заделанный 371
столбец 38
странный аттрактор 306, 535
страт Максвелла 306
стратификация 191
строгие источники 164
строка 38
структурная устойчивость 12, 126, 127
- - семейств 124
- - функции 90
струя 70, 71
- достаточная 87
ступенчатая форма 40
сужение 32
суперпозиция состояний 456
существенная переменная 130, 224
схлопывание 389
сходящийся ряд 58
тейл 71
тейлоровская аппроксимация 394
тензорное произведение 459
теорема деления 189
- о неявной функции 74, 75
- об обратной функции 74
теория катастроф 12, 20, 25
- особенностей 10
термодинамический потенциал 425
течение безвихревое 286
- несжимаемое 282
- постоянно растягивающее 297
- растягивающее 296
- стационарное 281
типичность 91, 95, 133
тождественное преобразование 39
Тома программа 397
- теорема 13, 161

- - о трансверсальности 96, 99
- - об изотопии 98
Томпсона лазер 493
точка 29
- перегиба 78
- торможения 278, 283
точный дифференциал 99
трансверсальность 93, 94, 100
трансекта 500
транспонированная матрица 42
тривий 350
трикритическая точка 386, 444
тройное вырождение 150
угловая фокусировка 326
ударная волна 349
Уитни сборка 107
ультрасильная определенность 451
умножение на скаляр 32
универсальная деформация 194, 209
универсальность 143
упорядоченная пара 29
упорядоченный набор 30
управление 223
управляющая переменная 115, 223
управляющий параметр 115
упругая энергия 362
упругость 361
уравнение ван дёр Ваальса 417
- - приведенное 418
- Гейзенберга 463
- Дуффинга 532
- Шрёдингера 459
уравнения Кармана 404—405
- реакции-диффузии 506
ус 232
усечение 72, 183
условная катастрофа 388
устойчивость 98, 182
фаза 330
фазовое пространство 326
фазовый переход второго рода 431
- - первого рода 429, 431
Ферма принцип 315
флаг 230
флюктуация 438
фокальная поверхность 270
фокус 327
форма квадратичная 42
- кубическая 47
- неопределенная 197
формальный степенной ряд 70
Фреше пространство 379
функционал 363, 364
функциональный анализ 363
функция 30, 364
- аналитическая 68
- гармоническая 287
- гладкая 67
- дважды дифференцируемая 66
- дифференцируемая 61, 62
- конечно-определенная 87
- морсовская 90
- непрерывная 58
- непрерывно дифференцируемая 66
- нескольких переменных 31
- обратная 32
- порядка k 70
- тока 281
функция-градиент 99
хаос 534
хвост 69, 71
центр величины 252
- кривизны 264
центроид 251
цепное правило 63
частная производная 64
численные инварианты особенностей 203
число Долгачёва 203
- Кокстера 203
- определенности 166, 203, 204
- сильной определенности 204
чистое вращение 284
- состояние 463
чистый сдвиг 284, 286
член, нарушающий симметрию 449
чувствительность к несовершенству 392

чудесный принцип фаэтона 399
шар открытый 58
шевеление 97
щелчок 399
э.о. 246
эвклидово пространство 32
эволюта 117
Эири дифракционные полосы 336
- функция 336
эквивалентность асимптотических решений 330
- гладких функций вблизи нуля 84
- деформаций сильная 202, 209
- правая 84—85
- семейств 123
- универсальных семейств 140
эквивариантная катастрофа 346, 537
элемент множества 29
элементарная катастрофа 12, 21, 163
- теория катастроф 10, 21
эллиптическая омбилика 154, 156
- - вторая 156
энтальпия 425
энтропия 423
эпициклоида 317
эргодичность 344, 413
ядро 37
якобиан 74
якобиев идеал 183
j-инвариант 160
k-определённость 166, 207
- локальная 181, 207
- сильная 166, 207
k-струя 70, 71
n-ка 30
r-деформация 193
r-параметрическое семейство 133
(r,s)-устойчивость 395, 398
(r,s)-эквивалентность 396

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Хорошо известно, что в науку нет царской дороги, но книги, вводящие в предмет, могут быть хорошими и плохими. Перед читателем лежит безусловно хорошая книга. Даже больше — книга, написанная с вдохновением. Только поэтому авторы с видимой легкостью сумели справиться сразу с несколькими задачами, каждая из которых могла бы потребовать отдельной книги.

В первых главах они демонстрируют, каким должно быть современное геометризированное преподавание анализа, и эти главы хочется рекомендовать всем тем, кто думает сейчас о проблемах преподавания математики. В последующих главах первой половины книги дается мастерское изложение математических основ теории особенностей гладких функций. Его с пользой для себя прочтут и новички и специалисты. Вторая половина книги посвящена приложениям — это блестящий пример научно-популярной литературы для ученых. (Предшествующие статьи апологета теории катастроф английского математика Э. К. Зимана относятся скорее к жанру научно-фантастической литературы для ученых.) Авторы сопровождают изложение многочисленными остроумными и серьезными замечаниями о характере прикладной математики вообще, которые звучат очень злободневно. Наконец, полемическая цель книги — защита нового направления от ожесточенной прямой и скрытой критики, а также от примитивного понимания — достигается ими с большим тактом и максимальной научной добросовестностью.

В элементарной теории катастроф, которой посвящена книга, рассматривается (в получившей широкое распространение схеме) следующая ситуация. Имеется физическая система, быстро минимизирующая потенциал, который меняется в зависимости от внешних или управляющих параметров (минимизация локальная); некоторые локальные минимумы при изменении параметров могут „исчезать". Скачки, наблюдающиеся при таких исчезновениях, и дали повод для названия теории. При этом большой простор по-

лучает геометрическая интуиция, подкрепленная разнообразными картинками, которые можно рисовать, когда число параметров не превосходит трех,— главным образом это множества тех значений параметров, при которых происходят скачки (если параметров больше, можно рисовать сечения).

В дополнение к этому геометрическому подходу авторы подчеркивают аналитический подход, строя свое изложение основ теории как естественное развитие классического анализа в его собственных рамках, связанное с поиском ответа на два вопроса. Во-первых, какие многочлены Тейлора определяют функцию с точностью до дифференцируемой замены координат? Во-вторых, если многочлен обладает таким свойством, то сколько нужно взять параметров его локальной „деформации" (и как ее построить), чтобы любое конечномерное семейство гладких функций, содержащее этот многочлен, могло быть получено из этой „универсальной" деформации с помощью надлежащей локальной замены координат? Оказалось, что при числе параметров, меньшем пяти, удается построить небольшой список многочленов („семь катастроф Тома"), к которым приводится локальными заменами в окрестности начала „почти любая" функция со своими деформациями. Этот список независимо был получен В. И. Арнольдом, который развил его теперь в широкую классификацию.

Благодаря энергичным и настойчивым усилиям французского тополога Ренэ Тома оба указанных подхода слились в изящной и нетривиальной математике, развитой многими математиками, в первую очередь Мальгранжем, Мезером, Арнольдом, причем в работах последнего установлены глубокие связи теории с другими областями математики. Авторы делают необходимые исторические замечания, но, может быть, нелишне будет упомянуть уже здесь, что основные идеи, сплавом которых оказалась теория катастроф, берут начало в работах Х. Уитни по каноническим формам особенностей гладких отображений и в работах школы А. А. Андронова, где изучались степени негрубости (т. е. коразмерности) динамической системы, что понятие универсальной деформации появилось в алгебраической геометрии (А. Гротендик) и что вся теория в сущности — далеко продвинутая глава общей теории динамических систем, которой интенсивно занимаются в последние десятилетия.

Для самого Тома теория катастроф, как она представлена в этой книге, является лишь случайным продуктом раз-

вития математики. Том поставил задачу создания на основе общей теории динамических систем *языка форм*, пригодного для математизации биологии, а за ней и других областей науки, традиционно далеких от математики. Понять туманно-философские высказывания Тома довольно трудно, но примерно речь идет о построении динамических систем с иерархической организацией, обеспечивающей устойчивость, взаимодействие со средой и эволюцию. Если бы удалось построить конечное число (или обозримый бесконечный набор) таких „элементарных" систем, из которых можно было бы по определенным законам строить более сложные системы и описывать переходы между ними („катастрофы"), то был бы создан мощный метод анализа самых разнообразных явлений природы (развитие эмбриона, человеческий язык, форма облаков и пр.). К сожалению, математика динамических систем оказалась, по-видимому, слишком сложной для реализации этой идеи... От грандиозного замысла осталась элементарная теория катастроф — та, о которой идет речь в этой книге и героическую попытку приложить которую в биологии и социальных науках в духе Тома предпринял Э. К. Зиман (ему книга посвящена).

Следует указать, что программа Тома, как и математическое развитие теории семинаром Арнольда, полностью оказались за рамками книги. Авторы сосредотачивают свое внимание в основном на приложениях к физике, откуда они с большой легкостью извлекают сборки и складки, бабочки и омбилики, без устали подчеркивая естественность и неизбежность их появления, вытекающие из универсального характера катастроф из списка Тома. (Ряд приводимых примеров появился независимо от теории катастроф, особенно в теории упругости, где самостоятельно возникли также и некоторые ключевые понятия.) Многие примеры выходят за пределы упомянутой вначале схемы „градиентных систем, зависящих от параметра", что демонстрирует широкую применимость теории. Здесь можно было бы упомянуть еще, что Ф. Такенс начал изучать с точки зрения теории катастроф вырожденные задачи вариационного исчисления. Но авторы не устают подчеркивать и существование границ применимости теории.

Авторам удалось собрать огромный материал, полученный в самое последнее время и в значительной своей части еще не опубликованный. К сожалению, неизбежная при таких обстоятельствах торопливость оставила свой след... В частности, оригинал содержал довольно много опечаток,

которые исправлялись при переводе без оговорок. (Список некоторых из них был прислан авторами.)

К достоинствам книги, как с грустью должен заметить переводчик, относится и виртуозное использование авторами возможностей современного английского языка. Если в какой-то мере эту черту удалось отразить в переводе, то в этом большая заслуга издательского редактора В. И. Авербуха, которому переводчик искренне благодарен. Он должен также поблагодарить Г. С. Шапиро и А. А. Корсунского, которые помогли уточнить терминологию в отдельных главах.

А. Чернавский

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Выход этой книги на русском языке — языке, на котором была развита столь значительная часть излагаемой в ней теории, а также объемлющей ее теории динамических систем,— является для авторов высокой честью. Одним из пионеров качественного анализа динамических систем был А. М. Ляпунов. В нашем обсуждении структурной устойчивости отмечается русское происхождение этого понятия. Впоследствии советские исследователи внесли в разработку топологического подхода к нелинейной динамике вклады слишком многочисленные, чтобы можно было перечислить их все; из ранних работ особенно отметим книгу „Теория колебаний" А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [1], из последних — работы В. И. Арнольда по теории особенностей и динамике.

Именно из союза теории особенностей и динамики родилась „теория катастроф". Предмет ее не вполне определен; Ренэ Том считает ее умонастроением, а не теорией в обычном смысле. (Правда, и сам этот обычный смысл не вполне определен, и история, скажем, теории инвариантов обнаруживает тот же психологический характер.) Умонастроение неизбежно меняется от одного специалиста по катастрофам к другому, но общими чертами остаются: особое внимание к типичности, к структурной устойчивости и к геометрической точке зрения. Применение этих понятий и этой точки зрения, вкупе с созданным для их обслуживания техническим инструментарием, и характеризует в грубых чертах теорию катастроф в ее самом широком смысле.

Применения эти находятся как в самой математике, так и в других науках и имеют перекрытия с другими „умонастроениями", такими, как топологическая динамика, теория особенностей, теория бифуркаций, неравновесная термодинамика, синергетика... Уточнение границ мы можем предоставить историкам науки.

[1] 2-е изд., перераб. и доп.— М., 1959.— *Прим. ред.*

В настоящей книге мы описали ограниченный инструментарий, называемый часто *элементарной теорией катастроф*; в фокусе внимания этой теории — особенности вещественнозначных гладких функций и параметризованные семейства таких функций. Ранние исследования Хасслера Уитни привели Тома к формулировке ряда гипотез о таких особенностях; они были затем доказаны самим Томом, Мальгранжем, Мезером и другими математиками. В результате, после данных Мезером обобщений, сформировался новый предмет, носящий теперь название *теории особенностей*; в основном те же идеи были независимо развиты В. И. Арнольдом, и благодаря „перекрестному опылению" возникло цветущее поле исследований. Таким образом, с математической стороны элементарная теория катастроф является одновременно частью и предшественником теории особенностей.

Есть две причины для того, чтобы остановиться на таком ограничении материала. Во-первых, математическая теория развита здесь гораздо полнее; во-вторых, можно обойтись гораздо меньшими предварительными сведениями. Мы здорово подсократили терминологический словарь тополога (например, заменили строгое „в общем положении" неформальным „в типичном случае"), и в итоге книга стала пригодной для того, чтобы ее читали и применяли нематематики, работающие в самых разных областях. Вследствие этого читатели-математики иногда обнаружат места, где им хотелось бы иметь изложение, проведенное с большей строгостью или глубиной. По возможности мы старались давать для таких читателей указания, где найти подобное изложение.

Если бы мы писали эту книгу сегодня, она либо удвоилась бы в объеме, либо часть важного материала пришлось бы опустить. Читателю рекомендуется, в частности, обратить внимание на теорию неполных бифуркаций (особенно на ее эквивариантную форму) М. Голубицкого и Д. Шеффера (см. Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 21—98, Comm. Math. Phys. **67** (1979), 205—232), на продолжающиеся оптические исследования М. В. Берри и Дж. Ф. Ная с сотрудниками (см. недавние выпуски журналов Королевского общества) и на обзор по топологическим методам в теории бифуркаций Дж. Э. Марсдена (Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 1125—1148). Приложения теории катастроф вне „жестких" наук остаются все еще трудным делом, о чем мы будем говорить в главах 17 и 18, но достигнуты известные успехи в придумывании статистических тестов для нелинейных моделей, да и сами проблемы стали яснее. Пока мы не видим оснований для пессимизма (помимо относящихся

ко всем вообще математическим подходам к социологическим наукам), хотя некоторые авторы расходятся с нами во мнениях.

Теория катастроф — математический инструментарий. Как и всякий другой инструментарий, его можно употреблять неправильно. Прошедшее десятилетие свидетельствует, что он является мощным средством, способным пролить свет на решение самых разнообразных проблем, но требует осторожного и умелого обращения. Нашей целью при написании этой книги было снабдить работающих ученых той основой, на которой они могут построить свою собственную философию и свои приемы использования этого инструментария, а вовсе не установить жесткий План Развития, составленный с какой-то одной точки зрения. Мы надеемся, что настоящий перевод внесет полезный вклад в научный прогресс; но в чем мы уверены, так это в том, что как на Востоке, так и на Западе будут получены самые удивительные результаты, которые вознаградят всех нас за затраченные усилия.

Т. П. И. Н. С.

Ковентри
Сентябрь 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ

Кристоферу Зиману,
у ног которого мы сидим,
на плечах которого мы стоим.

После появления в середине 60-х годов первых слухов о готовящейся книге Ренэ Тома „Stabilité structurelle et morphogénèse", вышедшей в конце концов в 1972 году [1], быстро возрос интерес к предмету, известному теперь как *теория катастроф*. Том предложил использовать топологическую теорию динамических систем, ведущую начало от работ Пуанкаре, для моделирования разрывных изменений в явлениях природы, и особенно в биологии; он указал на важность в этих рассмотрениях требования *структурной устойчивости*, или нечувствительности к малым возмущениям. Он также отметил, что при некоторых условиях из этого требования вытекает, что изучаемую систему можно описать локально посредством одной из семи стандартных форм — *элементарных катастроф*.

Помимо величайшего интереса идеи Тома породили и величайшую смуту, а в последнее время и величайшие споры. Скороспелые утверждения об универсальности теории (частью неверные заявления, основанные на смешении элементарных и неэлементарных катастроф, а частью преувеличения, которые надо отнести на счет „юношеского энтузиазма" в новой области) повторялись слишком часто без должных оговорок. К тому же кое-где распространилось мнение, что теория катастроф является „чисто качественной", и возник раскол между теми, кто думает, что это хорошо, и теми, кто так не думает. Наличие у теории широкого ряда предшественников во многих областях (что само по себе является проявлением типичности, о которой мы будем говорить в главе 7) привело некоторых к заключению, что эта теория вообще ничего нового не содержит. Спекулятивные распространения теории за рамки, вне которых ее применимость уже не гарантируется соответствующим математическим формализмом, были ошибочно восприняты как настоящие приложения; разгоревшиеся в этих

[1] См. [1] в списке цитированной литературы.— *Прим. ред.*

областях споры оправляющим образом подействовали в других разделах науки, где рассматриваются совсем иные задачи.

Все эти недоразумения и неправильные понимания можно в целом объяснить непривычным математическим языком, на котором излагается теория, и общим стремлением математиков подчеркивать те аспекты теории, которые не всегда согласуются с практическими требованиями ученых-прикладников. Поэтому, например, Тьюринг в ответ на обвинение, что вычислительные машины работают сугубо детерминистически, отвечал, что именно так его просили их проектировать. То же и с топологами, занимающимися теорией катастроф, которые описывают все „качественно",— с той лишь разницей, что просили об этом они сами себя. Вы желаете чисел — пожалуйста, они у нас есть; но большинство топологов попросту *не хотят* чисел, они ищут „качеств" — хотя порой эти качества и получают ужасающе алгебраическое и даже числовое выражение. Эти проблемы были обострены отсутствием подходящих источников для изучения теории, которые должны лежать где-то между двумя крайностями — непробиваемыми курсами топологии и чересчур рыхлыми популяризациями.

Наша первая цель в этой книге — разъяснить относящуюся сюда математику на языке, доступном научным работникам, знакомым с конечномерным анализом и в небольшом объеме с линейной алгеброй. Это ставит теорию катастроф на ее истинное место как продолжение анализа или его развитие в собственных рамках (а не радикально новое направление или заменитель всех старых методов, как иногда считают). Это также делает ясными и ограничения теории. Если не уяснить себе с достаточной степенью подробности точные математические предпосылки и то, каким образом из них выводятся заключения, нельзя составить правильного представления о том, что теория может, а чего нет. Не раз говорилось, что теорему Тома можно применять, не понимая математики, стоящей за ней; мы не согласны с этим. Более того, мы не согласны с подразумеваемым здесь утверждением, что применять надо именно *теорему* Тома; анализ большинства серьезных и успешных приложений показывает, что методы и понятия, стоящие за этой теоремой, часто имеют большую важность, чем она сама.

Вторая наша цель — разрушить миф, что теория катастроф является чисто качественной. Мы достигаем этой цели напрямую, давая обзор некоторых из ее количественных приложений. Мы сосредотачиваем свое внимание на физических науках, где существующая математическая теория

естественно ведет к задачам, подпадающим под действие методов теории катастроф, и где эти методы можно использовать как математический инструмент для получения количественной информации, допускающей экспериментальную проверку. Мы делаем особый упор на вычислительных аспектах теории и тех явных расчетах, которые с ее помощью можно произвести, иллюстрируя всё это как математическими примерами, так и приложениями. Методы теории катастроф играют в физических науках ясно определенную (хотя и не универсальную) роль, и важно, чтобы полемике по поводу ее менее прочно стоящих приложений не было позволено затемнить этот факт.

Математические главы, составляющие первую половину книги, в принципе не дают ничего большего, чем представление о теории, такой, как она сейчас сложилась; новым в нашем подходе является использование „обычной" математики (входящей в стандартный багаж научных работников) для мотивировки принятого в теории катастроф стиля мышления и получаемых результатов. Мы не приводим строгих доказательств сильных теорем (где и заключена самая глубокая и самая новая математика), но по-новому выявляем геометрическую суть соответствующих рассуждений, что объясняет (лучше, чем строго формальное изложение), почему верны эти результаты. Независимо от всяких приложений, математические теоремы теории катастроф представляют собой существенный вклад в важную и естественную проблему — исследование особенностей семейств гладких функций. Наше изложение этих теорем может также оказаться полезным в качестве содержащего мотивировки введения для тех, кто пожелает изучить эту математику более глубоко.

Один из результатов, которые мы здесь доказываем явно (используя лишь элементарный анализ),— это важная *лемма о расщеплении*, с помощью которой можно уменьшить (и часто радикально) число переменных в рассматриваемой задаче. Некоторым этот результат кажется наиболее удивительным во всей теории; его по существу классическая природа, как и он сам по себе, заслуживают большей известности.

Вторая половина книги отведена приложениям. Мы не только обсуждаем уже устоявшиеся и хорошо известные приложения, но приводим и совсем недавние результаты, которые менее известны, и даже материал, еще не появлявшийся в печати. К последней категории приложений относятся: исследование устойчивости идеализированной плавучей платформы в главе 10; сечения миражей и звуковых

ударов в главе 11; количественное использование *нелокального* бифуркационного множества катастрофы эллиптической омбилики в главе 12 в связи с изучением течений жидкости; части главы 13 об упругих конструкциях, особенно трактовка катастрофы двойной сборки при выпучивании пластин; многое из главы 14 о термодинамике; теория пчел и новые *катастрофы с ограничениями* в главе 16, а также материал, относящийся к образованию биохимических и экологических границ. В главе 15 всё — новое и целиком принадлежит Бобу Гилмору и Лоренцо Нардуччи.

Читатель, уже знакомившийся ранее с литературой по теории катастроф, встретится здесь со многим, чего он раньше не видел, а также и с некоторыми прежними любимцами. На деле теперешний взрывной рост в теории катастроф таков, что если бы эта книга пошла в печать летом 1976 года, то, грубо говоря, половина материала по приложениям не могла бы быть включена в нее. Время сильно поджимало нас в работе над книгой (надеемся, что это не слишком отразилось на оставшихся в ней ошибках), и этот нажим лишь частично исходил от издателей — мы постоянно ощущали за спиной горячее дыхание самого предмета.

Подробный список обсуждаемых нами приложений можно найти на страницах оглавления, и мы не будем его повторять. В связи с этим списком необходимо сделать два замечания. Первое: мы старались, насколько только было возможно, консультироваться у специалистов в соответствующих областях приложений, удостоверяться, что наше изложение отвечает духу сегодняшнего мышления в этих областях. Это, конечно, не значит, что знатоки будут согласны с нашим теоретизированием. Но, во всяком случае, у читателя не создастся впечатления (которое остается от слишком многих работ), что вся физика, участвующая в приложениях, принадлежит девятнадцатому веку. Проповедуя, что физика слишком цепляется за математику девятнадцатого века (а в некоторых областях, как нам кажется, дело обстоит именно так), надо избегать аналогичной ошибки в обратную сторону. Не будучи сами физиками, судостроителями, биологами, инженерами, мы взяли бы на себя слишком много, если бы надеялись, что целиком преуспели в своей попытке, но во всяком случае мы старались.

Второе замечание состоит в том, что многие из приложений, особенно в главах 11—13, относятся к системам, описываемым уравнениями в *частных* производных. Да, именно так, несмотря на тот факт, что „законными" являются здесь лишь системы, описываемые уравнениями из некоторого специального класса *обыкновенных* дифференциальных урав-

нений,— факт, который часто выдвигается как возражение. Но дело в том, что математика не всегда хорошо размещается в уютных категориях, по которым мы ее рассовываем. Бифуркации, поддающиеся описанию при помощи (элементарной) теории катастроф, наблюдаются для уравнений из гораздо более широкого класса, чем упомянутый специальный класс (градиентных обыкновенных дифференциальных уравнений), для которого наиболее очевидно, что это — *единственные* бифуркации, могущие происходить устойчиво. Строгое изучение уравнений с частными производными часто — хотя, конечно, не всегда — приводит к элементарным катастрофам. Изучение любой математической задачи может привести в область, отличную от той, где она была поставлена.

Предпоследняя глава содержит краткий обзор некоторых попыток применения моделей, внушенных теорией катастроф, в социологических науках и теориях поведения. Соотнося их с предшествующим, мы оказываемся в состоянии дать обоснованную и (надеемся) конструктивную критику моделей этого типа. Глава служит также для демонстрации того, насколько широк спектр попыток применения теории катастроф. Нам думается, что беспристрастное обсуждение этой спорной области поможет представить ее в истинном свете. Поэтому в заключение мы приводим один простой пример, когда и моделирование с элементарными катастрофами, и неявные гипотезы о равновесии из традиционной описательной („словесной") экономики („невидимая рука рынка") терпят неудачу самым очевидным образом.

Мы не считаем, что разрешение этого частного спора представляет существенную важность для развития теории катастроф в целом; не в большей степени, чем аргументы, касающиеся астрологии, биоритмов или общей теории относительности, могут поколебать положение сферической тригонометрии, гармонического анализа или дифференциальной геометрии. Наше собственное мнение о вероятном будущем теории катастроф кратко изложено в заключительной главе и может быть резюмировано следующим образом. В непосредственном будущем лишь физические науки извлекут из нее действительную выгоду, поскольку они имеют дело с „простыми" системами, в крайнем случае со „статистически простыми" (появившимися ближе к нашему времени) — системами *неорганизованной* сложности. Организованная сложность биологии представляется наиболее вероятным объектом изучения на следующем, „промежуточном" этапе, но здесь уже может понадобиться вся теория динамических систем (имеющая теорию катастроф лишь малой,

хотя и существенной составляющей). Организованная сложность социальных систем вряд ли будет хорошо понята, пока мы не освоимся как следует с биологическими системами. Единственный важный вопрос, который нужно решить в настоящий момент,— это стоит ли вообще заниматься теорией катастроф. По нашему убеждению — да, нужно, даже ради одной только немедленной отдачи в физике; даст ли это нам возможность совершить маленький шаг вперед в понимании более захватывающих проблем человеческого существования — вопрос, который разумно отложить для будущих поколений.

Книга такого типа, идущая вразрез с традиционными сюжетными линиями, была бы невозможна, если бы не великодушная помощь специалистов в затронутых областях, которым мы выражаем искреннюю признательность. Одного Кристофера Зимана нужно было бы упоминать в этой связи столько раз, что это практически невозможно сделать,— еще вопрос, продвинулась ли бы без его пионерских усилий и энтузиазма эта наука так далеко, чтобы достаточное число людей вообще знали о ее существовании, не говоря уж о том, чтобы дело дошло до критического наступления на нее. Оба автора этой книги впервые соприкоснулись с теорией катастроф на его лекциях, и мы надеемся, он примет за комплимент, если мы скажем, что его преподавание было столь успешным, что мы не только стали понимать тонкости теорий Тома и роль Зимана в их развитии, но при случае оказывались несогласными с ними обоими! Ему с уважением посвящается эта книга.

Каждый контакт с Ренэ Томом проливал новый и часто таинственный свет на красоты математики и на рассматриваемые вопросы. Кен Эштон предоставил в наше распоряжение собранные им экологические данные. Рут Беллэрз рассказала о своих экспериментах и выправила наш биологический язык. Майкл Берри позволил заимствовать у него широкие познания в оптике вместе с некоторыми фотографиями; он и Мэлком Мэкли были столь же щедры по части динамики жидкости, а Мэлком Мэкли простер свою щедрость до того, что предоставил нам еще до появления собственной публикации копии прекрасных фотографий течений жидкости, которые украшают главу 11 и каждая из которых потребовала с его стороны многих часов работы. Как экспериментальное свидетельство серьезного технического применения теории эти фотографии существенны для миссии этой книги.

Билл Саппл, Джайлз Хант, Майкл Томпсон и Майкл Сьюэлл держали нас в известности о продвижениях в ин-

женерном деле и корили за невежество. Эдгар Эшер и Боб Гилмор обучили нас термодинамике. Колин Ренфри, Элан Уилсон, Роберт Мэгнус и Дейвид Питт позволили использовать их неопубликованные работы; Боб Гилмор по существу написал для нас главу 15. Наш первоначальный план сотрудничества с Тедом Вудкоком, который должен был написать несколько глав по биологии, сорвался под нажимом сроков; однако в душе он с нами, а более материально представлен некоторыми своими машинными графиками.

Недостаток места не позволяет нам перечислить еще несколько десятков лиц, которые внесли существенный вклад в содержание книги или содействовали поднятию морального духа авторов.

И. Н. С. Т. П.

Март 1977
Ковентри и Женева

При написании этой книги Тим Постон пользовался финансовой поддержкой Национального Швейцарского фонда научных исследований (grant no. 2.461-0.75) и дополнительной поддержкой института Бэттелла в Огайо (grant no. 333-207).

1 ИЗМЕНЕНИЯ ПОСТЕПЕННЫЕ И ВНЕЗАПНЫЕ

Классическая физика (от Ньютона до общей теории относительности) — это по существу теория плавного поведения; первый приходящий в голову пример — движение планет вокруг Солнца, внушающее трепет своей безостановочностью, неторопливостью и чрезвычайной регулярностью. Даже колебания земной оси, из-за которых пришлось отказаться от вращения Земли как от эталонных часов, и те происходят плавно. В последовательной математической теории небесной механики исключено, скажем, чтобы громадная комета, попавшая некогда в Солнечную систему, выхватила из Земли кусок, проходя мимо нее (теперешнее Красное море), и *затем*, потеряв бóльшую часть своей кинетической энергии, установилась на почти в точности круговой орбите в качестве планеты Венера (широко распространенная псевдонаучная гипотеза). Планеты слишком плавно взаимодействуют для этого.

1 Катастрофы

Но изменения совершаются и скачками. Вдруг закипает вода. Начинает таять лед. Сотрясаются земли и луны. Рушатся дома. Спина верблюда, как мы знаем, выдерживает груз в n соломинок и внезапно ломается под $(n+1)$-й. Происходят биржевые крахи.

Эти *внезапные* изменения вызываются обычно *гладкими* изменениями ситуации. В астрономии таким событием был бы внезапный (мгновенный или в течение нескольких дней) переход Земли на новую орбиту, десятью миллионами километров шире старой, при прохождении Солнечной системой в ее непрерывном движении в Галактике какого-то критического места. Такого рода изменения гораздо хуже поддаются анализу и предсказанию, чем движение небесных тел, и различные науки (от физики до экономики) еще только накапливают аналитические средства, которые бы им позволили управляться со скачкообразным поведением.

К тому же природа скачков бывает самой различной.

Есть силы, которые постепенно нарастают до тех пор, пока их уже больше не может сдержать трение; рёв землетрясения и шорох растущего ревеня производятся перемещениями, которым трение уступает дорогу. Есть критическая плотность популяции, ниже которой особи развиваются как кузнечики, а выше — как саранча; вот почему, если саранча появляется, она появляется тучей. Внезапно изменяет свой репродуктивный ритм клетка и вдруг начинает удваиваться и удваиваться в ритме рака. Человек по дороге в Дамаск [1] имеет видение.

Многое здесь еще не поддается анализу. Многое уже проанализировано, причем применялось великое множество математических методов. В этой книге мы будем иметь дело с одним математическим подходом, в рамки которого единообразно укладывается обширная область явлений такого рода. Методы, которые при этом используются, были развиты французским математиком Ренэ Томом и стали широко известными благодаря его книге „Структурная устойчивость и морфогенез" [1], где они были предложены в качестве математической основы для биологии. Те внезапные изменения, о которых тут идет речь, были окрещены Томом *катастрофами*, для того чтобы выразить ощущение резкой или драматической перемены. Это слово, к сожалению, несет в своем значении оттенок бедствия, который в большинстве приложений неуместен. Но весь предмет с тех пор получил известность как *теория катастроф* — словосочетание, представляющее большую свободу толкования, в зависимости от принятой точки зрения.

Эти методы применимы наиболее непосредственно (но совсем не исключительно) к системам, в которых в каждый момент на фоне изменяющейся ситуации минимизируется или максимизируется некоторая функция (например, энергия или энтропия соответственно). В гл. 3 мы поясним, что́ это означает математически. В настоящую же минуту хорошей картинкой может служить шарик, катящийся по неровной поверхности и „старающийся" при посредстве силы тяжести найти положение, если и не самое низкое из всех возможных, то хотя бы самое низкое из всех других поблизости (а тем временем меняется и сама поверхность). Те специальные геометрические образования, которые возникают при такой постановке задачи, называют, вслед за

[1] Савл, будущий апостол Павел, родом из Тарса, шел из Иерусалима в Дамаск и по дороге увидел „с неба свет, превосходящий солнечное сияние" (Деяния апостолов, XXVI, 13). (В оригинале ошибочно говорится о „дороге в Тарс").— *Прим. перев.*

Томом, *элементарными катастрофами*, имея в виду элементы как фундаментальные сущности (подобно химическим элементам); их применением, как оно описано в настоящей книге, занимается *элементарная теория катастроф* (слова, неправильно понятые Зуссманном и Цалером [1a] в смысле, аналогичном „элементарной арифметике"), хотя все это достаточно глубоко и математически и философски. Для некоторых систем могут происходить более сложные вещи (один легко объясняемый пример мы приводим в § 7 гл. 17), которые Том [1] классифицирует огулом как *обобщенные* катастрофы. Их теория никоим образом не является столь же полной.

Для понимания теории катастроф важна физическая интуиция. Мы опишем в этой главе три простые физические модели, демонстрирующие типичные черты катастрофического поведения и имеющие то достоинство, что (в отличие от землетрясений и биржевых крахов) они достаточно просты, чтобы их можно было самому изготовить, и достаточно невелики, чтобы их можно было носить с собой. К тому же их можно использовать для экспериментов. Хотя они легко поддаются анализу, мы не будем пока этим заниматься. Мы постоянно будем обращаться к ним как к примерам, и читатель существенно укрепит свою интуицию, если он сам изготовит эти модели (мы дадим для этого ряд советов) и поиграет с ними; никакое описание не заменит живого эксперимента. Следует, однако, подчеркнуть, что отношение этих машинок к теории катастроф аналогично отношению известных „игрушек" — *ньютонова ведра* и *простого маятника* — к ньютоновой механике.

2 Зиманова машина катастроф

Мы начнем с машины, изобретенной первой. Ее придумал в 1969 г. Э. К. Зиман из Уорикского университета. Поэкспериментировав недели три с резиновыми полосками и канцелярскими скрепками, он усовершенствовал первоначальную идею до того варианта, который излагается ниже. Описание этой машины впервые было опубликовано Зиманом в [2]; кроме того, ею занимались Постон и Вудкок [3] и Дюбуа и Дюфур [4].

Основной частью машины является лежащее на доске колесико (рис. 1.1), которое может свободно вращаться вокруг своей оси; оно должно быть не слишком тяжелым: если трение, замедляющее движение, или инерция, поддерживающая его, окажутся слишком большими, то это затемнит как раз те черты в поведении колёсика, которые нас ин-

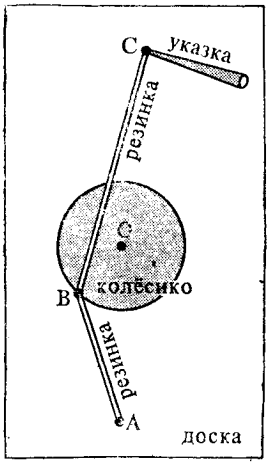


Рис. 1.1

тересуют. К точке B на краю колесика прикрепляются две резинки. Второй конец из них закреплен на доске в точке A достаточно далеко от центра O колесика таким образом, чтобы резинка BA всегда была натянутой. Второй конец другой резинки (точка C) прикрепляется к указке, которую держат в руке. (Благодаря этому возможно управлять концом C с небольшого расстояния, не заслоняя его от себя.) Удобен такой выбор размеров: радиус колесика 3 см, длина отрезка AO 12 см, длина каждой резинки 6 см.

Независимо от того, как выбраны радиус r колесика, длины a и b резинок BA и BC (в нерастянутом состоянии) и расстояние OA (лишь бы оно было больше, чем $a+r$), качественная картина явления окажется такой, как мы ее описываем ниже. В этом факте проявляется свойство „структурной устойчивости", которое мы будем подробно обсуждать дальше: изменения параметров не приводит к существенным качественным изменениям в поведении системы; более точно об этом будет сказано в свое время. Тем не менее мы будем иметь в виду машину, для которой приняты определенные размеры; анализ ее работы будет нами проведен с помощью чертежа, построенного компьютером (рис. 1.2). Поэтому сейчас мы приведем детальные инструкции для машины, размеры которой в точности отвечают этому чертежу.

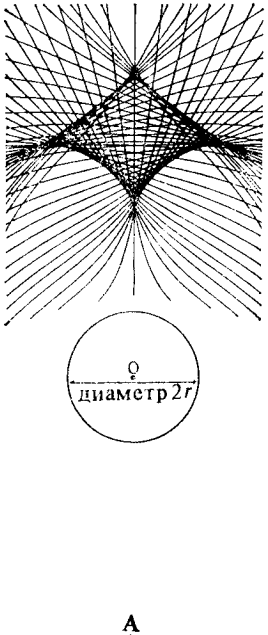


Рис. 1.2

Сделайте фотокопию рис. 1.2. Увеличенная или уменьшенная копия также приемлема, так как выбор масштаба не влияет на поведение машины и на его анализ. Приклейте фотокопию к доске или плотному картону и закрепите ось колесика в точке O. Прикрепите к колесику штырек из жесткой проволоки перпендикулярно к плоскости доски на расстоянии r от O. (Удобно сделать колесико чуть пошире, поскольку важно лишь положение штырька, и смонтировать штырек заодно с осью, как показано на рис. 1.3.) Другой штырек прикрепите перпендикулярно доске в точке A. На каждом из этих двух штырьков выпилите круговой желобок; оба желобка должны быть на одной и той же высоте над доской, повыше выступающей центральной части колесика. Возьмите кусок резинового шнура хорошего качества (не следует вырезать его из резиновой ленты, шляпная резинка тоже не годится; лучше всего шнур квадратного сечения, используемый для рогаток или для авиамоделей). Длина шнура должна быть немного больше, чем учетверенный диаметр $2r$ колесика в вашей копии рис. 1.2. Прикрепите середину шнура к штырьку A, стянув шнур ниткой так, чтобы получилась петля вокруг желобка (рис. 1.4 (а)). На сложенном вдвое ненатянутом шнуре отметьте точку,

расстояние которой от A равно $2r$. Стяните двумя нитками половины шнура так, чтобы они туго охватывали штырек B по желобку (рис. 1.4(b)). Прикрепите указку в точке, расположенной еще на $2r$ дальше вдоль резинки (рис.1.4(c)). Надо постараться, чтобы расстояние AB было в точности равно $2r$; сначала удобно сделать на сгибе шнура петлю, затем прикрепить резинки к штырьку B и лишь потом надеть подготовленную петлю на штырек A.

Теперь можно начинать эксперименты с машиной. Вы увидите, что если конец указки C, держа его на одной высоте с A над доской, помещать над точками, лежащими вне четырехугольной области ◇ (см. рис. 1.2), то колесико под действием резинок останавливается лишь в одном положении. Если вы повернете его в другое положение и отпустите, то оно „прыгнет" обратно. Это единственное положение зависит от C, и плавное перемещение C приводит к плавному изменению положения колесика.

Если же ввести конец указки внутрь области ◇, то оказываются возможными два положения равновесия. При плавном входе в область ◇ с одной стороны колесико плавно приходит в одно из этих положений; при входе с другой стороны колесико после подведения конца указки C к той же точке окажется в другом из двух возможных положений.

Лишь если вы чисто умозрительно сможете решать, что́ произойдет, если ввести указку слева через верхнюю или нижнюю сторону области ◇ и вывести ее затем направо через верхнюю или нижнюю сторону (всего четыре возможности), вам *не* нужно изготавливать машину, чтобы понять, как она работает.

Если времени у вас мало, вы можете за несколько минут изготовить достаточно удовлетворительную с качественной точки зрения модель, используя жесткий картон, аптекарские резинки и чертежные кнопки (все это всегда под рукой). Цепляйте резинки за кнопку так, как показано на рис. 1.5, привязывать их к колесику „намертво" нельзя,

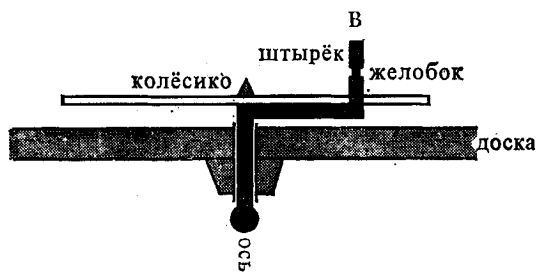


Рис. 1.3

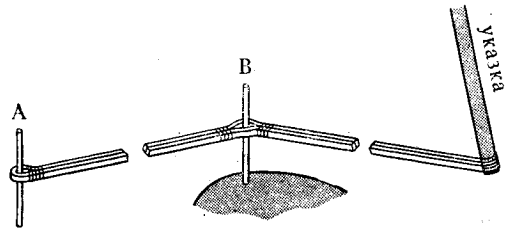


Рис. 1.4

они запутаются при его вращении. Положение и точная форма области ◇ при этом немного изменятся, но их можно определить экспериментально. (Как?)

3 Качалки

Сделайте фотокопию рис. 1.6 (масштаб снова не играет роли) и наклейте ее на тонкий картон (толщиной как почтовая открытка). Аккуратно обрежьте по краю нарисованную фигуру (лучше всего ножом или лезвием бритвы). Изготовьте другой такой же кусок картона и вырежьте из него середину, на расстоянии нескольких сантиметров от края. Приготовьте шесть одинаковых распорок треугольного сечения, длиной около четверти высоты нашего параболического сегмента (см. рис. 1.7). Приклейте их торцами к сплошному сегменту и к кольцу (рис. 1.8), поместив по одной распорке в углы и распределив остальные равномерно; края параболических сегментов должны лежать точно друг под другом. Небольшой, но достаточно сильный магнитик с одной стороны картонки и небольшой кусочек железа с другой стороны (см. рис. 1.8) будут удерживать друг друга на картонке, и эту пару легко перемещать в любое желаемое место.



Рис. 1.5

Так как основная часть массы всей конструкции приходится на пару магнит — железка, мы можем принять за центр тяжести качалки положение этой пары. Если качалка находится в положении равновесия, то центр тяжести должен быть расположен точно по вертикали над точкой опоры.

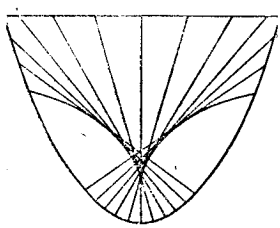


Рис. 1.6

В случае когда качалка покоится на горизонтальной плоскости, эта плоскость будет касательной к нашей параболе, так что центр тяжести должен лежать на соответствующей *нормали* (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной). Некоторые из этих нормалей как раз и изображены на рис. 1.6.

Эксперименты с качалкой или геометрические размышления на основе приведенного ее описания дадут вам ответы на следующие вопросы:

(a) При каких положениях магнита (если таковые вообще существуют) качалка имеет N различных положений равновесия (где $N=0, 1, 2, \ldots$ и для каждого N вопрос ставится заново)?

(b) Куда бы ни поместить магнит на нормали, построенной в заданной точке P, центр тяжести окажется над P и качалка с опорой в точке P будет находиться в равновесии. Однако при одних положениях магнита на этой нормали качалка после малых отклонений будет возвращаться в положение равновесия (т. е. равновесие *устойчиво*), а при других она будет падать, как яйцо, поставленное на острый конец (равновесие *неустойчиво*). В чем различие между этими двумя классами положений?

(c) Когда малое изменение в положении магнита приводит к новому положению равновесия, лишь слегка отличающемуся от первоначального, и когда оно приводит к тому, что качалка начинает катиться („катастрофическое изменение", которое безошибочно узнается в практическом эксперименте)?

Теперь изготовьте новую машину, заменив параболу эллипсом. Рис. 1.6 заменится при этом на рис. 1.9. Ответьте на те же три вопроса.

Описанные машины далеко не так искусственны, как это может показаться. Оказывается, что они хорошо моделируют широкий спектр явлений в поведении кораблей (см. гл. 10).

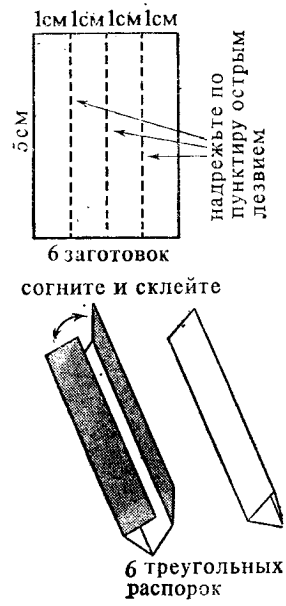


Рис. 1.7

4 Теория катастроф

Сложное поведение рассмотренных выше машин свидетельствует о том, что даже простые задачи классической статики таят в себе много тонкостей. Более глубокий анализ обнаруживает некоторые лежащие в основе математические закономерности, позволяющие стандартным образом рассчитывать поведение таких систем, используя традиционный для прикладной математики инструмент — приближение отрезками ряда Тейлора. Но и в этом методе также

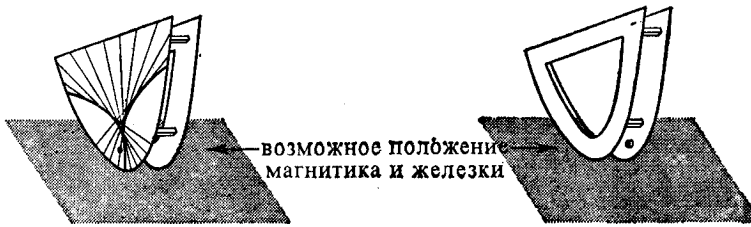


Рис. 1.8

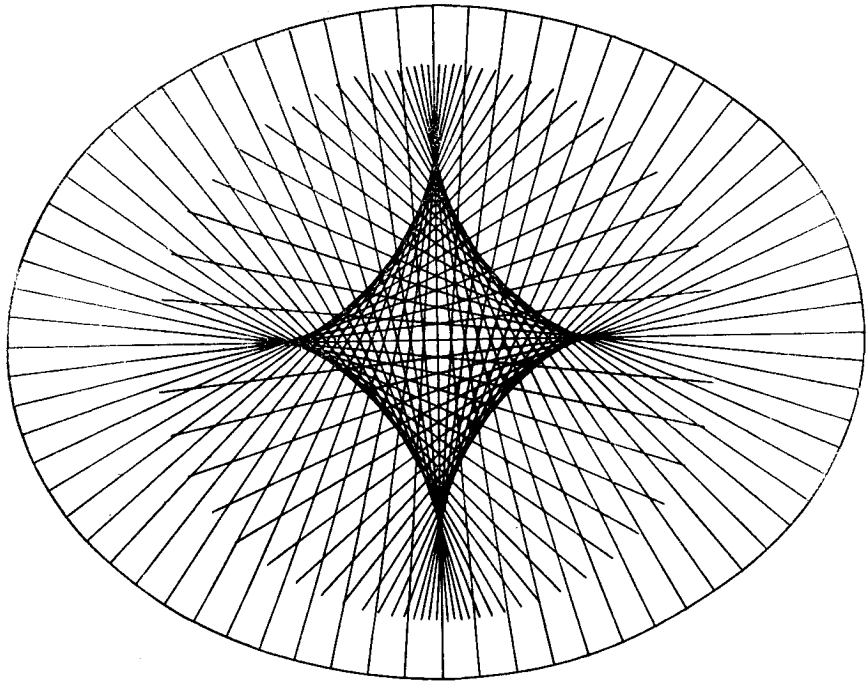


Рис. 1.9

заключено много тонкостей. Главная математическая задача этой книги состоит в том, чтобы выработать правильное понимание геометрических и алгебраических методов, нужных для того, чтобы *должным образом* обращаться с рядами Тейлора. Эти методы, развитые однажды, оказываются мощным средством для разрешения широкого круга проблем, далеко выходящего за пределы статики искусственных машинок, и открывают перспективы, неведомые при традиционных методах использования ряда Тейлора как источника приближений, оправдываемых post hoc[1] на практике.

Теория катастроф не сводится к одной логической нити; скорее она напоминает ткань с бесчисленными переплетенными нитями; тут и физическая интуиция и эксперимент, геометрия, алгебра и анализ, топология и теория особенностей отображений и многое другое. Эта ткань сама воткана в более сложную ткань — теорию динамических систем.

[1] Задним числом (*лат.*).— *Прим. ред.*

Правильный взгляд на теорию невозможен без надлежащей оценки *всех* нитей и их взаимных связей. Элементарные катастрофы Ренэ Тома — это только одна нить, хотя и важная. То, что они сводятся лишь к семи существенно различным формам, является интригующим фактом, но это не единственное, что нас здесь будет интересовать. Важна не *теорема*, а *теория* Тома — совокупность математических и физических идей, которые лежат за списком элементарных катастроф и заставляют его работать.

2 МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Для истинного понимания теории катастроф требуется хорошее ощущение геометрии пространства многих измерений, подкрепленное соответствующей алгебраической и аналитической техникой. Оно дает возможность применять геометрический подход в многомерном анализе — весьма важное обстоятельство, позволяющее мотивировать и упрощать вычисления, связывая их с геометрическими представлениями.

Первые несколько параграфов этой главы посвящены обзору необходимых фактов из линейной алгебры, представленных с геометрической точки зрения, часто отсутствующей в учебниках по „теории матриц". (Более подробное геометрическое изложение, с доказательствами и гораздо бóльшим числом картинок, можно найти у Додсона и Постона [5], где, кроме того, излагается в том же духе и геометрия многомерного анализа.) Затем мы делаем наши первые, „классические" шаги в теории катастроф. Из всей этой теории больше всего была разрекламирована теорема классификации, упомянутая выше и рассматриваемая нами в гл. 7: с точностью до подходящей замены переменных имеется лишь небольшое число стандартных форм, „типичных" для многих явлений. Таким образом, координатные замены играют ключевую роль в нашей теории. Здесь мы покажем, как работают *линейные* замены, приводящие *полиномиальные* функции к стандартным выражениям, число которых невелико. Это будет служить одновременно и характерным примером „классификаций", которые эта теория позволяет получить в гораздо более сложных ситуациях, и в то же время существенной составляющей всего дальнейшего. В значительной части книги мы будем заниматься сведéнием более общих проблем к тем, которые решаются в этой главе.

1 Теоретико-множественные обозначения

Нам будет удобно использовать некоторые элементарные понятия теории множеств. *Множество* — это совокупность объектов (произвольной природы); эти объекты называются

элементами или *точками* множества. Запись

$$x \in X$$

означает, что x есть элемент множества X. Множества, которые мы будем рассматривать, обычно будут множествами точек в многомерном пространстве. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*.

Говорят, что множество X есть *подмножество* другого множества Y, если каждый элемент X является элементом Y. Мы пишем в этом случае

$$X \subseteq Y$$

и говорим также, что X *содержится* в Y или что Y *содержит* X. Множество всех элементов x, для которых выполнено данное свойство или условие $P(x)$, обозначается так:

$$\{x | P(x)\}.$$

Объединение двух множеств X и Y определяется как

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\},$$

а их *пересечение* — как

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Из произвольных элементов x, y можно образовать *упорядоченную пару* (x, y); при этом $(x, y) = (u, v)$, если и только если $x = u$ и $y = v$. *Декартово произведение* двух множеств X и Y определяется по формуле

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

Мы используем стандартное обозначение $\mathbb{R}$ для множества всех вещественных чисел.

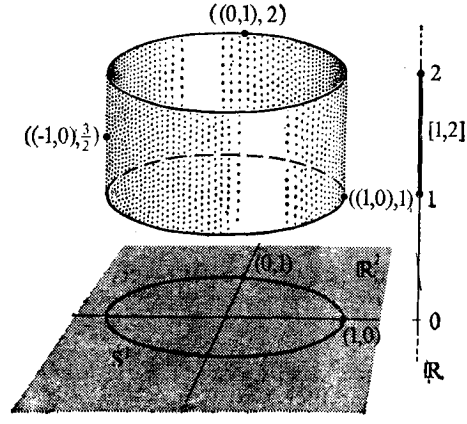


Рис. 2.1

Декартовы произведения допускают геометрически наглядное истолкование. Например, если $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и

$$X=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\},$$
$$Z=\{z\in\mathbb{R}\mid 1\leqslant z\leqslant 2\},$$

то $X\times Z$ можно представлять себе как множество точек $(x,\ y,\ z)$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющее вид боковой поверхности цилиндра (рис. 2.1).

Более общим является понятие *упорядоченного набора* из n элементов (или *n-ки*)

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n);$$

его можно считать принадлежащим к кратному декартову произведению

$$X_1\times X_2\times\ldots\times X_n.$$

Одно из самых важных для нас понятий — понятие функции. Пусть X и Y — множества. *Функцией* f с *областью определения* X и *областью значений* Y называется всякое правило[1], которое ставит в соответствие каждому $x\in X$ некоторый *единственный* элемент $f(x)\in Y$. Функции называют также *отображениями*. Мы пишем

$$f:\ X\to Y$$

и читаем эту запись так: „f есть функция из X в Y“. Говорят также, что f *отображает* X в Y и *переводит* x в $f(x)$. Когда речь идет о действии f на *элементы*, мы используем другого вида стрелку, а именно пишем $x\mapsto f(x)$. *Образом* $f(X)$ функции f называется подмножество

$$\{f(x)\mid x\in X\}$$

в Y. Образ $f(A)$ подмножества $A\subseteq X$ *относительно* (или *при*) f определяется как

$$\{f(x)\mid x\in A\}.$$

Например, функция

$$\sin:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\sin(x)$$

переводит x в $\sin x$. Функция ln, переводящая x в $\ln x$, определена только для положительных x. Таким образом,

$$\ln:\ \{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\ln x$$

[1] Может быть дано и более строгое определение, но для наших целей оно не понадобится. См., например, Стюарт и Толл [6].

есть функция, областью определения которой служит множество положительных чисел.

В выборе области значений имеется определенная свобода. Скажем, можно считать, что sin имеет областью значений не $\mathbb{R}$, а

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = \sin(\mathbb{R})$$

или любое другое множество, содержащее это множество. Обычно выбирают ту область, которая удобнее.

В традиционных учебниках функции определяют такими, например, словами: „рассмотрим функцию $f(x)=x^2$". Мы в этом случае будем говорить о „функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая переводит $x \in \mathbb{R}$ в $x^2 \in \mathbb{R}$". Это позволяет нам использовать слегка неточный традиционный язык там, где всё ясно, сохраняя в то же время за собой право быть более педантичными, если благодаря этому можно избежать двусмысленности. На традиционном языке x часто именуют (независимой) *переменной*, и этот термин мы удерживаем как удобный. (Значение $y=f(x)$ в традиционной терминологии называется зависимой переменной; этого термина мы избегаем, хотя и оставляем за собой право использовать по отношению к y слово „переменная".)

О *функциях нескольких переменных* мы говорим, когда имеем в виду функции, областью определения которых служит декартово произведение. Так, говоря о функции двух переменных

$$f(x, y)=x^2+y^2,$$

мы имеем в виду функцию с областью определения $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и областью значений $\mathbb{R}$, переводящую $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ в x^2+y^2. Функция n переменных — это просто функция

$$f\colon X_1\times X_2\times \ldots \times X_n \to Y,$$

которая переводит $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1\times \ldots \times X_n$ в $f(x_1, \ldots, x_n) \in Y$

Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon C \to D$ — две функции. Если $f(a) \in C$ для всех $a \in A$, то мы можем определить *композицию* $g \circ f$ этих функций по формуле

$$g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Таким образом, $g \circ f$ является функцией из A в D. В частности, композиция всегда определена в случае $B=C$.

Если $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ таковы, что

$$g(f(a))=a,$$
$$f(g(b))=b$$

для всех $a \in A$, $b \in B$, то мы называем g *обратной функцией* к f и пишем

$$g = f^{-1}.$$

(Отметим, что многие из традиционных „обратных функций", таких как arc sin, либо вовсе не являются функциями в нашем строгом смысле (будучи „многозначными"), либо должны быть определены на аккуратно подобранных областях.) Даже если f и не имеет обратной функции, мы используем обозначение

$$f^{-1}(Y)$$

для множества всех $a \in A$, таких что $f(a) \in Y$; здесь Y — произвольное подмножество в B.

Для $X \subseteq A$ мы определяем *ограничение* (или *сужение*) функции f на X как функцию

$$f|_X\colon\ X \to B,$$

для которой

$$f|_X(a) = f(a).$$

Она отличается от f только тем, что определена на меньшем множестве.

(Дальнейшие сведения относительно этих понятий и, в частности, нетрадиционных обозначений и терминологии можно найти в книге Стюарта и Толла [6].)

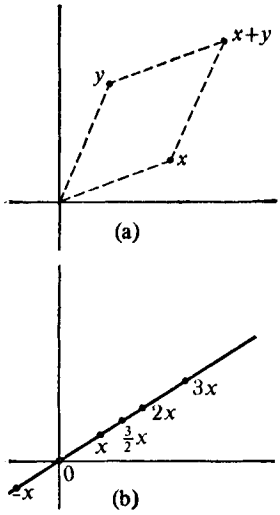


Рис. 2.2

2 Эвклидовы пространства

Пространства высокой размерности изучаются с помощью следующего обобщения „координатной геометрии". Для любого целого $n \geqslant 0$ мы определяем *n-мерное эвклидово пространство* как

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n\} = \\ = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Удобно использовать сокращенное обозначение

$$x = (x_1, \ldots, x_n);$$

при этом x_i называется (i-й) *компонентой* или *координатой* x.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ мы определяем *сложение* и *умножение на скаляр* λ формулами

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n);$$

далее будем писать 0 вместо (0, . . . , 0). Эти операции наделяют $\mathbb{R}^n$ структурой *вещественного векторного пространства*. Имея в виду эту структуру, мы будем называть точки $\mathbf{R}^n$ *векторами*.

В $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ указанные операции допускают геометрическую интерпретацию. Сложение отвечает „правилу параллелограмма“ (рис. 2.2(a)), а умножение на скаляр — изменению масштаба (и направления, в случае отрицательного скаляра) (рис. 2.2(b)). По аналогии мы можем представить себе такие же геометрические операции в $\mathbb{R}^n$; это оживляет язык, но требует каждый раз алгебраической проверки того, что ожидаемые свойства действительно справедливы. В частности, для любого $x \neq 0$ множества всех точек λx ($\lambda \in \mathbb{R}$) называется *прямой (линией)*, проходящей через 0 и x; точка 0 называется *началом (координат)*.

Подпространством в $\mathbb{R}^n$ называют всякое подмножество W, обладающее следующими свойствами;

$$\text{если } x,\ y \in W, \text{ то } x+y \in W; \tag{2.2}$$

$$\text{если } x \in W \text{ и } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ то } \lambda x \in W. \tag{2.3}$$

Чтобы понять, что это означает геометрически, рассмотрим случай пространства $\mathbb{R}^3$. Условие (2.3) говорит, что если $x \in W$, то и вся прямая, проходящая через x и 0, лежит в W; условие (2.2) говорит, что вместе со всякими двумя точками, лежащими в W, в W лежит также и вершина соответствующего параллелограмма. Возможно несколько случаев.

(a) $W=\{0\}$. Это, конечно, подпространство.

Если $W \neq \{0\}$, то можно указать в W точку $x \neq 0$. Тогда прямая, проходящая через x и 0, также лежит в W. Если этой прямой всё W и исчерпывается, то

(b) $W=\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая, проходящая через 0.

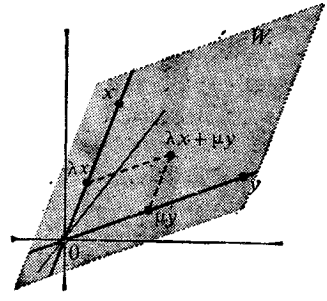


Рис. 2.3

В противном случае существует точка $y \in W$, не лежащая на прямой $\{\lambda x\}$. Тогда прямая, проходящая через 0 и y, лежит в W, равно как и вершины всех параллелограммов со сторонами на этих двух прямых, т. е. точки $\lambda x+\mu y$ для $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ясно, что мы получим так все точки плоскости, проходящей через 0, x и y (рис. 2.3). Если W этим исчерпывается, то

(c) $W=\{\lambda x+\mu y|\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ — плоскость, проходящая через 0.

Наконец, W может содержать какую-нибудь точку z вне этой плоскости. Картинка, подобная изображенной на рис. 2.3, но с тремя прямыми и с параллелепипедами вместо параллелограммов, показывает, что $W=\{\lambda x+\mu x+\nu z|\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3$. Следовательно, последняя возможность такова:

(d) $W=\mathbb{R}^3$.

Итак, подпространства в $\mathbb{R}^3$ — это либо точки (начало), либо прямая или плоскость, содержащая начало, либо само $\mathbb{R}^3$. Интуитивно это „плоские" подмножества, содержащие начало, и их можно (в $\mathbb{R}^3$) классифицировать так: нульмерные (одно лишь начало), одномерные (прямые), двумерные (плоскости) и трехмерные ($\mathbb{R}^3$). Чтобы обобщить эти понятия и сделать их точными, введем немного алгебры.

Множество точек $\{v^1, v^2, \ldots, v^r\} \in \mathbb{R}^n$ *линейно-зависимо*, если существуют такие скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1 v^1 + \ldots + \lambda_r v^r = 0. \tag{2.4}$$

Если таких λ_i нет (или, иначе говоря, если из указанного равенства вытекает, что все λ_i равны нулю), то рассматриваемое множество точек называется *линейно-независимым*.

Геометрически, две точки линейно-независимы, если ни одна из них не лежит на прямой, проходящей через другую и 0; три точки линейно-независимы, если никакая из них не лежит на плоскости, проходящей через две другие и 0; и т. д.

Говорят, что множество точек $v^1, v^2, \ldots, v^r$ *порождает* подпространство W, если каждый элемент из W может быть записан как *линейная комбинация*

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_r v^r \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R})$$

и если все такие линейные комбинации лежат в W (или, эквивалентно, каждая точка v^i лежит в W). *Базисом* подпространства W называется всякое линейно-независимое мно-

жество элементов, порождающее W. *Размерность* W — это число элементов в базисе (важная теорема утверждает, что это число не зависит от выбора базиса). Кроме того, принимается соглашение, что $\{0\}$ имеет размерность 0. Для размерности W используется обозначение [1]

$$\dim W.$$

Иногда нам придется обращаться к *бесконечномерным* пространствам, т. е. тем, в которых нет конечного базиса. (Например, таково пространство всех многочленов от x: в любом конечном наборе многочленов имеется многочлен наибольшей степени, скажем степени k, и уже x^{k+1} нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов из этого набора.) Но большей частью нам удастся избежать технических осложнений, которые здесь возникают.

Можно доказать, что размерность произвольного подпространства W в $\mathbb{R}^n$ должна удовлетворять условию

$$0 \leqslant \dim W \leqslant n$$

и что любая размерность в этом диапазоне действительно реализуется при соответствующем выборе W. Как правило, выбор W неединствен, но если $\dim W=0$, то $W=\{0\}$, а если $\dim W=n$, то $W=\mathbb{R}^n$. Разность n—$\dim W$ называют *коразмерностью* подпространства W в $\mathbb{R}^n$. *Кобазисом* W в $\mathbb{R}^n$ называется всякое множество векторов $v^1, \ldots, v^r$, образующее вместе с некоторым базисом для W базис для всего $\mathbb{R}^n$. Ясно, что r должно равняться коразмерности W. Подчеркнем, что кобазис, как и базис, не определен однозначно.

3 Линейные преобразования

Линейное преобразование (или *линейное отображение*) из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ — это функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, обладающая свойствами

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Чтобы найти общий вид линейного преобразования, выберем базисы $u^1, \ldots, u^n$ в $\mathbb{R}^n$ и $v^1, \ldots, v^m$ в $\mathbb{R}^m$. Значение $f(u^i)$ для каждого i есть некоторый элемент из $\mathbb{R}^m$, и должны существовать скаляры λ_{ji}, такие что

$$f(u^i)=\lambda_{1i}v^1+\ldots+\lambda_{mi}v^m=\sum_j \lambda_{ji}v^j. \tag{2.5}$$

Каждый элемент из $\mathbb{R}^n$ единственным образом представляется в виде

$$x=\sum \mu_i u^i \qquad (\mu_i \in \mathbb{R}),$$

[1] dim — от dimension (размерность).— *Прим. ред.*

и поэтому

$$f(x)=f\left(\sum_i \mu_i u^i\right)=\sum_i \mu_i f(u^i)=\sum_{i,j}\mu_i\lambda_{ji}v^j.$$

Таким образом, любое линейное преобразование имеет такой вид. Легко проверить и обратное: всякое преобразование, представимое в таком виде, является линейным, какие бы скаляры λ_{ji} мы ни взяли. (Физики, заметьте, пожалуйста: мы никогда не суммируем по повторяющимся индексам без явного указания на то посредством знака Σ.)

Обычно удобнее всего выбирать в $\mathbb{R}^n$ *стандартный базис*

$$u^1=(1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$u^2=(0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots$$
$$u^n=(0, 0, 0)$$

и аналогично выбирать v^j; тогда

$$x=\sum_i \mu_i u^i=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

т. е. μ_i оказываются координатами x, которые мы обычно записываем как x_i. Изменив таким образом обозначения, мы имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n)=(\lambda_{11}x_1+\ldots+\lambda_{1n}x_n, \ldots, \lambda_{m1}x_1+\ldots+\lambda_{mn}x_n).$$

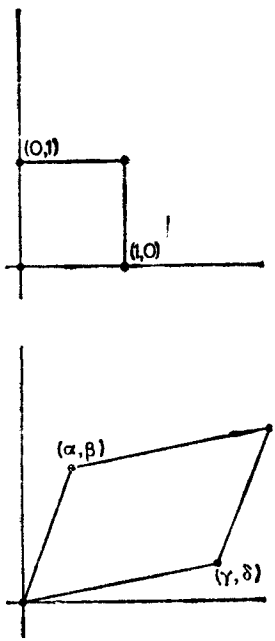


Рис. 2.4

Что собой представляет линейное отображение геометрически? Чтобы разобраться в этом, возьмем самый легкий случай: f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Пусть (см. рис. 2.4)

$$f(1,0)=(\alpha, \beta),$$
$$f(0,1)=(\gamma, \delta).$$

Тогда, например, $f(1, 1)=(\alpha+\gamma, \beta+\delta)$. Действие отображения f сводится к „перекашиванию" плоскости, при котором прямые, проходящие через начало, переходят в такие же прямые, а квадраты переходят в параллелограммы (рис. 2.5 (a)). Точнее, так обстоит дело, когда точки (α, β) и (γ, δ) линейно-независимы. Если они линейно зависимы (но не совпадают обе с 0), то f отображает $\mathbb{R}^2$ в некоторую прямую линию, так сказать, сплющивает плоскость (рис. 2.5 (b)). Если $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, то f переводит плоскость в начало (рис. 2.5 (c)), сплющивая ее окончательно.

Аналогично обстоит дело и для отображений $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; поэтому мы любое линейное преобразование (даже и в случае более высоких размерностей) пред-

ставляем себе как скашивание, которое прямые, проходящие через начало, переводит в такие же прямые (многомерные) кубы — в (многомерные) параллелепипеды.

Возвращаясь к отображениям $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заметим, что когда $\mathbb{R}^2$ отображается в прямую, каждая точка этой последней служит образом целой прямой; если f отображает всё в 0, то 0 оказывается образом целой плоскости; если же f отображает $\mathbb{R}^2$ на себя, то каждая точка есть образ ровно одной точки. Грубо говоря, чем больше сплющивание (в смысле размерности), тем больше точек сплющивается в одну (в том же смысле). Чтобы выразить это наблюдение подобающим образом, определим *ранг* отображения f как размерность его образа $f(\mathbb{R}^n)=\{f(x)|x\in\mathbb{R}^n\}$ и *дефект* f как размерность его *ядра*

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)=0\}.$$

Теперь можно доказать, что ранг отображения f плюс его дефект равняется n. Эквивалентное утверждение, зачастую лучше вскрывающее геометрическое существо дела:

$$\text{коразмерность (ядро } (f)) = \text{ранг } (f).$$

Мы говорим, что отображение f *обратимо* (или *невырожденно*), если существует *обратное* линейное отображение g: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, такое что $f(g(x))=x$ для всех $x\in\mathbb{R}^m$ и $g(f(x))=x$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$. Это имеет место, если и только если $m=n$ и ранг f тоже равен n, или, эквивалентно, дефект f равен нулю. Таким образом, знание ранга позволяет сказать, насколько далеко f от обратимости, или насколько сильно оно сплющивает точки — насколько оно *вырождено*.

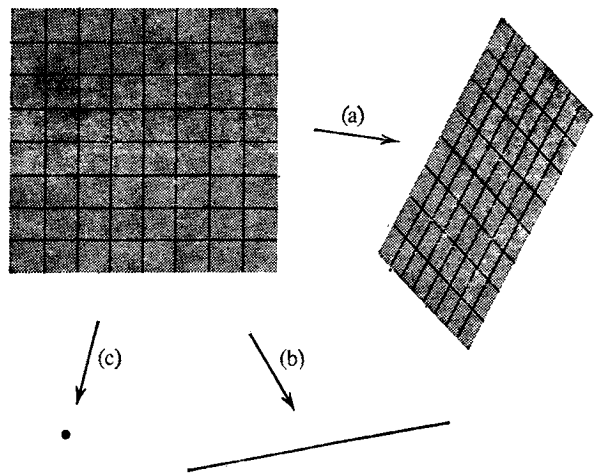


Рис. 2,5

Используя эти соображения, можно дать классификацию линейных отображений с точностью до замены координат. Если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейное ненулевое отображение, то его ранг равен 1, а дефект $n-1$. Выбрав какой-нибудь базис $v^1, \ldots, v^{n-1}$ для ядра и дополнив его до базиса в $\mathbb{R}^n$ вектором v^n, для которого $f(v^n)=1$, мы найдем, что f задается равенствами

$$f(v^i)=0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$
$$f(v^n)=1.$$

Если g — другое ненулевое линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, то то же верно и для g по отношению к некоторому базису $u^1, \ldots, u^n$; значит, переход от базиса $\{v^i\}$ к базису $\{u^i\}$ обеспечивает одинаковую запись для f и g. Следовательно, все ненулевые линейные отображения выглядят одинаково с точностью до замены координат, а все нулевые просто *совпадают*; классификация закончена.

Аналогичным образом показывается, что если f и g — отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с *одним и тем же ядром*, то они получаются друг из друга умножением на скаляр.

4 Матрицы

Теперь мы перейдем от геометрических аспектов к вычислительным. Говорят, что скаляры λ_{ji}, которыми определяется линейное отображение при заданных двух базисах (см. (2.5)), образуют *матрицу* отображения по отношению к этим базисам; обычно их записывают в виде прямоугольника

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ & \cdot & \ldots & \\ & \cdot & \ldots & \\ & \cdot & \ldots & \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} = (\lambda_{ji})_{j \leqslant m,\ i \leqslant n}.$$

Это матрица *размера* $m \times n$ или ($m \times n$-*матрица*) с m *строками* и n *столбцами*. Матрицы чрезвычайно удобны для проведения вычислений с линейными преобразованиями. Для линейных преобразований $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ мы определяем умножение на скаляр, сложение и произведение (композицию) равенствами

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$h \circ f(x)=h(f(x)),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Фиксировав базисы $u^1, u^2, \ldots, u^n$ для $\mathbb{R}^n$, $v^1, v^2, \ldots, v^m$ для $\mathbb{R}^m$ и $w^1, w^2, \ldots, w^p$ для $\mathbb{R}^p$, мы можем следующим образом перенести эти операции на матрицы (λ_{ji}), (μ_{ji}) и (ν_{kj}). Умножению на скаляр и сложению отвечают формулы

$$\alpha(\lambda_{ji}) = (\alpha\lambda_{ji}) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$
$$(\lambda_{ji}) + (\mu_{ji}) = (\lambda_{ji} + \mu_{ji}).$$

Более интересно умножение матриц, отвечающее композиции линейных преобразований. Матрицы для f и h определяются равенствами

$$f(u^i) = \sum_j \lambda_{ji} v^j,$$
$$h(v^j) = \sum_k \mu_{jk} w^k.$$

Тогда

$$h \circ f(u^i) = h\left(\sum_j \lambda_{ji} v^j\right) = \sum_j \lambda_{ji} h(v^j)$$
$$= \sum_j \lambda_{ji} \sum_k \nu_{kj} w^k = \sum_k \left(\sum_j \nu_{kj}\lambda_{ji}\right) w^k.$$

Если $(\rho_{ki})_{k \leqslant p,\ i \leqslant n}$ — матрица для $h \circ f$ по отношению к выбранным базисам, то получается, что

$$\rho_{ki} = \sum_j \nu_{kj}\lambda_{ji}.$$

Таким образом, мы приходим к тому, чтобы определить произведение матриц размера $m \times n$ и $p \times m$ соответственно при помощи правила

$$(\nu_{kj})(\lambda_{ji}) = \left(\sum_j \nu_{kj}\lambda_{ji}\right).$$

Нулевая матрица 0_{mn} — это матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю. *Единичная матрица* 1_n — это матрица размера $n \times n$, у которой на *главной диагонали* стоят 1, а остальные элементы равны 0:

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица отвечает *тождественному преобразованию* $f(u) = u$.

Из многих вычислительных процедур, использующих матрицы, мы остановимся здесь лишь на одной — на вычислении ранга линейного преобразования с помощью *процесса приведения по строкам* к *ступенчатой форме*. Объясним, что это такое.

Мы допускаем три типа операций над строками данной матрицы:

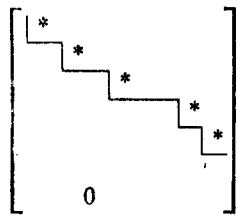
T_{ij}: поменять местами строки i и j;

λR_i: умножить строку i на скаляр λ;

R_i+R_j: заменить строку i суммой строк i и j.

(Эти обозначения введены лишь для разового использования в приводимом ниже иллюстративном примере.)

Применяя последовательность таких операций, любую матрицу можно привести к *ступенчатой форме*, т. е. к форме



где на месте каждой звездочки стоит ненулевой элемент, а ниже „лестницы" все элементы нулевые. („Ступеньки" не обязаны иметь одинаковую длину.) Вместо доказательства мы приведем типичный пример. Чтобы сократить процедуру приведения, заметим, что в результате операций λR_j, R_i+R_j, $\lambda^{-1}R_j$, примененных в такой последовательности, строка j, умноженная на λ, прибавляется к строке i, а все остальные строки остаются без изменения. Эту последовательность операций естественно обозначить через $R_i+\lambda R_j$.

Возьмем матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -8 & -10 \end{bmatrix}.$$

Проделаем последовательно следующие операции над строками:

$$T_{12}\colon \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

$$R_3-2R_1:\begin{bmatrix}1&3&2&6\\0&1&2&1\\0&-5&0&-9\\-3&-5&-8&-10\end{bmatrix},$$

$$R_4+3R_1:\begin{bmatrix}1&3&2&6\\0&1&2&1\\0&-5&0&-9\\0&4&-2&8\end{bmatrix}.$$

Теперь можно повторить тот же процесс над 3×3-блоком, стоящим в правом нижнем углу, поскольку первая строка и первый столбец уже имеют желаемый вид. Получим

$$R_3+5R_2:\begin{bmatrix}1&3&2&6\\0&1&2&1\\0&0&10&-4\\0&4&-2&8\end{bmatrix},$$

$$R_4-4R_2:\begin{bmatrix}1&3&2&6\\0&1&2&1\\0&0&10&-4\\0&0&-10&-4\end{bmatrix}.$$

Далее можно заняться 2×2-блоком:

$$R_4+R_3:\begin{bmatrix}1&3&2&6\\0&1&2&1\\0&0&10&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

и процесс завершен; ранг нашей матрицы (или соответствующего линейного преобразования) равен 3.

Доказательство того, что в результате этого процесса действительно всегда получается ранг, несложно; грубо говоря, каждая операция оставляет ранг неизменным, а ранг матрицы, имеющей ступенчатую форму, как легко видеть, равен числу ненулевых строк.

Еще небольшая порция матричной алгебры, которая позже окажется нам полезной. Для $(n\times n)$-матрицы M *обратная матрица* M^{-1} определяется как матрица, обладающая свойством

$$MM^{-1}=1_n=M^{-1}M$$

(если таковая матрица существует). В случае когда M имеет обратную матрицу, говорят, что M *невырожденна*; в противном случае ее называют *вырожденной*. Матрица невырожденна, если и только если соответствующее преобразование

невырожденно; $n \times n$-матрица невырожденна, если и только если ее ранг равен n.

Другой критерий невырожденности, полезный более в теории, чем на практике, основан на числовом инварианте, называемом *определителем*. Он обозначается через $\det(M)$ [1] и удовлетворяет соотношению

$$\det(MN) = \det(M)\det(N).$$

Мы не будем давать здесь его определения. Геометрически он характеризует, что́ преобразование делает с объемом. Подробности см. у Додсона и Постона [5] [2]. Квадратная матрица невырожденна, если и только если ее определитель отличен от нуля. (Хотя теоретически это и полезный результат, вычисление определителей — дело хлопотливое и приведение по строкам на практике лучше [3].)

Транспонированная матрица M^{T} для матрицы $M = (\lambda_{ij})$ определяется формулой

$$(M^{\mathrm{T}})_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Таким образом, транспонирование — это отражение относительно главной диагонали. Имеет место равенство

$$\det(M^{\mathrm{T}}) = \det(M).$$

5 Квадратичные формы

Квадратичная форма (квадрика) от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это выражение вида

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Чтобы записать его на матричном языке, мы вводим *вектор-строку*

$$x = [x_1 \ldots x_n],$$

транспонирование которой дает *вектор-столбец*

$$x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

[1] det — от determinant (определяющий).— *Прим. ред.*

[2] Или у Спивака [8].— *Прим. перев.*

[3] Кстати, оно позволяет и вычислить определитель (равный произведению диагональных элементов в ступенчатой форме).— *Прим. перев.*

Введем в рассмотрение матрицу $\Lambda=(\lambda_{ij})$, называемую *матрицей квадратичной формы*. Тогда

$$q(x)=x\Lambda x^{\intercal}.$$

Если мы заменим Λ на $\frac{1}{2}(\Lambda+\Lambda^{\intercal})=M$, то квадратичная форма останется неизменной [1], поскольку $x_ix_j=x_jx_i$, но теперь ее матрица M *симметрична* в том смысле, что $M=M^{\intercal}$. Значит, каждую квадратичную форму можно записать в виде

$$q(x)=xMx^{\intercal}$$

с симметричной матрицей M, и обычно мы будем считать, что так и сделано.

Каждая квадратичная форма от n переменных может быть приведена с помощью невырожденного линейного преобразования этих переменных к виду

$$d_1y_1^2+\ldots+d_ny_n^2. \tag{2.6}$$

Наметим здесь, как это делается, поскольку позже мы будем опираться на этот факт в одном более сложном доказательстве (леммы Морса в гл. 4). Наша первая цель — добиться, чтобы $\lambda_{11}\neq 0$. Если какой-либо из диагональных членов $\lambda_{ii}\neq 0$, то к этой цели ведет линейное преобразование, меняющее местами x_1 и x_i. Если же все диагональные члены нулевые, то тогда отличен от нуля какой-нибудь внедиагональный член λ_{ij} $(i\neq j)$ и по симметрии $\lambda_{ji}\neq 0$. Поэтому наша форма имеет вид

$$q(x)=2\lambda_{ij}x_ix_j + \text{члены, в которые входят другие переменные.}$$

Полагая

$$y_i={}^1\!/_2(x_i+x_j), \qquad y_j={}^1\!/_2(x_i-x_j)$$

и оставляя остальные x_k без изменения $(y_k=x_k)$, мы получаем член

$$2\lambda_{ij}y_i^2-2\lambda_{ij}y_j^2$$

с ненулевыми диагональными коэффициентами и сводим задачу к уже рассмотренному случаю.

Проведя этот предварительный шаг, мы можем вернуться к старым обозначениям и считать, что $\lambda_{11}\neq 0$. Имеем

$$q(x)=\lambda_{11}\left(\sum_{ij}\mu_{ij}x_ix_j\right),$$

[1] Как функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.— *Прим. перев.*

где $\mu_{ij}=\lambda_{ij}/\lambda_{11}$. Члены, содержащие x_1, дают

$$x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}\mu_{1j}x_1x_j=\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\mu_{1j}x_j\right)^2-\left(\sum_{j=2}^{n}\mu_{1j}x_j\right)^2.$$

Положим

$$y_1=x_1+\sum_{j=2}^{n}\mu_{1j}x_j,$$
$$y_i=x_i \qquad (i>1);$$

это — невырожденное линейное преобразование. Наша форма примет тогда вид

$$q(y)=\lambda_{11}y_1^2+\tilde{q}(y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

где $\tilde{q}$ — квадратичная форма *только* от переменных y_2, $\ldots$, y_n. Повторяя процесс достаточное число раз, получим желаемый результат.

Мы можем пойти чуть дальше. Произведя замену

$$z_i=x_i/\sqrt{|d_i|} \qquad (d_i\neq 0),$$

мы придем к выражению того же типа, но с коэффициентами, равными лишь 1, 0 или —1. Изменив порядок переменных так, чтобы сначала шли единицы, затем минус единицы, и отбросив нули, мы получим следующий результат: *любая квадратичная форма от n переменных может быть приведена с помощью невырожденной линейной замены переменных к виду*

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_r^2-z_{r+1}^2-\ldots-z_s^2,$$

где $s\leqslant n$. Число s называется *рангом* квадратичной формы, и можно показать, что оно равняется рангу матрицы этой формы; значит, оно не зависит от выбора линейного преобразования и его можно подсчитать, скажем, приведя матрицу к ступенчатой форме. *Закон инерции Сильвестра* гласит, что r также не зависит от выбора линейного преобразования. Число

$$2r-s=r-(s-r)=\text{сумма коэффициентов}$$

называется *сигнатурой* квадратичной формы $q(x)$. С точностью до линейного преобразования любая квадратичная форма единственным образом определяется своими рангом и сигнатурой.

Это чуть более сложный пример центральной темы нашей книги — приведения к простой форме заменой координат. Квадратичная форма $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ требует для своего задания $\frac{1}{2}n(n+1)$ чисел (55 при $n=10$). Но с точностью до

замены переменных ее можно задать всего лишь n числами, каждое из которых равно ± 1 или 0, а именно коэффициентами приведенного выше выражения, т. е. фактически всего лишь двумя числами r и s.

Для случая квадратичных форм от двух переменных

$$q(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

можно дать живую геометрическую интерпретацию этой классификации по рангу и сигнатуре. Имеющиеся здесь возможности таковы:

(i) u^2+v^2 (ранг 2, сигнатура 2),
(ii) u^2-v^2 (ранг 2, сигнатура 0),
(iii) $-u^2-v^2$ (ранг 2, сигнатура -2),
(iv) u^2 (ранг 1, сигнатура 1),
(v) $-u^2$ (ранг 1, сигнатура -1),
(vi) 0 (ранг 0, сигнатура 0).

Случай (iv) встречается в точности тогда, когда q является полным квадратом, скажем $(px+vy)^2$. Уравнение $q=0$ можно решить, используя хорошо известную формулу для квадратных уравнений, что дает

$$x=\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)y.$$

С другой стороны, решением уравнения $(px+vy)^2=0$, очевидно, служит

$$x=-\frac{v}{p}y,$$

и единственный способ согласовать обе формулы — это

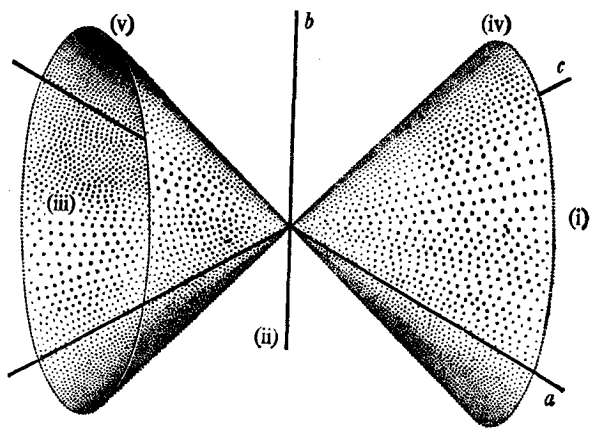


Рис. 2.6

иметь $b^2-ac=0$; тогда два решения сводятся к одному двукратному решению. Но если $b^2-ac=0$, то

$$\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2=ax^2+2bxy+\frac{b^2}{a}y^2=q(x,\ y).$$

Итак, $q(x, y)$ можно свести к u^2 в точности тогда, когда $b^2=ac$, причем a и c *положительны*, и ее можно свести к $-u^2$, когда $b^2=ac$ и a и c *отрицательны*.

В случае (vi), конечно, $a=b=c=0$, так что $b^2=ac$ тривиальным образом. Итак, случаи (iv), (v) и (vi) выделяются условием $b^2=ac$, а между собой различаются знаком (+, 0, —), стоящим перед a (или c).

Если принять теперь (a, b, c) за координаты точки в $\mathbb{R}^3$ и рассмотреть множество S точек, удовлетворяющих условию $b^2=ac$, то мы увидим, что это двойной конус с вершиной в начале, содержащий оси a и c; этот конус разбивает $\mathbb{R}^3$ на три части в соответствии с тремя оставшимися случаями (см. рис. 2.6). (Как можно увидеть, что мы имеем дело с двойным конусом, будет объяснено в § 7 этой главы.) Таким образом, q есть форма типа (ii), когда $b^2>ac$ (это — внешность конуса), типа (i), когда $b^2<ac$ и a положительно (внутренность положительной полы конуса), и типа (iii), когда $b^2<ac$ и a отрицательно (внутренность отрицательной полы).

Ввиду приведенных выше результатов мы будем называть квадратичную форму q *вырожденной*, если ее ранг s меньше числа независимых переменных n. Разность $n-r$ называется *корангом* формы. Это число независимых направлений, вдоль которых форма вырождается, что становится особенно ясно видно, если форму диагонализовать. Вырождение происходит, если и только если определитель матрицы формы равняется нулю. Но матрица нашей формы такая:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

и ее определитель равен как раз $-(b^2-ac)$. Этот определитель известен как *дискриминант* квадратичной формы. Соответственно и построенный выше конус S мы называем *дискриминантным*.

6 Кубические формы от двух переменных

Теперь мы займемся аналогичной проблемой классификации *кубических* форм, решение которой послужит нам в гл. 7 ключевым шагом к классификационной теореме. Так как

мы сведем там задачу к случаю форм от двух переменных, исследованием этого случая мы здесь и ограничимся.

Кубическая форма (кубика) от двух переменных x, y — это выражение

$$c(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$$

с вещественными коэффициентами α, β, γ, δ. Обозначим через K четырехмерное пространство всех таких форм; его можно отождествить с $\mathbb{R}^4$, приняв α, β, γ, δ в качестве координат.

В § 5 мы нашли шесть типов квадратичных функций (а с точностью до знака четыре). Аналогично имеются пять типов кубических форм; знак на этот раз никакой роли не играет, так как его всегда можно изменить на противоположный, произведя замену $(u, v)=(-x, -y)$. Для описания этих пяти типов удобно ввести в рассмотрение *корневое множество* формы A — множество

$$R_A=\{(x, y) | \alpha x^3+\beta x^2 y+\gamma x y^2+\delta y^3=0\}$$

тех точек, в которых форма $A=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ обращается в нуль. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $(x, y) \in \mathbb{R}_A$, то ясно, что и $(\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}_A$. Значит, для любой формы A множество R_A состоит из прямых, проходящих через начало.

Чтобы выяснить, как эти прямые могут располагаться, найдем их пересечения с прямой $x=1$. (Здесь возникает небольшая трудность, связанная с тем, что ось y не пересекает этой прямой; поэтому ось y приходится рассматривать отдельно. Имеющие счастье быть знакомыми с проективной геометрией могут с равным успехом ввести „точки на бесконечности“.) Положив $x=1$, мы приходим к кубическому уравнению относительно y

$$P_A(y)=\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3=0.$$

Оно имеет не более трех решений y_1, y_2, y_3 (если только перед нами не случай $A=(0, 0, 0, 0)$); значит, имеется не более трех корневых прямых (рис. 2.7). Что касается оси y, то она задается уравнением $x=0$. Но $x=0$ служит решением, в точности тогда, когда $\delta=0$, а тогда наше кубическое уравнение превращается в квадратное, с самое большее двумя решениями. Снова получается всего не более трех прямых. Таким образом, возможности для R_A таковы:

(i) три различные прямые, как на рис. 2.7 и 2.8(a);
(ii) одна „некратная“ прямая, как на рис. 2.8(b);
(iii) три прямые, две из которых „совпадают“ между собой, как на рис. 2.8(c);

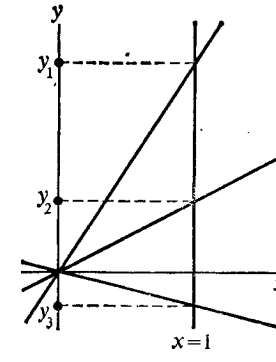


Рис. 2.7

(iv) три совпадающие прямые, как на рис. 2.8(d);
(v) вся плоскость, в случае $A=(0, 0, 0, 0)$.

Ясно, что никакой заменой координат нельзя изменить число корневых прямых, которые имеет данная кубическая функция. (Заметьте, что важно делать различие между „функцией P на плоскости, задаваемой в координатах x, y выражением x^2y“ и „многочленом X^2Y“. Если мы введем новые координаты $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$, то функция получит в этих новых координатах новое выражение $(u+v)^2 \times (u-v)$. Иными словами, одна и та же полиномиальная *функция* может иметь много полиномиальных *выражений*.) Далее, никакой гладкой заменой нельзя перевести случай (iv), в котором градиент функции обращается в нуль на целой прямой, в случай (ii), где он обращается в нуль только в начале. Следовательно, структура корневого множества определяет разбиение пространства K на пять классов.

Замечательным образом оказывается, что для любых двух кубических функций f_1 и f_2, принадлежащих к одному и тому же классу, мы можем найти *линейную* замену координат, такую, что f_2 имеет в новых координатах то же самое выражение, какое имела f_1 в старых координатах. Значит, „с точностью до замены координат“ они представляют собой одно и то же; более аккуратно: в некотором очень сильном смысле они имеют одну и ту же форму.

Начнем со случая (i) трех различных корневых прямых. Всегда можно нарисовать параллелограмм, как на рис. 2.9(a), две стороны которого идут по двум из этих прямых, назовем их прямыми 1 и 2, а диагональю служит третья

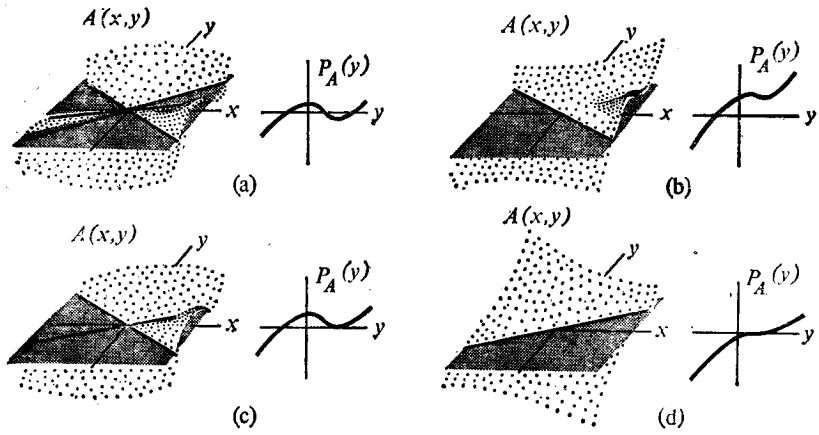


Рис. 2.8

прямая (прямая 3). Выберем новую систему координат u, v, в которой осью u служит прямая 1, а осью v — прямая 2, причем масштабы подберем так, чтобы стороны нашего параллелограмма имели единичную длину (см. рис. 2.9 (b)). В этих новых координатах уравнения корневых прямых выглядят так:

прямая 1: $v=0$,
прямая 2: $u=0$,
прямая 3: $u-v=0$.

Значит, если u, v или $u-v$ обращается в нуль, то и f тоже. Отсюда следует, что f лишь скалярным множителем отличается от $uv(u-v)$ и дальнейшим изменением масштаба мы можем привести f к виду

$$f(u, v)=uv(u-v).$$

Итак, любые две кубики с тремя различными корневыми прямыми могут быть приведены к одному и тому же виду $uv(u-v)$.

В остальных случаях — за исключением тривиального случая $A=(0, 0, 0, 0)$, который мы будем дальше игнорировать,— мы всегда располагаем по крайней мере одной корневой прямой и, используя ее, как и выше, можем выделить в f линейный сомножитель. Именно, если уравнение этой прямой имеет вид

$$lx+my=0,$$

то $lx+my$ должно быть делителем f. Значит, f представимо в виде

$$(lx+my)(ax^2+bxy+cy^2)$$

даже без всякой замены координат. Используя теперь результаты § 5, мы можем найти координаты u, v, в которых квадратичный сомножитель упростится; линейный сомножитель при этом перейдет в $Lu+Mv$ с какими-то L и M. Знак квадратичного члена можно передать линейному, и, таким образом, мы можем представить f в одном из следующих трех видов:

(a) $(Lu+Mv)(u^2-v^2)$,
(b) $(Lu+Mv)u^2$,
(c) $(Lu+Mv)(u^2+v^2)$.

Покажем, что случай (a) либо отвечает рис. 2.9, либо сводится к случаю (b), а затем мы рассмотрим случаи (b) и (c). Выражение (a) допускает дальнейшее разложение на мно-

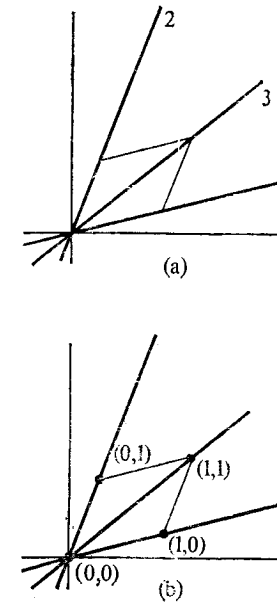


Рис. 2.9

жители:

$$(Lu+Mv)\,(u-v)\,(u+v).$$

Если множитель $Lu+Mv$ не является скалярным кратным $u+v$ или $u-v$, то мы имеем рассмотренный выше случай трех различных прямых. Если же он является таким скалярным кратным, то либо $L=M=c$, либо $L=-M=c$. Положив $U=(u\pm v)\,c^{-1/3}$, $V=vc^{-1/3}$, мы получим, что f делится на U^2, т. е. мы попадаем в случай (b).

В случае (b), если $M\neq 0$, введем новые координаты

$$U=Lu+Mv, \qquad V=u,$$

в которых f получает выражение UV^2. Если $M=0$, то эта замена незаконна, но тогда мы можем взять $U=L^{1/3}u$, $V=v$ и привести f к виду U^3.

В случае (c), если либо L, либо M равняется нулю, то, изменив масштаб и переименовав (если надо) оси, мы приведем f к виду $(U^2+V^2)\,V$. В противном случае повернем оси, положив

$$w=\frac{Lu-Mv}{\sqrt{L^2+M^2}}, \qquad z=\frac{Lu+Mv}{\sqrt{L^2+M^2}}.$$

После несложных выкладок мы придем к выражению

$$f(w, z)=\sqrt{L^2+M^2}\,(w^2+z^2)\,z,$$

а изменение масштаба превращает это в $(U^2+V^2)\,V$.

Итак, подходящей линейной заменой координат мы всегда можем привести однородную ненулевую кубику к одному из выражений

$$(U-V)\,UV, \qquad (U^2+V^2)\,V, \qquad U^2V, \qquad U^3.$$

Они имеют корневые множества типов (i), (ii), (iii), (iv) соответственно и, значит, геометрически все различны. Таким образом, имеются в точности четыре типа кубик от двух переменных плюс еще нулевая кубика. Для „наведения блеска“ произведем еще в выражении $(U-V)\,UV$ замену

$$x=\tfrac{1}{2}(U+V), \qquad y=\tfrac{1}{2}(U-V),$$

переводящую его в x^2y-y^3. Для единообразия будем и в остальных случаях писать x вместо U и y вместо V. В результате мы получаем следующий список стандартных кубик:

(i) x^2y-y^3,
(ii) x^2y+y^3,
(iii) x^2y,
(iv) x^3.

Теперь посмотрим, как эти четыре типа расположены в четырехмерном пространстве K кубических форм. Иными словами, мы хотим найти аналог рис. 2.6. Поскольку K четырехмерно, мы вынуждены прибегнуть к какому-нибудь трюку, чтобы „спустить" геометрию до двух размерностей бумаги.

Искомый трюк заключается в том, чтобы игнорировать масштаб. Умножение квадрики на ненулевую положительную константу c не изменяет ее типа, так как это изменение можно свести на нет заменой переменных на $\sqrt[3]{c}x$, $\sqrt[3]{c}y$. Точно также и для однородных кубик мы можем скомпенсировать умножение на константу изменением масштаба, а именно умножением переменных на кубический корень из этой константы. Рис. 2.6 восстановится полностью, если взять единичную сферу

$$\{(a, b, c):\ a^2+b^2+c^2=1\}$$

с центром в начале, нарисовать на ней две окружности, как на рис. 2.10, и построить под ними конусы с вершиной в начале. Эти две окружности представляют квадратичные формы (a, b, c), которые лежат на единичной сфере и удовлетворяют условию $b^2=ac$. Подобным же образом мы можем описать распределение кубик различных типов в K, выяснив сначала, что́ происходит на трехмерной сфере

$$\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)|\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1\},$$

и затем построить соответствующий конус, выпустив лучи из точки (0, 0, 0, 0).

К несчастью, в физическом мире нет доступной нам трехмерной сферы (если не считать, быть может, всего мира целиком, или, точнее, его пространственно-подобного сечения), так что мы вынуждены пойти на некоторое искажение картины, чтобы сделать доступной для обозрения интересующую нас геометрию, не производя чересчур радикальных изменений. Та же проблема возникает и на рис. 2.10, это извечный кошмар картографов — представление поверхности сферы на плоскости. Проблема эта решается точно таким же образом: взятием „проекции", которая приводит к серьезным искажениям лишь достаточно далеко от интересующей нас области. А именно, если мы назовем точку (0, 1, 0) северным полюсом, а антиподальную точку — южным, нам надо будет сначала, гладко растягивая некоторые части сферы и сжимая другие, передвинуть наши две окружности „вниз", к южному полюсу. Затем мы можем „распределить" подходящий кусок сферической поверхности

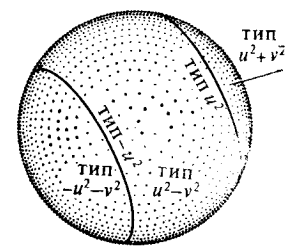


Рис. 2.10

вблизи южного полюса, не нарушая конфигурации окружностей.

Аналогичную операцию мы можем применить к трехмерной сфере кубик, „распрямив" ее в обычное трехмерное пространство. Это приводит к имеющей красивую форму поверхности, показанной на фото 1. Эту поверхность можно описать как „скрученную поверхность вращения" — результат движения гипоциклоиды с тремя остриями (рис. 2.11) вдоль окружности (в каждый момент окружность пересекает ортогонально плоскость гипоциклоиды в ее центре), причем по ходу движения гипоциклоида вращается в своей плоскости так, что успевает сделать треть полного оборота.

Различные типы кубик занимают определенные положения по отношению к этой поверхности. На фото 1 кубики типа (i) находятся внутри поверхности, типа (ii) — снаружи нее; кубики типа (iii) лежат на гладкой части поверхности, типа (iv) — на ее заостренном ребре. Эта геометрия согласуется с различными выводами, которые можно сделать на основании рис. 2.8. Так, типы (i) и (ii) разделяются между собой типом (iii) (вместе с типом (iv)). Небольшими изменениями тип (iii) можно перевести как в тип (i), так и в тип (ii). К типу (iv) сколько угодно близко „подходят" все остальные типы.

Зиман, первым изучивший эту поверхность, назвал ее *браслетом омбилик*; „омбилик" — от тех катастроф, которые связаны с кубиками, а „браслет" — от склонности его жены к украшениям. В статье Зимана [7] дается полное доказательство того, что картина, представленная на фото 1,

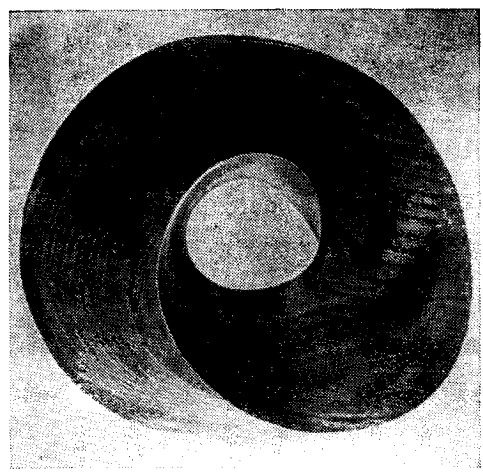


Фото 1. *Браслет омбилик, вырезанный из твердого клёна Тимом Постоном.*

точна, но для нас это неважно. Картина помогает *объяснить* некоторые из утверждений гл. 7, но *доказывать* их лучше более мощными методами. Геометрия браслета омбилик впервые существенным образом появляется при анализе восьмимерных катастроф, известных как *двойные сборки*.

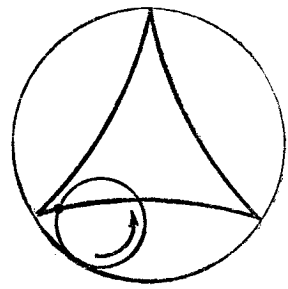


Рис. 2.11

7 Геометрия многочленов

Многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это выражение вида

$$p(x) = \sum \lambda_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

где i_j — положительные целые (или нуль), $\lambda_{i_1 \ldots i_n}$ — вещественные числа и общее число членов конечно. *Степенью* многочлена называется наибольшее среди чисел $i_1 + \ldots + i_n$, для которых $\lambda_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$. Если отличен от нуля только один какой-нибудь коэффициент, то $p(x)$ называется *одночленом*. *Алгебраическое множество* в $\mathbb{R}^n$ — это множество вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) = p_2(x) = \ldots = p_k(x) = 0\},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$. Например, *единичная сфера*

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

является алгебраическим множеством. *Полуалгебраическое множество* задается полиномиальными *не*равенствами $q_i \rho 0$, где ρ — любой из знаков $=, <, \leqslant, \geqslant, >$. Такие множества естественно возникают по следующей причине. Если функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задана при помощи многочленов q_i:

$$f(x) = (q_1(x), \ldots, q_m(x)),$$

и A — какое-нибудь алгебраическое множество в $\mathbb{R}^n$, то $f(A)$ не обязано быть алгебраическим множеством (возьмите $m = n = 1$, $f(x) = x^2$), но оно всегда *полу*алгебраично.

Здесь мы заинтересованы не столько в исследовании математических свойств алгебраических и полуалгебраических множеств (исторически это — исходная точка для очень глубокого предмета — алгебраической геометрии), сколько в том, чтобы научиться быстро и хорошо представлять себе их геометрию, особенно для $n \geqslant 4$, когда уже нельзя рисовать картинки (если не прибегать к специальным трюкам). Наиболее полезным методом является метод сечений. Мы не будем рассматривать здесь общий случай, а покажем действие метода на ряде отдельных примеров. По мере нашего продвижения вперед появится еще много других примеров.

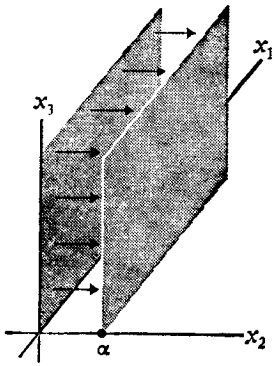


Рис. 2.12

Первые два примера относятся к $\mathbb{R}^3$, где мы сможем сравнивать сечения с самими объектами.

(1) Пусть $n=3$, $p(x)=x_1^3+x_1x_2+x_3$. Мы желаем представить себе множество

$$S=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid p(x)=0\}.$$

Фиксируем какое-либо значение x_2, скажем $x_2=\alpha$. Точка (x_1, α, x_3) принадлежит S, если и только если

$$x_1^3+\alpha x_1+x_3=0,$$

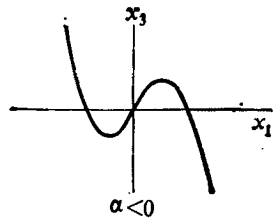
т. е.

$$x_3=-x_1^3-\alpha x_1. \tag{2.7}$$

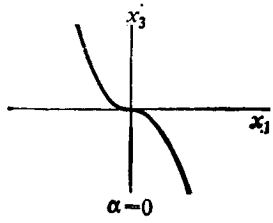
Можно рассматривать x_1, x_3 как систему координат в плоскости $x_2=\alpha$, спроектировав на нее плоскость x_1x_3 с помощью функции

$$(x_1, x_3)\longmapsto(x_1, \alpha, x_3)$$

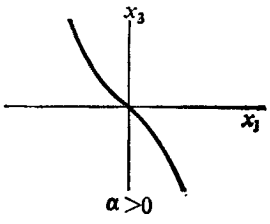
(см. рис. 2.12). Тогда для каждого выбора α уравнение (2.7) определяет кривую в плоскости α_1x_3. Форма этой кубической кривой зависит главным образом от знака α, и рис. 2.13 показывает три типичных случая. Мы „складываем" эти кривые в поверхность, заставляя α изменяться (рис. 2.14 (a)); ясно, что при этом получается поверхность с мягкой складкой, как это (с более плавными переходами) изображено на рис. 2.14 (b). С этой поверхностью мы встретимся много раз в приложениях теории катастроф.



(a)



(b)



(c)

Рис. 2.13

(2) Пусть $n=3$, $p(x)=x_2^2-x_1x_3$. Мы хотим представить себе множество

$$T=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid p(x)=0\}.$$

(С точностью до обозначений это то самое множество точек (a, b, c) с $b^2-ac=0$, которым мы занимались в § 5, где утверждалось, что это конус.)

На этот раз удобно сначала перейти к новым осям. Положим

$$u=(x_1+x_3)/\sqrt{2},$$
$$v=(x_1-x_3)/\sqrt{2},$$
$$w=\sqrt{2}\,x_2.$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$u^2-v^2=w^2,$$

т. е.

$$u^2=v^2+w^2.$$

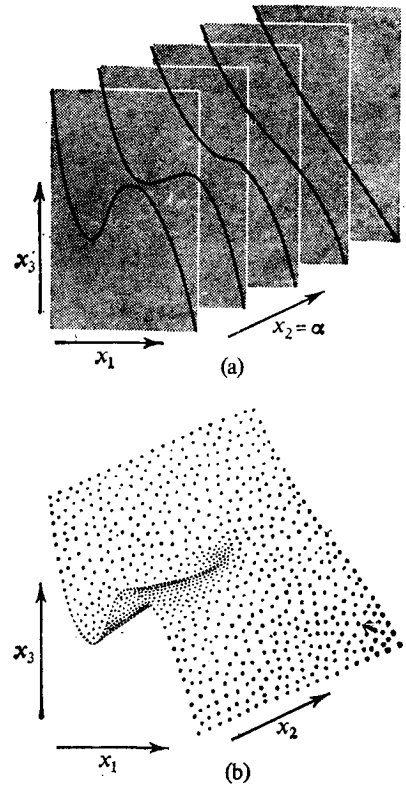


Рис. 2.14

Каждое сечение плоскостью $u=\alpha$, очевидно, дает окружность радиуса $|\alpha|$, и поскольку радиус линейно возрастает, при „сложении" сечений действительно получается конус, представленный на рис. 2.15. Преобразование координат, использованное нами, состоит в повороте плоскости x_1x_3 на 45° и растяжении с коэффициентом $\sqrt{2}$ в направлении оси x_2. Осью полученного конуса служит ось u:

$$0=v=w,$$

которая в исходных координатах задается уравнениями

$$x_2=0,\ x_1=x_3.$$

Поэтому наш двойной конус расположен в точности так, как показано на рис. 2.16. Заметьте, что из-за растяжения в направлении оси x_2 конус имеет эллиптическое, а не круговое поперечное сечение.

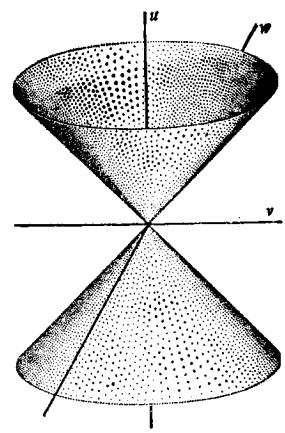


Рис. 2.15

(3) Пусть теперь $n=4$,

$$U=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2=1, \quad |x_3|\leqslant 2, \quad |x_4|\leqslant 1\};$$

на сей раз это — полуалгебраическое множество (почему?). Легко видеть, что для фиксированного значения $x_4=\alpha$ с

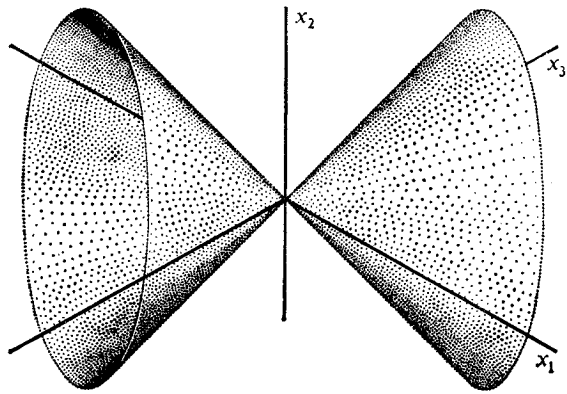


Рис. 2.16

$|\alpha|\leqslant 1$ сечением оказывается боковая поверхность цилиндра радиуса 1 и высоты 4. Это сечение не изменяется, пока $|\alpha|\leqslant 1$, а для других значений α оно пусто. Значит, можно сказать, что U — это „четырехмерный цилиндр" высоты 2, основанием которого служит упомянутая боковая поверхность цилиндра высоты 4.

(4) Пусть $n=4$ и

$$V=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0\}$$

— множество, хорошо знакомое тем, кто занимался теорией относительности! Для фиксированного $x_4=\alpha$ сечение задается уравнением

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\alpha^2;$$

это сфера радиуса $|\alpha|$. Так как радиус меняется линейно с α, множество V есть „двойной конус" над этой сферой, аналогичный двойному конусу из примера (2). Сферы „складываются стопкой" вдоль оси x_4, как показано на рис. 2.17.

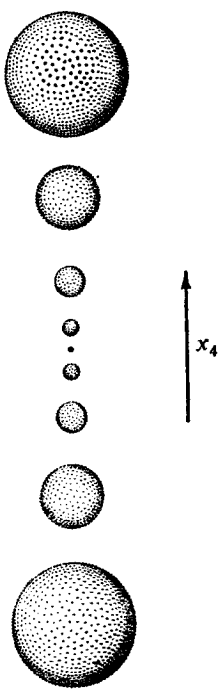


Рис. 2.17.

Чтобы научиться представлять себе множества в размерностях четыре и выше, требуется изрядно попрактиковаться, и наши примеры намного проще тех, что встретятся нам позднее; однако в настоящую минуту вряд ли будет полезным заниматься этим здесь дальше.

3 МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ

В этой главе мы изложим основные принципы дифференциального исчисления многих переменных, с подчеркнуто геометрической точки зрения. И на этот раз большинство читателей окажутся знакомыми с значительной частью материала в той или иной форме, однако скорее всего не в столь геометричной, как здесь. Мы предполагаем знание основ анализа функций одной переменной. Доказательства приводимых ниже результатов, как правило, опущены; их можно найти у Додсона и Постона [5] или у Спивака [8] (принятая в этих книгах точка зрения сходна с нашей) или во многих других стандартных руководствах.

Наиболее важный общий принцип, который выявляется в этой главе, состоит в том, что производная, понимаемая как наилучшее *линейное* приближение к данной функции, есть хорошо работающее приближение. Последующие главы дадут многократное подтверждение силы этого принципа.

1 Расстояние в эвклидовом пространстве

Наряду с линейной структурой $\mathbb{R}^n$ имеет метрическую структуру. Для x, y из $\mathbb{R}^n$ введем *норму* формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

и определим *расстояние* между x и y как

$$\|x - y\|.$$

Истоки этого определения лежат в теореме Пифагора. Это расстояние обладает основными свойствами, требуемыми от расстояния, а именно:

$$\|x\| \geqslant 0, \text{ причем } \|x\| = 0, \text{ если и только если } x = 0,$$
$$\|x - y\| = \|y - x\|,$$
$$\|x - y\| + \|y - z\| \geqslant \|x - z\|.$$

С помощью нормы мы можем распространить на многомерный случай такие понятия, как понятия предела и непре-

рывности, заменив обычное абсолютное значение $|x|$ в определениях для одномерного случая на норму $\|x\|$. Мы предполагаем, что читатель знаком с соответствующими одномерными определениями. В качестве примера распространения указанного рода определим понятие предела для многомерного случая. (За подробностями и геометрической интерпретацией отсылаем к Додсону и Постону [5].)

Пусть

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

— некоторая функция. Мы говорим, что $f(x)$ *стремится к пределу* λ *при* x, *стремящемся к* a, если для любого заданного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только $x\neq a$ и $\|x-a\|<\delta$, мы имеем $\|f(x)-\lambda\|<\varepsilon$. Иначе говоря, если x выбрать достаточно близким к a (но не совпадающим с a), то $f(x)$ можно сделать настолько близким к λ, насколько мы пожелаем. Мы пишем в этом случае

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lambda.$$

Функция f называется *непрерывной в* a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, и *непрерывной*, если это условие выполнено для всех $a\in\mathbb{R}^n$.

Непрерывность для нас будет менее важна, чем дифференцируемость, и именно при определении дифференцируемости мы в полную меру используем нормы; это определение более тонко и не получается автоматически переносом с одномерного случая.

Для последовательности (a_n) понятие предела при $n\to\infty$ определяется аналогичным образом. Далее, *бесконечный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называют *сходящимся*, если существует

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n;$$

в противном случае говорят, что он *расходится*.

Для $x\in\mathbb{R}^n$ и $r>0$ *открытый шар* с центром в x радиуса r определяется как множество

$$\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|x-y\|<r\}.$$

Подмножество $X\subset\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для каждого $x\in X$ существует открытый шар с центром в x, целиком лежащий в X. Подмножество Y называется *ок-*

рестностью точки x, если эта точка лежит в некотором открытом множестве X, содержащемся в Y. Говорят, что данное свойство выполнено *локально* в точке x (или *вблизи* x), если оно выполнено для всех точек y из некоторой окрестности x.

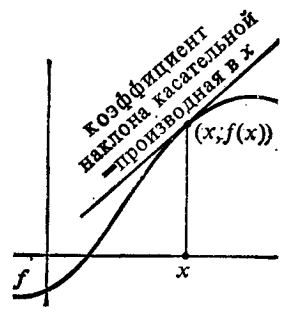


Рис. 3.1

2 Производная как касательная

В этом параграфе мы сосредоточим внимание на следующем вопросе: каким должно быть *разумное* и *полезное* определение производной от функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Напомним, что для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы определяем ее производную как функцию Df (иначе и более традиционно обозначаемую через df/dx), для которой

$$Df|_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{3.1}$$

при условии, что предел существует. (Мы пишем здесь $Df|_x$ вместо $Df(x)$, так как эта запись приводит к более ясным последующим обозначениям.) Однако это определение не переносится непосредственно на многомерный случай. Прежде всего заметим, что x и h берутся из $\mathbb{R}^n$, а $f(x)$ и $f(x+h)$ лежат $\mathbb{R}^m$ и правая часть (3.1) потребовала бы от нас умения делить вектор из $\mathbb{R}^n$ на вектор из $\mathbb{R}^m$, чего нельзя сделать никаким осмысленным образом. Даже если бы нам и удалось как-то с этим справиться, предел всё равно мог бы не существовать даже в случаях, где производная заведомо должна существовать,— всё зависит от направления, по которому h приближается к 0. Например, пусть

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

Тогда

$$\frac{f((x_1 x_2) + (0, h)) - f(x_1, x_2)}{h} = 2 \text{ для всех } h,$$
$$\frac{f((x_1, x_2) + (h, 0)) - f(x_1, x_2)}{h} = 1 \text{ для всех } h.$$

Это означает, что предел должен был бы равняться одновременно 1 и 2 — явная чепуха.

Вместо того чтобы пытаться обобщить формулу (3.1), вернемся к основам. Геометрически значение Df в точке x выражает наклон касательной к графику f в точке $(x, f(x))$ (рис. 3.1). Полезно временно перенести начало координат в точку $(x, f(x))$, поскольку тогда касательная будет графиком *линейной* функции λ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как прямая, проходя-

щая через начало. Фактически касательная дает *наилучшее линейное приближение* к f. Измерить, насколько хорошо приближение, можно, сравнив

$$f(x+h) \text{ и } f(x)+\lambda(h)$$

для малых h (см. рис. 3.1). Оказывается, всё, что нужно, это чтобы

$$|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)|$$

стремилось к 0 *быстрее*, чем h (мотивировка — рис. 3.3, который мы обсудим в свое время); иначе говоря, ошибка в приближении $f(x+h)$ с помощью $f(x)+\lambda(x)$ должна быть «меньшего порядка, чем h». Точнее, надо, чтобы

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)|}{|h|} \to 0$$

при $h \to 0$.

Рассмотрим теперь функцию f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Мы можем нарисовать ее график в $\mathbb{R}^3$; он выглядит как рельеф местности, как на рис. 3.2. Если этот график достаточно „гладок" в точке $(x, f(x))$, то в этой точке будет существовать касательная плоскость к нему. Снова (после переноса начала) эта плоскость служит графиком некоторого *линейного* отображения λ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, и ее касательность выражается в том факте, что

$$\|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)\|$$

стремится к нулю быстрее, чем h, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)\|}{\|h\|} \right) = 0. \tag{3.2}$$

Теперь должно быть ясно, как нужно обобщить эту формулировку на случай более высоких размерностей: надо найти линейное отображение, наилучшим образом аппрок-

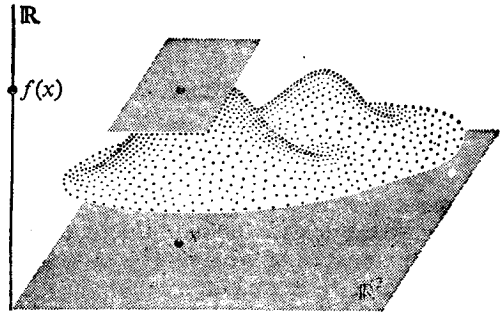


Рис. 3.2

симирующее рассматриваемую функцию (геометрически оно отвечает касательной гиперплоскости), причем в качестве определения „наилучшей аппроксимации" использовать (3.2).

Итак, мы говорим, что функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема* в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если существует линейное отображение λ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, для которого

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\| f(x+h) - f(x) - \lambda(h) \|}{\| h \|} \right) = 0. \tag{3.3}$$

Если такое линейное отображение λ существует, то оно единственно (мы отложим ненадолго доказательство этого факта). Мы называем его *производной* f в x и пишем

$$Df|_x = \lambda.$$

Покажем прежде всего, как переинтерпретировать на этом языке понятие обычной производной. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет производную $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и пусть для фиксированного x

$$f'(x) = \lambda.$$

Мы утверждаем, что отображение $h \longmapsto \lambda h$ есть производная в точке x в новом смысле. Действительно,

$$\frac{| f(x+h) - f(x) - \lambda h |}{| h |} = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lambda \right|,$$

и так как $(f(x+h) - f(x))/h \to \lambda$ при $h \to 0$, то и всё это выражение стремится к нулю, как и требуется.

Другими словами: каждое линейное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет вид $x \longmapsto \mu x$ для соответствующего $\mu \in \mathbb{R}$, и значение μ, отвечающее производной в нашем новом смысле, и есть как раз *значение* производной f' в x (в старом смысле). Лишь благодаря тому совпадению, что линейные отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ естественно отвечают вещественным числам, можем мы заменять линейное отображение $x \longmapsto \mu x$ вещественным числом μ.

Следующее понятие облегчает обращение со всеми этими вещами. Будем говорить, что $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет *меньший порядок, чем* h, и писать

$$g = o(h),$$

если

$$\| g(h) \| / \| h \| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Формулу (3.3) из определения производной можно тогда записать в эквивалентном виде

$$f(x+h) - f(x) - \lambda(h) = o(h). \tag{3.4}$$

Это надо представлять себе так:

$$\underbrace{(f(x+h)-f(x))}_{\substack{\text{изменение } f \\ \text{вблизи } x}} - \underbrace{\lambda(h)}_{\substack{\text{изменение линейного} \\ \text{отображения вблизи } x}} = \underbrace{o(h)}_{\substack{\text{лучше, чем} \\ \text{что-либо} \\ \text{линейное по } h.}}$$

насколько хорошим приближением является λ?

Если p и q — такие функции, что $p=o(h)$, $q=o(h)$, и если α, $\beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha p+\beta q=o(h)$. Используя этот факт, мы можем теперь доказать единственность производной. Допустим, что наряду с (3.4) выполняется соотношение

$$f(x+h)-f(x)-\mu(h)=o(h).$$

Вычитая его из (3.4), получим

$$\lambda(h)-\mu(h)=o(h).$$

Но ясно, что линейное отображение, являющееся $o(h)$, должно быть нулевым. Действительно, пусть θ линейно и $\theta=o(h)$. Тогда для любого фиксированного h

$$\|\theta(th)\|/\|th\| \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

т. е.

$$|t|\,\|\theta(h)\|/|t|\,\|h\| \to 0,$$

или

$$\|\theta(h)\|/\|h\| \to 0.$$

Но h фиксировано, значит, $\theta(h)=0$. Следовательно, $\theta=0$.

Так как отображение $\lambda-\mu$ линейно и является $o(h)$, то по доказанному $\lambda-\mu=0$, т. е. $\lambda=\mu$. Тем самым единственность доказана.

Геометрически ясно (из рассмотрения подобных треугольников), что разность между двумя различными гиперплоскостями не может быть $o(h)$. Это иллюстрируется рис. 3.3.

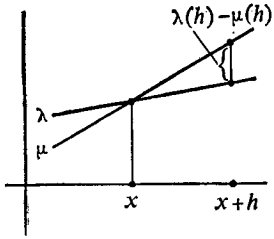


Рис. 3.3

Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема*, если она дифференцируема в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Ее *производной* назовем функцию Df, значение которой $Df|_x$ в точке x есть линейное отображение, определенное выше. Если обозначить через

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

множество всех линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, то мы имеем

$$Df: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Это показывает, что Df — достаточно сложный объект. В случае $n=m=1$ мы можем отождествить $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с $\mathbb{R}$ и считать, что $Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Но в общем случае Df *не* является отображением $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Таковым и вдобавок линейным является его *значение* $Df|_x$ в каждой точке x.

Для операции взятия производной справедлив ряд стандартных правил, которые мы приведем здесь без доказательства. Доказательства можно найти у Спивака [8].

(a) Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ постоянна, то $Df|_x = 0$.

(b) Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейна, то $Df|_x = f$ для всех x.

(c) Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задана как $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, то она дифференцируема, если и только если дифференцируема каждая из функций f_i, и в этом случае

$$Df|_x = (Df_1|_x, \ldots, Df_m|_x).$$

(d) Если $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$D(f+g)|_x = Df|_x + Df|_x,$$
$$D(\lambda f)|_x = \lambda Df|_x.$$

(e) Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в x, а $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ дифференцируема в $f(x)$, то композиция $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (определяемая формулой $g \circ f(x) = g(f(x))$ также дифференцируема в x и

$$Dg \circ f|_x = Dg|_{f(x)} \circ Df|_x.$$

Эта формула называется *цепным правилом* (в „классическом“ дифференциальном исчислении его обычно именуют „правилом дифференцирования сложной функции“).

Имеются также правила дифференцирования произведения или частного для функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которые аналогичны обычным правилам для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3 Горизонтали

Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ часто можно наглядно представить с помощью ее *горизонталей* — множеств

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$$

для всевозможных выборов констант $c \in \mathbb{R}$. Эти множества (на практике, конечно, лишь подходящая выборка из них) доставляют нам информацию о графике функции f точно так же, как горизонтали (линии уровня) на географической карте рассказывают о рельефе земной поверхности; график получается „складыванием“ горизонталей, как это было

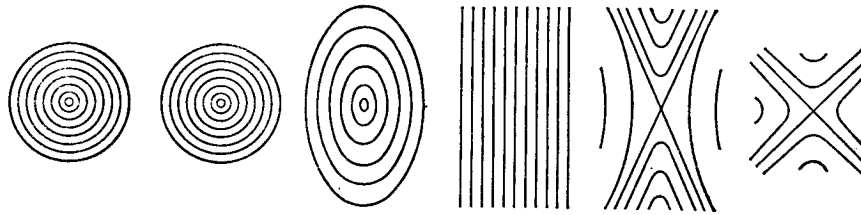


Рис. 3.4

описано в § 7 гл. 2. На рис. 3.4 представлены линии уровня для шести функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, с которыми мы вновь встретимся в гл. 11.

Если f линейна и отлична от нуля, ее горизонтали параллельны, „прямы" и имеют размерность $n-1$. Для гладкой функции f горизонтали ее производной Df в данной точке наилучшим образом среди всех „прямых" и равномерно распределенных горизонталей приближают горизонтали f вблизи этой точки (рис. 3.5).

4 Частные производные

Для $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ предел

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \right),$$

если он существует, называется *частной производной* f в

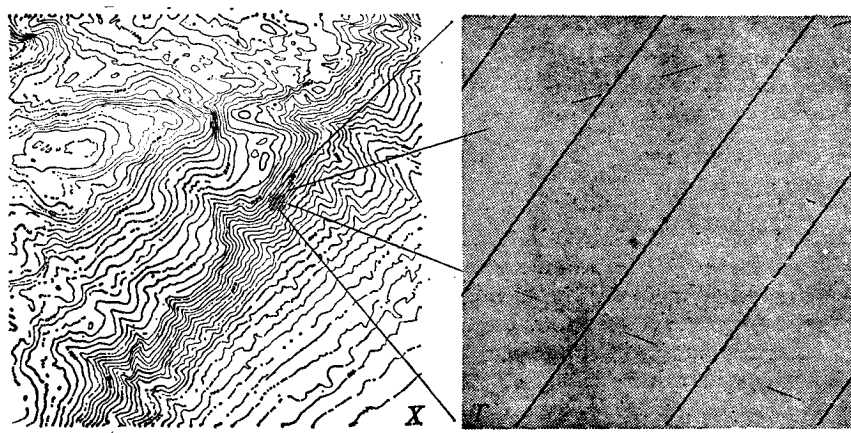


Рис. 3.5

точке x по x_i и обозначается через

$$D_i f|_x$$

либо, более традиционно, через

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

(символ x_i используется в двух различных смыслах!). Эта частная производная равна обычной производной от функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенной условием

$$g(y) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

в точке $y = x_i$. Здесь все другие переменные x_j, $j \neq i$, рассматриваются просто как константы. Отсюда вытекает, что $D_i f|_x$ есть наклон касательной к графику f, проведенной в направлении оси x_i; эта касательная совпадает с прямой, по которой касательная гиперплоскость к графику f пересекает координатную плоскость, задаваемую уравнениями $x_j = \text{const}$ $(j \neq i)$ (см. рис. 3.6).

Значение частных производных состоит в том, что они доставляют явные выражения для производной в стандартных координатах. А именно, если $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в x, то $D_i f_j|_x$ существует для всех i, j и $Df|_x$ имеет в стандартных координатах для $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ матрицу

$$[D_i f_j|_x], \quad \text{или} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x\right].$$

Здесь, как обычно, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

Например, пусть

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y) = (x^2 + y^2, e^x, y).$$

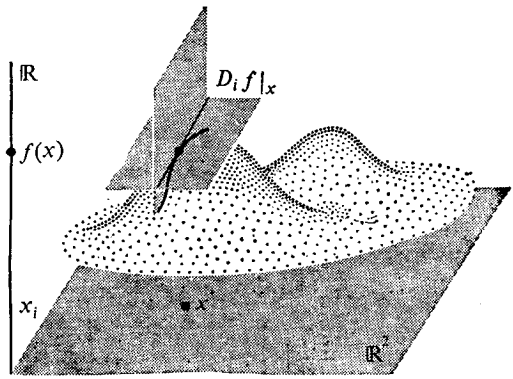


Рис. 3.6

Тогда

$$f_1(x, y)=x^2+y^2, \qquad f_2(x, y)=e^x, \qquad f_3(x, y)=y$$

и

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}=e^x, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}=1.$$

Значит,

$$Df|_{(x,\ y)}=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что $Df|_x$ существует, если все $\partial f_j/\partial x_i$ существуют и непрерывны (обратное утверждение, вообще говоря, неверно). Такая функция f называется *непрерывно дифференцируемой*.

5 Высшие производные

Допустим, что функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема. Рассмотрим ее производную

$$Df: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

где $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Каждый элемент из $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ задается матрицей размера $n\times m$, и, выписывая элементы этих матриц в каком-нибудь фиксированном порядке, мы можем отождествить $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ с $\mathbb{R}^{nm}$. Таким образом, на Df можно смотреть как на отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{nm}$. Это отображение может быть, а может и не быть дифференцируемым. Если оно дифференцируемо, то для всех $x\in\mathbb{R}^n$ существует $D(Df)|_x$ и в этом случае мы говорим, что функция f *дважды дифференцируема*, и пишем

$$D^2f|_x=D(Df)|_x.$$

Для каждой точки $x\in\mathbb{R}^n$ *вторая производная* $D^2f|_x$ в этой точке есть линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Это довольно сложное понятие можно интерпретировать с помощью координат. Пусть $x\in(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))\in\mathbb{R}^m$. Тогда мы имеем матрицу

$$Df|_x=\left[\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_x\right].$$

Значит, в стандартных координатах Df задается равенством $Df=g$, где

$$g(x)=[g_{ji}(x)],\ g_{ji}(x)=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_x.$$

Но $Dg|_x$ имеет матрицу

$$\left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\Big|_x\right]$$

и

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\Big|_x=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_x=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}\Big|_x.$$

Таким образом, матрица D^2f состоит из всех вторых частных производных от координатных функций f_j. Не удивительно, что определение получается довольно-таки сложное!

В наиболее интересном для нас случае отображений $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ вторая производная представляется *матрицей Гессе* (или *гессианом*)

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\Big|_x\right].$$

В общем и целом, явное описание третьей производной нам не потребуется. Однако мы часто будем делать предположение, что интересующие нас функции являются *гладкими*, т. е. обладают производными любого порядка. В координатах это означает, что их частные производные любого порядка существуют (и непрерывны).

Если у функции f существуют и непрерывны частные производные до порядка r включительно, то мы говорим, что она *r раз дифференцируема* или что она принадлежит к *классу* C^r. Гладкие функции принадлежат к классу C^∞. Иногда мы будем ослаблять условие дифференцируемости до *кусочной* дифференцируемости, когда функцию можно представить в виде суммы конечного числа функций, каждая из которых определена на своей области и там дифференцируема.

6 Ряд Тейлора

Одна из стандартных математических процедур состоит в том, что берут гладкую функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и разлагают ее в *ряд Тейлора*

$$f(x_0+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots \tag{3.5}$$

в данной точке x_0. По традиции представление этим рядом считается полезным только в случае, когда он сходится в некоторой окрестности U точки x_0 и сумма его там равна

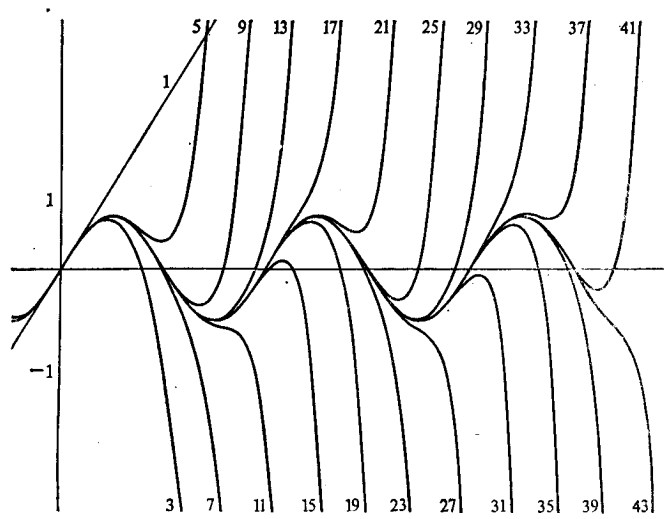


Рис. 3.7. *Ряд последовательных струй функции* sin (x). *(Машинные графики любезно предоставлены Х. Р. П. Фергусоном из Университета Бригэма Янга* (BYU), *Прово, Юта.)*

$f(x_0+x)$. В этом случае функция f называется *аналитической* в x_0. Ряд можно тогда почленно дифференцировать в некоторой (возможно, меньшей) окрестности V точки x_0, и отсюда вытекает, что его коэффициенты a_r задаются формулой

$$a_r = \frac{1}{r!} D^r f|_{x_0}.$$

Даже если f и не является аналитической, эту формулу можно использовать для задания формального ряда Тейлора функции f, но, конечно, у нас больше нет гарантии сходимости полученного ряда, а если он и сходится, то нельзя быть уверенным, что к f.

К примеру, функция sin (x) аналитична, и ее ряд Тейлора в начале, как хорошо известно, выглядит так:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

На рис. 3.7 показаны графики полиномиальных функций, которые получаются, если ограничиться первыми n членами ряда, для $n \leqslant 43$. Из этого рисунка отчетливо виден *характер* сходимости ряда Тейлора. Даже при очень большом числе членов приближение очень плохо вдали от начала; с другой стороны, вблизи начала приближение очень хорошее. С ростом числа членов увеличивается и точность приближения, и интервал, на котором эта точность достигается.

Не всегда ясно осознается то обстоятельство, что для гладких функций ряд Тейлора может расходиться или мо-

жет сходиться, но не к той сумме. Например, положим

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x=0,\\ e^{-1/x^2} \text{ при } x\neq 0\end{cases}$$

(см. рис. 3.8). Легко проверяется, что для всех n

$$\lim_{x\to 0} D^n f|_x = 0,$$

откуда следует, что функция f гладкая (иными словами, склеивание по значению 0 в начале не нарушает гладкости, поскольку функция e^{-1/x^2} очень „плоская" вблизи начала). Но

$$D^n f|_0 = 0$$

для всех n, и ряд Тейлора для f в начале имеет вид

$$0+0x+0x^2+0x^3+\ldots .$$

Он, конечно, сходится, но не к f.

Одна теорема Бореля (см. Брёкер и Ландер [9], стр. 44) показывает, что дело может обстоять еще хуже. Именно, для *любой* последовательности вещественных чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots$ можно построить гладкую функцию $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой рядом Тейлора в нуле служит

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots .$$

Нетрудно выбрать b_r так, чтобы этот ряд расходился для всех $x\neq 0$; например, годится $b_r=r!$

В прикладной математике или в физике ряды Тейлора обычно использовались для получения приближений к f, и неудивительно, что особое значение придавалось *аналитичности*.

В действительности аналитичность не является ни необходимой, ни достаточной для справедливости таких приближений, если иметь в виду те приложения, ради которых они используются. Аналитичность была переоценена, и обращению в нуль остаточного члена

$$R_k = f(x_0+x)-(a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k)$$

в пределе при k, стремящемся к ∞, уделяли чересчур много внимания; по остроумному выражению Зимана, было дозволено, чтобы хвост (ряда Тейлора) вилял собакой[1].

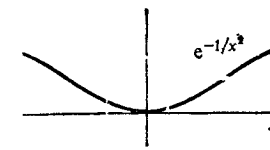


Рис. 3.8

[1] А не собака хвостом. В оригинале: „allowing the tail of the Taylor series to wag the dog" — обыгрывается еще сходство звучания слов tail (хвост) и Taylor.— *Прим. перев.*

Например, выписанный нами выше ряд Тейлора $0+0x+0x^2+\ldots$, хотя он и не сходится к $f(x)$, прекрасно приближает эту функцию в начале с качественной точки зрения. Он четко улавливает то, что f *очень плоская* в нуле. Чего он *не* улавливает, так это того, что начало есть локальный минимум для f; действительно, функция $-f$ имеет в 0 тот же самый ряд Тейлора, но локальный максимум.

Для любой гладкой функции f мы определяем ее *ряд Тейлора* в начале как *формальный* степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} D^r f|_0 \cdot x^r.$$

Ограничиваясь членами степени не выше k, мы получаем *k-струю*

$$j^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} D^r f|_0 \cdot x^r.$$

(При строгом изложении теории это название закрепляется за несколько более абстрактным понятием, которое определяется бескоординатным образом и для которого введенное нами понятие служит координатным выражением. Это вносит гармонию строгости в мелодическую игру координат, которой занимается теория, но поскольку мы опускаем все более или менее глубокие доказательства, можно не гнаться за полной строгостью.)

Эти усеченные ряды представляют собой многочлены, задающие вполне „добропорядочные" полиномиальные функции

$$j^k f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

независимо от того, сходится или не сходится ряд Тейлора. Далее, они содержат определенную информацию об f. Будем говорить, что функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в начале *порядок k*, если

$$0 = g(0) = Dg|_0 = \ldots = D^{k-1} g|_0.$$

(Условимся отдельно, что константы имеют порядок нуль.) Символ $O(k)$, который следует отличать от $o(h)$, всюду в дальнейшем означает „некоторая функция порядка k".

Ясно, что $j^k f$ — это единственный многочлен степени $\leqslant k$, для которого $f - j^k f$ имеет порядок $k+1$. Другими словами, *r-е производные* в 0 у f и $j^k f$ *совпадают для* $r=0, 1, 2, \ldots, k$. Тем самым ряд Тейлора и его усечения оказываются удобным формальным средством для получения ин-

формации о производных функции f и, значит, о ее форме вблизи начала. Иной раз нам придется изучать f вблизи точки $y \neq 0$, тогда мы будем писать $j^k_y f$ для *k-струи f в y*, т. е. k-струи функции $x \mapsto f(y+x)$.

Заметим, что для многочлена *порядок* — это наинизшая степень, с которой в него входят переменные, а *степень* — наивысшая.

Более общим образом, ряд Тейлора можно определить для любой гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В бескоординатной форме он записывается так:

$$f(x_0) + Df|_{x_0} + \ldots + \frac{1}{r!} D^r f|_{x_0}(x, \ldots, x) + \ldots;$$

в r-м члене x появляется r раз. Для аналитической функции f этот ряд сходится к $f(x_0+x)$ в некоторой окрестности x_0.

Переключимся теперь на координатный язык и ради простоты положим $m=1$ (единственный нужный нам случай), так что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда

$$x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}),$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

и r-й член ряда Тейлора имеет вид

$$\frac{1}{r!} \sum \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}\Big|_{x_0} x_{i_1} \ldots x_{i_r};$$

здесь сумма берется по всем последовательностям $i_1, \ldots, i_r$, таким что $0 \leqslant i_j \leqslant n$ для каждого j. Например, если $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_0 = (0, 0)$, то начальные члены ряда Тейлора таковы:

$$f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0 y \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_0 x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\Big|_0 xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\Big|_0 yx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_0 y^2 \right) + \ldots .$$

Струи $j^k_{x_0} f$ и $j^k f = j^k_0 f$ получаются, как и выше, усечением ряда, и их частные производные совпадают с частными производными f. „Хвост“ $f - j^k f$ ряда Тейлора имеет в начале нулевые производные вплоть до k-го порядка. Мы так часто будем обращаться к этому выражению, что введем для него сокращенное обозначение „тейл“ [1].

[1] В оригинале Tayl — „среднее“ между tail (хвост) и Taylor (Тейлор). — *Прим. перев.*

7 Усеченная алгебра

Имея дело со струями, часто приходится производить "усеченные" алгебраические операции. Для данного многочлена $p(x)$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, мы назовем его *усечением до степени* k (включительно) многочлен, образованный всеми членами $p(x)$, степени которых равны или меньше k. Это усечение будем обозначать через

$$\overline{p(x)}^k.$$

Например,

$$\overline{3x-2y+7xy-9x^3+43x^7y^2}^2 = 3x-2y+7xy,$$

$$\overline{3x-2y+7xy-9x^3+43x^7y^2}^3 = 3x-2y+7xy-9x^3.$$

Фактически

$$\overline{p(x)}^k = j^k p(x),$$

но новое обозначение подчеркивает более алгебраическую точку зрения.

Фиксируем какое-нибудь значение k, и пусть p и q — производные многочлены. Тогда, конечно,

$$\overline{p+q}^k = \overline{p}^k + \overline{q}^k.$$

Для произведений соответствующая формула выглядит чуть посложнее:

$$\overline{pq}^k = \overline{\overline{p}^k \overline{q}^k}^k,$$

поскольку произведение членов степеней, меньших чем k, может оказаться членом степени, большей k. Из этих формул вытекает, что, работая „с точностью" до фиксированной степени k, мы можем усекать и производить алгебраические операции в любом удобном для нас порядке, не нарушая результата. На деле всегда легко увидеть, какие члены в произведении будут иметь слишком большую степень, и игнорировать их.

Мы можем также *подставлять* один усеченный многочлен в другой, если только мы усекаем результат до той же степени. Так, усекая до степени 2, имеем для $p(x)=1-2x+3x^2$ и $q(x)=3x+x^2$

$$\overline{p(q(x))}^2 = \overline{1-2(3x+x^2)+3(3x+x^2)^2}^2 = 1-6x+25x^2.$$

На языке усечений обозначений мы можем кратко и выразительно записать, как ведут себя k-струи по отношению

к операциям взятия суммы, произведения и композиции (струйный аналог цепного правила):

$$j^k(f+g) = j^k f + j^k g,$$
$$j^k(fg) = \overline{j^k f \cdot j^k g}^k,$$
$$j^k(f \circ g) = \overline{j^k f \circ j^k g}^k.$$

8 Теорема об обратной функции

В последующем мы существенно будем использовать замены координат, и важно ограничить допускаемый тип замен, так чтобы при заменах терялась важная для нас информация. Мы потребуем, чтобы замены были *обратимы* и *гладки* (и чтобы обратная замена тоже была гладкой). Специалисты используют в такой ситуации термин „диффеоморфизм", и так как он повсеместно встречается в литературе, мы также иногда будем им пользоваться.

Все, что выше говорилось для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, можно дословно повторить для случая отображений $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Это позволяет работать локально и избежать некоторых глобальных вопросов. Пусть U и V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, и пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$, причем $f(U) = V$. Функция f называется *диффеоморфизмом*, если

(a) она гладка;
(b) для нее существует обратная функция $g : V \to \mathbb{R}^n$, т. е. $f \circ g = 1_V$, $g \circ f = 1_U$;
(c) g гладка.

Например, если U — множество вещественных чисел, больших нуля, и

$$f(x) = x^2,$$

то мы можем положить

$$g(x) = \sqrt{x}$$

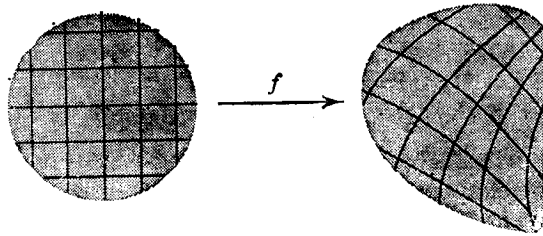


Рис. 3.9

и $V=U$. Однако если заменить U на $\mathbb{R}$, то f уже не будет диффеоморфизмом, потому что обратное отображение не может быть определено на всём $\mathbb{R}$. Несколько более тонок случай $U=V=\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^3.$$

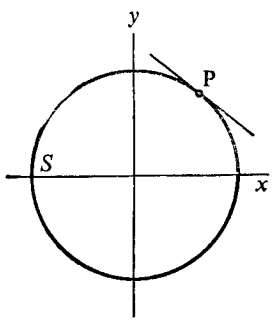
Здесь *можно* найти обратное отображение:

$$g(x)=\sqrt[3]{x},$$

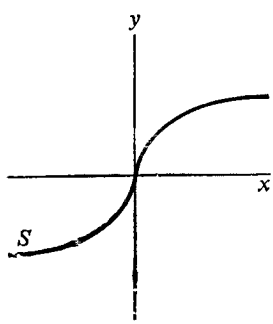
но оно не гладкое, а именно не существует $Dg|_0$.

Геометрически действие диффеоморфизма состоит в плавном изгибании координат, как показано на рис. 3.9. Таким образом, если $h: U\to\mathbb{R}^m$ гладко и $f: U\to U$ — диффеоморфизм, то композиция $h\circ f$ получается из h некоторой гладкой локальной заменой переменных („локальный" в данном случае означает „внутри U").

Более общо, *локальный диффеоморфизм* в точке x — это отображение, ограничение которого на некоторое открытое множество, содержащее x, есть диффеоморфизм на его образ. Имеется простой и полезный признак для проверки этого свойства, известный как теорема об обратной функции.



(a)



(b)

Рис. 3.10

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема об обратной функции). *Пусть $f: U\to\mathbb{R}^m$ — гладкое отображение и $x\in U$. Если линейное отображение $Df|_x$ невырожденно, то f есть локальный диффеоморфизм в x.*

Таким образом, мы можем проверить, является ли отображение локальным диффеоморфизмом, вычислив соответствующую производную. Заметим, что $Df|_x$ невырожденно, если и только если *якобиан*

$$Jf|_x=\det Df|_x\neq 0.$$

9 Теорема о неявной функции

Очень близок к теореме об обратной функции результат, называемый теоремой о неявной функции. Он утверждает, что если „плоское" приближение (касательная прямая, плоскость, гиперплоскость) к множеству S решений уравнения

$$f(x, y)=0$$

служит графиком некоторой *функции*

$$y=y(x),$$

то локально и само множество S служит графиком некоторой функции. Это верно для конечных размерностей перемен-

ных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Например, на рис. 3.10(*a*) представлен случай, когда

$$f(x, y)=x^2+y^2-1$$

и, значит, S есть окружность. Касательная в точке P является графиком функции, следовательно, графиком является и S вблизи P. А именно, локально S служит графиком функции

$$y=+\sqrt{1-x^2}.$$

Касательные в точках (1,0) и (—1,0) не являются графиками; также и S не является графиком вблизи этих точек.

Однако, даже если указанное условие не выполнено, S все-таки *может* локально быть графиком. Пусть

$$f(x, y)=x-y^3.$$

Соответствующее множество S показано на рис. 3.10(b), оно служит графиком функции $y=\sqrt[3]{x}$. Но поскольку касательная вертикальна, оно не является графиком *дифференцируемой* функции.

Мы можем уточнить: если f гладка и упомянутая касательная есть график, то и функция $y(x)$, о существовании которой говорит нам теорема о неявной функции, также гладка вблизи соответствующей точки.

На более формальном языке теорема звучит так:

ТЕОРЕМА 3.2 (теорема о неявной функции). *Если функция* $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *гладка и для точки* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *множество*

$$\{(x, y) \mid Df|_{(\bar{x}, \bar{y})}(x, y)=0\}$$

служит графиком некоторой функции $y=y(x)$, *то и*

$$\{(x, y) \mid f(x, y)=f(\bar{x}, \bar{y})\}$$

является локально графиком некоторой гладкой функции

$$y=\bar{y}(x).$$

Эта теорема служит основанием правила неявного дифференцирования и имеет ключевое значение при рассмотрении всякого рода систем со связями (связь представляется уравнением $f(x, y)=0$). Она в точности настолько же глубока, как и теорема об обратном отображении, каждая из них является простым следствием другой; какую предпочесть в качестве отправной точки — дело вкуса.

4 КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Как в физических, так и в математических приложениях важной характеристикой гладкой вещественной функции является наличие у нее „критических точек", в которых производная обращается в нуль. Наиболее распространенные типы критических точек для гладкой функции — это (локальные) максимумы и минимумы. Но иногда встречаются и более сложные вещи — „точки перегиба", а при более пристальном изучении эти три сорта точек подразделяются на целую серию типов. Для двух и более переменных задача существенно осложняется благодаря широкому диапазону новых геометрических возможностей.

Один из главных математических источников теории катастроф — классификация типов критических точек. В данной главе мы начнем изучение этой проблемы, доказав лемму Морса, которая классифицирует „хорошие" критические точки для любого числа переменных, и распространив затем полученную классификацию на „поганые" критические точки для случая одной переменной. Эти два математических побега сразу же принесут нам свои плоды, а позже разовьют столь мощную корневую систему, пронизывающую всю Землю математики, что позволят нам достичь звезд.

Обобщая доказательство леммы Морса, мы получим важную *лемму о расщеплении*, с помощью которой можно при некоторых обстоятельствах существенно понижать число переменных в рассматриваемой задаче. Как уже отмечалось в предисловии, этот результат кажется некоторым ученым наиболее удивительным во всей теории; однако его доказательство не требует привлечения никаких глубоких методов, развитых для теории катастроф, и является всего лишь упражнением повышенной сложности из элементарного анализа.

Морсовские критические точки обладают важным свойством устойчивости, которое интуитивно можно выразить словами „сохранение типа при малых возмущениях". Это свойство можно трактовать чисто алгебраически, но оно становится яснее, если его переформулировать как некоторое

геометрическое свойство трансверсальности. Это приводит нас к общему обсуждению понятия трансверсальности, которое вводится сначала для векторных пространств, а затем переносится на гладкие многообразия. Мы заканчиваем главу исследованием понятия коразмерности, введенного в гл. 2, и его связи с трансверсальностью.

Тип классификации критических точек, который мы получим в этой главе, мотивирует и освещает бóльшую часть нашего дальнейшего пути. В частности, делается понятной важность разложений Тейлора. Вся вычислительная сторона теории катастроф, которой мы будем заниматься в гл. 8, имеет целью научиться управляться с этими задачами. Ряд примеров настоящей главы показывает, что поведение разложений Тейлора становится гораздо более сложным для функций двух или более переменных — собственно, нас ждут ошарашивающие неожиданности,— и дело отнюдь не сводится к простому обобщению одномерного случая. Понимание этих проблем требует большего, чем знание алгебраического формализма рядов Тейлора, и оно в достаточной степени не связано с вопросами сходимости; ключ к пониманию лежит в геометрической постановке задачи, с использованием соображений трансверсальности.

1 Критические точки

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Точка $u \in \mathbb{R}^n$ называется *критической точкой* для f, если

$$Df|_u = 0,$$

или, в координатах,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_u = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_u = 0.$$

Значение $f(u)$ в критической точке u называется *критическим значением* f.

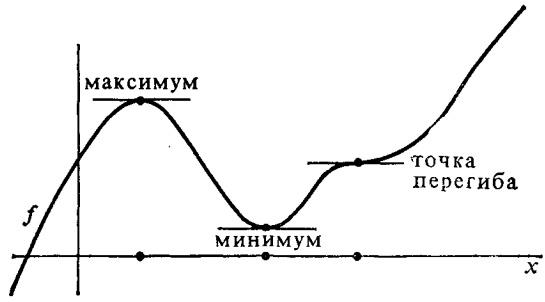


Рис. 4.1

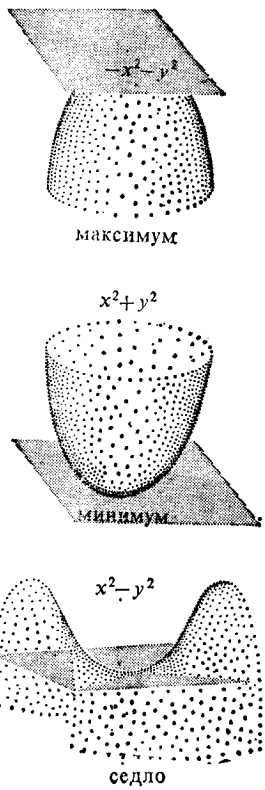
Критические точки — это те точки, где график функции имеет горизонтальную касательную. В случае $n=1$ эти точки традиционным образом классифицируются как (локальные) *максимумы*, *минимумы* и *точки перегиба* (рис. 4.1). Вскоре станет ясно, что требуется более тонкая квалификация. Для $n=2$, т. е. для функций $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, возможностей много больше. Наиболее распространенными случаями являются (локальные) *максимумы*, *минимумы* и *седла*. Соответствующими примерами служат

$$f(x, y)=-x^2-y^2,\ x^2+y^2,\ x^2-y^2$$

в начале координат (рис. 4.2). Однако имеется целое множество других, более сложных типов, три из которых, отвечающие функциям

$$f(x, y)=x^3-3xy^2,\ x^2,\ x^2y^2$$

и известные как *обезьянье седло*, *желоб* [1] и *скрещенные желоба*, показаны на рис. 4.3.



Гис. 4.2

Из них обезьянье седло еще не слишком плохо в том смысле, что критическая точка в начале изолирована: в непосредственной близости от нее нет других критических точек. Для двух других начало уже не является изолированной критической точкой: оно лежит соответственно на одной или на двух прямых, состоящих из критических точек. Неизолированные критические точки особенно неприятны, но в некотором достаточно сильном смысле слова они нетипичны (см. гл. 8, § 7), и во многих вопросах их можно игнорировать.

Наиболее важно различение критических точек по следующему принципу. Скажем , что f имеет в *и невырожденную* критическую точку, если $Df|_a=0$ и $D^2f|_a$ представляет собой невырожденную квадратичную форму (т. е. ее ранг равен числу переменных n). Эквивалентные формулировки: *матрица Гессе*

$$Hf|_a=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\bigg|_a\right]$$

невырожденна; ее определитель

$$\det(Hf|_a)\neq 0.$$

Например, для $f(x, y)=x^2+y^2$ матрица Гессе

$$Hf|_0=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

[1] В оригинале pig-trough (корыто для свиней).— *Прим. ред.*

— невырожденная (с определителем 4), а для $f(x, y)=x^3-3xy^2$

$$Hf|_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

— явным образом вырожденная матрица! В действительности все функции на рис. 4.2 имеют невырожденные критические точки, а на рис. 4.3 — *вырожденные* критические точки. Из дальнейших наших результатов будет следовать, что невырожденные критические точки изолированы, хотя обратное и не обязательно верно (как показывает пример обезьяньего седла).

2 Лемма Морса

Теперь мы покажем, что вблизи невырожденной критической точки функцию f можно заменой переменных привести к некоторой простой стандартной форме. Так как этот материал нельзя считать частью стандартного математического багажа ученых, мы приводим подробное доказательство.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *— гладкая в какой-либо окрестности начала функция и* $f(0)=0$. *Тогда в некоторой (возможно, меньшей) окрестности начала найдутся функции* $g_i\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, *такие что*

$$f=\sum_{i=1}^{n} x_i g_i,$$

причем все g_i *гладки и* $g_i(0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0$.

Доказательство. Имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)} \cdot x_i\,\mathrm{d}t.$$

Следовательно, можно взять

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}\mathrm{d}t.$$

Частное дифференцирование по x_i показывает, что $g_i(0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0$.

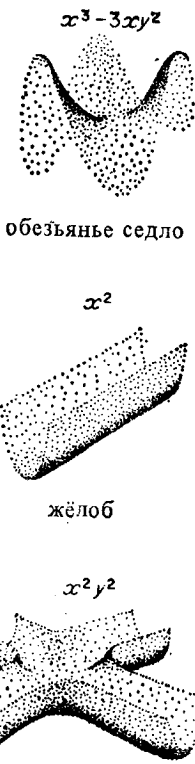


Рис. 4.3

Теперь мы можем доказать *лемму Морса* (для нас это теорема!).

ТЕОРЕМА 4.2 (лемма Морса). *Пусть u — невырожденная критическая точка гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В некоторой окрестности U точки u можно указать такую локальную систему координат $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющую условию $y_i(u)=0$ для всех i, что*

$$f = f(u) - y_1^2 - \ldots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \ldots + y_n^2$$

на U.

Доказательство. Мы можем перенести начало в u и, значит, можем считать, что $u=0$. Допустим также, что $f(u)=f(0)=0$. Тогда по лемме 4.1

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x)$$

в некоторой окрестности нуля. Так как нуль — критическая точка, мы имеем

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0 = 0.$$

Следовательно, снова по лемме 4.1, существуют гладкие функции h_{ij}, такие что

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij}(x),$$

и можно написать

$$f(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x). \tag{4.1}$$

Если заменить h_{ij} на

$$\hat{h}_i = {}^1/_2 (h_{ij} + h_{ji}),$$

то уравнение (4.1) останется верным и в то же время будет выполнено условие $\hat{h}_{ij}=\hat{h}_{ji}$.

Двукратное частное дифференцирование соотношения (4.1) дает

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\Big|_0 = 2\hat{h}_{ij}(0).$$

Значит, матрица

$$[\hat{h}_{ij}(0)] = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\Big|_0\right]$$

— неособая, поскольку 0 — невырожденная критическая точка.

Рассуждая по индукции, предположим, что в некоторой окрестности U_1 начала существуют локальные координаты $u_1, \ldots, u_n$, такие что

$$f = \pm u_1^2 \pm \ldots \pm u_{r-1}^2 + \sum u_i u_j H_{ij}(u_1, \ldots, u_n),$$

где $H_{ij} = H_{ji}$. Произведя, если надо, линейную замену последних $n-r+1$ координат (как при приведении квадратной формы к диагональному виду в § 5 гл. 2), мы можем считать, что $H_{rr}(0) \neq 0$. Положим

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, \ldots, u_n)|}.$$

По теореме об обратной функции g — гладкая функция в некоторой окрестности начала U_2, содержащейся в U_1. (Именно здесь лежит основная причина того, что лемма Морса справедлива, вообще говоря, лишь *локально.*) Перейдем к координатам $v_1, \ldots, v_n$ с помощью замены

$$v_i = u_i \quad (i \neq r),$$

$$v_r = g(u_1, \ldots, u_n)\left(u_r + \sum_{i>r} \frac{u_i H_{ir}(u_1, \ldots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \ldots, u_n)}\right),$$

которая (снова по теореме об обратной функции) является локальным диффеоморфизмом. Теперь

$$f(v_1, \ldots, v_r) = \pm v_1^2 \pm \ldots \pm v_r^2 + \sum_{i,\, j \geqslant r+1} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \ldots, v_n);$$

эта формула в точности подобна формуле с u_i, только вместо $r-1$ стоит r. Тем самым, по индукции, теорема доказана.

Это доказательство следует сравнить с процедурой приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Назовем функцию вида

$$z_1^2 + \ldots + z_{n-l}^2 - z_{n-l+1}^2 - \ldots - z_n^2$$

морсовским l-седлом. Итак, по лемме Морса каждую невырожденную критическую точку можно диффеоморфизмом перевести в морсовское l-седло для некоторого l. Если $l=n$, то мы имеем максимум, если $l=0$,— минимум. [Некоторые авторы предпочитают писать $n-l$ вместо l, но для приложений удобнее считать, что 0-седло всегда, независимо от n, означает минимум, так как часто мы будем отбрасывать бо́льшую часть переменных, даже не интересуясь тем,

сколько их. В приложениях гораздо чаще интересуются минимумами и l-седлами при малых l, чем максимумами (n-седлами).]

Поскольку морсовское седло, конечно, является изолированной критической точкой, а гладкие замены сохраняют свойство критической точки быть изолированной, все невырожденные критические точки — изолированные.

Число l представляет собой инвариант топологического типа критической точки в следующем смысле: гладкие обратимые замены координат не изменяют l.

В неморсовской критической точке матрица Гессе вырождается. Мы можем измерить, *насколько* она вырождается, подсчитав ее коранг (§ 5, гл. 2), так сказать, число независимых направлений, по которым она вырождается. Это число не меняется при гладких обратимых заменах координат, и оно выйдет на первый план в гл. 7 и 8.

3 Функции одной переменной

Изучим теперь критические вырожденные точки в простейшем случае функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Допустив (чего всегда можно добиться сдвигом координат), что f имеет критическую точку в начале и $f(0)=0$, мы, следовательно, имеем также $Df|_0=0$. Критическая точка невырожденна, если и только если $D^2f|_0 \neq 0$. По лемме Морса в этом случае существует гладкая локальная замена координат, в результате которой f принимает вид

$$\pm x^2,$$

где знак совпадает со знаком $D^2f|_0$.

Если же $D^2f|_0=0$, мы можем получить более тонкую классификацию, взяв следующие члены ряда Тейлора для f. Однако такая классификация не скажет ничего о функциях типа e^{-1/x^2}, для которых все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю.

ЛЕММА 4.3. Пусть $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, для которой

$$q(0) = Dq|_0 = \ldots = D^k q|_0 = 0.$$

Тогда в некоторой окрестности нуля существует гладкая функция l, такая что

$$q(x) = x^{k+1} l(x)$$

и $l(0)=0$.

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k=0$ применима лемма 4.1. При $k\neq 0$, используя ту же лемму, находим, что

$$q(x)=xl_1(x),$$

где l_1— гладкая функция. Дифференцируя это соотношение m раз, получаем

$$D^m q\,|_x = xD^m l_1\,|_x + mD^{m-1}l_1\,|_x.$$

Полагая $x=0$, заключаем, что

$$l_1(0) = Dl_1\,|_0 = \ldots = D^{k-1}l_1\,|_0 = 0.$$

Значит, по предположению индукции

$$l_1(x) = x^k l(x),$$

где l — гладкая в окрестности начала функция с $l(0)=0$. Следовательно,

$$q(x) = x^{k+1} l(x),$$

как и утверждалось.

Следуя нашей главной линии приведения функций к простому виду, удобному для классификации, с помощью координатных замен, докажем теперь такой результат.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— гладкая функция, для которой*

$$f(0) = Df\,|_0 = \ldots = D^{k-1}f\,|_0 = 0,$$

но

$$D^k f\,|_0 \neq 0.$$

Тогда с помощью некоторой гладкой локальной замены координат ее можно привести к виду

x^k *при нечетном* k,
$\pm x^k$ *при четном* k,

причем в последнем случае знак совпадает со знаком $D^k f\,|_0$.

Доказательство. Выделяя k-струю, запишем

$$f(x) = \frac{1}{k!} D^k f\,|_0 \cdot x^k + q(x),$$

где функция q имеет порядок $k+1$. (Как уже раньше отмечалось, это верно независимо от вопросов сходимости.) Положим

$$\frac{1}{k!} D^k f\,|_0 = \alpha \neq 0.$$

По лемме 4.3 имеем в некоторой окрестности нуля

$$q(x) = x^k l(x),$$

где l — гладкая функция. Значит,

$$f(x) = x^k(\alpha + l(x)) = \pm x^k |\alpha + l(x)|,$$

причем знак совпадает со знаком α, если x лежит в окрестности начала U достаточно малой, чтобы $|l(x)| < |\alpha|$. Для x из такой окрестности U, очевидно, $|\alpha + l(x)| \neq 0$. Положим

$$g(x) = x|\alpha + l(x)|^{1/k},$$

где в качестве корня k-й степени берется единственный положительный корень. Мы утверждаем, что $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является локальным диффеоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, обратимся к теореме об обратной функции. Ясно, что функция g гладкая. Далее,

$$Dg|_0 = \left[x \cdot \frac{1}{k}\left|\alpha + l(x)\right|^{(1/k)-1} Dl|_x + |\alpha - l(x)|\right]_0 =$$
$$= |\alpha| \neq 0,$$

следовательно, по теореме об обратной функции g есть локальный диффеоморфизм. Но

$$f(x) = \pm g(x)^k,$$

так что замена координат $y = g(x)$ переводит f в $\pm y^k$. Итак, гладкой локальной заменой координат мы привели f к виду $\pm x^k$. В случае когда k нечетно, мы можем заменить x на $-x$ и сделать знак положительным.

Теоремы 4.2 и 4.4 приводят к важному понятию. Две гладкие функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называются *эквивалентными* вблизи нуля, если существуют такой локальный диффеоморфизм $y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в окрестности нуля и такая постоянная γ, что вблизи нуля

$$g(x) = f(y(x)) + \gamma.$$

(Здесь y — гладкая обратимая локальная замена координат, а *сдвигающий член* γ нужен, чтобы вернуть *значение* функции в 0 к исходному и учесть тем самым различные производившиеся нами переносы начала.) В этой терминологии теорема 4.2 утверждает, что всякая функция вблизи невырожденной критической точки эквивалентна одной из стандартных морсовских форм, а теорема 4.4 — что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с ненулевым рядом Тейлора эквивалентна функции $\pm x^k$ с соответствующим k. (В математической литературе описанное нами отношение называется *правой эк-*

вивалентностью, чтобы отличить его от некоторых других эквивалентностей, с которыми также приходится иметь дело. Однако в данной книге никакие из этих других отношений нам не понадобятся, и мы отбросим прилагательное „правый".)

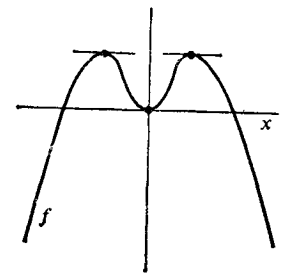


Рис. 4.4

Довольно легко проверить, что $\pm x^k$ и $\pm x^l$ эквивалентны, если и только если $k=l$ и (для четных k, l) знаки совпадают; действительно, того факта, обращается соответствующая производная в 0 или нет, гладкие замены изменить не могут. Это означает, что, например, точки перегиба для x^3 и x^5 в начале относятся к различным типам критических точек в нашей классификации, хотя на первый взгляд они выглядят примерно одинаково. Точно так же минимум типа x^2 отличается от минимума типа x^4. Эти различия окажутся важными, когда мы перейдем к рассмотрению свойств устойчивости далее в этой главе.

То, что мы доказали, можно интуитивно выразить, сказав, что *поведение критической точки функции одной переменной определяется ее первой ненулевой струей (если таковая существует)*. Достаточно широко распространен миф, что аналогичным образом обстоит дело и для функций двух и более переменных; в действительности это не так, и одна из чисто математических целей теории катастроф заключается в том, чтобы выяснить, что же происходит на самом деле. Примеры следующего параграфа призваны подорвать этот миф, а выполнение более деликатной задачи — заменить его каким-либо правильным утверждением — мы отложим до гл. 8.

Локальный характер теоремы 4 существен. Функция

$$f(x)=x^2-x^4$$

имеет в начале локальный минимум типа x^2, но на некотором расстоянии от него она имеет еще два локальных максимума (рис. 4.4) и поэтому не может быть *глобально* эквивалентна x^2. На вопрос о том, „насколько локальна эта локальность", можно в рассматриваемом случае ответить, проанализировав доказательство теоремы 4.4. Ответ такой: „пока не встретится какая-нибудь другая критическая точка". Для функций нескольких переменных соответствующее предписание оказывается более сложным.

4 Функции нескольких переменных

В предыдущем параграфе было показано, что функцию одной переменной можно заменить первым ненулевым членом ее ряда Тейлора в критической точке, не внеся качественных

изменений в ее поведение. Это счастливое обстоятельство уже не имеет места для функций нескольких переменных. Пусть, скажем,

$$f(x, y)=x^2y+y^{2001}.$$

Первая ненулевая струя есть x^2y. Но она не эквивалентна f относительно локальных замен координат, так как решения уравнения

$$x^2y=0$$

образуют пару прямых $x=0$ и $y=0$ (рис. 4.5 (a)), в то время как решения уравнения

$$f(x, y)=0,$$

т. е. уравнения

$$y(x^2+y^{2000})=0,$$

образуют одну прямую

$$y=0$$

(рис. 4.5 (b)). Очевидно, эти два множества решений качественно различны.

Аналогично, f не эквивалентна никакой своей струе j^kf для $k\leqslant 2000$. Источник трудности здесь лежит вовсе не в большой абсолютной величине члена y^{2001} — с тем же успехом мы могли бы взять и функцию

$$x^2y+10^{-1000000}y^{2001}.$$

Тем не менее верен такой факт (хотя мы и не можем объяснить его до гл. 8): если мы возьмем любую функцию вида

$$g(x, y)=x^2y+y^{2001}+\text{(функция 2002)},$$

то f и g *будут* эквивалентны. Таким образом, для некоторых функций *некоторые* струи, хотя и не обязательно первые ненулевые, могут доставлять хорошее качественное приближение. Как именно обстоит дело, зависит только от вида самой струи и, в частности, *не* зависит от того, является ли рассматриваемая функция аналитической. Скажем, функция

$$x^2y+y^{2001}+e^{-1/x^2}\cdot e^{-1/y^2}.$$

адекватным образом представляется своей 2001-струей для достаточно малых x и y.

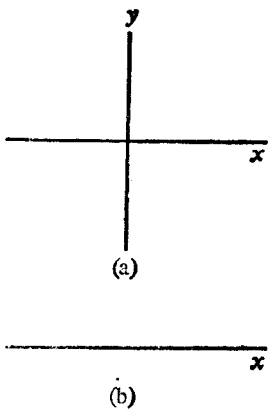


Рис. 4.5

Суть дела здесь не просто в том, что x^2y — „вырожденный" многочлен; чтобы подчеркнуть всю тонкость проблемы, мы приведем сейчас один пример, который полностью будет

рассмотрен в § 13 гл. 8. Функция

$$f(x, y)=\frac{3}{2}x^2+x^3-xy^2$$

обладает следующим любопытным свойством. Если $g(x, y)$ есть функция, 3-струя которой равна f, то g может и не быть эквивалентна f. Но если 4-струя g равна f, то g *будет* эквивалентна f. Таким образом, мы должны посмотреть на члены порядка 4 в разложении Тейлора для g, *хотя их нет*, у f; а вот члены порядка 5 и выше уже не имеют значения.

Если функция имеет струю, адекватно описывающую ее качественное поведение в указанном выше смысле, то функция называется *конечно-определенной*, а струя — *достаточной*. Если пренебречь носящим чисто технический характер различием между функциями и струями, то и струю можно назвать конечно-определенной. В гл. 8 мы во всех подробностях покажем, как проверять функции на конечную определенность, а также опишем много других важных вычислительных методов. Эти методы извлечены из различных математических работ, в основном из работ Мезера [10—15], которые содержат полные доказательства. В гл. 8 мы объясняем с использованием менее ученой математики, почему результаты оказываются такими, какие они есть, но не доказываем их.

5 Лемма расщепления

Один более прославленный вариант леммы Морса позволит нам навести определенный порядок в вырожденной критической точке, „расщепив" функцию на „морсовский кусок", зависящий от части переменных, и „вырожденный кусок", зависящий от остальных переменных, число которых равно корангу особенности. Это важный и мощный результат, имеющий основное значение для всей теории, но при всем том он мог бы появиться на свет гораздо раньше — его доказательство вполне элементарно и не требует привлечения никаких глубоких теорем теории катастроф. Его точная формулировка такова:

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— гладкая функция с* $Df|_0=0$, *матрица Гессе которой в* 0 *имеет ранг* r *(и коранг* $n-r$*). Тогда* f *эквивалентна вблизи начала функции вида*

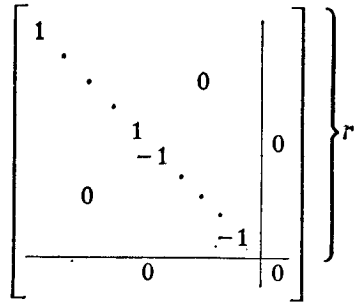
$$\pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2 + \hat{f}(x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

где

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$$

— некоторая гладкая функция.

Доказательство. Линейной заменой координат $u=u(x)$ мы можем преобразовать матрицу Гессе f в 0 к виду



Теорема о неявной функции позволяет нам представить (локально) множество

$$\left\{u \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial u_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial u_r} = 0\right\}$$

как график

$$\{(g_1(u_{r+1}, \ldots, u_n), \ldots, g_r(u_{r+1}, \ldots, u_n), u_{r+1}, \ldots, u_n)\}$$

некоторой гладкой функции

$$g\colon \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r.$$

Переведем этот график в координатную плоскость $u_{r+1} \ldots u_n$ при помощи отображения φ, задаваемого формулой

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1 - g_1(u_{r+1}, \ldots, u_n), \ldots, u_r - g_r(u_{r+1}, \ldots, u_n), u_{r+1}, \ldots, u_n),$$

которое, как легко видеть, является локальным гомеоморфизмом. (Этот шаг является решающим для всего рассуждения как начало наведения порядка — придание правильного вида зависимости от переменных $u_{r+1}, \ldots, u_n$.)

Положим $F = f \circ \varphi$. Локально каждая функция

$$F_{(u_{r+1}, \ldots, u_n)}\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R},$$
$$(u_1, \ldots, u_r) \mapsto F(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$$

имеет морсовскую критическую точку в начале (пространства $\mathbb{R}^r$), хотя и не обязательно принимает там значение нуль. Положим

$$\hat{f}(u_{r+1}, \ldots, u_n) = F(0, \ldots, 0, u_{r+1}, \ldots, u_n).$$

Теперь с помощью того же рассуждения, что и в первой части доказательства леммы Морса (обобщив предварительно лемму 4.1 на случай, когда f равняется нулю вдоль „многомерной оси"), мы можем показать, что

$$F(u) = \hat{f}(u_{r+1}, \ldots, u_n) + \sum_{k,\, m \leqslant r} u_k u_m h_{km}^{(u_{r+1}, \ldots, u_n)}(u_1, \ldots, u_r),$$

где при каждом выборе $u_{r+1}, \ldots, u_n$ функция

$$h_{km}^{(u_{r+1}, \ldots, u_n)} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$$

гладкая. Вторая часть доказательства леммы Морса, примененная к этому выражению с учетом зависимости от переменных $u_{r+1}, \ldots, u_n$ как от параметров, приводит F к виду

$$\hat{f}(u_{r+1}, \ldots, u_n) \pm v_1^2 \pm \ldots \pm v_r^2,$$

что и доказывает теорему. (По существу, после того как начальный шаг по наведению порядка сделан, весь процесс приведения к стандартному виду состоит в том, чтобы передоказать лемму Морса для случая гладкой зависимости от параметров $u_{r+1}, \ldots, u_n$.)

В некотором достаточно сильном смысле слова эта теорема утверждает, что поведение функции вблизи вырожденной критической точки можно изучить, привлекая лишь число переменных, равное *коранг*у матрицы Гессе. Поэтому, скажем, критическая точка коранга 3 функции от 2001 переменных потребует от нас изучения лишь некоторой функции от трех переменных. Это сведение к малому числу переменных и есть то, что делает лемму расщепления столь полезной и столь удивительной. Коранг матрицы Гессе мы будем называть также *корангом функции* в рассматриваемой критической точке.

В гл. 6 мы сформулируем более общие варианты леммы Морса и леммы расщепления для *семейств* функций — эта переформулировка потребует от нас совсем мало усилий — и дадим их доказательство.

6 Структурная устойчивость

Теперь мы рассмотрим действие малого возмущения на критическую точку. Интуитивно, функция *р мала*, если малы все ее производные в точках из некоторой фиксированной окрестности начала. Пусть функция f имеет критическую

точку в 0. Возмутим ее немного, добавив малую функцию p. Что произойдет?

Если производная p в начале ненулевая, начало вообще перестанет быть критической точкой. Фактически может случиться так, что f больше не будет иметь *ни одной* критической точки. Но чтобы начать с простейшего случая, облегчим себе жизнь и предположим, что $Dp|_0=0$.

Пусть функция f *морсовская*, т. е. критическая точка в начале невырожденна. Тогда

$$\det Hf|_0 \neq 0.$$

Если возмущение p достаточно мало, то и

$$\det H(f+p)|_0 \neq 0,$$

так как определитель гессиана меняется непрерывно. Значит, $f+p$ *также будет морсовской функцией*. Нетрудно чуть усилить это рассуждение и доказать, что и тип седла останется для $f+p$ тем же, что и для f: критические точки будут l-седлами с одним и тем же l и, значит, f и $f+p$ эквивалентны.

Мы скажем, что функция f *структурно устойчива*, если для всех достаточно малых гладких функций p критические точки f и $f+p$ имеют один и тот же тип, другими словами, если f и $f+p$ эквивалентны, после подходящего переноса начала. Рассуждение, которое мы провели выше, показывает, что вблизи морсовской критической точки функция всегда структурно устойчива. Мы обобщим это понятие на наиболее важный для теории катастроф случай — на семейства гладких функций — в гл. 6.

Теперь отбросим условие, что $Dp|_0=0$. Типичный пример того, что может случиться, мы получим, взяв $f(x)=x^2$ и $p=2\varepsilon x$ (где ε — малая константа). Возмущенная функция

$$f(x)+p(x)=x^2+2\varepsilon x=(x+\varepsilon)^2-\varepsilon^2$$

имеет морсовскую критическую точку $x=-3$. Таким образом, критическая точка сдвинулась (причем величина смещения гладко зависит от ε), но не изменила своего типа.

Для вырожденных критических точек картина оказывается совершенно иной. Если мы возмутим x^3, добавив член εx, то для положительных ε вообще не будет *ни одной* критической точки, а для отрицательных ε их будет *две* — один морсовский максимум и один морсовский минимум (рис. 4.6). Итак, x^3 как критическая точка структурно неустойчива. Аналогичным образом x^4 в результате возмущения членом εx^2 дает либо единственный морсовский минимум, либо два минимума и один максимум (рис. 4.7). Чем выше степень n, тем хуже ведет себя x^n в этом отношении: возмущение x^5

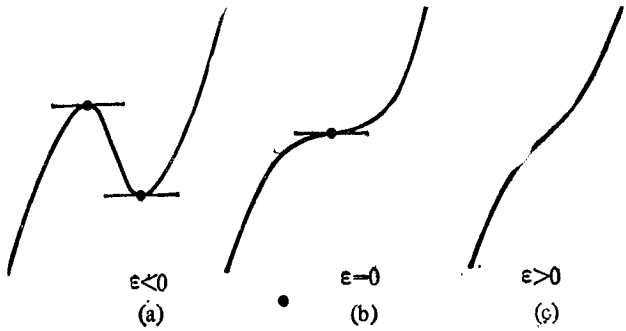


Рис. 4.6

может привести к *четырем* критическим точкам — двум максимумам и двум минимумам — и это независимо от того, насколько малым мы берем возмущение (рис. 4.8).

Можно доказать (см. Милнор [16]), что критическая точка структурно устойчива, если и только если она невырождена; следовательно, каждая вырожденная критическая

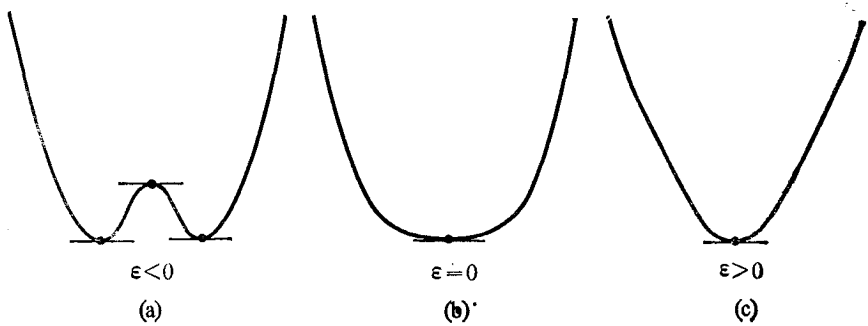


Рис. 4.7

точка структурно неустойчива. Далее, структурная устойчивость является *типичным* свойством в смысле, который мы объясним позднее. Однако, как мы увидим в гл. 7, в случае *семейств* гладких функций ситуация будет совсем иной.

Заметьте, что анализ малых возмущений позволяет нам провести четкое различие между x^3 и x^5, несмотря на их поверхностное сходство: при возмущениях они расщепляются на разное число критических точек. Это — качественное различие и, конечно, оно может оказаться важным в приложениях.

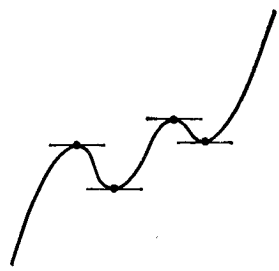


Рис. 4.8

Наша очередная задача — объяснить, как можно усмотреть геометрически типичность морсовских функций.

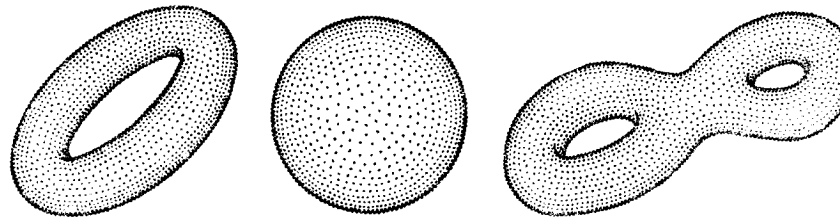


Рис. 4.9

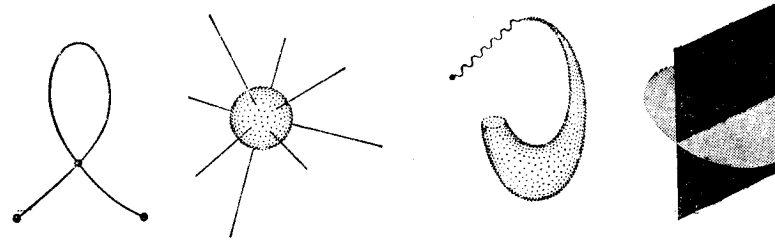


Рис. 4.10

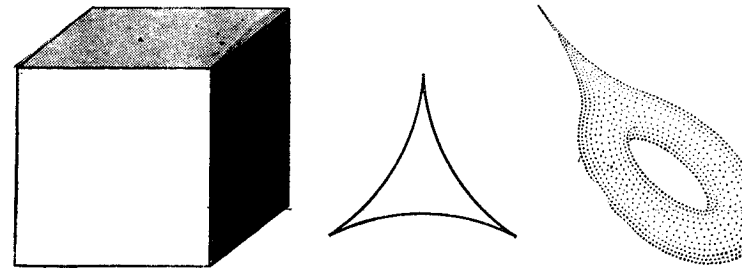


Рис. 4.11

В следующих двух параграфах вводятся нужные понятия, в третьем обсуждаются геометрические причины структурной устойчивости.

7 Многообразия

Многообразие — это просто многомерный аналог гладкой кривой или поверхности. Нам не потребуются никакие глубокие математические свойства многообразий, а только само это понятие. *Гладким подмногообразием* в $\mathbb{R}^n$ называется всякое подмножество M в $\mathbb{R}^m$, обладающее следующими свойствами:

(a) локально оно выглядит как кусок пространства $\mathbb{R}^m$;

(b) оно вложено в $\mathbb{R}^n$ гладко, т. е. имеет единственную касательную гиперплоскость в каждой точке[1].

[1] Эта гиперплоскость должна еще непрерывно зависеть от точки, и проекция многообразия на нее должна быть взаимно-однозначна вблизи точки касания.— *Прим. перев.*

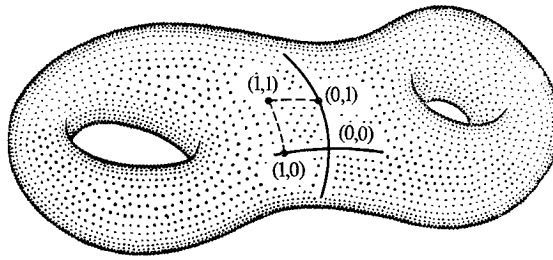


Рис. 4

Число m называется *размерностью* многообразия. Одномерное многообразие — это кривая, двумерное многообразие — поверхность. На рис. 4.9 показаны некоторые типичные многообразия в $\mathbb{R}^3$, все размерности 2. На рис. 4.10 представлены множества, которые не являются многообразиями, потому что их локальное устройство неправильно, а на рис. 4.11 — множества, которые негладко вложены в объемлющее пространство.

Если мы хотим выразить условие (а) более формальным образом, то надо ввести понятие *карты* (или *локальной системы координат*) в точке $x \in M$. Это — локальный диффеоморфизм f: $U \to M$, где U — некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$ и $f(U)$ — окрестность точки x относительно M. Стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$ индуцируют (локальные) координаты в M (рис. 4.12). В книгах для физиков и инженеров их часто называют *криволинейными* (или *обобщенными*) *координатами*. Со словом „координата" связано также слово „параметр"; иногда объекты, ведущие себя хуже, чем многообразия, *параметризуют* при помощи *особых (сингулярных)* отображений (т. е. отображений, не являющихся локальными диффеоморфизмами).

8 Трансверсальность

В конечном счете мы определим понятие трансверсальности для многообразий, но сначала займемся векторными пространствами. Два подпространства U и V в $\mathbb{R}^n$ называются *трансверсальными*, если вместе они порождают всё пространство. Если $\dim U = s$ и $\dim V = t$, то это означает, что $s + t \geqslant n$. Обратно, при выполнении этого неравенства U и V трансверсальны тогда и только тогда, когда они пересекаются по подпространству наинизшей возможной размерности. Эта минимальная размерность равна

$$\max(0, s + t - n).$$

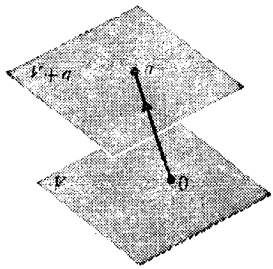


Рис. 4.13

Например, две плоскости в $\mathbb{R}^3$ трансверсальны, если они пересекаются по прямой (т. е. если они не совпадают между собой), поскольку

$$\max(0,\ 2+2-3)=1.$$

4-мерное и 6-мерное подпространства в $\mathbb{R}^7$ трансверсальны, если они пересекаются по подпространству размерности

$$\max(0,4+6-7)=3.$$

С другой стороны, два одномерных подпространства в $\mathbb{R}^3$ (две прямые) не могут быть трансверсальны.

Теперь перейдем к *аффинным* подпространствам — векторным подпространствам, отодвинутым от начала. Более точно, аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это подмножество вида

$$X=V+a=\{v+a \mid v\in V\},$$

где a — фиксированный элемент из $\mathbb{R}^n$, а V — подпространство (рис. 4.13). Под размерностью X понимается размерность V.

Особенностью новой ситуации является то,что аффинные пространства могут вовсе не пересекаться (как, скажем, скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$; например, прямые

$$L_1=\{(x,\ y,\ z) \mid x=y=0\},$$
$$L_2=\{(x,\ y,\ z) \mid y=z=1\}$$

не могут пересечься, так как для точки (x, y, z) из их пересечения должны были бы одновременно выполняться равенства $y=0$ и $y=1$; см. рис. 4.14). На самом деле это даже типично для прямых в $\mathbb{R}^3$ — вовсе не пересекаться.

Пусть X и Y — аффинные подпространства в $\mathbb{R}^n$ размерностей s и t соответственно. Говорят, что они *трансверсальны* (или *пересекаются трансверсально*), если

(a) их пересечение пусто

либо

(b) $s+t\geqslant n$ и $\dim X\cap Y=s+t-n$.

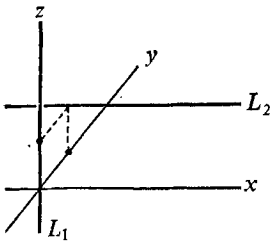


Рис. 4.14

На рис. 4.15 показаны некоторые типичные пересечения в $\mathbb{R}^3$ и отмечено, какие из них трансверсальны.

Заметим, что трансверсальность зависит от размерности объемлющего пространства; например, пересечения (e), (h) и (j) были бы трансверсальны в $\mathbb{R}^2$.

Приступим, наконец, к многообразиям. Два подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ *пересекаются трансверсально* в данной точке, если либо они вовсе не пересекаются в этой точке, либо их

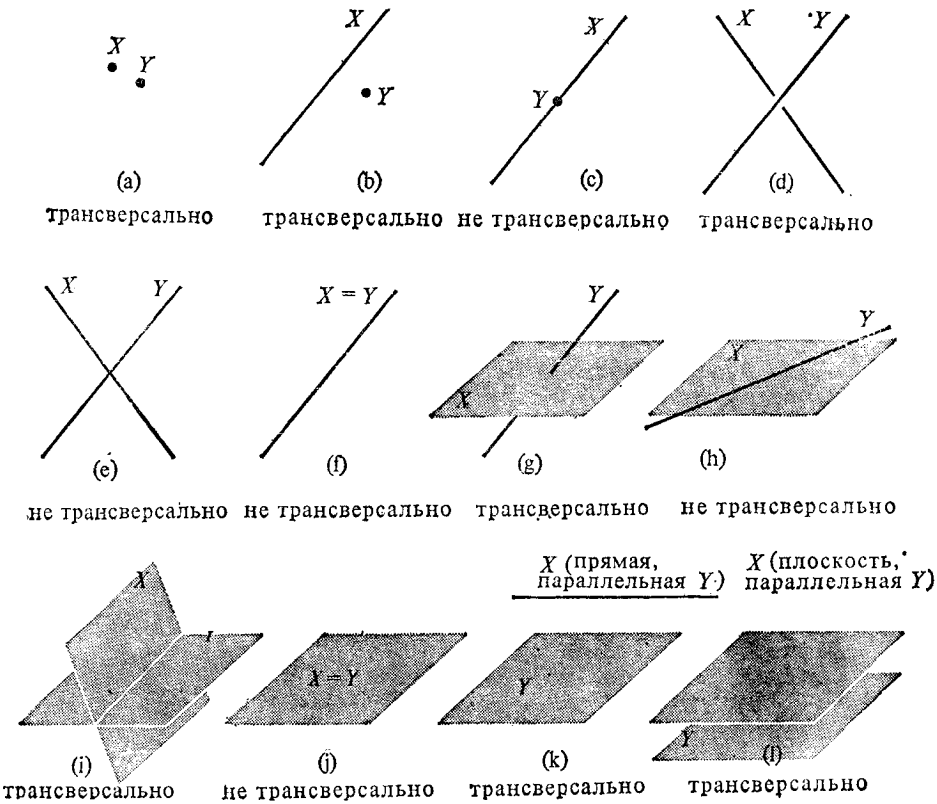


Рис. 4.15

касательные (гипер)плоскости пересекаются трансверсально. В отличие от случая аффинных подпространств эти касательные гиперплоскости могут совпадать для многообразий, которые сами пересекаются лишь в одной-единственной точке. Например, кривые (1-многообразия $y=0$ и $y=x^3$ в $\mathbb{R}^2$ не трансверсальны в начале (хоть оно и является единственной точкой пересечения), поскольку для обеих касательной служит ось x (рис. 4.16).



Рис. 4.16

На рис. 4.17 представлены для многообразий случаи, показанные для плоскостей на рис. 4.15, с добавлением одного более тонкого случая (m). Хотя он и напоминает слегка случай (i), здесь нет трансверсальности, так как касательные плоскости совпадают.

О трансверсальных объектах часто говорят, что они находятся в *общем положении* (ибо „не происходит ничего особенного"). Трансверсальность *типична* в следующем

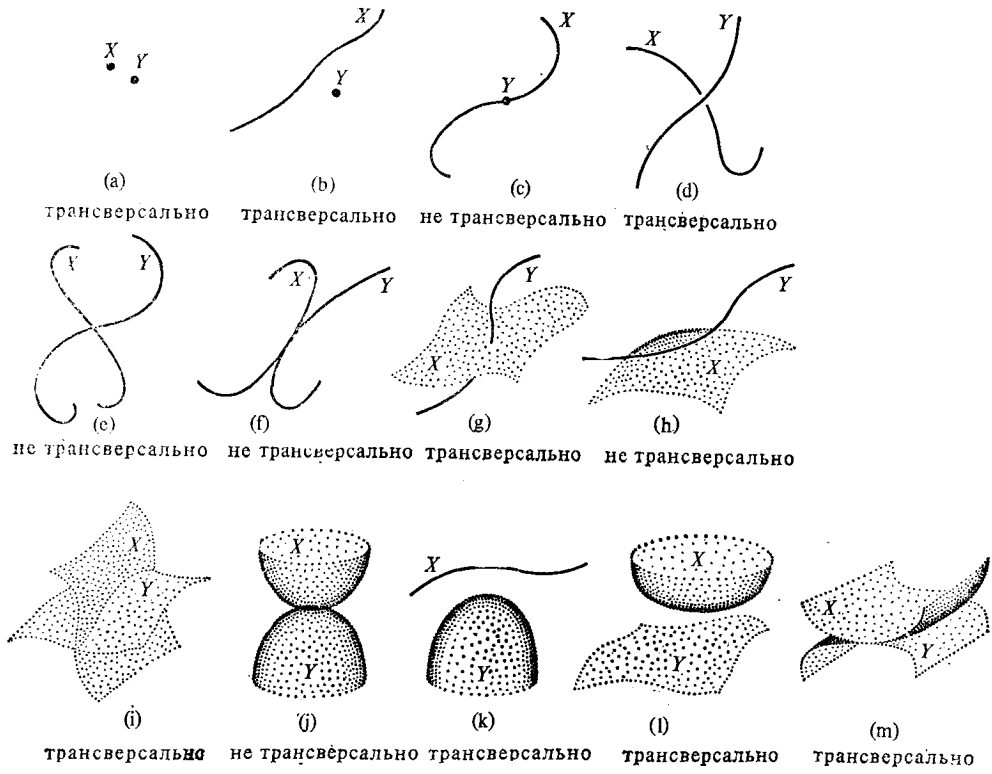


Рис. 4.17

смысле (который можно сделать точным): для двух многообразий, взятых наудачу, бесконечно мала вероятность того, что они пересекаются нетрансверсально (примерно так же, как бесконечно мала вероятность того, чтобы наудачу взятое вещественное число оказалось *в точности* равным π). Точная форма этого утверждения о типичности была впервые открыта и доказана Томом; под названием теоремы Тома о трансверсальности она стала мощным техническим средством. Однако в интуитивной форме это утверждение уже давно появилось в качестве неявно делаемого допущения у многих физиков. Язык, который позволит нам выразить все это с большей ясностью, мы разовьем в § 11.

Вблизи точки трансверсального пересечения пара многообразий хорошо аппроксимируется парой касательных плоскостей. Отсюда вытекает, что локальная природа пересечения определяется исключительно размерностями многообразий: для пары пространств данных размерностей одно трансверсальное пересечение выглядит так же, как

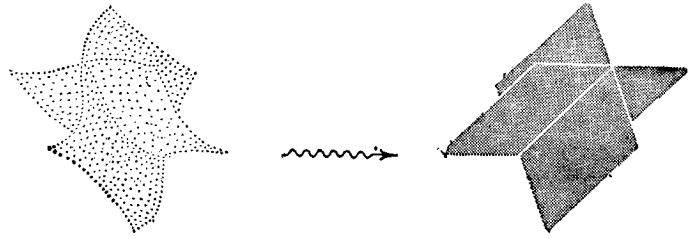


Рис. 4.18

другое. Действительно, имеется по существу только один способ получить трансверсальное пересечение векторных подпространств U и V, именно: выбрать какой-нибудь базис $u^1, \ldots, u^p$ для $U \cap V$, расширить его до базиса для U, добавив $u^{p+1}, \ldots, u^s$, и до базиса для V, добавив $v^{p+1}, \ldots, v^t$. Тогда набор векторов

$$u^1, \ldots, u^s, v^{p+1}, \ldots, v^t$$

будет базисом для всего $\mathbb{R}^n$. Отсюда видно, что с помощью линейной замены мы можем перевести наши подпространства в подпространства

U', натянутое на $e^1, \ldots, e^s$,

и

V', натянутое на $e^1, \ldots, e^p, e^{s+1}, \ldots, e^n$,

где $e^i = (0, \ldots, 0,1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте). Эта конфигурация единственна, и каждое трансверсальное пересечение s-многообразия с t-многообразием в $\mathbb{R}^n$ локально выглядит в точности так же, как она. Рис. 4.18 иллюстрирует это для случая 2-многообразий в $\mathbb{R}^3$.

Отметим, что описанное выше приведение к стандартному виду требует выполнения двух актов выбора, каждый из которых может быть осуществлен различными способами. В терминологии, введенной в § 2 гл. 2, это выбор кобазиса для $U \cap V$ в U и соответственно в V.

9 Трансверсальность и устойчивость

Из рассмотрения наших картинок интуитивно ясно, что, немного „пошевелив" трансверсальное пересечение, мы снова получим трансверсальное пересечение, и это совсем нетрудно доказать алгебраически. После выбора координат в подмногообразиях условие трансверсальности (направления в одном многообразии плюс направления в другом дают все направления в $\mathbb{R}^n$) можно выразить как требование, чтобы не все определители из некоторого заданного списка

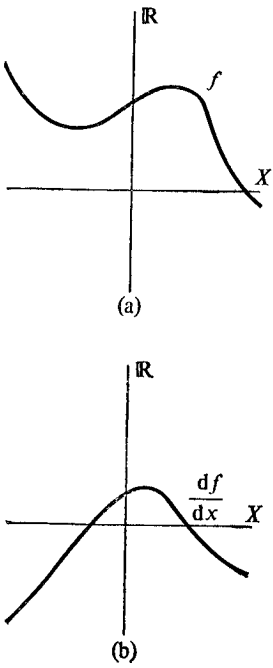


Рис. 4.19

обращались в нуль. Эти определители непрерывно зависят от положения многообразий, и если они отличны от нуля при каком-то их положении, то они отличны от нуля и для всех соседних положений. Следовательно, в этих положениях также будет иметь место трансверсальное пересечение. Таким образом, трансверсальность — *устойчивое* свойство, сохраняющееся при малых возмущениях.

Мы не доказываем этого подробно, так как в действительности нам придется прибегать к более сильному результату — *теореме Тома об изотопии*, для которой мы не ввели нужной техники. Она утверждает не просто то, что трансверсальность является устойчивым *свойством*, но что сами трансверсальные пересечения устойчивы. Подходящими заменами координат в $\mathbb{R}^n$ и в рассматриваемых подмногообразиях любой достаточно близкий „сосед" данного трансверсального пересечения может быть приведен *в точности* к тому же самому виду. (На самом деле это можно сделать для целого семейства соседей одновременно, подобно тому как это было сделано для соседей морсовской функции в § 6.) Из известных нам доказательств этой теоремы наиболее привлекательно доказательство, данное у Абрахама и Роббина [17]: строгое доказательство, охватывающее и бесконечномерный случай сделано там, благодаря элегантным бескоординатным обозначениям, чрезвычайно геометричным.

Структурная устойчивость морсовских функций может быть получена как следствие теоремы Тома об изотопии, и такой вывод имеет некоторые преимущества по сравнению с более элементарными рассуждениями, которые мы использовали ранее. Действительно, условие невырожденности матрицы Гессе в точности совпадает с условием, чтобы матрица Якоби отображения

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right): \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

была невырожденной, каковое в свою очередь есть условие того, чтобы график Df пересекал трансверсально график нулевой функции. (Это совсем легко увидеть в случае $n=1$, так как здесь условие трансверсальности графиков Df и 0 принимает вид $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$ (рис. 4.19), что и есть условие Морса.)

Итак, устойчивость морсовских функций выводится из устойчивости трансверсальных пересечений. *То же самое*

справедливо и в отношении их типичности. Мы видели выше, что неморсовские функции x^3 и x^4 не являются структурно устойчивыми. Теперь мы видим, что графики их производных (рис. 4.20) атипичны — они нетрансверсально пересекают нулевую прямую. Из полной формулировки теоремы Тома о трансверсальности, утверждающей, что типичны такие функции f, в которых график производной Df и графики высших производных пересекают некоторое многообразие трансверсально, мы можем вывести типичность функций Морса. Много других доказательств об устойчивости и о типичности проводятся таким же образом.

Caveat lector[1]. Мы использовали более тонкий факт, чем просто „типичная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ трансверсальна к нулю",— мы допустили, что типичная функция f имеет производную Df, трансверсальную к нулю, другими словами, что трансверсальность типична *среди функций-градиентов* (по-другому — „точных дифференциалов"). Но градиент — это весьма специальный класс отображений при $n \geqslant 2$ (например, отображение $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (y, -x)$ не является градиентом). Градиентные отображения на $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$,— это в точности те, для которых некоторый дифференциал (*ротор* из „векторного анализа", для $n=3$) обращается всюду в нуль. Чтобы оценить деликатность проблемы, рассмотрим класс отображений $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, у которых первая производная по x_1 всюду равна нулю. Тут есть поверхностная аналогия с предыдущим, состоящая в том, что некоторый дифференциальный оператор тождественно равен нулю. Но в этом последнем классе трансверсальность *не* является типичной: посмотрите, каковы геометрические следствия „постоянства по x_1", и вы сразу поймете, в чем тут дело.

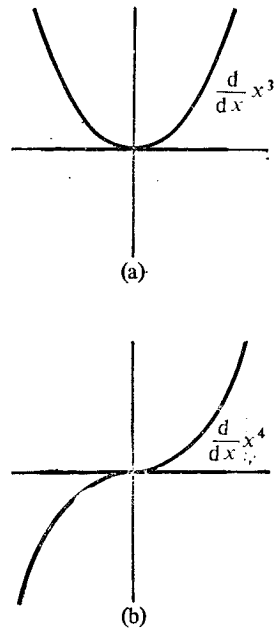


Рис. 4.20

Что является типичным, а что нет, зависит от того, какой класс рассматривается, и здесь одна из причин того, почему теорема Тома о трансверсальности, в которой утверждается интересующая нас типичность, ни в коем случае не является тривиальной или легкой.

Среди всех непрерывных кривых в некотором смысле абсолютно нетипичны кривые, которые хоть где-нибудь дифференцируемы — и однако эта книга целиком посвящена всюду дифференцируемым моделям мира. Типичность может иметь место лишь в пределах выбранного класса математических моделей, и выбор приходится делать, он не задан.

[1] Читатель да бдит (*лат.*).— *Прим. ред.*

10 Понятие трансверсальности для отображений

В гл. 7 нам потребуется чуть более сложное понятие трансверсальности: трансверсальность отображения к многообразию. Если C — *параметризованная кривая* в плоскости, $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, то мы можем рассматривать параметр как *время*, а кривую — как движущуюся точку. Тогда трансверсальность этой подвижной точки к данной фиксированной (непараметризованной) кривой C' означает следующее. Во всех случаях, когда $C(t)$ лежит на C', вектор *скорости* нашей подвижной точки в момент t должен быть линейно-независимым с *касательным* вектором к C' в $C(t)$. Другими словами, не только траектория точки должна быть трансверсальна к C' в обычном смысле, но и скорость, с которой точка проходит через C', должна быть ненулевой.

Причина, по которой мы вводим определение таким образом,— желание удержать полезное свойство структурной устойчивости. Так, если C' есть ось y, а $C(t)$ — точка $(t^3, 0)$, то *образ* C — это в точности ось x, трансверсальная к оси y. Но, возмутив немного C, а именно заменив $(t^3, 0)$ на $(t^3 - \varepsilon t, 0)$ с положительным ε, мы получим траекторию, пересекающую C' три раза вместо одного — очевидное качественное отличие. Это могло случиться только потому, что скорость $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^3|_0, 0)$, с которой точка $C(t)$ пересекает C', равна нулю.

Условие трансверсальности функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ к данному многообразию определяется аналогично. Вектор скорости заменяется пространством, порождаемым *всевозможными* векторами скорости в точке $f(x) \in \mathbb{R}^n$, которые получаются при движении по кривым $f(g(t))$, проходящим через $f(x)$, и это пространство должно быть трансверсально к касательной гиперплоскости к рассматриваемому многообразию в $\mathbb{R}^n$. Эквивалентным образом, соответствующие *графики* должны быть трансверсальными как подмногообразия в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (более точную формулировку можно найти у Голубицкого и Гийемина [18]). Этот тип трансверсальности по-прежнему устойчив и типичен, и формула для размерности по-прежнему остается справедливой, с соответствующими оговорками в случае $m \geqslant n$. Если функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ трансверсальна к подмногообразию C' в $\mathbb{R}^n$ и пересечение X этого подмногообразия с образом f непусто и не содержит критических значений f, то X имеет размерность

$$\min\,(m + r' - n,\ r'),$$

где r' — размерность C'.

В терминологии, которую мы введем в следующем параграфе, трансверсальность означает, что коразмерность X в образе f (а следовательно, и коразмерность $f^{-1}(X)$ в $\mathbb{R}^m$) равна коразмерности C' в $\mathbb{R}^n$.

11 Коразмерность

Теорема о неявной функции (гл. 3, § 9) показывает, что если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m<n$, такова, что $f(x_1, \ldots, x_n)=(c_1, \ldots, c_m)$ и в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ прообраз $Df^{-1}(0)$ служит графиком некоторой функции (эквивалентно, f имеет ранг m), то вблизи $(x_1, \ldots, x_n)$ мы можем представить множество

$$f^{-1}(c)=\{(y_1, \ldots, y_n) \mid f_1(y)=c_1, \ldots, f_m(y)=c_m\}$$

как график некоторой гладкой функции $\mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$. В частности, $f^{-1}(c)$ может быть гладко параметризовано вблизи x при помощи $(y_1, \ldots, y_{n-m})$ и, значит, является гладким подмногообразием. Обратно, любое такое подмногообразие M может быть локально записано как $f^{-1}(0)$ для подходящей гладкой функции f, имеющей максимальный ранг m в точках M. (Сделать это сразу во всех точках M, вообще говоря, нельзя. Какого рода трудности тут возникают, можно увидеть, пытаясь выяснить, с какой стороны листа Мёбиуса, содержащегося в M, функция $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, для которой $M=f^{-1}(0)$, должна быть положительной! Однако поблизости любой точки это всегда возможно.)

Итак, имеется (локальная) эквивалентность между $(n-m)$-мерными подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$ и, в традиционной терминологии, „множествами, определяемыми m уравнениями“. Именно в такой постановке физики чаще всего и говорят о типичности трансверсальности. Если M определено m уравнениями, а M' определено m' уравнениями, где $m+m'>n$, то объединенная система из $m+m'$ уравнений *переопределена* и в типичном случае не имеет решений. В случае когда она имеет решения, они неустойчивы, если только какие-нибудь специальные условия не гарантируют сохранения их существования, и подробное исследование таких специальных условий составляет существенную часть адекватной теории.

Как раз сюда относится отмеченное нами ранее наблюдение, что если $\dim M+\dim M'<n$, то в типичном случае M и M' нигде в $\mathbb{R}^n$ не пересекаются. Например, каждая кривая в $\mathbb{R}^3$ локально „определяется двумя уравнениями“. Пересечение двух таких кривых должно удовлетворять четырем уравнениям и в типичном случае не существует.

Это заставляет нас обратить особое внимание на число n—dim M — число уравнений в переменных $x_1, \ldots, x_n$ которое необходимо, чтобы описать локально M как подмножество в $\mathbb{R}^n$ (в отличие от числа dim M, которое требуется для *параметризации* M). Это число называется *коразмерностью* M в $\mathbb{R}^n$, и оно в точности равно коразмерности в $\mathbb{R}^n$ (как она была определена в § 2 гл. 2) всякого касательного векторного пространства к M. Оно часто оказывается полезным независимо от размерности.

Например, пусть X — остров Великобритания (без прибрежных островов). В представлении на географической карте X двумерен, а граница между Англией и Шотландией одномерна, т. е. имеет коразмерность единица. Но в действительности эта граница не одномерна. Вы несомненно пересекаете ее также и тогда, когда летите самолетом (в пределах X) из Лондона в Глазго, хотя и милей *выше*, чем когда пересекаете ее пешком. Если добавить к тем измерениям, которые имеет карта, вертикальное измерение, то „Англия" станет трехмерной областью, простирающейся от центра Земли до „края небес" (в зависимости от действующих международных законов), и то же относится к Шотландии. Граница становится двумерной, но ее коразмерность остается равной 1. Если мы добавим к нашей картине время, то страны станут четырехмерными, граница трехмерной, но ее коразмерность снова будет 1.

Итак, коразмерность границы определена лучше, чем ее размерность, и именно коразмерность определяет многие из ее свойств. Например, типичная точка в Великобритании расположена *либо* в Англии + Уэльс, *либо* в Шотландии (вне зависимости от высоты над горизонтом или даты); типичная кривая пересекает границу в изолированных точках (если вообще ее пересекает), вне зависимости от того, имеем ли мы в виду двумерную карту, трехмерное пространство или четырехмерное пространство-время. Бывает полезно знать, что коразмерность чего-то равна, скажем, c („полезно" в том смысле, что мы можем делать из этого соответствующие выводы), даже в случае, когда для определения самой размерности имеющейся информации недостаточно.

В некоторых приложениях размерности оказываются бесконечными. Коразмерность тогда все еще можно рассматривать как „число определяющих уравнений", хотя уже *нельзя* как разность размерностей, которые теперь обе бесконечны. Покуда коразмерность остается конечной, все ее полезные свойства сохраняются.

5 СНОВА МАШИНЫ

В данной главе мы проанализируем работу описанных в гл. 1 машин для демонстрации катастроф и покажем, какая здесь имеется связь с теорией критических точек и с поведением вырожденных критических точек при возмущении. Это мотивирует постановку общей математической проблемы, решением которой можно считать теорему Тома и лежащий в ее основе комплекс математических методов. Тем самым изучаемые здесь простые механические системы становятся модельными примерами для общей теории, которые помогают установить связь между теорией и практикой и отточить физическую интуицию.

1 Машина Зимана

Мы дадим анализ зимановой машины для тех конкретных размеров, которые были указаны в гл. 1. Из дальнейшего должно стать ясным, что изменение размеров не внесет серьезных качественных отличий в поведение,— факт, в котором в зародыше содержится важная идея, развиваемая нами в полной мере позднее.

Первый шаг состоит в том, чтобы определить положение точки острия P. В силу соображений симметрии эта точка лежит на оси (см. рис. 5.1). Возьмем в качестве единицы длины диаметр диска, так что длины нерастянутых резинок равны 1, а расстояние OA равно 2.

Снова по симметрии ясно, что когда точка B перемещается вдоль оси, всегда имеется положение равновесия, отвечающее $\theta=0$. Точка P, согласно общим принципам статики, находится там, где это равновесие меняется с устойчивого (локальный минимум энергии) на неустойчивое (локальный максимум). Пусть e и e' обозначают длины наших двух резинок в положении, когда диск повернут на угол θ, близкий к 0, но необязательно равный 0. По закону Гука энергия системы равна

$$V_s(\theta)=\frac{\lambda}{2}(e-1)^2+\frac{\lambda}{2}(e'-1)^2,$$

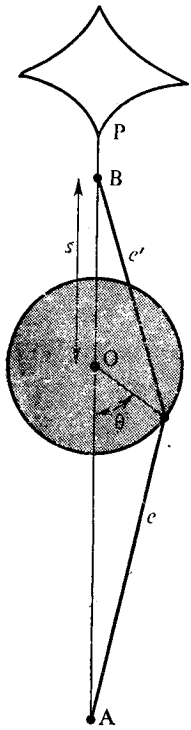


Рис. 5.1

где λ — модуль упругости резинок. Далее,

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2,$$

и, беря разложение в ряд Тейлора, мы найдем, что

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\theta\right)^2 + O(4),$$

где $O(4)$ обозначает функцию порядка 4. Упрощая, получаем

$$e^2 = \frac{9}{4} + \theta^2 + O(4)$$

(мы включили члены с θ^4 в $O(4)$). Следовательно,

$$e = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\theta^2 + O(4).$$

Аналогично

$$e' = \left(s + \frac{1}{2}\right) - \frac{s}{2(2s+1)}\theta^2 + O(4).$$

и, значит,

$$V_s(\theta) = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \theta^2\left(\frac{1}{3} - \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}\right)\right] + O(4).$$

В силу леммы Морса, при определении локального типа критической точки мы можем пренебречь членом $O(4)$, если коэффициент при θ^2 отличен от нуля. Но коэффициент при θ^2 в нашем случае

положителен, если $\frac{1}{3} > \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}$,

отрицателен, если $\frac{1}{3} < \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}$.

Таким образом, изменение от минимума энергии к максимуму наблюдается там, где

$$\frac{1}{3} = \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)},$$

или

$$6s^2 - 7s - 2 = 0.$$

Решения этого уравнения таковы:

$$s = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{12};$$

ясно, что P отвечает положительному значению s, т. е.

$$s=\frac{7+\sqrt{97}}{12}\sim 1.40.$$

Аналогичное рассуждение с заменой $\theta=0$ на $\theta=\pi$ позволяет определить положение верхнего клюва P′, для которого получаем $s=\frac{27+\sqrt{489}}{20}\sim 2.46$ (см. Постон и Вудкок [3]). Можно определить и положение двух боковых клювов, но анализ в этом случае сложнее.

Отметим роль, которую играет устойчивость морсовских функций в обеспечении того, что *бóльшую часть* времени колесо не прыгает. Пусть V_{ab} — функция энергии, отвечающая положению свободного конца в точке (a, b). Если она имеет в θ морсовский минимум, то для точек $(a'b')$, достаточно близких к (a, b), функция $V_{a'b'}$ имеет морсовский минимум вблизи от θ.

Фактически в соответствующей окрестности θ' можно представить как гладкую функцию от (a, b) с помощью того же приема, которым морсовские функции приводятся к стандартному виду. Таким образом, вблизи точки равновесия колесо движется плавно с изменением (a, b). Однако по мере того как мы приближаемся к какой-нибудь неморсовской точке, это „вблизи" становится все более ограничительным условием. Именно геометрия в окрестности таких точек, где нарушается морсовское свойство, а с ним и плавное движение колеса, будет нас больше всего интересовать.

Ниже мы проводим детальный анализ поведения колеса вблизи точки P. Как мы уже видели, член с θ^2 в энергии исчезает в P; в силу симметрии член с θ^3 также отсутствует, так что мы должны обратиться к члену с θ^4. Далее мы работаем с рис. 5.2. Пусть свободный конец B находится в точке (α, β) относительно указанной на рисунке системы координат (оси взяты с направлениями, противоположными обычным, из соображений алгебраического удобства). Формула для e получается та же, что и раньше, только теперь мы работаем с точностью до $O(5)$ и сохраняем члены с θ^4, а для e' имеем формулу

$$e'^2=(s+{}^1/_2\cos\theta-\alpha)^2+({}^1/_2\sin\theta+\beta)^2.$$

Беря разложение соответствующей функции энергии $V_{\alpha\beta}$ с точностью до членов пятого порядка, получаем выражение вида

$$V_{\alpha\beta}(\theta)=(a_0+a_1\beta\theta+a_2\alpha\theta^2+a_3\beta\theta^3+a_4\theta^4)+O(5).$$

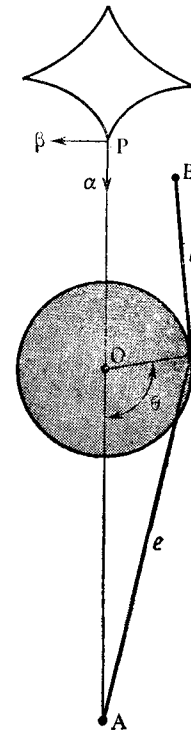


Рис. 5.2

Здесь $a_0, \ldots, a_4$ — некоторые константы, точное значение которых не имеет большого значения; приблизительно они равны

$$a_0 \sim 0.54,$$
$$a_1 \sim 0.24,$$
$$a_2 \sim 0.16,$$
$$a_3 \sim -0.09,$$
$$a_4 \sim 0.045$$

(эти значения даны Э. К. Зиманом, которому принадлежит и весь этот анализ).

Заметим теперь, что в точке P, где $\alpha=\beta=0$, мы имеем функцию вида

$$\mu\theta^4+O(5) \qquad (\mu>0)$$

и, значит, вырожденную критическую точку, эквивалентную по теореме 4.4 критической точке типа θ^4. Таким образом, при получении качественных результатов для точки P мы можем пренебречь членом $O(5)$. Более глубокие теоремы, обсуждаемые, но не доказываемые в гл. 8, показывают, что то же верно и *вблизи* P. Итак, мы можем упростить выражение для функции энергии, отбросив член $O(5)$. Дальнейшие упрощения достигаются: таким выбором единиц для физических величин, чтобы $\lambda\alpha_4 = \frac{1}{4}$; устранением кубического члена при помощи замены

$$x = \theta + \frac{\beta a_3}{4a_4};$$

введением вместо α и β их подходящих скалярных кратных a и b соответственно (численно они оказываются равными примерно 1.8α и 1.3β). Это приводит к следующему выражению для энергии:

$$V_{ab}(x) = {}^1/_4 x^4 + {}^1/_2 ax^2 + bx + c$$

с некоторой постоянной c. Так как нас интересуют только критические точки V, мы можем без потери общности взять $c=0$ (или перенести начало отсчета значений энергии). В результате приходим к выражению вида

$$V_{ab}(x) = {}^1/_4 x^4 + {}^1/_2 ax^2 + bx. \tag{5.1}$$

Этой формулой определяется то, что позже мы назовем *катастрофой сборки*.

Наш следующий шаг, на котором фактически и будет получена полезная информация, состоит в анализе критических точек V. Прежде чем проводить этот анализ (являю-

щийся вполне стандартным), стоит указать, в каком именно отношении проделанная выше работа отличается от подхода „классической прикладной математики". Отличие состоит в том, что пренебрежение членами высокого порядка: $O(4)$ при нахождении положения точки P и $O(5)$ при выводе формулы (5.1) — строго обосновано привлечением леммы Морса и глубокой математики, стоящей за теоремой Тома (хотя мы и не доказывали этого). Классический прикладной математик решительно расправляется с такими приближениями, имея „хороший нюх" на то, что работает, а что не работает; хороший прикладной математик не отсек бы ошибочно $O(4)$ в V, что привело бы к абсурду, но он не смог бы и объяснить разумным образом, почему переход к $O(5)$ уже не меняет дела. В то же время теория катастроф вооружена для всего этого строгими приемами, которые годятся и тогда, когда число переменных слишком велико, чтобы можно было полагаться на „опыт". Это очень важный момент, который начисто упускается из виду в большинстве популяризаторских изложений предмета.

2 Каноническая катастрофа сборки[1]

Мы посвятим весь этот параграф анализу структуры критических точек функции V_{ab}. К машине Зимана мы вернемся после того, как это будет проделано.

Для заданной пары (a, b) критические точки функции (5.1) определяются из условия

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx\right) = x^3 + ax + b. \qquad (5.2)$$

(Дроби в коэффициентах подбирались как раз так, чтобы получилось уравнение простейшего вида.)

Это уравнение кубическое по x, и поэтому оно имеет самое большее три и самое меньшее один вещественный корень. Природа корней зависит от значений a и b, а именно от *дискриминанта*

$$D = 4a^3 + 27b^2$$

рассматриваемого кубического уравнения. Хорошо известно (см., например, Сэлмон [19], стр. 183[2]), что если $D<0$, имеются три различных вещественных корня, а если $D>0$,

[1] Ее называют также *катастрофой сборки Уитни*. Ниже мы иногда будем использовать этот термин.— *Прим. перев.*

[2] Или Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— 8-е изд.— М: Физматгиз, 1963, стр. 236 и далее.— *Прим. ред.*

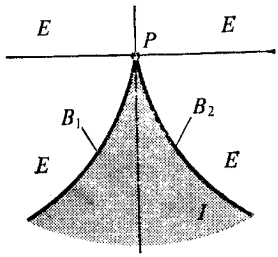


Рис. 5.3

то один вещественный и пара взаимно сопряженных комплексных корней. Если $D=0$, то в некотором смысле имеются три вещественных корня, но некоторые из них совпадают между собой: если $D=0$, но $a\neq 0$ или $b\neq 0$, то совпадают два корня, а если $D=0$ и $a=b=0$, то совпадают все три корня.

Геометрически это означает, что природа корней, а значит и равновесие машины, зависит от положения (a, b) свободного конца резинки по отношению к кривой, определяемой в координатах a, b уравнением

$$4a^3+27b^2=0. \tag{5.3}$$

Она изображена жирной линией на рис. 5.3.

Подразделим плоскость ab (обозначим ее через C) на пять подмножеств[1]: заштрихованную область I „внутри" кривой, область E „вне" нее, две ветви B_1 и B_2 кривой и начало P. Точки (a, b), лежащие в I, характеризуются условием $4a^3+27b^2<0$, а точки, лежащие в E, условием $4a^3+27b^2>0$. Поэтому:

если (a, b) лежит в E, то имеется один вещественный корень;

если (a, b) лежит в I, то имеются три различных вещественных корня;

если (a, b) лежит в B_1 или в B_2, то имеются три вещественных корня, но два из них совпадают между собой; для B_1 совпадение происходит с наименьшим корнем, а для B_2 — с наибольшим;

если (a, b) совпадает с P$=(0, 0)$, т. е. $a=b=0$, то имеются три совпадающих вещественных корня (все они равны 0).

Все эти возможности проиллюстрированы на рис. 5.4. Вид соответствующих потенциальных функций

$$V_{ab}(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx$$

показан на рис. 5.5.

Мы видим, что V_{ab} имеет один минимум, если $(a, b)\in E$, два минимума и между ними максимум, если $(a, b)\in I$, один минимум и одну точку перегиба для $(a, b)\in B_1$ или B_2 и один минимум для (a, b)=P. Заметим, что в этом последнем случае потенциальная функция есть $x^4/4$ и потому этот минимум более сложный с математической точки зрения, чем предыдущие: здесь равны нулю первые три производные функции V_{ab}, тогда как во всех остальных случаях

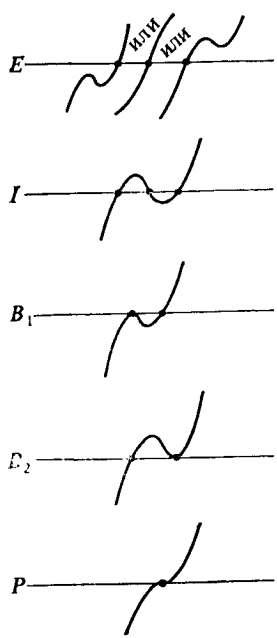


Рис. 5.4

[1] Ниже I — от слова internal (внутренний), E — от external (внешний), B — от bifurcation (бифуркация). — *Прим. ред.*

равна нулю только первая производная. Это отвечает трем совпадающим корням кубики для $(a, b)=\mathrm{P}$. Отметим также, в чем состоит различие между потенциальными функциями точек (a, b), лежащих на ветвях B_1 и B_2: для B_1 точка перегиба лежит слева от минимума, а для B_2 — справа.

С точки зрения динамики минимумы V отвечают устойчивым равновесиям, а максимумы или перегибы — неустойчивым. Итак, если наша пара управляющих параметров лежит в E, то имеется единственное положение устойчивого равновесия, а если в I, то имеются два устойчивых положения и одно неустойчивое.

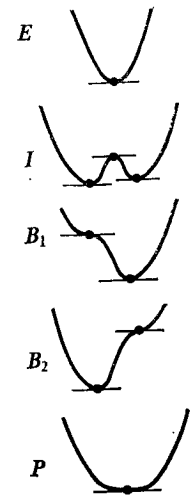


Рис. 5.5

Это довольно сложное поведение потенциальной функции можно охватить единой геометрической картинкой, делающей всё чрезвычайно наглядным, нарисовав *многообразие катастрофы*, или *поверхность равновесия*, в пространстве xab. Это — множество точек (x, a, b), удовлетворяющих уравнению (5.2), которое мы здесь перепишем так:

$$x^3+ax+b=0. \qquad (5.4)$$

Оно имеет вид поверхности со сборкой и показано на рис. 5.6. (Как может заметить читатель, мы уже рисовали эту поверхность (в несколько иных координатах) в § 7 гл. 2, и поэтому нет необходимости повторять здесь все объяснения.)

Отметим, что окрестность большинства точек поверхности локально является графиком некоторой функции от

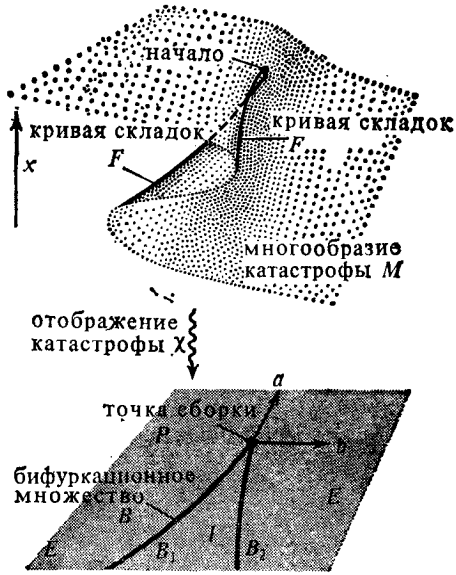


Рис. 5.6

(a, b), как оно и должно быть, согласно проведенному в § 1 обсуждению того, как меняется морсовская критическая точка при изменении (a, b). В физической литературе часто делаются попытки распространить эту точку зрения и на те места, где она явно *неприменима*, привлекая „ветвящиеся функции". Однако этого нельзя проделать никаким последовательным способом в окрестности точки P, которая в большинстве физических приложений и служит средоточием интереса. Обычный получаемый результат — хаос в понятиях. Гораздо более ясная картина возникает из рассмотрения вполне корректно определенного *отображения катастрофы*

$$\chi\colon M \to C,$$

которое проецирует точки M на плоскость ab по правилу

$$(x, a, b) \mapsto (a, b) \qquad (x \in M)$$

в окрестности начала.

Многообразие катастрофы M является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$. Иногда думают, что M не гладко в начале, но это обман зрения. Гладкость становится очевидной, если изготовить трехмерную модель поверхности. Математически это можно усмотреть с помощью карты для M, определяемой „проекцией" из плоскости Y координат x и a. Она представляет собой функцию

$$\pi\colon Y \to M,$$

для которой

$$\pi(x, a) = (x, a, b),$$

где b определяется из условия

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Исключая b, получаем

$$\pi(x, a) = (x, a, -x^3 - ax). \tag{5.5}$$

Эта карта не только дает локальные координаты вблизи начала, она дает на самом деле координаты на всем M, и одной карты в этом случае хватает для всего многообразия катастрофы. Матрица Якоби для $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial a} \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial a} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(-x^3 - ax) & \dfrac{\partial}{\partial a}(-x^3 - ax) \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3x^2-a & -x \end{bmatrix},$$

и, очевидно, имеет ранг 2 независимо от того, какие значения принимают a и x. Итак, (5.5) не имеет критических точек, и M гладко.

Интуитивно π отвечает взгляду на M по горизонтали сбоку; если посмотреть таким образом на реальную модель поверхности, то ясно будет видно, что с этой стороны складка „исчезает". Это отчетливо показывает серия чертежей, выполненных вычислительной машиной (рис. 5.7), которые мы заимствовали у Вудкока и Постона [20].

Точки M, в которых поверхность „подворачивается", „складывается" и в которых, следовательно, касательная плоскость вертикальна,— это в точности критические точки отображения катастрофы χ: $M \to C$. Легче всего их найти, решая совместно уравнения (5.4) и

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3x^2 + a. \tag{5.6}$$

Отсюда $a = -3x^2$, и, подставляя это в (5.4), получаем $b = 2x^3$. Таким образом, точки M, в которых касательная плоскость вертикальна, лежат на кривой, задаваемой параметрически как

$$(x, \ -3x^2, \ 2x^3),$$

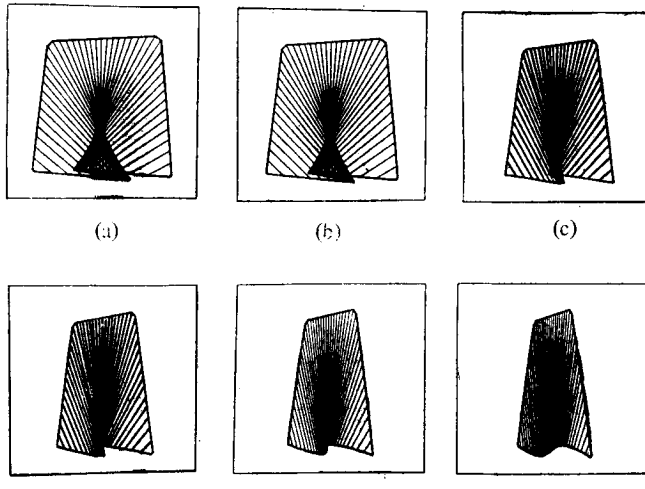


Рис. 5.7

где x — вещественный параметр. Это скрученная кубическая кривая, лежащая на M, которую мы назовем *кривой складок* и обозначим через F. Чтобы убедиться, что F — гладкая кривая, рассмотрим указанную параметризацию $\varphi\colon \mathbb{R}\longrightarrow F$,

$$\varphi(x)=(x,\ -3x^2,\ 2x^3).$$

Матрица Якоби здесь равна

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6x \\ 6x^2 \end{bmatrix},$$

и она всегда имеет ранг 1. Поэтому φ является (очевидно, гладкой) функцией без критических точек, и F — гладкая кривая.

Наконец, посмотрим на образ кривой F при отображении χ. Это кривая в C с параметрическим заданием

$$(-3x^2,\ 2x^3).$$

Решая совместно уравнения

$$a=-3x^2, \qquad b=2x^3,$$

мы получим уравнение

$$4a^3+27b^2=0. \tag{5.7}$$

Это полукубическая парабола, и это в точности та самая кривая, которая встретилась нам раньше при описании положений равновесия. Мы называем ее *бифуркационным множеством* (поскольку, когда мы сдвигаем с нее точку (a, b), появляются функции двух различных типов [1]) и обозначаем через B.

Теперь мы в состоянии дать геометрическую интерпретацию положений равновесия соответствующей динамической системы. Для данной пары значений параметров (a, b) все положения равновесия получаются решением уравнения (5.2). Они могут быть, следовательно, описаны как x-координаты тех точек, в которых вертикальная прямая, проходящая через (a, b), пересекает многообразие катастрофы M. Геометрически очевидно, что если (a, b) лежит в области E, внешней по отношению к бифуркационному множеству B, то найдется лишь одно такое x; действительно, над точками E лежит лишь один „лист“ поверхности M. В то же время над точками (a, b) области I расположены три лис-

[1] Напомним, что слово „бифуркация“ означает „развилка, раздвоение“.— *Прим. ред.*

та и соответственно имеется три положения равновесия. Для точки $(a, b) \in B_1$ вертикальная прямая, проходящая через (a, b), касательна к нижнему листу и проходит через верхний лист в единственной точке; это дает для уравнения (5.2) два совпадающих корня и еще один, причем совпадающие корни меньше. Для $(a, b) \in B_2$ всё аналогично, только теперь имеет место касание верхнего листа и совпадающие корни больше. Наконец, в точке острия P вертикальная прямая касается поверхности M и пересекает ее в одной-единственной точке — в начале.

Итак, при геометрическом описании состояний равновесия почти всё становится совершенно очевидным. Чтобы закончить картину, необходимо только различить устойчивые и неустойчивые положения равновесия; неустойчивые отвечают точкам поверхности M, лежащим на среднем листе, „внутри" кривой складок, устойчивые — точкам „снаружи" кривой складок.

3 Динамика машины Зимана

Заголовок этого параграфа может ввести в заблуждение: мы рассматриваем здесь на самом деле *статику* машины — положения равновесия. Полное ее динамическое описание (что произойдет, если мы крутанем колесо, дернем за резинки нити и т. п.) выходит за рамки рассмотрений, проводимых в этой книге, и принадлежит полнокровной теории динамических систем. Мы займемся тем, что иногда называют *„квазистатикой"*: что происходит с положениями равновесия при плавном изменении положения (a, b) свободного конца резинки? Экспериментально этому отвечает *очень медленная* динамика. Дело в том, что машина быстро „успокаивается" из-за внутреннего трения в резине. Фактически в слишком аккуратно изготовленной машине с ничтожным трением исследуемые нами эффекты почти полностью маскируются колебаниями. (Трение же в оси также маскирует их, доставляя колесу новые положения равновесия, в которых упругие силы не уравновешены.)

Теперь, после проведенного выше анализа, мы можем следующим образом рассмотреть изменение положения равновесия с изменением (a, b). Пусть (a, b) проходит некоторый путь в C. Тогда наблюдаемое положение равновесия пройдет путь в M, лежащий над путем в C. Из-за складок поверхности M этому пути, возможно, придется прыгать с одного листа поверхности на другой. Мы предполагаем, что наша (непрерывная) физическая система делает соответствующие прыжки настолько быстро, что можно пренебречь затра-

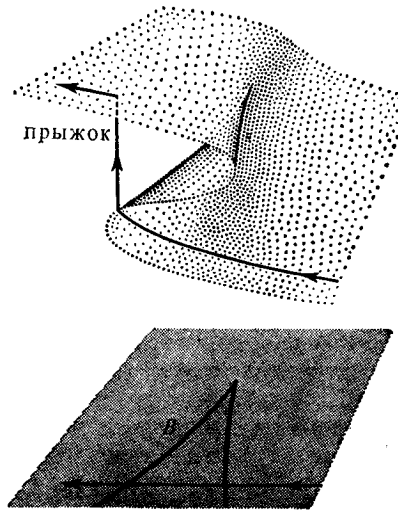


Рис. 5.8

чиваемым на это временем. Исследование положений равновесий само по себе не может сказать нам, где будут происходить прыжки, так как в принципе они возможны в любой точке (a, b), над которой лежит два или больше положений равновесия. Необходимая дополнительная информация содержится в деталях динамики. Однако вместо того чтобы призывать на помощь динамику, мы примем следующее соглашение, которое находится в неплохом соответствии с фактами и которое Том [1] называет *принципом (максимального) промедления*[1]: система делает прыжок лишь тогда, когда у нее не остается другого выбора. Это означает, что путь, проходимый положением равновесия, сменяет лист на поверхности, лишь когда он проходит через складку, и лист, на котором он находился, „исчезает". (Для быстрых изменений управляющих параметров этот принцип нарушается (Постон [21]).) В гл. 14 мы обсудим другое возможное соглашение.

Поскольку проведенный нами анализ относится к положениям равновесия вблизи точки P, мы можем ответить на



Рис. 5.9

[1] В оригинале (perfect) delay.— *Прим. ред.*

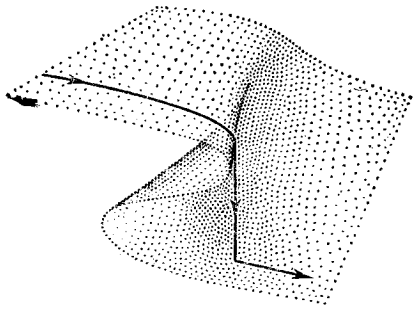


Рис. 5.10

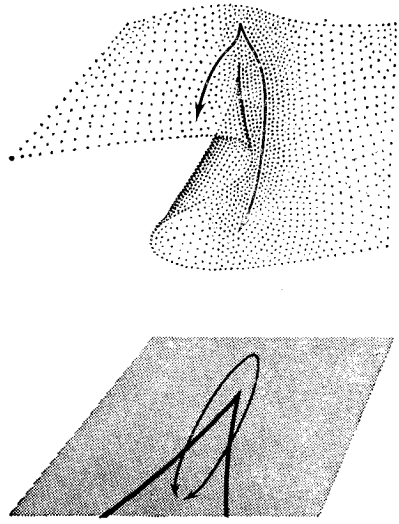


Рис. 5.11

вопрос, заданный в гл. 1, для случая, когда путь входит в область ◇ снизу слева и выходит из нее снизу справа. Такой путь в C вместе с соответствующим путем положения равновесия, получаемым по принципу промедления, показан на рис. 5.8. Из него видно, что прыжок происходит, когда путь *покидает* область, но не когда он в нее входит. Последовательность графиков для функций энергии $V_{ab}(x)$ и соответствующие критические точки показаны на рис. 5.9: прыжок происходит, когда минимум и максимум сливаются и „уничтожают" друг друга.

Эти прыжки и являются примерами того, что Том и Зиман называют *катастрофическими прыжками (скачками)*. Ниже мы будем называть a и b *переменными управления* (или *управляющими переменными*, или *управляющими параметрами*), а x — *переменной поведения* (или *переменной состояния*, или *поведенческой переменной*). Катастрофические прыжки происходят тогда, когда гладкие изменения в управлении вызывают разрывные изменения состояния.

Это первое явление, которое объясняется при помощи катастрофы сборки Уитни, но имеются и другие; все они экспериментально проверяются на машине. Второе явление — *гистерезис* (название взято по аналогии с подобным явлением в магнетизме, которое, по всей видимости, может быть подведено под рассматриваемую теорию). Именно, если мы обратим путь в плоскости параметров, это не обязательно приведет к обращению пути в пространстве состоя-

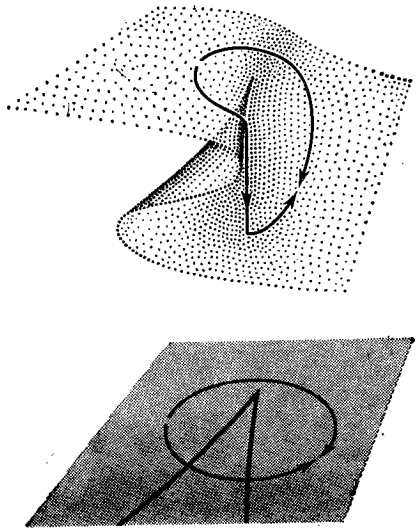


Рис. 5.12

ний. Это продемонстрировано на рис. 5.10. Принцип промедления снова показывает, что прыжок происходит при покидании бифуркационного множества, но так как мы теперь путешествуем в обратную сторону, это произойдет на другой стороне области.

Третье явление — *расхождение*: небольшие различия в пути могут повлечь за собой (без всяких скачков) большие различия в состоянии, даже если пути начинаются и кончаются в одних и тех же точках (рис. 5.11).

Четвертое заключается в том, что из одного состояния в другое можно перейти или гладко, или со скачком, в зависимости от пути (рис. 5.12). Можно было бы отметить и многие другие явления. Мы будем дальше исследовать их по мере необходимости. Читателю стоит проверить, что все отмеченные четыре явления действительно имеют место в нашей машине.

Покуда наш анализ был чисто локальным — вблизи точки P. Однако подобную поверхность равновесия можно построить и для *глобальных* смещений точки управления (a, b) по всей плоскости C. Поскольку переменная состояния есть угол и, значит, периодична с периодом 2π, нам достаточно построить поверхность для углов, заключенных между некоторым θ и $\theta+2\pi$, и затем отождествить верх с низом (так что видимые на рис. 5.13 края J поверхности вверху и внизу в действительности не существуют). Результатом будет, как можно показать, то, что изображено на рис. 5.13.

Имеются *четыре* поверхности сборки по одной на каждый клюв области ◇, которые прилажены друг к другу. Две из этих поверхностей в точности эквивалентны канонической сборке Уитни, которую мы подвергли анализу выше, а две другие представляют собой *двойственные сборки*. У двойственной сборки начальный потенциал $-x^4$, а не x^4. Это приводит к тому, что меняются местами максимумы и минимумы, а значит, устойчивые и неустойчивые положения равновесия, но во всем остальном геометрия не меняется.

Используя принцип промедления, читатель может теперь с помощью этой поверхности предсказать поведение машины для любых путей, которые различными способами обходят клювы, и притом без всякого труда; сомнительно, смог ли бы он это сделать, не имея перед собой рис. 5.13.

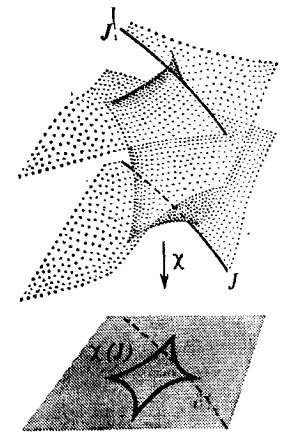


Рис. 5.13

4 Качалки

Начнем с анализа параболической качалки. Параметризуем параболу с помощью параметра t (см. рис. 5.14), так что общей точкой параболы служит (t, t^2). Коэффициент наклона касательной в этой точке равен $2t$, и, значит, коэффициент наклона нормали равен $-1/2t$, а ее уравнением будет

$$x+2ty=2t^3+t.$$

Перепишем его так:

$$t^3+Yt+X=0, \qquad (5.8)$$

где

$$Y=\frac{1}{2}-y, \qquad X=-\frac{1}{2}x.$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, что и уравнение (5.2); здесь t играет роль переменной состояния, а X и Y — параметров управления. Следовательно, поверхность, определяемая уравнением (5.8) в пространстве XYt, та же самая, что и многообразие катастрофы для канонической сборки Уитни.

Рассмотрим *эволюту* параболы — огибающую ее нормалей; как говорят нам учебники, чтобы получить эту огибающую, надо продифференцировать левую часть (5.8) по t и затем исключить t. Дифференцирование дает

$$3t^2+Y=0,$$

а исключение t —

$$4Y^3+27X^2=0.$$

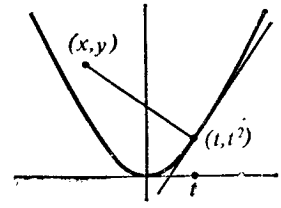


Рис. 5.14

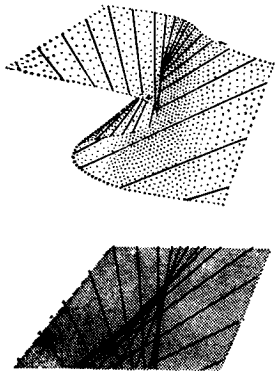


Рис. 5.15

Не только ответ хорошо нам знаком — всё проведенное *вычисление* также знакомо: мы проводили его в предыдущем параграфе, когда искали бифуркационное множество. Это совпадение можно объяснить следующим образом. Для фиксированного t уравнение (5.8) определяет прямую в пространстве XYt. Объединение этих прямых для всех t есть линейчатая поверхность, и в то же время это обычная поверхность сборки Уитни. Соответствующее отображение катастрофы проектирует поверхность, а значит и прямые, на плоскость XY; это эквивалентно тому, чтобы представлять себе (5.8) как семейство прямых в плоскости XY, получающееся при изменении t. Огибающая этого семейства является образом особенностей проекции χ, см. рис. 5.15. (Заметим кстати, что связь с огибающими послужила для Тома одной из отправных точек при создании теории катастроф.)

Теперь введем в игру силу тяжести. Пусть парабола имеет центр тяжести в точке (X, Y) и в положении, когда она стоит, не качаясь, точкой опоры служит (t, t^2). Тогда потенциальная энергия $W_{XY}(t)$ задается формулой

$$\begin{aligned} W_{XY}(t)^2 = V_{XY}(t) &= (x-t)^2 + (y-t)^2 \\ &= t^4 + t^2(1-2y) + t(-2x) + x^2 + y^2 \\ &= t^4 + 2Yt^2 + 4Xt + \left(4X^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4}V_{XY}(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}Yt^2 + Xt + K,$$

где K зависит лишь от X и Y, но не от t.

Функция W_{XY} имеет критические точки в точности там же, где и $\frac{1}{4}V_{XY}$. Действительно, высота центра тяжести над полом должна быть положительной, а в области положительных чисел возведение в квадрат является диффеоморфизмом и, значит, сохраняет критические точки. Далее, при дифференцировании K исчезает, и поэтому этот член не играет роли при анализе критических точек. Такой член K мы называем *сдвигающим членом*, поскольку геометрически его действие сводится к тому, что критические значения лишь сдвигаются вверх или вниз, а форма поверхности равновесия при этом не изменяется. Роль сдвигающего члена в § 3 гл. 4 была той же самой.

Итак, мы имеем то же семейство функций, что и в § 2, и

анализ критических точек будет в точности такой же; следовательно, тождественны не только локальная геометрия машины Зимана — стандартная сборка — и геометрия параболической машины, но также и семейства функций, которые определяют эту геометрию в терминах критических точек. Вследствие этого динамика поведения будет снова определяться сборкой Уитни, как и для машины Зимана, и будут наблюдаться те же самые явления. Что касается, однако, *глобального* поведения параболической машины, то здесь отсутствуют три дополнительные сборки, которые имеются у машины Зимана.

Сходное вычисление можно проделать и для эллиптической качалки, только тут эволюта имеет четыре острия, как на рис. 1.9. Поверхность равновесия теперь в точности эквивалентна поверхности для машины Зимана, и анализ динамики идет в точности по той же схеме. В частности, ответы на три заданные в § 3 гл. 1 вопроса таковы:

(a) Вне области $\diamond$ имеются два возможных положения равновесия (одно устойчивое, другое неустойчивое), а внутри их четыре (по два того и другого типа).

(b) Если центр тяжести ниже центра кривизны в точке контакта (центр кривизны, как хорошо известно, совпадает с точкой, в которой нормаль касается эволюты), то равновесие устойчиво, если выше, то неустойчиво. (Чтобы увидеть это, приблизьте локально кривую ее кругом кривизны; можно убедиться в этом и аналитически.)

(c) Катастрофические скачки происходят при пересечении границы области $\diamond$, но лишь когда при этом мы проходим через кривые складок на поверхности (в соответствии с принципом промедления).

На самом деле есть теорема, согласно которой любая гладкая выпуклая замкнутая кривая имеет по крайней мере два максимума и по крайней мере два минимума кривизны, так что для соответствующей качалки (с заменой эллипса на эту кривую) отображение катастрофы имеет по крайней мере четыре критические точки. В типичном случае они проявляются как четыре острия в бифуркационном множестве (два обычных, два „двойственных"), но при определенных обстоятельствах могут иметь место и наложения. Так, например, гладкая инволюта гипоциклоиды с тремя остриями имеет саму эту гипоциклоиду в качестве соответствующего бифуркационного множества, которое, таким образом, имеет только три острия; однако каждый из них отвечает паре критических точек отображения катастрофы.

5 Постановка общей проблемы

Исследование поведения всех трех машин, как оказалось, производится при помощи по существу одного и того же вычисления — вычисления критических точек некоторого параметризованного семейства функций. Тем самым мы приходим к следующей общей задаче. Рассматривается r-параметрическое семейство функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f_{u_1, \ldots, u_r}(x_1, \ldots, x_n),$$

или, что эквивалентно, функция

$$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы в некотором смысле классифицировать эти семейства с точностью до подходящих замен координат, не нарушающих качественной структуры критических точек. Замечательная теорема, принадлежащая Тому и Арнольду, утверждает, что, „почти все“ четырехпараметрические семейства распадаются на семь (локальных) типов. Эту классификацию можно продолжить на пятипараметрические семейства и (привлекая новые идеи) еще дальше. Мы объясним это подробнее через главу.

6 СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Если рассматривать отдельные функции, то структурно устойчивы только морсовские критические точки, и только морсовские точки возникают типичным образом. Глава 5 показывает, однако, что в вопросах, связанных с *семействами* функций, может оказаться необходимым иметь дело с неустойчивыми, вырожденными критическими точками; в действительности именно в них могут отражаться наиболее интересные черты изучаемого явления.

Распространение понятия структурной устойчивости на случай семейств функций позволяет существенно пояснить всё. Структурно устойчивое *семейство*, как правило, включает в себя отдельные функции с вырожденными критическими точками, и, грубо говоря, чем больше семейство, тем сильнее может быть вырожденность. Окружающие члены семейства как бы сдерживают, успокаивают вырожденную функцию; это формализуется во введенном Томом понятии деформации [1], которое мы изучим в гл. 8. В данной главе мы обсудим этот тип структурной устойчивости и установим его связь с предыдущими примерами; относящаяся сюда математическая теория будет развита в гл. 7 и 8.

1 Эквивалентность семейств

Напомним (см. § 3 гл. 4), что две функции f, g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называются эквивалентными вблизи начала, если существуют локальный диффеоморфизм y: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и постоянный „сдвигающий член“ γ, такие, что

$$g(x)=f(y(x))+\gamma$$

в некоторой окрестности 0. Для семейств функций f, g: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ нам потребуется соответствующим образом

[1] В оригинале употребляется термин unfolding (буквально „развертка, разворачивание“): однако в отечественной литературе уже установился термин „деформация“, которым мы и будем пользоваться дальше.— *Прим. перев.*

усложненное понятие эквивалентности. Диффеоморфизм y превращается в *семейство* диффеоморфизмов y_s: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $s \in \mathbb{R}^r$, *которые гладко меняются с* s; константа γ превращается в „семейство констант", гладко меняющихся с s, иначе говоря, в гладкую функцию $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Наконец, мы допускаем также произвольный диффеоморфизм $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$; для него нет нетривиальной параллели в случае отдельной функции (единственный гомеоморфизм одноточечного множества $\mathbb{R}^0$ — тождественный!), но в случае семейств он нужен. Без него мы не смогли говорить, например, об эквивалентности поведения двух машин Зимана, из которых одна имеет вдвое большие размеры, чем другая. Здесь соответствующий диффеоморфизм просто удваивает масштаб.

Итак, для аккуратной формулировки определения нам нужны:

(a) диффеоморфизм

$$e\colon \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r;$$

(b) гладкое отображение

$$y\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

такое, что при всяком $s \in \mathbb{R}^r$ отображение

$$y_s\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$y_s(x) = y(x, s)$$

является диффеоморфизмом;

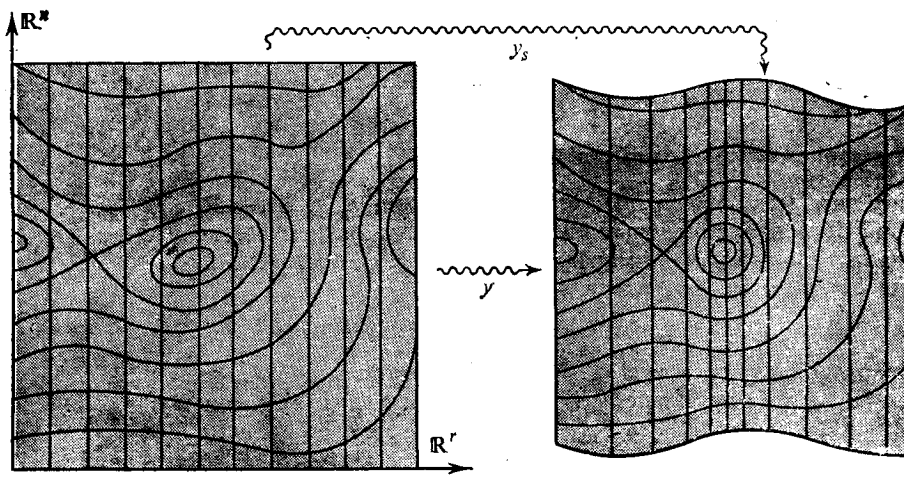




Рис. 6.1

(c) гладкое отображение

$$\gamma\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}.$$

Теперь мы назовем семейства f и g *эквивалентными*, если найдутся такие e, y, γ, определенные в некоторой окрестности нуля, что

$$g(x,\ s)=f(y_s(x),\ e(s))+\gamma(s)$$

для всех $(x,\ s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$ из этой окрестности.

Введенное отношение эквивалентности важно для понимания теоремы Тома и играет важную роль еще в целом ряде случаев. Его геометрический смысл иллюстрируется рис. 6.1 и 6.2. Например, на рис. 6.1, где $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^r$ схематически представлены прямыми, мы видим, что e гладко растягивает и изгибает $\mathbb{R}^r$ (хотелось бы сказать „диффеоморфирует" $\mathbb{R}^r$, но требования чистоты языка запрещают нам это). Для всякого фиксированного $s\in\mathbb{R}^r$ множество точек $(x,\ s)$, $x\in\mathbb{R}^n$, представленное вертикальной прямой, расположенной над s, деформируется, как того требует y_s, и переводится в вертикаль, расположенную над $e(s)$. Таким образом, разложение на вертикали сохраняется, хотя каждая из них может достаточно сложно деформироваться и передвигаться вдоль $\mathbb{R}^r$. Наконец, на каждой вертикальной прямой может быть перенесено начало, согласно γ.

„Линии уровня" на рис. 6.1 нанесены, чтобы проиллюстрировать действие всего этого на произведение $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$;

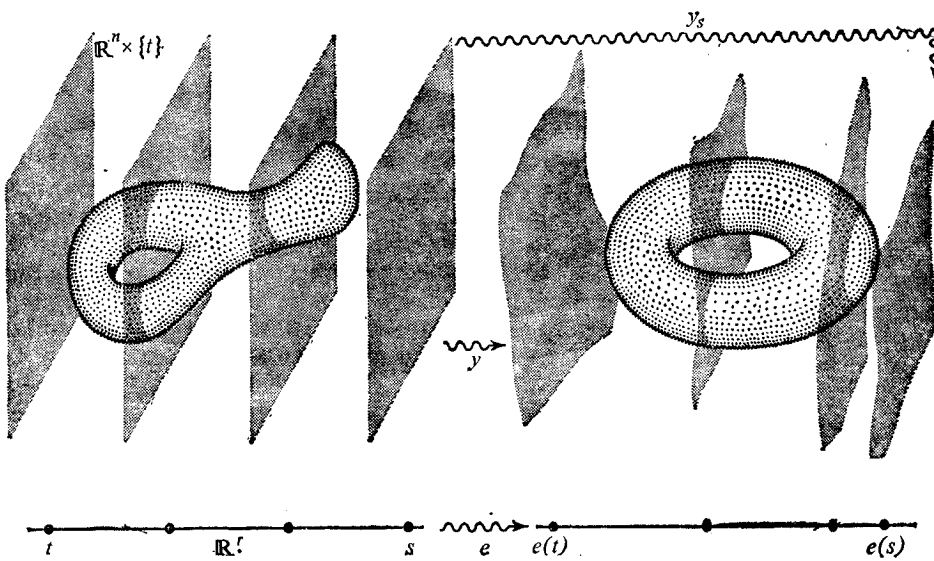


Рис. 6.2

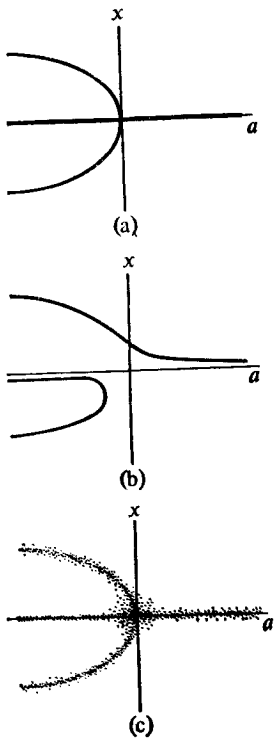


Рис. 6,3

оно гладко деформируется так, что сохраняются топологические черты проекции $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$, $(x, s) \mapsto s$. Поэтому линия уровня, которая „многозначна" над $\mathbb{R}^r$, такой и останется, причем вся качественная картина сохранится. На рис. 6.2 представлен случай $n=2$, $r=1$, на этот раз только для одной поверхности уровня, которая изображена в виде тора, чтобы подчеркнуть сохранение топологических свойств.

2 Структурная устойчивость семейств

Понятие структурной устойчивости распространяется теперь на случай семейств естественным образом. Если f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ эквивалентно в указанном выше смысле любому семейству $f+p$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, где p — достаточно малое *семейство* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, то f называется *структурно устойчивым*.

Обычно бывает трудно *доказать*, что данное r-параметрическое семейство, $r \geqslant 1$, структурно устойчиво в этом смысле. Здесь применимы методы гл. 8, но они основываются на весьма глубоких теоремах. Ниже мы проиллюстрируем введенное понятие на примерах.

В некотором отношении более поучительно рассмотреть пример *не*устойчивости, так как всегда легче увидеть неполадки, а затем можно сказать, что „устойчивость — это когда такое не случается".

Если бы, скажем, мы провели исследование машины Зимана лишь для управляющих точек (α, β) на оси $\beta=0$, то мы пришли бы к семейству функций

$$W_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2. \tag{6.1}$$

Критические точки находятся здесь из уравнения

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W_a(x) = x^3 + ax;$$

они лежат на прямой $x=0$ и параболе $x^2+a=0$, как это показано на рис. 6.3(а). Эта диаграмма часто встречается в книгах по теории бифуркаций. Для многих целей это описание может оказаться вполне адекватным. Однако оно не является структурно устойчивым и не позволяет охватить все моменты поведения машины. Например, на рис. 6.3(а) при использовании принципа промедления мы не получим никаких катастрофических скачков.

Действительно, возмутим семейство функций (6.1) малым членом εx, что дает

$$\tilde{W}_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + \varepsilon x.$$

Теперь критические точки находятся из уравнения

$$0 = x^3 + ax + \varepsilon,$$

и соответствующий график (для малых ненулевых ε) выглядит примерно так, как показано на рис. 6.3 (b). Топология этого графика совсем другая. Например, он несвязен и не имеет точек самопересечения, причем это верно для сколь угодно малых ε.

Имеет всё это значение или нет, зависит, конечно, от точной постановки вопроса, на который ищется ответ. Рис. 6.3 (b) служит хорошим приближением к рисунку 6.3(a) в других, нетопологических смыслах; например, оба они очень похожи на рис. 6.3 (c), который может принадлежать как раз к тому типу, который желают получить в эксперименте! Дело, однако, в том, что мы не можем пренебречь структурной неустойчивостью с самого начала; прежде чем убедиться в ее безвредности, нужно проанализировать ее влияние на интересующие нас свойства. От структурной неустойчивости функции x^2y, которая обсуждалась в § 4 гл. 4, нельзя избавиться при помощи диаграммы вроде той, что показана на рис. 6.3 (c).

С другой стороны, полное семейство катастрофы сборки Уитни

$$V_{ab}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + bx \qquad (6.2)$$

является структурно устойчивым. Это утверждение обосновывается в гл. 8; однако в его правдоподобии можно убедиться при помощи следующего *очень* грубого рассуждения. Возмущения порядка выше четвертого не должны оказывать никакого качественного влияния по соображениям, связанным с теоремой 4.4. Члены четвертого порядка, квадратичные и линейные и так учитываются; кубические члены можно устранить подходящей заменой координат, как это делалось при анализе машины Зимана (§ 1 гл. 5); наконец, постоянные не влияют на критические точки. Сделать *это* рассуждение чем-то бóльшим, чем благое пожелание, вероятно, невозможно, так как оно не учитывает всех имеющихся здесь трудностей; строгое доказательство совсем другое и лежит глубже.

Из структурной устойчивости катастрофы сборки следует, в частности, что малые погрешности при построении машины Зимана не должны заметно влиять на ее поведение. (Эксперимент показывает, что даже очень большие погрешности могут не приводить ни к чему плохому. Иногда „локальное" менее локально, чем это ожидают.)

3 Физическая интерпретация структурной устойчивости

В науке общепринято требование повторяемости эксперимента: один и тот же эксперимент должен, в идеале, давать один и тот же результат при тех же самых условиях. Мы сказали „в идеале", так как никогда невозможно обеспечить *точную* повторяемость: внешние факторы вторгаются даже в самым тщательным образом организованные эксперименты. Например, чтобы обеспечить в точности то же самое гравитационное поле, нужно, в принципе, сохранить положение каждой частицы материи во Вселенной. Поэтому с более практической точки зрения повторяемость означает, что достаточно малые изменения условий эксперимента не должны существенно сказываться на результате. Отсюда вытекает, что и математическое описание физического явления должно обладать того же рода нечувствительностью к возмущениям.

Математическая формулировка этого требования зависит, следовательно, от двух вещей:

(a) какого рода возмущения мы допускаем;
(b) к чему мы готовы быть нечувствительны.

В литературе внутри данной области науки разным вещам стараются давать разные названия, но часто случается, что одно и то же название встречается в различных областях, имея в каждой из них свое значение. И, пожалуй, нет более распространенного названия, чем *структурная устойчивость*. Это понятие было впервые введено в контексте дифференциальных уравнений русскими математиками А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 г. (под названием „грубых систем"); оно привело к общему понятию структурно устойчивых динамических систем, где по пункту (a) мы допускаем малые возмущения рассматриваемых дифференциальных уравнений, а в (b) требуем *топологической* эквивалентности соответствующих множеств кривых, изображающих решения. Что же касается теории катастроф, то здесь (a) допускаются малые гладкие возмущения соответствующего семейства функций и (b) требуется более силь-

ная „диффеоморфная“ эквивалентность, которая была определена выше.

Итак, имеется много различных понятий структурной устойчивости. Будет ли в данном конкретном приложении понятие, наиболее удобное математически, наилучшим образом отвечать требованию физической повторяемости, зависит от ситуации, и этот вопрос должен быть изучен отдельно в каждом отдельном случае. Общее требование состоит в том, что всё устойчивое настолько, чтобы быть повторно наблюдаемым, должно быть структурно устойчивым, *а уж в каком смысле понимать структурную устойчивость, зависит от требующего.*

Слегка идеализированный физический пример поможет нам пояснить это. Маятник без трения, подвешенный в вакууме, совершает идеально регулярные колебания. Возмутим их, сообщив маятнику несколько больший начальный толчок, и он будет продолжать регулярно колебаться почти с тем же периодом. В этом смысле наша система структурно устойчива. Возмутим систему иначе, впустив в вакуумный колпак немного воздуха, и колебания станут постепенно затухать. В этом смысле она структурно неустойчива. Но если мы теперь ограничимся рассмотрением лишь экспериментов, длящихся не более пятидесяти колебаний, то мы не сможем заметить существенных изменений, и система опять структурно устойчива. Наконец, вернемся к случаю маятника в вакууме и чуть большего начального толчка, но будем сравнивать возмущенный и невозмущенный маятники в течение целого года (или, если нужно, еще дольше); тогда мы заметим качественные отличия, такие, как смена фазы. Опять неустойчивость!

Никакая механическая колебательная система не обладает устойчиво свойством согласованности с цезиевыми часами.

Таким образом, понятие устойчивости зависит как от возмущений, которые мы допускаем, так и от типа эквивалентности, который мы требуем. Чем шире класс возмущений, тем грубее, по идее, должно быть подходящее понятие эквивалентности. Наиболее сильные результаты об устойчивости, и наиболее интересные,— это когда класс возмущений оказывается шире (или эквивалентность тоньше), чем это можно было ожидать с самого начала.

С учетом всего сказанного „естественным“ понятием устойчивости для теории катастроф представляется (во всяком случае для наших теперешних целей) как раз понятие, введенное выше, при котором сохраняется большинство примечательных черт геометрии катастроф и их динамики. Позво-

лительно интерпретировать его как физическую повторяемость *этих черт*, при наличии возмущений лишь *соответствующего типа*. В дальнейшем, когда мы будем ссылаться на физическую устойчивость или утверждать ее существование, мы всякий раз будем обсуждать ее связь с математикой.

4 Лемма Морса и лемма расщепления для семейств

Как лемма Морса, так и лемма расщепления переносятся в сильной форме на случай семейств. В действительности это обобщение может быть выведено из леммы расщепления, если параметризующие семейство переменные рассматривать „на общих основаниях" с прочими переменными; для них начальное рассуждение с „выпрямлением" (теорема 4.5) не является необходимым, так что в некотором отношении доказательство более общей теоремы проще. Мы дадим здесь формальное доказательство самой сильной теоремы этого рода, не слишком разукрашивая его и имея своей главной целью продемонстрировать тот факт, что даже такие более сильные результаты в своей основе элементарны и не требуют привлечения глубоких результатов теории катастроф.

ТЕОРЕМА 6.1 (лемма расщепления для семейств). *Пусть* $F\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ *гладко. Будем обозначать точки произведения* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r$ *через* $(x, c) = (x_1, \ldots, x_N, c_1, \ldots, c_r)$. *Допустим, что коранг матрицы Гессе*

$$H = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant N}$$

в точке $(x, c)=0$ *равен* m. *Тогда* F *эквивалентно семейству вида*

$$\tilde{F}(y_1(x, c), \ldots, y_m(x, c), c) \pm y_{m+1}^2 \pm \ldots \pm y_N^2.$$

Доказательство. Выберем в матрице H невырожденную подматрицу размера $(N-m)\times(N-m)$ и перенумеруем координаты, чтобы это была подматрица

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant N-m}.$$

Далее, рассмотрим отображение

$$G\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{N-m},$$
$$(x, c) \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, c), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{N-m}}(x, c)\right).$$

Согласно предположению, оно имеет на $\mathbb{R}^{N-m} \times \{0\}$ максимальный ранг $N-m$. Значит, по теореме о неявной функ-

ции локально (в некоторой окрестности U начала в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$) определена функция

$$g\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{N-m},$$

удовлетворяющая условиям

$$G(g(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c), x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c) = 0,$$
$$g(0) = 0.$$

Если положить

$$z = (g(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c), x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c),$$

то по непрерывности матрица

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant N-m}$$

невырожденна для всех $c \in U$. Введем отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r,$$
$$(x, c) \mapsto (x_1 + g(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c),$$
$$\ldots, x_{N-m} + g(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c), x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c).$$

Это, очевидно, диффеоморфизм, который переводит каждое множество вида $c = \text{const}$ в себя. Положим $F = F \circ \varphi$. Тогда вблизи начала имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \ldots, 0, x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N-m,$$
$$\det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right](0, \ldots, 0, x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c)\Big|_{1 \leqslant i, j \leqslant N-m} \neq 0.$$

Теперь мы можем продолжать, как при доказательстве леммы Морса в гл. 4, с той оговоркой, что функции h_{ij}, H_{ij}, g и т. д. ($1 \leqslant i, j \leqslant N-m$) имеют $(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c)$ в качестве параметров. При этом для данных значений параметров мы заменяем лишь переменные $x_1, \ldots, x_{N-m}$. Критическое значение каждой функции $F|_{\mathbb{R}^{N-m} \times \{(x_{N-m+1}, \ldots, x_N, c)\}}$ не изменяется, и этим определяется искомая функция $\tilde{F}$:

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.2 (лемма Морса для семейств). *Пусть* $F\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ *гладко. Предположим, что матрица Гессе*

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant N}$$

невырожденна в точке $(x, c) = 0$. *Тогда* F *эквивалентно семейству вида*

$$\pm y_1^2 \pm \ldots \pm y_N^2.$$

Доказательство. В теореме 6.1 полагаем $m=0$.

Заметим, что параметр $c \in \mathbb{R}^r$ больше не фигурирует в нашем выражении: функция $F_c(y)=F(y, c)$ морсовская, фиксированного типа, и не зависит от c. Параметр c „отключен".

Для семейства функций, представленного в виде, указанном в теореме 6.1, мы называем переменные $y_1, \ldots, y_m$ *существенными*, а переменные $y_{m+1}, \ldots, y_N$ — *несущественными*. Это название отражает тот факт, что во многих вопросах мы можем пренебречь влиянием $y_{m+1}, \ldots, y_N$.

5 Геометрия катастроф

Следствие 6.2 выражает устойчивость морсовских функций в особенно сильной форме. Не только возможно любое малое возмущение функции f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ с морсовской особенностью в $0 \in \mathbb{R}^n$ „свести на нет" вблизи $0 \in \mathbb{R}^N$ путем перепараметризации и добавления константы, восстановив исходный вид функции,— это можно сделать *равномерно* для гладкого *семейства* возмущений F: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, где $F|_{\mathbb{R}^N \times \{0\}}$ есть данная функция f. (При малых c функции $F|_{\mathbb{R}^N \times \{c\}}$ представляют собой малые возмущения f — в силу непрерывности и гладкости F,— как бы там ни понималась „малость".)

Итак, если для машины Зимана (§ 1 гл. 5) выбрать положение управляющих параметров (α, β), для которого упругая энергия, выраженная как функция от θ, имеет лишь морсовские критические точки, то эта точка (α, β) обладает такой окрестностью, что изменение управления в ее пределах не оказывает — топологически — никакого эффекта. Критические точки сдвигаются как гладкие функции от управления (это та часть приведенного выше доказательства, где действует теорема о неявной функции) и с точностью до перепараметризации θ и добавления константы, зависящей от точки управления, ничего не изменяется. Вблизи таких точек, и *только* там, многообразие катастрофы можно представлять себе локально как график „многозначной функции" с несколькими листами (см. примеры гл. 5).

Мы видим, что *пока критические точки остаются морсовскими, бифуркаций не происходит*: локально система не изменяется. (В то же время нелокальные характеристики системы могут меняться, например, то, какой из минимумов самый глубокий; см. § 12 гл. 11.) Набор критических точек может измениться только за счет того, что одна из них или

несколько становятся неморсовскими. Вот почему мы концентрируем в следующей главе наше внимание на типах вырожденных особенностей, встречающихся типичным образом, и способах „перехода“ через такие особенности. Они „организуют“ превращения одних видов невырожденных функций в другие, приблизительно так же, как это делает катастрофа сборки Уитни, проанализированная в § 2 предыдущей главы.

7 КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТОМА

Цель этой главы — дать интуитивно-геометрический набросок того, как теорема Тома о классификации элементарных катастроф выводится из рассмотрений, связанных с трансверсальностью. Математические трудности, возникающие при попытке развернуть этот набросок-программу в строгое доказательство, мы выделим в виде отдельных простых и относительно правдоподобных утверждений, которые можно принять на веру, чтобы не прерывать хода рассуждений. В действительности доказательства этих утверждений очень трудны, и именно здесь и вступает в игру более глубокая математика, стоящая за теоремой Тома. Достаточно подготовленный математически читатель найдет полное изложение в книге Брёкера и Ландера [9] или статье Тротмэна и Зимана [22]. Дополнительные мотивировки в этом направлении будут приведены в гл. 8. Промежуточный шаг представлен книгой Лю [28] — более строгой, чем наша, более геометричной и более богатой мотивировками, чем полные изложения. Мы хотели бы отметить, что относящиеся к трансверсальности рисунки у Лю, в которых выделены некоторые специальные направления, отвечают более прямо, чем наши, алгебраическим условиям трансверсальности из формального доказательства. Принятый нами подход имеет с точки зрения наглядности то преимущество, что позволяет снабдить картинками большее число случаев.

Достоинство такого наброска в том, что становится ясным, почему должна быть верна какая-то теорема типа теоремы Тома. Знаменитый список семи элементарных катастроф лишается тем самым доли своей таинственности. Предположения, при которых доказывается теорема Тома, становятся естественными ограничениями, определяемыми лежащей в основе идеей. Можно надеяться, что, пусть небольшое, понимание того, каким образом доказывается эта теорема, окажется полезным для всех, кто пожелает применять ее, не продираясь предварительно через полное математическое доказательство, но кому трудно принять результат

целиком на веру, ибо это ведет к недопониманию или ошибкам.

В этой главе мы сосредоточим свое внимание на следующем вопросе. Если задано r-параметрическое семейство функций, то какие локальные типы функций встречаются там типичным образом? Это одна из нитей того сплетения, которое представляет собой теория катастроф. Столь же важным является и обращение этого вопроса: если задана некоторая функция, то как может выглядеть содержащее ее семейство (вблизи данной функции)? Ответ на этот последний вопрос, как мы увидим в следующей главе, получается с помощью того же самого математического подхода. Геометрия катастроф из списка Тома будет исследована в гл. 9.

1 Функции и семейства функций

Пусть задана функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, где X — некоторое многообразие (обычно это просто $\mathbb{R}^n$). Так как типичными являются морсовские критические точки (если вообще имеются критические точки), то типичным образом в данной точке либо $Df \neq 0$, либо же $Df = 0$, но матрица Гессе неособая; по лемме Морса мы можем поэтому записать f локально одним из следующих способов:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) } f(x_1, \ldots, x_n) = p + x_1, \\ \text{(b) } f(x_1, \ldots, x_n) = p + x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2,\end{array}\right\} \tag{7.1}$$

которые соответственно представляют некритическую точку и морсовское $(n-i)$-седло.

Но что если перед нами не индивидуальная функция, а целое семейство? В гл. 5 мы рассмотрели ряд машин, для каждой из которых возможно варьировать выбор функции f среди некоторого семейства функций. В этих примерах варьирование функции производится с помощью механических средств, например изменением положения центра тяжести или натяжения резинки. Важный математический момент, который здесь надо подчеркнуть, состоит в том, что эти семейства функций могут содержать отдельные неморсовские и, следовательно, атипичные функции. Тем не менее сами семейства являются типичными *как семейства*. Как и раньше, мы не станем уточнять, что мы имеем в виду под „типичностью", а положимся на интуицию читателя: они типичны в том же смысле, в каком типична трансверсальность. Мы надеемся углубить и заострить эту интуицию, приведя во второй половине нашей книги много разнообразных физических примеров.

2 Однопараметрические семейства

Мы уже видели в гл. 4, как устойчивость морсовской функции вытекает из устойчивости трансверсальности. „С точностью до перепараметризации" морсовскую функцию нельзя изменить малым возмущением, а ее различные критические точки — максимумы, минимумы и седла — сохраняются как критические точки того же типа. Однако если возмутить функцию, изображенную на рис. 4.19 (a) побольше, как на рис. 7.1, то „по дороге", как несложно проверить, нам обязательно встретится функция, производная которой не будет трансверсальна к нулевой прямой (рис. 7.1(b)).

Однако, прибегнув к некоторого рода высшей трансверсальности, мы все же можем определить типичный способ, каким происходит последовательность возмущений в целом.

Нам надо рассмотреть функцию $X \to \mathbb{R}$, которая меняется в зависимости от некоторого внешнего параметра (в приложениях это может быть время, положение центра тяжести, температура и т. д.). Мы можем записать такую параметризованную функцию либо как семейство функций f_t: $X \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, либо, что более удобно, как одну гладкую функцию

$$f\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$(x,\ t) \mapsto f(x,\ t) = f_t(x). \tag{7.2}$$

Мы готовы к тому, что для отдельных функций f_t: $X \to \mathbb{R}$ производная не будет трансверсальной к нулю, как на рис. 7.1 (b). Но аналогично предыдущему мы можем рассмотреть семейство отображений Df_t: $X \to R$ как одно отоб-

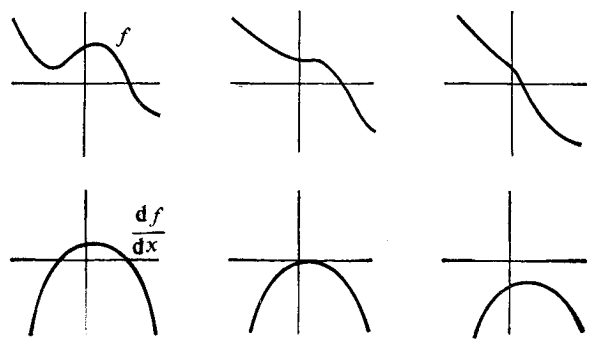


Рис. 7.1

ражение

$$\partial_X f\colon\ X\times\mathbb{R}\to X,$$
$$(x,\ t)\mapsto \partial_X f\ (x,\ t)=Df_t\,(x).$$

Индекс X указывает, что мы берем производные только „по пространству X", т. е. только по x, не по t. Причина этого в том, что нас интересует характер критических точек f_t в фиксированный, хотя и произвольный, момент t; рассмотрев машины, изученные в гл. 5, можно убедиться, что обращение в нуль производной по t не играет здесь никакой роли.

Рис. 7.2 показывает график типичной функции $\partial_X f$ для случая $X=\mathbb{R}$. Отметьте, что имеется момент $t=c$, для которого производная Df_c не трансверсальна к нулю в точке x_c, но что тем не менее $\partial_X f$ трансверсальна к нулевой плоскости в точке $(x_c,\ c)$, а на самом деле и всюду. Именно *эта* трансверсальность является типичной, и ее мы и будем использовать.

Обозначим точку $(x_c,\ c)$ через P. Графики нулевой функции и функции $\partial_X f$ являются двумерными поверхностями в $\mathbb{R}^3$. По соображениям размерности они не могут (в типичном случае) пересекаться лишь в изолированных точках. Их пересечением в типичном случае служит некоторая кривая C. Аналогичным образом в случае $X=\mathbb{R}^n$ как 0, так и $\partial_X f$ суть отображения $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$, и поэтому их графики являются $(n+1)$-мерными поверхностями в $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n+1}$. Размерность их пересечения в типичном случае равна $(n+1)+(n+1)-(2n+1)=1$, т. е. это пересечение есть кривая C; и пересекаются по C они трансверсально. Итак, типично, имеются

(a) места, где $\partial_X f\,(x,\ t)\neq 0$, т. е. f_t регулярна;

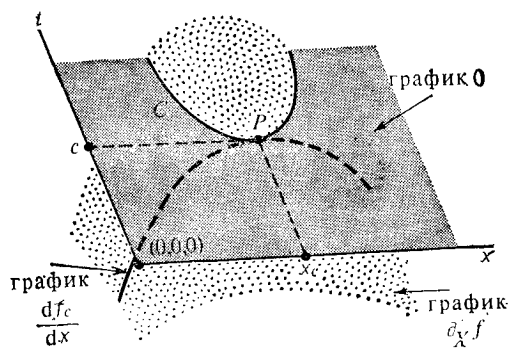


Рис. 7.2

(b) места, где Df_t трансверсально пересекает нуль, т. е. f_t имеет невырожденную морсовскую особенность;

(c) места, подобные точке P.

В случаях (a) и (b) структурная устойчивость соответствующих индивидуальных функций означает, что, слегка варьируя t, мы получаем с точностью до перепараметризации то же самое. Фактически эту перепараметризацию можно провести в гладкой зависимости от t, так что t вовсе исчезнет из выражения для f в окрестности рассматриваемой точки. (Для случая (b) мы это уже подробно доказали (следствие 6.2). Случай (a) легче, и читателю предоставляется самому получить нетрудное обобщение соответствующего „непараметризованного" утверждения.) Поэтому вблизи таких точек $f(x, t)$ (где $x=(x_1, \ldots, x_n)$) можно локально представить одним из выражений (7.1).

Остается изучить случай (c). Один из способов сделать это состоит в том, чтобы пройти через точку P по кривой C. (Формально это не является необходимым, если в нашем распоряжении имеется вся нужная математическая техника, но для нашего „анализа с картинками" это будет очень полезно. Другой наглядный подход можно найти у Лю [28].) Всюду вдоль C мы имеем критические точки; на самом деле C как раз и есть множество точек, в которых разложение Тейлора для f_t не имеет линейного члена. В настоящую минуту нас не волнует постоянный член разложения, так как мы изучаем не значения функций f_t вдоль C, а их форму. Таким образом, нас интересует в первую очередь квадратичный член.

Чтобы выявить некоторые важные моменты, мы возьмем далее $X=\mathbb{R}^2$, хотя при этом по причине большой размерности уже нельзя будет рисовать графики. Представим себе, что в момент s мы находимся в точке $C(s)=(x_s, y_s, t_s)$ кривой C. (Если в каком-либо приложении t трактуется как время, не следует путать его с s. Действительно, t_s „поворачивает вспять", когда мы проходим точку P, так что s представляет собой совсем другое время, говорящее, „как далеко мы продвинулись по картинке".) Можно считать, что $s=0$ в точке P. Вблизи точки (x_s, y_s) функцию f_{t_s} можно записать в виде

$$f_{t_s}(\tilde{x}_s, \tilde{y}_s) = p + a_s\tilde{x}^2 + b_s\tilde{x}\tilde{y} + c_s\tilde{y}^2 + \text{функция более высокого порядка},$$

где p — постоянная, $\tilde{x}=x-x_s$, $\tilde{y}=y-y_s$ и a_s, b_s, c_s могут быть обычным образом выражены через вторые частные производные. Сопоставляя каждому квадратичному выражению

от двух переменных $ax^2+bxy+cy^2$ тройку (a, b, c) его коэффициентов, мы видим, что при изменении s квадратичные члены рассматриваемого тейлоровского разложения пробегают кривую (a_s, b_s, c_s) в трехмерном пространстве I всех квадратичных выражений. Значит, двигаясь вдоль кривой C в $X\times\mathbb{R}$, мы одновременно движемся вдоль другой кривой, скажем C, в пространстве I. Чтобы увидеть, что встречает на своем пути эта вторая кривая, мы должны поближе рассмотреть пространство I.

В § 5 гл. 2 мы показали, что тип квадратичной формы в I зависит от ее расположения относительно некоторого двойного конуса — так называемого *дискриминантного конуса* вырожденных квадратичных форм. По мере нашего продвижения по C, точка (a_s, b_s, c_s) вычерчивает кривую $\tilde{C}$ в I, которая в типичном случае трансверсальна к дискриминантному конусу S (рис. 7.3). Мы снова видим, что, за исключением ряда изолированных значений s (как, например, значения $s=0$, которому отвечают точка $C(s)=P$ на рис. 7.2 и точка $\tilde{C}(s)=\tilde{P}$ на рис. 7.3), квадратичная часть функции f_{t_s}, определяемая ее второй производной, невырожденна. Таким образом, хотя первая производная равна нулю во всех точках кривой C по самому ее определению, квадратичная часть всюду, кроме точек вроде $\tilde{P}$, имеет тип либо u^2-v^2 (как в Q), либо u^2+v^2 (как в Q'), либо же $-u^2-v^2$.

Хотя типичная кривая $\tilde{C}$ может пересечь S (трансверсально), она не пройдет через начало. Действительно, одномерная кривая типично пересекает двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ по множеству размерности $2+1-3=0$, но в типичном случае кривая не проходит через заданную точку. Это озна-

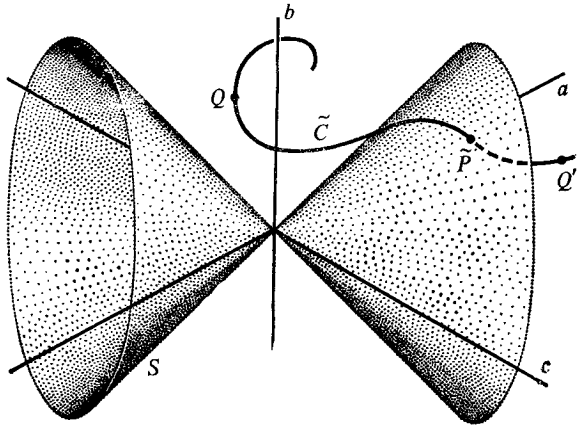


Рис. 7.3

чает, что форма $ax^2+bxy+cy^2$ не может стать более вырожденной, чем $\pm v^2$, где

$$v=\sqrt{|a|}\,x+\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\,y.$$

Эта форма вырождается только „в u-направлении". Лемма расщепления для семейств (теорема 6.1) показывает теперь, что вблизи (x_c, y_c) мы можем заменить (x, y) на (u, v) в гладкой зависимости от t и представить f в виде

$$f(u, v, t)=\tilde{f}(t, u)\pm v^2,$$

где знак при v^2 зависит от того, на какой поле конуса лежит точка $\tilde{P}$, а $\tilde{f}$ — функция, первая и вторая производные которой равны нулю в (0.0). Мы устранили теперь переменную v и можем ее игнорировать.

Проведенный нами анализ годится не только для $X=\mathbb{R}^2$, но и в общем случае. Если, скажем f — типичное однопараметрическое семейство функций $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, то вблизи неморсовских точек f можно привести к виду

$$f(u, v, w; t)=f(u, t)\pm v^2\pm w^2.$$

На этот раз пространство возможных квадратичных форм

$$ax^2+bxy+cy^2+dyz+ez^2+fzx$$

шестимерно, и мы не приводим аналогов рисунков 7.2 и 7.3. (Случай $\dim X=2$ прекрасно выявляет идею, а общее доказательство требует строгого математического подхода.) В общем случае типичное однопараметрическое семейство f функций f_t: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имеет в основном регулярные и морсовские точки плюс изолированные неморсовские особые точки, где коранг матрицы Гессе равен 1. Вблизи последних f может быть представлено в виде

$$f(u_1, \ldots, u_n; t)=\tilde{f}(u_1, t)\pm u_2^2\pm\ldots+u_n^2;$$

и при его изучении снова можно обращать внимание лишь на $\tilde{f}$. Итак, без потери общности можно ограничиться исследованием однопараметрических семейств функций $\tilde{f}_t$ от одной-единственной переменной u_1.

Для удобства будем писать f вместо $\tilde{f}$ и x вместо u_1. Мы будем теперь продвигаться вдоль C, рассматривая разложение Тейлора наших новых функций f_t более пристально, до порядка 4:

$$f_{t_s}(\tilde{x})=k_s+p_s\tilde{x}^2+q_s\tilde{x}^3+r_s\tilde{x}^4+\text{тейл};$$

здесь k_s — постоянная и $\tilde{x}=x-x_s$ для всех s. Коэффициенты

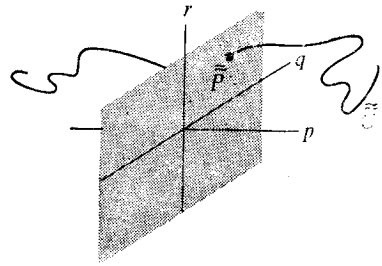


Рис. 7.4

p_s, q_s, r_s выражаются через производные. Это дает нам новую кривую

$$\tilde{\tilde{C}}(s) = (p_s,\ q_s,\ r_s)$$

в новом трехмерном пространстве I' с координатами p, q, r. Квадратичный член разложения исчезает при $p=0$, т. е. в плоскости qr в I' (рис. 7.4). Кривая $\tilde{\tilde{C}}$ в типичном случае пересекает эту плоскость в изолированных точках, вроде $\tilde{\tilde{P}}$, в которых исчезает квадратичный член, т. е. p_s обращается в нуль. Далее, типичным образом, когда p_s обращается в нуль, то q_s в нуль не обращается, так как иначе кривая $\tilde{\tilde{C}}$ пересекала бы ось r, а две кривые в трехмерном пространстве в типичном случае не пересекаются. Поэтому если f_t не имеет вида $p\tilde{x}^2+$ тейл (после соответствующей морсовской перепараметризации f_t приводится тогда в точности к виду $\pm u^2$), то она имеет вид $q\tilde{x}^3+$ тейл, где $q\neq 0$. По теореме 4.4 она может быть тогда приведена в точности к виду u^3.

Резюмируем: типичное однопараметрическое семейство функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет неособые точки, вблизи которых оно приводится к виду

$$(u_1, \ldots, u_n;\ t) \longmapsto u_1,$$

морсовские точки, вблизи которых оно записывается как

$$(u_1, \ldots, u_n;\ t) \longmapsto \pm u_1^2 \pm \ldots \pm u_n^2,$$

и изолированные точки, вблизи которых f_t приводится к виду

$$(u_1, \ldots, u_n;\ t) \longmapsto u_1^3 \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2. \qquad (7.3)$$

Мы видим здесь силу идеи коразмерности (§ 11 гл. 4). Наши рассуждения равным образом годятся и для пространства многочленов вида px^2+qx^3, или вида $px^2+qx^3+rx^4$, или, вообще, вида $px^2+qx^3+rx^4+\ldots+sx^k$ — во всех

случаях типичная кривая пройдет мимо множества многочленов, для которых $p=q=0$, так как коразмерность этого множества в каждом случае равна 2. Поскольку того факта, что p *или* q отлично от нуля, достаточно, чтобы определить искомую локальную форму, те же самые соображения трансверсальности применимы независимо от того, сколько членов по x мы допускаем. Для $k\geqslant 3$ множество k-струй от x, которые *не* приводятся к виду $\pm x^2$ или x^3 в достаточно малой окрестности нуля, имеет коразмерность 2 в множестве всех k-струй без линейных членов независимо от k. Это приводит нас к мысли, что множество всех *функций*, которые не всюду приводятся к одной из этих форм, имеет коразмерность 2 в пространстве всех функций. Такое представление полезно в том отношении, что дает возможность догадываться о том, что должно быть верным, но уже не столь полезно для того, чтобы получать строгие доказательства найденных таким образом истин, из-за технических сложностей, возникающих при рассмотрении (бесконечномерного) пространства „функций, определенных вблизи данной точки", или *ростков*,— пространства, к которому пространства струй служат последовательными приближениями.

Отметим также, что множество неморсовских квадратичных частей имеет размерность нуль в пространстве $\{px^2 | p\in\mathbb{R}\}$ квадратичных форм от одной переменной, размерность 2 (конус) на рис. 7.3, и т. д., но оно имеет одну и ту же *ко*размерность, а именно 1 в пространстве квадратичных форм от n переменных, каково бы ни было n.

Все приведения, которые мы выше проделали, основаны на результатах, доказанных нами полностью: мы использовали трансверсальность лишь для того, чтобы найти то, что мы затем приводили к полиномиальному виду. Но пока мы еще не проанализировали зависимость от t для (7.3). Это ведет нас к наиболее глубокой части всей теории. В точности так же, как любой типичный минимум (Df трансверсально к нулю) выглядит, как и всякий другой ($+u_1^2+\ldots+u_n^2$ после перепараметризации), *любой трансверсальный путь через любую неморсовскую функцию* f_t, *через которую* можно *пройти трансверсально некоторым конечномерным семейством, выглядит подобно всякому другому.* Это объясняется ниже в § 7 гл. 8 как эквивалентность „универсальных семейств". В это довольно легко поверить в случае u^3, если посмотреть на рис. 7.2—7.6; этот факт верен и в общем случае, но доказывается нетривиально. Он означает, что если мы нашли *какой угодно* трансверсальный путь через f_t, то мы знаем, что он должен быть типичным. Но один из

трансверсальных путей через u^3 задается выражением

$$f_t(u)=u^3+tu,$$

как нетрудно „проверить“ с помощью построенных для этого семейства рисунков, аналогичных рисункам 7.2, 7.4. Таким образом, вблизи точек, где выполняется условие (7.3), существуют такая перепараметризация по t (в данном случае не более чем сдвиг начала и изменение знака) и такая зависящая от t замена координат $(x_1, \ldots, x_n)$ на $(u_1, \ldots, u_n)$, после которых f получает выражение

$$f(u_1, \ldots, u_n; t)=u_1^3+tu_1 \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2.$$

Теперь легко увидеть, что семейство структурно устойчиво, так как рисунки 7.1—7.3 не изменяются качественно (в частности, трансверсальные пересечения остаются трансверсальными) при малых возмущениях; поэтому во всех случаях тип точек останется прежним, и семейство после малого возмущения можно будет привести к тому же самому виду.

Содержащая u_1 часть функции f_t изменяется при изменении t так, как показано на рис. 7.5. Локальный максимум и локальный минимум сближаются, сливаются при $t=0$ в неморсовскую особенность и исчезают. Если остальные члены (квадратичные по $u_2, \ldots, u_n$) все положительны, то минимум по u_1 дает морсовский локальный минимум для f, а максимум дает некоторое седло. Иные наборы знаков дают соответствующие седла. Рисунок 7.6 показывает это для семейства $u_1^3+tu_1+u_2^2$ (стрелками указаны направления наискорейшего спуска). Две особые точки (для обеих $u_2=0$) встречаются и исчезают. Если же f выглядит как $u_1^3+tu_1-u_2^2$, то мы получаем такую же картину, но перевернутую вверх ногами, с максимумами и седлами. Для $n>2$ мы можем получить минимум (0-седло), сливающийся с 1-седлом (в терминологии § 2 гл. 4), или вообще l-седло, сливающееся

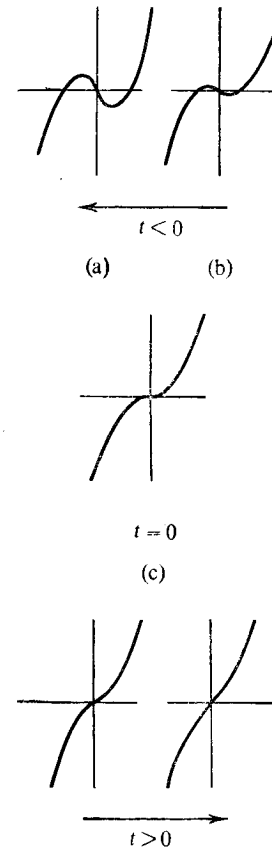


Рис. 7.5

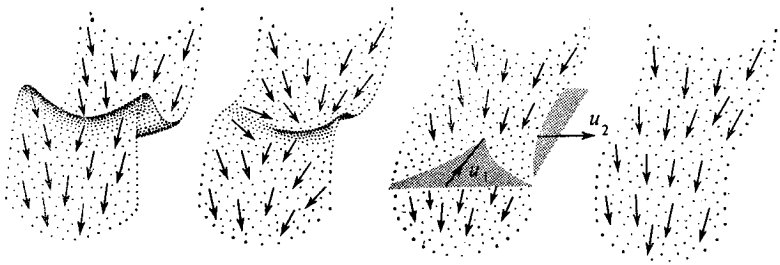


Рис. 7.6



Рис. 7.7

с $(l+1)$-седлом. Для $l=n-1$ это будет седло, сливающееся с максимумом.

Эти качественные черты картины могли бы быть усмотрены уже из рис. 7.2. Что нового дает стандартная форма, так это то, что она позволяет делать выводы о свойствах различных явлений на основе их алгебраического описания в подходящих координатах. Так получаются многие интересные предсказания, например о яркости радуги (см. гл. 12). Некоторые неочевидные факты мы можем вывести уже из рис. 7.2. Критические точки f_t задаются решениями $m_+(t)$, $m_-(t)$ уравнения

$$\frac{d}{du_1}(u_1^3+tu_1)=0,$$

т. е.

$$m_\pm(t)=\pm\sqrt{-t/3}\,.$$

Значит, критические точки при слиянии приближаются друг к другу по параболе, изображенной на рис. 7.7 (a). Критические *значения* в них

$$f_t(m_\pm(t))=(\pm\sqrt{-t/3})^3+t(\pm\sqrt{-t/3})=$$

$$=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}(-t)^{3/2}$$

сходятся друг к другу, касаясь по клюву, показанному на рис. 7.7 (b).

Эти картинки универсальны в том смысле, что они являются всеобщими для типичных путей, по которым однопараметрическое семейство функций может пройти через неморсовскую особенность. Они определяют *катастрофу складки*, простейшую из всех катастроф.

3 Нетрансверсальность и симметрия

В гл. 6 мы видели, что семейство

$$W_a(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2$$

не является структурно устойчивым. Легко проверить, что оно не трансверсально в описанном выше смысле: график DW не трансверсален к нулевой плоскости. Действительно,

$$\frac{d}{dx}W_a(x)=x^3+ax,$$

и соответствующая поверхность пересекает нулевую плоскость, как показано на рис. 7.8. (Если этот рисунок пока-

жется вам знакомым, то заметьте, что он появляется здесь не в обычной своей роли. Для катастроф, потенциал которых зависит лишь от одной переменной, имеют место различные случайные совпадения, которые уже не наблюдаются в случае двух или более переменных.) Упомянутое пересечение, очевидно, не трансверсально в начале; например, множество, по которому происходит пересечение, представляет собой знакомую фигуру — параболу с осью, а в случае трансверсальности мы должны были бы иметь вблизи начала одну-единственную кривую. (Вообще трансверсальные пересечения локально являются многообразиями.)

Если мы возмутим W, добавив член bx, то поверхность сдвинется вверх или вниз и пересечение станет трансверсальным, как на рис. 7.9. Это делает в высшей степени правдоподобным предположение, что для расширенного семейства

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

пересечение будет уже трансверсальным. Алгебраические критерии, о которых мы упоминали выше, подтверждают это.

Иногда потерю трансверсальности можно предотвратить, налагая различные *специальные*, т. е. атипичные условия. Например, допустим, что нас интересуют лишь *четные* функции от x, т. е. функции, для которых $f(x)=f(-x)$. Как легко видеть, в тейлоровских разложениях четных функций отсутствуют нечетные степени x, и поэтому для всякого однопараметрического семейства таких функций кривая, соответствующая кривой C (рис. 7.4), должна лежать целиком в плоскости $q=0$, поскольку q является как раз коэффициентом при нечетной степени. *В пределах этой плоскости* кривая может трансверсально пересекать ось r. Пересечение не было бы трансверсальным и, следовательно, как и выше, было бы неустойчивым, если бы мы добавили нечетные члены, но *при условии, что мы ограничимся рассмотрением четных функций*, это пересечение трансверсально и устойчиво. Фактически, применяя общую технику для этого специального случая, можно показать, что именно семейство $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2$, а не складка, будет „универсальным" локальным однопараметрическим семейством функций вблизи $x=0$.

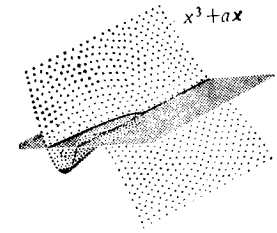


Рис. 7.8

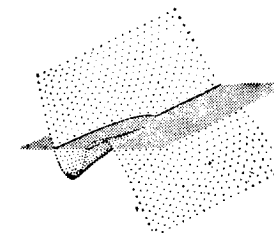


Рис. 7.9

К приложениям теории это имеет двоякое отношение. Условия симметрии вроде $f(x)=f(-x)$ могут быть „наложены

природой" с весьма большой точностью, как, скажем, в кристаллографии (см. гл. 14, §§ 15—20), и весь анализ тогда проводится в пределах соответствующего пространства функций. Таким образом, утверждение „почти все происходит так" нельзя усилить до „все происходит так". Однопараметрические семейства типа $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2$ *встречаются* (устойчиво!) в природе, и задача ученого-математика состоит в выяснении того, что за симметрия делает эти семейства устойчивыми,— в точности так же, как ограничение „гамильтоновыми" системами делает устойчивым простой гармонический осциллятор (см. обсуждение маятника в гл. 6). С другой стороны, инженеры и экспериментаторы часто стараются строить системы со специальными симметриями, отчасти потому, что это с поверхностной точки зрения должно упростить анализ системы. (Прекрасное изложение этого вопроса можно найти у Томпсона и Ханта [23].) По этой причине они часто ищут функции, которые имеют больше особенностей, чем типичные, *пытаясь добиться* пересечения C с осью r, если иметь в виду предыдущий пример. Типичным образом они не добиваются этого в полной мере. Однако чем лучше их техника, чем ближе они к тому, к чему стремятся, тем сильнее влияние несовершенств, из-за чего все и проваливается. (Мы увидим много таких примеров в главах, посвященных приложениям.) Нельзя безнаказанно прибегать к рассуждениям, основанным на соображениях типичности проектируемых систем, не учитывая атипичности, к которой (типично) стремится проектировщик.

Это ярко выявляется в недавней статье Фишера и Марсдена [24], занявшихся вопросом, имеет ли математическое пространство-время определенные свойства устойчивости, часто предполагаемые в научных исследованиях. Ответ: имеет, если оно не обладает некоторыми весьма специальными свойствами симметрии. Многообразие вариантов пространства-времени с этими симметриями имеет бесконечную коразмерность в пространстве всех математически возможных вариантов, поэтому не только типичное пространство-время не лежит в этом многообразии, но даже типичное $10^{10^{10}}$-параметрическое семейство вариантов пространства-времени будет лежать вне его. В очень сильном смысле слова почти никакое пространство-время не имеет этих симметрий, и нет никаких свидетельств в пользу того, что физическое пространство-время обладает ими.

Однако из-за удобства этих симметрий при анализе почти всякое пространство-время, встречающееся в физической литературе, имеет их.

Проектируя мосты или вселенные, люди типично думают об атипичном. Результатом часто оказывается неустойчивость.

4 Двухпараметрические семейства

Если проведенное выше исследование повторить для двумерного (двухпараметрического) семейства функций, такого, скажем, как возникающее в случае машины Зимана, то множество C (рис. 7.2) надо будет заменить множеством, размерность которого равна $(n+2)+(n+2)-(2n+2)=2$, или, другими словами, поверхностью. Аналога рис. 7.2 мы нарисовать не можем, для этого требуется четырехмерное пространство: одна размерность для x, две для двумерного параметра $t=(t_1, t_2)$ рассматриваемого семейства и еще одна для значений производных Df_t. Но аналогичное рассуждение проходит, и мы можем дать аналог рис. 7.3, а именно рис. 7.10.

На рисунке подчеркнуто, каким сложным в смысле глобального поведения, с дырами и самопересечениями, может быть $\tilde{C}$. Но мы рассматриваем всё *локально*, а трансверсальность гарантирует отсутствие локальных осложнений. Теперь $\tilde{C}$ пересекает конус S типичным образом по кривой (а не в одной точке, как раньше), но по-прежнему не проходит в типичном случае через начало. Поэтому опять в типичном случае квадратичный член разложения для f_t будет вырождаться лишь в одном направлении. По лемме о расщеплении f можно локально привести к виду

$$f(u_1, \ldots, u_n; t_1, t_2) = \tilde{f}(u_1; t_1, t_2) \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2.$$

Изучим $\tilde{f}$. Аналогом рис. 7.4 служит рис. 7.11. На этот

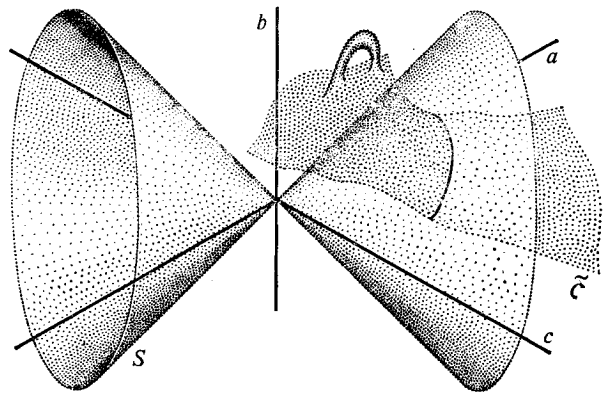


Рис. 7.10

раз типичная поверхность $\tilde{C}$ *может* пересекать ось r в изолированных точках, вроде показанной на рисунке точки Q. В отдельных местах, следовательно, третья производная f_t по u_1 обращается в нуль вместе со второй и, значит, можно написать

$$\tilde{f}_t(u_1) = k + ru_1^4 + \text{тейл},$$

где k — некоторая постоянная. Произведя в таких точках гладкую перепараметризацию координаты u_1, можно устранить тейл, так что останется только $\pm u_1^4$.

Прежде чем приступить к изучению того, как типичное семейство проходит через такую точку, нам нужно еще рассмотреть „кубические" точки, вроде точки K, где $q \neq 0$. Использовать двухпараметрическое семейство для того, чтобы трансверсально пройти через кубическую функцию,— это своего рода „многократное уничтожение": мы уже видели, что „универсальный" способ сделать это доставляется однопараметрическим семейством. Ввиду трансверсальности такой путь обязательно должен быть включен в наше семейство, ибо вообще, если *возможно*, чтобы кривая, проходящая через данную точку подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$, была нетривиальным образом трансверсальна к M (это требует, конечно, чтобы $\dim M = n-1$), то объекты более высокой размерности будут трансверсальными к M в этой точке в точности тогда, когда они содержат некоторую такую кривую (см. рис. 7.12). Допустим, что точке K отвечает в пространстве параметров точка $t = t_0 = (t_1, t_2)$. В этом пространстве можно найти кривую T, по которой семейство f_t трансверсально проходит через f_{t_0}. Иными словами, однопараметрическое подсемейство

$$\hat{f} = \{f_t,\ t \in T\}$$

ведет себя, как при катастрофе складки. Включим теперь T в семейство кривых T_λ, $T_0 = T$, гладко изменяющихся с из-

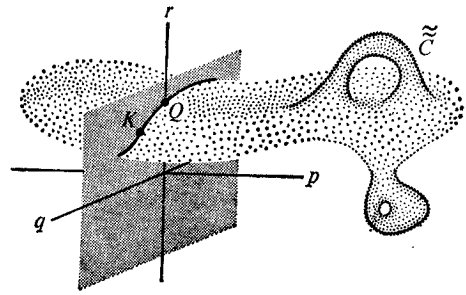


Рис. 7.11

менением λ, как на рис. 7.12(c). Каждая из них дает однопараметрическое семейство, близкое к $\hat{f}$. Поскольку $\hat{f}$ структурно устойчиво, все они выглядят в точности, как $\hat{f}$.

Точно так же, как мы ранее усилили утверждение об устойчивости морсовских функций „любой сосед выглядит так же" до утверждения „любое содержащее f семейство, параметризованное посредством $t=(t_1, \ldots, t_n)$, можно сделать независящим от t при помощи замены координат, гладко зависящей от t",— так теперь мы можем усилить утверждение об устойчивости семейства $\hat{f}$, заменив „сходство соседей" на „постоянство близких семейств". Это означает, что если на рис. 7.12(c) выбрать координаты $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ в окрестности точки t_0 так, чтобы $t_0=(0, 0)$, кривая T совпадала с осью $\tilde{t}_1$, а кривые T_λ — с прямыми $\tilde{t}_2=\lambda$, то усиленное утверждение об устойчивости позволяет нам улучшить далее выбор координат $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ таким образом, чтобы изменение $\tilde{t}_2$ не влияло на вид $f_{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2}$. (В § 6 гл. 8 мы уточним некоторые детали.) Это делает координату $\tilde{t}_2$ „лишней" и дает возможность записать f локально в виде

$$f(u_1, \ldots, u_n; \tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = u^3 + \tilde{t}_1 u_1 \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2,$$

так что локально мы можем игнорировать $\tilde{t}_2$.

Подлинное доказательство этого факта (Брёкер и Ландер [9], Тротмэн и Зиман [22]) или, точнее, общего результата, который мы лишь иллюстрировали нашим примером, в некотором смысле проводится более прямо: оно не требует выбора T и семейства кривых T_λ. Наше изложение имеет то преимущество, что оно убеждает в правдоподобии результата, не требуя привлечения сложных математических методов (которые на этот раз, в отличие от случая устойчивости морсовских функций, действительно отличаются большей глубиной).

Для семейства f, приведенного к указанному локальному виду, аналогом рис. 7.7 будет, очевидно, служить рис. 7.13.

Переходя теперь к самой сути задачи, займемся рассмотрением изолированных точек типа точки Q на рис. 7.11. Тут нам нужна вся двумерность $\tilde{C}$, а значит, и t, чтобы сделать пересечение с осью r трансверсальным. *Одним* из семейств, удовлетворяющих искомому требованию трансверсальности, и, следовательно, как было выше замечено, универсальным примером служит при $r>0$

$$\tilde{f}(u_1; t_1, t_2) = u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1.$$

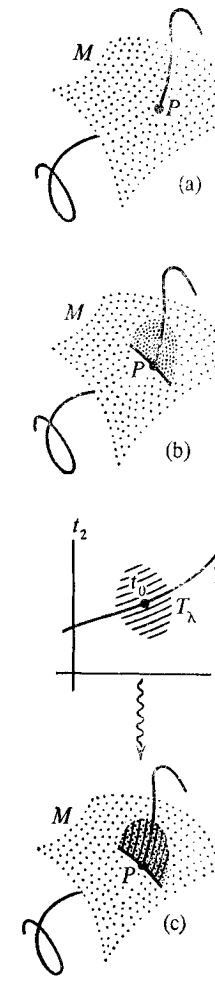


Рис. 7.12

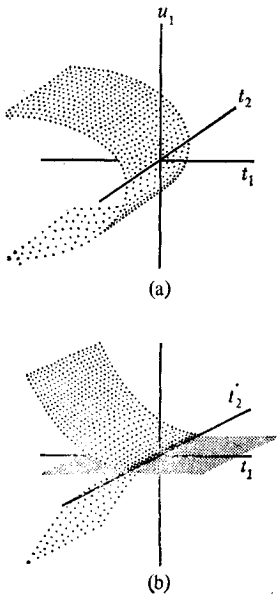


Рис. 7.13

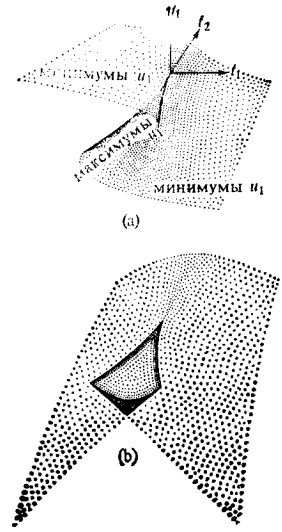


Рис. 7.14

Мы убрали r, выбрав подходящий масштаб по оси u_1. При $r<0$ типичное семейство вблизи Q будет выглядеть так же, только со знаком минус. Эти две возможности приводят соответственно к *катастрофе сборки* и *катастрофе двойственной сборки*. Аналогом рисунка 7.7 или 7.13 для сборки будет рис. 7.14. Мы занимались анализом геометрии этого рисунка в гл. 6. Для двойственной сборки всё аналогично, только на рис. 7.14 (a) нужно поменять местами слова „минимумы“ и „максимумы“, а рис. 7.14 (b) нужно перевернуть.

В этом случае более высокой размерности трансверсальность уже не так легко „увидеть“, и, разумеется, настоящая проверка должна быть алгебраической, аналогично тому как настоящий критерий того, что функция морсовская, состоит в невырожденности матрицы ее вторых частных производных. (Вычислительные правила для такой алгебраической проверки даны в следующей главе.) Все же стоит определить точную форму поверхности, изображенной на рис. 7.11, для случая нашего специального семейства, чтобы сделать явным, если и не доказать, тот факт, что оно действительно трансверсально.

Прежде всего заметим, что на рис. 7.7 (a) представлено в точности нулевое сечение графика на рис. 7.2 (сечение горизонтальной плоскостью, изображенной на этом рисунке) для частного случая

$$f(u_1;\ t) = u_1^3 + tu_1.$$

В самом деле, если мы вложим плоскость u_1t в качестве координатной плоскости

$$\{(u_1,\ y;\ t) | y=0\}$$

в трехмерное пространство рис. 7.2, то кривая

$$3u_1^2 + t = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1;\ t) = \partial_X f(u_1;\ t) = 0$$

на рис. 7.7 будет служить как раз пересечением C этой координатной плоскости с графиком

$$\{(u_1,\ \partial_X f(u_1;\ t);\ t)\}$$

производной $\partial_X f$. Аналогично поверхность в пространстве $u_1t_1t_2$, показанная на рис. 7.14 (a), есть поверхность C пересечения трехмерной плоскости

$$\{(u_1,\ y;\ t_1,\ t_2) | y=0\}$$

с графиком поверхности

$$4u_1^3 + 2t_2u_1 + t_1 = \partial_X f(u_1;\ t_1,\ t_2)$$

в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ (не поместившемся на рисунке).

В дальнейшем мы игнорируем $u_2, \ldots, u_n$ и поэтому опустим в u_1 нижний индекс и будем писать просто u. Представляя себе поверхность C, как выше, мы видим, что для нее имеется весьма естественная система координат, а именно u и t_2. При любом выборе (u, t_2) мы получаем единственную точку в C, так как уравнение этой поверхности можно переписать в виде

$$t_1 = -4u^3 - 2t_2u.$$

(Это означает, что мы смотрим на поверхность C с той же стороны, что и на рис. 5.7 (f), где ось u горизонтальна, а ось t_2 вертикальна.)

Выбрав какую-нибудь точку $(\bar{u}, \bar{t}_2)$ в C, т. е. точку

$$(u;\ t_1,\ t_2) = (\bar{u};\ -4\bar{u}^3 - 2\bar{t}_2\bar{u},\ \bar{t}_2) \equiv (\bar{u};\ \bar{t}_1,\ \bar{t}_2),$$

мы можем рассмотреть 4-струю для $f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2)}$ в точке $\bar{u}$. Она имеет вид

$$f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2)}(\bar{u}+U) = (\bar{u}+U)^4 + \bar{t}_2(\bar{u}+U)^2 + (-4\bar{u}^2 - 2\bar{t}_2\bar{u}) \times$$
$$\times (\bar{u}+U) = -(3\bar{u}^4 + \bar{t}_2\bar{u}^2) + (6\bar{u}^2 + \bar{t}_2)U^2 + 4\bar{u}U^3 + U^4.$$

Постоянный член $-(3\bar{u}^4 + \bar{t}_2\bar{u}^2)$ нас не интересует; он нужен разве что для уточнения рис. 7.14 (b). Линейные по U члены, как и ожидалось (см. § 2), отсутствуют, так что мы должны изучить точки

$$(p,\ q,\ r) = (6\bar{u}^2 + \bar{t}_2,\ 4\bar{u},\ 1)$$

в пространстве I' коэффициентов многочленов

$$px^2 + qx^3 + rx^4,$$

как на рис. 7.4 и 7.11.

Очевидно, множество этих точек представляет собой просто плоскость $r=1$, изображенную на рис. 7.15, где показано также, как меняется положение точки на этой плоскости с изменением $\bar{u}$ и $\bar{t}_2$.

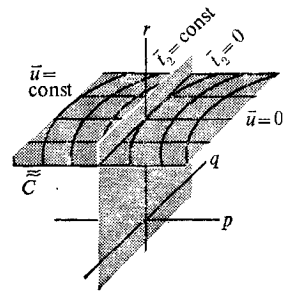


Рис. 7.15

Эта диаграмма важна для уяснения геометрии сборки и катастроф более высокого порядка, и мы еще вернемся к ней в следующей главе. В настоящую минуту заметим лишь, что поверхность $\tilde{\tilde{C}}$ явным образом трансверсальна к оси r — и как множество, и в том смысле, что если мы пройдем по C через (0, 0) с ненулевой скоростью, то соответствующее движение в I' через ось r также будет происходить с ненулевой скоростью.

Итак, мы провели подразделение пространства струй (и тем самым пространства функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) еще на один шаг дальше. Среди функций без линейных членов (к ним мы приходим, рассматривая r-параметрическое множество, служащее обобщением множества C (рис. 7.2) для случая $t=(t_1, \ldots, t_n)$) функции, разложение которых начинается с невырожденных квадратичных членов — и которые, следовательно, *приводятся* к квадратичным формам,— образуют множество коразмерности нуль. Функции, приводимые к виду с особенностями типа складки, имеют коразмерность 1, а приводимые к виду с особенностями типа сборки — коразмерность 2. „Остаток" есть множество коразмерности 3, как мы легко увидим, комбинируя рассуждения, проведенные нами по поводу рис. 7.10 и 7.11. Дальнейшим разложением этого остатка мы займемся в следующих параграфах.

Снова отметим, что эти коразмерности *не зависят* от n, хотя размерности самих множеств и зависят от n (даже если ограничиться рассмотрением, скажем, 4-струй). Очевидно, что идея коразмерности — самостоятельная и мощная идея.

5 Трех-, четырех- и пятипараметрические семейства

Для семейств с более чем двумя параметрами уже неприменимы соображения § 2 и 3 о вырожденности квадратичного члена самое большее в одном направлении. Типичное 3-параметрическое семейство может устойчивым образом содержать функции, которые вырождены сразу в двух направлениях. Однако трехкратной вырожденности не должно быть, пока число параметров не достигнет 6, поскольку такая вырожденность требует, чтобы мы трансверсально прошли через нуль в 6-мерном пространстве квадратичных форм

$$ax^2+bxy+cy^2+dyz+ez^2+fzx$$

от трех переменных. Иными словами, множество функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с *тройными* (и более высокими) вырождениями критических точек (коранг$\geqslant$3) имеет коразмерность 6. Таким образом, для семейств с не более чем пятью параметрами мы получаем два класса: первый характеризуется тем, что лишь одна переменная u_1 может не входить в квадратичные члены, а для второго уже две переменные u_1 и u_2 могут не входить в квадратичные члены. Рассмотрим эти два случая по очереди, не упоминая в дальнейшем о тех переменных, которые обязательно входят в квадратичные члены и зависимость от которых мы можем локально свести к *одним*

только этим квадратичным членам, независимо от t, как и раньше, т. е. о переменных u_i с $i\geqslant 2$ в первом случае и с $i\geqslant 3$ во втором.

Исследуем сперва типичное семейство $f(x;\ t_1,\ t_2,\ t_3)$. Для него множество $\tilde{\tilde{C}}$ в пространстве $pqr=I'$ трехмерно, так что нам могут попадаться изолированные точки $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)$, для которых все производные (по x) порядка меньше пятого от функции $f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)}$ равны нулю. Действительно, это те точки, для которых $\tilde{\tilde{C}}$ проходит через начало в I', что в точности аналогично существованию изолированных точек с особенностью четвертого порядка для двухпараметрического семейства (см. § 3). По прямой аналогии с этим случаем, если мы расширим I' до четырехмерного пространства, добавив четвертую координату, отвечающую коэффициенту при члене пятой степени sx^5, то в типичном случае она не будет равна нулю, когда остальные три координаты p, q и r обращаются в нуль. (Подсчитайте размерности: типичная трехмерная гиперповерхность проходит мимо начала в четырехмерном пространстве.) Поэтому $f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)}$ можно локально представить в виде u^5, а семейство f соответственно в виде

$$f(u;\ t_1,\ t_2,\ t_3)=u^5+t_3u^4+t_2u^2+t_1u$$

(положив, как обычно, $u=u_1$) — в основном так же, как и в случаях складки или сборки.

По тому же образцу, очевидно, можно построить r-параметрическое семейство

$$f(u;\ t_1,\ \ldots,\ t_r)=\pm(u^{r+2}+t_ru^r+t_{r-1}u^{r-1}+\ldots+t_1u)$$

для любого r. Хотя первым в этой серии семейств идет складка, простейшим случаем, в котором по-настоящему проявляются характерные черты этих семейств, является сборка, поэтому их всех именуют в ее честь *каспоидами* [1]. Трехмерное семейство, выписанное выше, называется *ласточкиным хвостом*, четырехмерное

$$f(u;\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=\pm(u^6+t_4u^4+t_3u^3+t_2u^2+t_1u)$$

[1] От английского cusp (буквально „острый выступ, точка пересечения, рог") — термина, которому отвечает русский термин „сборка". Общеупотребительного русского термина для этой серии семейств нет. В классификации В. И. Арнольда [26, 40] она называется „серией А".— *Прим. перев.*

— *бабочкой* (соотв. *двойственной бабочкой*), пятимерное

$$f(u; t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = u^7 + t_5u^5 + t_4u^4 + t_3u^3 + t_2u^2 + t_1u$$

— *вигвамом*. Назначение этих экзотических наименований исключительно мнемоническое — выделить характерные геометрические признаки, присущие различным катастрофам; мы познакомимся с ними ближе в следующей главе.

Теперь обратимся ко второму случаю — случаю двойной вырожденности (коранг 2), в котором $\tilde{C}$ *проходит* через начало. Алгебраически этот факт выражается в том, что матрица Гессе некоторой (отдельной) функции $f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)}(x, y)$ вся целиком обращается в нуль в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y})$, т. е. принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(а не просто оказывается вырожденной с нулевым *определителем*; конечно, это последнее условие тоже дает вырожденность квадратичной формы, но с его помощью нельзя различить однократную вырожденность и кратную). Чтобы найти форму функции в этом случае, нам следует провести разложение по обеим переменным x и y одновременно до членов более высокого порядка, чем квадратические.

Жизнь при этом усложняется, так как приходится привлекать более мощную технику для того, чтобы решить, сколько именно членов ряда Тейлора надо еще добавить. Критерии для этого будут описаны нами в следующей главе. Доказательства их лежат глубже, чем доказательства аналогичных критериев для морсовского случая и для случая одной переменной, данные в гл. 4, но их применение требует лишь той алгебры и того анализа, которые нами уже были выше изложены. Для читателя будет полезным упражнением проверить с помощью этих критериев соответствующие приводимые ниже утверждения (например, что никакие члены более высокого порядка не могут изменить локальной формы функции x^3+y^4).

Напомним, что ряд Тейлора для функции $f_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)}$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ не имеет линейных и квадратичных членов. Всякая близкая точка $(x, y; t)$ либо лежит вне C — и в этом случае разложение функции f_t в точке (x, y) имеет ненулевые линейные члены,— либо лежит в C, но отвечает ненулевой точке поверхности $\tilde{C}$. (Это вытекает из того, что $\tilde{C}$ проходит через $(0, 0, 0)$ трансверсально. Как $\tilde{C}$, так и I трехмерны, и потому проход через $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{t})$ с ненулевой скоростью в C вле-

чет за собой проход через (0, 0, 0) с ненулевой скоростью в I, см. гл. 4.) Вблизи от точки $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{t})$, но не в ней самой, мы можем иметь лишь одно направление, в котором функция „хуже", чем квадратичная, и, значит, лишь особенности каспоидного типа. Типичное трехпараметрическое семейство в пространстве $pqr=I'$ пересечет плоскость $p=0$ по двумерному множеству кубических точек (складки), ось r $(p=q=0)$ — по одномерному множеству особенностей четвертого порядка (сборки), а начало $p=q=r=0$ — в некоторых *изолированных* точках, отличных от $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{t})$. Эти последние мы можем игнорировать, сосредоточив свое внимание на достаточно малой окрестности точки $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{t})$. Таким образом, в непосредственной близости от этой точки могут встретиться лишь поверхности точек складки и кривые точек сборки. В гл. 9 мы подкрепим это нестрогое рассуждение геометрическим анализом.

Приняв $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)$ за начало и, как обычно, игнорируя постоянный член, мы получаем функцию, разложение которой не имеет линейных и квадратичных членов и начинается сразу с кубических

$$f_0(x, y)=\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3+\text{тейл}.$$

Теперь вспомним о геометрической классификации кубических форм, данной в § 6 гл. 2. Пусть K — пространство всех кубических форм $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, так что $K=\mathbb{R}^4$. Разложение K на типы кубик задается браслетом омбилик Зимана. Итак, мы берем типичное трехпараметрическое семейство функций f и смотрим на кубический член $F=j^3f_{(0,0,0)}$; ему соответствует некоторая точка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ в K.

В типичном случае точка F не будет началом K, поэтому изменением масштаба можно добиться, чтобы $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1$; следовательно, мы можем обратиться к фото 1 (см. конец § 6 гл. 2). В типичном случае F не будет лежать ни на ребре, ни на поверхности браслета, так что F должно быть представимо в виде

$$x^2y+y^3 \quad \text{или} \quad x^2y-y^3.$$

Отсюда можно вывести (хотя соответствующее доказательство уже не столь элементарно, как в случае функции x^k+ +тейл), что сама функция $f_{(0,0,0)}$ локально приводится к виду $u^2v\pm v^3$ (с надлежащим знаком) с помощью гладкой замены координат. В качестве упражнения читателю стоит проверить это, пользуясь правилами следующей главы.

Семейство f в типичном случае проходит через $f_{(0,0,0)}$ трансверсально к K, как и раньше, поэтому его можно за-

писать в том же виде, что и любое другое трансверсальное семейство, которое мы пожелаем выбрать. Удобна такая форма:

$$f(u_1,u_2;\ t_1,\ t_2,\ t_3)=u_1^2u_2\pm u_2^3+t_3u_1^2+t_2u_2+t_1u_1.$$

(Равным образом мы могли бы в качестве квадратичного члена взять $t_3(u_1^2+u_2^2)$ — поупражняйтесь с правилами гл. 8.) Знак плюс дает каноническую форму для *катастрофы гиперболической омбилики*[1], и знак минус — для *катастрофы эллиптической омбилики*.

Отметим, что поскольку изменения знака функции можно добиться заменой переменных, каждая из этих двух катастроф двойственна самой себе, подобно складке, ласточкину хвосту и вигваму и в противоположность сборке и бабочке.

Рассмотрим, далее, четырехпараметрическое семейство, для которого $\tilde{C}$ проходит через начало в I. Ему тесно в трех измерениях пространства I, и в действительности нам следовало бы рассматривать его в семимерном пространстве $I\times K$ полиномиальных функций вида

$$ax^2+bxy+cy^2+\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3,$$

где для $\tilde{C}$ достаточно места, чтобы существовать как четырехмерная „поверхность". Покуда не все из коэффициентов a, b, c обращаются в нуль, квадратичная часть разложения вырождается не более чем в одном направлении, так что, как и раньше, f_t в типичном случае будет локально записываться в одной из следующих форм:

$$\pm x^2\pm y^2,\ x^3\pm y^2,\ \pm x^4\pm y^2,\ x^5\pm y^2,\ \pm x^6\pm y^2,$$

при подходящем выборе координат; соответственно при прохождении через эти точки мы получим регулярные точки, складки, сборки, ласточкины хвосты и бабочки, как в § 5. Но там, где $\tilde{C}$ *пересекает* четырехмерное пространство K однородных кубик, выделяемое условием $a=b=c=0$, это пересечение в типичном случае будет происходить по целой кривой; действительно, в семимерном пространстве пересечение двух четырехмерных объектов должно быть одномерным. Посмотрим, как проходит эта кривая D по K.

В типичном случае D не проходит через начало, и мы снова можем перенести наши рассмотрения на единичную 3-сферу и использовать фото 1. Далее, в типичном случае

[1] Омбилика—от латинского umbilicus (пуп).— *Прим. ред.*

наша кривая может (хотя и не обязана) пересекать поверхность браслета омбилик, однако не должна пересекаться с его ребром — кривой точных кубов (кубик типа (iv)). Мы получаем, таким образом, целые кривые, вдоль которых функция f_t может быть локально представлена как $x^2y \pm y^3$, причем знак перед y^3 меняется на противоположный в некоторых изолированных точках $\bar{t}$, где $f_{\bar{t}}$ можно записать в виде

$$x^2y + \text{функция более высокого порядка.}$$

В отличие от случая $x^2y \pm y^3$ кубический член x^2y не гарантирует, что мы можем убить высшие члены. (Этот момент мы уже обсуждали в § 4 гл. 3). Поэтому нам приходится ввести в рассмотрение член четвертого порядка. К счастью, нет необходимости описывать аналог браслета омбилик для квартик (форм четвертого порядка) (хотя это и было проделано, см. Стюарт и Постона [25], стр. 110—147). Дело в том, что, хотя пространство квартик и пятимерно, в нашем случае в игру входит лишь одна размерность и мы можем ограничиться проводимым ниже алгебраическим анализом.

А именно предположим (самый общий случай), что

$$f_t(x, y) = x^2y + (\text{однородный многочлен степени } k) + O(k+1).$$

Тогда

$$f_t(x, y) = x^2y + ax^k + 2xyQ(x, y) + by^k + O(k+1),$$

где Q — однородный многочлен степени $k-2 \geqslant 2$. Положим

$$u = x + Q(x, y), \qquad v = y + ax^{k-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^2v + bv^k &= (x + Q(x, y))^2 (y + ax^{k-2}) + b(y + ax^{k-2})^k = \\ &= x^2y + ax^k + 2xyQ(x, y) + by^k + O(k+1) = \\ &= f_t(x, y) + O(k+1). \end{aligned}$$

Поэтому если $b \neq 0$, то f_t можно записать в виде

$$U^2V \pm V^k + O(k+1),$$

где $U = |b|^{-1/2k}u$, $V = |b|^{1/k}v$, и обещанные выше правила покажут, что с помощью локальной гладкой замены переменных можно представить f_t в точности в виде

$$f_t(x, y) = x^2y \pm y^k.$$

Если же b *равно* нулю, то мы привели f_t к виду

$$u^2v+(\text{однородный многочлен степени } k+1)+O(k+2)$$

и можем повторить всё сначала — привести это выражение к виду

$$u^2v+b'v^{k+1}+O(k+2)$$

и затем устранить остаток порядка $k+2$, если $b'\neq 0$. Если же $b'=0$, опять повторяем все сначала. Либо этот процесс где-нибудь остановится — и тогда $f_t(x, y)$ имеет вид x^2y+y^k *для некоторого* k,— либо же мы получим, что

$$f_t = x^2y+O(\infty)$$

(где под $Q(\infty)$ понимается функция, *все* производные которой в начале равны нулю), а это *крайне* атипично!

Итак, наша задача сводится к тому, чтобы найти, с какими значениями k мы можем в типичном случае встретиться, когда кубическая часть f_t перемещается вдоль кривой D.

Ответ пишется в общем по тому же образцу, что и в случае каспоидов. Отдельные точки на кривой D, в которых f_t не представляется в виде $x^2y\pm y^3$, в типичном случае не могут быть вырождены сильнее, чем $\pm(x^2y+y^4)$. (Заметьте, что мы имеем здесь две, а не *четыре* различные возможности $\pm x^2y\pm y^4$, как можно было бы ожидать с первого взгляда, поскольку $x^2y-y^4=-(x^2(-y)+(-y)^4)$.) Типичное проходящее через них семейство может быть взято в виде

$$\pm(x^2y+y^4+t_4x^2+t_3y^2+t_2x+t_1y);$$

это — канонические формы для *катастрофы параболической омбилики* и двойственной к ней катастрофы.

Для пятипараметрического семейства D становится двумерным и поэтому пересекает поверхность браслета омбилик по кривым. В большинстве точек этих кривых f_t приводится к виду $\pm(x^2y+y^4)$, но в отдельных изолированных точках $\bar{t}$ исчезает член четвертой степени и $f_{\bar{t}}$ можно типичным образом представить в одной из форм $x^2y\pm y^5$, каждая из которых самодвойственна. Проходящие через них трансверсально семейства можно взять в форме *катастрофы второй гиперболической омбилики*

$$u_1^2u_2+u_2^5+t_5u_2^3+t_4u_2^2+t_3u_1^2+t_2u_2+t_1u_1$$

и *второй эллиптической омбилики*

$$u_1^2u_2-u_2^5+t_5u_2^3+t_4u_2^2+t_3u_1^2+t_2u_2+t_1u_1.$$

Эти названия позволяют предположить, и совершенно пра-

вильно, что имеется целая последовательность *высших омбилик* вида

$$\pm (u_1^2 u_2 + u_2^r + t_r u_2^{r-2} + \ldots + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1)$$

для четных r (это — *высшие параболические омбилики* и двойственные к ним) и

$$u_1^2 u_2 \pm u_2^r + t_r u_2^{r-2} + \ldots + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1$$

для нечетных r (это — самодвойственные *высшие гиперболические омбилики* и *высшие эллиптические омбилики*). Можно было бы назвать весь этот набор устойчивых типов *коническими омбиликами*, собрав вместе эллипсы, гиперболы и параболы под их обычный зонтик.

Двумерное D не только пересекает поверхность браслета омбилик по кривым, но также может типичным образом пересекать его ребро (кривую точных кубов) в изолированных точках. Для такого изолированного значения $\bar{t}$ в подходящей системе координат мы получим

$$f_{\bar{t}}(x, y) = x^3 + \text{тейл.}$$

Здесь снова нужно исследовать члены высшего порядка. Мы найдем, что для пятипараметрического семейства в типичном случае нам встретятся лишь функции $f_{\bar{t}}$, которые локально представимы как $\pm(x^3+y^4)$. Семейства, проходящие через такую функцию трансверсально, эквивалентны семейству

$$\pm (u_1^3 + u_2^4 + t_5 u_1 u_2^2 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1 u_2 + t_2 u_2 + t_1 u_1),$$

это — *катастрофа символической омбилики* и двойственная к ней.

Они начинают новое семейство устойчивых типов, но это семейство довольно быстро кончается (см. Арнольд [26] и Рэнд [26a]).

6 Высшие катастрофы

Мы указали уже достаточно много стандартных локальных форм, к которым могут приводиться r-параметрические семейства функций при $r>5$, а именно высшие каспоиды и высшие конические омбилики. Однако, в то время как при $r\leqslant 5$ устойчивость является типичным свойством r-параметрических семейств, на новых семействах в высших размерностях наш метод ломает себе зубы с самого начала. Легче всего понять, в чем тут дело, в случае двух переменных.

Точно так же, как в трехпараметрическом семействе устойчиво могут появляться отдельные функции $f_t(x, y)$,

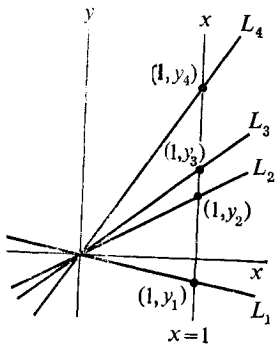


Рис. 7.16

в тейлоровском разложении которых нет квадратичных членов, семипараметрическое семейство может содержать функции $f_t(x, y)$, в тейлоровском разложении которых в какой-то точке (x, y) отсутствуют как квадратичные, так и кубические члены и оно начинается с членов четвертой степени. По аналогии с § 2 и 5 нам следовало бы теперь постараться определить, сколько имеется различных однородных многочленов четвертой степени от (x, y), конечно, как всегда, с точностью до замены переменных.

К сожалению, их имеется бесконечно много.

Возьмем произвольную квартику с четырьмя различными прямыми вещественных корней (рис. 7.16) и попытаемся найти координаты, в которых она приводится к некоторому стандартному виду, действуя по образцу § 6 гл. 2. Взяв две из этих прямых в качестве новых осей координат, мы выделим сомножители в нашем многочлене x и y, и если еще на этих осях подходящим образом выбрать масштаб, то одной из оставшихся прямых можно придать любое желаемое направление, за счет чего в многочлене выделится еще, скажем, сомножитель $x-y$; наконец, умножив эти масштабы на общий скаляр, мы можем привести коэффициенты к более простому виду. Но теперь мы использовали все бывшие в нашем распоряжении при выборе линейной замены координат возможности и у нас нет никаких средств для того, чтобы управлять поведением четвертой прямой. Похоже на то, что нет способа усовершенствовать систему координат дальше так, чтобы, скажем, привести многочлен четвертой степени к виду $xy(x+y)(x-y)$.

Такого способа не просто не видно — можно доказать, что его не существует. „Новый" прием, к которому здесь приходится прибегнуть, вполне в духе математики девятнадцатого века. Определим *двойное отношение* четырех прямых на рис. 7.16 как число

$$(y_1-y_3)(y_2-y_4)/(y_2-y_3)(y_1-y_4);$$

здесь y_i — ординаты точек пересечения наших прямых с прямой $x=1$. Если одна из четырех прямых, скажем L_4, совпадает с осью y, то двойное отношение мы определим как

$$(y_1-y_3)/(y_2-y_3).$$

Несложное упражнение (решение которого можно найти в любом учебнике по проективной геометрии) — показать, что

(а) в качестве двойного отношения прямых на рис. 7.16 может получиться любое вещественное ненулевое число c;

(b) двойное отношение не меняется при линейных заменах координат, при условии что сохраняется нумерация прямых.

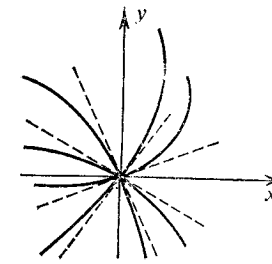


Рис. 7.17

Таким образом, у нас имеется бесконечно много классов четверок проходящих через (0; 0) прямых, а значит и квартик, которые не переводятся друг в друга линейными заменами переменных. (Читателю предлагается доказать, что две квартики, каждая с четырьмя различными прямыми корней, могут быть переведены одна в другую с точностью до знака, *если и только если* их корневые множества (четверки прямых) имеют одно и то же двойное отношение (при надлежащем упорядочении прямых в четверках).) Отсюда вытекает, что и никакая *дифференцируемая* замена не поможет: она лишь изогнет корневые прямые (как показано на рис. 7.17), но касательные в начале преобразуются *линейно* под действием производной и *их* двойное отношение не изменится.

По соображениям трансверсальности, для семипараметрического семейства является устойчивым свойство содержать элемент, для которого первые, вторые и третьи производные по x и y все обращаются в нуль; но условие, чтобы при этом всегда встречалась квартика одного и того же, *фиксированного* типа, уже *не* является устойчивым, поскольку квартики заданного типа образуют множество коразмерности не менее восьми. И действительно, малые возмущения могут изменить двойное отношение корневых прямых рассматриваемой квартичной струи, а это, как мы видели, нельзя скомпенсировать никакой гладкой заменой координат.

Тот аргумент, что трансверсальность, а поэтому и устойчивость типичны, применим только тогда, когда объектов, по отношению к которым требуется трансверсальность, лишь конечное число. Пусть некоторое семейство кривых $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ в трехмерном пространстве в совокупности образует поверхность S (рис. 7.18). Кривая $\varkappa$, проходящая через S, обязательно будет пересекать какую-нибудь из кривых S_λ нетрансверсально (ничего не поделаешь, сумма размерностей слишком мала). Возмутим кривую $\varkappa$, и в типичном случае она станет трансверсальной к этой S_λ (т. е. перестанет ее пересекать), но зато станет не трансверсальной к некоторой другой кривой $S_{\lambda'}$. Наш случай семимерной „кривой" $\varkappa$, проходящей через множество S квартик, расслоенное на слои S_λ при помощи двойного отношения λ, имеет более высокую размерность, но строго аналогичен.

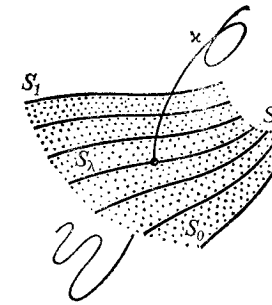


Рис. 7.18

Шестипараметрические семейства приводят к таким же трудностям, когда они проходят (как это они *могут* делать

в типичном случае, см. § 5) через функции с трехкратной вырожденностью. Пространство кубик от x, y, z аналогичным образом содержит бесконечное множество типов (инвариантом, заменяющим здесь двойное отношение, служит так называемый *j-инвариант*, который мы не будем определять; но бесконечность типов можно установить и без его помощи, как это делается ниже). Итак, лишь для $r \leqslant 5$ свойство r-параметрического семейства функций быть устойчивым является *типичным*, хотя оно *может* иметь место и при $r > 5$. Это значит, что исходная формулировка теоремы Тома („четырехпараметрические семейства функций в типичном случае устойчивы и с точностью до знака и замены координат задаются в окрестности каждой особой точки одним из семи выражений") распространима в полном объеме лишь на пятипараметрические семейства; мы приводим это ее обобщение в следующем параграфе. Более высокие размерности также важны и не являются недосягаемыми, но к ним приходится применять теорию, а не теорему.

(Для тех, кто знаком с элементарной теорией „действия групп Ли": пространство всех кубик от x, y, z имеет размерность 10, и невырожденные кубики образуют в нем открытое десятимерное подмножество. Оно не может быть объединением из конечного числа орбит, порождаемых действием группы $GL_3(\mathbb{R})$, так как размерность этой группы лишь 9 и, следовательно, ее орбиты имеют размерность $\leqslant 9$. Аналогично четырехмерная группа $GL_2(\mathbb{R})$ не может дать открытые орбиты в пятимерном пространстве квартик от x, y. Размерность пространства струй растет с ростом коранга и k быстрее, чем размерность указанных групп; отсюда вытекает, что имеется сколько угодно бесконечных семейств типов. Классификация Арнольда [40] охватывает все „простые" типы плюс все бесконечные семейства типов с одномерными или двумерными инвариантами, подобными двойному отношению, встречающиеся в *любой* размерности. *Всё*, что в нее не попало, входит в трижды бесконечные семейства типов или того хуже.)

Пространство невырожденных (без совпадающих корней) квартик от x, y имеет коразмерность семь. Оно разбивается на четыре связные компоненты: квартики, у которых все корни вещественны; квартики с двумя вещественными и двумя комплексными корнями; квартики, у которых все корни комплексны и которые принимают лишь положительные значения; и, наконец, квартики, у которых все корни комплексны и которые принимают лишь отрицательные значения. Каждое из этих четырех множеств разлагается на „параметризованное семейство" „листов", коразмерности

8 каждый, состоящих из эквивалентных между собою относительно диффеоморфных замен квартик. Параметр в каждом случае родствен двойному отношению. Используя некоторое более широкое множество координатных замен, не обязательно диффеоморфных в начале, возможно сжать эти четыре семейства, или *модуля*, в четыре типа, представителями которых могут служить формы x^4+y^4, $-x^4-y^4$, x^4-y^4 и $x^4-6x^2y^2+y^4$. Они лежат в основе катастроф *двойной сборки*. Подробности см. у Стюарта и Постона [25], стр. 110—147, Гибсона, Виртмюллера, дю Плесси и Лоэйенги [27] и Лю [28].

7 Теорема Тома

Мы можем теперь сформулировать теорему Тома в пределах той точности языка, которой мы достигли.

В типичном случае r-параметрическое семейство гладких функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *для всякого n и всех* $r \leqslant 5$ *структурно устойчиво и эквивалентно (в смысле гл. 6) вблизи любой точки одной из следующих форм:*

Некритическая

$$u_1.$$

Невырожденная критическая, или морсовская,

$$u_1^2+\ldots+u_i^2-u_{i+1}^2-\ldots-u_n^2 \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Эти два первых типа не являются формами катастроф, поскольку здесь нет никакой зависимости от t. Все последующие формы уже будут катастрофами. Мы приводим как те прозвища, которые закрепились за ними, так и их символы в классификации Арнольда (основанной на подходе слишком глубоком, чтобы его можно было здесь объяснить).

(1) *Каспоидные катастрофы:*

складка (A_2)

$$u_1^3+t_1u_1+(M);$$

сборка (A_3)

$$\pm(u_1^4+t_2u_2^2+t_1u_1)+(M);$$

ласточкин хвост (A_4)

$$u_1^5+t_3u_1^3+t_2u_2^2+t_1u_1+(M);$$

бабочка (A_5)

$$\pm (u_1^6 + t_4u_1^4 + t_3u_1^3 + t_2u_1^2 + t_1u_1) + (M);$$

вигвам (A_6)

$$u_1^7 + t_5u_1^5 + t_4u_1^4 + t_3u_1^3 + t_2u_1^2 + t_1u_1 + (M).$$

(2) *Омбилические катастрофы:*

эллиптическая омбилика (D_4^-)

$$u_1^2u_2 - u_2^3 + t_3u_1^2 + t_2u_2 + t_1u_1 + (N);$$

гиперболическая омбилика (D_4^+)

$$u_1^2u_2 + u_2^3 + t_3u_1^2 + t_2u_2 + t_1u_1 + (N);$$

параболическая омбилика (D_5)

$$\pm (u_1^2u_2 + u_2^4 + t_4u_2^2 + t_3u_1^2 + t_2u_2 + t_1u_1) + (N);$$

вторая эллиптическая омбилика (D_6^-)

$$u_1^2u_2 - u_2^5 + t_5u_2^3 + t_4u_2^2 + t_3u_1^2 + t_2u_2 + t_1u_1 + (N);$$

вторая гиперболическая омбилика (D_6^+)

$$u_1^2u_2 + u_2^5 + t_5u_2^3 + t_4u_2^2 + t_3u_1^2 + t_2u_2 + t_1u_1 + (N);$$

символическая омбилика (E_6)

$$\pm (u_1^3 + u_2^4 + t_5u_1u_2^2 + t_4u_2^2 + t_3u_1u_2 + t_2u_2 + t_1u_1) + (N).$$

Здесь $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{R}^r$; символ (M) обозначает морсовскую функцию вида

$$u_2^2 + \ldots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \ldots - u_n^2 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

а N аналогично — функцию вида

$$u_3^2 + \ldots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \ldots - u_n^2 \qquad (2 \leqslant i \leqslant n).$$

Нужно подчеркнуть, что число t-координат в приведенной форме (т. е. форме, к которой приводится рассматриваемое семейство) может оказаться меньше, чем r, как это уже было в § 3; оставшиеся неиспользованными t-координаты являются в таком случае „немыми“. Скажем, ласточкин хвост может встретиться для четырехпараметрического семейства f с параметрами (t_1, t_2, t_3, t_4), здесь приведенная форма f не зависит от t_4; или, более общим образом, для $(p+3)$-параметрического семейства с параметрами $(t_1, \ldots, t_{p+3})$ здесь приведенная форма f не зависит от $t_4, \ldots, t_{p+3}$. На самом деле может случиться и так, что 2001-параметрическое семейство состоит лишь из морсовских функций, так что каждый из 2001 параметров немой.

Знаки $\pm$ указывают на наличие „двойственных“ катастроф, с чем мы уже встречались; для формы с отрицательным знаком используются названия „двойственная сборка“, „двойственная бабочка“ и т. д.

Первоначальные *семь элементарных катастроф* Тома — это те из катастроф нашего списка, в которые не входит t_5; различие между двойственными катастрофами при этом игнорируется. Основанием для этого служит то, что геометрия для обеих катастроф пары по существу одна и та же; все же для приложений замена максимумов на минимумы бывает существенной.

Геометрию семейств Тома мы изучим в гл. 9.

8 КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ

Эта глава — центральная в книге. Используя соответственно уточненные рассуждения гл. 7, мы показываем, какие начальные отрезки тейлоровских разложений могут встретиться в типичном случае (оставляя в стороне вопрос, действительно ли мы вправе в каждом конкретном случае ожидать типичности; впрочем, антология той физики, где исходят из неявного допущения, что нетрансверсальное не встречается, составила бы много больше томов, чем могли бы подумать многие физики). Однако какой от этого может быть прок, если имеет значение лишь *весь* ряд Тейлора?

В этой главе мы рассмотрим правила, которые позволяют получить точную информацию о функциях, исходя из отрезков их тейлоровских разложений, неважно, „типичных" или нет. Мы не даем доказательств этих правил, но геометрически показываем, почему, если таковые правила вообще существуют, следует ожидать, что они будут именно такими. Если наше изложение покажется темным или неубедительным, мы приносим свои извинения, но сформулированные результаты верны. Большинство из них доказано у Мезера [10—15], Левайна [29] (где сделано гораздо больше, но без установки на теорию катастроф), Брёкера и Ландера [9], Гибсона [30], Лю [28], Мартинэ [31], Сирсмы [32, 33], Тротмэна и Зимана [22] и Вассермана [36]. Мы ссылаемся на них на всех вместе как на „строгие источники", не делая никаких систематических попыток указать происхождение отдельных результатов.

Для удобства ссылок и в интересах тех, кто найдет последующие рассуждения трудными, мы собрали правила вычислений и определения в § 12, а примеры их использования даем в § 13. Эти два параграфа могут читаться как независимое целое, использующее лишь язык, введенный в гл. 2—6, хотя они должны показаться несколько нелогичными и странными без мотивировок, содержащихся в рассуждениях предыдущих параграфов главы. В §§ 10 и 11 приводится ряд вычислительных результатов, вытекающих из

наших главных результатов; эти параграфы можно прочитать как дополнение либо к §§ 1—9, либо к § 12.

Мы не будем вдаваться в обсуждение все увеличивающегося числа различных приемов для отдельных частных случаев, предназначенных для отыскания (или для получения дополнительной информации относительно) преобразований, существование которых гарантируется общей теорией. Просеивание трудной для чтения научной литературы о приложениях теории катастроф должно в свое время породить монографию „О вычислительных методах теории катастроф", адресованную нематематической аудитории, уже знакомой с материалом, излагаемым здесь (но *не* обязательно написанную нами). Говоря о вычислениях, следует отметить, что статья Сирсмы [33], хотя и недостаточно богатая мотивировками, чтобы служить введением в строгую теорию, содержит много тщательно и полностью проведенных вычислений (ориентированных, правда, скорее на чисто математические вопросы). Читатель, который уже знает, что должно быть сделано, найдет там прекрасное толкование того, как это должно быть сделано.

Нужно заметить, что соответствующая теория для функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, уже не обязательно скалярных, гораздо сложнее и ее состояние не столь удовлетворительно. Однако если интересоваться лишь множеством нулей (как на рис. 4.5), то все становится опять проще; см. Мартинэ [34, 35].

Правила § 12 легко можно включить в любой пакет программ, которые занимаются выполнением формального дифференцирования. В виде добавления 1 мы приводим одну такую программу, составленную Олсеном, Картером и Роквудом из Университета Бригэма Янга (BYU). Она находит всё, кроме самих тейлоровских разложений (это последнее — уже стандартная вещь).

1 Конечная определенность и сильная конечная определенность

Напомним, что k-струя $j^k f$ гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ получается взятием отрезка ее ряда Тейлора до членов порядка k включительно и что разность $f - j^k f$ мы назвали тейлом.

Часто бывает так, что k-струя функции f локально эквивалентна относительно гладких замен координат *любой* функции, представимой в виде

$$j^k f + \text{тейл},$$

т. е. любой функции вида $f+g$, где g — функция порядка $k+1$. Такая функция f называется *k-определенной* в начале, и наша задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых это имеет место. Например, функция $f(x, y)=x^2y$ не будет k-определенной ни при каком k, как мы это уже видели в § 4 гл. 4, поскольку x^2y+y^{2k+1} имеет на целую прямую меньше нулей, чем x^2y. В гл. 4 мы показали, что функция с ненулевой производной в 0 является там 1-определенной, что морсовская критическая точка является 2-определенной и что $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется (в смысле конечной определенности) своей первой ненулевой производной.

Ясно, что каждая k-определенная функция будет также и k'-определенной при всех $k' \geqslant k$, и мы называем *числом определенности* f наименьшее k, для которого f является k-определенной; будем обозначать его через $\sigma(f)$. Если, как, скажем, для x^2y, такого конечного k не существует, мы пишем $\sigma(f)=\infty$ и говорим, что f — не *конечно-определенная* функция.

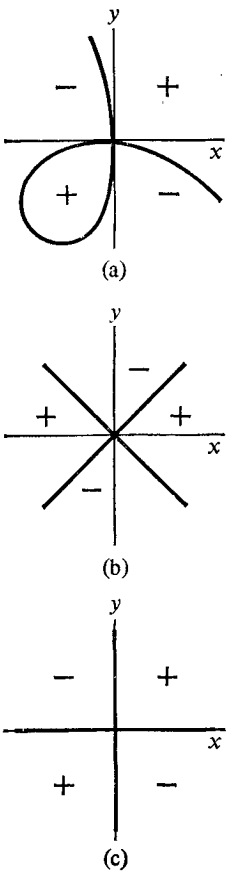


Рис. 8.1

Иногда для нас особенно будут важны координатные замены, производная которых в нуле представляет собой тождественное отображение. Важность этого условия можно наиболее ясно проиллюстрировать в двумерном случае. Неплохо, например, знать, что вблизи начала функция $f(x, y)=xy+(x+y)^3$, нули которой изображены на рис. 8.1 (a), приводима к виду x^2-y^2 (рис. 8.1 (b)). Но если о функции f нам приходится говорить в связи с изучением какого-либо отображения, нам может быть важно не только то, что она имеет в начале седло, но также и то, каковы направления линий ее нулей. Эти направления сохраняются (рис. 8.1 (c)) при любой локальной замене координат с производной

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

в начале. В случае когда $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не просто k-определенна, а такова, что любой тейл, добавленный к $j^k f$, можно удалить заменой этого специального типа, мы скажем, что f *сильно k-определенна*.

Стоит повторить, что мы *не* предполагаем аналитичности; в действительности k-струя — полезное понятие и в том случае, когда f дифференцируема ровно k раз. Мы предполагаем, что f — гладкая функция, исключительно ради удобства формулировок.

Со струями связан ряд векторных пространств; мы будем называть их все без разбора *пространствами струй*. Вот они:

$$E_n^k = \{j^k f \mid \text{все } f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\},$$
$$J_n^k = \{j^k f \mid \text{все } f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ с } f(0)=0\},$$
$$I_n^k = \{j^k f \mid \text{все } f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ с } f(0)=0,\ Df|_0 = 0\},$$
$$M_n^k = \{j^k f \mid \text{все } f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ порядка } k\}.$$

Таким образом, E_n^k совпадает с пространством многочленов порядка k; J_n^k — это пространство многочленов без свободного (постоянного) члена; I_n^k состоит из многочленов без постоянного и линейных членов; M_n^k — пространство однородных многочленов степени k. В гл. 7 нам пришлось уже встретиться с геометрией некоторых из этих пространств: $I_2^2 = M_2^2$ есть пространство однородных квадратичных многочленов от двух переменных, изученное нами в § 2 гл. 5; M_2^3 — пространство кубик из § 6 гл. 2, а I_1^4 совпадают с пространством I' многочленов $px^2+qx^3+rx^4$, введенным в § 2 гл. 7 и изображенным на рис. 7.4.

Следующий наш шаг будет состоять в более глубоком изучении геометрии последнего пространства, с тем чтобы взглянуть с новой стороны на упрощение рядов Тейлора. Этот подход в отличие от подхода, изложенного в § 3 гл. 4, обобщается на функции многих переменных.

2 Пространства струй от одной переменной

Проведенный в § 3 гл. 4 анализ показал, что многочлен $px^2+qx^3+rx^4$ может быть приведен в окрестности начала с помощью замены переменных к виду

$$\pm x^2, \text{ если и только если } p \neq 0;$$
$$x^3, \text{ если и только если } p = 0,\ q \neq 0;$$
$$\pm x^4, \text{ если и только если } p = q = 0,\ r \neq 0.$$

Это приведение *полно*, хотя и локально: функция в точности выражается в виде $\pm x^k$. Однако замена переменных, к которой приходится прибегать, обычно не полиномиальна: по ходу доказательства теоремы приходится извлекать корень степени k, и легко можно проверить, что *никакой* полиномиальной заменой нельзя привести, скажем, x^2+x^4 к x^2 даже локально.

Рассмотрим, однако, более простую задачу упрощения лишь 4-*струи*. Как привести

$$P(x) = px^2 + qx^3 + rx^4$$

к виду

$$\pm x^k + O(5)?$$

Произвольную замену координат, оставляющую начало неподвижным, можно записать с помощью разложения Тейлора как

$$y(x) = (1+\alpha)x + \beta x^2 + \gamma x^3 + O(4).$$

По теореме об обратной функции это преобразование является локальным диффеоморфизмом в точности тогда, когда $\alpha = -1$. (Насколько локальное „локально", зависит от β, γ и $O(4)$.) Несложное вычисление дает

$$\begin{aligned} P(y(x)) &= [(1+\alpha)^2 p]x^2 + [2(1+\alpha)\beta p + (1+\alpha)^3 q]x \\ &\quad + [(2(1+\alpha)\gamma + \beta^2)p + 3(1+\alpha)^2 \beta q \\ &\quad + (1+\alpha)^4 r]x^4 + O(5) \\ &= p'x^2 + q'x^3 + r'x^4 + O(5). \end{aligned}$$

Иными словами, получается функция, 4-струя которой есть

$$j^4 P(y(x)) = p'x^2 + q'x^3 + r'x^4,$$

где

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 2(1+\alpha)\beta & (1+\alpha)^3 & 0 \\ 2(1+\alpha)\gamma + \beta^2 & 3(1+\alpha)^2\beta & (1+\alpha)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Значит, замена переменных индуцирует линейное преобразование A с выписанной выше матрицей, которое отображает I_1^4 в себя. Определитель равен $(1+\alpha)^9$, и, как мы и ожидали, матрица обратима в точности тогда, когда обратима замена переменных в окрестности начала. (Аналогичный результат для пространства струй от n переменных вытекает из цепного правила для высших производных.)

Всю нужную нам информацию мы могли бы получить из этой матрицы преобразования A, но ее зависимость от α, β и γ довольно сложна. Картина становится более прозрачной, если рассмотреть *малые* замены. А именно, в нашем случае мы берем α, β, γ настолько малыми, чтобы можно было пренебречь их степенями и произведениями. Это приводит матрицу к виду

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 1+3\alpha & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1+4\alpha \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

Точный смысл того, что мы сделали, состоит во взятии первой производной отображения A (т. е. его линейной аппроксимации в (0, 0, 0)), рассматриваемого как функция от α, β, γ. Таким образом, матрица (8.2) говорит нам, в каком *направлении* мы сдвигаем точку (p, q, r) в I_1^4, начиная производить зависящую от времени замену

$$y_t(x) = (1 + t\alpha)x + t\beta x^2 + t\gamma x^3 + O(4)$$

(в начальный момент замена тождественная). Этим прекрасно схвачена геометрическая суть проблемы.

Ограничимся теперь задачей, которая могла бы показаться более сложной,— рассмотрением *сильной* k-определенности. В нашем одномерном случае дополнительное условие, что координатная замена имеет тождественную производную в начале, выглядит так: $\alpha=0$. Тогда (8.2) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Какие направления смещения в I_1^4 порождает эта матрица? Для точек на оси r — вовсе никаких, так как

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix},$$

т. е. точки этой оси отображаются тождественно. Для точек плоскости qr

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 \\ 3\gamma & 3\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r + 3\beta q \end{bmatrix}.$$

Значит, для точки, не лежащей на оси r ($q \neq 0$), подходящая замена в X-области начнет сдвигать точку (p, q) вверх или вниз параллельно оси r.

Для точки вне плоскости qr

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & 1 & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q + 2\beta p \\ r + 2\gamma p + 3\beta q \end{bmatrix}.$$

Это не меняет p, но для подходящих β, γ мы получим любой сдвиг $(p, q+a, r+b)$, параллельный плоскости qr; именно,

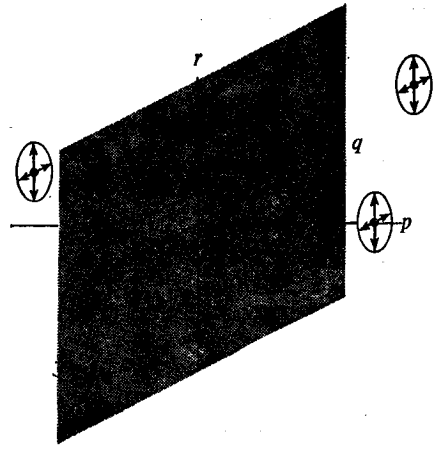


Рис. 8.2

достаточно взять

$$\beta = \frac{a}{2p},$$

$$\gamma = \frac{b}{2p} - \frac{3aq}{4p^2}.$$

Направления движения, возможные для точек (p, q, r), представляющих многочлены, указаны на рис. 8.2. Эти направления легко интегрируются, чем *полностью* определяется возможное движение таких точек (рис. 8.3).

Точки оси r остаются неподвижными; точки плоскости qr можно сдвигать как угодно далеко вверх и вниз параллельно оси r, а точки вне плоскости qr можно сдвигать как

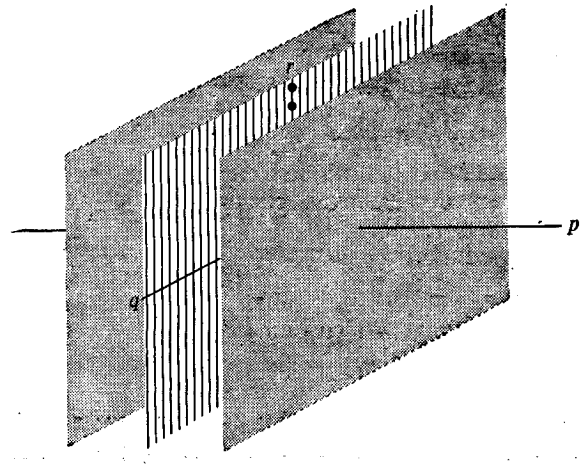


Рис. 8.3

угодно в плоскостях, параллельных qr. Это можно проверить и прямо с помощью (8.1) для „неинфинитезимальных" замен переменной.

Доказательство аналогичного общего результата для n переменных, в котором в дело вступают структуры типа браслета омбилик, а не только прямые и плоскости, требует небольшой дозы элементарной теории действия групп Ли.

Мы называем множество точек, в которые можно перевести точку (p, q, r), ее *орбитой* относительно действия *группы* замен переменных. Точные определения этих понятий можно найти у Гибсона [30], где подчеркнут именно этот аспект теории. Группа преобразований k-струй, порождаемая локальными заменами координат в нашем n-мерном пространстве, будет обозначаться через G_n^k (независимо от того, действует ли она на E_n^k, на J_n^k или на I_n^k). Через $\tilde{G}_n^k$ мы обозначаем ее подгруппу, состоящую из преобразований k-струй, отвечающих преобразованиям координат, линейная часть которых в начале есть тождественное преобразование. Читатели, незнакомые с теорией групп, могут представлять себе G_n^k и $\tilde{G}_n^k$ просто как множества матриц, с помощью которых описываются изменения струй при заменах координат.

Заметим попутно, что орбиты не всегда будут плоскими, как в I_1^k; конус и браслет омбилик, представляющие геометрию пространств I_2^2 и M_2^3, как раз задают разбиения на G_n^k-орбиты (для любого $k \geqslant 1$).

Из рис. 8.3 видно, что при $p \neq 0$ орбита точки (p, q, r) содержит точку $(p, 0, 0)$, а если $q \neq 0$, то орбита точки $(0, q, r)$ содержит $(0, q, 0)$. С точки зрения первоначального нашего подхода это означает, что 4-струи $px^2+qx^3+rx^4$ и qr^3+rx^4 можно привести соответственно к виду px^2 и qx^3 с помощью замен переменных, производные которых в начале равны 1.

Должно быть вполне ясно, что для любого I_1^k, $k \geqslant 2$, теория полностью аналогична. Для данной струи

$$z = a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \ldots + a_k x^k \in I_1^k$$

с $a_s \neq 0$ можно подобрать $\alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ так, что при любой замене переменной вида

$$y = x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + O(k)$$

z переходит в k-струю $a_s x^s$. Возникает соблазн сказать: „По индукции можно устранить весь тейл", однако имеются технические трудности, препятствующие проведению такого доказательства; не самая меньшая из них та, что,

уничтожив все полиномиальные члены, мы можем остаться с чем-нибудь вроде $a_s x^s + e^{-1/x^2}$. И всё же то, каким образом правила, к которым мы подводим читателя, оказываются пригодными для устранения членов высшего порядка, создает очень четкое интуитивное убеждение в пригодности этих правил для устранения всего тейла. И действительно, в работе [26a] Рэнд преодолевает возникающие здесь технические трудности. Все моменты полного доказательства находят прямые аналоги в нашем обсуждении вопроса.

Далее, пространства „возможных смещений" точек (p, q, z), показанные на рис. 8.2,— это в точности пространства векторов, касательных в точке (p, q, r) к орбите этой точки. Устранимость высших членов, например для случая $p \neq 0$, связана со следующим обстоятельством: при любых значениях q и r *направления* осей q и r были касательны к орбите точки (p, q, r). Поэтому *оставаясь все время на орбите*, мы могли произвольно изменить значения q и r (в частности, сделать их равными нулю), т. е. могли найти преобразование, которое фактически осуществило бы это изменение. Это движение по орбите с помощью интегрирования „инфинитезимальных" замен переменных имеет исходным прототипом использование решений дифференциальных уравнений для устранения всего тейла. Таким образом, условие устранимости высших членов звучит так:

„Каковы бы ни были значения высших членов, направления, параллельные подпространству высших членов, касательны к орбите рассматриваемой струи".

Это геометрическое условие лежит в основе алгебраических условий устранимости высших членов.

Следовательно, мы должны уметь находить эти пространства касательных направлений систематическим образом, делая как можно меньше вычислений. Выше мы определили группу линейных преобразований (8.1), „продифференцировали" ее по отношению к (α, β, γ) и нашли касательные пространства, используя полученный результат. Внимательно проанализировав, что делает эта группа, мы можем избавиться от ее явного участия в вычислениях и тем самым существенно упростить их.

3 Инфинитезимальные замены переменных

Рассмотрим произвольную зависящую от времени замену переменных, которая является тождественным преобразованием при $t=0$ и линейная часть которой при всех t представляет собой тождественное преобразование; пусть она

имеет вид

$$y^t(x) = x + tq(x),$$

где

$$q(0) = \frac{dq}{dx}\Big|_0 = 0.$$

(Выше $q(x)$ бралось в частично разложенной форме $\beta x^2 + \gamma x^3 + O(4)$.) Функция

$$f \circ y^t\colon\ x \longmapsto f(y^t(x)),$$

которую мы надеемся привести к более простому, чем у f, локальному виду, изменяется с t. Как начинает смещаться ее $(k+1)$-струя? Мы найдем это, продифференцировав по t. В результате получим вектор

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{j^{k+1}(f \circ y^t) - j^{k+1} f}{t},$$

в пространстве $(k+1)$-струй, который будем считать выходящим из точки $j^{k+1}f$. Из свойств линейности разложения Тейлора (§ 5 гл. 3) вытекает, что

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{j^{k+1}(f \circ y^t - f)}{t}.$$

Если положить $F(x, y) = f(y^t(x)) = (f \circ y^t)(x)$, то

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{j^{k+1}(F(x, t) - F(x, 0))}{t}.$$

Компонентами вектора $j^{k+1}(F(x, t) - F(x, 0))$ являются различные производные по x. Так как F гладко (по построению), порядок дифференцирования можно изменить:

$$v = j^{k+1}\left(\lim_{t \to 0} \frac{F(x, t) - F(x, 0)}{t}\right)$$
$$= j^{k+1}\left(\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tq(x)) - f(x)}{t}\right).$$

Рассмотрим тейлоровское разложение функции $f(x + tq(x))$ по t в точке x. По определению 1-струи,

$$f(x + tq(x)) = f(x) + tq(x)\, Df|_x + t^2 l(x, t),$$

где $l(x, t)$ — гладкая функция. (Как обычно, это не зависит от того, сходится ряд Тейлора или нет.) Поэтому последний предел в скобках равен

$$\lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t}(f(x) + tq(x)\, Df|_x + t^2 l(x, t) - f(x))\right)$$
$$= q(x)\, Df|_x,$$

или, в традиционных обозначениях,

$$= q(x)\frac{df}{dx}(x).$$

Таким образом, v является $(k+1)$-струей функции $q=\frac{df}{dx}$:

$$v = j^{k+1}\left(q\frac{df}{dx}\right).$$

[*Техническое замечание.* Всюду выше мы дифференцировали пути в пространстве струй J_1^{k+1}, которое является конечномерным вещественным векторным пространством, так что применимо элементарное дифференциальное исчисление. В бесконечномерном пространстве $\mathscr{E}$ всех „ростков" (грубо говоря, функций, определенных вблизи начала), которое используется в строгой теории, нет очевидного определения предела. Вопреки тому что сказано по крайней мере в одном опубликованном подробном доказательстве, тот факт, что $\mathscr{E}$ представляет собой вещественное векторное пространство (бесконечной размерности), еще не придает автоматически смысла этому дифференцированию.

Заметим также, что хотя нами установлено, что все векторы вида $j^{k+1}\left(q\frac{df}{dx}\right)$ являются касательными к орбите, мы еще не показали, что все касательные векторы имеют такой вид. Это действительно так, но доказательство того, что для случая n переменных каждое направление смещения в орбите может быть реализовано смещением из единичного элемента (тождественного преобразования) в группе Ли $\tilde{G}_n^{k+1}$, требует, чтобы орбита была „вложенным" многообразием (см. Мезер [14]), либо же требует тонких рассуждений об общих, возможно, лишь „погруженных" орбитах групп Ли (см. Мэгнус [30a]). Это место обходится стороной в некоторых строгих источниках.

Повторяем: касательное пространство состоит в точности из векторов указанного вида, и в дальнейшем мы будем использовать этот факт — как и его аналог для более широкой группы G_n^{k+1},— не делая специальных оговорок.]

Итак, мы можем найти все касательные векторы в точке $j^{k+1}f$ к орбите этой точки под действием $\tilde{G}_n^{k+1}$, рассмотрев все струи вида

$$j^{k+1}\left(q\frac{df}{dx}\right), \qquad q(0) = \frac{dq}{dx}\Big|_0 = 0.$$

(Напомним, что условия, наложенные на q, гарантируют, что при соответствующей замене переменной начало оста-

ется неподвижным, а производная в начале равна 1.) Согласно § 5 гл. 3, эти струи могут быть выражены в виде

$$\overline{j^{k+1}q \cdot j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)^{k+1}}.$$

Поскольку струи $j^{k+1}q$ образуют векторное пространство I_1^{k+1}, которое можно представлять себе как пространство всех многочленов со степенями одночленов, заключенными между 2 и $k+1$, мы можем найти базис интересующего нас касательного пространства, выбрав какой-нибудь базис $p_1, \ldots, p^r$ в I_1^{k+1} и выписав струи

$$j^{k+1}\left(p_i \frac{df}{dx}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Из них можно отбросить те, которые после усечения оказываются линейными комбинациями других; во всяком случае, мы нашли систему образующих, и из нее уже несложно отобрать настоящий базис. Этот базис можно привести к более естественному виду, взяв соответствующие линейные комбинации его элементов. Очевидный базис для I_1^{k+1} составляют $x^2, x^3, \ldots, x^{k+1}$.

Беря, для примера, как и выше, I_1^4, предположим, что

$$j^4 f(x) = px^2 + qx^3 + rx^4.$$

Тогда

$$j^4\left(\frac{df}{dx}\right)(x) = 2px + 3qx^2 + 4rx^3 + \alpha x^4,$$

где α зависит от пятой производной f, которую нельзя определить по 4-струе. Выбирая x^2, x^3, x^4 в качестве базиса для I_1^4, мы приходим к следующей системе образующих для касательного пространства к орбите струи $j^4 f$ под действием $\tilde{G}_1^4$:

$$P_1 = j^4[x^2(2px + 3qx^2 + 4rx^3 + \alpha x^4)] = 2px^3 + 3qx^4,$$
$$P_2 = j^4[x^3(2px + 3qx^2 + 4rx^3 + \alpha x^4)] = 2px^4,$$
$$P_3 = j^4[x^4(2px + 3qx^2 + 4rx^3 + \alpha x^4)] = 0;$$

отметим, что они не зависят от r и α. Для $p \neq 0$ получаем $x^4 = \frac{1}{2p} P_2$ и $x^3 = \frac{1}{2p}\left(P_1 - \frac{3q}{2p} P_2\right)$ так что касательное пространство представляет собой плоскость, параллельную плоскости qr. Подобным же образом устанавливается, что вертикальные прямые (натянутые на x^4) служат касательными пространствами в точках $(0, q, r)$ для $r \neq 0$, а нулевое подпространство — в точках $(0, 0, r)$.

В § 2 мы нашли эти касательные пространства более простым *рассуждением*, а в предыдущем абзаце более простым *вычислением* — теперь рассуждение проведено раз и навсегда. Нужно только распространить его на случай многих переменных. Зависящая от времени замена переменных y^t, для которой производная в начале есть тождественное отображение, записывается так:

$$(y_1^t(x), \ \ldots, \ y_n^t(x)) = (x_1 + tq_1(x), \ \ldots, \ x_n + tq_n(x));$$

как обычно, мы пишем для краткости x вместо $(x_1, \ldots, x_n)$. Та же, что и раньше, последовательность шагов приводит к следующему выражению для общего касательного вектора к орбите $j^{k+1}f$:

$$\begin{aligned} v &= j^{k+1}\left(\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1+tq_1(x), \ \ldots, \ x_n+tq(x)) - f(x)}{t}\right) \\ &= j^{k+1}\left(q_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + q_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Q_i j^{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Здесь Q_i — произвольный многочлен из I_n^{k+1}. Поскольку (как это было выше с членами $4rx^3$ и αx^4) любой член порядка k или $k+1$ в $j^k(\partial f/\partial x_i)$ исчезает после умножения на элементы Q_i порядка $\geqslant 2$ и усечения до порядка $k+1$, касательное пространство к орбите $j^{k+1}f$ зависит только от многочленов $j^{k-1}(\partial f/\partial x_i)$, которые вполне определены струей $j^k f$.

На рис. 8.4 подпространство I_n^k в I_n^{k+1} представлено, довольно схематично, прямой линией, а подпространство M_n^{k+1} — плоскостью. Множество

$$K = j^{k+1}f + M_n^{k+1} = \{j^{k+1}f + Q \mid Q \text{ однороден степени } k+1\}$$

является аффинным (не векторным) подпространством в I_n^{k+1}, параллельным M_n^{k+1}. Если в любой точке $\varkappa \in K$ все направления, касательные к K, являются также касательными к орбите под действием $\tilde{G}_n^k$, (8.3)

то достаточно очевидно, что K на самом деле лежит в орбите $j^{k+1}f$. (Это совсем нетрудно доказать, если считать известным, что орбита есть многообразие; а это в свою очередь — элементарный факт о действиях групп Ли.) Пусть это так. Тогда орбита $j^{k+1}f$ содержит точку $j^k f \in I_n^k$, рассматриваемую (очевидным образом) как $(k+1)$-струя (рис. 8.4). Иначе

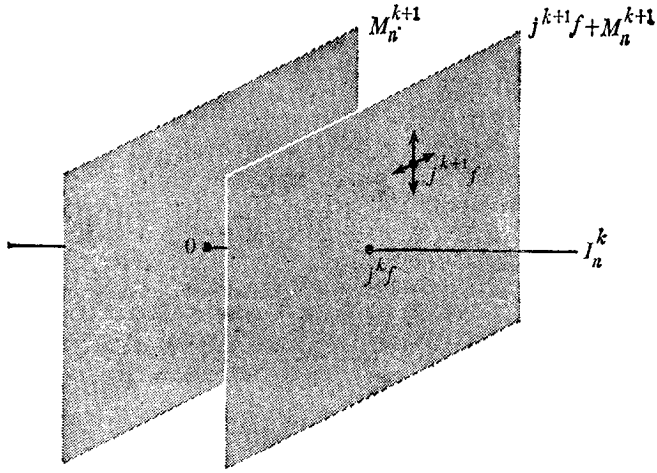


Рис. 8.4

говоря, некоторая локальная замена с тождественной линейной частью устраняет из $j^{k+1}f$ члены порядка $k+1$, сводя эту струю к j^kf.

Как мы уже видели, принадлежность вектора к касательному пространству к орбите $j^{k+1}f$ зависит только от j^kf. Значит, если условие (8.3) выполняется в точке j^kf, то оно выполняется в любой точке K. Следовательно, для того чтобы показать, что существует замена координат, которая производит требуемое приведение, достаточно показать, что каждое направление в M_n^{k+1} лежит в этом касательном пространстве. Алгебраически это означает, что

$$M_n^{k+1} \subset \left\{ \overline{\sum_{i=1}^{n} Q_i j^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}^{k+1} \;\middle|\; Q_i \in I_n^{k+1} \right\}. \qquad (8.4)$$

Очевидно, это условие не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы можно было откинуть члены степени $k+1$; действительно, последнее прямо влечет за собой, что K содержится в орбите, а отсюда вытекает, что касательное пространство M_n^{k+1} к K в каждой точке содержится в касательном пространстве к орбите.

Замечательный факт заключается в том, что если условие (8.4) справедливо, то *каждая* гладкая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ порядка $k+1$ (многочлены из M_n^{k+1} являются лишь простейшими примерами таких функций) может быть представлена в некоторой окрестности нуля в виде

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + q_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

где q_i— гладкие функции порядков $\leqslant 2$. Это утверждение о функциях на самом деле легко получается из соответствующего утверждения о струях (8.4) с помощью одного алгебраического приема, называемого леммой Накаямы; прием этот в свою очередь доказывается несложно, но на языке модулей над кольцами (обобщение понятия векторного пространства над полем), и нам приходится отослать читателя к строгим источникам. (Кстати, в большинстве изложений для топологов дается излишне запутанное доказательство леммы Накаямы с использованием определителей. У Вассермана [36] можно найти более легкое доказательство, предпочитаемое алгебраистами.)

Отсюда следует, что если мы обратимся, скажем, к пространству I_n^{k+2001}, то любой многочлен, все одночлены которого имеют степени $\geqslant k+1$ и $\leqslant k+2001$, лежит в касательном пространстве

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \overline{Q_i j^{k+2000}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}^{k+1} \,\middle|\, Q_i \in I_n^{k+2001}\right\}$$

к орбите $j^{k+2001} f$ под действием $\tilde{G}_n^{k+2001}$ на I_n^{k+2001}. Распространяя на эту ситуацию предыдущие рассуждения, можно показать, что подходящая замена переменных приводит f к виду

$$j^k f + O(k+2001).$$

На этом пути мы можем отбросить любое конечное число членов высших порядков. Этим *не* доказано, что можно устранить весь тейл, но по крайней мере это теперь не представляется удивительным. Справедлива

ТЕОРЕМА 8.1. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является сильно* k*-определенной, если и только если каждый однородный многочлен степени* $k+1$ *может быть записан в виде*

$$\overline{Q_1 j^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}^{k+1} + \ldots + \overline{Q_n j^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}^{k+1},$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$— *многочлены от* $(x_1, \ldots, x_n)$ *порядка* $\geqslant 2$.

Это прямой алгоритмический критерий, и в § 13 и во многих главах о приложениях мы дадим примеры его применения. Полное доказательство части „если“ теоремы имеется в любом из строгих источников, доказательство части „только если“ см. у Сирсмы [33].

4 Более слабые условия конечной определенности

Очевидно, что сильная k-определенность влечет за собой (простую) k-определенность, так как в случае последней просто ослаблено условие на производную преобразования координат. Значит, из алгебраического условия теоремы 1 вытекает k-определенность. Но из k-определенности это условие не следует. Что же из нее следует?

Рассмотрим примеры. Если допускаются более общие координатные замены (но по-прежнему оставляющие начало неподвижным), то мы должны пользоваться матрицей (8.2) из § 2, не полагая уже в ней $\alpha=0$. Возможных направлений смещений становится больше. Для точки на оси r

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 1+3\alpha & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1+4\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+4\alpha)\,r \end{bmatrix},$$

так что мы можем смещать ее вверх и вниз. Для точки из плоскости qr

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 1+3\alpha & 0 \\ 2\gamma & 3\beta & 1+4\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ (1+3\alpha)\,q \\ 3\beta q+(1+4\alpha)\,r \end{bmatrix};$$

значит, при $q\neq 0$ точку $(0, q, r)$ можно перемещать в любом направлении в этой плоскости, выбирая подходящие α и β. Аналогичным образом точку (p, q, r) можно перемещать вообще в любом направлении в пространстве (рис. 8.5). Базисы касательных пространств теперь соответственно такие: $\{x^4\}$, $\{x^3, x^4\}$, $\{x^2, x^3, x^4\}$.

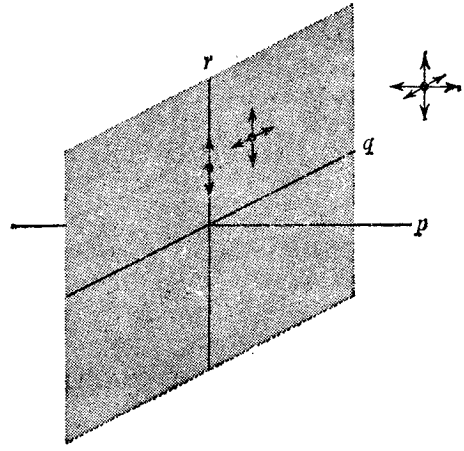


Рис. 8.5

Интегрирование этих возможных смещений приводит к тому же разбиению пространства I_1^4, что и в предыдущей главе, за тем исключением, что теперь различаются полуплоскости $q<0$ и $q>0$ плоскости qr. Это отражает тот факт, что мы не можем *непрерывно* изменяющейся во времени заменой переменных перевести x^3 в $-x^3$; это различение несущественно для наших теперешних целей, как и для целей предшествующей главы. (Отметьте, что мы можем (вращением) перевести x^3+y^2 в $-x^3+y^2$.)

Используя те же рассуждения, что и в § 2, но теперь с изменяющейся во времени заменой переменных специального вида

$$(y_1^t(x), \ \ldots, \ y_n^t(x)) = (x_1 + tq_1(x), \ \ldots, \ x_n + tq_n(x)),$$

где требуется лишь, чтобы $q_1(0), \ldots, q_n(0)=0$, можно показать, что касательное пространство к орбите $j^{k+1}f$ под действием G_n^{k+1} состоит из векторов

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{Q_i j^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}^{k+1},$$

где на этот раз $Q_1, \ldots, Q_n$ лежат в J_n^{k+1}, т. е. не имеют постоянного члена.

Следовательно, на этот раз элементы касательного пространства *зависят* от членов порядка $k+1$ в $j^{k+1}f$. Например, в I_1^4 можно смещать $(0, 0, r)$ вверх и вниз (рис. 8.5), лишь если $r\neq 0$. (И действительно, струю rx^4, $r\neq 0$, невозможно перевести в 0 никакой гладкой заменой.)

Пусть $k+1=4$. Вряд ли можно ожидать, что из того только факта, что M_1^4 содержится в касательном пространстве к орбите x^4 под действием G_1^4 (а на самом деле совпадает с ним, поскольку оба эти пространства равны простонапросто $\{\lambda x^4 | \lambda \in \mathbb{R}\}$), будет следовать, что струя x^4 является 3-определенной. Однако из k-определенности f следует, что $j^k f + M_n^{k+1}$ содержится в соответствующей орбите, и, значит, в частности, что касательное пространство M^{k+1} в точке $j^{k+1}f$ к $j^{k+1}f + M_n^{k+1}$ содержится в касательном пространстве к орбите. Иначе говоря, справедлива

ТЕОРЕМА 8.2. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является* k*-определенной, каждый однородный многочлен степени* $k+1$ *может быть представлен в виде*

$$\overline{Q_1 j^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}^{k+1} + \ldots + \overline{Q_n j^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}^{k+1},$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ — *многочлены от* $(x_1, \ldots, x_n)$ *порядка* $\geqslant 1$.

Эта теорема доказывается в большинстве строгих источников. Из нее тривиально вытекает, что если f является k-определенной, то каждый однородный многочлен степени $k+2$ может быть представлен таким же образом, только с Q_i порядка $\geqslant 2$. Значит, по теореме 8.1, f *сильно* $(k+1)$-определенна, хотя она может и не быть сильно k-определенной.

В частности, для k-определенной f выполняется алгебраическое условие теоремы 8.1 при $k'=k+1$. Следовательно, если наименьшее k, при котором f удовлетворяет этому критерию, равно, скажем, k_0, то f будет k_0-определенной (даже сильно) и *может* быть (k_0-1)-определенной (если для нее не нарушаются условия теоремы 8.2), но она не может быть (k_0-m)-определенной для $m>1$.

Мы видели, что теорему 8.2 нельзя усилить до „если и только если", так как любая функция x^n служит контрпримером. Однако можно показать, что если M_n^{k+1} содержится в касательном пространстве к орбите $j^{k+1}f$, то это же верно если и не для *всех* точек $j^{k+1}f+M_n^{k+1}$, то по крайней мере для всех точек, достаточно близких к $j^{k+1}f$. Значит, некоторый кусок пространства $j^{k+1}f+M_n^{k+1}$ лежит в орбите $j^{k+1}f$ и произвольные *достаточно малые* изменения f порядка $k+1$ можно устранить подходящей заменой координат. (Это, конечно, не означает, что $j^{k+1}f$ можно привести к j^kf, так как члены порядка $k+1$ могут не быть достаточно малыми.)

Это подводит нас к следующему определению: назовем функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *локально k-определенной*, если найдется такое $\varepsilon \in \mathbb{R}$, что каждую функцию $f+g$, где g — функция порядка $k+1$, удовлетворяющая условию

$$\left|\frac{\partial^{k+1}g}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}(0)\right| < \varepsilon \text{ для всех наборов } k_i \text{ с } k_1+\ldots+k_n=k+1,$$

можно локально перевести в $j^{k+1}f$ гладкой заменой координат. Справедлива

ТЕОРЕМА 8.3. Гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является локально k-определенной, если и только если каждый однородный многочлен степени $k+1$ может быть представлен в виде

$$\overline{Q_1 j^k\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}^{k+1} + \ldots + \overline{Q_n j^k\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}^{k+1}$$

для некоторых многочленов $Q_1, \ldots, Q_n$ порядка $\geqslant 1$.

Доказательство этого результата можно найти у Мартинэ [31]. Склеивая малые куски $j^{k+1}f+M_n^{k+1}$, которые, согласно этой теореме, лежат каждый в некоторой своей орбите, можно показать, что всё $j^{k+1}f+M_n^{k+1}$ целиком содержится (при некоторых дополнительных предположениях) в *одной и той же* орбите, и прийти тем самым к недавно опубликованной теореме Стефана [37]:

ТЕОРЕМА 8.4. Гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является* k*-определенной, если и только если для каждого однородного многочлена* P *степени* $k+1$ *все однородные многочлены степени* $k+1$ *представимы в виде*

$$\overline{Q_1 j^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f+P)\right)}^{k+1}+\ldots+\overline{Q_n j^k\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(f+P)\right)}^{k+1},$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ *— многочлены порядка* $\geqslant 1$.

Этот результат служит удобным средством для выяснения того, будет ли функция k-определенной, когда она удовлетворяет критерию теоремы 8.2 (если она ему не удовлетворяет, то, по теореме 8.2, не будет), но не удовлетворяет критерию теоремы 8.1, которая гарантировала бы k-определенность лишь через сильную k-определенность. Конечно, f будет тогда сильно $(k+1)$-определенной, что в некоторых приложениях может оказаться более полезным. Примеры такого рода использования этой теоремы мы дадим в § 13.

5 Преобразования, сдвигающие начало

Никакая функция не может, очевидно, быть 0-определенной. Раз мы всегда имеем дело с k-определенностью для $k\geqslant 1$, то ни при какой добавке γ к $j^k f$ порядка, большего чем k, нам не потребуется сдвигать начало, чтобы вернуться к $j^k f$. Если функция f является 1-определенной, т. е. начало — некритическая точка, то оно останется некритической точкой, в которой $f+\gamma$ принимает значение $f(0)$. Если она будет k-определенна лишь для $k>1$, она имеет в начале критическую точку, которая необходимо изолирована (§ 7) и не смещается, когда мы добавляем члены высшего порядка. Таким образом, группа G_n^k, с которой мы работали в предыдущем параграфе, строится из наиболее общих преобразований, имеющих отношение к определенности. Другое дело *устойчивость*. Когда мы возмущаем функцию (или семейство функций), мы добавляем члены всех порядков и может возникнуть необходимость сдвинуть начало, чтобы вернуть на место функцию или семейство, с которых мы начали.

Возвращаясь к функциям $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, рассмотрим новое семейство замен переменной

$$y^t(x) = x + tq(x) = tq_0 + (1 + tq_1)x + tq_2x^2 + \dots .$$

На этот раз для касательного вектора в точке $j^{k+1}f$ мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} j^{k+1}\left(q\frac{df}{dx}\right) &= q_0 j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right) + \overline{q_1 x j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)}^{k+1} \\ &\quad + \dots + \overline{q_{k+1}x^{k+1} j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)}^{k+1} \\ &= \overline{Q j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)}^{k+1}, \end{aligned}$$

где Q — произвольный многочлен, возможно с ненулевым постоянным членом q_0. В случае n переменных мы, конечно, придем к вектору $\overline{Q_1 j^{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}^{k+1} + \dots + \overline{Q_n j^{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}^{k+1}$, где многочлены Q_i могут иметь ненулевые постоянные члены.

Это наиболее общий вид касательного вектора, который имеется для $j^{k+1}f$, и мы, допуская небольшую вольность речи, назовем пространство таких векторов *касательным пространством к* $j^{k+1}f$, опустив упоминание об орбите и группе. На математическом языке, оно *порождено* n струями

$$j^{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \dots, j^{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

и поскольку они получаются дифференцированием, это пространство обозначают через $\Delta_{k+1}(f)$. Равным образом оно может быть описано как пространство $(k+1)$-струй элементов множества Δf, которое состоит из всех локально определенных функций вида

$$q_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + q_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

где q_s — произвольные гладкие функции. (Это множество называется *якобиевым идеалом* для f.) Но мы будем иметь дело лишь с конечномерным пространством $\Delta_{k+1}(f)$.

Теперь у нас есть возможность более сжато выразить наши алгебраические критерии. Определим произведение $\overline{AB}^{k+1}$ двух подпространств A, B любого из пространств E_n^{k+1}, J_n^{k+1} или I_n^{k+1} как множество

$$\{\overline{a_1 b_1}^{k+1} + \dots + \overline{a_s b_s}^{k+1} \mid a_j \in A,\ b_j \in B\}.$$

Другими словами, это — пространство всех линейных комбинаций усеченных произведений многочленов, по одному

из каждого подпространства. Тогда касательное пространство к орбите $j^{k+1}f$ под действием G_n^{k+1} есть $\overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}$, а касательным пространством к орбите под действием $\tilde{G}_n^{k+1}$ будет $\overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1}$. Поэтому алгебраические критерии теорем 8.1— 8.4 принимают вид

$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1} \text{ (теорема 8.1)},$$
$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1} \text{ (теорема 8.2, 8.3)},$$
$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f+P)}^{k+1} \text{ для всех } P \in M_n^{k+1} \text{ (теорема 8.4)}$$

соответственно, и далее мы будем использовать их в этом виде.

Отметим, что поскольку $\Delta_{k+1}(f)$ определено через $(k+1)$-струи частных производных f, то, сравнивая степени соответствующих элементов, мы видим что

$$\Delta_k(f) = \Delta_k(j^{k+1}f),$$

в то же время *не обязательно* верно, что

$$\Delta_k(f) = \Delta_k(j^k f).$$

Исходя из неявного допущения о справедливости этого неверного равенства, мы в своей книге [25], стр. 98, ошибочно предложили использовать $j^k f$ для проверки трансверсальности. На эту ошибку, которая может иногда повести к неправильным результатам, нам указал Роберт Мэгнус.

Ввиду того что при умножении многочленов и усечении действие некоторых членов аннулируется,

$$\overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1} = \overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^k f)}^{k+1},$$

так что правая часть условия (8.1) зависит только от $j^k f$, как и отмечалось выше; в то же время для J_n^{k+1} мы имеем лишь

$$\overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1} = \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^{k+1}f)}^{k+1},$$

и в теоремах 8.2 и 8.3 существенны, как мы и видели, члены в $j^{k+1}f$ порядка $k+1$.

6 Касание и трансверсальность

Вместо того чтобы „честно" рисовать для различных f орбиты, которых касательные векторы из $\Delta_{k+1}(f)$ действительно касаются (такое предприятие, хотя это, возможно, и покажется удивительным, потребовало бы много больше

работы и привлечения новых понятий), мы проиллюстрируем это касание, вернувшись к семействам функций, изучавшимся нами в гл. 6 и 7.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой $\frac{df}{dx}\Big|_0=1$. Тогда

$$j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)=1+a_1x+\ldots+a_{k+1}x^{k+1}.$$

Так как эта функция отлична от нуля в некоторой окрестности начала, то в этой окрестности функция

$$x\longmapsto\left(j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)^{-1}$$

гладкая и мы можем взять ее тейлоровское разложение до порядка $k+1$ и получить многочлен, который запишем в виде

$$R(x)=1-a_1x+(a_1^2-a_2)x^2+\ldots+q_{k+1}x^{k+1},$$

такой, что

$$\overline{R(x)\,j^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)}^{k+1}=1.$$

Поскольку отсюда вытекает, что $1\in\Delta_{k+1}(f)$, то и каждый многочлен P степени $\leqslant k+1$ лежит в $\Delta_{k+1}(f)$, так как его можно представить в требуемом виде

$$\overline{Qj^{k+1}\left(\frac{df}{dx}\right)}^{k+1}$$

с многочленом Q степени $\leqslant k+1$: можно просто положить $Q=\overline{PR}^{k+1}$.

Иначе это можно выразить, сказав, что любое направление, в котором мы можем возмутить f, мы также можем получить (или обратить) с помощью замены переменных. Действительно (см. рис. 8.6), если $f(0)=c$ и f' — результат малого возмущения f, то нам достаточно лишь сдвинуть начало в новую, локально единственную точку $p=f^{-1}(c)$ и произвести гладкую перепараметризацию области определения, чтобы снова получить f того же вида и с тем же значением в 0. Некритические точки очень устойчивы в том смысле, что малые возмущения устраняются простой перепараметризацией области определения.

Далее, возьмем функцию

$$f=c+x^2+O(3).$$

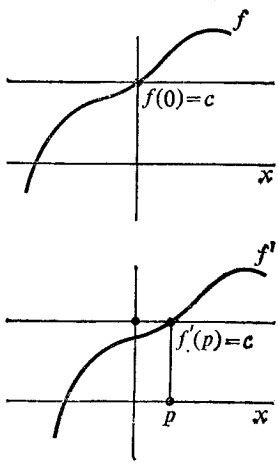


Рис. 8.6

То же рассуждение показывает, что $\Delta_{k+1}(f)$ для всех $k\geqslant 2$ в точности совпадает с J_n^{k+1} — пространством многочленов от x с нулевым постоянным членом. Соответственно, любое малое возмущение можно локально исправить заменой переменных (возможно, со сдвигом начала), *за тем, однако, исключением, что значение в начале может измениться* (рис. 8.7). Отсутствие постоянных членов в $\Delta_{k+1}(f)$ означает, что изменение значения в критической точке не принадлежит к тем направлениям, в которых мы можем сдвигаться посредством одного только изменения x-координат. В § 5 гл. 4, чтобы добиться устойчивости, нам пришлось допустить также и возможность изменения этой „константы".

Теперь рассмотрим функцию $f(x)=x^3$ (или, более общо, любую функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, приводимую к этому виду; вычисления касания до и после замены координат дают, как это и должно быть, согласованные ответы). Очевидно, $\Delta_{k+1}(f)$ содержит $x^2=\frac{1}{3}\frac{df}{dx}$ и, значит, всё I_n^{k+1}. Касание в направлении x^2 в точке x^3 можно яснее всего представить, если вложить „касающееся семейство" x^3+sx^2 (рис. 8.8) в большее семейство

$$f_{t,s}=x^3+sx^2+tx.$$

Нарисовав картину катастрофы для этого семейства (рис. 8.9), мы видим, что ось s касается той кривой в плоскости ts, над которой лежат складки. Действительно, если положить

$$y=x+s/3,$$
$$\tau=t-s^2/3,$$

мы получим

$$y^3+\tau y-s^3/27+\tau s/3=x^3+sx^2+tx=f_{t,s}(x).$$

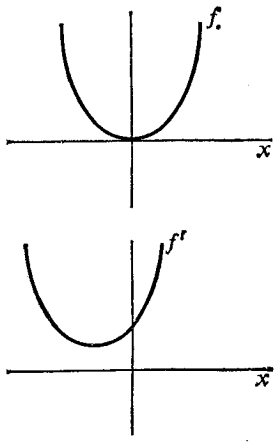


Рис. 8.7

Следовательно, $f_{t,s}$ приводится с помощью замены координат t, s и зависящей от (t, s) замены координаты x к стандартной катастрофе складки из § 2 гл. 7. Действие s сводится к сдвигающему члену $s^3/27+\tau s/3$, который не влияет на то, какие значения y являются критическими для $y^3+\tau y-s^3/27+\tau s/3$, равно как и на тип критической точки.

Если бы мы вложили x^3+sx^2 в еще большее семейство

$$x^3+sx^2+t_1x+t_0,$$

то мы могли бы положить

$$y=x+s/3,\ \tau_1=t_1-s^2/3,\ \tau_0=t_0-s^3/27+\tau s/3$$

и получить

$$y^3+\tau_1 y+\tau_0=f_{t,\,s}(x)$$

точно, не прибегая к s. Это отражает тот факт, что x и 1 представляют собой два направления в пространстве многочленов, которые отсутствуют в $\Delta_{k+1}(x^3)$ при любом k. Однако запретить „переменные константы" вроде $s^3/27$ означало бы отказаться от возможности приведения вполне типически появляющихся однопараметрических семейств типа семейства

$$x^3+tx^2+tx=(x+t/3)^3+(t-t^2/3)x-t^3/27$$

к стандартной локальной форме. (Здесь это достигается заменой $y=x+t/3$, $\tau=t-t^2/3$; заметим, что *глобально* это приводит к двум чисто кубическим точкам $t=0$, $t=3$, в соответствии с тем, что прямая $s=t$ на рис. 8.9 дважды пересекла бы кривую складок.) Поэтому для того чтобы сделать всё, типично появляющееся в однопараметрическом семействе, локально эквивалентным одной из трех стандартных форм (линейная, морсовская и катастрофа складки), мы должны в используемых эквивалентностях допустить сдвигающие члены. Как мы увидим, в большинстве приложений это является разумным. Правда, в гл. 11 при рассмотрении течений жидкости мы встретимся с физической интерпретацией, в которой действие такого сдвигающего члена абсолютно несущественно, и мы можем использовать его для упрощения результата. Если вдруг окажется необходимым вернуться к „истинному" постоянному члену, мы всегда можем это сделать.

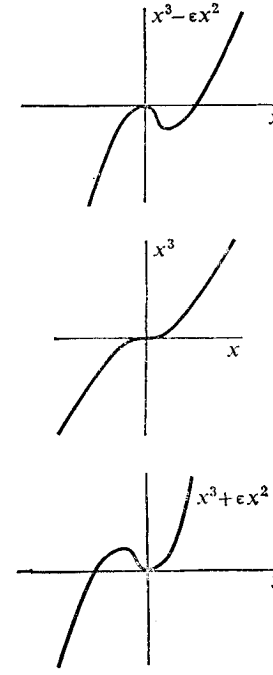


Рис. 8.8

Эти доказательства и алгебра сохраняют полную силу вне зависимости от того, вводим мы такой член или нет,— на самом деле они даже станут несколько проще, если мы это делаем, так как тогда можно убрать сдвигающий член из отношения эквивалентности. Вводя его, мы повышаем все коразмерности на единицу, за исключением некритических точек, поскольку это означает, что мы действуем в рамках пространства E_n^k, а не J_n^k. Мартинэ [31] понимает коразмерность именно в таком смысле — добавляя единицу к числовому значению и функцию 1 к элементам кобазиса. То же делается и в программе из дополнения 1.

Чтобы устранение таких постоянных членов трактовать систематическим образом, введем обозначение

$$J^{k+1}f=j^{k+1}f-j^0 f$$

для $(k+1)$-струи f с откинутым постоянным членом.

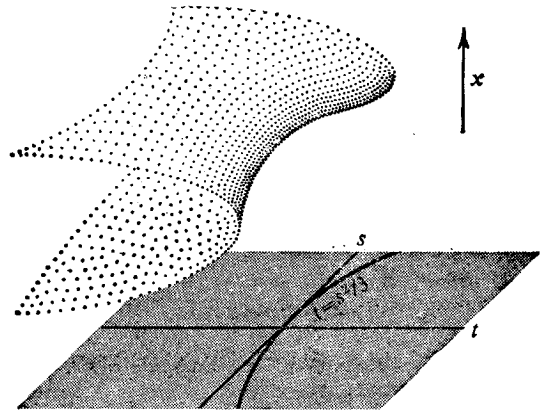


Рис. 8.9

Возьмем теперь любое семейство $F_{t_1, \ldots, t_N}$ функций, окружающих функцию

$$F_{0, \ldots, 0}(x) = f(x) = x^3,$$

такое что некоторая прямая $\{(st_1, \ldots, st_N) | s \in \mathbb{R}\}$ для фиксированного $t=(t_1, \ldots, t_N)$ дает „вектор направления"

$$v = J^{k+1}\left(\lim_{s \to 0} \frac{F_{st_1, \ldots, st_N}(x) - x^3}{s}\right)$$

в пространстве струй J_n^{k+1}, который *не* принадлежит подпространству $\Delta_{k+1}(x^3)$ векторов, касательных к орбите x^3. (Это значит, что он представляет собой то самое „одно отсутствующее направление", но он не обязательно есть x, просто он должен иметь ненулевой линейный член.) Великая теорема в этой области (теорема 8.6 ниже) гарантирует нам следующее. Гладкой заменой $(t_1, \ldots, t_N)$ на $(s_1, \ldots, s_N)$ и зависящей от $(t_1, \ldots, t_N)$ гладкой заменой x на y семейство $F_{t_1, \ldots, t_N}$ можно привести к виду

$$F_{s_1, \ldots, s_N}(y) = y^3 + s_1 y$$

с точностью до сдвигающего члена. Эта замена переводит направления, касательные к множеству точек складки, в координатные направления и выпрямляет всё это множество так, чтобы оно лежало в точности вдоль этих направлений. Если F не удовлетворяет предыдущему условию, как, например, $F(s, x)=x^3+sx^2$, мы можем вложить его в большее семейство, как раньше, выпрямить и спроектировать: если $\tau(s)=-s^2/3$ и $y=x+s/3$, то $y^3+\tau(s)\,y$ дает как раз нужное семейство F с точностью до сдвигающего члена. Итак, мы

свели описание F к описанию специальной кривой с параметром t в стандартном семействе x^3+tx.

Даже в этом простейшем нетривиальном случае функций одной переменной, по-видимому, нет простого доказательства великой теоремы, подобного тому, которое было дано в § 3 гл. 4 для критерия определенности. Любая попытка „голыми руками" доказать сделанное утверждение, даже с одной только переменной t, приводит к подготовительной теореме Мальгранжа (строгие источники) или, что эквивалентно, к теореме деления. На самом деле изучение таких частных случаев — прекрасный путь к уяснению этих тонких теорем. Обсуждение этого вопроса можно найти в книге Мартинэ [31]; оно лежит за пределами принятых нами рамок. Нужно указать, что необходимость подготовительной теоремы в настоящем контексте впервые была понята Томом. Мальгранж вначале даже не поверил, что она может быть справедливой, и лишь настойчивость Тома убедила его в этом и склонила к тому, чтобы заняться ее доказательством. (Здесь лежит объяснение того, почему § 7 предыдущей главы озаглавлен „Теорема Тома". Том не публиковал первого ее доказательства — он не опубликовал никакого ее доказательства,— но он почувствовал сам результат и оркестровал его доказательство.) Нечасто случается, чтобы центральный результат теории, высказанный впервые, был встречен с недоверием главным экспертом в этой области! Теория катастроф, как мы не устаем повторять на протяжении всей книги, является расширением математического анализа или разработкой в его рамках, но не отходом, подобным ньютоновскому (как это иногда утверждается), от предшествующего описания мира. Однако разработка эта ни в какой мере не является тривиальной или стандартной.

7 Коразмерность и деформации

Теперь можно дать строгое определение понятия *коразмерности* функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в начале:

$$\begin{aligned}\operatorname{cod}(f) &= \max_{k \geqslant 1} (\text{коразмерность } \Delta_{k+1}(f) \text{ в } J_n^{k+1}) \\ &= \max_{k \geqslant 1} (\dim J_n^{k+1} - \dim \Delta_{k+1}(f));\end{aligned}$$

иными словами, это — число „отсутствующих" полиномиальных направлений. Число $\dim J_n^{k+1} - \dim \Delta_{k+1}(f)$ может лишь возрастать с ростом k; если оно нигде не останавливается в своем росте, то мы пишем $\operatorname{cod}(f)=\infty$.

Если $M_n^{k+1} \subseteq \Delta_{k+1}(f)$ — что заведомо так, согласно теореме 8.2, в случае, когда f является k-определенной,— то никакие направления порядка $k+1$ не могут лежать вне $\Delta_{k+1}(f)$. Обращаясь снова к лемме Накаямы, мы видим, что вне Δ_{k+m} не может оказаться ни один многочлен порядка $>k$. Значит, все „отсутствующие" направления представлены многочленами порядка $\leqslant k$. Коразмерность f в 0 в точности совпадает в нашем случае с коразмерностью $\Delta_k(f)$ в J_n^k или же $\Delta_{k+1}(f)$ в J_n^{k+1}.

Если f не является k-определенной ни для какого k, то среди отсутствующих будут полиномы всех порядков и коразмерность будет бесконечной. Таким образом, условия конечной коразмерности и конечной определенности эквивалентны.

Одна из причин, по которой введенное выше понятие коразмерности оказывается важным, состоит в том, что оно точно соответствует понятию геометрической коразмерности, использовавшемуся в предыдущих главах в рассуждениях, связанных с трансверсальностью. Ту коразмерность можно поэтому подсчитать с помощью этого определения, а не прибегая к геометрическим картинкам, таким, как конус или браслет омбилик. Такие подсчеты более быстры и более систематичны, и потому в строгих первоисточниках они служат стандартным методом. Теорема Тома о трансверсальности гарантирует нам, что в r-параметрическое семейство в типичном случае входят лишь функции, коразмерность которых в каждой точке $\leqslant r$, при условии что нет непрерывных семейств типов (вроде квартик, классифицированных в § 6 гл. 7 при помощи двойного отношения), которое вместе *как целое* имеют коразмерность $\leqslant r$. Легко подсчитать, что любая функция $f(x, y)$ порядка 4 имеет коразмерность по меньшей мере 8; но в типичном случае если семимерное семейство содержит такую функцию, то и всякое близкое семейство тоже будет содержать такую же — хотя и не обязательно эквивалентную первой. (Мы уже имели в § 6 гл. 7 случай сказать об этом, но недопонимание здесь столь распространено, что нелишне повторить это еще раз.) *Множество* особенностей, для которых первые три производные обращаются в нуль в двух направлениях, имеет коразмерность 7, множество особенностей, для которых первые две производные обращаются в нуль в трех направлениях, имеет коразмерность 6, но коразмерности отдельных элементов в этих множествах не меньше 8 и 7 соответственно. (Мы не излагаем общих методов для подсчета коразмерностей подобных множеств, ввиду того что не решена общая задача подразделения пространства струй

на такие подмножества, хотя Том и доказал, что такое подразделение, или „стратификация", существует.)

Что касается множества функций, которые не являются конечно-определенными, то оно имеет коразмерность ∞ *как множество*, и такова же коразмерность его элементов. Таким образом, для любого конечного r типичное r-параметрическое семейство содержит лишь функции, всюду k-определенные при некотором конечном k. Поскольку k-определенная особенность изолированна (многочлен $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$ обращается в нуль лишь в начале и потому принадлежит $\Delta_{2k}(f)$, а значит, представим с помощью производных $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, следовательно, эти производные не могут обратиться в нуль одновременно нигде, кроме начала), неизолированные особенности разделяют с неопределенными их крайнюю атипичность. Тем самым оправдано сделанное в § 1 гл. 4 замечание, что такие особенности встречаются редко.

В этом состоит одна из ролей, которые играет коразмерность, и притом важная роль (хотя и с обычными оговорками, касающимися соображений, связанных с типичностью, см. § 3 гл. 6). Речь идет, так сказать, об анализе, направленном *внутрь*, к типу функции, который можно встретить устойчиво в семействе данной размерности r. (Например, если в каждой точке эмбриона в каждый момент его развития мы имеем одну функцию, то перед нами четырехпараметрическое семейство. Типичным и устойчивым образом оно будет содержать лишь первоначальные „семь элементарных катастроф" коразмерности $\leqslant 4$.) Большинство опубликованных Зиманом приложений теории катастроф относится именно к этому направлению.

Но в физике, химии, инженерном деле и т. д. теория часто приводит нас к *отдельным* функциям, по крайней мере с точностью до порядка k. Если эта функция порождается специальной ситуацией или анализом некоторой „идеальной" системы, то она может быть, а может и не быть устойчивой, или типичной, но мы тем не менее должны быть в состоянии изучать ее. Это приводит к анализу, направленному *вовне* от данной функции, например к изучению ее возмущений.

Мы видели, что малые возмущения морсовской критической точки дают лишь одну критическую точку, близкую к исходной. Особенность x^3 может распасться на две (максимум и минимум) или вообще исчезнуть, особенность x^4 может распасться на три и т. д. Эти факты служат иллюстрациями следующего красивого результата:

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть коразмерность функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *в начале равна* c. *Тогда любое достаточно малое возмущение этой функции приводит к функции, имеющей вблизи начала не более* $c+1$ *критических точек.*

Мы не будем пытаться здесь доказать эту теорему или хотя бы привести соображения в пользу ее правдоподобия (хотя читатель, знакомый с основной теоремой алгебры, без сомнения, легко построит доказательство для одномерного случая); доказательство теоремы можно найти у Паламодова [38], где также вместо наших „малое" и „вблизи начала" приведены соответствующие точные условия.

Эта теорема иллюстрирует тот факт, что коразмерность служит мерой сложности критической точки. Симметрии, являющиеся плодом наших намерений или допущений, вообще говоря, увеличивают коразмерность. Пусть, например, $f(x, y)$ симметрична относительно поворотов на 90°, как это часто бывает для „идеальных" систем. Если f неморсовская в начале, то она имеет порядок 4 по (x, y), поскольку квадратичная часть исчезает в неморсовском случае по симметрии, и кубическая тоже. Но в таком случае коразмерность f по меньшей мере 8. Упрощение, даваемое тем, что мы анализируем „идеальную" систему, получается ценой много большего усложнения поведения системы, связанного с небольшими неизбежными „несовершенствами", из-за которых функция немного изменяется. Этот факт становится особенно бросающимся в глаза, когда *непрерывная* симметрия ведет к *бесконечной* коразмерности, как, например, в случае плавучей платформы, рассмотренном в § 10 гл. 10.

Теорема 8.5 утверждает, что в вырожденной особенности как бы прячется $\operatorname{cod}(f)+1$ точек, только и ждущих малого возмущения, чтобы разбежаться и превратиться в отдельные критические точки [1]. Для более систематического исследования вопроса мы можем воспользоваться гладким *семейством* возмущенных функций, подобно тому как мы рассматривали ранее семейство x^3+tx для x^3 или семейство $x^4+t_2x^2+t_1x$ для x^4. Такое семейство называется *деформацией* f; это понятие, как и столь многое другое, идет от Тома. Мы видели, что деформация x^3+tx охватывает все эффекты, производимые любыми возможными деформациями, а значит, и подавно любыми малыми возмущениями [2]. Анало-

[1] Можно ли получить все $\operatorname{cod}(f)+1$ точек при *вещественном* возмущении, как будто является открытым вопросом. *Комплексным* возмущением это может быть сделано.

[2] Авторы используют один и тот же термин (perturbation) для возмущения и возмущенной функции — его результата.— *Прим. ред.*

гичным образом катастрофа сборки доставляет все типы, которые можно встретить вблизи особенности, эквивалентной x^4, и дает нам геометрию их последовательного появления при непрерывном возмущении функции. Подобное семейство можно построить для любой функции, которая является конечно-определенной в начале.

Переходя к более строгому изложению, приведем несколько определений. Назовем *r-деформацией* функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ всякую функцию

$$F\colon \mathbb{R}^{n+r} \longrightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющую условию

$$F(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Как и раньше, мы часто будем вместо $F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r)$ писать $F_{t_1, \ldots, t_r}(x_1, \ldots, x_r)$ и представлять себе F как семейство функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, параметризованное с помощью t. Назовем $x_1, \ldots, x_n$ *внутренними переменными*, $t_1, \ldots, t_n$ — *переменными деформации*, r — *размерностью деформации*, а $\mathbb{R}^r$ — *пространством деформации*.

Будем говорить, что d-деформация $\bar{F}$ функции f *индуцирована* из деформации F с помощью трех отображений:

(a) гладкого отображения

$$e\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^r,$$
$$(s_1, \ldots, s_d) \longmapsto (e_1(s), \ldots, e_r(s));$$

(b) зависящей от параметра s локальной замены координат в $\mathbb{R}^n$, т. е. такого гладкого отображения

$$y\colon \mathbb{R}^{n+d} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$(x, s) \longmapsto (y_1(x, s), \ldots, y_n(x, s)),$$

для которого при всех s гладкое отображение

$$y_s\colon x \longmapsto y(x, s)$$

является локальным диффеоморфизмом вблизи начала;

(c) гладкой сдвигающей функции

$$\gamma\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R},$$

— если вблизи начала в $\mathbb{R}^{n+d}$ выполнено условие

$$\bar{F}(x, s) = F(y_s(x), e(s)) + \gamma(s).$$

Таким образом, каждое малое возмущение $\bar{F}_s$ с точностью до константы получается гладкой перепараметризацией некоторого возмущения из F, а именно $F_{e(s)}$. В случае когда e — диффеоморфизм, это определение сводится к

определению эквивалентности семейств функций, которым мы уже пользовались (в § 1 гл. 6). Но оно охватывает и более общие ситуации; скажем, выше мы видели, что деформация x^3+sx^2 индуцируется из x^3+tx с помощью отображений

$$\begin{aligned} &e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && s \mapsto -s^2/3,\\ &\gamma\colon \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}, && (x,\ s) \mapsto x + s/3,\\ &\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && s \mapsto -s^3/27. \end{aligned}$$

Далее, r-деформация функции f называется *версальной*, если любая другая деформация этой функции может быть индуцирована из нее. Она называется *универсальной*, если r — наименьшая размерность, для которой существуют версальные деформации f. Две универсальные деформации f, таким образом, автоматически являются эквивалентными.

Для всякой r-деформации F функции f положим

$$\begin{aligned} v_1^k(F) &= \frac{\partial}{\partial t_1}(J^k F_{t_1, 0, \ldots, 0}),\\ v_2^k(F) &= \frac{\partial}{\partial t_2}(J^k F_{0, t_2, 0, \ldots, 0}),\\ &\ldots\\ v_r^k(F) &= \frac{\partial}{\partial t_r}(J^k F_{0, \ldots, 0, t_r}) \end{aligned}$$

и обозначим через $V^k(F)$ подпространство в J_n^k, натянутое на $v_1^k(F), \ldots, v_r^k(F)$. (Напомним, что $J^k F$ обозначает k-струю F без постоянного члена.)

ТЕОРЕМА 8.6. Если функция f является k-определенной, то ее r-деформация F будет версальной тогда и только тогда, когда $V^k(F)$ и $\Delta_k(F)$ представляют собой трансверсальные подпространства в J_n^k. Она будет универсальной тогда и только тогда, когда она версальна и $r=\operatorname{cod}(f)$.

Снова мы отсылаем за доказательством к строгим источникам. Однако в следующем параграфе мы проиллюстрируем для конечномерного случая тесную связь между *транс*версальностью и *уни*версальностью.

В виде следствия мы получаем, что любые две r-деформации F и G функции f, для которых как $V^k(F)$, так и $V^k(G)$ трансверсальны к $\Delta_k(f)$, оказываются эквивалентными как семейства функций. Далее, если F является r-деформацией, а G — s-деформацией, $r>s$, и обе они версальны, то F эквивалентна деформации

$$\begin{aligned} &\hat{G}\colon \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R},\\ &(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r) \mapsto G(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_s). \end{aligned}$$

Это позволяет нам откидывать *немые* внешние переменные $t_{s+1}, \ldots, t_r$, как мы это уже делали в § 4 гл. 7. На самом деле всегда возможно, откидывая максимально возможное число немых переменных, дойти до универсальной деформации.

Универсальную деформацию для k-определенной функции f коразмерности c легко можно *построить* алгебраически: надо просто выбрать какой-нибудь кобазис (см. § 2 гл. 2) $v_1, \ldots, v_c$ для $\Delta_k(f)$ в J_n^k и положить

$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_c) = \\ = f(x) + t_1 v_1(x) + \ldots + t_c v_c(x).$$

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, y) = x^2y + y^3 + O(4),$$

которую (согласно § 5 гл. 7) можно устойчивым образом встретить в трехпараметрическом семействе. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + O(3), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 + 3y^2 + O(3).$$

Следовательно,

$$\overline{I_2^4 \Delta_4(f)^4}$$

состоит из всевозможных линейных комбинаций следующих многочленов:

$$\begin{aligned} j^4(x^2(2xy + O(3))) &= 2x^3y, \\ j^4(xy(2xy + O(3))) &= 2x^2y^2, \\ j^4(y^2(2xy + O(3))) &= 2xy^3, \\ j^4(x^2(x^2 + 3y^2 + O(3))) &= x^4 + 3x^2y^2, \\ j^4(xy(x^2 + 3y^2 + O(3))) &= x^3y + 3xy^3, \\ j^4(y^2(x^2 + 3y^2 + O(3))) &= x^2y^2 + 3y^4. \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что в число этих комбинаций входят все однородные многочлены из M_2^4, значит, по теореме 8.1 функция f сильно 3-определенна. Поэтому дальше мы можем работать в системе координат, в которой f принимает в точности вид $x^2y + y^3$, и не беспокоиться о членах более высокого порядка. *В этой системе координат*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

и $\Delta_3(f)$ состоит из всевозможных линейных комбинаций

многочленов

$$J_1 = 2xy,$$
$$J_2 = x^2 + 3y^2,$$
$$J_3 = \frac{1}{2} x\,(2xy) = x^2y,$$
$$J_4 = \frac{1}{2} y\,(2xy) = xy^2,$$
$$J_5 = x\,(x^2 + 3y^2) - \frac{3}{2} y\,(2xy) = x^3,$$
$$J_6 = \frac{1}{3} y\,(x^2 + 3y^2) - \frac{1}{6} x\,(2xy) = y^3.$$

Таким образом, $\Delta_3(f)$ состоит из всех кубических многочленов и имеет еще две квадратичные размерности из трех. Хотя в принципе годится любой кобазис, удобно выбрать следующий:

$$v_1(x, y) = x, \qquad v_2(x, y) = y, \qquad v_3(x, y) = x^2 + y^2.$$

Мы получаем тогда и все линейные члены (как комбинации v_1 и v_2) и все квадратичные, поскольку

$$x^2 = \frac{1}{2}(3v_3 - J_2), \qquad xy = \frac{1}{2} J_1, \qquad y^2 = \frac{1}{2}(J_2 - v_3).$$

(Отметим, что x^2+3y^2 не подошло бы в качестве v_3.) В итоге универсальной деформацией будет

$$x^2y + y^3 + t_3(x^2 + y^2) + t_2y + t_1x;$$

мы уже встречались с ней в § 5 гл. 7.

После рассмотрения конкретных примеров вроде приведенного выше факт эквивалентности *всех* версальных деформаций начинает казаться несколько удивительным. Возьмем, допустим, другую кубику x^3+y^3 от x и y, имеющую одну вещественную и две комплексные корневые прямые и потому, согласно § 6 гл. 2, эквивалентную кубике x^2y+y^3 относительно линейной замены. Значит, и она также 3-определенна, и мы можем работать с этой полиномиальной формой. На этот раз $\Delta_3(f)$ состоит из линейных комбинаций многочленов

$$J_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \qquad J_4 = \frac{1}{3} yJ_1 = x^2y,$$
$$J_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2, \qquad J_5 = \frac{1}{3} xJ_2 = xy^2,$$
$$J_3 = \frac{1}{3} xJ_1 = x^3, \qquad J_6 = \frac{1}{3} yJ_2 = y^3,$$

и очевидным кобазисом будет

$$v_1 = x, \qquad v_2 = y, \qquad v_3 = xy.$$

В действительности Том [1] выбрал именно эту стандартную форму x^3+y^3 и именно эту ее деформацию для задания катастрофы гиперболической омбилики

$$x^3 + y^3 + t_3xy + t_2y + t_1x.$$

Здесь квадратичный член деформации является *неопределенной* (т. е. „седловой") формой, а раньше мы имели *положительно-определенный* квадратичный член. Когда дело идет о том, чтобы приписать параметрам деформации физический смысл (например, в приложениях к технике член $t_1(x^2+y^2)$ часто отражает изменение *нагрузки*), расхождения такого рода могут показаться довольно странными. Однако, полагая

$$e\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(p, q, r) \mapsto (A, B, C),$$

где

$$A = -2^{2/3}p,$$
$$B = 2^{-2/3}(q + r\sqrt{3}),$$
$$C = 2^{-2/3}(q - r\sqrt{3}),$$

далее,

$$y\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2,$$
$$(x, y, p, q, r) \mapsto (u, v),$$

где

$$u = 2^{-1/3}(y + x/\sqrt{3} + 2p/3),$$
$$v = 2^{-1/3}(y - x/\sqrt{3} + 2p/3),$$

и, наконец,

$$\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
$$(p, q, r) \mapsto -4p^3/27 + 2pq/3,$$

мы после выполнения соответствующих умножений придем к равенству

$$u^3 + v^3 + Auv + Bu + Cv - \gamma(p, q, r) = x^2y + y^3 + p(x^2+y^2) + qy + rx.$$

Легко проверить, что y задает зависящий от параметров p, q, r диффеоморфизм $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (глобально, а не только вблизи начала), а e и y определяют диффеоморфизм всего про-

странства $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ на себя, переводя тем самым одну полиномиальную модель гиперболической омбилики в другую.

Это преобразование линейно, и потому его нетрудно найти, *коль скоро вы знаете, что оно существует*. Без нашей теоремы, мы не могли бы и подозревать об эквивалентности этих моделей, во всяком случае до тех пор, пока не изучили бы достаточно глубоко каждую из них. (Инженерам, с которыми мы беседовали по этому поводу, эти модели казались совершенно различными.) Если известно, что благодаря универсальности преобразование существует, его всегда можно найти чуть потрудившись, и изучение одной формы может быть прямо сведено к изучению другой. В особенности в малых размерностях, где имеется лишь небольшое число возможных типов, это позволяет легко переводить известные из теории факты о геометрии стандартных форм на язык тех конкретных примеров, в которых они встречаются. (В § 10 мы обсудим некоторые методы „опознавания" катастроф, позволяющие идентифицировать типы с помощью простых вычислений.) Так, например, в гл. 15 то обстоятельство, что две задачи, относящиеся к лазерам, с совершенно разными граничными условиями, приводятся к одной и той же стандартной форме (факт весьма удивительный, если исходить из физики, но вполне понятный в свете гл. 7), позволяет „перенести" много количественной информации с каждой из них на другую.

8 Трансверсальность и универсальность

На принятом нами в этой книге уровне мы не можем доказать теорему 8.6, но мы снова можем дать некоторый ее конечномерный аналог, показав, как трансверсальность гарантирует возможность перевести одна в другую вещи, очень похожие на деформации. Для этого мы могли бы взять группу G_1^4 матриц такого вида, как в соотношении (8.1) (см. § 2), или же рассмотреть общий случай действия группы G_n^k на J_n^k, а на самом деле даже вообще действие любой группы Ли на многообразии; однако метод будет вполне понятен и на простом примере группы G матриц

$$\begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ b & 1+a \end{bmatrix} \qquad (a \neq -1),$$

действующей на $\mathbb{R}^2$. Читатели, знакомые с группами Ли, могут в качестве легкого, но полезного упражнения перенести наши рассмотрения на указанную более общую ситуацию.

Поскольку

$$\begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ b & 1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ax \\ y+bx+ay \end{bmatrix},$$

любые две точки с ненулевой x-координатой могут быть переведены одна в другую; ненулевые точки оси y и начало дают два других „типа" точек относительно наших преобразований. Рассмотрим кривую

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$

для которой $f(0)=(0, Y)$, т. е. точка, отвечающая нулевому значению параметра, лежит на оси y (рис. 8.10). Мы хотим преобразовать f в „стандартную" кривую, проходящую через ось y (рис. 8.11):

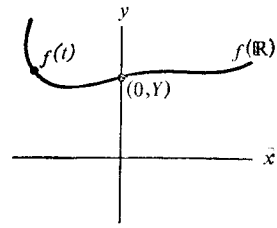


Рис. 8.10

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, 1),$$

с помощью гладкой обратимой замены координат $t \mapsto e(t)$ на прямой $\mathbb{R}$ и зависящей от t матрицы $g_t \in G$:

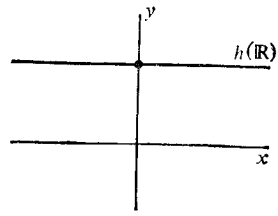


Рис. 8.11

$$g_t(f(e(t))) = h(t).$$

(В нашей аналогии с деформациями g_t отвечает зависящей от t замене переменной x (эту замену в предыдущем параграфе мы обозначили через y) и добавлению зависящего от t сдвигающего члена.) Чтобы доказать, что это может быть сделано (не единственным образом), введем функцию

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$(a, e, t) \mapsto \begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(e) \\ f_2(e) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+a) f_1(e) - t \\ (1+a) f_2(e) - 1 \end{bmatrix}.$$

Ее матрица Якоби равна

$$\begin{bmatrix} f_1(e) & (1+a)\left.\dfrac{df_1}{de}\right|_{(a, e, t)} & -1 \\ f_2(e) & (1+a)\left.\dfrac{df_2}{de}\right|_{(a, e, t)} & 0 \end{bmatrix};$$

в точке $(a, 0, 0)$ она сводится к матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & (1+a)\left.\dfrac{df_1}{de}\right|_{(a, 0, 0)} & -1 \\ Y & (1+a)\left.\dfrac{df_2}{de}\right|_{(a, 0, 0)} & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & P & -1 \\ Y & Q & 0 \end{bmatrix}$$

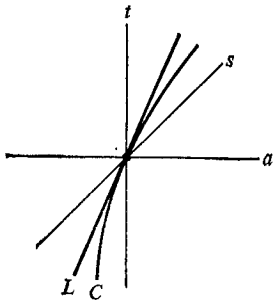


Рис. 8.12

(правая часть — сокращенная запись левой). Далее, линейное уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & P & -1 \\ Y & Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ e \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

определяет некоторую прямую L (а не плоскость), если Y или Q отлично от нуля, так что ранг этой матрицы равен 2. Прямую L (рис. 8.12) можно рассматривать как график линейной функции

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$t \mapsto \left(-\frac{Qt}{PY}, \frac{t}{P} \right)$$

в том и только том случае, если одновременно и P, и Y отличны от нуля. Если это так, то по теореме о неявной функции (§ 9 гл. 3) вблизи точки $(1/Y—1, 0, 0)$, где F обращается в нуль:

$$\begin{bmatrix} 1/Y & 0 \\ 0 & 1/Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

существует единственная гладкая функция

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$t \mapsto (a(t),\ e(t)),$$

определенная вблизи нуля, график которой (кривая C на рисунке 8.12) касателен к прямой L и которая удовлетворяет условию

$$F(a(t),\ e(t)) = 0$$

для всех t вблизи нуля, т. е.

$$\begin{bmatrix} 1+a(t) & 0 \\ 0 & 1+a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(e(t)) \\ f_2(e(t)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если мы положим

$$g_t = \begin{bmatrix} 1+a(t) & 0 \\ 0 & 1+a(t) \end{bmatrix},$$

то как раз получим $g_t(f(e(t))) = h(t)$, как и требовалось.

Теперь заметим, что условия $Y \neq 0$, $P \neq 0$ сводятся к условиям $Y \neq 0$, $\frac{df_1}{dt}\Big|_0 \neq 0$, которые в точности представляют собой требование, чтобы f трансверсально проходило через орби-

ту точки $f(0)=(0, Y)$. (Если $Y=0$, то орбитой служит начало, а никакая кривая в $\mathbb{R}^2$ не может проходить через точку трансверсально; условие же $\frac{df_1}{dt}\Big|_1 \neq 0$ означает в точности то, что f проходит *через* орбиту — неважно, в какую сторону — с ненулевой скоростью.)

Это рассуждение носит совершенно общий характер: если произвольная группа Ли гладко действует на $\mathbb{R}^n$ (на самом деле даже на любом многообразии M) и если для $h: \mathbb{R}^n \to M$ мы имеем $h(0)=x$, то, используя теорему о неявной функции, можно показать, что h универсально в некотором смысле, являющемся обобщением предыдущего, *в том и только том случае*, когда оно трансверсально к орбите. Общее доказательство требует лишь немногим большего, чем простое переписывание предыдущего рассуждения в более „стильных" обозначениях.

Доказательство теоремы 8.6, однако, не так близко к этому своему аналогу, как доказательства теорем 8.1—8.4 к тем конечномерным рассуждениям, которые предшествовали им. Во всяком случае, пока нет. В некоторых отношениях в подготовительной теореме Мальгранжа есть что-то от теоремы о неявной функции, и значительные усилия были потрачены для того, чтобы сформулировать и доказать бесконечномерную теорему о неявной функции, использование которой сделало бы доказательство теоремы 8.6 *в точности* подобным приведенному выше. Такая формулировка послужила бы мощным средством для развития теории, и она имела бы серьезные педагогические преимущества.

9 Сильная эквивалентность деформаций

Теорема 8.6 обеспечивает нам, в частности, следующее. Если F представляет собой r-деформацию k-определенной функции f, имеющей коразмерность r, и если $V^k(F)$ и $\Delta_k(F)$ являются трансверсальными подпространствами в J^k_n, то F эквивалентна „усеченной" деформации, обозначаемой нами через $\bar{F}^k$ и определяемой равенством

$$\bar{F}^k(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r) = j^{k+1}f + t_1 v_1^k(x) + \ldots \\ \ldots + t_r v_r^k(x).$$

Действительно, эти две деформации служат универсальными деформациями эквивалентных функций. (Мы могли бы взять справа $j^k f$, если при этом получится версальная деформация, только тогда нужно *отдельно* проверять, что

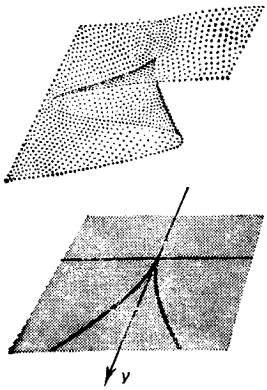


Рис. 8.13

$\Delta_k(j^k f)$ трансверсально к $V^k(f)$. Можно было бы также использовать функции $v_1^k, \ldots, v_r^k$ не от x, а от новых координат $y(x)$, в которых устраняются члены функции f порядка $k+1$; ввиду k-определенности такую замену можно было бы даже осуществить с помощью многочленов.) Но, как мы уже видели в § 1, когда вводили *сильную* k-определенность, в пространстве деформации имеются некоторые особо важные направления, и мы хотели бы оставить их выделенными. Так, в большинстве приложений катастрофы сборки направление v „разветвления" сборки (рис. 8.13) имеет определяющее значение. Поэтому для точных приложений полезно в вычислительном отношении следующее понятие.

Две r-деформации функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называются *сильно эквивалентными*, если одна из них индуцируется из другой с помощью отображений e, y и γ (см. § 7), таких что производная локального диффеоморфизма

$$\mathbb{R}^{n+r} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+r},$$
$$(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r) \longmapsto (y_1(x, t), \ldots$$
$$\ldots, y_n(x, t), e_1(t), \ldots, e_r(t))$$

в начале является тождественным отображением.

ТЕОРЕМА 8.7. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *сильно* k-*определенная функция,* $k \geqslant 3$. *Как вытекает из теоремы* 8.1, *в этом случае имеет место одно из включений*

(a) $M_n^{k-1} \subseteq \Delta_{k+1}(f)$,
(b) $M_n^k \subseteq \Delta_{k+1}(f)$,
(c) $M_n^{k+1} \subseteq \Delta_{k+1}(f)$.

Тогда всякая версальная деформация F *функции* f *сильно эквивалентна деформации*

$$j^p f(x) + t_1 J^q\left(\frac{\partial}{\partial t_1} F_{t_1, 0, \ldots, 0}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t_r J^q\left(\frac{\partial}{\partial t_n} F_{0, \ldots, 0, t_r}\right),$$

если соответственно

(a) $p \geqslant 2k-3$, $q \geqslant k-2$,
(b) $p \geqslant 2k-2$, $q \geqslant k-1$,
(c) $p \geqslant 2k-1$, $q \geqslant k$.

Заметьте, что вычисления, которые надо выполнить для *проверки* условий теоремы, требуют подсчета не большего

числа производных, чем раньше. Лишь при *пользовании* этим результатом нам нужно подсчитывать члены порядков p и q. Результат принадлежит Мэгнусу [101]. В дальнейшем мы убедимся (см. § 1 гл. 12 и § 1 гл. 14) в его полезности для приложений.

10 Числа, ассоциированные с особенностями

Как мы уже отмечали в § 7, гораздо легче найти преобразование, приводящее катастрофу (возникшую в теории некоторой системы) к стандартной форме, если наперед знать, к какой форме стремиться. В противном случае приходится обращаться ко всей полиномиальной алгебре, используемой для классификации катастроф.

Оказывается, что в маломерных случаях весьма эффективны *численные инварианты*, связанные с особенностями, для которых катастрофа служит деформацией, и не зависящие от выбора координат, причем эти инварианты доставляются теми же самыми *линейными* критериями, которые были использованы нами в теоремах 8.1—8.4.

Мы уже определили для особенности $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *коранг*, *коразмерность* и *число определенности*. Последнее, согласно

ТАБЛИЦА 8.1 Инварианты катастроф коразмерности $\leqslant 5$

Обозначение	Коранг	Коразмерность	Число определенности	Число сильной определенности
A_2	1	1	3	3
A_3	1	2	4	4
A_4	1	3	5	5
A_5	1	4	6	6
A_6	1	5	7	7
D_4^-	2	3	3	3
D_4^+	2	3	3	3
D_5	2	4	4	4
D_6^-	2	5	5	5
D_6^+	2	5	5	5
E_6	2	5	4	4

Есть много других чисел: право-левая коразмерность, число Кокстера число Долгачева и т. д.,— приобретающих значение в высших коразмерностях; но мы не приводим здесь тех чисел, для которых не указали, как их вычислять. Обстоятельный обзор дан у Арнольда [40], где комплексная классификация проведена вплоть до коразмерности 14. Читателю очень рекомендуется заглянуть в эту статью, хотя бы лишь для того, чтобы увидеть, (a) какими сложными становятся классификации и (b) что они все-таки еще возможны.

теореме 8.4, может быть определено алгебраически как

$$\min\{k \mid M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^k f + P)}^{k+1} \text{ для всех } P \in M_n^{k+1}\}.$$

Аналогичным образом, опираясь на теорему 8.1, определим *число сильной определенности* f как

$$\min\{k \mid M_n^{k+1} \subseteq \overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^k f)}^{k+1}\}.$$

Значения этих четырех чисел для особенностей коразмерности $\leqslant 5$ приведены в табл. 8.1. Из таблицы видно, что для указанных коразмерностей все различные случаи полностью различимы с помощью этих чисел, за исключением пар $D_4^{\pm}$ и $D_6^{\pm}$. (Это на самом деле и не удивительно, так как числа здесь в точности те же, что и в комплексном варианте теории, где каждая из пар сливается в одну особенность (D_4 и D_6 соответственно).) Для полноты мы укажем здесь „маломерную" процедуру для различения и этих случаев.

Часто бывает достаточно небольшой легкодоступной дополнительной информации, так как внешнее поведение осо-

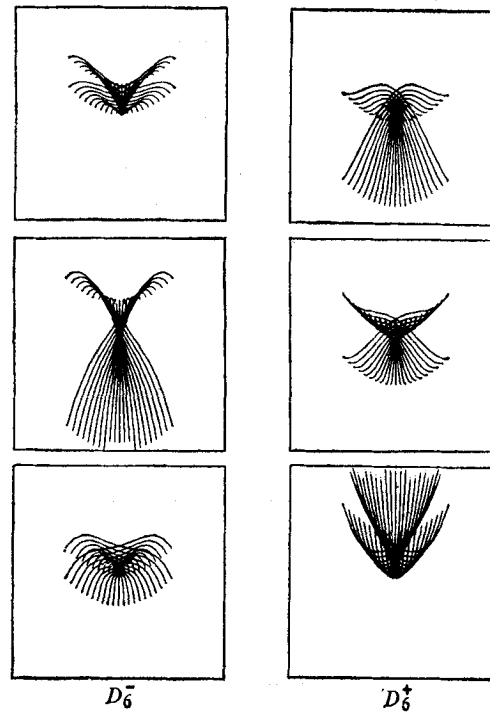


Рис. 8.14. *Сечения деформации для* D_6^- *(левый столбец) и для* D_6^+ *(правый столбец). (Любезно предоставлено Э. Э. Р. Вудкоком.)*

бенностей при плюсе и при минусе совсем разное. Например, D_4^+ и D_6^+ допускают малые возмущения функции f, в результате которых исчезают нули Df вблизи начала, а D_4^- и D_6^- не допускают таких возмущений. Как будет нами подробнее описано в § 9 гл. 12, для катастрофы D_4^-, возникающей в теории рассеяния, Берри предложил способ идентификации, основанный на том, что эта катастрофа имеет сечение с „углом", чего не бывает ни для одной другой катастрофы коразмерности $\leqslant 3$. Некоторые характерные сечения для катастроф D_6^- и D_6^+ показаны на рис. 8.14. Их бросающееся в глаза родство с катастрофами D_4^- и D_4^+, геометрия которых изучается в следующей главе, будет детально проанализировано в книге Постона, Стюарта и Вудкока [39].

Аналитически можно действовать следующим образом. Приводим f к виду

$$f(x, y) \pm z_1^2 \pm \ldots \pm z_m^2,$$

используя алгоритм нормализации из § 12. Если f — особенность типа $D_4^\pm$, то $j^3 f$ является однородной кубикой, в которой можно выделить хотя бы один линейный множитель. Разделив на этот множитель, получим квадрику, и если она положительно- или отрицательно-определенная, то f относится к типу D_4^+, а если неопределенная, то к типу D_4^-.

Если f — особенность типа $D_6^\pm$, то нормализация даст

$$j^5 f = f_3(x, y) + f_4(y, x) + f_5(x, y),$$

где f_i однородно степени i. Несложно отыскиваемой линейной заменой f_3 приводится к виду $u^2 v$. В этих координатах $j^5 f$ принимает вид

$$u^2 v + u^2 P(u, v) + auv^3 + uQ(u, v) + bv^5,$$

где P и Q — соответственно квадрика и квартика от (u, v). Особенность f относится к типу D_6^+ или D_6^- в зависимости от того, будет ли $b - a^2 > 0$ или $b - a^2 < 0$.

11 Некоторые неравенства

Число определенности $\sigma(f)$ и коразмерность $\operatorname{cod}(f)$ обе конечны, если хотя бы одна из них конечна, и при этом

$$\operatorname{cod}(f) \geqslant \sigma(f) - 2.$$

Иногда это бывает полезно иметь в виду; доказательство требует леммы Накаямы. Более важным является соотно-

шение между cod (f) и корангом m особенности f. Возьмем f в „расщепленной" форме (возможность приведения к которой гарантируется леммой расщепления (гл. 4) и которую можно найти с помощью алгоритма следующего параграфа)

$$\pm y_1^2 \pm \ldots \pm y_{n-m}^2 + \tilde{f}(y_{n-m+1}, \ldots, y_n);$$

здесь $\tilde{f}$ — многочлен порядка $\geqslant 3$ и степени $\leqslant \operatorname{cod}(f)$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-m$ имеем $y_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_i}$; значит, все многочлены из J_n^k, имеющие сомножителем хотя бы одну из этих переменных y_i, лежат в $\Delta_k(f)$. Следовательно, в $\Delta_k(f)$ могут „отсутствовать" лишь полиномиальные направления, выразимые исключительно через $y_{n-m+1}, \ldots, y_n$, и потому лишь они могут влиять на коразмерность. Таким образом, мы можем работать с $\tilde{f}$.

Имеется m линейно-независимых линейных одночленов от $y_{n-m+1}, \ldots, y_n$ и $\frac{1}{2}m(m+1)$ квадратичных. Поскольку $\tilde{f}$ свободно от квадратичных членов, касательные направления

$$j^k\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}\right) \qquad (n-m \leqslant i \leqslant n)$$

не имеют линейных членов. Следовательно, только эти касательные векторы и их линейные (не полиномиальные) комбинации задают линейные и квадратичные направления. Поэтому таких направлений *не больше* m (меньше, если некоторые из получающихся направлений линейно зависимы), и нам нужно еще по крайней мере

$$\left(m + \frac{1}{2}m(m+1)\right) - m$$

направлений, чтобы получить все линейные и квадратичные направления деформации. Отсюда

$$\operatorname{cod}(f) \geqslant \frac{1}{2}m(m+1).$$

В сотрудничестве с Робертом Мэгнусом мы открыли недавно еще одно неравенство, упоминаний о котором не нашли в литературе. Немного комбинаторики и правила § 7 приводят к соотношению

$$\sigma(f) > \sqrt{m}.$$

Это неравенство довольно грубо; с его помощью нельзя, например, обнаружить тот факт, что не существует 3-опре-

деленных функций от четырех существенных переменных (скажем, функция $x^3+y^3+z^3+w^3$ является лишь 4-определенной). Было бы интересно уточнить его и исследовать асимптотическое поведение точной нижней грани $\sigma(f)$ с ростом m.

Однако даже в этой форме оно показывает, что топологически правильное описание системы, имеющей 10^{12} существенных переменных, с помощью отрезка ряда Тейлора потребовало бы *по меньшей мере* всех членов до миллионного порядка включительно. Это дает основание предположить (хотя для доказательства нужны другие методы), что в системе, имеющей бесконечное число мод выпучивания, ни при каком конечном k невозможна k-определенность в точке выпучивания. Это бросает тень сомнения на *все* методы, использующие полиномиальные аппроксимации, будь то теория катастроф или метод конечных элементов. По-видимому, чтобы прояснить ситуацию, нужно привлечь иные топологические средства.

12 Сводка результатов и вычислительных приемов

Мы даем здесь голый скелет рассмотренных выше вычислительных приемов для тех, кто предпочел пропустить наше наводящее изложение, а также для удобства ссылок. В некоторых случаях ради краткости мы даже втиснули теоремы в пункт „определения". Подробности можно найти в предыдущих параграфах. Мы используем обозначения, введенные в § 7 гл. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Для любой гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$j^k f$ *обозначает ее тейлоровское разложение до порядка* k.

$J^k f$ *— это* $j^k f$ *без свободного члена.*

f *называется* k-определенной *в* 0, *если любая гладкая функция вида* $f+g$, *где* g *имеет порядок* $k+1$ *в* 0, *может быть локально представлена как* $f(y(x))$, *где* $y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— гладкая обратимая замена координат.*

f *называется* сильно k-определенной *в* 0, *если, кроме того,* y *всегда можно выбрать так, чтобы*

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_0 = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

f *называется* локально k-определенной *в* 0, *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой гладкой функции* g, *удов-*

летворяющей условию

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \varepsilon \text{ при всех } k_1, \ldots, k_n$$

$$\text{с } k_1+\ldots+k_n=k.$$

функцию $f+g$ *можно локально представить как* $f(y(x))$, *где* y: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *гладкая обратимая локальная замена координат.*

E_n^k *обозначает векторное пространство многочленов от* $x_1, \ldots, x_n$ *степени* $\leqslant k$.

J_n^k — *это подпространство в* E_n^k, *состоящее из многочленов с нулевым свободным членом.*

I_n^k — *подпространство в* J_n^k, *состоящее из многочленов с нулевым линейным членом.*

M_n^k — *векторное пространство однородных многочленов от* $x_1, \ldots, x_n$ *степени* k.

$\Delta_k(f)$ — *подпространство в* J_n^k, *порожденное всеми многочленами вида* $\overline{Qj^k\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k}$, *где* $1\leqslant i\leqslant n$ *и* $Q\in E_n^k$. *Оно совпадает с*

$$\Delta_k(j^{k+1}f),$$

что проверяется почленным сравнением.

$\overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)^{k+1}}$ — *подпространство в* J_n^{k+1}, *порожденное всеми многочленами вида*

$$\overline{Qj^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(j^{k+1}f)\right)^{k+1}},$$

где Q — *одночлен* $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, *для которого*

$$1\leqslant\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant k+1.$$

$\overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)^{k+1}}$ — *подпространство в* J_n^{k+1}, *порожденное всеми многочленами вида*

$$\overline{Qj^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(j^k f)\right)^{k+1}},$$

где Q — *одночлен* $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *с* $2\leqslant\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant k+1$.

Коразмерность $\operatorname{cod}(f)$ *функции* f *в* 0 — *это коразмерность подпространства* $\Delta_k(f)$ *в* J_n^k *для любого* k, *для которого* f *является* k*-определенной.*

r-деформацией f *в* 0 *называется всякая функция*

$$F\colon \mathbb{R}^{n+r}\to\mathbb{R},$$

$$(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r)\mapsto F(x, t)=F_t(x),$$

определенная вблизи начала, для которой $F_{0,\ldots,0}(x)=f(x)$.

d-деформация $\bar{F}$ *называется* индуцированной *из деформации* F *с помощью трех отображений, определенных вблизи начала:*

$$e\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r, \qquad (s_1, \ldots, s_d) \mapsto (e_1(s), \ldots, e_r(s)),$$
$$y\colon \mathbb{R}^{n+d} \to \mathbb{R}^n, \qquad (x, s) \mapsto (y_1(x, s), \ldots, y_n(x, s)),$$
$$\gamma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

если выполнено условие

$$\bar{F}(x, s) = F(y_s(x), e(s)) + \gamma(s).$$

(Это лишь „конспект" полного определения, которое можно найти в § 7.)

Две r-деформации F *и* G *функции* f *в* 0 *называются* сильно эквивалентными, *если каждая из них может быть индуцирована из другой с помощью отображений, удовлетворяющих условию*

$$\left.\frac{\partial e_i}{\partial t_j}\right|_0 = \delta_{ij}.$$

r-деформация функции f *в* 0 *называется* версальной, *если из нее могут быть индуцированы все прочие деформации* f *в* 0.

Она называется универсальной, *если она версальна и* $r = \operatorname{cod}(f)$.

Для всякой деформации F *функции* f *мы полагаем*

$$v_1^k(F) = \frac{\partial}{\partial t_1}(J^k(F_{t_1, 0, \ldots, 0})),$$
$$\ldots$$
$$v_r^k(F) = \frac{\partial}{\partial t_r}(J^k(F_{0, \ldots, 0, t_n})).$$

$V^k(F)$ *обозначает подпространство в* J_n^k, *натянутое на* $v_1^k(F), \ldots, v_r^k(F)$.

ТЕОРЕМА 8.1. Функция f *является сильно k-определенной, если и только если*

$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1}.$$

ТЕОРЕМА 8.2. Если f *является k-определенной, то*

$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1}.$$

ТЕОРЕМА 8.3. Функция f *является локально k-определенной в том и только том случае, когда*

$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)}^{k+1}.$$

ТЕОРЕМА 8.4. Функция f является k-определенной, если и только если для каждого $P \in M_n^{k+1}$

$$M_n^{k+1} \subseteq \overline{J_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^k f + P)}^{k+1}.$$

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть коразмерность функции f в начале равна c. Тогда любое малое возмущение f' функции f имеет вблизи начала не более $c+1$ критических точек.

ТЕОРЕМА 8.6. Если функция f является k-определенной, то ее r-деформация F (при любом r) версальна в том и только том случае, когда $V^k(F)$ и $\Delta^k(f)$ оказываются трансверсальными подпространствами в J_n^k.

(Отметим, что $\Delta_k(f)$ совпадает с $\Delta_k(j^{k+1}f)$, но не обязательно с $\Delta_k(j^k f)$, так что использование этого критерия требует привлечения $j^{k+1}f$, а не только $j^k f$, как ошибочно утверждалось в первых тиражах нашей книги [25], стр. 98.)

СЛЕДСТВИЕ. Для всякой k-определенной функции f универсальную деформацию можно построить, найдя какой-либо кобазис (§ 2 гл. 2) $v_1, \ldots, v_c$ для подпространства $\Delta_k(f)$ в J_n^k и положив

$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_c) = f(x) + t_1 v_1(x) + \ldots + t_c v_c(x).$$

ТЕОРЕМА 8.7. Любая версальная деформация F функции f сильно эквивалентна усеченной деформации

$$j^p f(x) + t_1 J^q\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(F_{t_1, 0, \ldots, 0})\right) + \ldots + t_r J^q\left(\frac{\partial}{\partial t_r}(F_{0, \ldots, 0, t_r})\right)$$

при условии, что f сильно k-определенна, $k \geqslant 3$, и

$p \geqslant 2k-3$,	$q \geqslant k-2$	*в случае* $M_n^{k-1} \subseteq \Delta_{k+1}(f)$,
$p \geqslant 2k-2$,	$q \geqslant k-1$	*в случае* $M_n^k \subseteq \Delta_{k+1}(f)$,
$p \geqslant 2k-1$,	$q \geqslant k$	*в случае* $M_n^{k+1} \subseteq \Delta_{k+1}(f)$.

Из этих трех случаев по крайней мере один должен иметь место.

АЛГОРИТМ для приведения функции к расщепленному виду. Лемма расщепления (§ 5 гл. 4) гарантирует нам существование удобной системы координат, в которой координаты распределены между квадратичной и вырожденной частями. Алгоритм для отыскания соответствующей замены координат можно было бы получить на основе приведенного там доказательства; Томпсон и Хант дают в [23]

превосходное изложение другого способа; Мэгнус в [101] описывает явный метод, приспособленный для бесконечномерного случая. (Когда известно, что что-то существует, найдутся и всевозможные методы для его отыскания; в этом и состоит практическая сила по внешности „неколичественных" доказательств существования.) Мы изложим здесь один систематический метод для будущего употребления, не утверждая, что он всегда оказывается наилучшим.

(a) Если функция f является k-определенной, то все члены степени $>k$, возникающие в последующих операциях, можно сразу опускать. Если, далее, после применения теорем 8.1—8.4 *нормализованная* форма струи $j^k f$ окажется k-определенной, то такое усечение, проводимое в процессе нормализации, оправдывается ex post facto.

(b) При помощи линейной замены переменных

$$u_i(x) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} x_l$$

диагонализуем матрицу Гессе функции f, приводя ее к виду

$$2\begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_j & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_j \neq 0$. (Эти d_i могут быть сделаны, если удобно, равными ± 1, как в § 5 гл. 2.) Значит,

$$j^k f = d_1 u_1^2 \pm \ldots + d_j u_j^2 + F(u_1, \ldots, u_n)$$

(левая и правая части равны как функции от $(x_1, \ldots, x_n)$). При этом F будет всё еще многочленом от *всех* u_i, но уже без членов степени <3.

(c) Устраняем сперва смешанный кубический член следующим приемом. Соберем все кубические члены, содержащие u_1, и перепишем их сумму в виде

$$Q_1 = 2d_1 u_1 R_1(u_1, \ldots, u_n),$$

так что R_1 оказывается однородной квадрикой от $u_1, \ldots, u_n$. Из оставшихся кубических членов отберем те, в которые

входит u_2, и запишем их сумму как

$$Q_2 = 2d_2 u_2 R_2(u_2, \ldots, u_n);$$

продолжая таким же образом, придем к

$$Q_j = 2d_j u_j R_j(u_j, \ldots, u_n).$$

Тогда

$$F(u_1, \ldots, u_n) = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_j + \hat{F}(u_1, \ldots, u_n),$$

причем в $\hat{F}$ уже не входят кубические члены, содержащие $u_1, \ldots, u_j$.

(d) Полагаем

$$v_i(x) = \begin{cases} u_1(x) + R_i(u_i(x), \ldots, u_n(x)) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant j, \\ u_i(x) & \text{при } j < i \leqslant n. \end{cases}$$

Тогда при $i \leqslant j$

$$d_i v_i^2 = d_i u_i^2 + 2d_i u_i R_i + d_i R_i^2.$$

Поэтому

$$j^k f = d_1 v_1^2 + \ldots + d_j v_j^2 + \bar{F}(v_1, \ldots, v_n), \tag{8.5}$$

где

$$\bar{F}(v_1(x), \ldots, v_n(x)) = F(u_1(x), \ldots, u_n(x)) - \sum_{i=1}^{j} d_i (R_i(u_i(x), \ldots, u_n(x))^2$$

не имеет кубических членов от $v_1, \ldots, v_j$, поскольку все R_i^2 являются квартиками. К сожалению, правая часть здесь еще записана через старые координаты, и бóльшая часть работы падает как раз на выполнение следующих пунктов:

(e) Находим выражения $u_1(v), \ldots, u_j(v)$ (до порядков, необходимых, чтобы R_i^2 и F получили порядок k) через $\bar{v}_1(x), \ldots, v_n(x)$ вблизи начала и подставляем результат в $\bar{F}$, с тем чтобы (8.5) оказалось полностью записанным через v_i.

(f) Далее устраняем в (8.5) члены четвертой степени, содержащей $v_1, \ldots, v_j$, собирая те из них, которые содержат v_1, в сумму

$$\bar{Q}_1 = 2d_1 v_1 \bar{R}_1,$$

где $\bar{R}_1$ — однородная кубика, полагая

$$\bar{v}_1 = v_1 + \bar{R}_1$$

и т. д.

(g) По индукции мы получаем таким образом полиномиальную замену координат, в результате которой $j^k f$ приводится к нормальному виду

$$j^k f(x) = d_1 w_1^2(x) + \ldots + d_j w_j^2(x) + F(w_{j+1}(x), \ldots, w_n(x)). \qquad (8.6)$$

Если функция f является k-определенной (что можно установить с помощью приведенных выше теорем) в x-координатах x или же в w-координатах, то найдется гладкая замена координат $y(x)$, приводящая саму f к нормальному виду (8.6).

В локальных y-координатах это будет *точным* выражением для f, а не только приближением. Тем самым любое локальное свойство f (ее коранг; является ли f локальным минимумом; действие малых возмущений) может быть аккуратным образом изучено с помощью нормализованного выражения.

ПРИЕМ СИРСМЫ. Этот прием часто бывает удобен в случае функций двух переменных. Практически его применяют к струе $j^k f(x, y)$ при некотором k, если f — не многочлен. Его следует воспринимать не как *замену* предыдущих правил, а как их стенограмму, при пользовании которой надо постоянно держать их в голове. Более тонкий и сильный вариант этого приема был дан Арнольдом.

Метод наиболее прост в случае, когда частные производные

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

и

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

содержат обе лишь по одному члену. Пусть, скажем,

$$f = x^2 + y^4; \quad f_1 = 2x, \quad f_2 = 4y^3.$$

Нарисуем „тени“, отбрасываемые членами x и y^3 на диаграмме, представленной на рис. 8.15. Усеченные тени на диаграмме (имеющие форму $\nearrow\!\!\!\!\overline{}\!\!\!\!\searrow$) содержат лишь многочлены из $I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(f)$ при некотором k. Вместе они содержат весь пятый слой, и, в силу теоремы 8.1, f оказывается 4-определенной.

Полные тени содержат многочлены из $\Delta_k(f)$ для некоторого k. Вне теней остаются лишь члены y и y^2, причем ни один из них не выражается через другой. Поэтому

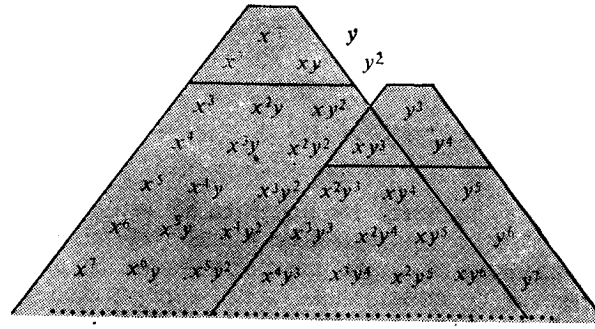


Рис. 8.15

$\operatorname{cod}(f)=2$, и очевидной универсальной деформацией служит

$$F(x,\ y,\ a,\ b)=f(x,\ y)+ay^2+by.$$

Аналогично для x^4+y^4: из рис. 8.16 сразу видно, что это 4-определенная функция коразмерности 8 с универсальной деформацией

$$x^4+y^4+a_8x^2y^2+a_7x^2y+a_6xy^2+a_5x^2+a_4xy+a_3y^2+a_2x+a_1y.$$

Если f_1 и f_2 — не одночлены, то дело несколько усложняется. К примеру, пусть

$$f(x,y)=x^2y+y^3/3;\ f_1(x,\ y)=2xy,\ f_2(x,\ y)=x^2+y^2.$$

Нужно отыскать комбинации f_1 и f_2, от которых можно отбросить тени, например

$$x^3=xf_2-\frac{1}{2}yf_1, \qquad y^3=yf_2-\frac{1}{2}xf_1.$$

Так как сюда уже входят произведения f_1 и f_2 на линейные сомножители, наши тени, как только мы спустимся этажом ниже, будут содержать произведения f_1 и f_2 на квадратичные члены. Поэтому при вычислении меры определенности их можно „усечь“ выше, чем тени от самих f_1 и f_2. Согласно

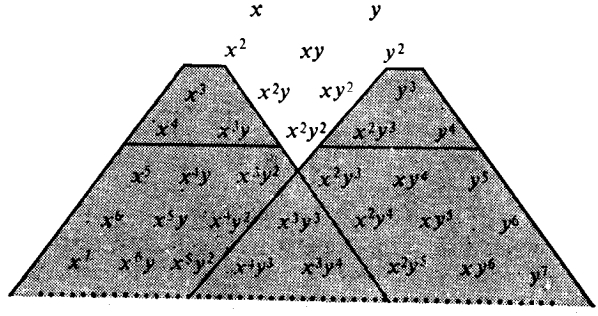


Рис. 8.16

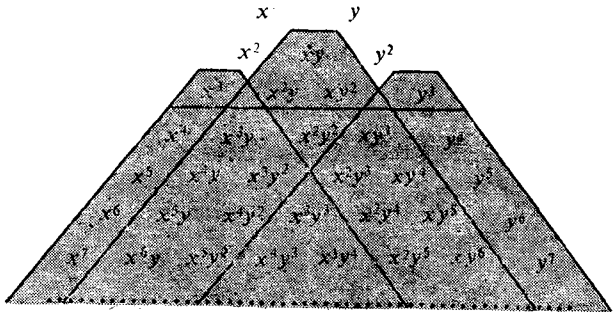


Рис. 8.17

рис. 8.17, функция f является 3-определенной. Ее коразмерность равна только трем, так как $x^2=f_2-y^2$ и, значит, система $\{x, y, x^2, y^2\}$ не образует кобазиса, не будучи минимальной. Множество $\{x, y, q\}$, где q — любая квадрика, не равная скалярному кратному x^2+y^2 (например, x^2, y^2, x^2-y^2, x^2+2y^2), уже является минимальным, поэтому $\operatorname{cod}(f)=3$, и универсальная деформация записывается в виде

$$x^2y+y^3/3+a_3q+a_2x+a_1y.$$

Еще один пример:

$$f(x, y)=x^2y;\ f_1=2xy,\ f_2=x^2 \text{ (рис. 8.18).}$$

На этот раз M_n^k не будет подмножеством $\overline{J_n^k\Delta_k(f)^k}$ ни для какого k, так что f — неконечно-определенная функция коразмерности ∞.

Заметим, что для x^2y+y^k коразмерность конечна, а именно равна k ($k\geqslant 2$), как мы того и ожидали (для $k\geqslant 3$) в § 5 гл. 7.

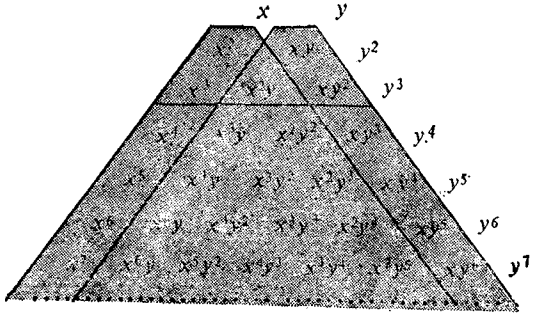


Рис. 8.18

13 Примеры и вычисления

(a) Если функция f имеет в 0 критическую точку с невырожденной матрицей Гессе, то с помощью линейной замены координат ее можно представить в виде

$$x_1^2+\ldots+x_i^2-x_{i+1}^2-\ldots-x_n^2+O(3).$$

Следовательно, при $k=2$

$$\overline{I_n^{k+1}\Delta_{k+1}(j^kf)}^{k+1}$$

состоит из всевозможных сумм произведений квадратичных многочленов на $j^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(j^2f)\right)=\pm\frac{1}{2}x_i$, т. е. из всех кубик. Поэтому

$$M_n^{2+1}\subseteq\overline{I_n^{2+1}\Delta_{2+1}(j^2f)}^{2+1},$$

и f, согласно теореме 8.1, является сильно 2-определенной. Таким образом, теорема 8.1 служит обобщением леммы Морса.

(b) Пусть $n=1$, $j^kf(x)=x^k$.

Одномерный вариант приема Сирсмы приводит к диаграмме 8.19, поскольку $df/dx=kx^{k-1}$. Следовательно, f является k-определенной, как мы это уже доказывали более мучительно в теореме 4.4, и обладает универсальной деформацией

$$x^k+t_{k-2}x^{k-2}+\ldots+t_1x,$$

как и утверждалось в гл. 7 (общая каспоидная катастрофа).

(c) Пусть $n=2$, $f(x,\ y)=x^5+y^5$.

Используя прием Сирсмы, мы получаем рис. 8.20. Одночлен x^3y^3 не содержится в $\Delta_6(f)$, а значит и подавно не содержится в меньших подпространствах $\overline{J_2^6\Delta_6(f)^6}$ и $\overline{I_2^6\Delta_6(f)^6}$, поэтому, согласно теореме 8.2, f не является 5-определенной. Но она является сильно 6-определенной, а ее коразмерность равна 15.

Этот пример показывает ложность утверждения, которое иногда приходится слышать, что если первый ненулевой член положительного порядка — однородный много-

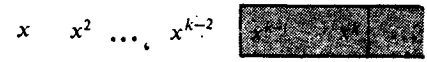


Рис. 8.19

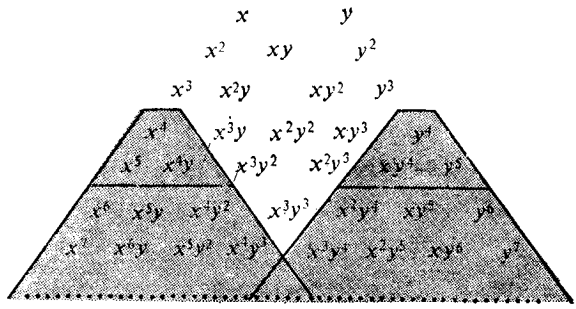


Рис. 8.20

член степени k — невырожден, то это гарантирует k-определенность. Несостоятельность такого рода критериев определенности видна также на следующем примере.

(d) $f(x, y)=\frac{3}{2}x^2+x^3-3xy^2$. Квадратичная часть вырождена, значит, эта функция не будет 2-определенной. Проверим ее на 3-определенность:

$$J_1=\frac{\partial f}{\partial x}=3(x+x^2-y^2),$$

$$J_2=\frac{\partial f}{\partial y}=-6xy.$$

Отсекая степени выше 4, имеем

$$\begin{aligned} x^2&=\frac{1}{3}J_1-x^3+xy^2\\ &=\frac{1}{3}J_1-\frac{x^2}{3}(J_1-x^2+y^2)-\frac{y}{6}J_2\\ &=\frac{1}{3}J_1-\frac{x^2}{3}J_1+\frac{x^3}{9}J_1+\frac{xy}{18}J_2-\frac{y}{6}J_2,\\ y^3&=-\frac{y}{3}J_1+xy+x^2y\\ &=-\frac{y}{3}J_1-\frac{1}{6}J_2-\frac{x}{6}J_2. \end{aligned}$$

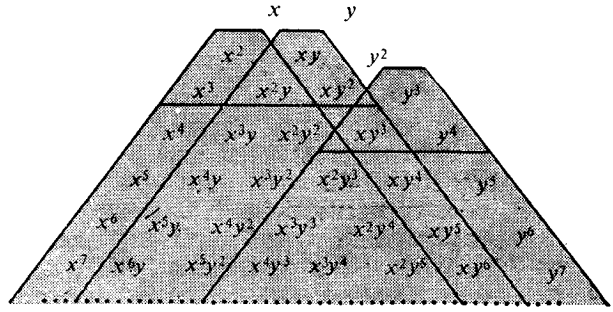


Рис. 8.21

Тени на диаграмме Сирсмы идут, следовательно, так, как показано на рис. 8.21. „Усеченные" тени не покрывают y^4, и, выписав все произведения, усеченные до степени 4:

$$\begin{aligned} x^2J_1 &= 3(x^3+x^4-x^2y^2), & y^2J_2 &= -6xy^3,\\ xyJ_1 &= 3(x^2y+x^3y-xy^3), & x^3J_1 &= 3x^4,\\ y^2J_1 &= 3(xy^2+x^2y^2-y^4), & x^2yJ_1 &= 3x^3y,\\ x^2J_2 &= -6x^3y, & xy^2J_1 &= 3x^2y^2,\\ xyJ_2 &= -6x^2y^2, & y^3J_1 &= 3xy^3, \end{aligned}$$

мы сразу видим, что y^4 не лежит в $\overline{I_2^{3+1}\Delta_{3+1}(f)}^{3+1}$. Значит, f не является сильно 3-определенной. Но

$$M_2^{3+1} \subseteq \overline{J_2^{3+1}\Delta_{3+1}(f)}^{3+1},$$

что видно, если произвести усечение теней этажом выше, и мы не можем вывести из теоремы 8.2, что f не будет 3-определенной в обычном смысле. Можно было бы попытаться применить здесь теорему 8.4 (что мы и рекомендуем проделать читателю), но вместо этого мы проверим f на 4-определенность.

Отсекая степени выше пяти, имеем

$$\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{1}{3}J_1 - \tfrac{x^2}{3}(J_1 - x^2 + y^2) - \tfrac{y}{6}J_2\\ &= \tfrac{1}{3}J_1 - \tfrac{x^2}{3}J_1 + \tfrac{x^3}{9}(J_1 - x^2 + y^2) + \tfrac{xy}{18}J_2 - \tfrac{y}{6}J_2\\ &= \tfrac{1}{3}J_1 - \tfrac{x^2}{3}J_1 + \tfrac{x^3}{9}J_1 - \tfrac{x^4}{27}J_1 - \tfrac{x^2y}{54}J_2\\ &\qquad + \tfrac{xy}{18}J_2 - \tfrac{y}{6}J_2, \end{aligned}$$

$$y^3 = -\tfrac{y}{3}J_1 - \tfrac{1}{6}J_2 - \tfrac{x}{6}J_2.$$

И мы видим из диаграммы Сирсмы (рис. 8.21), что f *является* сильно 4-определенной. Имеются три одночлена вне тени, но поскольку x^2 лежит в $\Delta_5(f)$ и

$$x = \left(\tfrac{1}{3}J_1 - x^2\right) + y^2,$$

то как $\{x, y\}$, так и $\{y, y^2\}$ дают кобазис для $\Delta_5(f)$ в J_2^5. (Очевидно, никакой многочлен один не образует кобазиса.) Поэтому $\operatorname{cod}(f)=2$, и мы получаем, что f эквивалентна $\pm x^2 \pm y^4$, ибо, согласно табл. 8.1, лишь функции, эквивалентные этим формам, имеют такую коразмерность! В частности, f не будет и 3-определенной, ибо функции $\pm x^2 \pm y^4$ не являются таковыми.

В силу сильвестрова закона инерции, примененного к матрице Гессе, наш тип должен иметь вид $\pm x^2 \pm y^4$. Знак „+“ перед y привел бы к строгому локальному минимуму в точке $(x, y)=(0, 0)$; но вдоль вещественной кривой

$$y^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3$$

мы имеем

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + x^3 - 3x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3\right) = 0.$$

Значит, типом служит $x^2 - y^4$, и версальная деформация f эквивалентна двойственной катастрофе сборки.

Если нам требуется найти замену, осуществляющую приведение к такой форме, мы можем следующим образом применить алгоритм нормализации. Матрица Гессе

$$2\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

уже диагональна, поэтому полагаем

$$Q_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x\left(\frac{x^2}{3} - y^2\right), \qquad R_1(x, y) = \left(\frac{x^2}{3} - y^2\right),$$

$$v_1 = x + \left(\frac{x^2}{3} - y^2\right),$$

$$v_2 = y.$$

Выразим x, y через v_1, v_2:

$y = v_2$,

$x =$ тому единственному решению уравнения $x^2 + 3x - 3(v_1 + v_2^2) = 0$, которое обращается в нуль, когда обращаются в нуль v_1 и v_2

$$= \frac{-3 + \sqrt{9 + 12(v_1 + v_2^2)}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(v_1 + v_2^2) - \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{9}(v_1 + v_2^2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{64} \cdot \frac{64}{27}(v_1 + v_2^2)^3 + \ldots\right)$$

$$= v_1 - \frac{1}{3}v_1^2 + v_2^2 + \frac{1}{18}v_1^3 - \frac{2}{3}v_1 v_2^3 + \ldots .$$

Поэтому

$$j^4 R_1(v_1, v_2) = j^4\left(\frac{x^2}{3} - y^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}v_1^2 - v_2^2 - \frac{2}{3}v_1^3 + 2v_1 v_2^2 + \frac{2}{9}v_1^4 - \frac{2}{3}v_1^2 v_2^2 + v_2^4,$$

$$j^4 R_1^2(v_1, v_2) = \left(\frac{1}{3}v_1^2 - v_2^2\right)^2.$$

(Таким образом, с точностью до четвертого порядка R_1^2 имеет в координатах (v_1, v_2) такое же выражение, как и в координатах (x, y). Этот факт можно было бы установить и без вычислений, но все же лучше провести эти вычисления для примера, так как они уже были бы существенны, если бы, например, f оказалась лишь 5-определенной.)

Поскольку в f отсутствуют члены, зависящие лишь от y, мы имеем

$$\hat{F}(x, y) = 0,$$

а значит

$$\hat{F}(v_1, v_2) = 0,$$

следовательно,

$$\overline{F}(v_1, v_2) = \hat{F}(v_1, v_2) - e_1 R_1^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}v_1^2 - v_2^2\right)^2$$

и

$$\begin{aligned} j^4 f(v_1, v_2) &= e_1 v_1^2 + \overline{F}(v_1, v_2) \\ &= \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{1}{6}v_1^4 + v_1^2 v_2^2 - \frac{3}{2}v_2^4. \end{aligned}$$

(Отметим, что в этих координатах мы получаем

$$j^3 f(v_1, v_2) = \frac{3}{2}v_1^2,$$

откуда сразу видно, что f не 3-определенна: никакой заменой невозможно перевести функцию $\frac{3}{2}v_1^2 + v_2^4$, с ее строгим минимумом в начале, в $\frac{3}{2}v_1^2 - v_2^4$.)

Теперь устраним члены четвертой степени по u_1:

$$\overline{Q} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot v_1\left(\frac{1}{3}v_1 v_2^2 - \frac{1}{18}v_1^3\right), \quad \overline{R}_1(v_1 v_2) = \frac{1}{3}\left(v_1 v_2^2 - \frac{1}{6}v^3\right),$$

$$w_1 = v_1 + \overline{R}_1 = v_1 + \frac{1}{3}\left(v_1 v_2^2 - \frac{1}{6}v_1^3\right),$$

$$w_2 = v_2.$$

Вместо того чтобы решать кубическое уравнение

$$v_1^3 - 6(3 + w_2^2)v_1 + 18w_1 = 0$$

относительно v_1, заметим, что $\overline{R}_1^2$ представляет собой однородный многочлен шестой степени от (v_1, v_2), а значит, является функцией шестого порядка от (w_1, w_2) и потому не может оказать влияния на вид $j^4(f)$. (Ясно, что при более высоких k алгебра может усложниться. Однако, даже если

общие решения, выражающие старые координаты через новые в виде рядов, не удается получить, в качестве последнего средства всегда можно прибегнуть к грубой силе: если нам нужно найти коэффициенты до порядка, скажем, r, то подставляем общие разложения до порядка r в уравнение и приравниваем коэффициенты. Вопросы сходимости, вид общего члена и т. п. не имеют сюда никакого отношения.)

В результате мы получаем

$$j^4f(w_1, w_2) = \frac{3}{2}w_1^2 - \frac{3}{2}w_1^4,$$

и поскольку f является 4-определенной, согласно проведенному выше вычислению (это можно также довольно просто показать, используя пример (b)), соответствующая гладкая подгонка координат приведет f локально к виду

$$\frac{3}{2}y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^4.$$

(e) $f(x, y)=x^3+xy^3$. Эта функция не 3-определенна, в чем можно убедиться, привлекая либо теорему 8.2, либо теорему 8.4 (с $P=0$); вычисления в обоих случаях одинаковы. А именно, имеем (при $P=0$)

$$\overline{J_2^4\Delta_4(j^3f)^4} = \overline{J_2^4\Delta_4(f)^4}.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2,$$

то $\overline{J_2^4\Delta_4(f)^4}$ порождается многочленами

$$\begin{array}{ll} 3x^3 + xy^3, & 3x^2y^2, \\ 3x^2y + y^4, & 3x^2y^2, \\ 3x^4, & 3xy^3 \\ 3x^3y, & \end{array}$$

и, очевидно, не содержит y^4; значит, $M_2^4 \not\subset J_2^4\Delta_4(j^3f)^4$, и f не будет 3-определенной (даже лишь локально).

Используя теорему 8.4, проверим f на 4-определенность. Так как добавление $P \in M_2^5$ изменяет лишь члены степени пять и выше в

$$\overline{J_2^5\Delta_5(j^4f + P)^5}$$

(т. е. на самом деле *только* члены пятой степени), вычисления не слишком громоздки. Для любого $P \in M_2^5$ мы имеем

$$\frac{\partial(f+P)}{\partial x} = 3x^2 + y^3 + \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(f+P)}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{\partial P}{\partial y},$$

причем указанные производные от P имеют степень 4. Поэтому пространство $\overline{J_2^5\Delta_5(j^4f+P)^5}=\overline{J_2^5\Delta_5(f+P)^5}$ порождается многочленами

$$3x^3+xy^3+x\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad 3x^3y^2,$$
$$3x^2y+y^4+y\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad 3x^2y^3,$$
$$3x^4+x^2y^3, \qquad 3x^2y^2+x\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$3x^3y+xy^4, \qquad 3xy^3+y\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$3x^2y^2+y^5, \qquad 3x^3y^2,$$
$$3x^5, \qquad 3x^2y^3,$$
$$3x^4y, \qquad 3xy^4.$$

Но многочлен $x\dfrac{\partial P}{\partial y}$ имеет пятую степень и делится на x, значит, он представим в виде линейной комбинации одночленов x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, которые все имеются в приведенном выше списке. Следовательно, $x\dfrac{\partial P}{\partial y}$ лежит в нашем подпространстве, значит, там же лежит и x^2y^2, а потому и y^5. Таким образом,

$$M_2^5\subseteq\overline{J_2^5\Delta_5(j^4f+P)^5} \text{ при всех } P\in M_2^5,$$

и f является 4-определенной.

Этот последний результат был впервые отмечен Сирсмой [33] в качестве контрпримера к гипотезе Зимана, что в теореме 8.1 „если и только если“ справедливо и без „сильно“. Поучительно попробовать провести на этом примере данное Дёйстерматом ([41], лемма 2.13) „доказательство“ этого утверждения.

(*f*) Дальнейшими примерами могут служить вычисления, проведенные в § 7, а также в нашей книге [25] (стр. 77—109). Мы увидим эти методы „в действии“ в главах о приложениях, см., в частности, стр. 274, 299, 313, 318, 369, 376, 384, 408, 421, 428, 447.

14 Необходимые замечания о терминологии

Имеется несколько конкурирующих терминологических систем, созданных для теории катастроф, и один прекрасный аргумент против абсолютной стандартизации: потребности меняются. (У Золотого восторга больше срок хранения, но это не оправдывает введенного в странах Общего

рынка запрета на Оранжевый пепин Кокса, который вкуснее[1]; возвращаясь к терминологии: новый французский закон, вводящий штраф за употребление термина „световой год",— удар по геометрии пространства-времени.) Мы ставим себе задачей познакомить читателя с различными принятыми словоупотреблениями и не связываем себя с одним определенным языком, достоинства которого где-нибудь да обернутся недостатками.

Перед нами обозначение для семейства функций:

$$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Том называет $\mathbb{R}^n$ пространством *внутренних* переменных, имея в виду некий не полностью известный процесс, происходящий в различных экземплярах $\mathbb{R}^n$, который управляется посредством функции f и на который оказывает влияние точка из $\mathbb{R}^r$ — пространства *внешних* переменных (на наших рисунках каждый экземпляр сидит над своей точкой). Эти названия особенно подходят в тех случаях, когда точки из $\mathbb{R}^r$ соответствуют точкам физического пространства, как, например, в оптике или биологии.

Зиман, исходивший из рассмотрения систем, где можно что-то изменять (скажем, температуру или положение конца резинки в машине Зимана) и затем наблюдать, что при этом происходит, ввел название *„управляющие* переменные (или параметры)" для точек из $\mathbb{R}^r$ и *„поведенческие* переменные" — для точек из $\mathbb{R}^n$. В некоторых приложениях этот язык слишком хорошо отвечает сути дела, чтобы его можно было так просто отбросить. Соответственно $\mathbb{R}^r$ именуется пространством *управления*, а $\mathbb{R}^n$ — пространством *поведения*.

В обеих этих терминологических системах $\mathbb{R}^n$ иногда называют пространством *состояний*. Это название следует принимать с осторожностью, так как смысл слова „состояние" меняется от лаборатории к лаборатории.

В чисто математическом контексте (как, скажем, в настоящей главе), а иногда и в приложениях естественно называть $\mathbb{R}^r$ *пространством деформации*, а его точки (или их координаты) *параметрами деформации*.

В соответствии с тем, какая терминология принята, число r именуют *внешней размерностью*, либо *размерностью управления*, либо *размерностью деформации*. Бывает, что ее называют также *коразмерностью*, но поскольку это вступает в противоречие с более общепринятым значением этого

[1] Золотой восторг — сладкий французский сорт яблок, а Оранжевый пепин Кокса — традиционный английский.— *Прим. перев.*

термина, в котором мы его использовали до сих пор, мы избегаем этого словоупотребления. (Когда одна и та же вещь фигурирует под разными именами, требуется лишь *память*; но когда разные вещи фигурируют под одним и тем же именем, требуется уже *расшифровка*.)

Применяя лемму о расщеплении для представления функции вблизи точки, где она имеет коранг m в виде

$$\hat{f}(y_1, \ldots, y_m) \pm y_{m+1}^2 \pm \ldots \pm y_n^2$$

(возможно также, с параметрами из $\mathbb{R}^r$ для $\hat{f}$), мы имеем основание называть $y_1, \ldots, y_m$ *существенными*, а $y_{m+1}, \ldots, y_n$ — *несущественными* переменными. (Томпсон и Хант [23, 105] говорят об *активных* и *пассивных* переменных.) Это расщепление, конечно, отнюдь не единственно. Чтобы избежать ненужных алгебраических осложнений, рассмотрим вырожденный случай $f(x, y)=x^2$. Пусть новые координаты будут $u=x$, $v=x-y$. Тогда f принимает вид u^2, и хотя новая „существенная ось", задаваемая уравнением $u=0$ (ось v), совпадает со старой (осью y), новая „несущественная ось", задаваемая уравнением $v=0$ (ось u), представляет собой прямую $y=x$, которая уже *не* совпадает со старой (осью x). Постаравшись немного больше, мы могли бы еще и изогнуть „существенную ось" как угодно, лишь бы она оставалась касательной к прежнему направлению в начале.

Наконец, отметим, что особенности, встречающиеся в r-мерном семействе, будут в основном, даже если отвлечься от регулярных и морсовских точек, коразмерности меньшей, чем r. (Если $r \leqslant 5$, то в типичном случае вообще не будет особенностей большей коразмерности.) Например, если закрепленному нижнему концу резинки в машине Зимана позволить двигаться по окружности вокруг колесика машины и считать это новым параметром управления, то это не даст никаких новых явлений. С помощью перепараметризации мы можем полностью устранить влияние этого нового параметра. Согласно теореме 8.6, мы можем записать всякое r-параметрическое семейство f вблизи точки, где оно трансверсально пересекает особенность коразмерности c в форме, в которой фигурируют лишь c параметров управления. (Этот факт уже был использован в § 4 гл. 7.) После такого приведения можно назвать „исчезнувшие" координаты в $\mathbb{R}^r$ *лишними* или *немыми* параметрами управления. Это расщепление параметров управления также неединственно (что может оказаться очень важным) и всякий раз должно явно оговариваться, как мы увидим в § 3 гл. 17.

9 ГЕОМЕТРИЯ СЕМИ ПЕРВЫХ КАТАСТРОФ

Отправляясь от стандартных формул для элементарных катастроф, мы теперь изучим различные геометрические образы, которые с ними связываются. Вместо того рутинного анализа „голыми руками", который был применен нами для случая катастрофы сборки в гл. 5, воспользуемся теперь более тонким методом Зимана [7], в котором главном объектом изучения служит форма функции вблизи данной точки на многообразии катастрофы. Мы сосредоточим свое внимание на традиционных семи элементарных катастрофах (не различая двойственные, см. гл. 7) коразмерности $\leqslant 4$, во-первых, потому что так приходится делать (высшие катастрофы потребовали бы гораздо больше картинок, да и, кроме того, если не считать каспоидов, они пока не совсем еще хорошо поняты), а во-вторых, это почти все, что нам потребуется в главах о приложениях. Единственное серьезное исключение составляет семейство катастроф двойной сборки, но их коразмерность равна 8, и единственный путь к ним лежит через катастрофы меньшей коразмерности, в частности через катастрофы коразмерностей 5 и 6. В совместной с Вудкоком книге [39] мы надеемся дать более полное описание „высших катастроф". По геометрии катастроф можно посмотреть также работы Брёкера и Ландера [9], Тома [42], Вудкока и Постона [20] и Зимана [7]; один более изощренный подход, дающий массу информации в компактном виде, развит Кэллаханом [43]. Им же в [43a] описан прекрасный способ представлять себе геометрию в многомерном случае.

1 Объекты изучения

Начнем с того, что перечислим основные связываемые с катастрофами структуры, большинство из которых мы уже встречали в примерах. Мы исходим из семейства функций

$$V\colon S\times C\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Здесь S — некоторое многообразие, обычно это $\mathbb{R}^n$, а C — другое многообразие, обычно $\mathbb{R}^r$. Выбирая из названий, перечисленных в последнем параграфе предыдущей главы, наиболее подходящие для данного случая, будем сейчас называть $\mathbb{R}^n$ пространством *состояний*, а $\mathbb{R}^r$ — пространством *управления*. Число r — это *размерность деформации*; для стандартных *универсальных* форм размерность деформации совпадает с *коразмерностью* в 0 функции, подвергаемой деформации. (Поскольку теорема классификации чисто локальна, мы на самом деле интересуемся только тем, что происходит вблизи начала; но для стандартных форм это отражается в их поведении во всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, как будет видно из дальнейших вычислений и картинок.) Обозначения S и C сохраняют указанный смысл на протяжении всей этой главы.

Многообразием катастрофы M называется подмножество в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, определенное уравнением

$$DV_c(x) = 0$$

где $V_c(x) = V(x, c)$; это — множество всех критических точек всех потенциалов V_c из нашего семейства V. (Многообразие катастрофы действительно является многообразием, если семейство V универсально как деформация; фактически это одно из следствий трансверсальности. Пример из § 2 гл. 6 показывает, что что-нибудь в таком роде предположить необходимо. Поскольку элементарные катастрофы универсальны по построению, в нашем случае M всегда будет многообразием.)

Отображением катастрофы χ называется ограничение на M естественной проекции

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r,$$
$$\pi(x, c) = c.$$

Особым множеством S называется подмножество в M, состоящее из *особых точек* отображения χ — точек, где χ *особо*, т. е. где ранг производной $D\chi$ меньше чем r.

Образ особого множества $\chi(S) \subset C$ называется *бифуркационным множеством* B.

Нетрудно показать, подсчитав $D\chi$, что S есть множество тех точек $(x, c) \in M$, в которых $V_c(x)$ имеет *вырожденную* критическую точку. Значит, B представляет собой место, где меняется число и природа критических точек; ввиду структурной устойчивости морсовских функций такое изменение может произойти лишь при переходе через вырожденную критическую точку. Конечно, в каждом данном случае это может быть проверено прямым подсчетом.

В большинстве приложений наиболее важно именно бифуркационное множество, так как оно лежит в пространстве управления, а следовательно „наблюдаемо", и так как все скачки, происходящие в соответствии с принципом промедления, происходят на нем. Но в зависимости от того, какое конкретное приложение мы рассматриваем, иногда в игру вступает больше (а иногда и меньше) геометрических характеристик катастрофы.

Ради упрощения обозначений мы используем для переменных состояния обозначения x, y вместо u_1, u_2, как в гл. 7, а для переменных управления — a, b, c, d вместо t_1, t_2, t_3, t_4.

2 Катастрофа складки

Метод, который мы применим, оказывается особенно простым в случае этой простейшей из катастроф. Стандартная деформация задается формулой

$$V_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax;$$

числовой коэффициент введен, чтобы упростить дальнейшие вычисления. Многообразие катастрофы M определяется уравнением

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a(x) = x^2 + a.$$

Это уравнение подсказывает, что в качестве карты для M нужно взять координату x; общая точка многообразия M записывается в виде

$$(x,\ a) = (x,\ -x^2).$$

Отвечающая этой точке функция на S имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$V_a(x+X) = \frac{1}{3}(x+X)^3 + (-x^2)(x+X)$$
$$= \frac{1}{3}X^3 + xX^2 + 0X - \frac{2}{3}x^3.$$

Квадратичный член

$$xX^2$$

невырожден при $x \neq 0$, но при $x=0$ он вырожден. Поэтому особое множество задается равенством $x=0$ и состоит из одной-единственной точки $(0, 0) \in M$. При $x>0$ квадратичный член положителен и потенциал V имеет минимум, при $x<0$ потенциал имеет максимум.

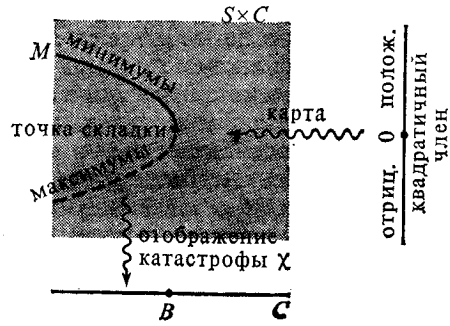


Рис. 9.1

Всю геометрию катастрофы суммирует рис. 9.1. Многообразие катастрофы представляет собою параболу, бифуркационное множество состоит из одной точки; налево от нее имеются два состояния (максимум и минимум), направо — ни одного.

3 Катастрофа сборки

Мы уже проанализировали ее в гл. 5 „в лоб", рутинным образом. Теперь посмотрим, как наш нынешний метод приведет к тому же результату. Стандартной деформацией служит

$$V_{ab}(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx,$$

и многообразие катастрофы задается уравнением

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_{ab}(x)=x^3+ax+b.$$

В качестве параметров карты для M можно использовать (x, a); общая точка M имеет координаты

$$(x,\ a,\ b)+(x,\ a,-ax-x^3), \tag{9.1}$$

и следовательно, эта карта записывается так:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow M,\ (x,\ a)\longmapsto(x,\ a,\ -ax-x^3).$$

Найдем тейлоровское разложение:

$$V_{ab}(x+X)=\frac{1}{4}X^4+xX^3+\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{a}{2}\right)X^2+0X - \left(\frac{3}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2\right).$$

Обозначим через p, q, r коэффициенты квадратичного, кубического и квартичного членов:

$$p(a, x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2},$$
$$q(a, x) = x,$$
$$r(a, x) = \frac{1}{4}.$$

Эти выражения заставляют нас поменять карту и взять в качестве карты для M плоскость $r=1/4$, или, что то же самое, координаты p и q; старые координаты выражаются через новые так:

$$(a, x) = (2p - 3q^2, q).$$

Квадратичный член разложения вырожден при $p=0$; это условие задает ось q в плоскости pq. Ее образом в M служит кривая складок, представимая с помощью карты (x, a): при $p=0$ мы имеем $x=q$, $a=-3q^2$, так что $a=-3x^2$. Если $p>0$, то мы имеем локальный минимум, если $p<0$,— локальный максимум.

При $p=0$ мы, согласно § 3 гл. 4, должны перейти к кубическим членам. Кубический член будет определять тип критической точки, покуда его коэффициент $q\neq 0$. Если же и $p=0$ и $q=0$ (начало в пространстве pq), то мы получаем тип X^4. Все это суммировано на рис. 9.2 (a) и (b).

Образ в M прямой $p=0$ задается, как мы видели, равенством $a=-3x^2$; подставляя это в (9.1), получаем параметризацию линии складки с помощью x:

$$(x, -3x^2, 2x^3).$$

Это согласуется с § 2 гл. 5. Бифуркационное множество есть образ этой кривой в C, т. е. множество точек

$$(-3x^2, 2x^3) = (a, b).$$

Мы можем принять это равенство в качестве параметризации B, а можем, исключив x, получить знакомое уравнение

$$4a^3 + 27b^2 = 0.$$

Геометрическая картина представлена на рис. 9.2 (c) и (d), и ее можно сравнить с рис. 5.6.

Заметьте, как использование тейлоровских коэффициентов в качестве координат карты вскрывает структуру M как образа плоскости, на которой имеется прямая *точек складки* (где 3-струя функции принимает вид X^3, характеристический для складки), а на этой прямой имеется точка, дающая *точку сборки* многообразия катастрофы (в этой

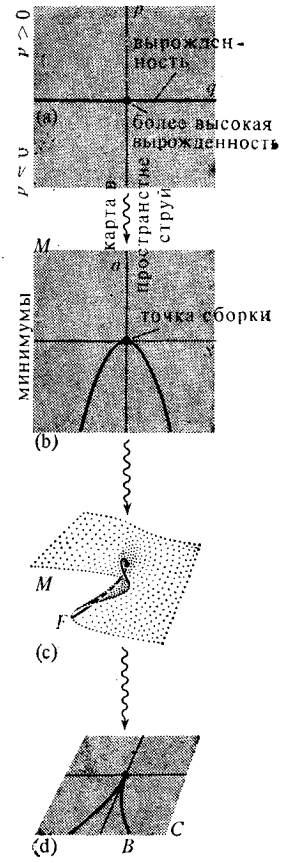


Рис. 9.2

точке мы и имеем 4-струю X^4, характеристическую для катастрофы сборки). Таким образом, существенные черты M задаются *флагом*, т. е. последовательностью подпространств $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}^1 \supseteq \mathbb{R}^0$.

Бифуркационное множество также отражает эту структуру, хотя оно имеет и дополнительные черты, связанные с особенностями отображения катастрофы, например острие в 0. Точная геометрическая картина того, как M располагается над C, также отражает характерные свойства струй: прямая кубических струй, дающих тип складки, действительно задает в M линию складок. Это — следствие универсальности катастрофы складки как деформации функции X^3, и данное обстоятельство является общим.

4 Катастрофа ласточкина хвоста

В этом случае деформация такова:

$$V_{abc}(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx,$$

и M задается уравнением

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_{abc}(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Принимая (x, a, b) за параметры карты для M с параметризацией

$$(x, a, b) \mapsto (x, a, b, c),$$

имеем

$$c = -bx - ax^2 - x^4. \tag{9.2}$$

Запишем разложение Тейлора:

$$V_{abc}(x+X) = \frac{1}{5}X^5 + xX^4 + \left(2x^2 + \frac{a}{3}\right)X^3 + \left(2x^3 + ax + \frac{b}{2}\right)X^2 + 0X - \left(\frac{b}{2}x^2 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{4}{5}x^5\right).$$

Тейлоровские коэффициенты принимаем за координаты:

квадратичный	$p(x, a, b) = 2x^3 + ax + b/2,$
кубический	$q(x, a, b) = 2x^2 + a/3,$
квартичный	$r(x, a, b) = x,$
квинтичный	$s(x, a, b) = 1/5.$

Это значит, что в качестве карты для M может быть взята гиперплоскость $s = 1/5$ в пространстве $pqrs$, т. е. по существу

пространство pqr; эта новая карта связана со старой картой (x, a, b) преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x(p, q, r) &= r, \\ a(p, q, r) &= 3q - 6r^2, \\ b(p, q, r) &= 2p - 6rq + 8r^3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Квадратичный член вырождается в том и только том случае, когда $p=0$, что определяет координатную плоскость qr. В этой плоскости 3-струя имеет вид X^3, если только вдобавок и q не обращается в нуль. Условие $q=0$ задает ось r; на ней 4-струя имеет тип X^4 или $-X^4$, если только r не равно 0. Наконец, в начале мы имеем исходную деформируемую 5-струю X^5. В итоге пространство pqr разбивается согласно локальным типам функций, как показано на рис. 9.3. Снова мы получаем флаг подпространств

$$\mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}^1 \supseteq \mathbb{R}^0.$$

Точка ласточкина хвоста (начало) лежит посередине прямой сборок, внизу — двойственные сборки, вверху — стандартные. Эта прямая лежит в плоскости складок. Спереди от плоскости находятся морсовские минимумы, сзади — максимумы.

С помощью (9.3) мы переносим эту структуру и в пространство xab, а оттуда она переносится также и на M с помощью (9.2). Фактически мы имеем следующую параметризацию M посредством p, q, r:

$$(r,\ 3q-6r^2,\ 2p-6rq+8r^3,\ -2pr+3qr^2-15r^4); \qquad (9.4)$$

особое множество задается приравниванием p нулю, что дает

$$(r,\ 3q-6r^2,\ -6rq+8r^3,\ 3qr^2-15r^4), \qquad (9.5)$$

а высшие вырождения происходят при $q=0$, т. е. на кривой

$$(r,\ -6r^2,\ 8r^3,\ -15r^4) \qquad (9.6)$$

(сама точка ласточкина хвоста лежит, конечно, в начале).

Одновременно бифуркационное множество параметризуется с помощью q и r как множество точек

$$(a,\ b,\ c)=(3q-6r^2,\ -6rq+8r^3,\ 3qr^2-15r^4). \qquad (9.7)$$

Линия сборок, естественно, получается как проекция кривой (9.6) на C; это будет кривая, имеющая следующее параметрическое задание (при помощи параметра r):

$$(a,\ b,\ c)=(-6r^2,\ 8r^3,\ -15r^4). \qquad (9.8)$$

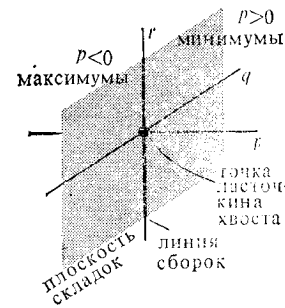
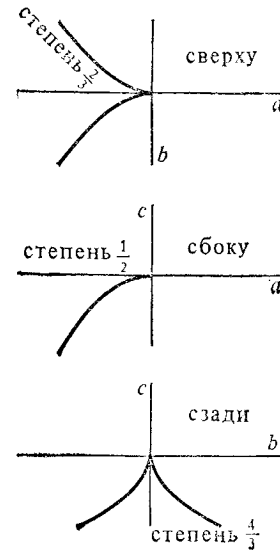


Рис. 9.3



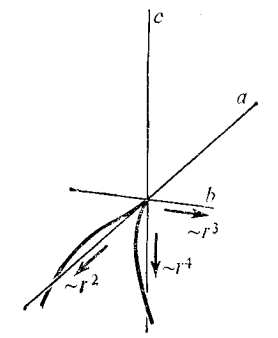


Рис. 9.4

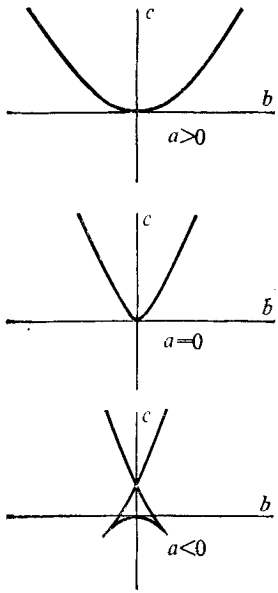


Рис. 9.5

Легко видеть, что эта кривая должна иметь такой вид, как на рис. 9.4 (скажем, ясно, что a и c должны быть отрицательными, и очевидны порядки скоростей роста координат с ростом r). Исследовать форму поверхности (9.7) можно, беря сечения при фиксированных a; мы получим семейство кривых, типичные представители которых изображены на рис. 9.5. В результате становится ясно, что бифуркационное множество имеет такой вид, как показано на рис. 9.6. Имеется линия самопересечения (вдоль которой функция имеет две различные точки перегиба, соответственно двум кускам плоскости складок), она имеет форму параболы с вершиной в начале; вторая половина параболы, иногда называемая *усом*, не входит в бифуркационное множество, но ответственна за некоторые свойства над полем комплексных чисел (см. об этом у Постона и Стюарта [25], стр. 130).

Отыскать кривую самопересечения можно следующим простым способом. Если у функции $V_{abc}(x)$ имеются две точки перегиба, то ее производная

$$x^4+ax^2+bx+c$$

представляет собой точный квадрат, скажем

$$(x^2+rx+s)^2.$$

Сравнивая коэффициенты, видим, что $r=0$ (из сравнения кубических членов), а значит $b=0$; далее, $c=s^2$, $a=2s$. Исключая s, получаем уравнение нашей кривой: $a^2=4c$. Но для того чтобы корни производной оказались вещественными, s должно быть отрицательным, значит и a отрицательно.

Вид графиков функций от x (потенциалов), отвечающих некоторым представительным, в смысле их расположения относительно бифуркационного множества, точкам из C, показан на рис. 9.7, а то, как многообразие катастрофы располагается над бифуркационным множеством, видно по двум представительным сечениям, изображенным на рис. 9.8.

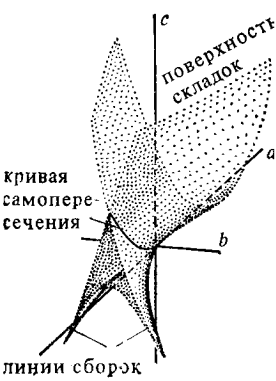


Рис. 9.6

5 Катастрофа бабочки

Деформация бабочки

$$V_{abcd}(x)=\frac{1}{6}x^6+\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx$$

исследуется совершенно так же; формулы длиннее, но в принципе ничего нового, и мы не будем их здесь воспроизводить. Тип 6-струи, отвечающей данным значениям переменных управления, определяет некоторое разбиение про-

странства $\mathbb{R}^4$, координаты в котором представляют члены второй, третьей, четвертой и пятой степени в тейлоровском расложении; снова мы получаем флаг

$$\mathbb{R}^4 \supseteq \mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}^1 \supseteq \mathbb{R}^0$$

(вложите рис. 9.3 в $\mathbb{R}^4$: новую ось представляйте себе как время, тогда рис. 9.3 отвечает настоящему, а по обе стороны от него лежат прошлое и будущее). В начале мы имеем точку бабочки типа X^6, на прямой — ласточкины хвосты X^5; те в свою очередь лежат на плоскости сборок (стандартные сборки X^4 по одну сторону прямой и двойственные $-X^4$ по другую); эта плоскость лежит в пространстве $\mathbb{R}^3$ складок X^3; с одной стороны ее (в прошлом) располагаются морсовские максимумы, с другой (в будущем)— морсовские минимумы. Эта структура переносится с помощью формул, которые можно явно выписать на многообразие катастрофы. Это последнее отображается в C весьма сложным образом, с самопересечениями и с особенностями других различных типов; бифуркационное множество лучше всего изображать с помощью двумерного семейства двумерных сечений. На рис. 9.9, заимствованном у Вудкока и Постона [20], показан вид сечений, отвечающих различным постоянным a и b и рассматриваемых в плоскости cd. Следуя Зиману [44], действие этих четырех параметров управления можно грубо описать следующим образом.

При $b=0$ и $a>0$ сечение выглядит как бифуркационное множество катастрофы сборки Уитни с управляющими па-

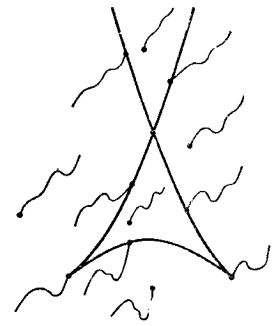


Рис. 9.7

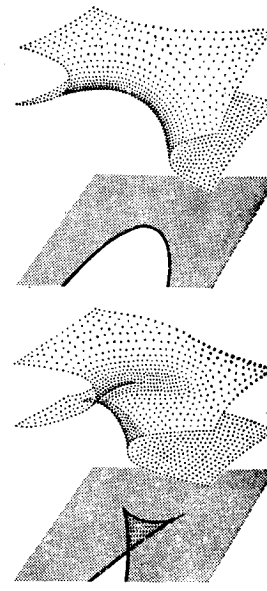


Рис. 9.8

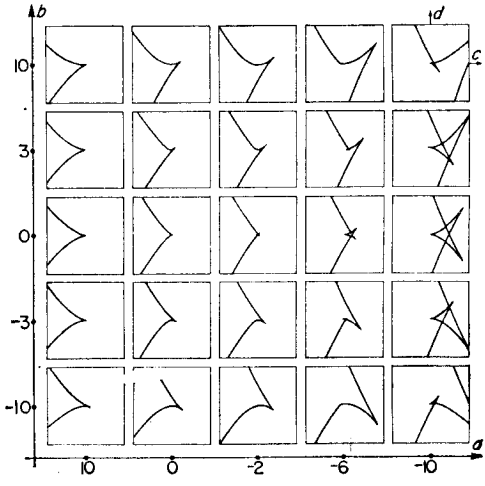


Рис. 9.9

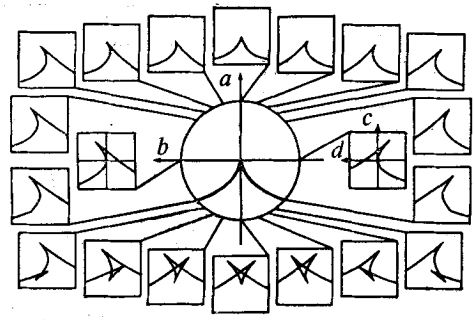
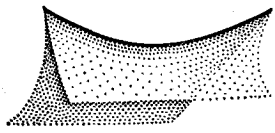
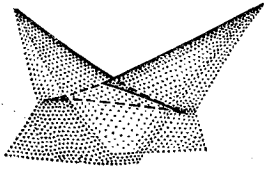


Рис. 9.10. *Бабочка по К. Ениху. (Из книги Брёкера и Ландера [9].)*

раметрами c и d. Изменение b приводит к тому, что вся картина „наклоняется" в ту или иную сторону, причем направление наклона зависит от знака b. Когда мы переходим в область отрицательных значений a, это приводит к существенно более сложной картине с „карманом". Теперь изменение b вызывает, помимо качания из стороны в сторону, следующее: та или другая сторона кармана сжимается, превращаясь в подобие ласточкина хвоста, а затем исчезает — и снова остается лишь кривая с острием.



$a>0$



$a<0$

Рис. 9.11

На рис. 9.10 показан другой способ представления этой геометрической формы, заимствованный у Брёкера и Ландера [9]. На этот раз точка управления (a, b) описывает в плоскости ab единичную окружность, и мы наносим на рисунок соответствующие сечения в плоскости cd. Кроме того, в плоскости ab отмечены кривые, при переходе через которые качественная картина сечения изменяется.

Полезно нарисовать также и некоторые трехмерные сечения, составляя их из двухмерных сечений рис. 9.9; результат показан на рис. 9.11.

Типы функций (потенциалов), отвечающие некоторым представительным в смысле расположения относительно B точкам, показаны на рис. 9.12. Расположение многообразия катастрофы над бифуркационным множеством иллюстрируется парой типичных сечений, изображенных на рис. 9.13. Отметим пятикратное накрытие кармана, отвечающее тому факту, что многочлен шестой степени может иметь три различных минимума и два максимума (*или наоборот*, в двойственном случае).

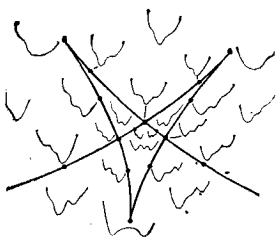


Рис. 9.12

Этим способом можно легко проанализировать всё каспоидное семейство, и последовательность сечений и прочее развивается именно так, как и следует ожидать (см., например, Вудкока и Постона [20] или Зимана [7]). Но нас теперь ждет более интересное семейство — омбилики.

6 Эллиптическая омбилика

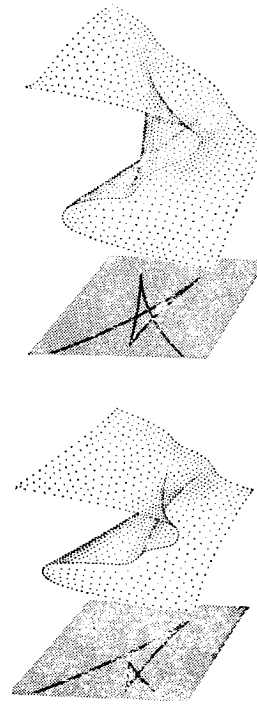


Рис. 9.13

Для омбилик связь между тейлоровскими разложениями и геометрией катастроф особенно поразительна; в частности, она помогает объяснить как сходства, так и различия между эллиптической и гиперболической омбиликами. (Над *комплексными* числами оба эти типа сливаются в один, но в *вещественном* случае их геометрические свойства резко различаются, хотя известные черты „фамильного сходства" и остаются.)

Для эллиптической омбилики деформацию можно взять в виде

$$V_{abc}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2+y^2) + bx + cy;$$

это стандартная форма, использованная Томом в [42]. Она отличается от приведенной нами в гл. 7, но эквивалентна ей. Ясно, что нужно сделать, чтобы перевести $x^3 - 3xy^2$ в $x^2y - y^3$ (поменять местами оси координат и соответствующим образом изменить масштабы вдоль осей), а правила для обращения с деформациями (см. предыдущую главу) позволяют довершить остальное. (Вместо члена x^2+y^2 можно было бы с тем же успехом взять x^2 или y^2 или сколько угодно других выражений, но мы, следуя Тому, останавливаемся на x^2+y^2, так как это позволяет выявить ряд полезных симметрий.) Мы анализируем именно это алгебраическое выражение, так как оно естественным образом возникает в одном важном приложении, разобранном в гл. 11.

Многообразие катастрофы M задается парой уравнений

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} V_{abc}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2ax + b,$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial y} V_{abc}(x, y) = -6xy + 2ay + c.$$

Следовательно, можно воспользоваться переменными (x, y, a) в качестве параметров следующей карты для M:

$$(x, y, a) \mapsto (x, y, a, -2ax + 3y^2 - 3x^2, -2ay + 6xy) = (x, y, a, b, c) \in M.$$

Возьмем тейлоровское разложение в точке, лежащей в M:

$$V_{abc}(x+X, y+Y) = X^3 - 3XY^2 + (3x+a)X^2 + (-6y)XY + (-3x+a)Y^2 + 0X + 0Y + (-2x^3 + 6xy^2 - ax^2 - ay^2).$$

Примем коэффициенты квадратичного члена за координаты

(p, q, r), так что

$$p(x, y, a)=3x+a,$$
$$q(x, y, a)=-6y,$$
$$r(x, y, a)=-3x+a.$$

Квадратичный член вырождается на дискриминантном конусе (см. § 5 гл. 2 и §§ 2, 4 гл. 7), уравнением которого служит

$$q^2=4pr,$$

или

$$x^2+y^2=a^2/9.$$

Это уравнение определяет особое множество в M. Поскольку мы используем карты, это множество диффеоморфно (двойному) конусу. Отметим, что математически это более неприятный случай, чем каспоиды, где особое множество всегда было многообразием, на самом деле даже линейным в подходящей системе координат; теперь же особое множество само имеет сингулярности (вершина конуса). Эта коническая структура проявится, как мы увидим ниже, в бифуркационном множестве.

Анализ алгоритма приведения показывает, что там, где квадратичный член тейлоровского разложения однократно вырожден (двукратная вырожденность возможна только в начале), кубический по существенной переменной член будет совпадать с ограничением многочлена X^3-3XY^2 на прямую, где вырожденна матрица Гессе. Этим тип критической точки будет определен, *если только* на этой прямой X^3-3XY^2 не обращается в нуль тождественно, поскольку ненулевая однородная кубика от одной переменной x автоматически эквивалентна x^3. Если же обращается, то требуется более тщательное исследование.

Корневые прямые кубического члена задаются равенством $X(X^2-3Y^2)=0$, т. е. уравнения их такие:

$$X=0,\ X=\sqrt{3}Y,\ X=-\sqrt{3}Y.$$

Квадратичный член вырождается в этих направлениях соответственно при

$$-q/2p=0, \qquad \sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3}.$$

Но направление $p=0$ отвечает вырожденности в X-направлении, которое для нас не имеет значения, поэтому мы можем считать, что $p\neq 0$, и выразить q и r через p, полу-

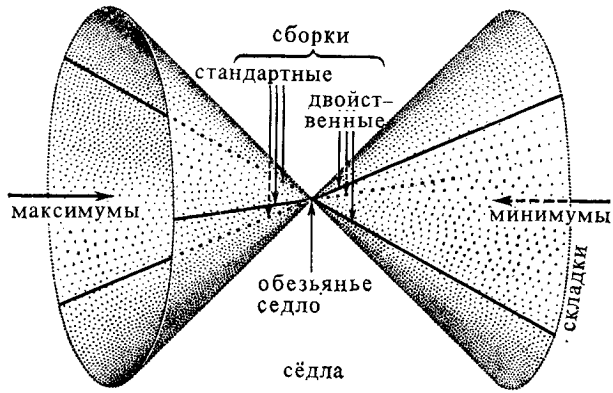


Рис. 9.14

чив тем самым три возможных набора для (p, q, r):

$$(p, 0, 0), \qquad (p, -2\sqrt{3}p, 3p) \qquad (p, 2\sqrt{3}p, 3p).$$

Это три прямые, лежащие в дискриминантном конусе (рис. 9.14). В координатах (x, y, a) их параметрические уравнения таковы:

$$(a/3, 0, a), \qquad (-a/6, \sqrt{3}a/6, a),$$
$$(-a/6, -\sqrt{3}a/6, a).$$

На рис. 9.14 отмечены различные типы критических точек. На конусе, вне трех выделенных прямых, располагаются точки складки; на самих этих прямых лежат точки сборки и двойственной сборки; тип критической точки в начале является характеристическим для эллиптической омбилики — это „обезьянье седло". Морсовские максимумы, минимумы и сёдла окружают конус известным уже нам образом.

Тот факт, что указанным трем прямым отвечают не просто геометрические сборки поверхности, а целые линии из точек с каноническими деформациями сборки, является весьма тонким. Каким образом можно продеформировать x^4 среди этих квадратичных и кубических членов? Этот вопрос в действительности породил пример (d) из § 13 предыдущей главы, где мы нашли струю в такой точке (со сдвигом начала в плоскости xy), для которой детально показали, что она эквивалентна сборке, *при условии что ее квартичная часть обращается в нуль* в исходных координатах. Но по теореме 8.6 универсальная деформация для $x^3-3xy^2+O(4)$ принимает в подходящей системе координат *в точности* тот самый полиномиальный вид, который мы сейчас изучаем, так что в этой системе координат мы дей-

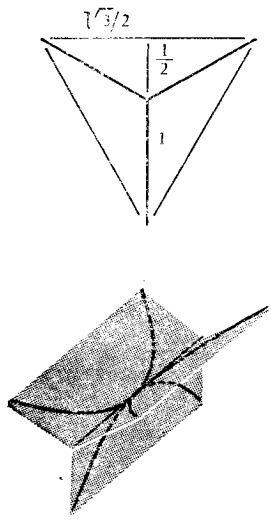


Рис. 9.15

ствительно знаем, что квартичный член равен нулю, и можем использовать вытекающую отсюда 4-определенность для доказательства того, что функции имеют указанный вид. (Доказательство того, что полученная деформация с двумя параметрами управления b и c оказывается универсальной, читателю рекомендуется провести самостоятельно в качестве упражнения.) Аналогичный и более впечатляющий пример встретится нам при описании геометрии сложного выпучивания пластин (§ 15, гл. 13).

Теперь с помощью проекции в пространство управления мы можем найти бифуркационное множество, для чего нужно выразить b, c через x, y и a. Три прямые сборок переходят в кривые

$$(a, b, c) = (a, -a^2, 0), \quad \left(a, \frac{a^2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right), \quad \left(a, \frac{a^2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right),$$

где a играет роль параметра. Ясно, что эти три кривые представляют собой конгруэнтные параболы, плоскости которых наклонены друг к другу под углом 120°, как показано на рис. 9.15. Вне этих кривых имеются лишь точки складок, и поэтому остальная часть бифуркационного множества гладкая; каждая парабола служит „острым ребром“ полу-

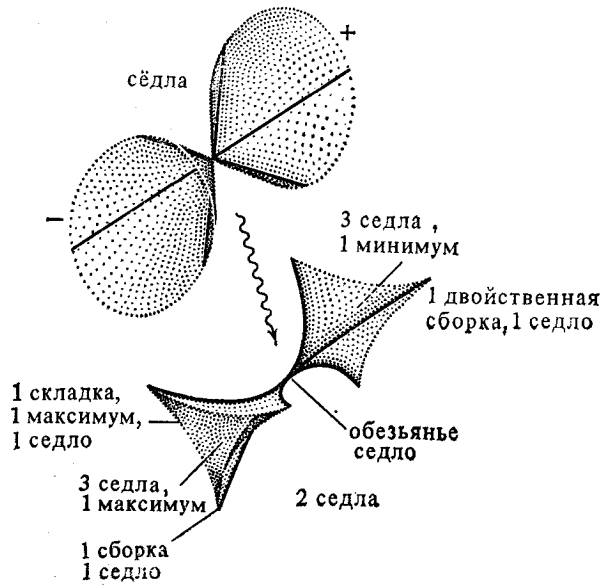


Рис. 9.16

чающейся поверхности; вся поверхность в целом является образом двойного конуса. Сказанного уже достаточно, чтобы догадаться, что бифуркационное множество выглядит так, как изображено на рис. 9.16; мы проверим это следующим образом.

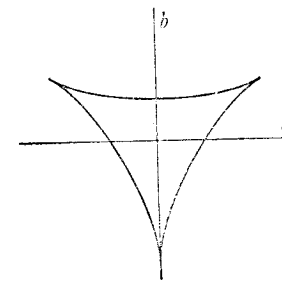


Рис. 9.17

Наше бифуркационное множество служит проекцией (образом при отображении катастрофы) конуса

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{9},$$

лежащего в M. Параметризуем этот конус с помощью a и θ:

$$(x,\ y,\ a)=\left(\frac{a}{3}\sin\theta,\ \frac{a}{3}\cos\theta,\ a\right).$$

Тогда параметризация его образа B в пространстве управления получается, если выразить b и c через a и θ, которые мы продолжаем рассматривать как параметры:

$$b=\frac{1}{3}a^2(\cos 2\theta-2\sin\theta),$$

$$c=\frac{1}{3}a^2(\sin 2\theta-2\cos\theta),$$

$$a=a.$$

Если оставить в стороне растущий по параболическому закону коэффициент $a^2/3$, то в сечениях, параллельных плоскости bc, при всех a наблюдается одна и та же зависимость от θ. При $a=1$ мы получаем

$$b=\frac{1}{3}(\cos 2\theta-2\sin\theta),$$

$$c=\frac{1}{3}(\sin 2\theta-2\cos\theta);$$

это хорошо известная кривая — *дельтоида*, или *гипоциклоида с тремя остриями*, показанная на рис. 9.17. Таким образом, сечения бифуркационного множества B, отвечающие постоянным a, представляют собой подобные и одинаково ориентированные дельтоиды, параболически растущие с ростом a.

Острия дельтоиды находятся из следующего условия: если написать

$$r\sin\psi=b,$$

$$r\cos\psi=c,$$

то мы должны иметь $\partial\psi/\partial\theta=0$. Исключив r и продифференцировав, получим

$$\sin 3\theta=-1,$$

так что $\theta=\pi/2$, $7\pi/6$ или $11\pi/6$. Кривые, образованные этими остриями,— это те самые параболы, которые мы нашли выше, изучая типы критических точек.

Изучение вида графиков для различных значений параметров управления мы отложим до гл. 11, где это понадобится нам в одном приложении. Тем не менее на рис. 9.16 указаны различные комбинации критических точек, которые могут тут встретиться.

7 Гиперболическая омбилика

Для гиперболической омбилики мы также возьмем стандартную форму, использовавшуюся Томом [1]:

$$V_{abc}(x, y)=x^3+y^3+axy+bx+cy;$$

как было во всех подробностях показано в § 7 гл. 8, она эквивалентна форме, которая была приведена в гл. 7. Многообразие катастрофы задается уравнениями

$$0=\frac{\partial}{\partial x}V_{abc}(x, y)=3x^2+ay+b,$$

$$0=\frac{\partial}{\partial y}V_{abc}(x, y)=3y^2+ax+c,$$

и мы можем принять (x, y, a) в качестве параметров карты с отображением

$$(x, y, a)\mapsto(x, y, a, -ay-3x^2, -ax-3y^2)$$
$$=(x, y, a, b, c)\in M.$$

Тейлоровское разложение здесь таково:

$$V_{abc}(x+X, y+Y)=X^3+Y^3$$
$$+3xX^2+aXY+3yY^2+0X+0Y$$
$$+(-2x^3-2y^3-axy).$$

Кубическая часть вырождена лишь в направлении $X/Y=-1$ и имеет лишь одну вещественную корневую прямую. Квадратичная часть дает естественные координаты

$$p(x, y, a)=3x,$$
$$q(x, y, a)=a,$$
$$r(x, y, a)=3y.$$

Она вырождается на дискриминантном конусе $q^2=4pr$, как и раньше; в координатах x, y, a уравнение этого конуса

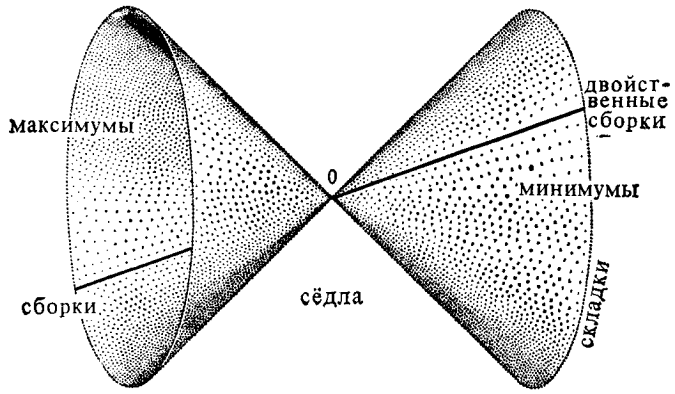


Рис. 9.18

принимает вид

$$36xy=a^2.$$

Квадратичная часть обращается в нуль на прямой вырожденности кубической части при $-q/2p=-1$, т. е. когда $q=2p$ и $r=p$. Это происходит на прямой, имеющей следующую параметризацию (с параметром p):

$$(p,\ 2p,\ p);$$

в координатах x, y, a эта кривая выглядит как $(p/3,\ p/3,\ 2p)$; переходя к параметру x, получаем параметризацию

$$(x,\ x,\ 6x).$$

Как и раньше, на конусе находятся точки складки, за исключением нашей прямой, где лежат сборки и двойственные сборки, а вне конуса располагаются морсовские точки; всё это изображено на рис. 9.18.

Посмотрим, каковы образы этих частей конуса в бифуркационном множестве. Параметризуем конус

$$a^2=36\ xy$$

следующим образом:

$$a=6\alpha,\ x=\alpha\xi,\ y=\alpha/\xi.$$

Эта параметризация не позволяет охватить прямые $x=a=0$, $y=a=0$, но с ними легко разобраться отдельно. Теперь особое множество S в M получает параметризацию

$$(\alpha\xi,\ \alpha/\xi,\ 6\alpha,\ -6\alpha^2/\xi-3\alpha^2\xi^2,\ -6\alpha^2\xi-3\alpha^2/\xi^2),$$

а образ прямой сборок выделяется условием $\xi=1$, т. е.

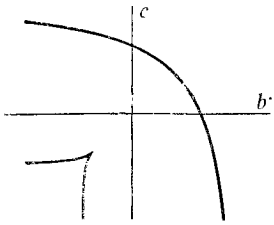


Рис. 9.19

задается параметрически так:

$$(\alpha,\ \alpha,\ 6\alpha,\ -9\alpha^2,\ -9\alpha^2).$$

Для B параметризация получается такой:

$$(6\alpha,\ \alpha^2(-6/\xi-3\xi^2),\ \alpha^2(-6\xi-3/\xi^2)),$$

при условии что $\alpha\neq 0$. Снова оказывается, что сечения при постоянных α подобны и одинаково ориентированны, с параболически растущим коэффициентом подобия. Типичное сечение при $\alpha=1$ показано на рис. 9.19. Образом прямой сборок служит парабола, плоскость которой наклонена под углом 45° к отрицательным полуосям b и c.

Прямые, с которыми мы обещали разобраться отдельно, отображаются так: при $a=x=0$ образом прямой в M будет

$$(0,\ y,\ 0,\ 0,-3y^2),$$

т. е. отрицательная полуось c в C; аналогично прямая $a=y=0$ переходит в отрицательную полуось b. В результате бифуркационное множество имеет вид, показанный на рис. 9. 20. Отметьте, что самопересечение поверхности происходит как раз по образам двух только что рассмотренных прямых — это место встречи образов двух половин двойного конуса.

Чертеж конуса (рис. 9.18) помогает нам понять, как кривая сборок — образ некоторой прямой при отображении класса C^∞ — перепрыгивает с одной поверхности на другую. Попытки продолжить ее, оставаясь на одной и той же поверхности, приводят к кривой с разрывными производными.

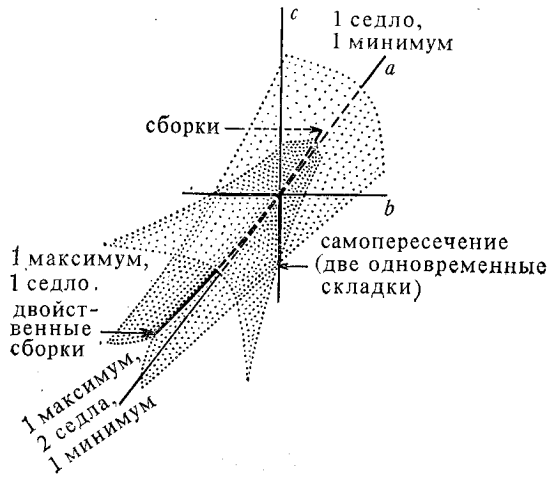


Рис. 9.20

Появляющиеся тут типы критических точек указаны на рис. 9.20. Графики при различных значениях параметров управления приведены в книге Тома [42].

Если в проведенном выше анализе параметр ξ записать как e^0, то аналогия со случаем эллиптической омбилики станет более заметной. В формуле, задающей бифуркационное множество, появятся гиперболические, а не тригонометрические функции, но в остальном всё будет аналогично. Этого можно было ожидать, так как эллиптическая и гиперболическая омбилики эквивалентны над комплексными числами.

На рис. 9.21 изображено бифуркационное множество для другой формы катастрофы гиперболической омбилики

$$x^2y+y^3+p(x^2+y^2)+qy+rx.$$

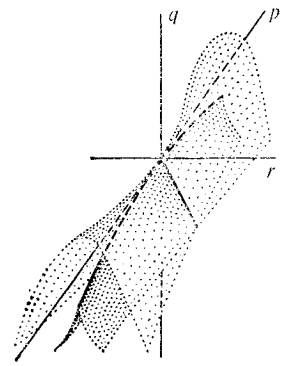


Рис. 9.21

Эту форму можно получить (с помощью преобразования из § 7 гл. 8) из предыдущей. Сразу видно, что топология остается той же.

8 Параболическая омбилика

Параболическая омбилика — вещь, бесспорно, более хитрая, достаточно сказать, что в первом издании книги Тома [1] в ее описании имеются мелкие неточности. Ее геометрия подробно исследована Шансинером [45] и Годвином [46], а у Вудкока и Постона [20] приведены рисунки, выполненные вычислительной машиной. Наше последующее изложение будет довольно беглым (поскольку мы не имеем в виду никаких особых приложений этой катастрофы); оно основано на работе Зимана [7].

Мы исходим из такой алгебраической формы этой катастрофы:

$$V_{abcd}(x,\ y)=x^2y+y^4+ax^2+by^2+cx+dy.$$

Многообразие катастрофы задается уравнениями

$$0=\frac{\partial}{\partial x}V_{abcd}(x,\ y)=2xy+2ax+c,$$

$$0=\frac{\partial}{\partial y}V_{abcd}(x,\ y)=4y^3+x^2+2by+d.$$

Карту для M зададим при помощи координат $(x,\ y,\ a,\ b)$ и отображения

$$(x,y,a,b)\mapsto(x,y,a,b,-2ax-2xy,-2by-x^2-4y^3)$$
$$=(x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ d)\in M.$$

Тейлоровское разложение выглядит так:

$$V_{abcd}(x+X,\ y+Y) = Y^4 + X^2Y + 4yY^3 + (y+a)X^2 + 2xXY + (6y^2+b)Y^2 + 0X + 0Y + \text{константа}.$$

Это наводит на мысль ввести новую карту (p, q, r, s), где

$$p(x, y, a, b) = y + a,$$
$$q(x, y, a, b) = 2x,$$
$$r(x, y, a, b) = 6y^2 + b,$$
$$s(x, y, a, b) = 4y;$$

старая карта выражается через новую следующим образом:

$$x(p, q, r, s) = q/2,$$
$$y(p, q, r, s) = s/4,$$
$$a(p, q, r, s) = p - s/4,$$
$$b(p, q, r, s) = r - 3s^2/8.$$

Квадратичная часть разложения вырождается при $q^2 = 4pr$, и поскольку в это уравнение не входит s, определяемое им множество имеет вид

$$K \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^4,$$

где K — двойной конус, задаваемый уравнениями $s=0$, $q^2 = 4pr$, а $\mathbb{R}$ — ось s.

Оставаясь в пределах пространства p, q, r, s, мы можем установить, какие встретятся типы критических точек. Двойная вырожденность возможна только на прямой $p =$

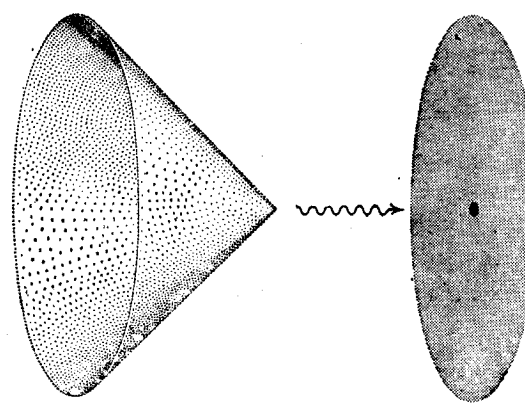


Рис. 9.22

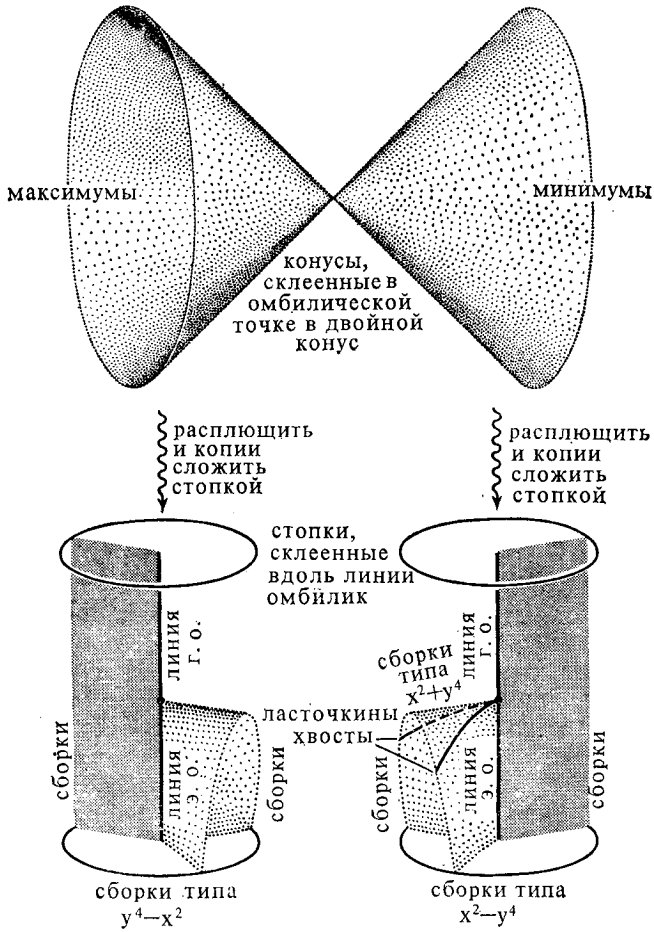


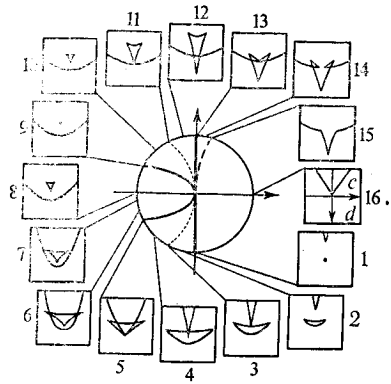
Рис. 9.23

$=q=r=0$, или $0\times\mathbb{R}$, т. е. на оси s. При $s>0$ мы получим гиперболические омбилики, при $s<0$ — эллиптические (достаточно рассмотреть 3-струю). Вне прямой $0\times\mathbb{R}$ вырожденность однократна, значит, существенна лишь одна переменная и встречаются лишь каспоиды.

В карте (p, q, r, s) отображение катастрофы записывается в виде

$$\chi\colon (p, q, r, s)\mapsto (p-s/4,\ r-3s^2/8,\ -pq,\ s^3/8-rs/2-q^2/4)=(a, b, c, d)\in C.$$

Характер каспоидных точек можно определить, вычислив



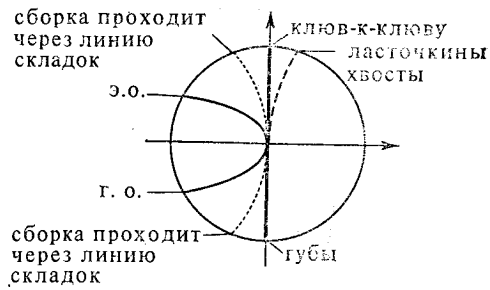


Рис. 9.24. *Параболическая омбилика по Ениху. (Из книги Брёкера и Ландера [9].)*

особенности этого отображения. Результат таков:

складки: $4pr = q^2 \neq -4p^2s$;
сборки: $4pr = q^2 = -4p^2s, \quad p^2 \neq r$;
ласточкины хвосты: $4pr = q^2 = -4p^2s, \quad p^2 = r, \quad p \neq 0$.

Сборки будут стандартными при $q<0$ и двойственными при $q>0$, с одним исключением: в последнем случае имеются еще и стандартные сборки между ласточкиными хвостами. Чтобы пояснить это высказывание, прибегнем к геометрической картинке, заимствованной у Зимана [7].

Нам нужно каким-то образом запихнуть множество $K \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ во что-нибудь трехмерное, чтобы его можно было нарисовать. Но *как множество*, $K \times \mathbb{R}$ уже само по себе трехмерно, так как K — двумерная поверхность; беда в том, что она кривая. Поэтому давайте распрямим ее. Воспользуемся проекцией $(p, q, r, s) \mapsto (p - r, q, s)$, которая диффеоморфно „распрямляет" каждую компоненту дополнения к началу. Для одного сечения s=const на рис. 9.22 показано, как происходит это распрямление: коническая шапочка переходит диск. Теперь можно сложить такие диски стопкой в направлении оси s и нанести на них типы критических точек. То, что получится, изображено на рис. 9.23[1].

Хотя интерпретацию этой картины следует проводить осторожно ввиду различных искажений, одно видно четко — это как три прямые на конусе, отвечающие эллиптическим омбиликам, сливаются на уровне s=0, причем

[1] На этом рисунке и на нескольких последующих используются сокращения: г. о.— гиперболическая омбилика, э. о.— эллиптическая омбилика, п. о.— параболическая омбилика.— *Прим. ред.*

две из них здесь исчезают, а остающаяся одна превращается в прямую гиперболических омбилик. Это вскрывает роль параболической омбилики как точки перехода между эллиптической и гиперболической омбиликами.

Чтобы найти бифуркационное множество, нужно теперь подставить $q^2=4pr$ в выражение для отображения катастрофы и посмотреть, где находятся различные типы критических точек. Это долгая аналитическая работа, и мы не намерены проводить ее здесь! Результаты приходится изображать на нескольких картинках разного рода, каждая из которых выявляет свои особые черты катастрофы.

Рис. 9.24 взят из книги Брёкера и Ландера [9]. На нем показаны для точек единичной окружности в плоскости ab сечения, параллельные плоскости cd. В точке 16 мы видим обычное бифуркационное множество (кривая с острием) для сборки Уитни. В 1 появляется изолированная точка, которая в 2 превращается в „губы". Такая эволюция сечения объясняется тем, что мы сечем поверхность с острым ребром (линией сборок), как показано на рис. 9.25, и это не есть новый тип катастрофы. В 3 первоначальный „клюв" достигает „уст", а в 4 приближается уже к нижней губе, причем картина напоминает гиперболическую омбилику (рис. 9.20). В 5 мы действительно встречаемся с точкой гиперболической омбилики: кончик клюва сливается углом с нижней губой. Затем в 6 появляется треугольник с заостренными углами, напоминающий об эллиптической омбилике. Треугольник съеживается, втягивается в кривую складок в 7, а в 9 сжимается в точку в момент эллиптической катастрофы, после чего снова начинает расти (сечение 10), вырастает, пронзает в 11 кривую складок и проходит через нее в 12. Далее верхняя сторона треугольника доходит до кривой складок, касается ее в точке с особенностью „клюв-к-клюву" в 13 и разрывается в 14. Здесь снова все объясняется тем, что мы сечем поверхность с острым ребром (линией сборок), см. рис. 13.16. Образовавшиеся два выступа сжимаются в 15 в точки типичным для ласточкиных хвостов способом, и мы возвращаемся в 16 к обычному острию сборки, завершая круг.

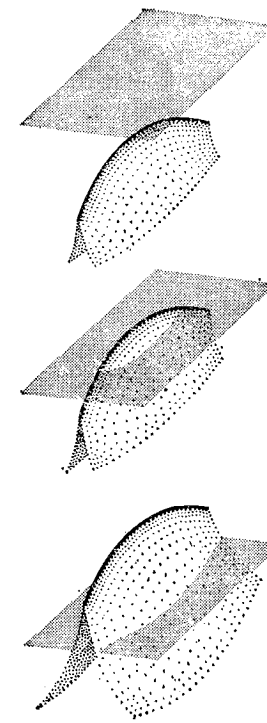
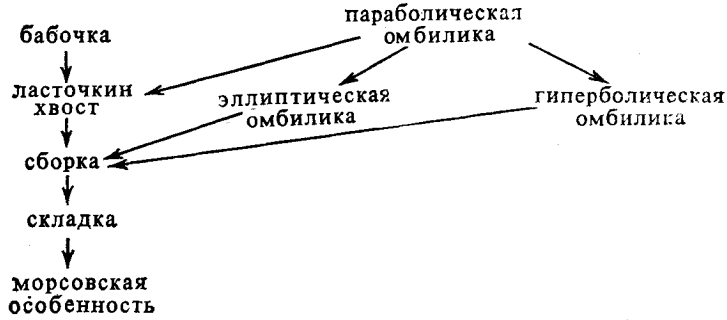


Рис. 9.25

В этом обходе мы можем видеть, как все катастрофы коразмерности три и меньше появляются на своем месте в параболической омбилике; из семи катастроф Тома отсутствует одна только бабочка. Каждая из семи катастроф содержит в себе „подкатастрофы" (иначе говоря, их версальные деформации содержат функции, критические точки которых имеют соответствующий тип) согласно следующей *диаграмме соподчинения:*



На рис. 9.26 показаны три трехмерных сечения, заимствованные у Годвина [46]; они отвечают трем фиксированным значениям d — отрицательному, нулевому и положительному. В [47] Годвин приводит некоторые диаграммы линий уровня для потенциалов, Том также дает в [42] такие диаграммы (правда, последние отчасти вводят в заблуждение, так как соответствуют точкам нелокального бифуркационного множества, см. § 12 гл. 11). В отличие от эллиптической и гиперболической омбилик параболическая омбилика не самодвойственна, и поэтому расположение максимумов, минимумов, сборок, двойственных сборок и пр. зависит от выбранного знака. При любом выборе знака область существования *каждого* минимума очень мала, как читатель может убедиться самостоятельно (используя структуру уже изученных катастроф, чтобы постепенно продвигаться от точки к точке).

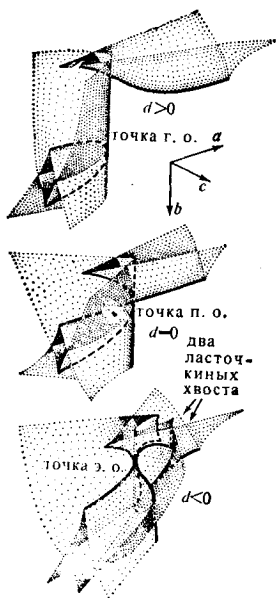


Рис. 9.26

9 Линейчатые поверхности

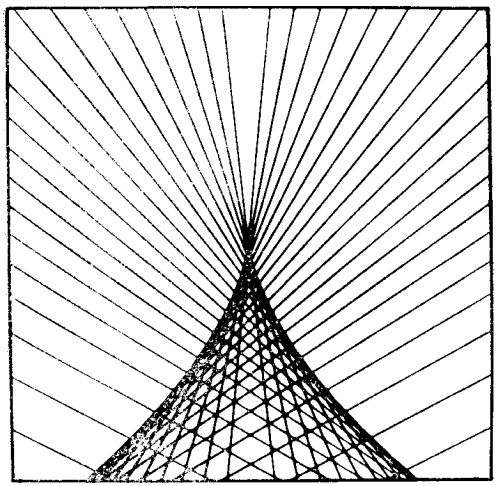
Рисунки в книге Вудкока и Постона [20], выполненные вычислительной машиной, были получены на основе совершенно другого метода, который мы вкратце здесь опишем. Возьмем для примера катастрофу сборки, многообразие катастрофы для которой параметризовано следующим образом:

$$(x,\ a,\ -ax-x^3).$$

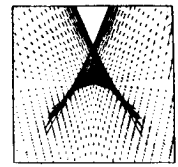
При фиксированном x, меняя a, мы получим прямую в $\mathbb{R}^3$, проекция которой на плоскость ab задается уравнением

$$b=-ax-x^3.$$

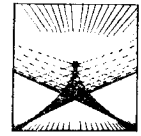
Меняя теперь x, мы получим семейство прямых, заметающее *линейчатую поверхность*, которая и есть многообразие катастрофы, а проекция этого семейства на плоскость ab



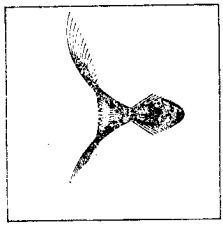
сборка



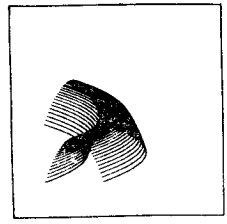
ласточкин хвост



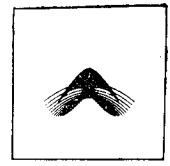
бабочка



эллиптическая омбилика



гиперболическая омбилика



параболическая омбилика

Рис. 9.27

дает семейство прямых, *огибающая* которого дает бифуркационное множество (см. рис. 5.15). Этот метод применим ко всем вообще каспоидам (многообразия катастроф которых все образованы семействами прямых линий), а в модифицированной форме — также и к омбиликам (нужно использовать кривые, отвечающие в подходящей карте семейству параллельных прямых). На рис. 9.27 изображены типичные картинки для каждой из семи элементарных катастроф (кроме складки), взятые из книги Вудкока и Постона [20]. Эти картинки дают некоторое представление о том, как именно многообразие катастрофы располагается над бифуркационным множеством (в случае омбилик картинки нужно интерпретировать с осторожностью!).

Этот способ часто бывает полезным при исследовании физических, неполиномиальных деформаций в целом (когда уже неприменимы методы приведения из гл. 8). Например, в случае машины Зимана, изображая этим способом геометрию катастрофы (рис. 1.2), мы не только в большей степени осветили суть дела, чем если бы мы ограничились изображением *одного лишь* множества бифуркации (теперь и само многообразие катастрофы стало в какой-то степени видимым),— помимо этого и рисовать было гораздо легче, как это ясно из книги Постона и Вудкока [47a].

Новый и неожиданно дешевый способ получения трехмерных картинок катастроф (и прочей геометрии) с помощью небольшой вычислительной машины изложен у Роквуда и Бёртона [47b].

10 ОСТОЙЧИВОСТЬ СУДОВ

Иногда теория катастроф позволяет дать неожиданную переформулировку „классических" результатов, и такая переформулировка часто оказывается полезной в качестве основы для дальнейшего продвижения вперед: чтобы пойти вперед, иногда бывает необходимо сначала отойти немного назад и пройти путь заново. Примером может служить недавняя работа Зимана по остойчивости судов. Мы дадим здесь введение в эту работу, в большой мере основанное на его лекциях. Мы будем иметь дело лишь со статическим равновесием. У Зимана постановка задачи была ориентирована на изучение динамического равновесия, что имеет очевидное практическое значение, однако полное изложение вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону. Эту главу, следовательно, нужно рассматривать как подготавливающую к чтению Зимана [48].

СТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

1 Плавучесть

Рассмотрим жесткое двумерное судно S, погруженное в воду (рис. 10.1 (a)). (К трехмерному случаю мы обратимся в § 9, значительная часть теории переносится на этот случай без существенных изменений.) Из школьной физики мы знаем, что выталкивающие силы, действующие на судно со стороны воды, имеют результирующей вертикальную силу, равную весу вытесненной воды K (рис. 10.1 (b)) и приложенную в центре тяжести K. Если плотность воды постоянна, как мы и будем предполагать, этот центр тяжести совпадает с *центроидом* (геометрическим центром тяжести) погруженной части судна, вытеснившей воду K. Для данного угла крена θ эта сила будет тем больше, чем ниже погружено судно (пока вода не начинает заливаться за борт). Таким образом, для каждого θ, если судно вообще может держаться на плаву при этом θ, будет иметься *единственная* высота, при которой направленная вверх сила равна весу судна. На языке теории катастроф мы можем поэтому назвать

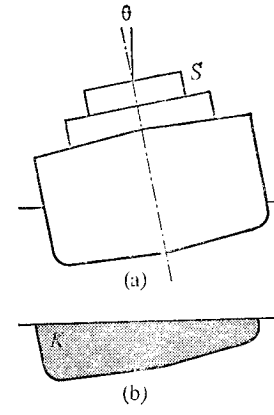


Рис. 10.1

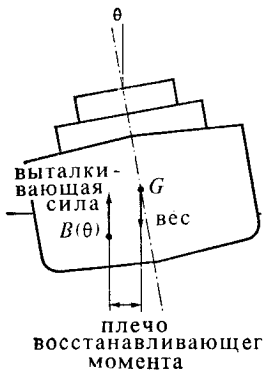


Рис. 10.2

вертикальное смещение *несущественной переменной* и параметризовать положение судна S при изучении положений равновесия с помощью одного только θ. (На самом деле так можно делать даже и в динамическом анализе: вертикальные смещения из положения равновесия вызывают к жизни столь огромные восстанавливающие силы и столь быстро гасятся, что может оказаться нужным учитывать разве лишь какие-нибудь очень странные резонансные эффекты.)

Итак, каждому θ отвечает вполне определенная высота судна и тем самым вполне определенная конфигурация погруженной части K со своим центроидом $B(\theta)$. Точка $B(\theta)$ называется *центром величины* [1] судна при угле крена θ. Вес судна (включая груз и пр.), или, что эквивалентно, вес воды, которую оно вытесняет в положении вертикального равновесия, называется *водоизмещением*.

2 Равновесие

В случае равновесия вес и выталкивающая сила [2] не только должны быть равной величины, как это мы уже приняли выше, они должны быть направлены вдоль одной и той же вертикальной прямой, иначе судно начнет вращаться. Пара сил, показанная на рис. 10.2, создает *восстанавливающий момент*, равный произведению их общей величины на расстояние между прямыми, вдоль которых они действуют. Это расстояние, считаемое положительным в случае, когда результирующий момент стремится уменьшить θ (так что знак не указывает здесь на направление момента по или против часовой стрелки, как было бы привычно для математика), в морском деле называется *плечом восстанавливающего момента* [3].

3 Остойчивость

Если бы точка $B(\theta)$ была фиксированной точкой опоры для судна (каковой практически она является для подводной лодки; почему?), для остойчивости требовалось бы, чтобы центр тяжести судна G был расположен ниже $B(\theta)$. Действительно, смещение из такого положения равновесия, как на рис. 10.3(а), привело бы нас к положению, изображенному на рис. 10.3(с). Однако в действительности $B(\theta)$

[1] При переводе по возможности используются термины, принятые в отечественной литературе по теории судна. В частности, мы говорим в этой главе „остойчивость", а не „устойчивость".— *Прим. перев.*
[2] „Сила поддержания" в теории судна.— *Прим. перев.*
[3] Или „плечом статической остойчивости".— *Прим. перев.*

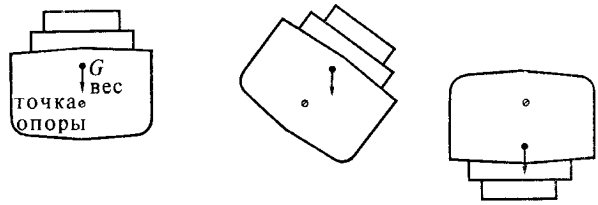


Рис. 10.3

движется при изменении θ, и поэтому оказываются возможными такие ситуации, как на рис. 10.2, где G *выше*, чем $B(\theta)$, но отклонение от положения $\theta=0$ вызывает *восстанавливающий* момент и прямое (без крена) положение судна остойчиво. Значит, остойчивость зависит от того, каким образом меняется положение $B(\theta)$ в зависимости от θ. Прежде чем углубляться дальше в теорию, разберем один частный (впрочем, довольно общий) случай.

4 Судно с вертикальными бортами

Рассмотрим симметричное судно S ширины $2w$ с прямыми вертикальными бортами AD и A′D′ (рис. 10.4 (a)). Допустим, что оно накренилось на угол θ с

$$\operatorname{tg}\theta=t,$$

для которого линия уровня воды проходит между A и D, A′ и D′ (рис. 10.4 (b)). Выберем систему координат x, y, жестко связанную с S, как показано на рисунке. Определим числа l и h, потребовав, чтобы прямая AA′ имела уравнение $y=l$, а ватерлиния в положении равновесия при $\theta=0$ — уравнение $y=l+h$. Пусть часть U судна, лежащая ниже AA′, имеет центроид $(0, k)$ и площадь V.

Если судно повернуть вокруг точки $(0, l+h)$, находящейся на уровне воды, то к погруженной области добавится и из нее вычтется по равному треугольнику. Поэтому условие вертикального равновесия (т. е. условие равновесия проекций сил на вертикальную ось) *требует*, чтобы точка $(0, l+h)$ оставалась при всех кренах на уровне воды, и центр величины $B(\theta)=(X, Y)$, можно найти, подсчитав моменты:

(a) относительно оси x:

$$Y\cdot(\text{погруженная площадь})=kV+\left(l+\tfrac{1}{2}(h-wt)\right)\times(2w(h-wt))+\left(l+(h-wt)+\tfrac{2}{3}wt\right)\times\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2w\cdot 2wt\right),$$

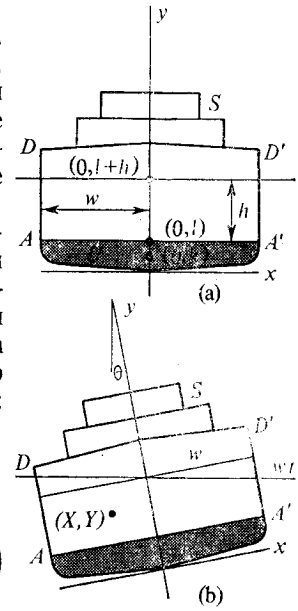


Рис. 10.4

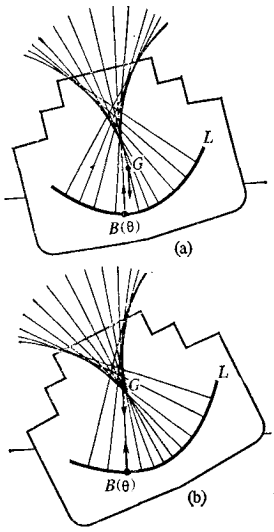


Рис. 10.5

откуда

$$Y = \frac{(kV + 2lwh + wh)^2}{V + 2wh} + \frac{w^3}{3(V + 2wh)} t^2;$$

(b) относительно оси y:

$$X \cdot (V + 2wh) = -\frac{w}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 2w \cdot 2wt\right),$$

откуда

$$X = \frac{-2w^3}{3(V + 2wh)} t.$$

Поскольку k, w, h и V — константы (во всяком случае, при данном весе судна и груза), мы можем записать

$$X = -2ct, \qquad Y = k + ct^2,$$

с комбинированными константами k и c.

Итак, множество точек, описываемое $B(\theta)$ при изменении θ, которое мы назовем *кривой центров величины* L, оказывается параболой

$$Y = k + \frac{1}{4c} X^2.$$

На рис. 10.5 показано, как располагается эта кривая, и проведены для различных θ прямые, проходящие через $B(\theta)$ и вертикальные в момент, когда корабль накренен на угол θ. Ясно, что если центр тяжести G корабля находится *ниже* острия клюва, то равновесие при $\theta = 0$ будет устойчивым (рис. 10.5(a)), если же *выше*, то неустойчивым. (Чтобы убедиться в этом, рассмотрите кренящие моменты.) В последнем случае, однако, имеются два новых устойчивых положения равновесия, в которых судно имеет небольшой крен в ту или другую сторону (рис. 10.5(b)).

Это выглядит очень похоже на поведение параболической гравитационной машины-качалки, которой мы занимались в гл. 1 и 5. Чтобы показать, что геометрия здесь и там в точности одна и та же, нужно доказать, что прямые на рис. 10.5 тоже будут нормалями к параболе. Так как они по определению вертикальны, когда крен корабля равен θ, мы должны показать, что в этом случае кривая L центров величины идет *горизонтально* в точке $B(\theta)$. В нашем частном случае это тривиально проверяется аналитически, но мы докажем это при помощи общего рассуждения, пригодного для судов произвольной формы.

5 Геометрия кривой центров величины

Рассмотрим произвольное судно S веса W на воде в некотором данном положении вертикального равновесия (рис. 10.6 (a)). Его центр величины B занимает положение, которое имел бы центр тяжести воды того же веса W, налитой в сосуд S', имеющий форму судна S (рис. 10.6 (b)). Поверхность воды в этом сосуде, естественно, соответствовала бы ватерлинии на рис. 10.6 (a). Это единственная возможность для воды в данном сосуде, повернутом данным образом, удовлетворить принципу минимума энергии (доказать этот факт несложно, но он настолько очевиден, что мы не будем этим заниматься). Следовательно, при таком расположении воды в сосуде центр тяжести должен занимать наинизшее положение. Значит, любой поворот судна S приводит к новой конфигурации воды в S' (рис. 10.6 (c)) с новым центроидом B', необходимо расположенным *выше* B в смысле исходного вертикального направления. Поэтому кривая центров величины L имеет в B единственный минимум (относительно указанной вертикали). Так как в дифференцируемом случае минимум должен быть горизонтальным, L проходит через точку B горизонтально, что мы и хотели доказать.

В этом рассуждении предполагается, что L не имеет углов. В случае судна произвольной кусочно-дифференцируемой формы оно справедливо для почти всех значений водоизмещения. (Более точно, как в двух-, так и в трехмерном случае кривая, соответственно поверхность центров величины параметризуется положением корабля C^1-гладко (но, вообще говоря, не более чем кусочно-C^2-гладко) для всех значений водоизмещения, исключая множество меры нуль. Однако доказательство этого утверждения опирается на теоремы дифференциальной топологии, лежащие вне рамок нашей книги; см. Питт и Постон [49].)

Во всяком случае, проведенное рассуждение доказывает строгую выпуклость L, и двумерность судна в нем нигде не используется.

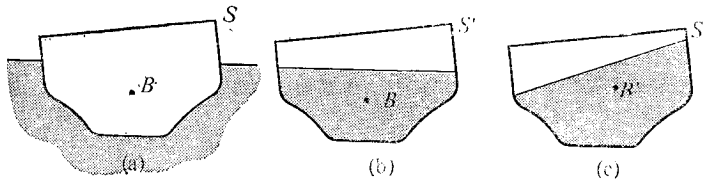


Рис. 10.6

6 Метацентры

Итак, мы видим, что глобальные свойства статического равновесия для судна в точности те же, что и для гравитационной машины катастроф, имеющей в качестве обода кривую центров величины L при данном водоизмещении. Параметром управления служит положение центра тяжести судна, а бифуркационным множеством — эволюта L. (В случае если L не принадлежит классу C^2, определение „эволюты" нужно слегка обобщить.) В частности, корабль с прямыми бортами при умеренных кренах обладает геометрией равновесия, которая в точности моделируется (с помощью линейной замены переменных) параболической качалкой, управляемой, как мы видели, стандартной катастрофой сборки в ее канонической полиномиальной форме. Соответствующая функция энергии остается той же самой. Действительно, изменение высоты центра величины не меняет энергии, если принять во внимание энергию воды, остающейся при этом невытесненной; тем самым энергия задается высотой центра тяжести над мгновенным центром величины вне зависимости от вертикального движения последнего.

Мы можем сравнить проведенный нами анализ с тем, что говорится в стандартных учебниках для судостроителей. В „Пересмотренных принципах судостроения, написанных группой специалистов" под редакцией Джона П. Комстока (издано Обществом судостроителей и морских инженеров, Нью-Йорк, 1967), мы находим следующее (стр. 70):

„*Поперечный метацентр и поперечная метацентрическая высота.* Рассмотрим симметричный корабль, накрененный на очень малый угол $d\varphi$, показанный на рис. ⟨10.7⟩, где угол преувеличен. Центр величины сдвигается с центральной оси корабля из-за крена, и линии, вдоль которых действуют результирующая веса и сила поддержания, оказываются отстоящими друг от друга на некоторое расстояние $\overline{GZ}$ — плечо восстанавливающего момента. Вертикаль, проведенная через центр величины, пересечет исходную вертикаль, совпадающую с центральной осью корабля, в точке M, называемой поперечным метацентром. Его положение зависит от водоизмещения корабля и его очертаний, но для данных очертаний он всегда будет находиться в одном и том же месте. Если только форма корабля не меняется слишком резко вблизи ватерлинии, точка M практически будет оставаться неизменной для данного корабля при кренах до 7 или даже 10°."

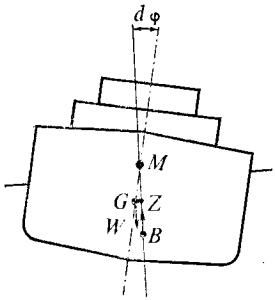


Рис. 10.7. *(С любезного разрешения Общества судостроителей и морских инженеров.)*

Метацентром M для прямо стоящего судна является, таким образом, центр кривизны кривой L при $\theta=0$; в нашем

примере выше это точка острия. Цитированное определение помещает M на центральную ось всегда [1], при любых θ. Поэтому M не то же самое, что центр кривизны L, который сдвигается по эволюте (в нашем примере это клюв — бифуркационное множество сборки). Тем не менее мы будем называть в этой ситуации эволюту *кривой метацентров* [2]. В силу симметрии судна кривизна L всегда будет иметь при $\theta=0$ либо локальный минимум, либо локальный максимум, и кривая метацентров будет в этой точке всегда иметь особенность; в типичном случае это будет особенность стандартной или двойственной сборки.

Мы имеем здесь интересную иллюстрацию к постоянно повторяющейся теме этой книги: природа производных как аппроксимаций. Для судна S, описанного в § 4, M находится на пересечении оси y с прямой

$$x+2ct=t(y-(k+ct^2)),$$

становящейся вертикальной, когда $\operatorname{tg}\theta=t$. Это дает

$$y=k+2c+ct^2,$$

что линейно аппроксимируется константой $k+2c$ вблизи $t=0$. Как мы только что узнали, эта аппроксимация хороша на практике вплоть до

$$t=\operatorname{tg} 7^\circ\sim 0.12,$$

а иногда и до

$$t=\operatorname{tg} 10^\circ\sim 0.18.$$

При этом t^2 примерно равняется 0.015, соответственно 0.03. Квадратичное описание остается точным до тех пор, пока прямые борта AD, A′D′ пересекают линию воды. Для судов более общей формы, конечно, полиномиальные результаты получаются уже не так просто, и средства, предлагаемые теорией катастроф для точной ампутации тейлов, оказываются как раз кстати.

В нормативных правилах постройки и загрузки судов много внимания уделяется *метацентрической высоте* — высоте метацентра над центром тяжести и судна при $\theta=0$. Это по существу есть мера „инфинитезимальной“ устойчивости, определяющая ответ корабля на малые возмущения. Типич-

[1] Во многих учебниках (см., например, „Основы теории судна“ Ф. Н. Белана и А. М. Чудновского (Л.: Судостроение, 1978)) объясняется, что это лишь приближение.— *Прим. перев.*

[2] Так и делают во многих учебниках (см. предыдущее подстрочное примечание) для случая больших углов крена.— *Прим. перев.*

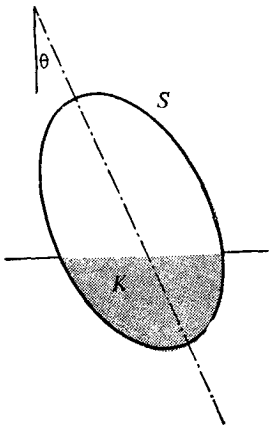


Рис. 10.8

ный эсминец при ширине 10 м имеет метацентрическую высоту три четверти метра и совершает малые колебания с периодом около 8 с; метацентрическая высота лайнера полметра при ширине 25 м, период малых колебаний примерно 24 с. Таким образом, менее поворотливый лайнер и менее чувствителен к качке. Чтобы провести сравнение метацентрической высоты с другими более глобальными мерами устойчивости, нам нужен следующий пример.

ФОРМЫ СУДОВ

7 Эллиптическое судно

Эта форма не встречается в практике судостроения, как форма из § 4, но она нам удобна тем, что на ее примере можно без вычислений выявить некоторые важные моменты.

Пусть судно S представляет собой эллипс площади A. Примем его водоизмещение равным kA, где k — какое-то фиксированное число, заключенное между 0 и 1, и изучим кривую центров величины. Найдем для произвольного θ (см. рис. 10.8) положение центроида погруженной в воду части K, определяемой условием, что ее верх горизонтален, а площадь равна kA.

Для *круглого* судна S' радиуса 1 (см. рис. 10.9 (a)) легко показать, что высота s центра круга над уровнем воды равняется единственному решению уравнения

$$s = \cos(k\pi + s\sqrt{1-s^2}).$$

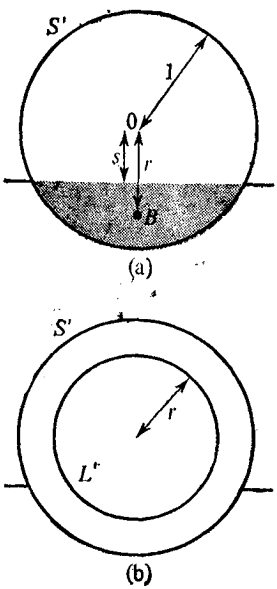


Рис. 10.9

Центроид B погруженной части находится на расстоянии r под центром O судна S', где

$$r = \frac{2}{3k\pi}(1-s^2)^{3/2},$$

Значит, кривая центра величины L' для S' является окружностью радиуса r с центром O (рис. 10.9 (b)), где r зависит от k, как показано на рис. 10.10.

Но круг можно перевести в любой эллипс с тем же центром линейной заменой координат. Такое отображение сохраняет прямые, отношения площадей, центры тяжести и отношения длин, измеренных вдоль одной и той же прямой. Это означает, что наш результат для круга переводится в следующий результат для эллиптического судна, представленного на рис. 10.8: кривая центров величины представляет собой эллипс, подобный эллипсу судна (рис. 10.11) с коэффициентом подобия r (который по-прежнему зависит от k, как на рис. 10.10).

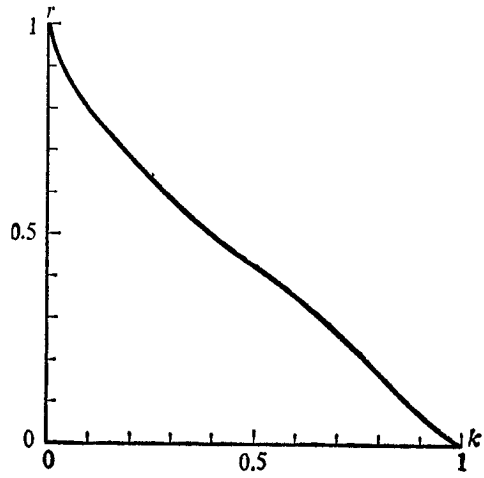


Рис. 10.10

На рис. 10.12 показаны эволюты кривых центра величины для эллиптических судов с различными эксцентриситетами (k выбирается таким, чтобы r равнялось $^1/_2$). Эксперименты с эллиптической качалкой из гл. 1, которые мы очень рекомендуем читателю проделать, подтвердят делаемые ниже утверждения.

При перемещении центра тяжести вдоль большой оси эллипса судно ведет себя, как показано на рис. 10.13. Оно устойчиво остается вертикальным, пока центр тяжести G не достигнет метацентра P, постепенно переворачивается, пока G движется от P к Q, и затем устойчиво остается в перевернутом состоянии. (В какую именно сторону судно начнет переворачиваться, зависит от влияния различных незначительных факторов в момент прохождения точки G через P.) Когда G находится в положениях G_1 и G_2, судно *остойчиво*: оно имеет только одно положение устойчивого равновесия и возвращается в это положение из всякого другого, если только оно не зачерпнет воды. Заметьте, что неустойчивость вертикального положения возникает по схеме катастрофы сборки, как и на рис. 10.5. Вертикальность бортов здесь не при чем, поскольку это остается верным и для малых k, больших r и таком положении на плаву, как на рис. 10.14. Переход от устойчивости к неустойчивости вертикального положения внезапен, но результатом сначала будет лишь появление небольшого крена. Мы имеем здесь обычное параболическое разветвление, связанное со сборкой (см. рис. 6.3(а)).

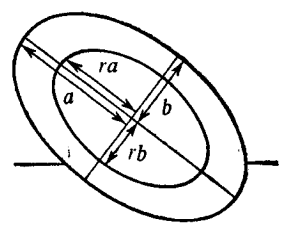


Рис. 10.11

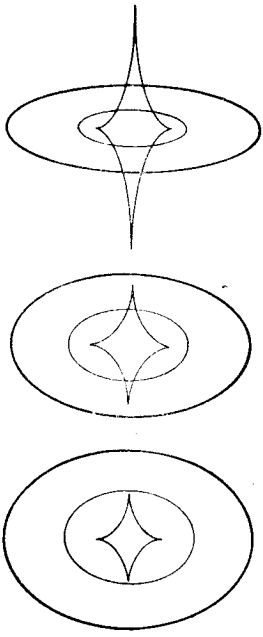


Рис. 10.12

Напротив, представим себе кого-либо в лодке эллиптического сечения (рис. 10.15). Для простоты пусть это будет математик, вес которого вместе с весом лодки сосредоточен у него в голове. Как показано на рисунке, лодка находится в устойчивом положении. Но пусть он теперь слегка наклонится в сторону, ровно настолько, чтобы его голова вышла за пределы кривой метацентров. Устойчивого равновесия для прямого положения лодки больше нет. Она не просто черпанет, а черепахою нырнет [1] (рис. 10.16)... .

Говоря серьезнее, рассмотрим судно с сечением такой формы. Груз, прикрепленный с одной стороны, как на рис. 10.17, легко может сместить центр тяжести так, что судно опрокинется. Эта неустойчивость по типу двойственной сборки, свойственная, например, мелкосидящим закругленным ладьям викингов, а также байдарке, построенной в юности одним из авторов (она переворачивала всякого, кто пытался в нее залезть), резко контрастирует с поведением по типу стандартной сборки судов с вертикальными бортами более позднего времени.

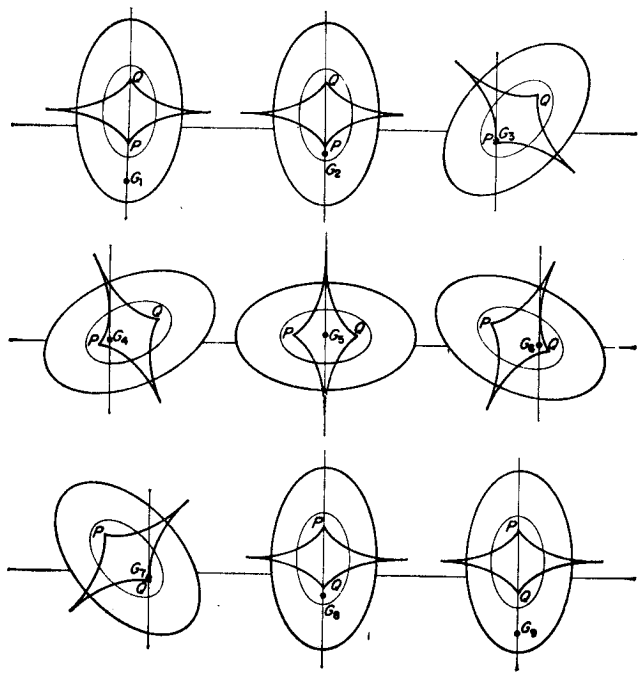


Рис. 10.13

[1] Попытка редактора передать игру слов в оригинале: „Instead of tilting a little... it turns turtle".— *Прим. перев.*

Имеется еще одно отличие, которое, как можно показать, является характеристическим для различения стандартной и двойственной сборок. Для судна с вертикальными бортами и плоским дном возрастание веса, оставляющее центр тяжести на месте, *увеличивает* метацентрическую высоту. Для эллиптической лодки подобное увеличение веса приводит к тому, что кривая центров величины и ее эволюта сжимаются и метацентрическая высота *уменьшается*. Поэтому дополнительный груз на кораблях с прямыми бортами повышает устойчивость, а на эллиптической лодке уменьшает ее.

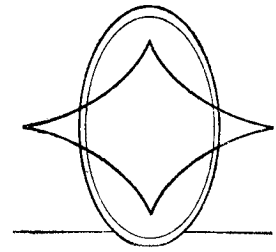


Рис. 10.14

8 Прямоугольное судно

Для одной специальной формы, которую, по крайней мере в качестве хорошего приближения, имеют реальные суда — именно, для прямоугольной формы,— мы получим более интересные результаты. Выберем единицу длины так, чтобы высота равнялась 1; ширину судна обозначим через $2w$ (без потери общности можно считать, что $2w \geqslant 1$). Пусть водоизмещение таково, что корабль оказывается в состоянии равновесия на плаву, когда погружена часть λ ($0 < \lambda < 1$) его площади.

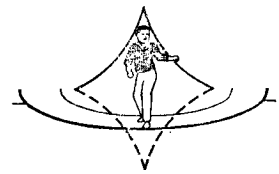


Рис. 10.15

В случае когда $\lambda \leqslant 1/2$, нам достаточно изучить лишь два положения, показанные на рис. 10.18 (a) и (b). При $\lambda > 1/2$ нужно было бы также рассмотреть еще рис. 10.18 (c). Однако этого можно не делать, если заметить, что кривую центров величины (и, значит, также кривую метацентров) для данного отношения $\lambda \geqslant 1/2$ можно получить из такой кривой для λ, замененного на $1-\lambda \leqslant 1/2$, повернув ее на 180° вокруг центра прямоугольника (в данном случае из-за симметрии это ничего не меняет, но последующее рассуждение остается

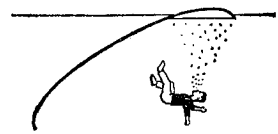


Рис. 10.16

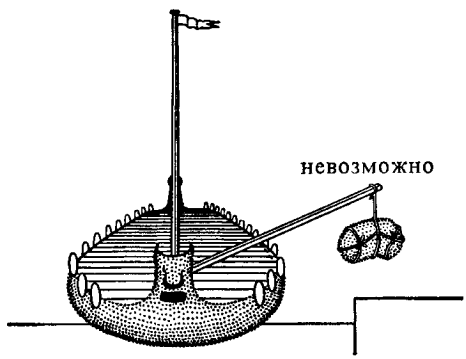


Рис. 10.17

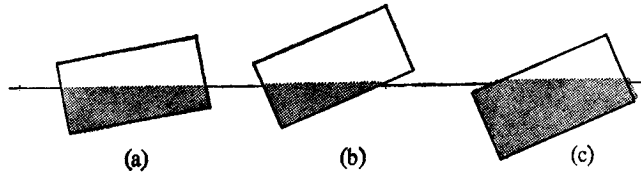


Рис. 10.18

справедливым и для асимметричных форм) и произведя преобразование подобия с коэффициентом $(1-\lambda)/\lambda$. Для доказательства рассмотрим два куска, на которые делит судно линия уровня воды (см. рис. 10.19). Пусть центроиды этих кусков имеют координаты (X_λ, Y_λ) и $(X_{1-\lambda}, Y_{1-\lambda})$ по отношению к центроиду прямоугольника, принятому за начало. Взяв их моменты, получим

$$\lambda X_\lambda = -(1-\lambda) X_{1-\lambda},$$

$$\lambda Y_\lambda = -(1-\lambda) Y_{1-\lambda},$$

так что

$$(X_\lambda, Y_\lambda) = -\frac{1-\lambda}{\lambda}(X_{1-\lambda}, Y_{1-\lambda}).$$

Итак, примем дальше, что $0<\lambda\leqslant 1/2$. Легко проверить, что кривая центров величины состоит из четырех дуг парабол и четырех дуг гипербол (при $\lambda=1/2$ последние исчезают), как это показано на рис. 10.20. Параболы отвечают положению судна, представленному на рис. 10.18(a), а гиперболы — на рис. 10.18(b). В системе координат, указанной на рис. 10.20, с началом в центре прямоугольника, отмеченные двенадцать точек имеют следующие координаты:

A $\left(\frac{4\lambda w}{3}-w,\ \frac{1}{6}\right)$,

B $(\lambda w - w,\ 0)$,

C $\left(\frac{4\lambda w}{3}-w,\ -\frac{1}{6}\right)$,

D $\left(-\frac{w}{3},\ \frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{2}\right)$,

E $\left(0,\ \frac{\lambda-1}{2}\right)$,

F $\left(\frac{w}{3},\ \frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{2}\right)$,

G $\left(w-\frac{4\lambda w}{3},\ -\frac{1}{6}\right)$,

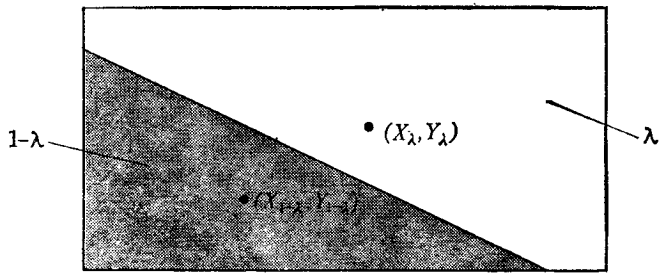
H $(w-\lambda w,\ 0)$,

I $\left(w-\frac{4\lambda w}{3},\ \frac{1}{6}\right)$,

J $\left(\frac{w}{3},\ \frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{3}\right)$,

K $\left(0,\ \frac{1-\lambda}{2}\right)$,

L $\left(-\frac{w}{3},\ \frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{3}\right)$.



Уравнения дуг ABC, CD, DEF (остальные получаются по симметрии, и мы их не выписываем) таковы:

$$\text{ABC:} \quad x - \lambda w + w = 12\lambda w y^2,$$

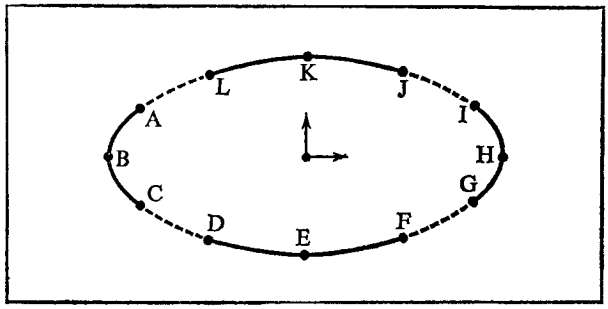
$$\text{CD :} \quad (x+w)\left(y+\frac{1}{2}\right) = \frac{4\lambda w}{9},$$

$$\text{DEF:} \quad y - \frac{\lambda - 1}{2} = \frac{3\lambda}{2w^2}x^2.$$

Остается лишь вычислить кривую метацентров как эволюту этих дуг, что требует разбора отдельных случаев. На параболических дугах радиус кривизны имеет минимумы в точках B, E, H, K, и радиус этот монотонно возрастает при удалении от этих точек вдоль парабол. На гиперболических дугах поведение зависит критическим образом от значений λ и w. Если

$$\lambda \geqslant \frac{1}{4w},$$

то никаких максимумов или минимумов внутри гиперболических дуг не будет, но будет, скажем для дуги CD, макси-



парабола ----------гипербола

Рис. 10.20

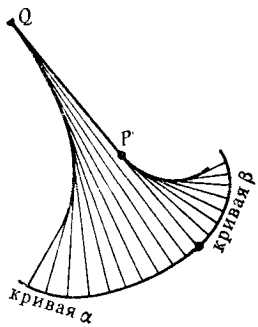


Рис. 10.21

мум в точке C стыка с параболой (и симметрично для других дуг). Если же $\lambda<1/4w$, то появляется новый минимум внутри каждой гиперболической дуги в той точке, где она пересекает одну из прямых $y=\pm x$. Последний случай более сложен, здесь кривая метацентров имеет восемь клювов сборки и восемь клювов двойственной сборки, и мы отсылаем читателя за дальнейшим анализом этого случая к статье Зимана [4.8], ибо наша цель здесь заключается лишь в иллюстрации метода, а не в его исчерпывающем изучении.

В точке (x, y) произвольной кривой $y=y(x)$ центр кривизны имеет координаты (X, Y), задаваемые формулами

$$X=x-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}\Big/\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$Y=y+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\Big/\frac{d^2y}{dx^2},$$

а радиус кривизны равен

$$R=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}\Big/\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Используя эти формулы, можно проверить, что радиус кривизны

убывает от A до B,
возрастает от B до D,
убывает от D до E,
возрастает от E до F

и далее по симметрии. Разрывы в радиусе кривизны привели бы к отрезкам прямых в кривой метацентров, как на рис. 10.21, но в нашем случае, как показывает одно рассуждение Зимана, этого не происходит. Тем не менее кривизна не обязана меняться гладко и „атипичные“ клювы типа параболического острия могут встретиться и при $P=Q$. (С помощью соответствующего „закругления“ углов прямоугольника можно сгладить кривизну и получить в Q клюв настоящей сборки, но это не дает лучшей аппроксимации кривой метацентров. Кроме того, сглаживание нужно проводить осторожно, иначе оно введет новые клювы.) Нам будет удобно и в случае таких точек Q продолжать говорить о сборке. Итак, кривая метацентров имеет четыре клюва сборки и четыре двойственных клюва сборки: первые в центрах кривизны *параболических* дуг для точек D, F, J, I, а вторые — в центрах кривизны для точек B, E, H, K. Счи-

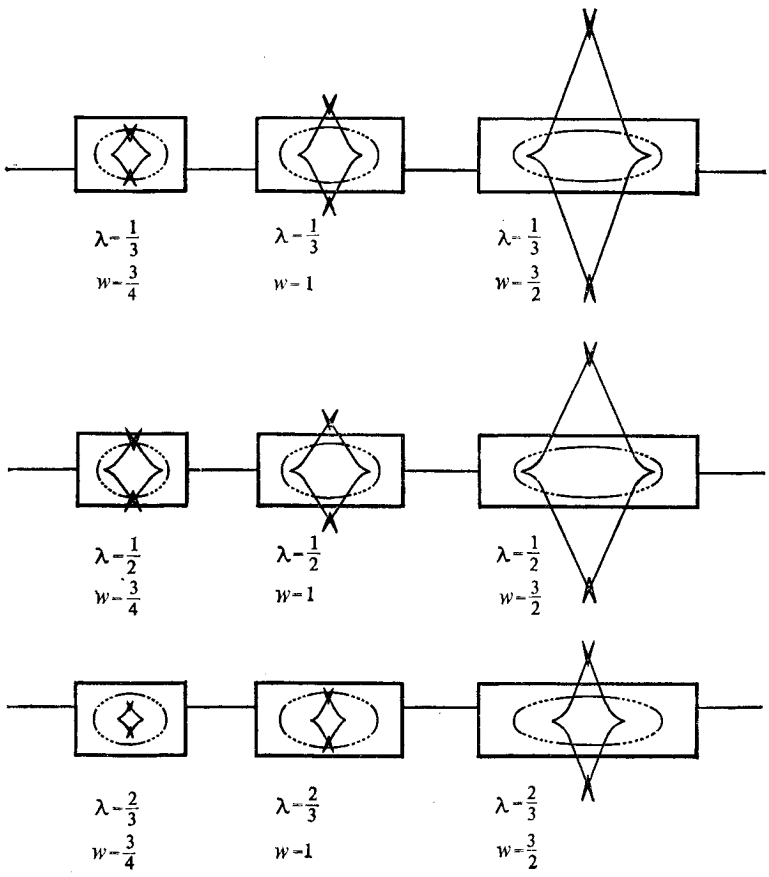


Рис. 10.22

тая по приведенным выше формулам, получаем

в B: $\left(\lambda w - w + \frac{1}{24\lambda w},\ 0\right)$,

в D: $\left(\frac{\lambda^2}{3w},\ \lambda - \frac{1}{2} + \frac{w^2}{3\lambda}\right)$,

в E: $\left(0,\ \frac{\lambda - 1}{2} + \frac{w^2}{3\lambda}\right)$,

остальное по симметрии. На рис. 10.22 показаны соответствующие кривые метацентров для ряда случаев.

Заметим, как двойственный клюв сборки эллиптического судна разбился на клюв сборки и два двойственных клюва сборки, дающие конфигурацию „бабочки“. Такая возмож-

ность известна в литературе, см., например, Робб [50], стр. 134. Это тонкий пример анализа устойчивости. Оценка инфинитезимальной устойчивости по метацентрической высоте в вертикальном положении привела бы к благоприятному заключению, что устойчивость здесь удовлетворительна. На практике метацентрические высоты делают для надежности весьма малыми — порядка полуметра (см. примеры в конце §6). Анализ локальной устойчивости, который показывает, что при $\theta=0$ кривая метацентров имеет стандартную, а не двойственную сборку, тоже привел бы к благоприятному заключению. Однако глобальная геометрия кривой метацентров показывает, что судно обладает дискомфортной чувствительностью к боковым смещениям центра тяжести.

Конечно, лучше было бы провести это обсуждение для реальных форм судов. Но хотя эволюту выпуклой кривой нарисовать несложно (ставя в соответствие стандартные сборки максимумам кривизны, двойственные сборки — минимумам и отмечая соответствующие положения центров кривизны), куда как труднее найти кривую центров величины при данных форме и водоизмещении судна. Эта задача легко разрешается с вычислительной машиной, и такая работа сейчас ведется. Мы же должны будем ограничиться примерами, в которых все вычисления можно выполнить вручную.

9 Трехмерный случай

Рассмотрим теперь судно с вертикальными бортами произвольного горизонтального сечения (рис. 10.23). Соответственно параболической форме кривой центров величины в двумерном случае мы имеем здесь следующий результат: для тех положений судна, в которых вода не заливается за

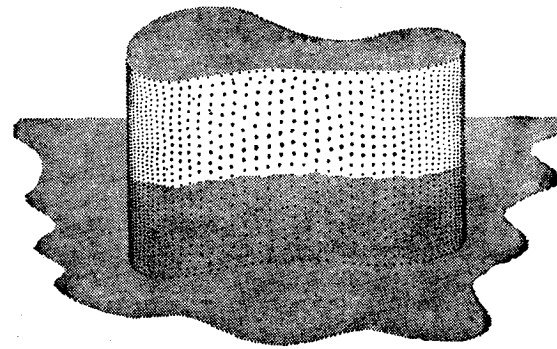


Рис. 10.23

борт, поверхность центров величины может быть *жесткой* заменой координат (а не просто гладкой) приведена к виду

$$\{(x,\ y,\ z)|z=ax^2+by^2\}.$$

Таким образом, мы знаем метацентрическую геометрию вблизи прямого положения *любого* судна с вертикальными бортами, если только нам известны значения a и b; вся сложность, связанная с произвольностью сечения, исчезает.

Для доказательства положим, как и раньше, $t=\operatorname{tg}\theta$, где θ — крен судна в направлении оси y, и аналогично $s=\operatorname{tg}\psi$, где ψ — крен в направлении оси x. Выберем какую-нибудь систему координат, связанную с судном, в которой центроид O сечения S судна плоскостью уровня воды (см. рис. 10.24) имеет координаты (0, 0, 0), а само это сечение лежит в плоскости xy. Мы утверждаем, что объем судна под любой плоскостью

$$P=\{(x,\ y,\ z)|z=sx+ty\}$$

равен первоначальному объему вытесненной воды. Действительно, достаточно заметить, что добавленный объем равняется отнятому. Последнее легко выводится из условия, что момент S относительно прямой

$$L=\{(x,\ y,\ z)|sx+ty=0,\quad z=0\}$$

равен нулю (по соображениям линейности), которое в точности сводится к условию, что L проходит через центроид S, а это имеет место по предположению.

Отсюда следует, что область под плоскостью P — это как раз область, погружающаяся в воду, когда судно находится в положении вертикального равновесия, при котором эта плоскость становится горизонтальной. Значит, как и в двумерном случае на рис. 10.4, судно можно считать вра-

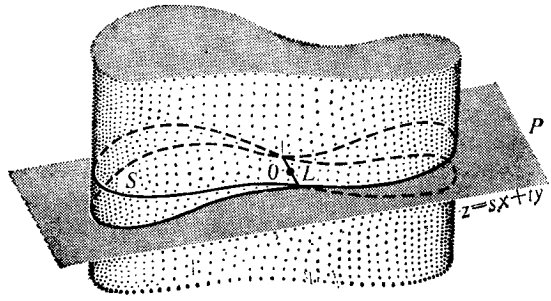


Рис. 10.24

щающимся вокруг некоторой точки на уровне поверхности воды, при условии что судно не черпает воду.

Беря теперь моменты относительно плоскости yz, мы находим, что изменение координаты x центра величины пропорционально

$$\int_S x\,(sx+ty)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = s\int_S x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\int_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Аналогично координата y сдвигается пропорционально

$$s\int_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\int_S y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

а координата z — пропорционально

$$\int_S (sx+ty)\cdot\frac{1}{2}(sx+ty)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}s^2\int_S x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + st\int_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}t^2\int_S y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Значит, если обозначить координаты центра величины через (X, Y, Z), то X и Y зависят от (s, t) в точности линейно и притом невырожденно, в то время как Z зависит от них квадратично, поскольку все интегралы являются константами. Таким образом, поверхность центров величины представляет собой график некоторой квадратичной формы, необходимо положительно-определенной (из-за выпуклости); поэтому поворотом координат эту форму можно диагонализовать и получить уравнение

$$Z = aX^2 + bY^2,$$

как и требовалось.

(Оси, в которых уравнение принимает такой вид,— это на самом деле главные оси инерции (оси эллипса инерции) сечения S; значения a и b также получаются из этого эллипса.)

Итак, с точностью до масштабного коэффициента (зависящего от веса судна и от его размеров) геометрия поверхности метацентров судна с вертикальными бортами зависит лишь от отношения a/b, которое выводится из его сечения. Рисунок 10.25(а) показывает ее вид (мы смотрим немного снизу) для отношения a/b, несколько большего единицы, причем ось x идет вдоль большой оси эллипса инерции. Для больших отношений a/b, т. е. для судов, длина и ширина которых сильно отличаются друг от друга, сложная часть

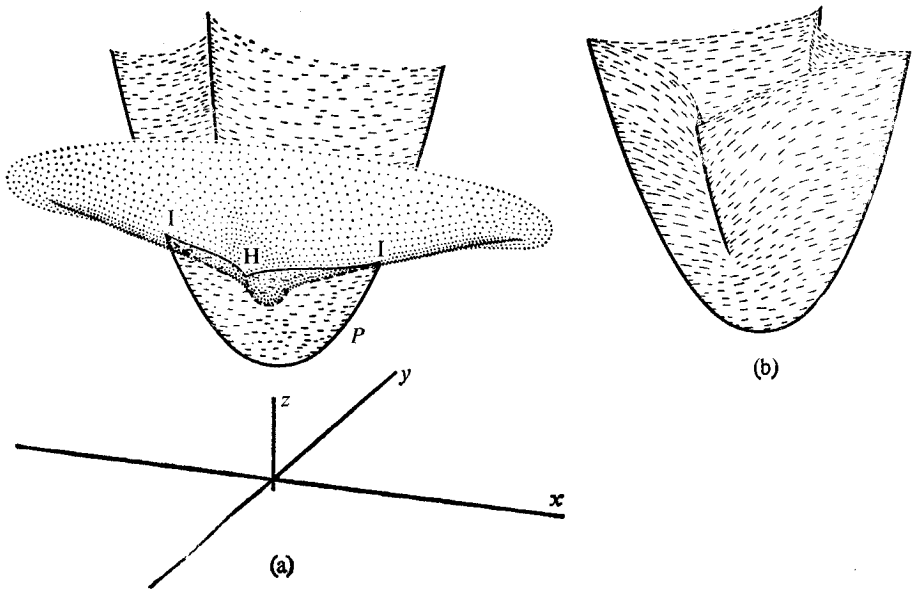


Рис. 10.25

поверхности практически будет вне досягаемости центра тяжести. Лишь расположенная над килем парабола P клювов сборки будет тогда важной, и обусловливаемое ею статическое поведение, как можно видеть, будет близко соответствовать нашему предыдущему двумерному анализу (здесь следует учесть, что указанная парабола при больших a/b будет очень „плоской"). Однако в некоторых практически встречающихся случаях (см., например, следующий параграф) отношение a/b не слишком отличается от единицы.

Как видно из рис. 10.25(a), поверхность метацентров состоит из двух поверхностей. В двух точках I острое ребро (линия сборок) одной из них пересекает другую, а в точке H (и в соответствующей точке с другой стороны) мы имеем гиперболическую омбилику, где обе поверхности пересекаются так, что линия сборок переходит с одной из них на другую (см. § 7 предыдущей главы). Читателю будет полезным упражнением связать различные максимумы, минимумы и сёдла в этих положениях для центра тяжести с физическими положениями судна; такие детали слишком загромоздили бы наш рисунок. Заметим, что лишь во внутренней области, отдельно показанной на рис. 10.25(b) (смотрим вуть сверху), мы имеем более чем один минимум.

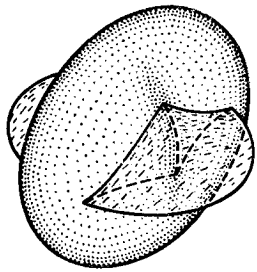


Рис. 10.26

Аналогичный анализ (при четырех гиперболо-омбилических точках) можно провести и для эллипсоидального судна; как и в случае эллипса, поверхность центров величины оказывается подобным эллипсоидом, а поверхность метацентров будет его *фокальной поверхностью* (рис. 10.26), изученной еще Кэли [51]. Заново это исследование на языке теории катастроф проведено Бэнкоффом и Страуссом [51a].

10 Плавучие буровые платформы

Самый распространенный тип плавающего сооружения, действительно имеющего со всех сторон вертикальные борта,— это плавучие буровые платформы (рис. 10.27). Обычно они бывают прикреплены к морскому дну в определенном месте, но во время транспортировки плавают. Часто их строят квадратными, так что $a/b=1$. Эта симметрия передается поверхности центров величины; она становится параболоидом вращения, имеющим круговую симметрию. Следовательно, можно было бы подумать, что поверхность метацентров получается вращением кривой метацентров для двумерного случая (рис. 10.28), так что геометрия для точно квадратного судна с вертикальными бортами отличается замечательной простотой.

С точки зрения теории катастроф эта простота совершенно обманчива. В подходящих координатах функция энергии принимает вид

$$(x^2+y^2)^2.$$

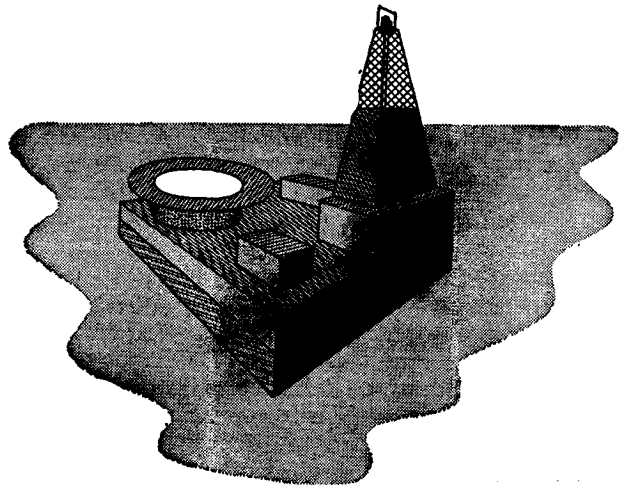


Рис. 10.27

Этот многочлен *не* является конечно-определенным (как устанавливается непосредственным применением правил гл. 8) и потому имеет бесконечную коразмерность. По этой причине здесь нельзя воспользоваться методом универсальных деформаций, для того чтобы исследовать влияние малых несовершенств системы.

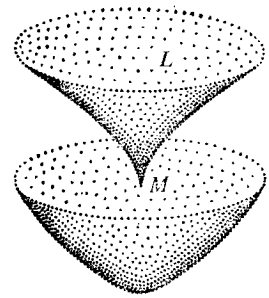


Рис. 10.28

Например, та теорема, что максимальное число критических точек для почти всякой близкой функции превышает коразмерность на единицу, в нашем случае означает, что возможно *любое* число критических точек. Это можно увидеть и прямо: функция $(x^2+y^2)^2-\varepsilon(x^2+y^2)$ имеет окружающую начало кольцевую долину вырожденных критических точек (типа „жёлоба", см. §1 гл. 4), как показано на рис. 10.29; а покрыв ее мелкой рябью, мы можем получить сколь угодно большое число невырожденных минимумов и сёдел. Картина одна и та же для всех положений центра тяжести судна G прямо над острием M прокрученного клюва, и поэтому истинное бифуркационное множество таково, как на рис. 10.30, а не на рис. 10.28. Одна из поверхностей на рис. 10.25(b) сжалась в луч N вырожденных точек. Небольшим „шевелением" можно получить произвольное число омбилических точек вблизи M и каспоидных катастроф вблизи N. (Подобная вырожденность имеет место и для машины, получаемой „вращением" машины Зимана,— „изобретение", постоянно повторяемое теми, кто ищет встречи с высшими катастрофами.) Физически это означает, что по внешней видимости простая геометрия „идеального" судна, с единственным минимумом энергии для каждого положения G не точно на N, дико неустойчива. Если G лежит *близко* к N, то малые возмущения от ветра и волн могут накренить и завертеть покачнувшееся судно самым бедственным образом.

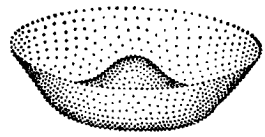


Рис. 10.29

Это первый пример *структурно неустойчивой* метацентрической геометрии, который нам встретился; все другие приведенные выше примеры описываются при помощи нашего списка элементарных катастроф и потому ipso facto [1] структурно устойчивы. С другой стороны, чувствительность к несовершенствам, *в топологическом смысле* бесконечная, в некотором смысле конечна *количественно*. Никакое малое несовершенство не может привести к тому, чтобы дно той области, где G дает вырожденные положения равновесия, опустилось или поднялось на неожиданно большую величину. (Хотя оно и может в громадной степени увеличить гео-

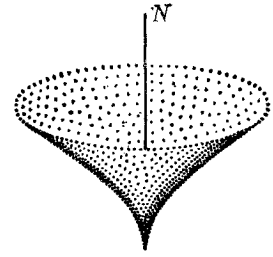


Рис. 10.30

[1] В силу самого факта (лат.).— *Прим. ред.*

метрическую сложность L.) Мы имеем здесь ситуацию, когда качественная теория бесконечно сложна, в то время как ответы, разыскиваемые количественной теорией (скажем, возможные флюктуации метацентрической высоты), состоят из нескольких чисел. Значит, в этом случае естественные количественные вопросы в действительности грубее, чем качественные. Обращая знаменитое высказывание Резерфорда, мы можем со столь же (не)достаточным основанием сказать: „Количественное — это просто плохое качественное".

Отыскание этих количеств, строго говоря, требует огрубления отношения эквивалентности („совпадение с точностью до диффеоморфизма"), центрального в элементарной теории катастроф. Представляется, что при подходящем ослаблении этого отношения может оказаться возможным описание бесконечномерной области возможных несовершенств с помощью понятий, ничуть не более патологических, чем банахово пространство; однако это пока не совсем ясно. Даже если бы это и удалось выполнить, соответствующие математические построения лежали бы вне рамок этой книги.

11 Сравнение с общепринятым подходом

Было бы абсурдным ожидать в наше время фундаментально новой информации относительно статического равновесия судов. Относящиеся сюда физические принципы известны со времен Архимеда, который изучил устойчивость параболоидов вращения в своей работе по гидростатике („О плавающих телах", книга 2), и много умных людей занимались их следствиями. Данное выше изложение лишь изменяет расстановку акцентов.

Например, такие свойства остойчивости судна, как те, что представлены на рис. 10.22, не были бы упущены компетентным судостроителем. Он (а) вычертил (а) бы кривую зависимости плеча восстанавливающего момента от угла θ (кривую статической остойчивости) (рис. 10.31), которая показала бы, что корабль не может, не опрокинувшись, накрениться больше чем на угол D. Низкое значение максимума этой кривой сказала бы ему (ей) о чувствительности судна к вращающим моментам, например к моментам, производимым смещенным от центра грузом. Все же, по крайней мере для неопытного глаза, рис. 10.15 яснее указывает, какие направления перемещения центра тяжести являются наиболее критическими.

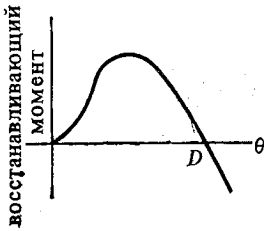


Рис. 10.31

Также и различие между стандартной и двойственной сборками хорошо осознано. В том же самом руководстве („Принципы судостроения", стр. 96) мы читаем:

„Направление кривизны кривой статической остойчивости вблизи начала определяет, будет ли плечо восстанавливающего момента положительным, когда метацентрическая высота становится нулевой или малой отрицательной. Две приведенные на рис. ⟨10.32⟩ кривые статической остойчивости относятся к двум судам с одинаковой метацентрической высотой но различной формы. На рис. ⟨10.32 (a)⟩, типичном для грузовых и пассажирских судов, эта кривая вогнута вверх, а на рис. ⟨10.32 (b)⟩ — вниз. Допустим, что центр тяжести каждого судна смещен несколько вверх на одно и то же расстояние, так что метацентрическая высота становится в обоих случаях малой отрицательной. Для любого данного угла крена плечо восстанавливающего момента уменьшится в обоих случаях на одну и ту же величину, поскольку это уменьшение пропорционально вертикальному смещению центра тяжести и синусу угла крена. Имеется важное различие между получающимися кривыми статической остойчивости; в случае (a) судно накренится на небольшой угол, после которого значения плеча восстанавливающего момента уже положительны, а в случае (b) судно опрокинется. Отрицательность метацентрической высоты в случае (a) можно распознать по поведению судна — оно накренится без видимого кренящего момента и останется в покое при малом угле крена либо на правый борт, либо на левый, но не прямо. Это состояние с отрицательной метацентрической высотой может развиться постепенно в результате регулярного расходования или разгрузки материалов, при освобождении большой площади или при поверхностном обледенении. В случаях когда диаграмма статической остойчивости имеет тип, представленный на рис. ⟨10.32 (a)⟩, и установлена отрицательность метацентрической высоты, это служит предупреждением об опасности. Для кривой типа показанной на рис. ⟨10.32 (b)⟩ единственным предупреждением до опрокидывания могло бы быть удлинение периода качки, которое, однако, не будет достаточно явным при спокойной воде".

Точка зрения теории катастроф мало что может к этому добавить, разве что, пожалуй, особое подчеркивание резкой чувствительности к асимметрии, связанной с поведением по типу двойственной сборки в случае (b), как на рис. 10.15. Даже когда метацентрическая высота все еще положитель-

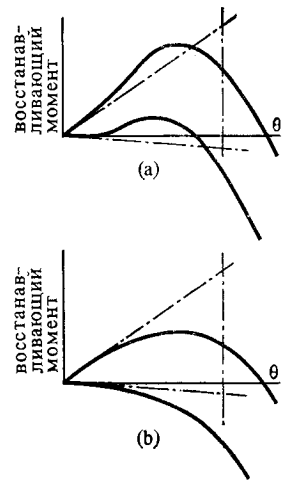


Рис. 10.32

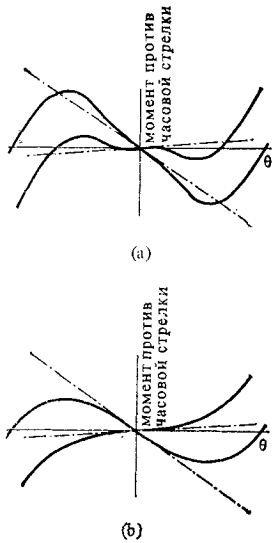


Рис. 10.33

на, судя по периоду малой качки, и вроде бы можно быть спокойным, небольшое перемещение груза может иметь роковые последствия.

До сих пор мы использовали в нашем обсуждении геометрическое описание действующих сил, теперь подходящий момент более тесно увязать это описание с языком, принятым в остальной части книги. Если потенциальную энергию судна в положении вертикального равновесия при угле θ обозначить через $f(\theta)$, то действующий на судно момент равен $-df/d\theta$. Перерисовывая предыдущие графики плеча восстанавливающего момента как графика „момента против часовой стрелки" как для положительных, так и для отрицательных углов крена θ, мы получим рис. 10.33. Отметим, что ввиду симметрии судна эти графики имеют в начале точку перегиба и поэтому их выпуклость или вогнутость — эффект более высокого порядка, чем те, которые можно определить, вычисляя кривизну. В игру вступают члены третьего порядка.

Графически интегрируя функции, представленные на рис. 10.33, и меняя знак, мы получим (с точностью до константы) графики энергии, показанные на рис. 10.34. Мы видим вблизи нуля знакомое изменение формы потенциала, отвечающее движению управляющей точки вдоль центральной оси (a) стандартной сборки и (b) двойственной сборки. Положительный или отрицательный квадратичный член энергии для случая, когда G совпадает с метацентром и квадратичный член исчезает, что дает деформацию по типу стандартной или двойственной сборки, при дифференцировании приводит к положительному или отрицательному кубическому члену, чем и определяется направление вогнутости на диаграммах статической остойчивости.

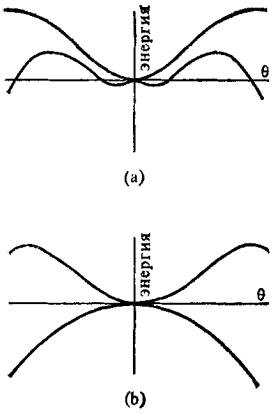


Рис. 10.34

В чем же тогда состоят преимущества использования здесь языка теории катастроф? (Если оставить в стороне чисто математическое удовлетворение от понимания того, что мы созерцаем геометрические явления, которые, согласно рассуждениям гл. 7, близки к универсальным и могут всплыть в каком-нибудь другом контексте.)

Во-первых, в ясности понятий и легкости изложения. Ясность, конечно, дело субъективное, и никакой судостроитель, потративший годы на приобретение основательных количественных и интуитивных знаний о своем предмете, не будет ослеплен переиначиванием изложения элементарных фактов. Но никто не родится с годами опыта, и факты, хорошо известные каждому эксперту, не так легко передаются каждому студенту, даже и успешно сдающему экза-

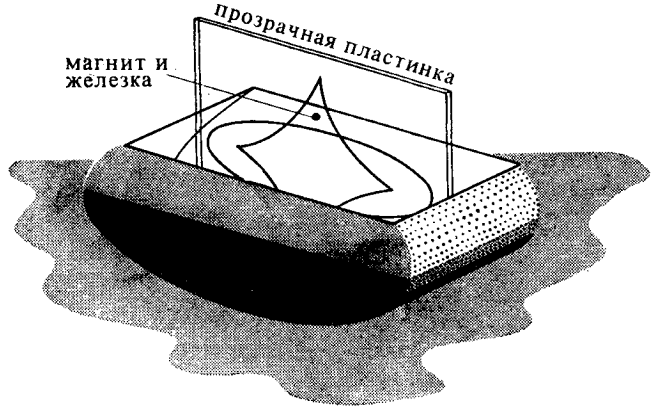


Рис. 10.35. *Эллиптическая демонстрационная лодка из легкого пластика. Центр тяжести близок к положению пары магнит — железка, перемещаемой по центральной плоскости, на которой нанесены кривая центров величины и кривая метацентров.*

мены. В третий и последний раз процитируем „Принципы судостроения" (стр. 98):

„Зачастую остойчивость ошибочно оценивают лишь на основе одной только метацентрической высоты, без учета преимуществ, предоставляемых всей диаграммой статической остойчивости. Это эквивалентно допущению, что диаграмма статической остойчивости имеет вид синусоиды, так как предполагается, что плечо восстанавливающего момента равно $GM \sin \theta$. Для судов с высоким бортом, имеющих тот тип формы, который приводит к кривой с вогнутостью вверх вблизи начала, так делать безопасно, хотя это и может привести к недооценке остойчивости судна. Что же касается судов с низким бортом и тем типом формы, которому отвечает кривая, вогнутая вблизи начала вниз, то для них такая практика расчета уже опасна, поскольку не обеспечивает надлежащего интервала положительной остойчивости или надлежащей остаточной динамической остойчивости."

Эта опасность проистекает не из чего другого, как из того, что стандартную и двойственную сборки отождествляют с неподвижным метацентром. Помощь консультанта по геометрии катастроф и привлечение наглядных учебных пособий вроде показанного на рис. 10.35 могут способствовать выпуску более „безопасных" конструкторов судов.

Преподавание на языке теории катастроф (возможно, с иллюстрацией на моделях-качалках кривых центров величины для судов различных форм и водоизмещений) могло бы оказаться эффективным методом обучения даже для сту-

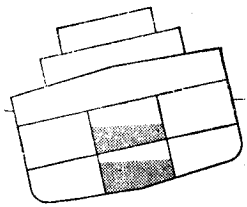


Рис. 10.36

дентов, незнакомых предварительно с этой теорией. Такое компактное и наглядное описание ключевых фактов теории статического равновесия судов, конечно, будет еще более эффективным для тех, кто уже раньше познакомился с этим языком. При большом числе областей, где теория катастроф может быть применена, и начинающемся сейчас взрывном росте ее приложений такое предварительное знакомство должно становиться все более вероятным.

Во-вторых, мы не касались в нашем элементарном изложении эффектов, связанных с жидким грузом или топливом (рис. 10.36), которые делают подвижным общий центр тяжести, равно как не касались всей темы *динамической* устойчивости. Судно на море находится в активном окружении, с которым оно взаимодействует весьма сложным образом. Возникающие здесь задачи в отличие от случая статической остойчивости не допускают точных решений. Не только, например, сложно учесть одновременно инерцию корабля и расталкиваемой им воды, но быстро меняющиеся силы ветра и волн не могут быть учтены сколько-нибудь полно. (Мы обсудим несколько таких проблем в конце гл. 12.) Остается далеко не понятным даже механизм того явления, что волны на мелкой воде гораздо сильнее действуют на судно, чем на глубокой. Без теоретического понимания имеющейся здесь трудной динамики формальные вычисления, основанные на произвольно делаемых предположениях относительно поведения шторма, могут оказаться столь же опасными, как и статические ошибки типа упомянутых выше. Согласно „Реестру Ллойда", в 1975 г. 14 судов перевернулось, 12 перевернулось после перемещения груза, а 130 исчезло по неизвестным причинам. Очевидно, не всё обстоит так, как должно быть.

Средство, используемое для исследования качественных вопросов (типа „имеется ли решение с переворачиванием?"), относящееся к сложным дифференциальным уравнениям, для которых невозможно получить точных численных данных,— это теория динамических систем. Она тесно связана с теорией катастроф; фактически Том, влияние которого и здесь было ведущим [1], не различает в своей книге [1] эти теории. Однако изучение теории динамических систем требует больше топологии, чем дается в этой книге. (Хорошее вводное изложение имеется в книге Чиллингворта [52].) Топологический анализ в духе намеченного нами выше является необходимым предварительным шагом к примене-

[1] Это, пожалуй, преувеличение.— *Прим. перев.*

нию таких методов, поскольку задача динамики включает в себя как частный случай задачу статики. Работа Зимана, которая указывает на некоторые тонкие эффекты, касающиеся влияния геометрии судов на их динамику, находится еще на слишком ранней стадии, чтобы о ней можно было говорить здесь (хотя ко времени выхода этой книги будет уже больше информации). Необходимо еще предпринять много усилий (не в последнюю очередь по установлению связей между морскими инженерами и математиками), но именно в этом направлении следует ожидать от теории катастроф результатов, которые будут чем-то бóльшим, чем интересная переформулировка известных фактов об остойчивости кораблей.

11 ГЕОМЕТРИЯ ЖИДКОСТИ

Линии тока движущейся жидкости образуют семейства кривых, которые при выполнении определенных физических предположений могут быть рассматриваемы как линии уровня некоторой вещественной функции. Точки торможения потока (точки, где скорость течения равна нулю) отвечают критическим точкам этой функции. Структурная неустойчивость вырожденных критических точек ведет к неустойчивости топологической картины линий тока; правила теории катастроф, относящиеся к деформациям, позволяют провести анализ таких неустойчивостей.

Вот в общем и целом предмет настоящей главы. При смешивании физики и математики нужна известная осторожность, и мы начнем с рассмотрения математических моделей течения жидкости. В дальнейшем нас будут в основном интересовать работа Берри и Мэкли [53] о „шестивалковой мельнице" и вытекающие из нее практические следствия, в частности вопрос о влиянии растворенных полимерных молекул на характер течения жидкости.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

1 Что мы описываем

Мы не можем излагать здесь общий аппарат теории движения жидкости: и места нет, и пришлось бы прибегнуть к теории дифференциальных уравнений в большей степени, чем мы это считали возможным в остальных частях книги. Наша цель — рассказать об одном обворожительном приложении теории катастроф на уровне, доступном читателю, не имеющему специальной подготовки по механике жидкостей. Однако мы надеемся, что и те, кто имеет представление о предмете, все же найдут наш рассказ достаточно интересным, так как он ведется с необычной точки зрения. Детальная разработка темы использования теории катастроф в этих вопросах потребовала бы, конечно, основательного изуче-

ния динамики сплошных сред, а не краткого очерка, даваемого ниже.

Рассмотрим движение сплошной среды в двух измерениях, или, точнее, движение, которое можно рассматривать лишь в двух измерениях, так как в третьем ничего не меняется (рис. 11.1). Это приближение используется на практике с замечательным успехом, так что изучение двумерных течений оказывается (например) важным при обучении авиаконструкторов. Чрезвычайно маловероятно, чтобы ситуация, изображенная на рис. 11.1 (b), могла быть *в точности* истинной, поскольку целая прямая точек покоя — вещь структурно неустойчивая; однако на самом деле двумерные течения регулярно реализуются в эксперименте с той точностью, какая отвечает описанию течения при помощи поля векторов скорости.

Это последнее описание предполагает, что скорость движущейся среды в каждой точке x может быть задана вектором $v(x)$, обычно гладко меняющимся с x. Строго говоря, это чепуха. При достаточно большом увеличении мы могли бы увидеть, как молекулы, отскакивая друг от друга, движутся с самыми разными скоростями через пустое пространство, в точках которого вообще нет смысла говорить о векторах скорости. При еще большем увеличении мы бы встретились с фалангами электронных облаков, квантовыми полями и т. п.; описания здесь трудны, а решения невозможны. Понятие „вектора скорости в данной точке" является, таким образом, лишь приближением, хорошо укладывающимся в рамки тех измерений, которые мы обычно производим, с усреднением по областям, достаточно большим, чтобы исчезли осложнения микрокосмического. То что усредненное поведение микросистем каким-то чудом в точности описывается уравнениями механики сплошных сред, составляет привычный догмат веры, но еще никто не доказал этого для *реалистичной* модели тонкой структуры; лучшее, что имеется, это доказательства для идеализированных моделей разреженного одноатомного газа.

Дифференциальное уравнение, приравнивающее дифференциал в точке x некоему числу p, говорит нам, что чем ближе мы будем рассматривать точку x, тем лучше p опишет то, что мы увидим. Для уравнений сплошной среды известно, что на самом деле это не так. Некоторые физики думают, что это не так и для фундаментальных уравнений материи в пространстве-времени. Но даже если бы они *знали*, что это неверно, в большинстве случаев они продолжали бы пользоваться дифференциальными уравнениями, дифференцируемыми функциями и т. д. Дело в том, что вся фи-

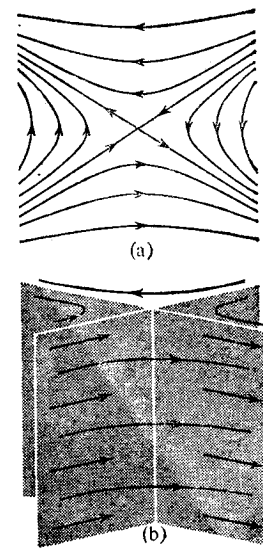


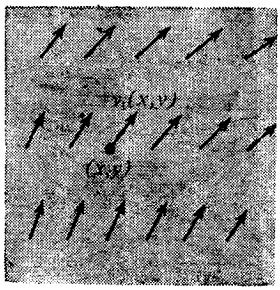
Рис. 11.1. (a) *Двумерное представление течения;* (b) *трехмерное фактическое (?) течение.*

зика состоит в математическом моделировании поведения материи *с использованием любой математики, которая наилучшим образом подходит для явлений рассматриваемого масштаба.* То что на следующем структурном уровне модель оказывается уже ложной, не имеет никакого значения, ни практически, ни исторически, ни философски. Лишь неверные предсказания относительно явлений того же самого уровня (или иногда предшествующего) влекут за собой научные революции.

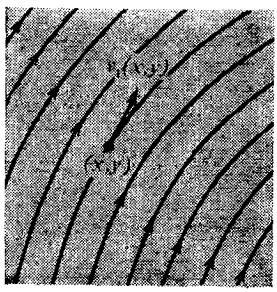
Предсказания, истинные для всей шкалы явлений — от малых масштабов до крупных,— составляют главную цель физики, однако существенно макроскопические теории вроде механики жидкостей не становятся от этого менее научными. Даже если некоторый уровень окажется „последним" и даже если мы до него дойдем, мы не сможем доказать, что он последний, коль скоро нас не обяжут признать это скрижали или что-нибудь подобное. Но наука имеет дело с *эффективным* описанием мира и — покуда она остается наукой — оставляет вопросы „последней истины" тем, для кого главным методом спора является сжигание неверующих.

Поэтому, как и всюду в этой книге, мы будем в настоящей главе иметь дело с „дифференциальным" описанием действительности. Степень его применимости в каждом отдельном случае — отчасти дело эксперимента. Ее нельзя определить, исходя исключительно из соотношения с теориями более тонкого структурного уровня, даже в тех случаях, когда эти теории, как для газа, хорошо развиты; еще в меньшей степени это возможно, когда речь идет о живых клетках.

В частности, мы обсуждаем течение жидкости в этой главе лишь в той степени, в которой оно может быть моделировано в любой момент двумерным полем скоростей. Это общепринятый и полезный подход, и он приведет нас здесь к одному приложению теории катастроф с очень изящными экспериментальными результатами.



(a)



(b)

Рис. 11.2

2 Функции тока

Для данного двумерного векторного поля v_t (показанного на рис. 11.2(a)), описывающего течение в некоторый момент времени t, мы можем, если $v_t(x, y)$ гладко меняется с (x, y), „соединить стрелки", как на рис. 11.2(b). Точнее, мы можем заполнить представляющую для нас интерес область U параметризованными кривыми $\mathbb{R} \to U$, называемыми *линиями тока*, так, что для всякой точки (x, y) касательным вектором в этой точке к проходящей через нее кривой будет как раз

вектор $v_t(x, y)$. (Доказательство этого факта можно найти, например, у Додсона и Постона [5] [1].) Линии тока совпадают с теми траекториями, которые описывают при своем движении частицы сплошной среды, только если течение *стационарно*, т. е. для каждой точки (x, y) вектор $v_t(x, y)$ не зависит от t. Иначе линии тока смещаются со временем, и частица, которая перемещается по касательной к различным линиям тока в различные моменты, вообще говоря не будет следовать ни по одной из них. Заметим, что стационарность не требует, чтобы частицы двигались с постоянной скоростью; они могут ускоряться или замедляться, двигаясь вдоль изогнутых кривых, но вся картина стационарного течения в целом не меняется со временем.

Имеется весьма удобный способ представления стационарного течения в данной области U. Выберем одну линию тока C за начало отсчета. Вместе с любой другой линией, скажем линией C' на рис. 11.3, она образует, так сказать, канал, по которому движется сплошная среда. Допустим, что движущееся вещество *сохраняется*, т. е. нет источников и стоков; тогда одно и то же его количество должно протекать как через линию A, так и через линию B, ибо иначе где-то между ними имело бы место постоянное возникновение или исчезновение вещества. (Ни C, ни C' не пересекаются движущимися частицами по определению этих кривых.) Значит, можно говорить о вполне определенном „количестве", текущем между C и C', не зависящем от того, где мы производим измерение. Мы приписываем этому количеству положительный или отрицательный знак в соответствии с тем, будет ли наблюдатель в точке P, смотрящий в направлении движения вдоль C, находиться на правом или левом берегу канала.

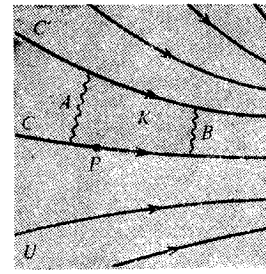


Рис. 11.3

Будем использовать это количество в качестве метки $f(C')$ для кривой C'. Если определить теперь *функцию тока*

$$\varphi\colon U \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(x, y) = f \text{ (линия тока, проходящая через } (x, y)),$$

то линии тока станут горизонталями (линиями уровня) этой функции φ. Далее, беря все более и более узкие каналы, содержащие данную точку (x, y) (рис. 11.4), легко усмотреть, что наклон графика функции φ в этой точке, равный пределу отношения

$$\frac{\text{разность высот горизонталей}}{\text{расстояние в плоскости между горизонталями}}$$

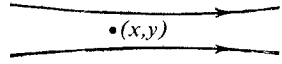


Рис. 11.4

[1] Или в любом учебнике по дифференциальным уравнениям,— *Прим. ред.*

при стремлении знаменателя к нулю, есть не что иное, как предел в (x, y) отношения

$$\frac{\text{количество вещества, протекающее через канал}}{\text{ширина канала}}$$

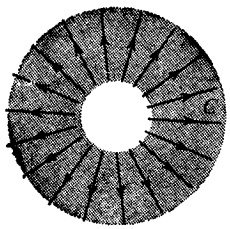
при стремлении этой ширины к нулю. Ясно, что этот предел должен быть равен

$$\rho(x, y)v(x, y),$$

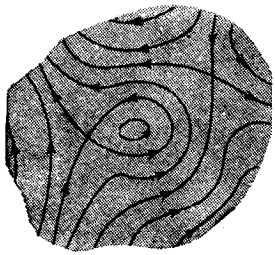
где $\rho(x, y)$ — плотность среды в точке (x, y) — одна и та же во времени. Таким образом, мы сможем узнать о течении всё по функции φ, только если дополнительно известно, как связаны между собой v и ρ. Но в случае когда изменением ρ можно пренебречь, как это часто и бывает (вода менее сжимаема, чем сталь), подбором единиц можно сделать $\rho=1$, и тогда v сразу получается из φ. В координатах:

$$v(x, y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right).$$

Формальное доказательство всего этого провести не сложно, но при формальном подходе низкого уровня оно недостаточно интуитивно. Вводить же математические средства высокого уровня (где площадь, помноженная при необходимости на ρ, выступает как симплектическая структура) у нас нет места, и читателю следует самому заглянуть в учебники по механике сплошных сред.



(a)



(b)

Рис. 11.5

Для течения, показанного на рис. 11.5(a), функцию φ нельзя построить глобально во всей кольцевой области. Тем не менее можно показать, что для любого гладко меняющегося поля v в топологически простой области (скажем, в круге) функция φ существует (и единственна с точностью до константы), даже если само течение выглядит достаточно сложно, как на рис. 11.5(b).

Рассуждение, приведшее нас к определению функции φ, не проходит, когда течение не стационарно, так как тогда жидкость могла бы временно накапливаться в области K между A, B, C и C'. Но это (в случае сохранения жидкости) повлекло бы за собой увеличение плотности где-то в K. Если изменения в плотности незначительны (как это обычно бывает для жидкостей, но редко для газов), рассуждение сохраняет свою силу. Это означает, что даже и *не*стационарное двумерное *несжимаемое* течение можно трактовать как задаваемое в каждый момент времени некоторой функцией. (Под *несжимаемым течением* мы будем понимать любое поле скоростей, задающее течение, которое сохраняет площадь (или объем). Здесь не исключаются и течения, которые по

тем или иным причинам не могут быть физически реализованы.) Поскольку жидкости сжимаемы гораздо меньше газов, а мы хотим сосредоточиться в дальнейшем именно на несжимаемых течениях, мы, начиная с этого места, будем говорить в основном о *жидкостях*, а не о более общих сплошных средах.

Для данной топологически простой области U можно избавиться от произвольной константы, выбрав какую-нибудь точку, в которой все функции тока должны иметь одно и то же предписанное значение (например, 0). Тогда любая функция φ на U дает нам несжимаемое течение

$$v = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

и для каждого несжимаемого течения мы имеем единственную функцию тока. Естественные понятия „малого возмущения" для обоих случаев согласованны, и две функции тока эквивалентны относительно некоторой замены координат, если и только если эквивалентны соответствующие течения (притом относительно *той же самой* замены). Тем самым теория бифуркаций гладких несжимаемых двумерных течений связывается с теорией бифуркаций вещественных гладких функций от двух переменных, составляющей часть теории катастроф. Между прочим, мы пришли к этому совершенно классическим путем построения модельных приближений к „реальному миру".

Описываемое ниже приложение теории катастроф, впрочем, довольно необычно в следующем отношении. Критические точки функции φ, в которых обращается в нуль ее градиент, с различными имеющимися тут возможностями (максимум, минимум, седло, обезьянье седло и т. д.),— это места, где скорость течения равна нулю (так называемые *точки торможения*). „Поведение", наблюдаемое нами здесь,— это не поведение системы, которая меняется с точкой (x, y), максимизируя или минимизируя определенные функции. Дело обстоит даже и не как в оптике, где речь идет о яркости, связанной с критическими или близкими к ним точками, будь то максимумы, сёдла или вырожденные точки, так что мы наблюдаем сразу всё многообразие катастрофы, а не одни экстремумы. *Здесь мы наблюдаем всю, в целом, топологическую форму самой функции тока*, включая такие ее черты, как точки торможения, но также и то, как течение вьется между ними. Интерпретировать теорию катастроф исключительно в терминах структуры критических точек было бы близоруко.

3 Примеры течений

Мы уже изучали (в гл. 3) линии уровня ряда функций и тем самым имеем некоторые типичные картины течений токов. Остается лишь нанести на них стрелки. На рис. 11.6 (a) и (b) жидкость вращается как твердое тело. Скорость в точке (x, y) на рис. 11.6 (b) такая:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2),\ -\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\right)=(2y,\ -2x).$$

Таким образом, скорость пропорциональна радиусу, как у колеса, вращающегося вокруг оси. Это дает описание, например, жидкости во вращающейся бутылке, покоящейся относительно бутылки. (Любая жидкость хоть с какой-нибудь вязкостью будет в такой бутылке стремиться к этой ситуации, так как вязкость вызывает затухание относительного движения.) Здесь мы имеем пример *чистого вращения*. На рис. 11.6 (c) — (f) принимается, что на оси x все векторы имеют координаты $(0, 2x)$, и тогда направления остальных векторов будут такими, как показано на картинке, по непрерывности. На рис. 11.6 (d) представлен *простой сдвиг*. Течение на рис. 11.6 (f) называется *чистым сдвигом* по причинам, которые мы поясним чуть погодя.

4 Завихренность

Локальное вращение, или *завихренность*, $\omega(x, y)$ двумерного течения жидкости v в точке (x, y) можно определить так. Возьмем малую петлю C вокруг точки (x, y), проинтегрируем вдоль C в направлении против часовой стрелки касательную компоненту v и поделим интеграл на заключенную внутри C площадь для „усреднения". (На рис. 11.7 результат будет положительным, так как скорости внизу больше.) Затем надо перейти к пределу, стягивая C к точке (x, y), и разделить его на 2 (по соглашению, принятому многими,

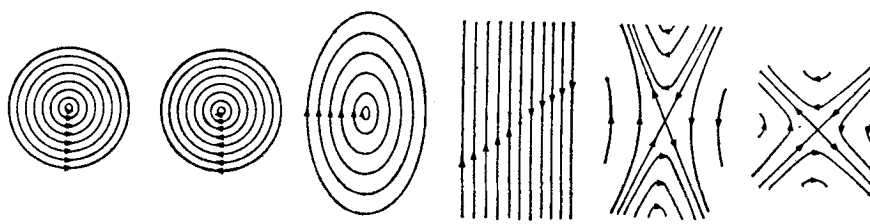


Рис. 11.6

хотя и не всеми, физиками). Здесь нужно еще потрудиться, доказывая независимость предела от формы кривой C, но мы не будем этим заниматься. Беря окружности с центром в начале на рис. 11.6(a) и (b), мы легко находим

$$\omega(0,\ 0) = \pm\frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r\cdot 2r}{\pi r^2} = \pm 2,$$

где знак „+“ отвечает рис. 11.6(a), а „—“ рис. 11.6(b). Чуть больше усилий требуется, чтобы показать, что в обоих этих случаях $\omega(x, y)$ в действительности *постоянна* и равняется ± 2 во всех точках (x, y). Подобным же образом в 11.6(d) завихренность всюду равна -1; здесь удобнее брать квадратные петли. Из симметричности течения на рис. 11.6(f) следует, что $\omega(0, 0)=0$, и т. д. В случае рис. 11.6(a) или (b) очевидно, что небольшое твердое тело, помещенное в точке (0, 0), вращалось бы со скоростью ± 2 рад/с, как вся жидкость. Вообще, можно доказать, что $\omega(x, y)$ аппроксимируется скоростью вращения малого твердого тела, свободно плавающего в жидкости, центр которого в данный момент расположен в точке (x, y).

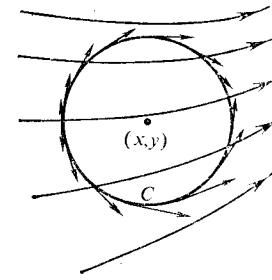


Рис. 11.7

При описании течения с помощью функции тока φ указанной выше процедуре соответствуют, очевидно, интегрирование по C коэффициента наклона графика φ внутрь контура C с последующим делением на площадь и переход к половине предела при стягивании C. Мы не даем здесь вывода получающейся в результате формулы (отсылая снова к учебникам по механике жидкостей), но приведем следующую ее мотивировку. Для одномерного аналога рассматриваемой ситуации (рис. 11.8) петля C вокруг x заменяется парой точек, интеграл от коэффициентов наклона графика φ внутрь контура — *суммой* двух коэффициентов наклона внутрь отрезка $\frac{d\varphi}{dx}(x-\delta)$ и $-\frac{d\varphi}{dx}(x+\delta)$, а охватываемая контуром площадь — длиной 2δ. Поэтому в одномерном случае предел оказывается равным

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\left(\frac{d\varphi}{dx}(x-\delta)-\frac{d\varphi}{dx}(x+\delta)\right) = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Двумерная формула оказывается очевидным аналогом этой: d^2/dx^2 нужно заменить на *лапласиан (оператор Лапласа)*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2.$$

Формула, выражающая завихренность через функцию тока, выглядит, следовательно, так:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right).$$

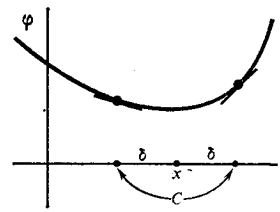


Рис. 11.8

Из этой формулы сразу получается, что все квадратичные потоки на рис. 11.6 обладают постоянной завихренностью; в частности, течение на рис. 11.6(f) *безвихревое* — его завихренность всюду равна нулю. По этой причине его и называют течением „чистого сдвига": сдвиг есть, а вращения нет. Простой сдвиг (рис. 11.6(d)) является линейной комбинацией чистого вращения и чистого сдвига, что видно как из описания при помощи функций тока:

$$x^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2-y^2),$$

так и из описания при помощи векторов поля скоростей:

$$2(0, -x) = (y, -x) + (-y, -x).$$

Локальный сдвиг, формулу для которого мы приводить не будем, представляет собой то „локальное относительное движение", которому препятствует вязкость. На завихренность вязкость прямого действия не оказывает, как это ясно видно для случая чистого вращения из рис. 11.6(a) и (b), и нужно заполнить несколько промежуточных шагов, используя конкретные особенности рассматриваемой системы, чтобы оправдать такое высказывание, как: „Хотя вначале вы и создали некоторую угловую скорость ω, она *из-за вязкости* [курсив наш] вскоре затухает, и поток становится безвихревым." (Фейнман, Лейтон и Сэндс [54], гл. 40, § 4).

5 Методы комплексной переменной

Суть приведенного замечания из лекции Фейнмана состояла в том, чтобы оправдать интерес к безвихревым течениям. Исторически этот интерес был мотивирован теоремой о том, что в *невязкой* жидкости (как в случае двух, так и в случае трех измерений) поток, безвихревой в начальный момент, таким и останется, как бы он ни изменялся со временем. Тем самым в математику доставляется специальный класс точных решений без вязких сил и без завихренности, с которым можно справиться и который приятно изучать. Тот факт, что в отличие, скажем, от несжимаемости невязкость представляется *дико* бессмысленным допущением для большинства задач, связанных с жидкостью (фон Нейман называл теоретиков, занимавшихся невязкой жидкостью, людьми, изучающими „сухую воду"), по-видимому, никого не волновал до конца 19-го века.

Замечательное свойство безвихревых течений, которые при отсутствии вязкости можно считать таковыми все время, заключается в двумерном случае в обращении в нуль

лапласиана функции тока. Если φ — *гармоническая* функция, т. е. если $\nabla^2\varphi=0$, то, объединяя x и y в единую комплексную переменную $x+iy$, мы можем представить φ как вещественную часть некоторой комплексно-аналитической функции $\varphi+i\psi$. Это позволяет переписывать учебники по теории функций комплексной переменной как учебники по механике жидкостей и порождает много очаровательных задач из области комплексной геометрии. Тот факт, что точные решения этих задач приводили к ответам, которые обычно лишь весьма приблизительно соответствовали физическим течениям, а зачастую и вовсе не соответствовали, в посвященной этим задачам литературе не акцентировался.

Такие методы комплексной переменной могут иногда быть полезными. Но степень требующейся осторожности здесь много выше, чем для других методов, обсуждаемых в этой главе. При классическом подходе они служат привлекательно мощным средством для получения точных количественных результатов. Однако эти результаты могут быть неверными — даже качественно.

Имеется безвихревая аппроксимация вихревого движения — это особенности голоморфных (комплексно-аналитических) функций. В частности,

$$\operatorname{Re}(\ln z)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

представляет собой гармоническую функцию тока, описывающую жидкость, которая движется по окружностям вокруг начала все быстрее и быстрее по мере приближения к началу (а не медленнее, как для колеса). Вихри, где жидкость движется внутрь, как у сливного отверстия ванны, ведут себя примерно таким образом, поскольку сохранение момента количества движения требует ускорения вращения при приближении к центру. Будут ли скорости „действительно“ возрастать до бесконечности в соответствии с выписанным выше логарифмом или же скорость и завихренность „на самом деле“ являются гладкими функциями с очень большими, но конечными значениями в начале — вопрос бессмысленный. Обе возможности несут в себе предположение, что жидкость обладает тонкой структурой, позволяющей нам трактовать дифференцируемым образом области, сколь угодно близкие к началу, а этого, как мы знаем, нет. Для одних целей *моделирование* течения логарифмической особенностью будет самым полезным подходом, для других могут оказаться предпочтительнее модели, использующие ограниченные гладкие (но не аналитические) функции.

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЭКСПЕРИМЕНТ

6 Замены переменных

Рассмотрим функцию тока

$$x^2+y^2+(x^2+y^2)^2=r^2+r^4,$$

где r — расстояние от точки (x, y) до начала. Описываемое ею течение имеет, ясное дело, круговые линии тока со скоростью $2r+4r^3$ на окружности радиуса r. Угловая скорость равна, следовательно, $2+4r^2$, т. е. не постоянна. В частности, движение не жесткое — имеются локальные относительные движения внутри жидкости. Поэтому такое движение в отличие от задаваемого функцией x^2+y^2 будет встречать сопротивление сил вязкости. Если только на жидкость не действуют какие-то специальным образом подобранные силы, течение не может существовать как стационарное: внешние области будут замедляться, а/или внутренние ускоряться. Таким образом, имеется существенное качественное различие между функциями r^2 и r^2+r^4 при этой их физической интерпретации.

В то же время эти две функции эквивалентны в смысле гл. 4. Существует (даже не просто локальный, а) глобальный диффеоморфизм

$$\theta(x, y)=(x\sqrt{1+x^2+y^2},\ y\sqrt{1+x^2+y^2}),$$

переводящий одну из них в другую. Это показывает, что в данном контексте „одинаковость с точностью до диффеоморфизма“ является недостаточно сильным отношением, чтобы служить полным выражением „качественной одинаковости“. При рассмотрении этих вопросов часто имело место понятное стремление отождествить эти два понятия из-за мощных и общих результатов, которые были доказаны относительно диффеотипов. (В теории динамических систем, где понятие диффеотипа не приводит к великим теоремам, последовательно вводились всё более слабые понятия качественной одинаковости и почти каждый раз представлялись как „Истинная Качественная Одинаковость“.) Понятие „качественного“ в действительности очень изменчиво; поскольку числа суть качества вещей — в этом исходная предпосылка всякого физического вычисления,— поскольку оно содержит идею „количественного“.

Как оказывается, общие законы (уравнения Навье — Стокса), описывающие поведение жидкости и доставляющие явную математическую модель для сил вязкости, инвариантны относительно диффеоморфизмов, сохраняющих объем (в двумерном случае площадь). Но тогда и такие „качества“,

которые, скажем, описывают возможное стационарное течение, остаются инвариантными при таких диффеоморфизмах. Это хороший довод в пользу того, чтобы в изучаемой ситуации отождествить понятия „качественно" и „с точностью до замен, сохраняющих объем".

К несчастью, ничто из теории, развитой в гл. 4—8, не переносится на случай такого понятия эквивалентности. Например, нет такой вещи, как k-определенность. (Это проще всего увидеть в размерности 1, где аналогичным отношением будет „с точностью до сохраняющих *длину* замен переменных". Такая замена может иметь только вид $x \to c+x$ либо $x \to c-x$, где c — постоянная; поэтому с ее помощью нельзя даже убрать член бесконечного порядка, скажем свести x^2+e^{-1/x^2} к x^2.) Весь подход гл. 7, где мы выделили стандартные формы, к которым почти всё может быть сведено, полностью теряет силу, если мы ограничиваемся преобразованиями, сохраняющими площадь. И действительно, оказывается бесконечно *а*типичным (этому слову можно придать точный смысл точно так же, как в гл. 7), чтобы семейство функций было приводимо в указанном сильном смысле к одной из полиномиальных форм, перечисленных в § 7 гл. 7. Подобным же образом, исчезает и свойство структурной устойчивости. Нет функции, которую нельзя было бы сколь угодно малым возмущением превратить в функцию, не эквивалентную ей относительно сохраняющих площадь преобразований координат.

И все же функция x^2+y^2, даже рассматриваемая как функция тока, имеет много свойств, которые *не* нарушаются при малых возмущениях (вроде того свойства, что точки, где скорость течения равна нулю, изолированны). Наличие какой-то интересной устойчивости является здесь очевидным. Строгий подход к ее анализу мог бы состоять в том, чтобы работать в пространстве точных решений полной системы уравнений, но в качестве замен переменных допускать любые диффеоморфизмы. Благодаря этому мы избегли бы таких вещей, как превращение x^2+y^2 в $x^2+y^2+(x^2+y^2)^2$, ибо только одна из этих функций могла бы быть решением при заданных внешних силах, вязкости и пр. Получилась бы интересная теория.

Такая программа, однако, далеко не тривиальна. Поскольку для любой физической задачи понятие „решения полной системы уравнений" включает в себя удовлетворение граничным условиям (у стенки или на бесконечности), мы не вправе сосредоточить свое внимание лишь на окрестности начала. Нам необходимо знать, что́ делают наши функции на границе, на достаточном удалении от начала. Хотя

теория катастроф и пригодна в такого рода вопросах (примером чего служит анализ выпучивания пластин в гл. 13), ее применение здесь сопряжено с большим числом технических тонкостей. Когда мы не просто имеем дело со сложными граничными условиями, но еще меняем сами уравнения неизвестным образом (например, как ниже, добавляя полимеры, в результате чего вязкость становится зависящей самым запутанным образом от течения, равно как и наоборот), то требования строгости и требования сиюминутной приложимости расходятся. Даже классические уравнения Навье — Стокса для ньютонова течения не вполне понятны в строгом смысле слова: никто еще не доказал, что они имеют решения на всей временной оси при любых начальных данных. (Если это не так, то что ж — „eppure si muove“ [1] — жидкость будет по-прежнему течь, когда решения закончатся, а *модель* будет разбита...)

7 Эвристическая программа

Однако на практике мы можем добиться существенных успехов следующим образом. Рассмотрим произвольную функцию тока φ или гладкое семейство таких функций $\{\Phi_c | c \in \mathbb{R}^s\}$ безотносительно к точным решениям уравнений для вязкого течения. Допустим, что если течение в момент t_0 задано функцией φ (соотв. Φ_c), то силы вязкости и другие силы быстро превратят его в стационарное течение, *близкое* к φ (соотв. Φ_c). (Это эвристическое допущение не всегда верно, и его следует использовать с осторожностью, с учетом опыта. Однако оно подсказывает другую возможность строгого подхода, при котором силы вязкости и прочие силы, действующие в жидкости, математически „подключаются последовательно“ и решения получаются так же, как в подходе Колмогорова — Арнольда — Мозера к анализу Солнечной системы, в котором последовательно подключаются взаимодействия планет.) В таком случае, если φ или Φ структурно устойчивы как функция или семейство функций соответственно, мы можем ожидать, что истинное течение или семейство течений будут с точностью до диффеоморфизма такими же, как и описываемые посредством φ или Φ. Тогда мы можем с большой долей уверенности надеяться, что такие характеристики, как сдвиг, хотя и не будут сохраняться в точности при диффеоморфизме, все же изменятся *немного*, так что мы можем рассматривать φ или

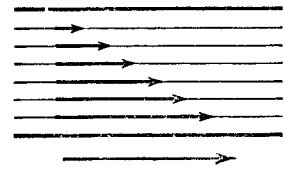
[1] „А все-таки она вертится“ *(итал.).— Прим. ред.*

Ф как разумные приближения. Это почти наверняка неверно, если мы начинаем с чего-нибудь структурно *не*устойчивого, когда даже и инвариантные относительно диффеоморфизмов характеристики меняются при малых возмущениях.

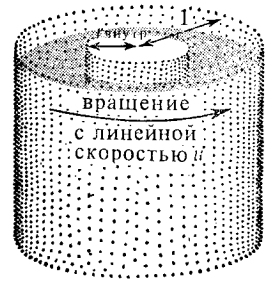
Этот подход с большим успехом был использован Берри и Мэкли [53]. На самом деле то, что говорилось выше, присутствует у них лишь неявно, что и вполне понятно, так как задача этих авторов состояла в эффективном описании определенных сложных течений при помощи методов теории катастроф и в практическом применении такого описания. Наше более тщательное изложение математических обоснований объясняется прежде всего тем, что этот важный частный случай дает возможность пролить свет на общую природу теории катастроф и ее приложений — ведь большинство наших читателей будут применять ее не в столь специальном контексте.

8 Экспериментальное воплощение

Как уже отмечалось, чистое вращение, отвечающее функции тока x^2+y^2, реализовать просто. Поскольку, каков бы ни был механизм возникновения сил вязкости в жидкости, их действие всегда состоит в сопротивлении всякому относительному движению внутри жидкости, чистое вращение является единственным возможным стационарным течением в равномерно вращающемся сосуде в отсутствие специальных внешних сил, действующих на жидкость. Это утверждение несложно доказать — главная трудность в том, чтобы точно его сформулировать,— и для наших теперешних целей мы просто можем считать его интуитивно очевидным.



(a)



(b)

Рис. 11.9

Более важно течение, представленное на рис. 11.6(d) — простой сдвиг. Так как трение о стенки сосуда приводит к тому, что скорость жидкости относительно стенок убывает до нуля при приближении к ним, естественно было бы надеяться реализовать этот случай, поместив жидкость между двумя скользящими параллельными стенками, как показано на рис. 11.9(a). Это, однако, неподходяще с экспериментальной точки зрения, так как бесконечных стенок не достанешь. Более практичен эксперимент Куэтта (рис. 11.9(b)).

Строгое рассуждение, использующее несколько больше вычислений, чем в предыдущем изложении, и самую обычную математическую модель для учета влияния вязкости, приводит к функции тока

$$\frac{u}{1-r_{\text{внутр}}^2}(r^2 - r_{\text{внутр}}^2 \ln r),$$

как всегда с точностью до константы. Как видно из рис. 11.10, эта функция почти линейна по r в области $r_{\text{внутр}}<r<1$, т. е. между двумя цилиндрами. (Это течение можно рассматривать как результат взаимного наложения чистого вращения, дающего член r^2, и безвихревого течения с гармонической функцией тока $\ln r$.) С точностью до гладкой замены переменных она *является* линейной, и для многих практических целей ее можно считать таковой. Такая экспериментальная установка служит прекрасным приближением к течению простого сдвига на рис. 11.6(d), особенно в том случае, когда внутренний радиус близок к внешнему (выше приравненному для удобства единице).

Седловые течения, представленные на рис. 11.6(e) и (f),— вещь более тонкая. Нет способа взять часть течения между двумя линиями тока с постоянной скоростью вдоль каждой из них и попытаться реализовать течение с помощью движущихся стенок соответствующей формы. (Начать с того, что *ни на какой* линии тока скорость не является постоянной.) Далее, характер влияния вязкости очень сложен, и получение точного решения, учитывающего энергию движущих сил у границы, ее передачу внутрь жидкости и диссипацию в результате вязкости, было бы чрезвычайно сложным делом для течения столь общего вида. На деле же, однако, седловые течения реализуются с высокой точностью и без большого труда.

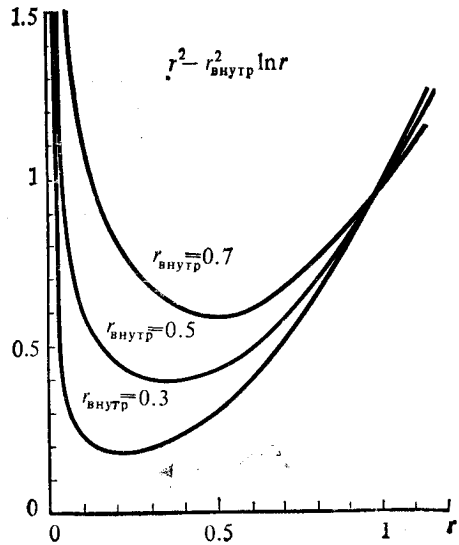


Рис. 11.10

Подходящая экспериментальная установка была придумана для этой цели Дж. Тейлором в 1934 г. и с тех пор известна как *четырехвалковая мельница* (рис. 11.11). Четыре симметрично расположенных валика вращаются, как показано, с равными скоростями в чередующихся направлениях. Ясно, что течение в окрестности валиков нельзя задать ни точно, ни глобально с помощью функции αxy, эквивалентной $u^2—v^2$ (поворот на 45°), так как эта функция не имеет замкнутых линий уровня. Тем не менее на практике (фото 2) эта функция тока чрезвычайно точно аппроксимирует течение в круговой области, расположенной между валиками (рис. 11.12(a)), если α подобрать так, чтобы скорости валиков (на ободе) совпадали со скоростями течения, отвечающего αxy, в точках касания валиков и линий тока, показанных на рис. 11.12(b).

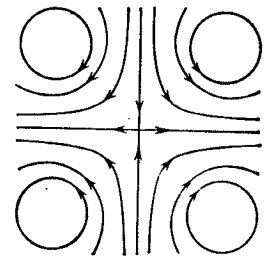


Рис. 11.11

Успех этой аппроксимации обеспечивается во многом природой морсовских функций. По соображениям симметрии функция тока должна быть такой, чтобы ее тейлоровское разложение в начале начиналось с αxy. Значит, для почти всех α (для всех, кроме 0) функция тока 2-определенна, и поэтому axy служит ее точным описанием в некоторой окрестности V начала с точностью до некоторой (не обязательно сохраняющей площадь) гладкой замены координат. На практике V оказывается довольно большой, а требующиеся изменения в координатах пренебрежимо малыми; так бывает чаще всего, хотя и не всегда. Дальше, функция xy *устойчива*, поэтому даже если установка и не совершенно симметрична, то хотя уже нельзя ожидать, что седло будет *в* начале, оно все же обязательно будет *вблизи* начала, так что αxy по-прежнему будет доставлять хорошее описание течения. Эта устойчивость составляет суть различия между четырехвалковой мельницей и шестивалковой, которую мы обсудим ниже и которая представляет для нас главный интерес в этой главе.

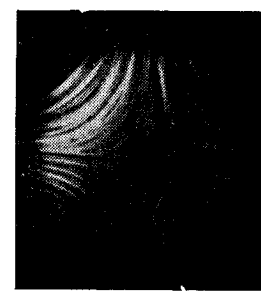
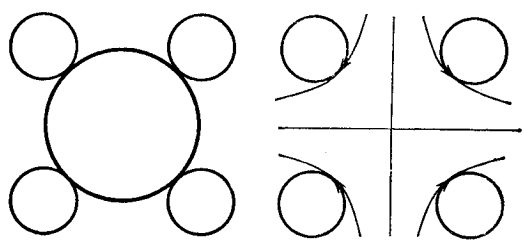


Фото 2. *Линии тока в четырехвалковой мельнице для 1.5%-ного раствора окиси полиэтилена в воде (Кроули, Фрэнк, Мэкли и Стефенсон [55], рис. 6).*



(a) (b)

Рис. 11.12

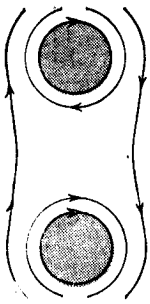


Рис. 11.13

Устойчивость морсовских седел выступает еще более явственно, если взять *двух*валковую мельницу. Из рис. 11.13 ясно, что между валиками должна быть точка торможения, и простейшей моделью в этом случае будет функция тока Ax^2+By^2, где $AB<0$ (рис. 11.14). Благодаря структурной устойчивости она дает хорошее представление о течении, наблюдаемом в эксперименте (фото 3). Заметьте, что входящие в точку торможения и выходящие из нее линии тока искривлены, так что требуется „криволинейная" замена координат, чтобы привести истинную функцию тока к чисто квадратичной форме в центре. Но и простая аппроксимация функцией Ax^2+By^2 в исходных координатах вполне достаточна для физических расчетов, относящихся к течению вблизи точки торможения, Фрэнк и Мэкли [56].

Сила свойств структурной устойчивости и 2-определенности проявляется еще ярче, когда мы изменяем физические характеристики жидкости. На фото 3 мы видим течение *ньютоновой* жидкости (т. е. жидкости, повинующейся чрезвычайно точно уравнениям жидкости, отвечающим наипростейшей гипотезе о ненулевых силах вязкости). Если добавить к жидкости полимерные молекулы, действие вязкости станет более сложным. На фото 4 представлены результаты соответствующего эксперимента. Свойство невырожденности течения остается, но при увеличении скорости валиков (фото 4 (a) — (d)) тупой угол между „входящими" и „выходящими" линиями тока возрастает от 129 до 145°, с точностью $\pm 3°$. (В противоположность этому в ньютоновом течении повышение скорости вращения валиков просто повышает скорость течения, не внося заметных изменений в его геометрию.) Изучение соотношений между значениями A и B и другими измеренными физическими величинами пролило свет на поведение полимерных молекул в потоке, а 2-определенность Ax^2+By^2 вполне оправдывает то пренебрежение членами высшего порядка, за которое извиняются Фрэнк и Мэкли в [56]. Это оправдание, конечно, остается отчасти эвристичным, ввиду замечаний, сделанных выше в § 6.

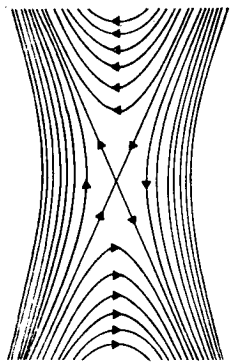


Рис. 11.14. *Схематическое изображение идеализированного течения между двумя согласованно вращающимися валиками (Фрэнк и Мэкли [56], рис. 1).*

РАСЧЕСЫВАНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ МОЛЕКУЛ

9 Неньютоново поведение

Пусть теперь жидкость содержит полимерные молекулы (с длинными цепями) в растворе или же сама является жидким полимером. Разумно предположить, что по-разному расположенные в потоке цепи (несколько условных вариантов показано на рис. 11.15 (a) — (c)) по-разному будут влиять

на свойства вязкости. Прежде всего можно ожидать различного сопротивления сдвигу в трех указанных на рис. 11.15 случаях, и это действительно наблюдается. Поскольку различие между случаями (b) и (c) заключается в ориентации молекул относительно потока, общий закон для сил вязкости трудно сформулировать, даже если и известно строение самих молекул.

Но строение полимерных молекул нам *не* известно. В почти неподвижной жидкости многие виды молекул обнаруживают тенденцию спутаться в клубок под действием упругих сил, как на рис. 11.15(a), так что молекулы длиной в N единиц примут форму спутанного клубка с поперечником порядка в среднем $\sqrt{N}$. Однако если элемент объема жидкости, в котором находится данная молекула, вытягивается в одном направлении и сжимается в другом (как бы входя в сужающуюся воронку, см. рис. 11.16), то поток растянет молекулу, отчасти распутав ее. Поскольку то же произойдет и с соседними молекулами, вязкая реакция на сдвиг будет со временем изменяться.

Это значит, что *силы вязкости в данной точке жидкости зависят от предыстории* жидкости, приходящей в эту точку, равно как и свойства локального сдвига. Конечно, большинство молекул, если их не растягивать непрерывно, стремятся снова сжаться в спутанный клубок, как на рис. 11.15(a), так что память о предыстории растяжения постепенно гаснет. Детально разработанные математические модели такого поведения обсуждаются у Труселла и Нолла ([57], разд. E). За исключением некоторых сугубо специальных случаев, очень трудно получить точное решение для таких моделей, а следовательно, еще сложнее решить, какая из моделей подходит для данной конкретной неньютоновой жидкости. (Приблизительный характер любой гладкой модели здесь особенно явно выражен.)

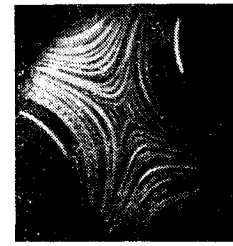
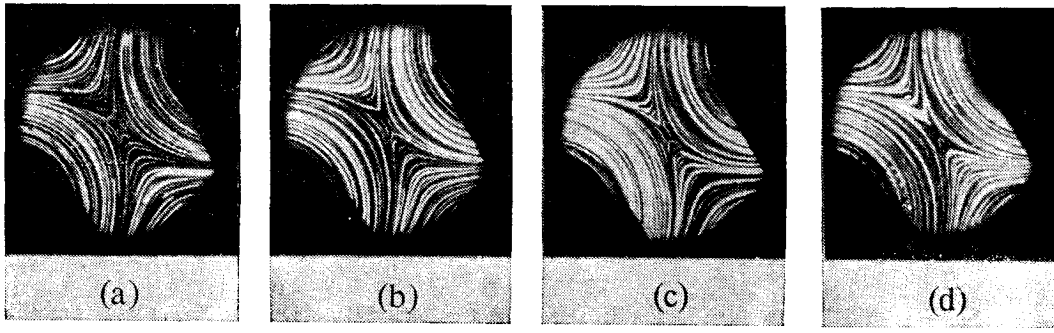


Фото 3. *Линии тока между согласованно вращающимися валиками для водно-глицеринового раствора (Фрэнк и Мэкли [56], рис. 6 (d)).*

Фото 4. *Линии тока между согласованно вращающимися валиками для водного раствора окиси полиэтилена (Фрэнк и Мэкли [56], рис. 7).*



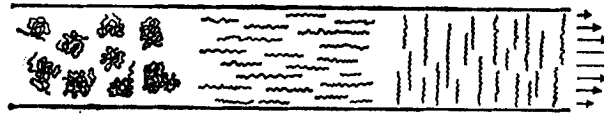


Рис. 11.15

По большей части в „практической" литературе, посвященной, например, вопросу о продавливании жидкого полимера через матрицы, попросту оставляется в стороне эта зависимость вязкости от предыстории, как слишком сложная для математической обработки. Общепринят прием с заменой ньютонова линейного соотношения между скоростью сдвига и напряжением сдвига в данной точке на какой-нибудь (равным образом независящий от предыстории) степенной закон, причем показатель подбирается экспериментально. Иногда этот прием полезен, но на практике часто бывает *желательно*, чтобы структура цепей изменялась. Полимерная нить на выходе из воронки крепче, чем на входе, оттого что „подрасчесали" ее молекулярные цепи, примерно так же, как хлопковая или шерстяная пряжа укрепляется от расчесывания составляющих ее волокон.

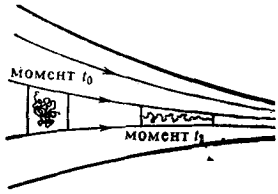


Рис. 11.16

Хорошее понимание поведения молекул при различных условиях течения оказывается, таким образом, нужным для лучшего описания самих течений. При изучении такого поведения естественным орудием исследования служат управляемые течения, в которых молекулы могут иметь предыстории различного рода, и именно при построении этого орудия исследования находит себе применение подход к двумерным течениям, обсуждавшийся нами в §§ 6—8.

10 Растягивающие течения

Чистое вращение, ясное дело, не оказывает никаких растягивающих воздействий. Простой сдвиг оказывает небольшое такое воздействие (рис. 11.17), но он также разворачивает длинные молекулы вдоль потока. В этом направлении линии *не* растягиваются, и итоговый результат расчесывания невелик.

Величину расчесывания можно измерить с помощью оптических эффектов. Свет, проходящий через пучок расче-

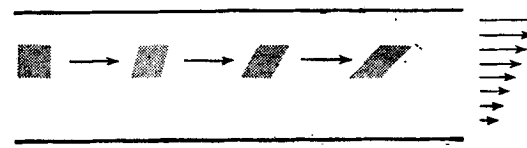


Рис. 11.17

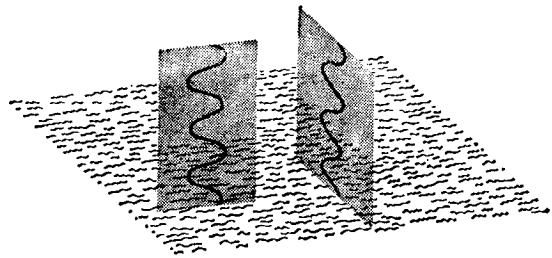


Рис. 11.18

санных молекул, взаимодействует с ним по-разному в зависимости от своей поляризации. Электромагнитные колебания в плоскости, параллельной молекулам, распространяются с другой скоростью, чем колебания в плоскости, перпендикулярной к ним (рис. 11.18), и коэффициент преломления для этих двух случаев будет различен; мы получим материал с *двойным лучепреломлением*. (Свет, поляризованный в других направлениях, ведет себя как суперпозиция указанных двух случаев.) Нерасчесанные цепи не дают такого эффекта, и о степени расчесанности можно судить по двулучепреломлению. (Физические подробности см. у Мэкли и Келлера [58].)

Течение простого сдвига (реализованное в установке Куэтта) обнаруживает, действительно, совсем незначительное двойнсе лучепреломление, равномерно распределенное по жидкости, в согласии с незначительностью растяжения полимерных цепей, вытекающей из рис. 11.17.

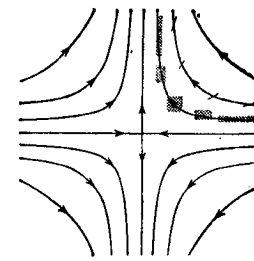


Рис. 11.19

С другой стороны, в течении чистого сдвига мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 11.19, где показаны последовательные положения некоторого прямоугольника жидкости. Штрихи на соседней линии тока показывают, каким образом частично растянутые молекулы непрерывно поворачиваются в направлении, в котором они будут растягиваться еще больше. Это прямо противоположно случаю простого сдвига, при котором молекулы поворачиваются так, что растяжение уменьшается. По этой причине Кроули, Фрэнк, Мэкли и Стефенсон [55] называют такое течение *постоянно растягивающим*.

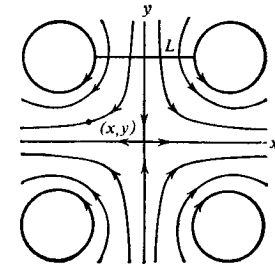


Рис. 11.20

В качестве неплохого приближения полимерные молекулы, входящие через линию L (рис. 11.20) в область четырехвалковой мельницы, где течение достаточно хорошо описывается функцией xy, можно считать нерастянутыми; действительно, из-за стремления цепей спутываться обратно в клубок лишь весьма сильное растягивание жидкости может оказать на них заметное влияние. Простые вычисления

(Кроули, Фрэнк, Мэкли и Стефенсон [55]) приводят тогда к заключению, что величина, на которую растягивается элемент жидкости в точке (x, y) после прохода через L, обратно пропорциональна y независимо от того, на какой линии тока лежит эта точка. Конечно, бесконечное значение $1/y$ при $y=0$ не достигается для полимерных цепей, которые после полного распутывания могут еще лишь совсем немного растянуться, а потом рвутся. (Это приводит к довольно специальному эффекту вязкости — сопротивлению дальнейшему растяжению. В то же время некоторые другие эффекты вязкости — в частности связанные с турбулентностью — оказываются сильно редуцированными. Очень небольшая добавка нужного полимера заставляет воду уходить в водосток гораздо быстрее. Точно также полимер, добавленный к нефти, ускоряет ее прохождение по нефтепроводу — и никто толком не понимает, почему.) Если оставить в стороне бесконечности, проведенный анализ показывает, что должен иметься достаточно ярко выраженный максимум двойного лучепреломления, локализованный на выходящей оси, что и подтверждается фото 5 (из работы Кроули, Фрэнка, Мэкли и Стефенсона [55]).

Для случая произвольной функции тока φ эти рассмотрения ведут (см. Берри и Мэкли [53]) к понятию *скорости постоянного растяжения*, определяемой как

$$\sqrt{-\det H\varphi|_{(x,\ y)}},$$

где $H\varphi$ — матрица Гессе. Мы опустим здесь соответствующие объяснения (в которых участвует красивая классическая дифференциальная геометрия), заметим только, что для x^2+y^2 эта скорость всюду равна $2i$, т. е. мнима и физического смысла не имеет, для x^2 (простой сдвиг) всюду равна 0, а для чистого сдвига x^2-y^2 равна 2.

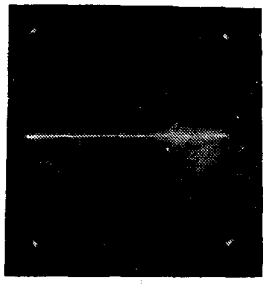


Фото 5. *Локализованное двулучепреломление в потоке 1.5%-ного водного раствора окиси полиэтилена в четырехвалковой мельнице, наблюдаемом через скрещенные поляроиды. Указаны направления вращения валиков. (Кроули, Фрэнк, Мэкли и Стефенсон [55], рис. 8.)*

Нужно отметить, что здесь в дело идет в значительной мере дифференциальная *геометрия*, а не только дифференциальная *топология*, поскольку привлекается если и не расстояние, то площадь. Вне точек торможения градиент φ ненулевой, и, следовательно, согласно гл. 3, φ *с точностью до локального диффеоморфизма* линейна. А линейная φ приводит к равномерному потоку, в котором жидкость движется прямо и жестко; нет ни растяжения, ни сдвига и вообще ничего не случается, что совершенно неинтересно — в тех редких случаях, когда это так. Желая применить модель теории катастроф, мы вполне определенным образом приходим к намеченной выше эвристической программе.

ВЫРОЖДЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ

11 Шестивалковая мельница

Теперь посмотрим, каких течений следует ожидать в шестивалковом аналоге четырехвалковой мельницы (рис. 11.21). Если симметрия установки (при одинаковых скоростях вращения валиков) должна сохраниться в течении, то разложение функции тока в начале не может иметь линейной части. Значение функции тока в начале можно считать нулевым. Единственная квадратичная функция, обладающая поворотной симметрией порядка 3 (симметрией относительно поворотов на треть полного оборота),— это x^2+y^2, и если течение также должно быть зеркально-симметрично относительно оси y, то и квадратичная часть должна отсутствовать. Выписывая общую однородную кубику $q(x, y)$ в виде

$$\mathrm{Re}\,(\alpha z^3+\beta z^2\bar{z}),$$

где $z=x+iy$, а α и β — комплексные числа (см. Зиман [7]), мы видим, что, поскольку поворот на треть полного оборота сводится к умножению z на $e^{2\pi i/3}$, эта кубика в результате такого поворота превратится в следующую:

$$\mathrm{Re}\,(\alpha\,(e^{2\pi i/3}z)^3+\beta\,(e^{2\pi i/3}z)^2\,(e^{-2\pi i/3}\bar{z})) = \\ = \mathrm{Re}\,(\alpha z^3+e^{2\pi i/3}\beta z^2\bar{z}).$$

Значит, если q обладает поворотной симметрией порядка 3, то для нее $\beta=0$ и потому она равна

$$\alpha_R\,(\mathrm{Re}\,z^3)-\alpha_I\,(\mathrm{Im}\,z^3),$$

где α_R и α_I — вещественная и мнимая части α. Но отражение относительно оси y с последующим изменением знака (поскольку отражение изменяет все направления тока на противоположные[1]), сохраняет знак $\mathrm{Im}\,z^3$ и обращает знак $\mathrm{Re}z^3$. Отсюда следует, что течение самого общего вида с указанными симметриями записывается так:

$$\gamma(x^3-3xy^2)+O(4).$$

При $\gamma\neq 0$ многочлен $\gamma(x^3-3xy^2)$ является 3-определенным, и поэтому мы отбрасываем тейл $O(4)$ и принимаем эту кубику в качестве нашей локальной модели, так же как ранее для четырехвалковой мельницы мы приняли в качестве модели квадрику xy. И снова линии уровня модельной кубики

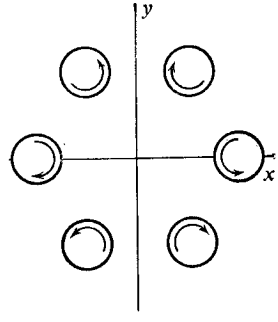


Рис. 11.21

[1] Зеркальному отражению течения отвечает соответствующее зеркальное отражение графика функции тока *плюс* последующее изменение знака.— *Прим. ред.*

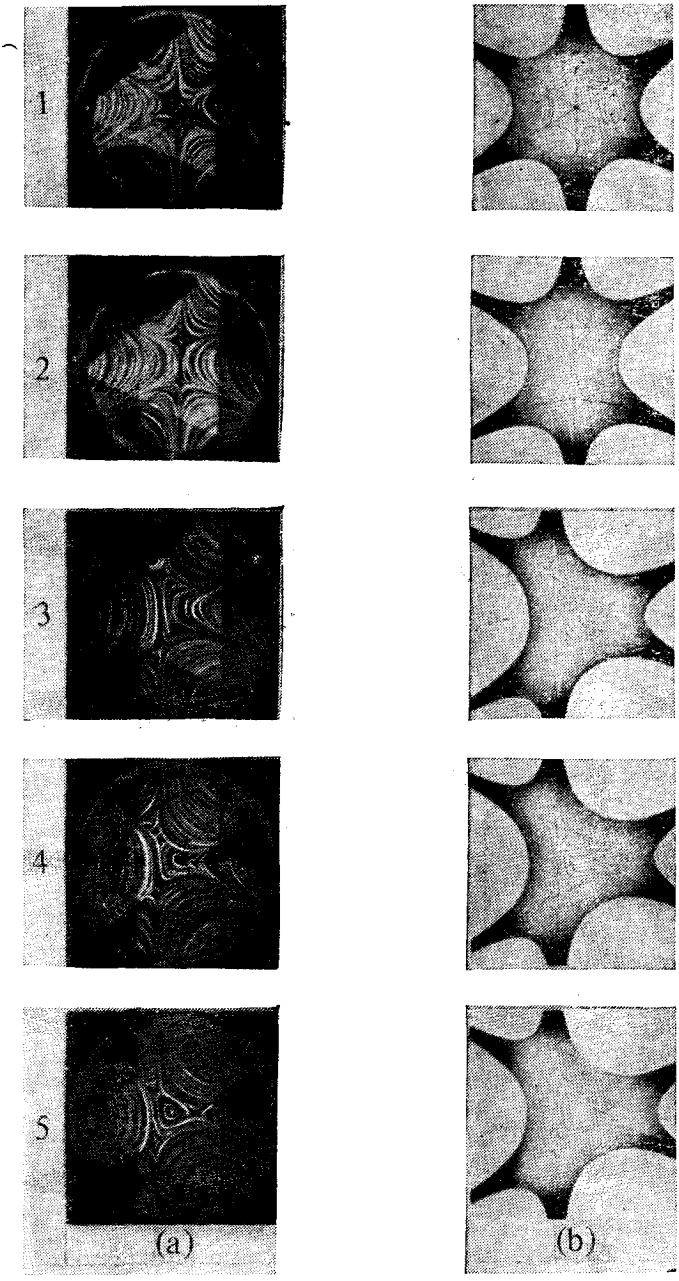


Фото 6. (a) *Течения 1—5 для глицерина в шестивалковой мельнице;* (b) *линии уровня соответствующих функций тока, вычерченные вычислительной машиной. (Любезно предоставлено Мэлкомом Мэкли.)*

(фото 6, 1 (b)) хорошо согласуются с наблюдаемыми линиями тока (фото 6, 1 (a)).

Согласие вблизи начала, однако, не столь хорошее, как у рис. 11.11 и фото 2, особенно если учесть, что фото 6, 1 (a) сделано лишь после тщательной отладки установки. Дело в том, что предположения о симметрии, приведшие нас к функции x^3-3xy^2, не из тех, которым легко удовлетворить в точности: на практике нельзя ожидать, чтобы скорости вращения валиков были совершенно одинаковыми или чтобы сами валики были совершенно идентичными. Поэтому нам следует допустить небольшую завихренность ω и прямолинейные равномерные течения со скоростями v_x и v_y в направлении осей x и y. Эти возмущения, которые мы могли игнорировать в случае четырехвалковой мельницы вследствие структурной устойчивости функции xy, приводят нас к семейству

$$\gamma(x^3-3xy^2)+\omega(x^2+y^2)+v_x y+v_y x,$$

включающему в себя „совершенную" функцию x^3-3xy^2. Это трехпараметрическое семейство уже *является* (как семейство) структурно устойчивым; более того, мы его уже изучили в § 6 гл. 9 (константу γ можно, конечно, сделать равной единице). На деле получилось так, что именно узнав в этом семействе эллиптическую омбилику, Берри догадался об его устойчивости. А теперь, на основании тех же эвристических соображений, что и раньше, мы можем пренебречь любыми новыми возмущениями (как эквивалентными уже рассмотренным) и использовать указанное семейство как модельное для семейства течений.

Одно из интересных следствий универсальности этой деформации состоит в том, что хотя мы в состоянии управлять *шестью* скоростями валиков, *трех* параметров управления вполне хватает для получения всех возможных картин течения, близких в картине, представленной на фото 6, 1 (a). Это подсказало Берри и Мэкли мысль об экспериментальной установке, в которой три пары валиков приводились в движение тремя независимыми двигателями. Управляющими параметрами здесь слежили три скорости вращения Ω_I, Ω_{II} и Ω_{III} (см. рис. 11.22, где положительные направления вращений указаны стрелками).

Далее, мы знаем, что *почти* всякая трехпараметрическая деформация функции x^3-3xy^2 является (уни)версальной. Но допустим, что любой *строго* симметричный набор скоростей

$$(\Omega_I,\ \Omega_{II},\ \Omega_{III})=\Omega(1,\ 1,\ 1)$$

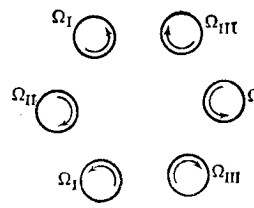


Рис. 11.22

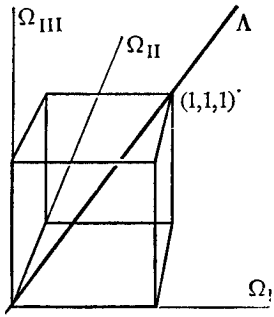


Рис. 11.23

дает соответственно строго симметричное течение. (Физически это разумное допущение, хотя бы для некоторого определенного интервала значений Ω, и оно выполнено у Берри и Мэкли [53]. Мы могли бы привести здесь топологическое доказательство того, что если указанная симметрия течения физически реализуется хотя бы для *одного* значения Ω, то оно реализуется на некотором интервале значений Ω.) В таком случае мы имеем омбилические точки на целой прямой Λ в пространстве параметров Ω_I, Ω_{II}, Ω_{III} (рис. 11.23). Но в трансверсальном семействе с тремя параметрами могут, согласно § 4 гл. 7, появляться лишь *изолированные* точки, в которых матрица Гессе дважды вырождена. Действительно, мы это детально показали в § 6 гл. 9 для изученной там универсальной деформации, а значит (ввиду эквивалентности универсальных деформаций) это верно для любой трехпараметрической деформации нашего симметричного течения. Это означает, что деформация, получаемая с помощью параметров Ω_I, Ω_{II}, Ω_{III}, не универсальна и нам следует добавить еще один управляющий параметр. В своем эксперименте Берри и Мэкли использовали в качестве такого параметра довольно тонкую вещь — добавляли к жидкости некоторый полимер.

Однако как же тогда ω, v_x и v_y связаны с Ω_I, Ω_{II}, Ω_{III}? Конечно, вычислить в явном виде соответствующие точные зависимости было бы трудно, но для них можно найти разумные приближения, примерно так же как для случая четырехвалковой мельницы, хотя и посложнее. Что касается линейных членов с v_x и v_y, то Берри и Мэкли делают предположение, что каждая пара соседних валиков вносит сюда линейный вклад, пропорциональный их средней скорости (см. рис. 11.24), с одним коэффициентом пропорциональности, α_+, для потоков на входе и другим, α_- для потоков на выходе. (Причина такого разделения выяснится позже.) Мы отсылаем читателя к их статье за детальным обоснованием следующих формул:

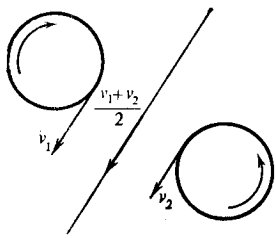


Рис. 11.24

$$\frac{\omega}{\gamma}=\frac{k_1(\Omega_{III}-\Omega_I)}{\Omega_I+\Omega_{II}+\Omega_{III}}, \tag{11.1}$$

$$\frac{v_x}{\gamma}=\frac{k_2\sqrt{3}(\alpha_--\alpha_+)(\Omega_{III}-\Omega_I)}{\Omega_I+\Omega_{II}+\Omega_{III}}, \tag{11.2}$$

$$\frac{v_y}{\gamma}=\frac{k_2(\alpha_-+\alpha_+)(\Omega_I-2\Omega_{II}+\Omega_{III})}{\Omega_I+\Omega_{II}+\Omega_{III}}; \tag{11.3}$$

здесь k_1 и k_2 — константы, выражающиеся через радиусы валиков и расстояния между ними. Заметьте, что трехмерная вариация скоростей (Ω_I, Ω_{II}, Ω_{III}) дает лишь двумер-

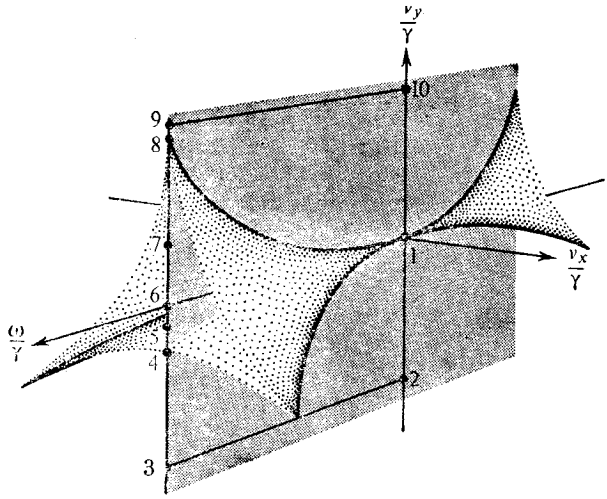


Рис. 11.25

ное подпространство пространства параметров универсальной деформации (ω и v_x оказываются пропорциональными); эта деформация, как и указывалось, не будет версальной.

Если в качестве жидкости для эксперимента взят глицерин, который прекрасно описывается моделью ньютоновой жидкости, нет нужды предполагать различие между динамикой на входе и на выходе, а тем самым и в механизме преобразования скоростей в горловинах под действием v_x и v_y. Поэтому можно положить $\alpha_+=\alpha_-=\alpha$, и мы попадаем в плоскость $v_x=0$ (см. (11.2)). Подбирая скорости валиков так, чтобы получить согласно формулам (11.1) — (11.3) точки в плоскости $(\omega/\gamma)(v_y/\gamma)$, помеченные на рис. 11.25 цифрами от 1 до 10, мы приходим экспериментально к результатам, представленным на фото 6 и 7. Справа показаны линии уровня для теоретических полиномиальных функций тока, вычерченные с помощью вычислительной машины. Подчеркнем хорошее согласие эксперимента с теорией следующими замечаниями.

(a) Типичная плоскость, проходящая через начало на рис. 11.25, даже плоскость, содержащая ось ω/γ, не будет содержать точек сборки. Точность, с которой течение 8(a) на фото 7 повторяет карту горизонталей 8(b), является поэтому подтверждением предсказанных свойств экспериментальной установки. (Между прочим, типичная плоскость на рис. 11.25 вообще не обязана проходить через начало. Соображения симметрии, позволившие нам вычислить вид функции тока для $\Omega_I=\Omega_{II}=\Omega_{III}$, применимы лишь по-

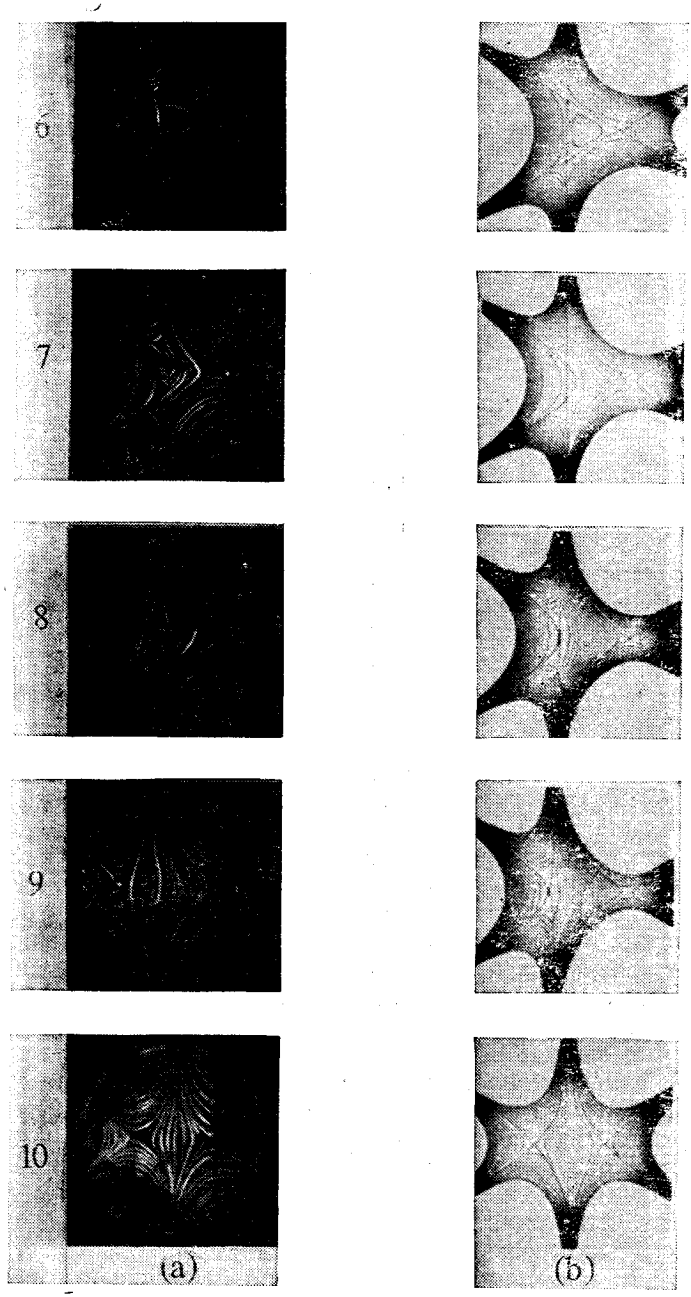


Фото 7. (a) *Течения 6—10 для глицерина в шестишаровой мельнице;* (b) *линии уровня соответствующих функций тока, вычерченные вычислительной машиной. (Любезно предоставлено Мэлкомом Мэкли.)*

стольку, поскольку эта симметрия реализуется физически, как в отношении геометрии, так и в отношении скоростей. Течение 1 представляет собой поэтому триумф техники эксперимента.)

(b) При $v_x=0$ и фиксированном ω/γ точка сборки должна появиться для значения v_y/γ, которое равно умноженному на —3 значению для точки складки 4, вне зависимости от значений k_1, k_2 и ω/γ, конечно при условии, что формулы (11.1)—(11.3) верны. Экспериментальное значение оказывается равным —2.75. Поскольку, как это ясно из рис. 11.25, мы можем, лишь слегка пошевелив плоскость $v_x=0$, значительно понизить верхнюю точку бифуркации, это согласие замечательно, причем с отклонением в нужную сторону.

(c) Зеркальной симметрией относительно оси x функция

$$\gamma(x^3-3xy^2)+\omega(x^2+y^2)+v_xy+v_yx$$

обладает, если и только если $v_x=0$. Эта симметрия точна на рисунках вычислительной машины; то, что она оказывается до такой степени точной на фотографиях, служит свидетельством в пользу не только всей модели вообще, но также и гипотезы, что $\alpha_-=\alpha_+$. То, как именно происходят явно видимые на этих фото отклонения от *точной* симметрии, служит предметом наших последующих замечаний.

12 Нелокальное бифуркационное множество для эллиптической омбилики

В § 6 гл. 9 наши усилия были направлены на отыскание точек в пространстве деформации, где соответствующая функция от (x, y) имеет вырожденные (а потому неустойчивые и приводящие к бифуркациям) критические точки. Если у функции нет таких точек, то ее форма вблизи каждой точки структурно устойчива и тогда для нее общее число максимумов, общее число минимумов и общее число сёдел (которыми мы чаще всего и интересуемся) не меняются при малых возмущениях. Но функция может оказаться неустойчивой *глобально*, не имея никаких локальных вырожденностей, из-за того, что в двух невырожденных критических точках она принимает одно и то же значение.

На рис. 11.26 (b) изображен график функции типа $(x^2-1)y$ с отдельными представительными горизонталями. Несложно убедиться, что единственными критическими точками служат $(\pm1, 0)$, причем это невырожденные седла, т. е. устойчивые особенности. Но произвольно малое возмущение может сделать седло, где $x>0$, ниже другого

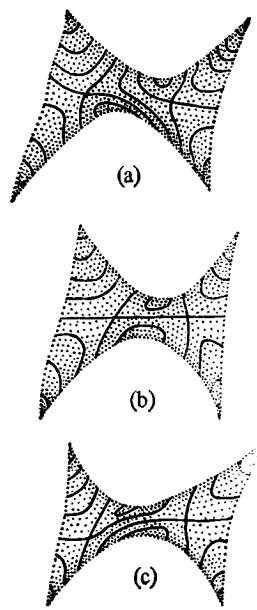


Рис. 11.26

(рис. 11.26(a)) или выше (рис. 11.26(c)). Никакой диффеоморфизм — ни области определения этих функций $\mathbb{R}^2$, ни области их значений $\mathbb{R}$ — не сможет подогнать топологическую картину горизонталей для любого из этих случаев к картине рис. 11.26(b). Глобальная устойчивость функции требует не только невырожденности ее критических *точек*, но также и несовпадения критических *значений*. Более того, никакой диффеоморфизм, близкий к тождественному, не сможет совместить между собой рис. 11.26(a) и (c) (сможет отражение относительно оси y, но никакое преобразование, сохраняющее ориентацию, не сможет). Путь от (a) к (c) лежит через (b).

Карты горизонталей 2(b) — 7(b) на фото 6 и 7 все демонстрируют потенциалы с неустойчивостями этого типа помимо *локальной* неустойчивости типа вырожденной складки в правой части карты 4(b). Соответствующие фотографии экспериментальных течений все показывают устойчивых соседей теоретически рассчитанных потенциалов, неэквивалентных им *глобально*.

Чтобы иметь возможность делать более детальные предсказания, мы должны поэтому дополнительно изучить — как часть бифуркационной структуры — множество тех точек в пространстве деформации, в которых для соответствующих функций имеет место совпадение критических значений. Арнольд называет в [59] это множество *стратом Максвелла*, в то время как Том, первый упомянувший здесь имя Максвелла, использует термин *множество Максвелла* для случая, когда совпадение критических значений имеет место в токах минимума (связывая его с правилом Максвелла в термодинамике, о чем речь в гл. 14). Пожалуй, более подошел бы тут термин *нелокальное бифуркационное множество* (для множества точек в пространстве деформации, которым отвечают функции с совпадающими критическими значениями) в противоположность *локальному бифуркационному множеству* тех точек, где соответствующие функции обнаруживают локальную вырожденность. (Эта терминология имеет еще то достоинство, что она распространяется на более общий случай динамических систем, где возможны гораздо более интересные нелокальные бифуркации, такие, как взрывное появление „странных аттракторов" (Чиллингворт [52]).) Отдельные точки, как, например, точка 4 на рис. 11.25, могут принадлежать сразу к обоим бифуркационным множествам.

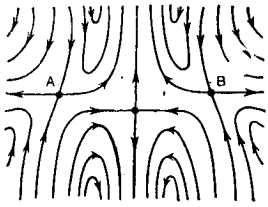


Рис. 11.27

Течение на рис. 11.27 не стало бы неустойчивым *как течение*, если бы функции тока случилось иметь в точках A и B равные значения. Поэтому нам следует отдельно опреде-

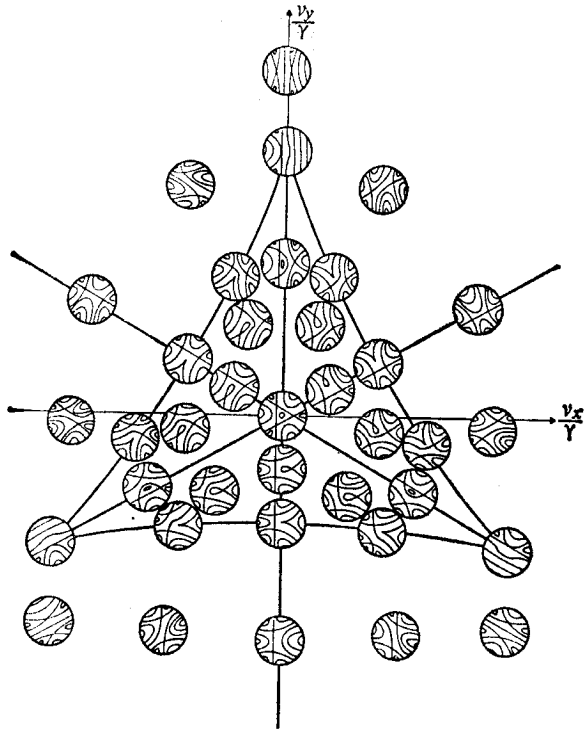


Рис. 11.28

лить *множество соединения сёдел* для данной деформации как множество тех точек пространства деформации, для которых соответствующие функции имеют критические точки, соединенные какой-нибудь линией уровня. (Если функции определены не на плоскости, а в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, то линии уровня заменяются (гипер)поверхностями уровня.) Это множество является, конечно, подмножеством нелокального бифуркационного множества; в случае эллиптической омбилики оба множества совпадают.

На рис. 11.28 изображены карты линий уровня для представительных значений v_x/γ и v_y/γ при фиксированном значении $\omega/\gamma > 0$. Легко заметить, что пересечение множества соединения сёдел с этой плоскостью (плоскостью рисунка) состоит из трех открытых полупрямых, выходящих из начала, являющегося как видно из рисунка, точкой сборки; поэтому полное (локальное вместе с нелокальным) бифуркационное множество выглядит так, как показано на рис. 11.29. Заметим, что проход через нелокальное множество изменяет связи между втекающими и вытекающими по-

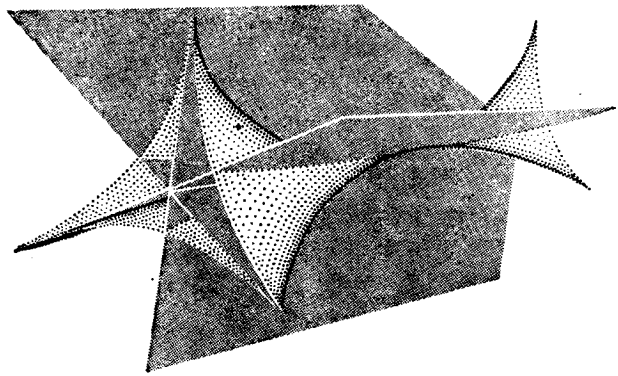


Рис. 11.29

токами; в частности, единственный „канал", соединяющий противоположные „проливы" (затемненный на рис. 11.30), перемещается.

Экспериментальная задача Берри и Мэкли состояла, таким образом, в том, чтобы попытаться „перемещаться" по возможности в пределах нелокального бифуркационного множества. То, что им удалось со столь большой точностью оставаться на этом куске поверхности, служит показателем высокой адекватности их теории.

13 Шестивалковая мельница в растворе полимера

Если глицерин (левая колонка на фото 8—9) заменить на 2%-ный раствор окиси полиэтилена в воде, то течения, отвечающие тем же значениям управляющих параметров (Ω_I, Ω_{II}, Ω_{III}), радикально изменяются (средняя колонка). Правая колонка, где показаны интенсивности двойного лучепреломления для этих течений, помогает объяснить, почему. Видно, что у потоков на выходе имеются области сильного

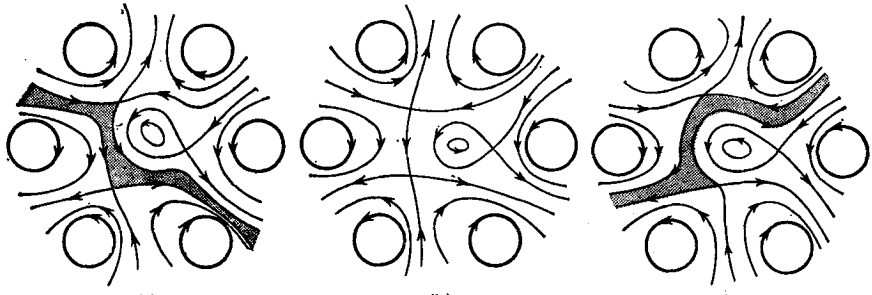


Рис. 11.30

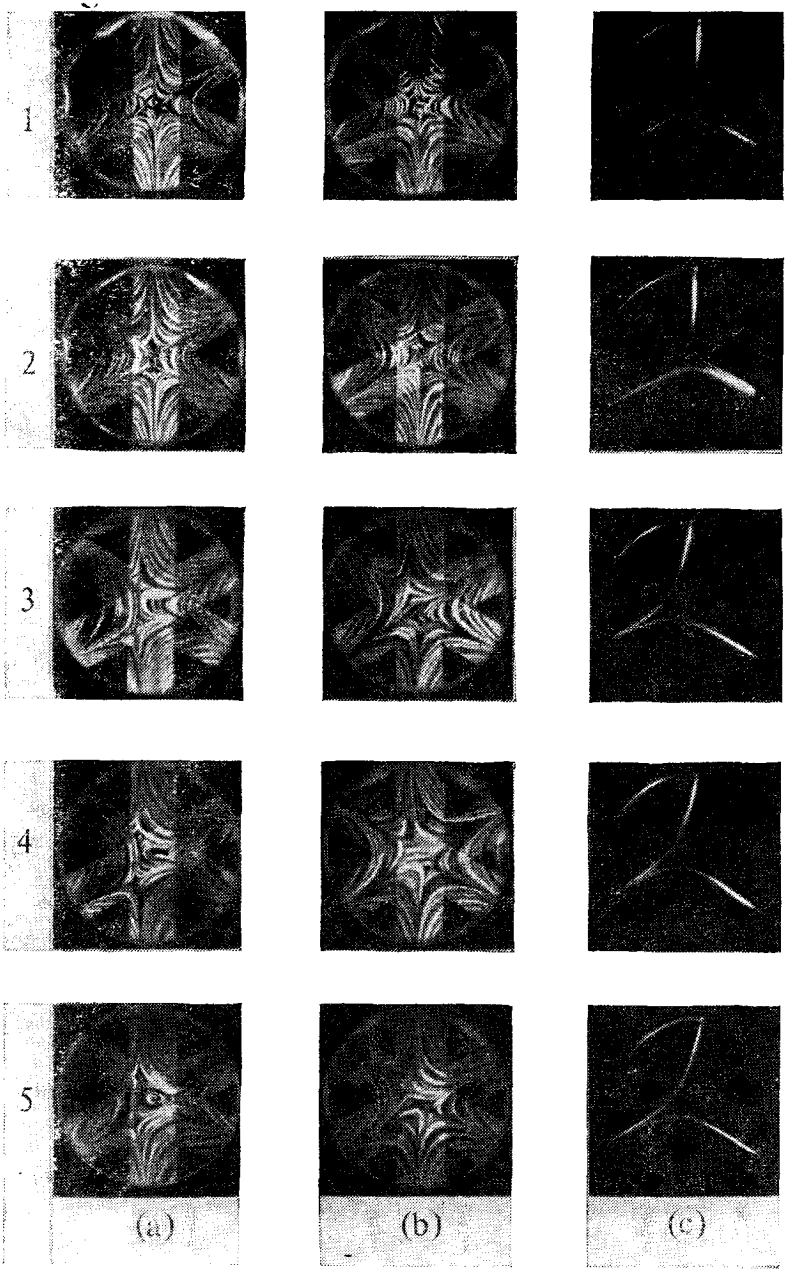


Фото 8. *Влияние полимера:* (a) *глицерин,* (b) *2%-ный раствор окиси полиэтилена,* (c) *двулучепреломление в потоке окиси полиэтилена. (Любезно предоставлено Мэлкомом Мэкли.)*

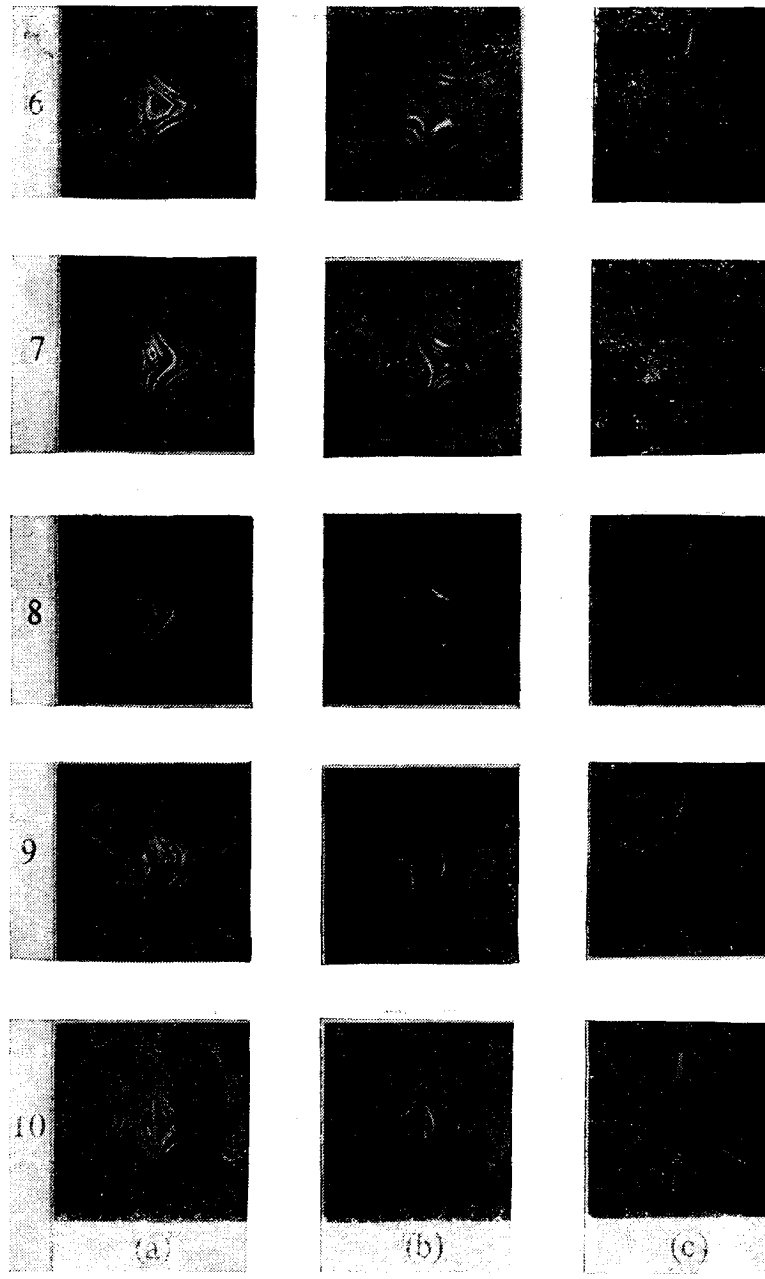


Фото 9. *Влияние полимера (продолжение).*

растяжения, что должно приводить к иным по сравнению с потоками на входе эффектам вязкости, а тогда и коэффициенты α_+ и α_- оказываются различными.

Мы не будем воспроизводить здесь физических аргументов Берри и Мэкли, объясняющих, почему α_+ должно быть больше, чем α_-; мы просто заметим, что правильность этого заключения сразу становится ясной, если в дополнение к локальному бифуркационному множеству, обсуждавшемуся этими авторами, учесть еще нелокальное множество. Действительно, это заключение означает, что плоскость в пространстве $(\omega/\gamma)(v_x/\gamma)(v_y/\gamma)$, доступная посредством управления скоростями, расположена так, как показано на рис. 11.31. Это в свою очередь означает, что наш путь (квадратный контур на рисунке) проходит через *левое* „крыло" множества соединения сёдел, как показано на рис. 11.32, а не через правое. Из рис. 11.28 видно, что эти две альтер-

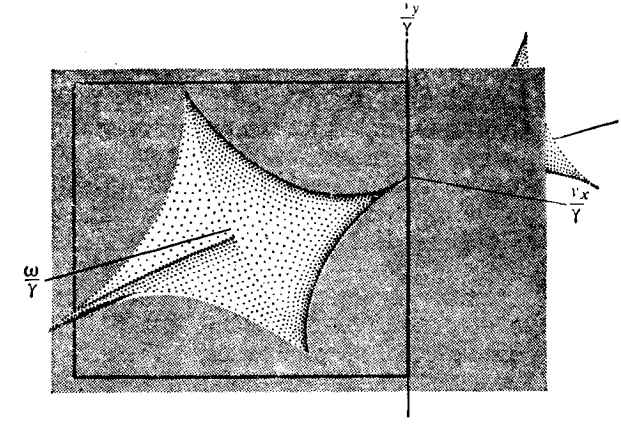


Рис. 11.31

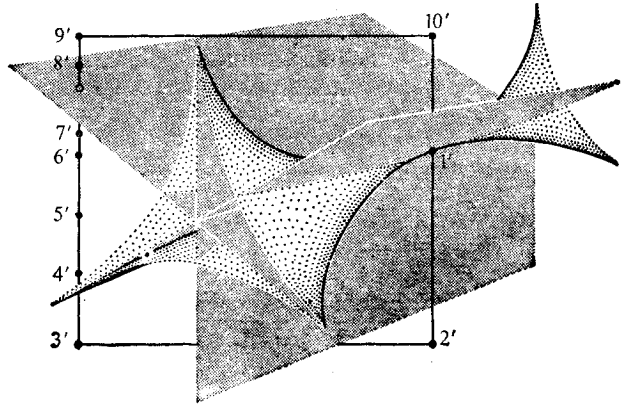


Рис. 11.32

нативы легко различимы, и сравнение с фото 8 показывает, что Берри и Мэкли правы.

Более того, отношение $(\alpha_+ - \alpha_-)/(\alpha_+ + \alpha_-)$ можно оценить количественно. А именно, если обозначить через $(\Omega_I, \Omega_{II}, \Omega_{III})$ точку управления, для которой мы пересекаем множество соединения сёдел (где-то между 7′ и 8′ на рис. 11.32), то, как следует из формул (11.1) — (11.3) § 11 и несложных геометрических рассуждений,

$$\frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-} = \frac{\Omega_I - 2\Omega_{II} + \Omega_{III}}{3(\Omega_{III} - \Omega_I)}.$$

Исследование того, как изменяется это отношение с изменением концентрации полимера в растворе, могло бы дать существенные указания относительно величины неньютоновых эффектов в растворах полимеров в условиях растяжения, особенно полезные потому, что локальное бифуркационное множество оказалось экспериментально недостижимым. (Попытка понизить эти эффекты, с тем чтобы всё-таки достичь этого множества, не удалась из-за турбулентности, возникающей при концентрациях менее 0.5% окиси полиэтилена в воде.)

Мы не станем останавливаться на том, как это семейство течений может быть использовано для изучения различных физически интересных вопросов, например для изучения молекулярного времени релаксации; отошлем читателя к Берри и Мэкли [53]. Но должно быть во всяком случае ясно, что в наших руках чувствительный и практичный инструмент исследования, причем теории катастроф принадлежит здесь роль, в которой она незаменима. Без даваемого ею знания геометрии деформации было бы нелегко при экспериментальном изучении связи между скоростями валиков и топологией течения разобраться в той сложной и запутанной картине, которая предстает перед нами на рис. 11.28 и 11.29. Было бы интересно провести дальнейшую работу в этом направлении с добавлением еще одной независимой скорости для получения полной деформации.

14 2n-валковая мельница

Для естественного обобщения предыдущих мельниц — „правильной“ (максимально симметричной) $2n$-валковой мельницы — соображения симметрии типа использованных в § 12 приводят к модельному многочлену

$$\operatorname{Re} z^n = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 - \dots$$

в качестве разложения до порядка $2n-1$ функции тока, подлежащей деформации. Этот многочлен k-определен, где

$$k=2n-3 \text{ для } n\geqslant 3,$$

и его коразмерность равна $n(n-2)$. Эти факты нетрудно проверить алгебраически, пользуясь приемом Сирсмы из гл. 8.

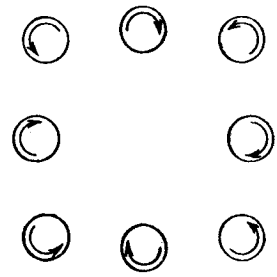


Рис. 11.33

Поскольку максимальное число критических точек, которые могут иметь вблизи нуля функции, близкие к данной функции f, равняется $\operatorname{cod}(f)+1=(n-1)^2$, мы видим, что сложность течения в $2n$-валковой мельнице, с числом точек торможения, доходящим до $(n-1)^2$, возрастает очень быстро. (Согласно теории индекса, о которой у нас здесь нет места поговорить, каждое невырожденное течение в этом семействе имеет по меньшей мере $n-1$ сёдел.) Десятивалковая мельница, пожалуй, уже выходит за пределы возможностей эксперимента, а вот для восьмивалковой можно поставить ряд интересных вопросов.

Для полной деформации потребовалось бы восьмимерное пространство управляющих параметров (это одна из катастроф двойной сборки, работа по исследованию геометрии которой еще только начата). Восемь управляющих переменных, предоставляемых скоростями валиков, не дадут трансверсальной деформации по той же причине, по какой трех скоростей не хватает для полной деформации шестивалковой мельницы. Необходимая добавочная переменная, вероятно, должна иметь геометрический характер, отвечающий изменению двойного отношения (§ 5 гл. 7) у деформируемых квартик.

Установка, подобная представленной на рис. 11.33, не обладающая поворотной симметрией порядка 8, даст, как можно ожидать из общих соображений, двойную сборку, дифференциально-геометрически отличную от деформации многочлена $\operatorname{Re} z^4=x^4-6x^2y^2+y^4$, хотя топологически точно такую же.

Эксперименты над восьмивалковыми мельницами были бы интересны не только потому, что это пролило бы дополнительный свет на неньютоновы потоки, но и потому, что это дало бы информацию о физическом значении инварианта двойного отношения, в условиях когда величину этого инварианта можно менять по произволу. (Чаще всего, как например в случае выпучивания пластин (гл. 13), двойное отношение в деформации двойной сборки с трудом поддается экспериментальному исследованию.)

12 ОПТИКА И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

В гл. 10 функции, бифуркациями которых мы интересовались, описывали потенциальную энергию; в гл. 11 это были функции тока; в настоящей главе они будут описывать время или фазу. Математические орудия, которыми мы вооружились, имеют ограниченную сферу действия (ситуации, более сложные, чем они в состоянии охватить, возникают самым естественным образом; такова, например, ситуация с „хаосом", см. § 7 гл. 17); однако эта сфера действия достаточно широка — часто шире, чем подозревают эксперты.

Мы начнем с некоторых простых примеров из классической геометрической оптики, где теория катастроф появляется очень геометричным образом и служит в первую очередь для того, чтобы с единой точки зрения представить различные, „в принципе" хорошо понятые явления. Так, мы приводим описание радуги, основанное на катастрофе складки. Однако классическое описание радуги, основанное на геометрической оптике, некорректно, ибо оно, в частности, предсказывает бесконечно большую интенсивность в точках радуги, что, как мы знаем из наблюдений, неверно. Применение того же метода к волновой теории света (классической или квантовой) ведет к глубоким идеям Маслова, Арнольда и других, касающимся „быстро осциллирующих интегралов"; теория катастроф многообразно входит сюда как часть широкого математического направления. Мы даем краткий очерк этой теории, опуская всю более глубокую математику. В этой теории делаются, в частности, предсказания об интенсивностях и интерференционных картинах, и мы приводим соответствующие иллюстрации, основанные на работах Берри. Наконец, мы показываем, как подобные методы применяются к другим задачам рассеяния, включая рассеяние звука и столкновения молекул, и обсуждаем новые приложения к объяснению миражей и звуковых ударов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

1 Каустики

В классической геометрической оптике предполагается, что свет распространяется по лучам — криволинейным путям, которые в среде с постоянным показателем преломления являются на самом деле прямыми. Простейшие оптические системы имеют „кусочно-постоянные" коэффициенты преломления, и поэтому лучи в них состоят из отрезков прямых. При отражении света (см. рис. 12.1 (a)) от отражающей поверхности, предполагаемой гладкой, угол падения θ_1 и угол отражения θ_2 равны между собой (их измеряют от нормали к поверхности в точке падения); при прохождении света через границу двух сред (см. рис. 12.1(b)) углы подчиняются закону преломления

$$\mu_1 \sin \theta_1 = \mu_2 \sin \theta_2,$$

где μ_1 и μ_2 — показатели преломления этих сред.

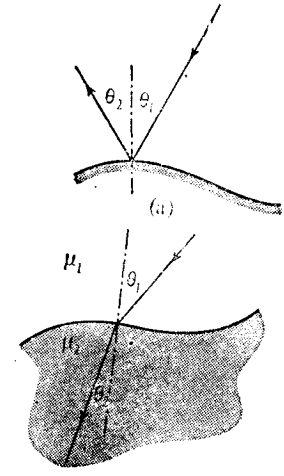


Рис. 12.1

Эти два закона представляют собой частные случаи *принципа наименьшего времени* Ферма (сформулированного с привлечением более глубоких понятий Гамильтоном). Этот принцип утверждает, что свет идет по пути, который является экстремальным (т. е. служит минимумом, максимумом или „критической точкой" иного типа) в отношении времени, затрачиваемого на его прохождение, среди всех других путей с теми же концами.

Одно из наиболее удивительных явлений в геометрической оптике — образование *каустик*; это резкие яркие кривые, которых световые лучи касаются. („Каустика" означает „жгучая"; это название оправдывается, если каустика образована солнечным светом, сопровождающимся тепловым излучением.) Проще всего наблюдать каустику в чашке кофе или в пустой кастрюле; попадающий в нее свет отражается от цилиндрических стенок и дает каустику такого вида, как на рис. 12.2. (Отметьте, что точка острия еще ярче, чем остальная часть кривой.)

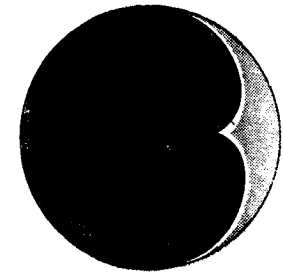


Рис. 12.2

Объяснение этого явления не ново: оно восходит по меньшей мере к преподобному Хэмнету Холдичу (1857 г.) и к обширному мемуару на эту тему, написанному в том же году Кэли [60]. Рассмотрим пучок параллельных лучей в плоскости, встречающихся с кругом (рис. 12.3) и отражающихся от его „задней стенки" согласно закону отражения. Отраженные лучи имеют *огибающую*, кривую с острием,— это и есть каустика. Интуитивно понятно, откуда возникает яркость каустики: будучи касательны к ней, образующие ее лучи почти совпадают между собой, и потому в малой час-

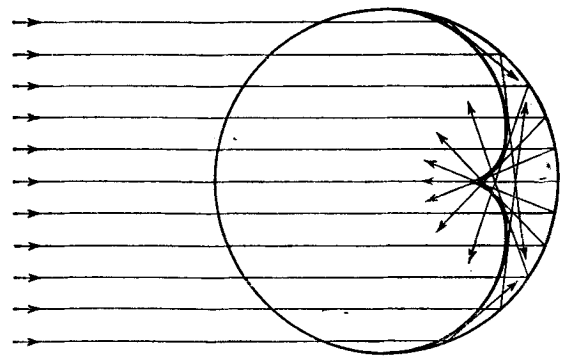


Рис. 12.3

ти пространства собирается больше лучей, чем где-либо еще, что и приводит к большей яркости. К сожалению, как мы уже отмечали, расчеты, основанные на этой идее, дают *бесконечное* значение интенсивности, в связи с чем попытки продвинуть соответствующую теорию достаточно далеко наталкиваются на большие трудности. Но в том, что касается *положения* и *формы* каустики, она совершенно правильно отражает суть дела.

Рассмотрим подробнее, как вычисляется указанная огибающая. Возьмем на плоскости единичную окружность (см. рис. 12.4) и параметризуем множество падающих лучей с помощью угла θ. Согласно закону отражения, уравнением отраженного луча XR будет

$$(y - \sin\theta)\cos 2\theta = (x - \cos\theta)\sin 2\theta.$$

Для нахождения огибающей надо продифференцировать это уравнение по θ и затем решить получающуюся систему

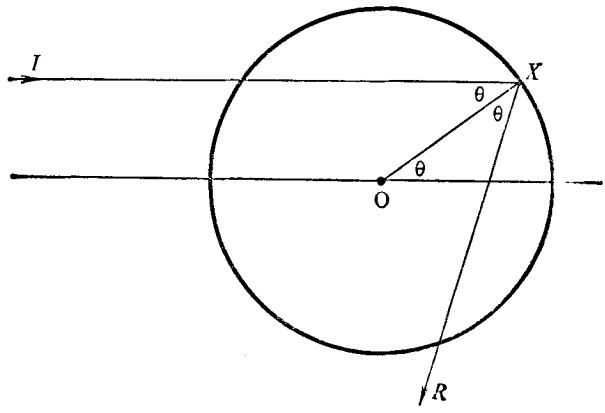


Рис. 12.4

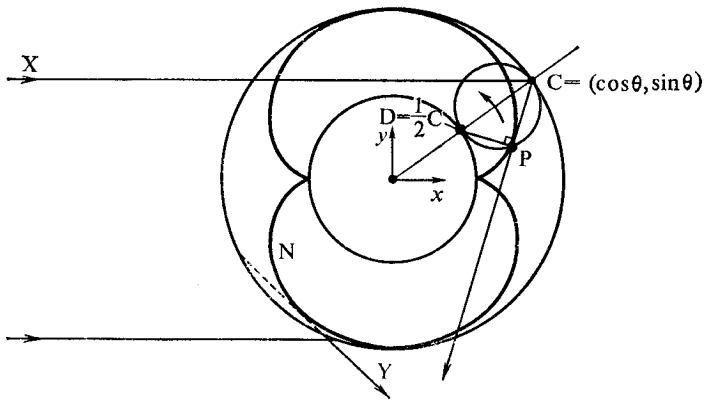


Рис. 12.5

уравнений относительно x и y; мы получим

$$x = \cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta,$$

$$y = \sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin 2\theta.$$

Это — параметрические уравнения *нефроиды* (эпициклоиды специального вида) — кривой N (рис. 12.5), которую описывает точка P на ободе колесика диаметра 1/2, катящегося по неподвижному кругу диаметра 1. (Геометрически: угол DPC прямой как опирающийся на диаметр, и потому луч, идущий через P, будет касаться кривой, по которой движется точка P при качении колесика, с мгновенным центром вращения в D; значит, все отраженные лучи будут касаться кривой N, т. е. N — их огибающая.) На практике мы видим только одну половину этой кривой, так как вторая служит огибающей *виртуальных* лучей: продолжений назад таких отраженных лучей, как Y на рис. 12.5. (Появление здесь эпициклоид является классическим фактом; еще Кэли [60] отметил, что огибающие многократно отраженных лучей будут высшими эпициклоидами.)

Кончик острия, которому отвечает $\theta=0$, находится в точке

$$(x,\ y) = \left(\frac{1}{2},\ 0\right).$$

При применении этого идеализированного анализа к реальной чашке надо еще принять во внимание третье измерение и тот факт, что лучи попадают в чашку под некоторым углом. Но осевая симметрия цилиндрического отражателя

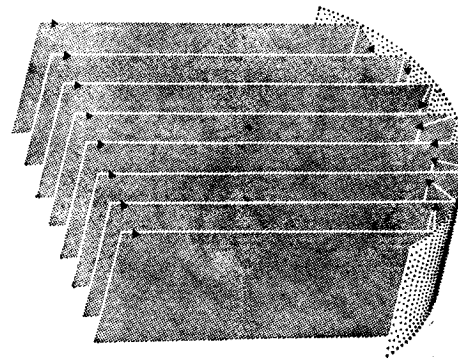


Рис. 12.6

позволяет нам ввести в рассмотрение плоскости падения света, как показано на рис. 12.6. Эти плоскости, в силу предыдущих вычислений и указанной симметрии, имеют огибающую *поверхность*, показанную на рис. 12.7. Мы наблюдаем некоторое ее горизонтальное сечение (отвечающее поверхности кофе или дну кастрюли). Этим также объясняется, почему передняя стенка чашки не загораживает лучам дорогу (как это должно было бы быть, если понимать рис. 12.3 слишком буквально): поскольку источник света находится выше края чашки, лучи проходят *над* ним. Часто это создает дополнительные „краевые эффекты" — на каустику накладываются полосы света. Нужно отдавать себе отчет, что дело здесь исключительно в том, что чашка имеет край, а не в новых каустиках. Всё это доступно экспериментальной проверке в домашних условиях.

Поучительно применить к этой задаче методы, развитые в гл. 8, и принцип Ферма. Рассмотрим некоторое семейство путей $P(X, Y, y)$, идущих из далекой точки D на отрицательной полуоси x (рис. 12.8) к точке, расположенной на правой полуокружности на высоте y, и затем попадающих в точку (X, Y). Для каждой точки (X, Y) внутри круга мы имеем однопараметрическое семейство путей, параметризованное высотой y. Какие пути возможны? (Очевидно, не тот, что показан на рисунке.) Немного подумав, легко понять, что любой „однократно отраженный" путь от D к (X, Y) должен удовлетворять условию критичности. Далее, несложное техническое рассуждение показывает, что путь $P(X, Y, y_0)$ будет критическим по отношению ко всем близким путям, если и только если

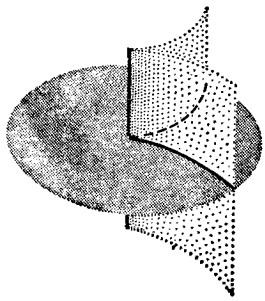


Рис. 12.7

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\text{длина } P(X, Y, y))(X, Y, y_0) = 0.$$

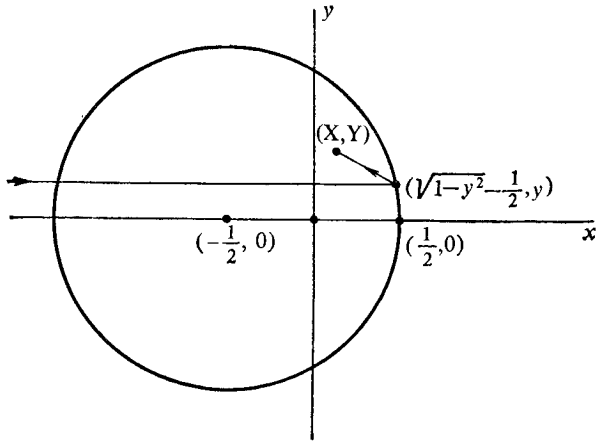


Рис. 12.8

Если точка D=(—d, 0) достаточно удалена, чтобы идущие из нее прямые можно было в рассматриваемой области считать параллельными (ситуация, к которой применимы предшествующие рассуждения), длину пути $P(X, Y, y)$ можно выразить следующей формулой:

$$f_{XY}(y)=\left(d-\tfrac{1}{2}+\sqrt{1-y^2}\right)+\left(\left(X+\tfrac{1}{2}-\sqrt{1-y^2}\right)^2+(Y-y)^2\right)^{1/2}.$$

Разлагая правую часть до четвертого порядка по y и до первого порядка по X и Y (полезное упражнение для читателя), получаем

$$F_{XY}(y)=-\tfrac{1}{4}(1+5X)\,y^4+\tfrac{1}{2}Yy^3+Xy^2-2Yy+(d+1-X).$$

При $X=Y=0$ это дает $-y^4/4$ плюс константа, но симметрия относительно оси X показывает, что в действительности

$$J^5f_{(0,0)}=-\tfrac{1}{4}y^4.$$

Применяя теорему 8.7 (§ 9 гл. 8), заключаем, что семейство f_{XY} сильно эквивалентно в некоторой окрестности точки (0,0) универсальной деформации F функции $-y^4/4$. Это ведет к локальной геометрии сборки Уитни (упражнение: привести локально F и/или f (что сложнее) к каноническому виду $-(x^4+ax^2+bx)$ с точностью до сдвигающей функции),

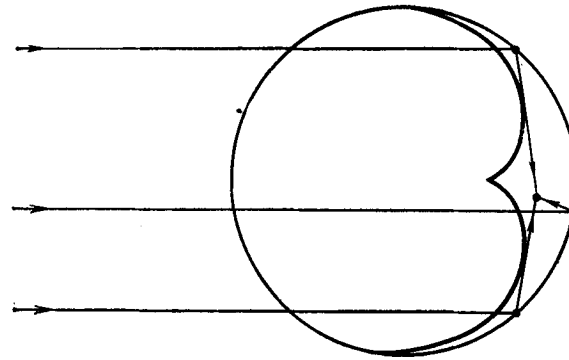


Рис. 12.9

ориентированной в направлении, которое мы уже нашли с помощью классических геометрических методов. Заметим, что здесь мы имеем двойственную, а не стандартную сборку: из трех лучей, приходящих в заданную точку внутри клюва сборки (рис. 12.9), лишь средний тратит на свой путь *наименьшее* время по сравнению со всеми соседями. Другие тратят больше, чем соседние лучи из нашего семейства (хотя и меньше, чем непрямолинейные соседи).

Аналогичный анализ можно провести и для каустической поверхности на рис. 12.7, только теперь имеются три параметра управления (X, Y, Z), из которых один (Z) является *немым*. Очевидное семейство путей двумерно и параметризуется цилиндром, а не дугой, но с помощью подходящего вертикального сдвига, зависящего от (X, Y, Z, y), высота, на которой эти пути пересекают цилиндр, делается *несущественной* переменной состояния.

Широко обобщая понятие каустик геометрической оптики, можно ввести понятие каустики в $\mathbb{R}^n$ и показать, что структурно устойчивые каустики в $\mathbb{R}^n$ являются бифуркационными множествами элементарных катастроф с n управляющими параметрами, с вытекающими отсюда теоремами типичности. Таким образом, в $\mathbb{R}^3$ мы в типичном случае будем наблюдать каустики, отвечающие складке, сборке, ласточкину хвосту, эллиптической и гиперболической омбиликам — и (локально) *только* им. (Впрочем, как отметил Берри [61, 62], при специальных условиях симметрии можно наблюдать также и атипичные каустики.) Даже на этом классическом уровне лишь теория катастроф позволяет прийти к пониманию типичных каустик природы, а не одних только искусственных каустик оптических систем (та-

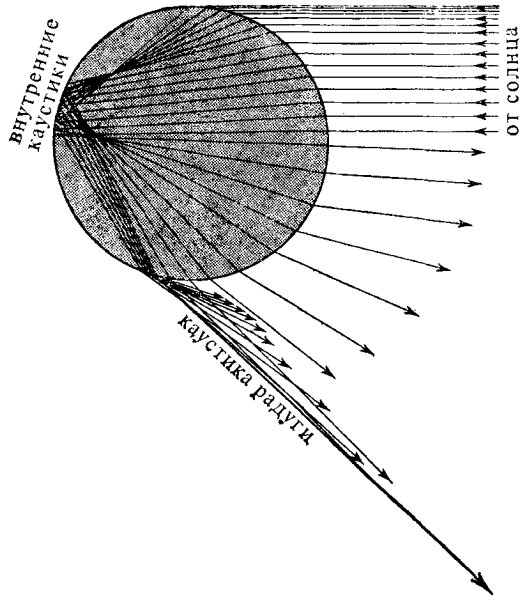


Рис. 12.10

ких как оптические приборы). Недавние работы Берри [61—64] и Берри и Ная [65], кое-что из которых мы дальше здесь обсудим, подтверждают это заявление.

2 Радуга

Из всех каустик самая известная, без сомнения, радуга, которая может служить примером катастрофы складки. Для света данной длины волны лучи, выходящие из шаровой капельки дождя (после одного внутреннего отражения), имеют огибающую каустику (рис. 12.10), которая является гладкой и (в сечении плоскостью рисунка) почти прямолинейной уже на расстоянии нескольких диаметров от капельки. Эта каустика отвечает катастрофе складки (рис. 12.11). Круговая симметрия „вращает" каустику вокруг прямой, идущей от капельки к солнцу, и результат оказывается таким, как если бы капелька излучала яркий конус света с осью, указывающей на солнце. С изменением длины волны меняется угол при вершине конуса (поскольку показатель преломления для разных длин волн разный), так что можно представлять себе капельку излучающей свет коаксиальными окрашенными конусами, как на рис. 12.12.

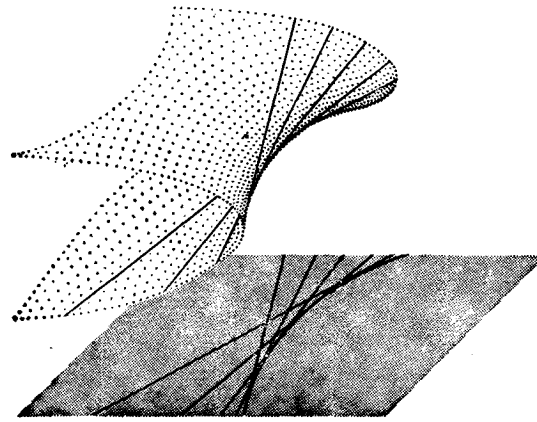


Рис. 12.11

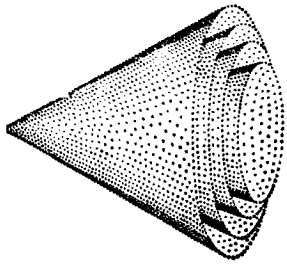


Рис. 12.12

Наблюдатель на земле увидит лучи данного цвета лишь в определенных направлениях, отвечающих углу при вершине соответствующего конуса, и в результате он видит хорошо известную многоцветную круговую дугу радуги, показанную внизу на рис. 12.13. Если смотреть с подходящей высоты, то можно наблюдать полную круговую радугу (одну такую радугу можно видеть в фильме „Гинденбург"). Радуги, состоящие из более чем одной дуги, являются результатом многократного отражения лучей.

Это описание, конечно, вполне стандартно, но оно принципиально отличается от того фиктивного объяснения, которое иногда встречается в элементарных учебниках. Там все лучи данного цвета, выходящие из капли в плоскости

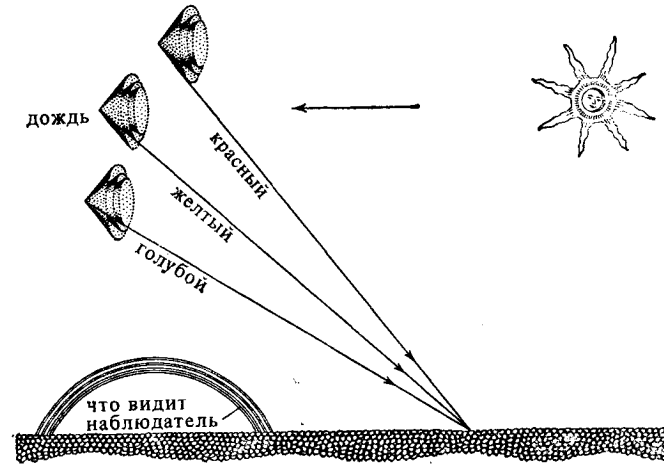


Рис. 12.13

(рис. 12.10), считаются параллельными. В действительности же лучи всех цветов выходят во всех направлениях внутри соответствующих конусов, и лишь крайне высокая интенсивность, которой обладают различные цвета в различных избранных направлениях, определяемых каустиками складки, не дает им вновь смешаться в белый цвет. Вот почему радуга ярче своего окружения, и гора или облако служат для нее темным фоном.

3 Вариационные принципы

Рисунки 12.3—12.9 можно было бы с тем же успехом использовать и в случае, если бы лучи на них изображали пути биллиардных шаров на круглом столе без трения, упруго отражающихся от борта. Конечно, при этом нужно было бы рассматривать лишь по одному пути зараз, чтобы избежать столкновений или же рассматривать вместо шаров частицы, являющиеся чем-то вроде „корпускул" Ньютона или фотонов, которые могут свободно проходить друг сквозь друга. При этом принцип Ферма — Гамильтона из § 1 превращается в различные аналогичные законы, как, скажем, закон, называемый (неправильно) „принципом наименьшего действия". („Действие" — это некоторый интеграл вдоль возможного пути частицы (или системы) в пространстве положений и моментов.) Имеет место полная аналогия со случаем двойственной сборки из § 1, и, таким образом, строго говоря, речь идет не о наименьшем, а о критическом, или *стационарном*, действии. (Даже эпитет „экстремальный" здесь не годится, ибо это предполагало бы лишь максимумы или минимумы, а могут быть и сёдла.) Некоторых это беспокоит, особенно тех, кто готов принять принцип хоть чего-нибудь *наименьшего* в качестве Закона Божественной Экономии в Природе. Причина, по которой вариационные принципы вообще работают, в значительной степени связана с причиной того, почему они оказываются неполным ответом.

С точки зрения квантовой механики каждому возможному пути частицы отвечает определенная (комплексная) вероятность. Если близким путям с одной и той же конечной точкой P отвечают вероятности с различными фазами, то эти вероятности гасят друг друга („интерферируют") и физическая вероятность движения частицы по этой дороге (квадрат модуля комплексной вероятности) низка. Но если путь оказывается стационарным для комплексной вероятности (для световых лучей ее фаза определяется тем, сколько раз длина волны укладывается в пройденном пути, или же,

что эквивалентно, просто временем, затрачиваемым на его прохождение), то близкие пути имеют одну и ту же фазу вероятности с точностью до порядка выше первого. Результаты складываются (интерферируют „созидательно"), и физическая вероятность прибытия по этому пути *или по очень близкому* становится высокой. В приложениях фазы задаются временем, действием или другой подобной величиной. Придание физическому закону формы, в которой фигурирует «наименьшее» время, действие и т. д., означает подмену физически важного условия *стационарного* времени, действия и т. д. на не имеющее физического значения утверждение, которое влечет за собой первое, но отнюдь ему не эквивалентно. (Фактически привычка говорить о „наименьшем" часто приводит к недоразумениям. Почти все знают, что геодезическая является „кратчайшим расстоянием между точками", но мало кто — что времяподобные геодезические в пространстве-времени оказываются локально *длиннейшими*, как это геометрически разъясняется у Додсона и Постона в [5].) Более полное обсуждение вариационных принципов с этой точки зрения имеется в Фейнмановских лекциях [54].

Таким образом, подход геометрической оптики заключается в точности в том, чтобы считать *наиболее вероятный* путь (задаваемый условием его стационарности) действительным путем частицы. По мере того как мы приближаемся к классическому пределу, устремляя длину волны к нулю, пучок близких почти равновероятных путей сжимается, пик вероятности растет и в пределе описание становится точным. (Мы можем приблизиться к этому пределу, либо беря всё большие частоты, либо формально устремив постоянную Планка к нулю, либо переходя к рассмотрению частиц большего, „классического" размера. Квантовомеханическая длина волны биллиардного шара примерно 10^{-40} см. Итак, приложимость вариационных принципов в классической механике объясняется квантовой механикой, где вариации получают физический смысл.)

Даже и при конечных длинах волн принимаемое в геометрической оптике приближение истинного пути стационарным будет удовлетворительным, пока действие, время или что там еще имеет этот стационарный путь *невырожденной* (т. е. морсовской) критической точкой. Для всех физических вычислений очень удобно, когда стационарный путь изолирован. Но в вырожденной критической точке (*b* или *c* на рис. 12.14) связка путей с почти одной и той же фазой гораздо шире. Мы не можем аппроксимировать поведение физической реальности Единственным Истинным Путем,

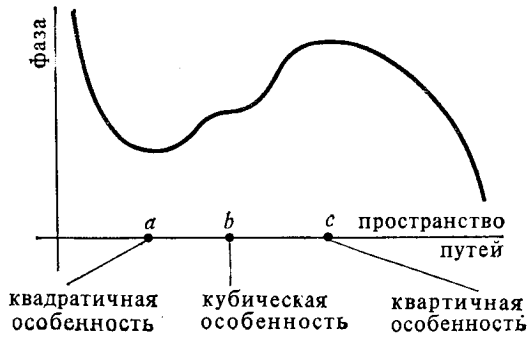


Рис. 12.14

не приходя при этом к нефизичным бесконечностям. Поэтому именно вблизи таких катастрофических точек, как точка сборки в чашке кофе или точки складки в радуге, нарушается применимость геометрической оптики. С помощью теории катастроф мы можем найти эти точки и устойчивые формы, возможные для их геометрии. Затем можно изучить то, что происходит при таких катастрофах, работая с волновым описанием света, а не с моделью частиц, неявно принимаемой в геометрической оптике. Мы развиваем этот подход в § 5, после того как в § 4 указываем ряд более конкретных физических систем, к которым применим такой подход.

4 Рассеяние

Вместо оптического рассеяния мы можем рассмотреть общую проблему теории рассеяния: пучок параллельных лучей, или частиц, или волн, или волн-частиц проходит через некий рассеивающий центр, и возникающие отклонения лучей измеряются на большом удалении (рис. 12.15). На практике это удаление столь велико, что метка, которую оставляет траектория на экране,— это почти то же самое,

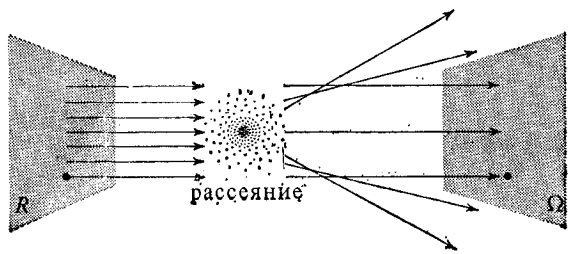
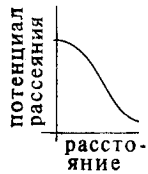


Рис. 12.15



(a)



(b)

Рис. 12.16

что и *направление*, в котором она выходит из рассеивающего центра, и яркие пятна на экране отвечают пучкам параллельных траекторий. Снова могут образоваться каустики; к их числу относится известная *квантовомеханическая радуга* (Берри [61]), порождаемая потенциалом рассеяния, который имеет вид, показанный на рис. 12.16 (a), и приводит к рассеянию, показанному на рис. 12.16 (b).

Применение вариационного подхода из § 3 дает здесь следующее. Обозначим начальное положение частицы (в *фазовом пространстве*, т. е. ее положение в физическом пространстве и момент) через R, а ее финальное положение (или направление) после рассеяния — через Ω. Тогда гамильтонов формализм дает нам гладкую функцию *действия* $\varphi(R, \Omega)$, обладающую таким свойством: лучами с финальным направлением Ω будут те лучи, начальные положения R которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R}\varphi(R,\ \Omega)=0$$

с тем самым Ω. Это очень напоминает постановку задачи из теории катастроф, в которой в качестве управляющего параметра берется Ω, а в качестве переменной состояния R. Однако действие зависит также и от пути, ведущего из R в Ω, так что пространство состояний, строго говоря, является бесконечномерным многообразием путей. На практике его часто можно свести к конечномерному, показав, что для данного Ω достаточно рассмотреть только один путь из каждого R (как мы это приняли для анализа в § 1), или, иногда, конечномерное семейство таких путей. Дальше мы игнорируем эту трудность, поскольку иное возможное описание задачи в терминах „лагранжевых многообразий" позволяет полностью избежать ее, по крайней мере в вопросе о каустиках.

Если критическая точка функции φ вырожденна, то физически мы имеем случай *угловой фокусировки*, когда целый пучок лучей, идущих из R-пространства, собирается в близких точках Ω-пространства (рис. 12.17). Поэтому яркие каустики наблюдаются на бифуркационном множестве нашей катастрофы (в Ω-пространстве). По теореме Тома, если Ω есть $\mathbb{R}^2$ (физически — экран), то каустики типично будут представлять собой (локально) сборки и складки. На рис. 12.18 изображено типичное множество каустик для преломления в неправильной линзе.

Многие системы очень четко поддаются этому подходу. „Совершенная" линза — это линза, которая преломляет все лучи, параллельные ее оси (во всяком случае, все до-

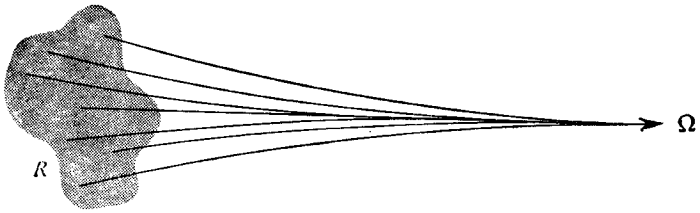


Рис. 12.17

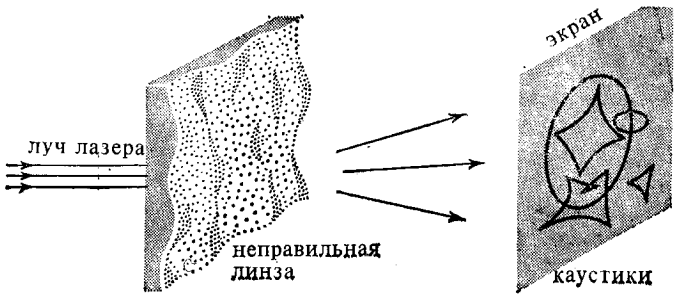


Рис. 12.18

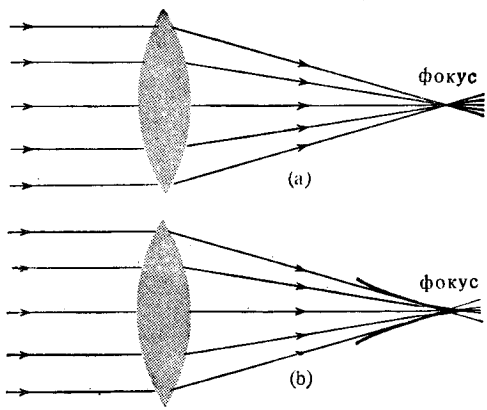


Рис. 12.19

статочно близкие к ней), направляя их в одну точку — *фокус* (рис. 12.19 (a)). Очевидно, эта ситуация атипична, и на практике мы получаем картину, показанную на рис. 12.19 (b), с каустикой сборки, точка острия которой совпадает с фокусом. Этот эффект в линзах называется *сферической аберрацией*. В действительности, поскольку эту картинку надо еще прокрутить вокруг оси, мы имеем здесь „катастрофу с симметрией" бесконечной коразмерности (в том смыс-

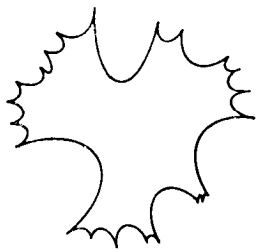


Рис. 12.20

ле, что требуется бесконечно много параметров деформации, чтобы разрушить симметрию). В оптике известны и разные другие виды аберрации линз (наиболее важны после сферической такие аберрации, как *кома*, *астигматизм*, *кривизна Петцваля и дисторсия*), которые, может быть, каким-то образом отвечают более важным членам деформации. Однако до сих пор здесь мало что сделано.

Свет, преломленный в асимметричной капельке воды на стекле, дает в типичном случае такие каустики, как на рис.12.20; при этом каустики соответствуют тем местам капельки, где гауссова кривизна равна нулю. На фото 10, сделанном Майклом Берри из Бристольского университета, мы видим в точности такие же каустики, образованные пучком лазерного света, прошедшего через капельку.

Хотя форма каустик обнадеживает, мы пока не можем объяснить распределение света на фотографии. Присутствие многочисленных дифракционных полос делает ясным, что геометрической оптики здесь недостаточно и требуется волновая теория. Такая теория сейчас существует, и она оказывается довольно тонкой. Мы посвящаем ей несколько следующих параграфов.

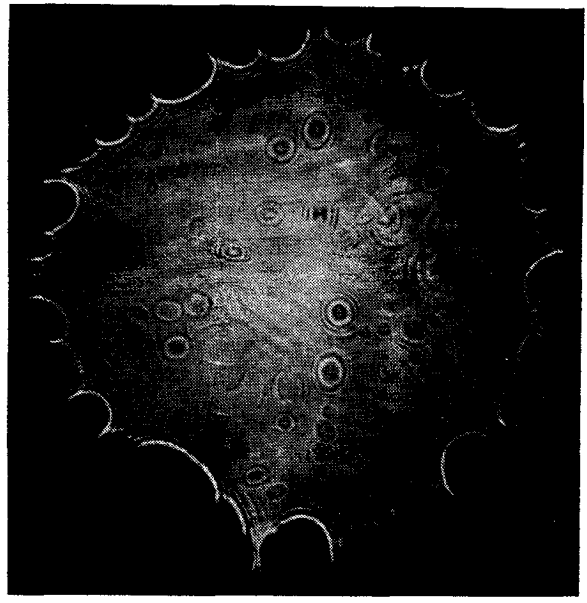


Фото 10. *Каустики сборки, образованные лазерным лучом, прошедшим сквозь каплю неправильной формы. (Любезно предоставлено Майклом Берри.)*

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

5 Асимптотические решения волновых уравнений

Подход к проблеме интенсивности (распределения света на фото 10 и т. п.) дает теория Маслова „быстро осциллирующих интегралов" (Маслов [66]), которая привела Арнольда [26] к его варианту классификации элементарных катастроф. Идеи Маслова опираются на более ранние методы, использовавшиеся в аналогичных задачах, и мы не будем слишком углублятья в мотивировки тех точных формулировок, которые даются ниже. Некоторые особо ученые части теории мы опустим (как ни существенны они для строгого изложения), поскольку они требуют глубокой специальной подготовки. Наше изложение основано на статье Шазарэна [67], к которой мы и должны отослать заинтересованного читателя за дальнейшими подробностями. (См. также Дёйстермат [41].)

При исследовании волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \nabla^2 v \quad \left(\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

часто бывает желательно найти решения, которые не меняются со временем по амплитуде, а лишь осциллируют, т. е. решения вида

$$v(x,\ t) = e^{i\tau t} u(x) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n),$$

где τ — вещественный параметр. Иногда такие решения называют *стационарными*, но мы хотим избежать путаницы с другими употреблениями этого слова (как, скажем, в вариационных принципах). Они отвечают гармоникам колеблющейся струны, в которых все точки синхронно, в такт, колеблются по закону $\sin(\tau t) = \mathrm{Re}(e^{i\tau t})$, и лишь амплитудный коэффициент $u(x)$ зависит от наблюдаемой точки. (Там, где u меняет знак, фаза колебаний изменяется на π.) Подставляя указанное выражение в волновое уравнение, приходим к уравнению

$$(\tau^2 + \nabla^2) u = 0. \tag{12.1}$$

Подобным же образом для уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 v - V(x) \cdot v = 0$$

мы ищем не изменяющиеся по амплитуде решения вида

$$v(x,\ t) = e^{itE/\hbar} u(x)$$

с энергией E (где $2\pi\hbar$ — постоянная Планка); здесь мы приходим к уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + (E - V(x))\cdot u = 0, \tag{12.2}$$

которое обнаруживает существенное сходство с уравнением (12.1), причем роль τ играет $1/\hbar$. Общая теория применима к классу дифференциальных операторов вида

$$P\left(\tau,\ x,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{m} \tau^{m-k} P_k\left(x,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где P_k — многочлен степени не выше k с гладкими коэффициентами. Рассматривается уравнение

$$Pu = 0.$$

Вместо того чтобы решать это уравнение *точно*, оказывается полезным отыскивать *асимптотические решения* $u(x, \tau)$, удовлетворяющие условию

$$P\left(\tau,\ x,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ \tau) = O(\tau^{-\infty}), \tag{12.3}$$

где символ $O(\tau^{-\infty})$ обозначает функцию, которая *быстро убывает* с ростом τ (т. е. быстрее, чем τ^{-n}, для любого положительного целого n). Два асимптотических решения считаются *эквивалентными* (запись: $u \sim v$), если $u - v = O(\tau^{-\infty})$. Интерпретируется это в том смысле, что при больших τ асимптотическое решение очень близко к настоящему, а эквивалентные решения почти равны между собой. В некоторых задачах (вроде дифракции на острых углах) этот подход оказывается не вполне успешным, но часто его успех триумфален. Деятельность физика в значительной мере состоит в том, чтобы приходить к трудным уравнениям и затем искать что-нибудь, что заменило бы их решение.

По аналогии с (12.1) и (12.2) попытаемся искать эти асимптотические решения в виде

$$u(x,\ \tau) = e^{i\tau\varphi(x)}\, a(x,\ \tau),$$

где $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, называемая *фазой*, а $a\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, называемая *амплитудой*. Здесь уже точки колеблются не в такт, как выше в случае гармоник, а одни точки опережают другие по фазе. Те точки, в которых u имеет заданную фазу

$$\theta = \arg(u) = \arg\left(e^{i\tau t} e^{i\tau\varphi(x)} a(x,\ t)\right)$$
$$= \arg\left(e^{i\tau\,(t+\varphi(x))}\right) = \tau(t + \varphi(x))$$

(с точностью до целого кратного 2π), движутся со скоростью $(\nabla\varphi)^{-1}$, при условии что φ не имеет особенностей. Это дает (если оставить в стороне особенности) ясное представление о том, в каком направлении движется „волна", т. е. в каком направлении идет луч, проходящий через x. Если в общей картине поля лучей несколько лучей проходят через одну и ту же точку x и рядом нет каустики, то решение вблизи x получается суперпозицией:

$$u(x,\ t) = e^{i\tau t}(u_1(x,\ t) + \ldots + u_r(x,\ t)$$
$$= e^{i\tau t}(e^{i\tau\varphi_1(x)}\, a_1(x,\ \tau) + \ldots + e^{i\tau\varphi_r(x)}\, a_r(x,\ \tau)).$$

Допустим, что амплитуда a обладает *асимптотическим разложением*

$$a(x,\ \tau) \sim \tau^{\mu}\left[a_0(x) + \frac{1}{\tau}a_1(x) + \frac{1}{\tau^2}a_2(x) + \ldots\right]$$

(имеющим, как говорят, *степень* μ), и подставим его в (12.3). Это дает дифференциальное уравнение для φ и систему уравнений, выражающих каждое a_j через a_0, a_1, . . ., a_{j-1}. В принципе эти дифференциальные уравнения могут быть решены известными методами; для φ мы приходим к уравнению „типа Гамильтона — Якоби", которое *в типичном случае* разрешимо, если выполнены некоторые условия трансверсальности; для a_j уравнения оказываются *линейными*, причем на практике бывает достаточно рассмотреть лишь малые значения j.

6 Быстро осциллирующие интегралы

При применении изложенного выше метода возникают трудности, связанные с тем, что он позволяет получить решения лишь в малой области $\mathbb{R}^n$. *Глобальное* решение указанного типа может оказаться невозможным, поскольку уравнение для φ не решается вблизи каустики. (Геометрически это уравнение дает „график" типа изображенного на рис. 12.21, который не определяет никакой функции, будучи „многозначным".) Чтобы исправить положение, Маслов [66] предложил использовать *быстро осциллирующие интегралы*, имеющие вид

$$u_{\varphi a}(x,\ \tau) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\tau\varphi(x,\ \alpha)}\, a(x,\ \alpha,\ \tau)\, d\alpha, \qquad (12.4)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^N$ — некоторый параметр. С интуитивной точки зрения такой интеграл представляет собой *бесконечную* суперпозицию, аналогичную рассмотренной выше конечной, при-

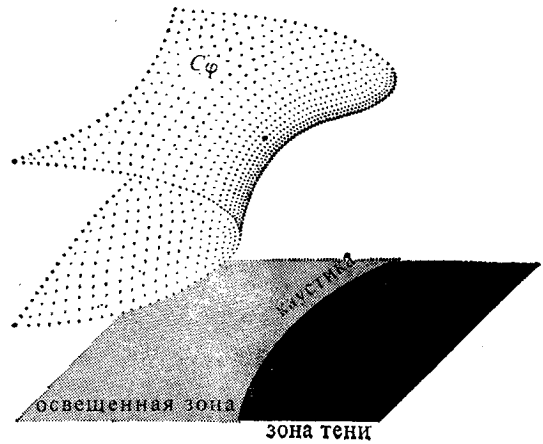


Рис. 12.21

чем допускаются все те особенные, почти равновероятные лучи, которых мы можем ожидать согласно анализу § 3. В результате, в отличие от конечных суперпозиций, он может быть распространен за каустику до глобального решения того же типа. Правильная глобальная постановка задачи дается в рамках теории *лагранжевых многообразий* (Дёйстермат [41], Арнольд [26, 59]), но у нас сейчас нет в распоряжении необходимых понятий для описания соответствующего формализма; да и, кроме того, глобальная проблема снова быстро сводится к локальной (после того как она поставлена правильно!).

Мы продолжаем говорить о φ как об (N-параметрической) фазе, а об a — как об (N-параметрической) амплитуде. Допустим, что a допускает асимптотическое разложение

$$a(x,\ \alpha,\ \tau) \sim \tau^{\mu}\left[a_0(x,\ \alpha) + \frac{1}{\tau}a_1(x,\ \alpha) + \ldots\right],$$

и обобщим классический метод на этот параметрический случай.

Главное здесь состоит в том, чтобы описать асимптотическое поведение (при больших τ) функции (12.4). Можно показать, что оно зависит лишь от тейлоровских разложений для φ и a на множестве

$$C_\varphi = \left\{(x,\ \alpha)\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(x,\ \alpha) = 0\right\}.$$

Причина этого примерно такая. Подынтегральное выражение в (12.4) осциллирует все быстрее и быстрее при увеличении τ. Вне C_φ эти колебания будут гасить друг друга.

Аппроксимация интеграла (12.4) суммой

$$\sum_{j=1}^{r} e^{i\tau\varphi(x,\,\alpha_j(x))}\, a(x,\,\alpha_j(x),\,\tau),$$

где $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_r(x)$ являются при данном x решениями уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,\,\alpha)=0,$$

называется *методом стационарной фазы* или же *методом ВКБ* (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна). Вблизи тех точек x, где $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_r(x)$ все оказываются морсовскими особенностями для φ_x, они будут, как показывают результаты гл. 4, локально представимы как функции от x (что и отражено в обозначениях), и потому этот метод, эквивалентный по существу геометрической оптике, работает удовлетворительно. Но вблизи вырожденных особенностей интеграл нужен весь.

Далее, само определение C_φ заставляет подумать о формализме теории катастроф: примем α за переменную состояния, x за параметр управления, а φ за потенциал,— и тогда C_φ оказывается многообразием катастрофы (в случае если оно *есть* многообразие!), определяемым критическими точками φ. Этот формализм очень плодотворен, так как он позволяет привести интеграл к некоторому стандартному виду и вычислить многие из интересующих нас величин на основе рассмотрения небольшого числа частных случаев.

Рассмотрим поведение интеграла (12.4) вблизи данной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ для трех различных случаев.

(a) *Зона тени.* Не существует такого вещественного числа α, чтобы $(x_0, \alpha) \in C_\varphi$, т. е. x_0 не лежит под множеством C_φ (в его образе при проекции). В решение входят лишь комплексные корни уравнения $(\partial/\partial\alpha)\,\varphi(x, \alpha)=0$, и требуется изучение таких объектов, как „ус“ в катастрофе ласточкина хвоста (Постон и Стюарт [25], стр. 130], где совпадают *комплексные* корни. Не без некоторого труда обнаруживается, что они не имеют физического значения, по крайней мере в случае ласточкина хвоста.

(b) *Освещенная зона.* Здесь существуют точки α, для которых $(x_0, \alpha) \in C_\varphi$, но все отвечающие им критические точки являются морсовскими: x_0 лежит в проекции многообразия катастрофы, но не в бифуркационном множестве.

(c) *Каустика.* Одна или несколько критических точек вырожденны, и потому x_0 лежит в бифуркационном множестве.

На рис. 12.21 эти три области изображены для случая, когда φ определяет катастрофу складки; исторически это был первый хорошо понятый случай.

Интенсивность в зоне тени быстро стремится к нулю с ростом τ или расстояния до каустики, и мы не будем ею дальше заниматься. К особенностям морсовского типа в освещенной зоне, которые локально можно считать функциями $(\alpha_j(x))$ от x, мы применяем метод стационарной фазы, уделяя внимание предельному переходу при $\tau \to \infty$. Подставляя в наш интеграл асимптотическое разложение, которое, как предположено выше, имеется для a, мы получаем вклад каждого листа в виде

$$u_j(x,\ \tau) \sim \frac{\tau^{\mu}(2\pi/\tau)^{N/2}}{\det H_{\alpha_x}\varphi}\left(a_0(x,\ \alpha_j(x)) + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{[i(\tau\varphi(x,\ \alpha_j(x)) + \pi\sigma/4)]}\right),$$

где $H_{\alpha_x}\varphi$ — матрица Гессе для $\varphi(x,)$ в точке $\alpha(x)$, а σ — сигнатура отвечающей ей квадратичной формы. (Фазовый множитель $\pi\sigma/4$ постоянен над каждым листом морсовских точек и приобретает значение, лишь когда мы комбинируем или сравниваем вклады различных листов в данной точке.) Очевидно, для фиксированного τ это выражение расходится, когда матрица Гессе приближается к вырождению при движении x, и мы не можем поэтому использовать эту оценку вблизи вырожденных критических значений. *Насколько* близко от них мы можем ее использовать, составляет задачу, которую приходится решать отдельно для каждой катастрофы.

Остается случай каустики. Оценки здесь, конечно, зависят от типа каустики. Определим *порядок* каустики как точную верхнюю грань множества чисел $\nu \in \mathbb{R}$, для которых

$$u(x,\ \tau) = O(\tau^{\nu})$$

вблизи x_0 для всех u данного типа. Задача подсчета порядка локальна, и потому возможно применение техники деформаций теории катастроф.

7 Универсальные деформации

Мы можем сосредоточить свое внимание на „типичных" случаях. Рассмотрим те φ, которые возникают в типичных семействах, даваемых классификационными теоремами теории катастроф, т. е. пусть φ эквивалентно одной из стандартных катастроф. Тогда φ служит деформацией для неко-

торой функции

$$g(\alpha)=\varphi(x_0, \alpha)$$

вблизи точки $x=x_0$. Предположим, что универсальная деформация в смысле гл. 8 здесь такова:

$$\psi(y, \alpha)=g(\alpha)+y_1g_1(\alpha)+\ldots+y_pg_p(\alpha),$$

где $y_1, \ldots, y_p$— некая новая система параметров управления. Мы также можем и g заменить на любую эквивалентную функцию (в смысле теории катастроф) и тем самым можем считать, что ψ является одной из элементарных катастроф в стандартной форме с полиномиальными $g, g_1, \ldots, g_p$.

Далее, можно доказать, что асимптотическое поведение интеграла (12.4) полностью определяется асимптотическим поведением такого же интеграла, в котором φ заменено на ψ. (Фактически, если включить в деформацию постоянный член $y_{p+1}g_{p+1}$, где $g_{p+1}(\alpha)\equiv 1$, то асимптотическое поведение останется тем же; затем этот постоянный член можно вынести за знак интеграла и избавиться от него, если угодно. Деформации с постоянными членами нужны, когда мы имеем дело с сильной формой правой эквивалентности, обсуждавшейся в § 5 гл. 8, в то время как для элементарных катастроф мы используем более слабую форму, при которой постоянные члены в деформацию не вводятся. В данном случае можно использовать обе формы, причем математически это не имеет большого значения, но физически различия в получающихся формулах оказываются важными.)

Тем самым наша задача сводится к рассмотрению стандартных интегралов

$$G(y, \tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp[i\tau(g(\alpha)+y_1g_1(\alpha)+\ldots+y_pg_p(\alpha))]\,d\alpha,$$

где $g(\alpha)+y_1g_1(\alpha)+\ldots+y_pg_p(\alpha)$ — некоторая элементарная катастрофа в стандартной форме. Поскольку все g являются в таком случае многочленами, мы видим, что этот интеграл для фиксированного y имеет асимптотическое разложение вида

$$\sum_{\nu}\sum_{k=0}^{N-1}C_{\nu k}\tau^{\nu}(\ln\tau)^k.$$

Теперь остается лишь уточнить значения показателей и коэффициентов и зависимость всего от y. В принципе это можно проделать для всего списка элементарных катастроф, коль скоро такой список составлен. Здесь мы сделаем это только для семи катастроф коразмерности $\leqslant 4$.

8 Порядки каустик

Для каустики типа сборки можно принять

$$\psi(y,\ \alpha) = -\frac{\alpha^3}{3} + \alpha y,$$

где $\alpha,\ y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$G(y,\ \tau) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[i\tau\left(\alpha y - \alpha^3/3\right)\right] d\alpha.$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью стандартных в математической физике приемов. Заменяем переменную α на

$$\beta = \tau^{1/3}\alpha$$

и получаем

$$G(y,\ \tau) \sim \tau^{-1/3}\,\mathrm{Ai}\,(\tau^{2/3} y), \tag{12.5}$$

где Ai — *функция Эйри* (Эйри [68], Абрамовиц и Стиган [69]), определяемая формулой

$$\mathrm{Ai}(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[i\left(z\beta - \beta^3/3\right)\right] d\beta.$$

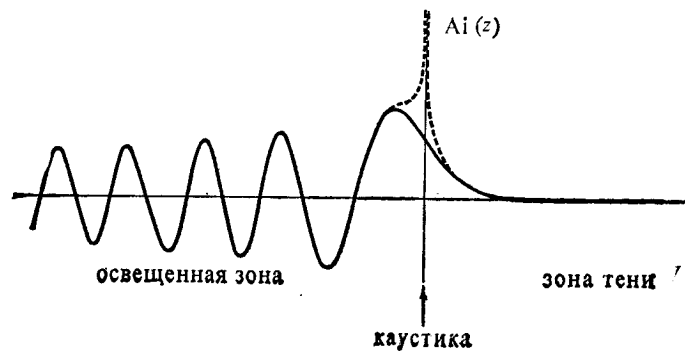


Рис. 12.22

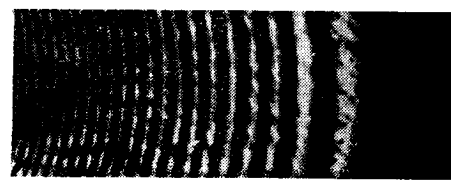


Фото 11. *Дифракционные полосы Эйри для каустики складки (увеличенный фрагмент фото 13). (Любезно предоставлено Майклом Берри.)*

Эту функцию можно представить степенным рядом, можно также написать для нее линейное дифференциальное уравнение второго порядка; ее поведение хорошо изучено. На рис. 12.22 представлен график функции Эйри. Штриховая линия показывает ее „асимптотическую" форму (полученную при помощи метода стационарной фазы на морсовских критических точках), которая имеет бесконечный пик в каустике геометрической оптики. Область хорошего согласия между этой аппроксимацией по методу стационарной фазы, отвечающей геометрической оптике, и функцией Эйри выделяется замечательно точно. Вычисления, касающиеся такого рода согласованности, необходимые для физических приложений, были проделаны также для каустики сборки Уитни (Холфорд [70], Берри [61]); сейчас ведутся вычисления для высших катастроф. На рис. 12.22 следует отметить резкое падение в зоне тени, пик вблизи каустики геометрической оптики (но не в ней самой — там интенсивность, вовсе не бесконечная, равна примерно двум третям пикового значения) и, наконец, осцилляции в освещенной зоне. Как показывает формула (12.5), по мере возрастания τ пик $G(y, \tau)$ поднимается и приближается к каустике геометрической оптики. Стоит сравнить рис. 12.22 с фото 11 (часть фотографии, полученной Берри [61]), демонстрирующим экспериментально наблюденные интенсивности в каустике складки.

Функция Эйри *ограничена* для всех z, что позволяет подсчитать порядок каустики сборки; он равен 1/6. Этот результат (а также и многое другое) был получен „голыми руками" Лудвигом [71].

Для катастрофы сборки мы можем принять

$$\psi(y,\ \alpha) = \frac{\alpha^4}{4} + \frac{1}{2} y_1 \alpha^2 + y_2 \alpha$$

(как можем взять и любую другую подходящую форму). Функция Эйри заменяется *на функцию Пирси* (Пирси [72])

$$\mathrm{Pe}(z_1,\ z_2) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[i\left(\beta^4/8 - z_1(\beta^2/2) + z_2\beta\right)\right] \mathrm{d}\beta$$

(см. Берри [61]). Здесь взяты нестандартные коэффициенты, которыми пользовался сам Пирси. На рис. 12.23 изображены линии уровня функции $|\mathrm{Pe}(z_1, z_2)|^2$, дающей в приложениях к оптике распределение интенсивности. Графики, представляющие полное значение (комплексное число) этой функции (в форме $re^{i\theta}$), можно найти у Пирси [72]; они воспроизведены также у Коннора [73] и Холфорда [70].

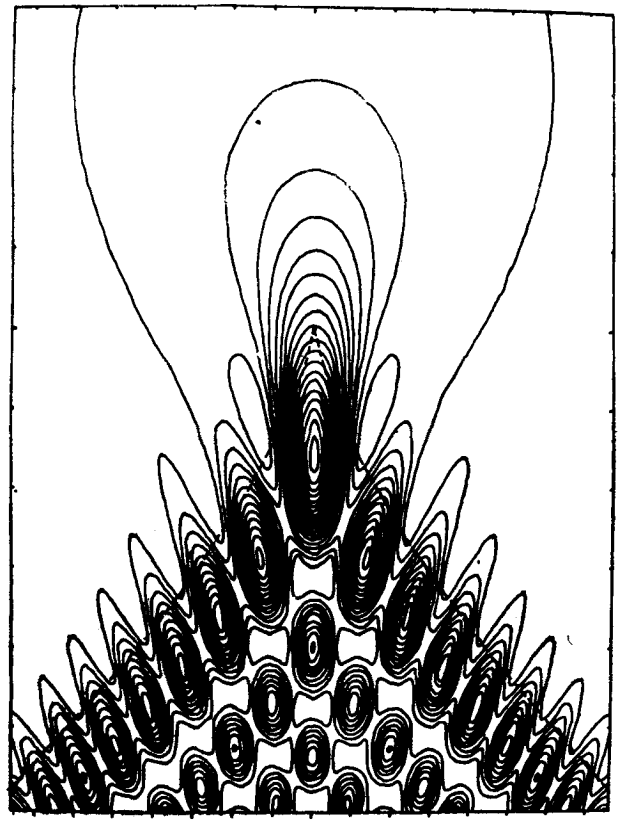


Рис. 12.23

Рисунок 12.23 стоит сравнить с фото 12, также полученным Берри [61], на котором видны экспериментально наблюденные дифракционные полосы вблизи каустики сборки.

Функция Пирси тоже ограничена, и вычисление порядка каустики дает значение 1/4. Порядки семи каустик, отвечающих катастрофам коразмерности $\leqslant 4$, таковы:

складка	1/6
сборка	1/4
ласточкин хвост	3/10
бабочка	1/3
эллиптическая омбилика	1/3
гиперболическая омбилика	1/3
параболическая омбилика	3/8

Арнольд [74] дал таблицы порядков каустик в высших коразмерностях (под названием *индексов особенностей*).

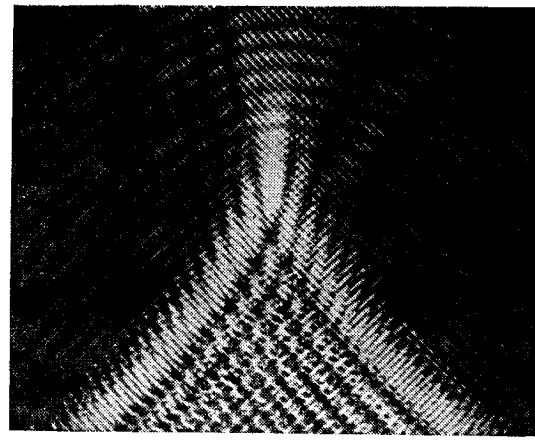


Фото 12. Тонкая структура каустики сборки; видны: распадение на отдельные дифракционные пятна, картина Эйри для каустик складки и картина Пирси для точки сборки (Берри [61], рис. 7(b)).

Заметим, что порядок сборки в полтора раза превышает порядок складки; этим объясняется бо́льшая яркость в месте острия сборки на рис. 12.2.

Много подсчетов остается еще произвести для высших каустик. Привлекательный момент здесь заключается в том, что, в силу теоремы Тома, утверждающей, что почти всё является устойчивым и локально имеет одну из таких вот форм, результаты этих вычислений, проведенных однажды, можно будет использовать снова и снова. „Атипичные" формы — если оставить в стороне те, что связаны с повсеместными симметриями,— будут очень редки. Еще 15 лет назад никто не ожидал, что можно будет найти основания, и притом столь прочные, для того чтобы ограничиться рассмотрением конечного списка.

ПРИЛОЖЕНИЯ

9 Рассеяние на кристаллической решетке

Теперь покажем, как намеченная выше теория может служить для предсказания. Мы следуем работе Берри [61] о рассеянии атомов кристаллом. С точки зрения пространственного расположения атомов кристалл представляет собой правильную решетку. Поскольку для атомов квантовомеханические эффекты не проявляются слишком сильно, мы можем воспользоваться так называемой „квазиклассической" механикой и считать рассеиваемые атомы упругими частицами, а поверхность кристалла волнообразной упругоотражающей поверхностью, или, эквивалентно, можем заменить траектории атомов лучами света, а крис-

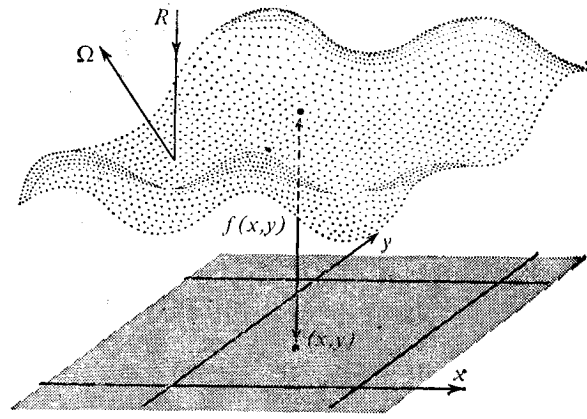


Рис. 12.24

талл — волнообразным зеркалом с совершенным отражением.

Выберем в горизонтальной плоскости координаты (x, y), и пусть $f(x, y)$ обозначает высоту поверхности кристалла над этой плоскостью (рис. 12.24). Тогда f является дважды периодической функцией; для простоты мы возьмем случай прямоугольной решетки, так что f периодична по x и по y в отдельности, скажем с периодами

$$f(x+\eta,\ y)=f(x,\ y)=f(x,\ y+\zeta).$$

Классически интенсивность, наблюдаемая в направлении Ω, задается формулой

$$I=|J(\Omega)|^{-1},$$

где $J(\Omega)$ — матрица Якоби векторной функции Ω (от переменных x и y),

$$\Omega=\frac{-2\nabla f(x,\ y)}{1+(\nabla f(x,\ y))^2};$$

здесь $\Delta f=(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$. Отсюда следует, что

$$I(\Omega)=\sum\frac{1}{H(R_i)},$$

где H — определитель матрицы Гессе функции f, а суммирование ведется по всем R_i, таким что вышедшие из них лучи отразились в направлении Ω.

Читателю легче будет понять, какую роль здесь играет указанный определитель, если он рассмотрит двумерный случай рассеяния вертикально падающих лучей от графика $\sin x$ (рис. 12.24*а*). Вершины и впадины отражают

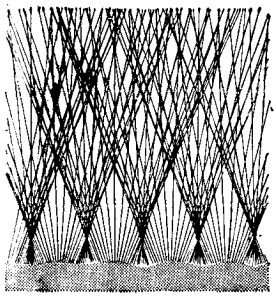


Рис. 12.24*а*. *Отражение вертикальных лучей от графика функции* $(\sin x)/10$. *Наблюдаемые на большом удалении (в дальнем поле) каустики возникают от точек перегиба. Экран на конечном расстоянии покажет копию картины дальнего поля для каждого освещенного периода, немного смещенную и дающую эффект пятен (дифракция Брэгга), видный на фото 12.*

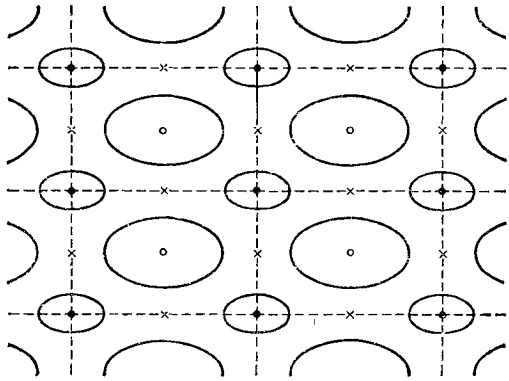


Рис. 12.25

вертикально вверх; когда мы идем от вершины к впадине, направление рассеяния сначала отклоняется от вертикали, а потом возвращается к ней: „поворачивает назад" оно в том месте, где обращается в нуль вторая производная, хотя первая производная там и ненулевая. Рассеяние света при прохождении *через* преломляющую поверхность носит близкий характер.

Таким образом, мы ожидаем, что каустикой будет служить образ при отображении $R \to \Omega$ той части поверхности кристалла, где f имеет нулевой определитель матрицы Гессе.

В простейшем случае эта поверхность выглядит, как показано на рис. 12.25. Жирными точками помечены максимумы (отвечающие местам, где в кристаллической решетке располагаются атомы и где наиболее велики силы отталкивания), кружочками — минимумы (места, дальше всего отстоящие от атомов решетки), а крестиками — сёдла. Штриховыми линиями показана ячеистая структура кристаллической решетки. Сплошные линии — это линии, на которых обращается в нуль определитель матрицы Гессе; в типичном случае мы имеем по замкнутой кривой вокруг каждого максимума и каждого минимума.

Если мы наблюдаем рассеяние с большого расстояния, мы можем сосредоточить свое внимание на какой-нибудь одной ячейке; тогда у нас будут ровно две замкнутые кривые нулевого определителя и, значит, можно ожидать, что и каустика будет состоять из двух замкнутых кривых (возможно, с особенностями).

Простейший для вычислений случай дается функцией

$$f(x, y) = A \cos 2\pi x/\eta + B \cos 2\pi y/\zeta.$$

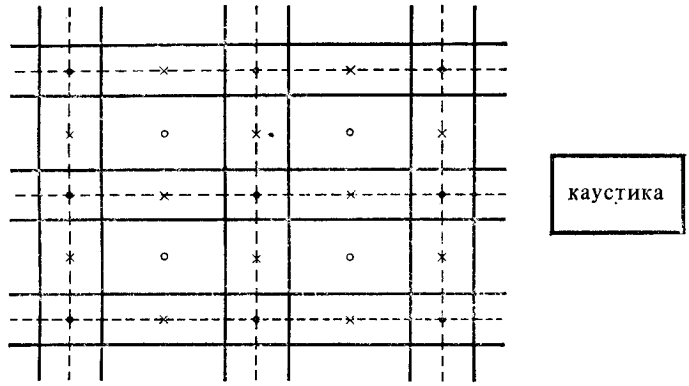


Рис. 12.26

Однако этот случай *не* типичен. Петли зануления определителя соприкасаются своими углами и образуют прямоугольную решетку прямых, приводящую к каустике в виде прямоугольника так как образы обеих петель совпадают (рис. 12.26).

Поэтому, чтобы прийти к типичному случаю, возмутим f слегка, скажем так:

$$g(x,\ y) = f(x,\ y) + \varepsilon \tilde{f}(x,\ y)$$

(где ε мало). Однако вместо подбора $\tilde{f}$ и вычислений применим лучше немного теории катастроф. Мы встретились с атипичной каустикой, имеющей углы; какая простейшая катастрофа может ее содержать? (Мы не можем строго обосновать, что квадрат, возникший, как в нашем случае, из атипичной симметричной модели, обязан быть частью маломерной типичной структуры, по крайней мере без предварительного исследования того, что типично *в пределах данного класса симметричных объектов*. Но всегда имеет смысл взглянуть сначала на простейшие случаи.) Пересмотрев геометрии катастроф (гл. 9), мы находим, что лишь гиперболическая омбилика содержит углы; при возмущении этот угол деформируется так, как показано на рис. 12.27. Следовательно, приняв во внимание прямоугольную сим-

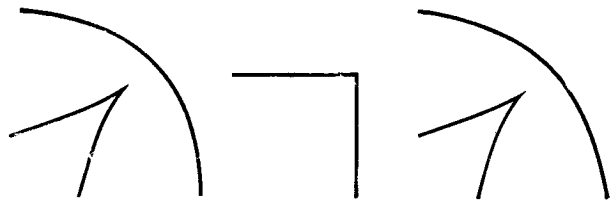


Рис. 12.27

метрию, мы можем ожидать каустику такого вида, как на рис. 12.28. Здесь действительно, как мы и ожидали, имеются две кривые, на которые раздваивается прямоугольник, когда начинает действовать возмущение.

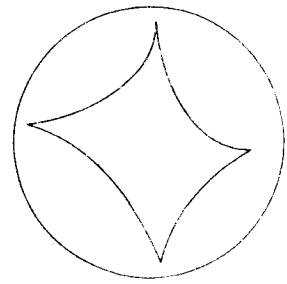


Рис. 12.28

Вычисление дает для порядка каустики значение 1/3 (Берри, личное сообщение), что оставляет в кандидатах только бабочку и эллиптическую и гиперболическую омбилики (известно, что все более высокие катастрофы имеют бóльшие порядки; это доказано даже для тех катастроф, порядок которых пока точно не вычислен), тем самым рассуждение с углом делается строгим, а указанное предсказание — обоснованным. Подробный анализ частичного случая

$$f(x,\ y) = \cos 2\pi x/\eta\ \cos 2\pi y/\zeta$$

подтверждает его, согласно Берри [61]. Таким образом, благодаря структурной устойчивости катастрофы гиперболической омбилики мы можем с достаточным основанием предсказать каустику, показанную на рис. 12.28, для рассеяния на очень широком классе дважды периодических поверхностей.

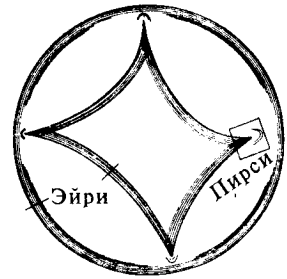


Рис. 12.29

Больше того. Метод быстро осциллирующих интегралов позволяет, согласно выражению Берри, „нарастить квантовомеханическое мясо на классические кости". На рис. 12.28 каустика состоит из линий складок и точек сборки (не в непосредственно геометрическом смысле, а в смысле типа критических точек потенциальной функции данной катастрофы, как в гл. 9). „Поперек складок" мы должны ожидать появления дифракционных полос Эйри, а в сборках ожидаем увидеть картину Пирси. Приняв во внимание направления, куда обращены складки (чтобы правильно указать зоны тени), мы можем предсказать, что наблюдаемая картина дифракции для этого типа рассеяния на кристалле должна быть похожа на рис. 12.29.

Возникает задача экспериментальной проверки этого предсказания. Для случая рассеяния атомов на кристалле нелегко получить все нужные детали, особенно вблизи точки сборки. Берри использует оптический аналог такого рассеяния, подсказанный ему одним замечанием Джона Баркера. А именно, тот заметил, что такие формы, как на рис. 12.28, возникают на стеклах в окнах ванной комнаты (читатель, возможно, уже и сам наблюдал этот эффект, а если нет, то при случае сможет наблюдать). Матированное стекло, обычно используемое для ванных, имеет структуру правильной решетки, а рассеяние *через* преломляющее стекло математически аналогично рассеянию от отражающего зер-

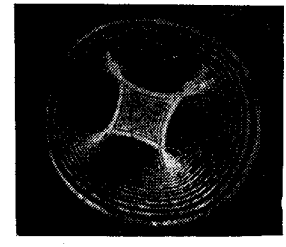


Фото 13. *Четыре сочлененные гиперболические омбилики (частично продеформированные) в каустике, образованной при преломлении лазерного света в периодически матированном стекле (Берри [61], рис. 7(а)).*

кала. Сравнительно несложно изготовить мелко линованное стекло и просветить его лазером. Фото 13 (Берри [61]) показывает результат. Сравним его с рис. 12.29; каустика и дифракционные эффекты очень близки к предсказанным. Кроме того, видна более тонкая структура (напоминающая вязку), возникшая из-за дифракции Брэгга (результат действия многих ячеек решетки, вместо принятой нами выше аппроксимации с одной ячейкой).

Статья Берри [61] содержит еще много дополнительной информации, в частности об эффектах случайного блуждания атомов по кристаллической решетке.

10 Другие каустики

Рассеяние света на ультразвуке (Берри [75]) ведет к (теоретически) бесконечной последовательности сборок в каустике. Число лучей света, проходящих через x, и число каустик вблизи x неограниченно возрастают по мере продвижения x вправо (рис. 12.30). Предельная ситуация хаоса, когда разрывы, отвечающие по классическим представлениям каустикам, становятся всюду плотными, иллюстрирует идею Берри о том, что „эргодичность — это вездесущность катастрофы".

Каустики сборки возникают в акустике, когда вследствие изменений в давлении звуковые волны в воде загибаются по параболе кверху и отражаются от поверхности моря (см. рис. 12.31 и Холфорд [70]); это важно учитывать при гидролокации. Здесь нужны формулы дифракции типа формулы

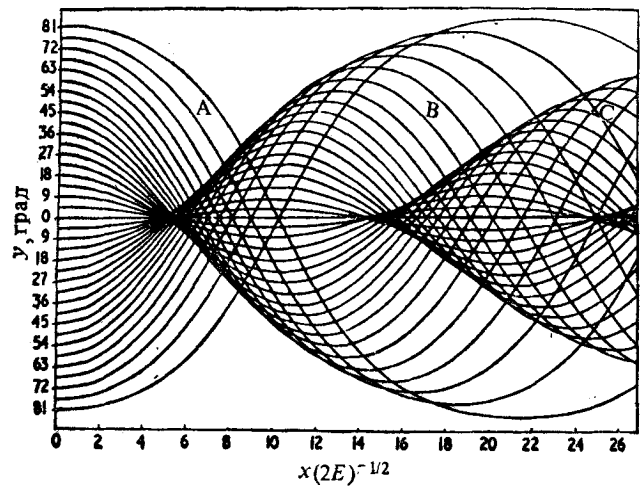


Рис. 12.30

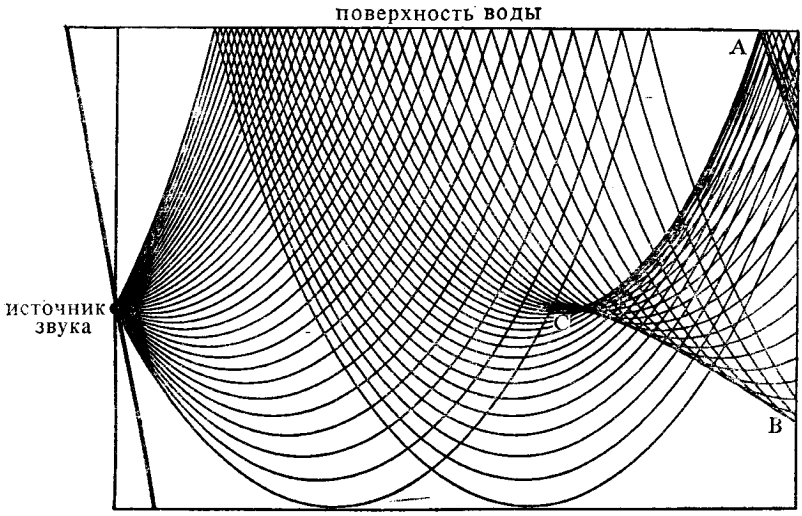


Рис. 12.31

Пирси, поскольку они дают распределение интенсивности звука и позволяют вычислить потери при передаче сигнала.

Ряд оптических эффектов связан с каустиками, которые не являются структурно устойчивыми (в обычном смысле), но которые естественно возникают из-за симметрий системы. Одним из примеров служит *глория*, вызываемая рассеянием назад от сферических капелек. Ее можно наблюдать иногда с небольшой возвышенности, когда солнце находится за спиной наблюдателя, а перед ним туман или облачко; она имеет форму ряда концентрических цветных колец вокруг тени головы наблюдателя. (Соответствующие фотографии приведены у Бриана и Жарми [76]; дальнейшие сведения можно найти у Берри и Маунта [77], Берри [62], Кхаре и Нуссенцвейга [77a]). Другими примерами служат *спиральное рассеяние* (бесконечная последовательность глорий, Берри и Маунт [77]) и *пик прямой дифракции* (Берри и Маунт [77]). Один из способов убедиться в том, что эти каустики нестандартны, состоит в вычислении их порядков; они оказываются слишком высокими. Мы приводим эти примеры на тот случай, если читатель склонен слишком полагаться на список из теоремы Тома; повторим еще раз, что этот список содержит *почти* все катастрофы — и все „типичные“,— но что специальные обстоятельства могут привести к атипичным эффектам (на деле одна из задач техники и состоит в отыскании атипичных эффектов и изыскании способов, как заставить их возникать). Развить достаточно далеко тео-

рию „эквивариантных" катастроф (имеющих симметрии предписанного вида) было бы очень полезно — но также и очень трудно. Некоторое продвижение в этом направлении уже имеется (Филд [78], Поэнару [79—81]; наиболее непосредственное отношение имеет сюда работа Вассермана [81a]), но остается сделать еще очень много.

Эти методы применимы с равным успехом и к другим задачам рассеяния. Так, статьи Коннора содержат соответствующий материал по молекулярным столкновениям; в частности, в [82] он дает хороший обзор работ в этой области и применяет гиперболическую омбилику к изучению рассеяний типа атом— молекула и атом — поверхность.

11 Миражи

Оптические катастрофы играют также роль в образовании некоторых типов *миражей* (что, кажется, явно не было сказано в литературе, но легко выводится из имеющихся теорий). Здесь, однако, катастрофы появляются не как каустики, роль их довольно необычна.

Миражи происходят, когда температурные градиенты в атмосфере искривляют лучи света. Подробное описание возникающих при этом эффектов можно найти у Фрейзера и Маха [83]; мы приведем как их объяснение, так и версию теории катастроф. Если температура меняется с высотой, как показано на рис. 12.32(a), то световые лучи, попадающие в глаз наблюдателя, приходят туда по искривленным путям, изображенным (несколько утрированно) на рис. 12.32 (b). Эти пути имеют огибающую типа складки, но для нас более важно здесь подчеркнуть многозначный характер соответствующего многообразия катастрофы, ко-

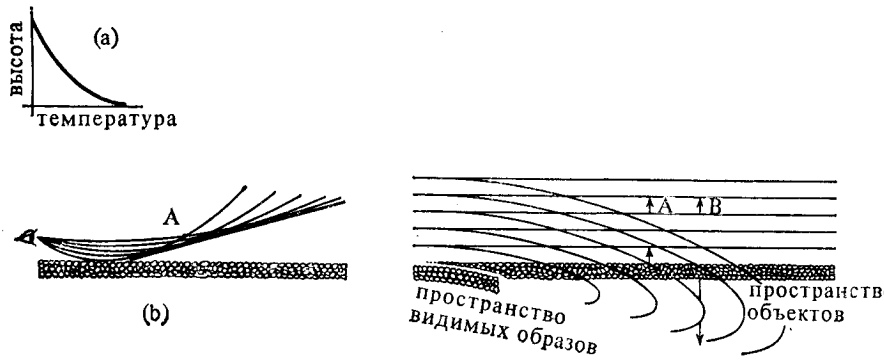


Рис. 12.32

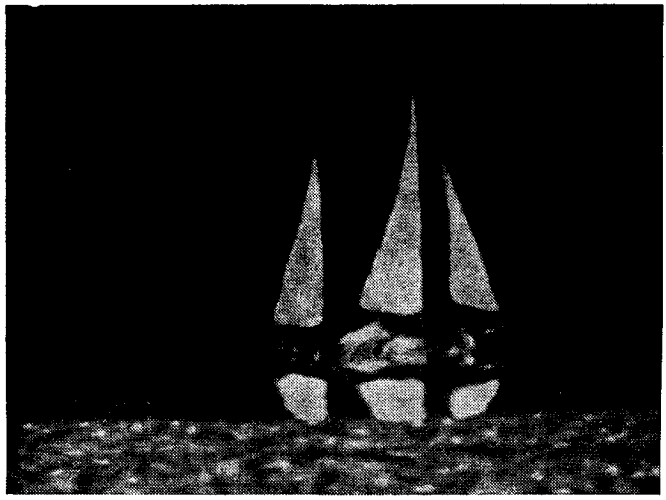


Фото 14. *Двойной нижний мираж (Фрейзер и Max [83], © 1978, Alistair B. Fraser.*

торый проявляется самым видимым образом: для объекта, находящегося в точке A, *два* идущих от него луча попадают в глаз наблюдателя. Хороший способ сделать этот эффект графически наглядным состоит в том, чтобы деформировать действительное „пространство объектов" таким образом, чтобы все световые лучи стали прямыми, поскольку именно так глаз интерпретирует то, что видит; тем самым получается фиктивное „пространство образов". Это проиллюстрировано на рис. 12.32(c). Для объекта в точке *B* будут две видимые копии в пространстве образов, нижняя из которых перевернута вверх ногами. На фото 14, взятом из статьи Фрейзера и Маха, представлен один такой мираж; их называют *двойными нижними миражами*, так как земля кажется наклонённой вниз. Если лучи загибаются не вверх, а вниз, то мы имеем *верхний мираж*.

В случае когда вместо складки появляется сборка, мы можем получить *тройной мираж*. При верхнем мираже температура должна иметь точку перегиба, как на рис. 12.33(a). Лучи, попадающие в глаз наблюдателя, показаны на рис. 12.33(b), а соответствующее пространство видимых образов изображено на рис. 12.33(c). Объект в точке *A* смещается немного кверху; объект в точке *B* смещается еще больше и появляется трижды, причем средняя копия перевернута, а верхняя сильно сжата; объект в точке *C* смещается еще выше и виден уже как один очень сильно удаленный образ.

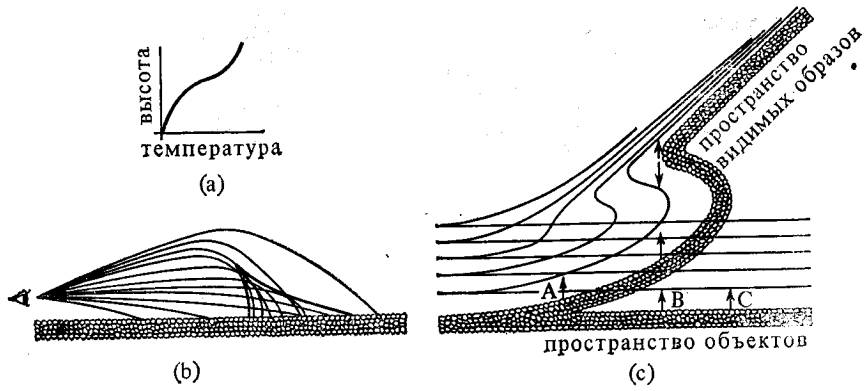


Рис. 12.33

Заметьте, что хотя на рисунках и видны огибающие, они имеют смысл, только когда выбрано положение наблюдателя,— это не физические каустики.

12 Звуковые удары

Оптические каустики производят миражи; „Миражи" производят звуковые удары (хлопки); звуковые удары производят ударные каустики, или *сверхудары.*

Мы вынуждены из-за недостатка места опустить приложения теории катастроф к изучению образования ударных волн, и это жаль, так как их история объясняет название *катастрофа Римана — Гюгонио* для сборки Уитни (Том [84]); более короткое название fronce (сборка), как и queue d'aronde (ласточкин хвост), идет от Бернара Морэна. Кроме того, строгая теория (см. Гукенхаймер [85] и Голубицкий [86]) развита пока лишь для уравнений более простых, чем встречающиеся в реальной физике, хотя присутствие геометрии катастроф в реальных проблемах прекрасно видно из рис. 12.34. Все же мы можем продемонстрировать здесь пригодность теории катастроф для объяснения процесса *прохождения* ударных волн на большом расстоянии от их источника. Мы начинаем с чрезвычайно упрощенного описания причин возникновения звуковых ударов, а потом уже перейдем к изучению их геометрии.

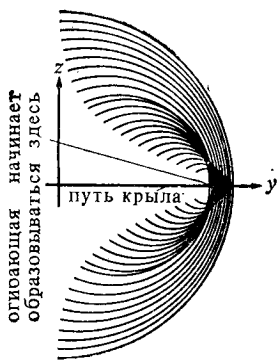


Рис. 12.34. *Огибающая, дающая конус Маха, в плоскости x=0.5 для крыла, вид которого в плане задается уравнением* $y = 0.50x^* + (x^*)^2$, $y^* > 0$ *(Дейвис [87]).*

В каждый момент самолет производит массу возмущений воздушной среды (шум двигателя, отбрасывание воздуха в стороны и пр.), которые распространяются радиально от места возмущения. При малых скоростях самолета они распространяются вперед так же, как и назад (рис. 12.35 (a)),— самолет не поспевает за ними. На сверх-

звуковых скоростях он обгоняет их (рис. 12.35(b)), и получающаяся огибающая образует *ударную волну*. Вблизи самолета всё много сложнее, чем показано на рисунке, имеются отдельные ударные волны от носа и хвоста и т. п., но на больших расстояниях такие эффекты роли не играют.

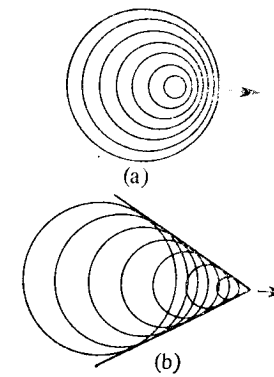


Рис. 12.35

Мы не будем заниматься здесь рассмотрением ударной волны как огибающей, а вместо этого будем трактовать ее как волновой фронт и применим для изучения этого фронта геометрическую акустику. В большинстве оптических проблем идея волнового фронта не слишком полезна, являясь приближением, эквивалентным геометрической оптике и менее информативным вблизи устойчивых каустик. Никакая вспышка света не будет настолько короткой, чтобы служить аппроксимацией волнового фронта, но для звукового удара это возможно. Он имеет сложную тонкую структуру, но его распространение в атмосфере может быть подсчитано — и обычно так и делается — по аналогии с геометрической оптикой.

Рисунок 12.35(b) демонстрирует форму ударной волны в однородной спокойной атмосфере; это — совершенный конус. Но вне стен лаборатории воздух *не* однороден; он теплее у земли, и потому скорость звука там выше. Значит, нижняя часть волнового фронта движется быстрее верхней, и поэтому она загибается вперед и, возможно, *вверх* (подобно свету, который ускоряется в горячем воздухе вблизи земли, как на рис. 12.32). В результате, если самолет находится на достаточной высоте и движется со скоростью, не превышающей примерно 1.3 M, то звуковой удар от него вообще может не дойти до земли. На рис. 12.36 изображена относящаяся сюда геометрическая акустика: „ударные лучи, испускаемые самолетом“ в каждый момент (под прямым углом к начальному коническому волновому фронту), загибаются кверху, как только что было описано, и образуют горизонтальную каустику складки. Мы нарисовали более жирными уже пройденные части лучей, а самая жирная линия изображает результирующую форму ударной волны в какой-то определенный момент времени.

К сожалению, эту каустику не всегда возможно удержать над землей (при выполнении пилотами гражданской и военной авиации текущих заданий), и тогда приобретает особую важность то свойство каустик, благодаря которому они получили свое название,— высокая интенсивность энергии.

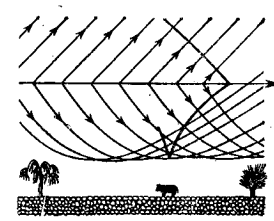


Рис. 12.36

Как и в оптике, интенсивность, предсказываемая на основании лучевого подхода, бесконечна, что неправильно. Но правильные предсказания в этом случае делать гораздо сложнее, ввиду того что принцип линейной суперпозиции

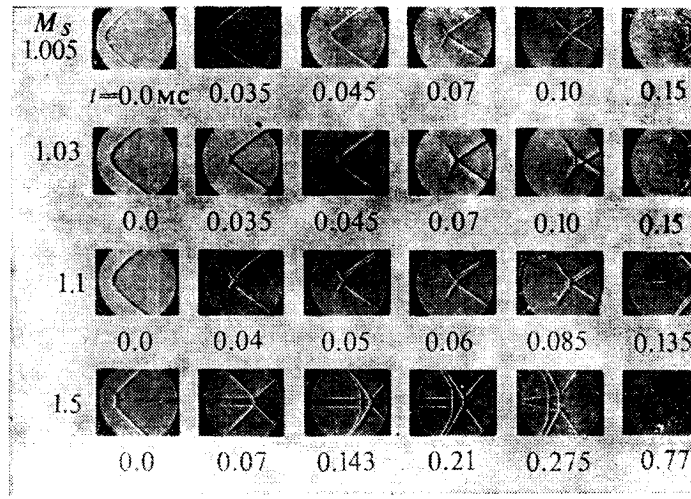


Фото 15. *Последовательные стадии фокусировки для четырех различных интенсивностей удара; сборка* (arête). *Слева указаны числа Маха; показана эволюция во времени t. (Стёртевант и Калкарни* [88], *рис. 17.)*

решений, из которого исходят методы быстро осциллирующих интегралов, описанные выше (служащий хорошим приближением и принимаемый в качестве аксиомы в волновой оптике и квантовой механике), оказывается неверным для ударных волн. В оптике функция Эйри для правильных интенсивностей вблизи каустики складки известна с 1838 г., в то время как в соответствующем анализе для звуковых ударных каустик мучились с бесконечностями еще около 1972 г.! Чтобы получить такую картину, как на рис. 12.37 (b), описывающую „истинное локальное поведение", нужны поправки, за которыми стоят методы гл. 5 и 6. (На самом деле геометрия ударных волн на некотором расстоянии за сборкой для „слабых" ударов примерно та же, что и предсказываемая геометрической (лучевой) теорией, но для сильных совершенно другая; звуковые удары на достаточном удалении от самолета бывают, однако, обычно „слабыми.")

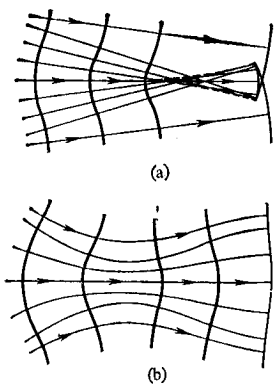


Рис. 12.37. *Фокусировка слабого удара:* (a) *согласно геометрической акустике (линейная теория);* (b) *согласно (нелинейной) динамике ударных волн. (Стёртевант и Калкарни* [88].)

И саму теорию быстро осциллирующих интегралов не назовешь тривиальной, а требующееся здесь ее обобщение, очевидно, выходит и за рамки квадривия [1]. Мы можем лишь отослать более подготовленного читателя к соответствующим теоретическим и экспериментальным работам, например к статьям Обермайера [88] и Стёртеванта и Калкарни [89]. Фото 15, взятое из последней статьи, демонстрирует гео-

[1] Учебный цикл повышенного типа (в средние века) из четырех наук: арифметики, музыки, геометрии и астрономии. Начальный цикл (тривий) состоял из трех наук: грамматики, риторики и диалектики.— *Прим. ред.*

метрическое богатство сборки (называемой там arête); слабые ударные волны развиваются так, как предсказывает лучевая теория (рис. 12.38), но с сильными дело обстоит гораздо сложнее.

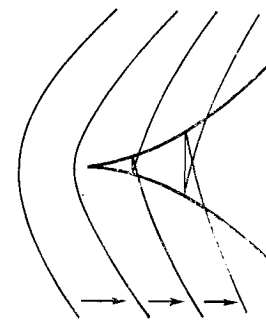


Рис. 12.38

Каустики складки могут подходить к земле различными способами; на рис. 12.39 показано, как это происходит при одном редком (но экспериментально вполне осуществимом) маневре самолета. Равномерный поворот производит сходный эффект (рис. 12.40), даже и в однородной атмосфере. *Начало* поворота дает каустику сборки (рис. 12.41 (a)), точно так же как и пикирование (рис. 12.41 (b)).

Благодаря тому что каустики складки имеют по своей природе коразмерность один, с ними легко управиться в эксперименте; с землей они встречаются по *линиям*, и достаточно плотная цепочка микрофонов заведомо поймает ее одним

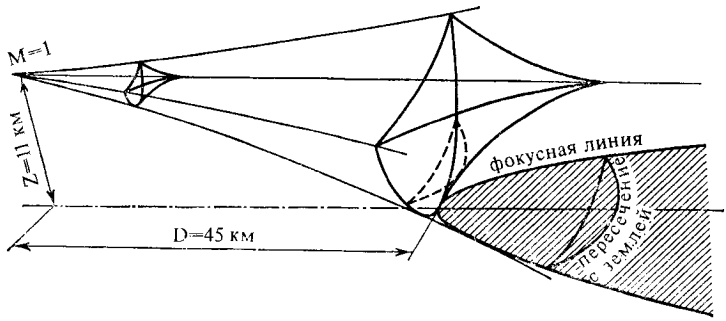


Рис. 12.39. *Форма ударной волны и ее пересечение с поверхностью земли при прямолинейном равноускоренном движении самолета. Высота полета 11 000 м, ускорение 1 м/с² (Ваннер, Валле, Вивье и Тери [90]).*

из них. Сборки же дают кривые в трехмерном пространстве, а на уровне земли — лишь отдельные *точки* (вроде точек C на рис. 12.41 (c), где представлен трехмерный результат маневра, изображенного на рис. 12.41 (b)). Поскольку ввиду меняющегося ветра и т. п. предсказать соответствующее положение на земле лучше чем с точностью до нескольких километров тяжело, эксперимент оказывается весьма сложным. (Заполнить с достаточной плотностью несколько квадратных километров микрофонами — дорогое удовольствие. Но так как большие территории, плотно заполненные *людьми*,— распространенная вещь, высокие интенсивности „сверхударных" каустик сборки изучить очень важно.) Французской рабочей группе, экспериментировавшей с самолетом „Мираж IV", удалось получить точку сборки удивительно близко от линии микрофонов при проведении серии испытаний, метко названных Jericho-Carton (визитная карточка иерихонской трубы). На рис. 12.42 пред-

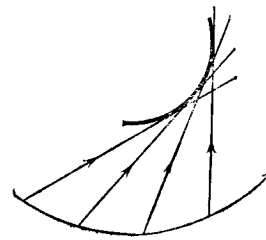


Рис. 12.40

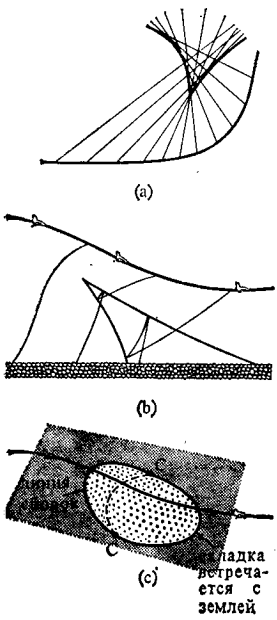


Рис. 12.41

ставлены записи, собранные вдоль этой линии в одном из испытаний; ясно видна форма ласточкина хвоста, равно как и более тонкая структура, например более высокая интенсивность в точках каустики складки (сборки на волновом фронте). Интересно отметить, что там, где два листа *пересекаются*, они складываются более или менее линейно, там же, где они *интерферируют* на каустике, получается более сложная картина и более высокая интенсивность.

Всё что сейчас описывалось, было проделано без всякой теории катастроф; мы лишь интерпретировали это в ее терминах. Все же роль, которую теория катастроф могла бы здесь играть, видна из такой цитаты (типичной для этой области) из статьи Стёртеванта и Калкарни [89]:

„Можно выделить три вида фокусов — каустики, ребра (arêtes) и совершенные фокусы".

(Под „каустиками" и „ребрами" они понимают то, что мы называли складками и сборками.) Но как мы видели в § 4, совершенная фокусировка (даже совершенная фокусировка *вдоль линии*, как для сферических линз) принадлежит к явлениям бесконечной коразмерности, которые становятся устойчивыми лишь при наложении условия некой непрерывной симметрии. Микроскопическая поворотная симметрия капелек воды, создающая глорию, оказывается здесь неэффективной; звуковые удары больше фотонов и не замечают формы капелек. Значит, мы спокойно можем отбросить совершенные фокусы как чисто лабораторный феномен: лишь в стенах лаборатории с помощью предварительно рассчитанных выточенных на токарном станке отражателей можно создать приближение к ним — с той

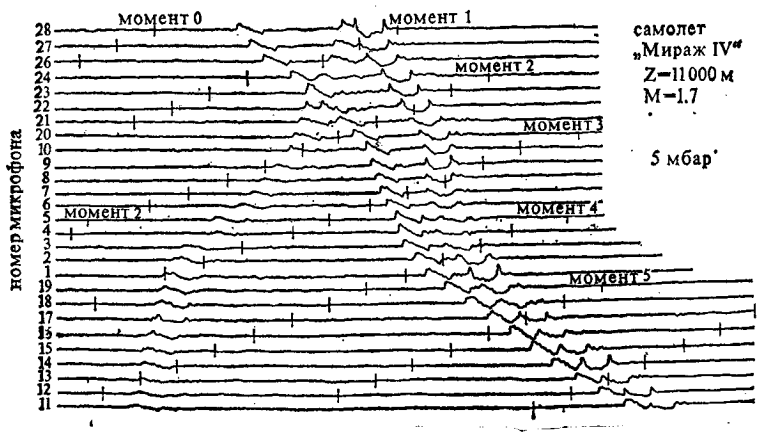


Рис. 12.42. *Записи трех листов ударной волны, полученные при маневре входа в поворот (Ваннер, Валле, Вивье и Тери [90]).*

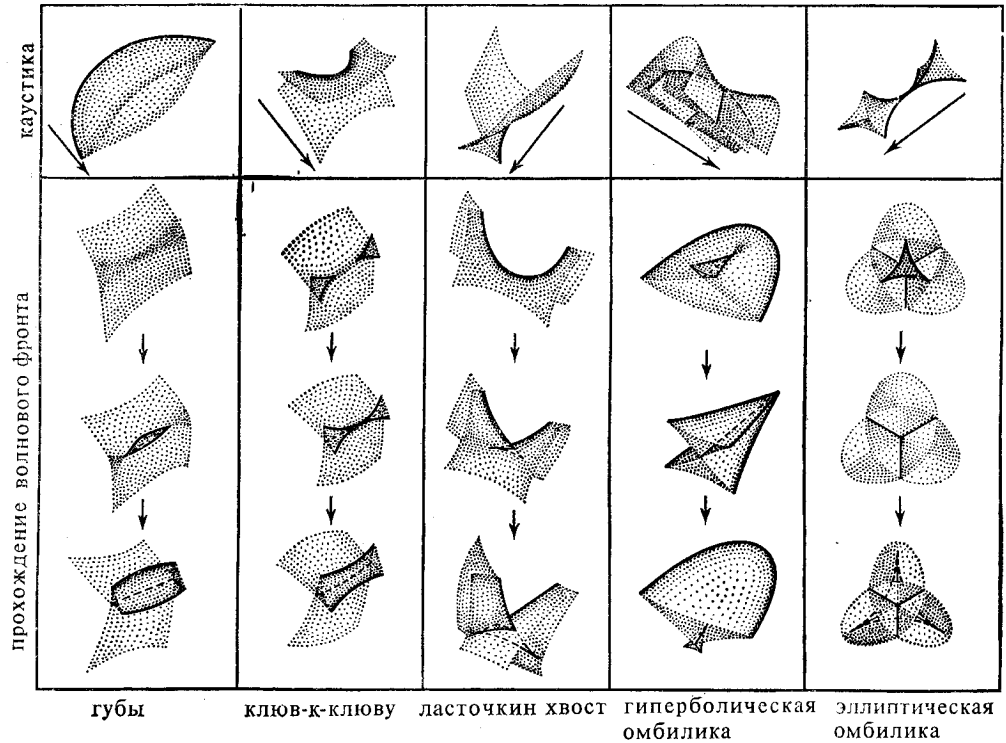


Рис. 12,43

точностью, с какой вообще геометрическая акустика позволяет приближать удары.

Складки и сборки являются единственными каустическими особенностями, которые можно ожидать встретить на двумерной земле, но a) города все-таки трехмерны, b) особенность физически действует в некотором *объеме*. Тем самым три катастрофы, которые устойчиво могут возникать в отдельных точках в трехмерном пространстве (ласточкин хвост и две омбилики), имеют ненулевой шанс „взорваться" в воздухе достаточно близко от земли или от зданий, так что связанные с ними интенсивности — бóльшие даже, чем у сборки,— получают реальное значение. (На деле здесь нужно принять во внимание иерархию особенностей, которые „почти случаются" в трех измерениях, но мы оставим это в стороне. См. Берри [90a].)

Строго говоря, нас интересует не геометрия каустик сама по себе, а то, как волновые фронты проходят через них; это несколько более тонкая задача, так как сущест-

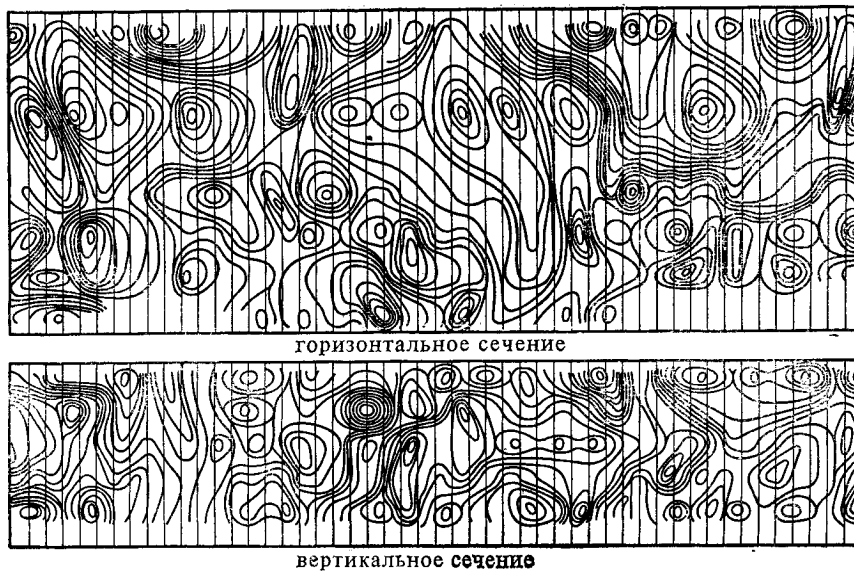


Рис. 12.44. *Структура завихрений вблизи земли, показанная с помощью изотах (Ламли и Панофски [92]).*

вуют неустойчивые пути прохождения устойчивой каустики. Арнольд в [91] классифицирует типичные, устойчивые особенности, связанные с перестройками волнового фронта при его распространении, в размерностях, меньших шести, и дает приложение (в рамках довольно простой физической модели, принадлежащей Зельдовичу) к формам галактик. У нас здесь речь идет о размерности 3, и на рис. 12.43 мы приводим типичные картинки прохождения волновых фронтов через ласточкин хвост и эллиптическую и гиперболическую омбилики, а также два устойчивых способа прохождения через линию сборок (ребро возврата). (Первый из них нам уже встречался на рис. 12.41.) В оптике интенсивности для двух последних случаев были бы такие же, как и для обычной сборки, но лишь тщательное исследование сможет показать, будет ли это верно также и для звуковых ударов. Во всех пяти случаях, несомненно, требуется серьезный анализ. Отметим, какова здесь роль теории катастроф: не давая ни на какие вопросы Полного Ответа, она дает (поскольку соображения типичности тут вполне уместны) новую информацию относительно того, какие случаи важны и требуют уточнения новых деталей; при этом у нас есть благодаря ей уверенность, что этих случаев конечное число.

Кстати говоря, к преломлению ударных волн приводят не только *глобальные* неоднородности в атмосфере (рис.

12.36), но и *локальные*, а именно турбулентности (рис. 12.44). Геометрически это представляется тесно связанным с проблемой преломления света при прохождении через случайную рябь на поверхности воды, где имеются такие замечательные результаты, как тот, что гиперболическая и эллиптическая омбилики появляются в пропорции 73.2 и 26.8% (Берри и Хэнней [92a]).

13 Гигантские океанские волны

Акустические ударные волны, о которых была речь выше, труднее поддаются анализу, чем допускающие линейную суперпозицию оптические, акустические или квантовые колебания. Еще сложнее дело обстоит с поверхностными волнами на воде. Даже регулярно идущие волны проявляют нелинейность; профиль волны — не синусоида (несмотря на этимологию слова „синус"!) [1], и волны вдвое большей высоты (при той же длине волны) имеют не ту же самую форму, что и раньше, но лишь с удвоенной высотой. (В предельном случае малых высот волн, впрочем, форма приближается к синусоидальной.) Всё же в целом они имеют много общего с прочими волнами. В частности, они образуют каустики.

Каустики могут возникать по многим причинам, таким как отражение от кривого берега или фокусировка из-за снижения скорости („высокий коэффициент преломления") в области мелкой воды. Но наиболее яркие эффекты наблюдаются в *течениях*. Так, волны, распространяющиеся против течения по узкому потоку, замедляются сильнее всего в середине, где течение быстрее, и потому отклоняются вовнутрь, к середине потока. (Из-за нелинейности волны в такой ситуации *приобретают энергию* от потока, а не теряют ее при своем распространении.) В простейшем случае это ведет к образованию двух каустик складки (рис. 12.45(a)), но неравномерность, с которой, как правило, волны входят в поток (например, когда они идут с юго-запада навстречу Агульясову (иначе Игольному) течению, рис. 12.46), естественным образом должна приводить к каустикам сборки (рис. 12.45(b)), как и в случаях волн, рассмотренных нами выше. (В действительности скопление большого числа таких сборок выше по течению означает, согласно высказыванию Берри (§ 10), что движение моря там следует трактовать эргодически.) Всё

[1] На латинском sinus означает „изгиб, извив, завиток".— *Прим. ред.*

же каустики складки сами достаточно скверная штука, чтобы опасаться их, тем более что по соображениям коразмерности встреча с ними вероятнее, чем со сборками. Курс одиночного корабля может устойчивым образом пересечь складку, высокая же интенсивность энергии вблизи точки сборки локализована в малой области. (Конечно, все это смазывается и потому несколько ослабляется „хроматической аберрацией", даже в большом масштабе, когда применима лучевая теория. Реальные волны — это смесь большого количества длин волн, каждая из которых может вызывать каустики в различных местах.)

На рис. 12.46 показано место, где такое может случаться. После закрытия Суэцкого канала в 1967 г. многие суда (в основном нефтяные танкеры) проходили по этому пути. Построенные тогда супертанкеры слишком велики для этого канала и должны по-прежнему идти здесь, несмотря на возобновление судоходства по каналу. Время для супертанкеров дорого, и поэтому, идя в западном направлении (нагруженные нефтью), они предпочитают входить в Агульясово течение. (Политика, уменьшение спроса и избыток танкеров привели в последнее время к странной экономике, в частности к замедленным графикам движения судов; всё же они по-прежнему ходят этим курсом.) Когда из-за погодных условий поднимаются большие волны, идущие более или менее прямо вверх по течению (заметьте, что фокусирующий эффект приводит к узкому „пучку" не обязательно при строго прямо вверх по течению направленных волнах — допустимы отклонения в пределах 30° или около того, при интересующих нас скоростях и длинах волн), такая практика приводит к несчастьям. Капитан Мэллори [93] перечисляет 11 встреч с гигантскими волнами в этом районе, причем все, кроме одной, при движении вниз по этому течению и все при упомянутых погодных условиях; в большинстве случаев судно получило повреждения, а

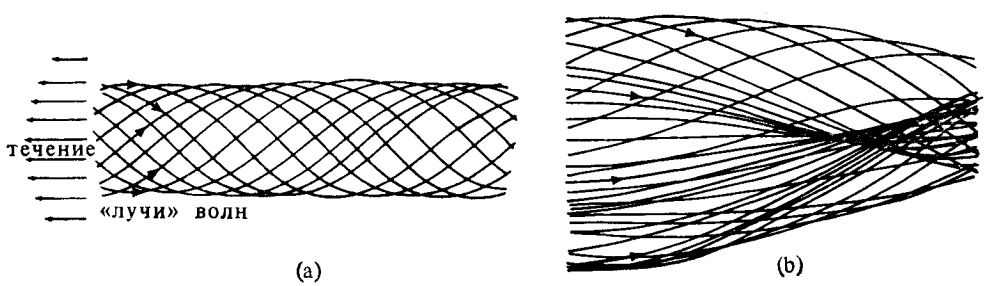


Рис. 12.45

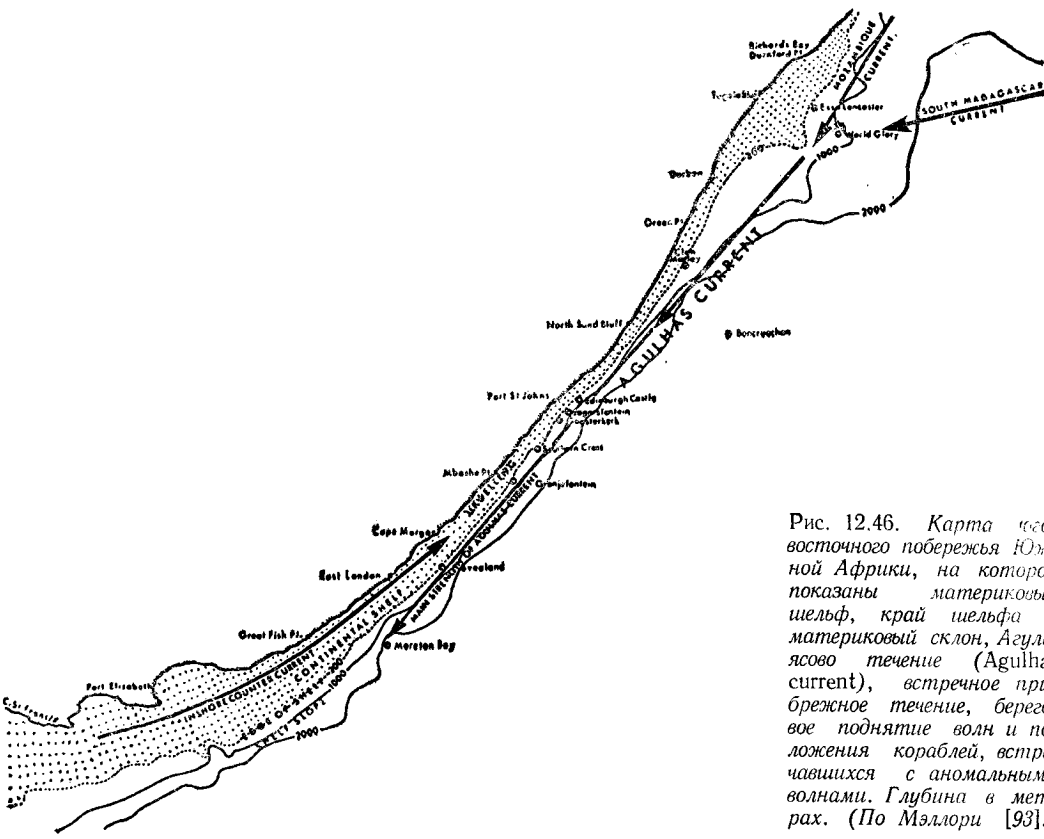


Рис. 12.46. *Карта* юго-восточного побережья Южной Африки, *на которой показаны материковый шельф, край шельфа и материковый склон, Агульясово течение* (Agulhas current), *встречное прибрежное течение, береговое поднятие волн и положения кораблей, встречавшихся с аномальными волнами. Глубина в метрах. (По Мэллори* [93].)

одно развалилось напополам. Многие суда бесследно пропали у этого побережья, что могло быть, а могло и не быть результатом встречи с гигантскими волнами.[1]

Смит [94] провел для каустики складки на глубокой воде асимптотическое исследование с помощью быстро осциллирующих интегралов, подобное изложенному в §§ 5 и 6, но осложненное нелинейностью и такими дополнительными факторами, как течение (заметим, что волны, идущие *вниз* по течению, отклоняются *наружу*, к краям потока,— мы имеем здесь нелинейное „двойное лучепреломление"). Это исследование показывает, что увеличение высоты волны, весьма четко локализованное в области

[1] Подробнее обо всем этом можно прочитать в статье Л. И. Лопатухина „Ловушки в океане" в № 5 журнала „Вокруг света" за 1979 г., с. 31—32.— *Прим. ред.*

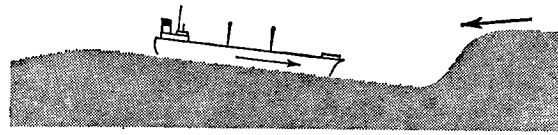


Рис. 12.47

каустики, может быть более чем четырехкратным. Кроме того, судно, выходящее из зоны тени (и, значит, ничем не предупрежденное о большей величине волн впереди), вполне может оказаться перед *асимметричной* волной, надвигающейся на него своей короткой крутой стороной. В результате может получиться, что оно на полной скорости спускается вниз по длинному склону по направлению к чему-то вроде мчащейся на него кирпичной стены (рис. 12.47). Танкеры строят так, чтобы они поднимались на нормальные круглые волны,— даже и на большие, если на малой скорости,— но не на *такие* и не на полной скорости.

[*Прим. перев. при корректуре.* Появление элементарных катастроф при прохождении волн в неоднородных средах (в неоднородной плазме, в ионосфере Земли, при радиопросвечивании атмосферы планет) изучалось на основе теории Маслова — Арнольда в Физико-техническом институте Д. С. Лукиным, Е. А. Палкиным и др. (см. литературу, добавленную при переводе). В связи с этим были протабулированы функции, аналогичные функциям Эйри и Пирси, для высших катастроф, вплоть до параболической омбилики. Указанными авторами были получены также фотографии интерференционных картин, отвечающих сечениям различных катастроф (см. журнал „Наука и жизнь", 1980, № 1, с. 122). Отметим, что интерференционная картина на фото 12 отвечает сечению гиперболической омбилики (квадратику, выделенному на рис. 12.29). В чистом виде картина, отвечающая сборке, получена в статье Лукина и Палкина 1980 г. Основное отличие от фото 12 состоит в более мощном факеле у клюва; в ионосфере он простирается на сотни километров. Картина, подобная представленной на рис. 12.30, также встречается в ионосфере и приводит к появлению мощных волноводов, иногда целиком охватывающих планету.]

13 УПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ

В этой главе мы обсуждаем самый старый контрпример к утверждению „теория катастроф — первый математический метод, способный дать толкование явлениям, связанным с расходимостью". Выпучивание стержня в ту или иную сторону при увеличении нагрузки относится как раз к таким явлениям, и оно было впервые изучено Эйлером еще в 1744 г. [95]. Многие аналогичные задачи теории упругости могут быть поставлены и решены на языке теории катастроф, но большинство примеров в этой области, приводящих к *низшим* катастрофам, было настолько хорошо понято инженерами на их собственном языке прежде, чем „теория катастроф" стала существовать, что мы не можем ожидать, чтобы новая математика принесла им тут новую важную для практики информацию,— разве что новые формулировки, которые многие инженеры сочтут бесполезными.

Все же теория катастроф окажется полезной и в этой области; но она прольет новый свет лишь в сложных случаях, изучение которых с этой точки зрения только началось. Это поставило перед нами свои проблемы, когда обдумывалась настоящая глава. Строгий прямой подход, проведенный для этих случаев в рамках соответствующих пространств Соболева, был бы доступен лишь узкой аудитории (состоящей из специалистов, которые все равно усвоят эти методы, как только строгие приложения получат достаточное распространение). Но наша главная цель здесь — показать теорию катастроф в действии *широкой* научной аудитории.

Поэтому мы начнем с простых примеров, в которых инженерное дело вносит ясность в катастрофы (а не наоборот), и будем постепенно продвигаться к более сложным — где уже теория катастроф начинает вносить ясность в проблему выпучивания. Даже при том, что всюду, где только можно, мы опускали подробности, глава получилась длинная, а разнообразие тем, которые мы вынуждены были оставить в стороне, в этой области, где раньше, чем где бы

то ни было, предчувствовалась теория катастроф, делает ясным, что здесь необходима монография. По той же причине недостатка места мы будем придерживаться терминологии и точки зрения, принятых в остальной части нашей книги, а не в инженерной практике, потому что последнее потребовало бы бо́льшего введения. Надеемся, что мы тем самым достигнем нашей двойной цели — продемонстрируем новые возможности инженерам, имеющим склонность к математике, и одновременно развернем перед остальными читателями галерею важных примеров геометрии катастроф.

Наконец, заметим, что недостаток времени и места не позволил нам обсудить приложения к вариационной теории *пластического* выпучивания, что мы сначала надеялись сделать. Представляется ясным, что бифуркации в вариационных задачах, рассмотренные Сьюэллом [96, 97], поддаются исследованию топологическими методами — и, несомненно, топологический подход к особенностям „поверхности текучести" должен оказаться интересным,— но развивать эту тему здесь мы не имеем возможности. Важность пластического выпучивания на практике не уменьшает важности анализа упругого случая; процитируем Баттерворта [98]:

„... эффекты пластичности проявляются по мере возрастания деформации [1] как до, так и после того, как происходит теоретическое упругое выпучивание. Эта возможность лишь подчеркивает необходимость аккуратного анализа нелинейной *упругости*, ибо как еще можно определить напряжения в материале, с тем чтобы знать момент достижения напряжения текучести?"

Мы верим в то, что теория катастроф внесет в свое время вклад в изучение упруго-пластических задач, и во всяком случае мы хотим привлечь внимание дифференциальных топологов всех направлений к области, где, один раз освоившись с обозначениями, они найдут массу великолепных задач себе по сердцу.

[1] С сожалением приходится констатировать, что у нас возникла та самая ситуация с „расшифровкой", о нежелательности которой говорят авторы в § 14 гл. 8: термин „деформация" появился в другом значении. Но в теории упругости он устоялся в своем значении не в меньшей мере (и гораздо раньше), чем в теории катастроф. Надеемся, что читатель в каждом случае успешно справится с расшифровкой.— *Прим. ред.*

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

1 Тела под нагрузкой

Рассмотрим типичную инженерную конструкцию S, несущую нагрузку,— мост или, скажем, кран. Совершенно жесткие конструкции невозможны, но в большинстве практических случаев форма S не изменяется, покуда влияние нагрузки (включая собственный вес S) сводится к легкому растяжению или сжатию частей, из которых S состоит. Значительные изменения происходят, когда эти части радикально меняют форму — когда они *разрушаются* или *выпучиваются*. Мы не будем здесь заниматься разрушением, так как для изучения возникновения и динамики разрушений приходится существенно привлекать микрофизику используемых материалов. (Это не значит, что математические методы нашей книги не могут быть применены в этой области — по всей вероятности могут,— но такие приложения пока еще не развиты.) Говоря широко, имеются два типа выпучивания: *упругое*, или обратимое, изменение формы под напряжением и *пластическое*, или необратимое, изменение.

Большинство обычных, используемых в быту „пластмасс" являются упругими по существу вплоть до момента разрушения. Возьмите пластмассовую линейку — трудно согнуть ее так, чтобы ее форма оказалась нарушенной остаточно; если попробовать этого добиться, то скорее всего она сломается. Большинство бытовых металлов упруги лишь при сравнительно малых деформациях. Согните телевизионную антенну немного, как это делает ветер, и она, спружинив, вернется в исходное состояние; но согните ее больше, и она останется изогнутой.

Как наглядно показывают эти примеры, имеется различие между упругим и пластическим *поведением*, а не между упругими и пластическими *материалами*. Сверх того оно далеко не абсолютно: есть материалы, которые можно деформировать и оставить лежать с явно измененной формой, но днем позже (подобно мозгу бюрократа, которого, как вам кажется, вы в чем-то убедили) они выглядят так, как будто их никогда не трогали; медленно, но неуклонно они возвращаются в исходное состояние. В большом масштабе времени это поведение можно было бы рассматривать как совершенно упругое, но в масштабе времени разрушения моста о нем надо думать как о пластическом.

Не входя в обсуждение различных возможных определяющих уравнений, описывающих поведение твердых тел, и их классификацию, мы примем, что для данного *упругого*

тела B каждой конфигурации C, в которой оно может оказаться, отвечает единственная *упругая энергия* $\Phi(C)$. Конфигурацию C естественнее всего определить как функцию $B \to \mathbb{R}^3$, задающую положение $C(b)$ в трехмерном пространстве каждой точки b рассматриваемого тела. Совокупность $\mathscr{C}$ всех возможных конфигураций, ясное дело, бесконечномерна. Те конфигурации, для которых гипотеза „упругости" может служить полезным приближением, очевидно, никогда не будут составлять всего пространства отображений $B \to \mathbb{R}^3$; поэтому $\mathscr{C}$ будет *областью* в этом функциональном пространстве, а не всем пространством.

Если рассматривать B как обширное, но конечное множество точек-атомов с определенными силами взаимодействия между ними, то $\mathscr{C}$ будет обширным, но конечномерным — и суммировать невозможно... Станем трактовать атомы квантовомеханически, что более реалистично,— и снова $\mathscr{C}$ бесконечномерно... В этой главе мы считаем B непрерывной областью с тонкой структурой, позволяющей нам дифференцировать C по $b \in B$. Как и в случае жидкостей (см. обсуждение в начале гл. 11), мы знаем, что строго говоря это неверно. Ключевые понятия теории упругости — напряжение, деформация и пр.— *определяются* формально как пределы, связанные с рассмотрением произвольных малых частей тела, но они имеют *смысл* лишь постольку, поскольку они представляют среднее поведение, отвечающее усреднению по областям, большим по сравнению с атомами.

Мы делаем эти замечания, вовсе не имея в виду нападать на стандартные математические модели механики сплошных сред, общепринятые и используемые нами дальше, но лишь для того, чтобы показать, как вообще расходятся описываемый объект и даже наилучшим образом установленная и применяемая на практике его модель. Это расхождение имеет следствием практическую бесполезность различий, делаемых между „точными" и „приближенными" решениями в рамках данной модели, в случае когда хотят говорить о различиях более тонких, чем позволяет согласованность модели и объекта,— а она никогда не может быть совершенной. Нашей целью было заметить, что большая часть печатной критики в адрес теории катастроф в равной мере относится к любой математической модели вообще, включая сюда и те, *которые критики привыкли рассматривать как просто „верные"*. К моменту, когда пишутся эти строки, еще не опубликовано ни одного критического замечания в адрес теории катастроф как таковой; к сожалению, всё, что говорилось, приложимо ко

всем математическим моделям вообще или же направлено на чучело, созданное популярными статьями. Имели место полезные нападения на отдельные модели, предложенные специалистами по теории катастроф, но не было хорошего методологического наступления, основанного на понимании принципов (подобного тому, которое было предпринято епископом Беркли [99] на дифференциальное исчисление), и это позволило разным паразитическим грибкам нарасти на нашем предмете. Доза *понимающего* критицизма оказалась бы очень ценной, и такой критицизм можно было бы только приветствовать.

Итак, мы рассматриваем пространство $\mathscr{C}$ конфигурационных функций, причем каждой $C \in \mathscr{C}$ сопоставлена упругая энергия $\Phi(C)$. На принятом нами языке Φ есть функция из $\mathscr{C}$ в $\mathbb{R}$. На заре вариационного исчисления функция, областью определения которой служит функциональное пространство, была окрещена *функционалом*, поскольку такие функции казались принадлежащими к новому роду вещей (а выражение „функция от функции" имело уже в математике свое употребление, хотя и неудачное,— так называли композицию функций, переводящую x, скажем, в $f(g(x))$). Отсюда пошло название предмета „функциональный анализ", которое надо понимать как „анализ функционалов", а не как понимают словосочетания „функциональное расстройство", „функциональная архитектура".[1] В математике под „функционалом" в конце концов стали понимать обычно вещественную функцию, определенную на банаховом [2] пространстве, включая сюда и случаи, когда банахово пространство конечномерно или не является пространством функций. В механике слово „функционал" стало сигналом того, что речь идет о „точной" бесконечномерной формулировке, а не ее конечномерной аппроксимации. Оно используется и там, где конфигурации образуют не векторное пространство, а многообразие (как в случае машины Зимана, положения колеса которой образуют окружность, а не прямую). Ни в одном из своих употреблений оно не является необходимым, и раз тема

[1] Здесь в переводе небольшое отступление от оригинала, связанное с различием русского и английского языков. В оригинале: This gave us the subject named 'functional analysis', by apposition of nouns rather than attaching an adjective to a noun: a grammarian would guess that it means 'analysis which works'. (Это дало нам предмет „функциональный анализ" — название, в котором первое слово — это существительное, используемое в качестве приложения, а не прилагательное; грамматик счел бы, что это „анализ, который работает".) — *Прим. ред.*

[2] Или на (псевдо)топологическом векторном.— *Прим. ред.*

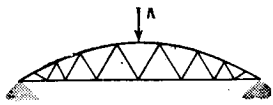


Рис. 13.1

этой главы лежит на „ничейной" земле между приложениями и чистым анализом, мы отбрасываем этот термин. Слово „функция" в этой главе будет *включать в себя* все значения, которые иногда оставляют за „функционалом". Соответственно мы снабдим область $\mathscr{C}$ структурой, достаточной для того, чтобы возможно было применять большую часть конечномерного дифференциального исчисления; эта структура будет становиться все более сложной с технической точки зрения по мере нашего продвижения вперед.

2 Состояния упругого равновесия

Рассмотрим сложную упругую конструкцию, подвергнутую нагрузке Λ (рис. 13.1), и допустим, что она находится в устойчивом равновесии. Это физическое предположение мы отождествим с математическим предположением, заключающимся в том, что ее конфигурация C лежит в области $\mathscr{C}$, в которой функция упругой энергии Φ определена и играет существенную роль в описании системы, и что функция полной потенциальной энергии

$$\varphi = \Phi + \Gamma\colon\ \mathscr{C} \to \mathbb{R}$$

имеет в C строгий локальный минимум. (Здесь Γ представляет собой чаще всего *гравитационную* потенциальную энергию, зависящую от положения конструкции и груза. Конечно, могут встретиться и другие консервативные силы.)

Увеличим немного нагрузку Λ — конструкция слегка сместится; довольно долго ее конфигурация будет меняться плавно с нагрузкой. Математически можно обычно снабдить $\mathscr{C}$ структурой, достаточной для того, чтобы решить, когда минимум φ в C оказывается *морсовским*, и затем, применив какую-нибудь бесконечномерную теорему о неявной функции, вывести это гладкое поведение, как в § 5 гл. 6, при одном внешнем параметре Λ. (Эта теорема, вообще говоря, *неверна* в бесконечномерном случае, если $\mathscr{C}$ не является банаховым многообразием, поэтому здесь требуется осторожность.) Схематически это поведение обычно представляют так, как на рис. 13.2, где жирная кривая — это *равновесный путь* (или *равновесная кривая*), задаваемый соотнесением состояния равновесия $C(\bar{\Lambda})$ каждому значению нагрузки $\bar{\Lambda}$. Нагрузка Λ изображается на диаграмме высотой точки пути; c_1 и c_2 — представительные координаты, описывающие конфигурацию конструкции и фигу-

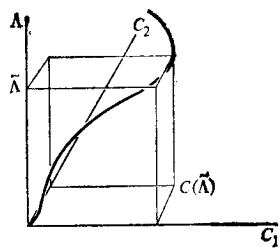


Рис. 13.2

рирующие здесь вместо бесконечного множества чисел, которое фактически требуется для полного описания $\mathscr{C}$. Изучение равновесных путей и их бифуркаций занимает центральное место в литературе по теории упругости. В технической литературе обращение к теореме о неявной функции по поводу их существования само обычно является неявным, что, впрочем, относится и к значительной части вычислительной практики применения теории катастроф. Систематизация и прояснение таких вычислений при помощи топологических методов лишь теперь начинают объединяться с проведенным в большом числе примеров трудным анализом, и лишь после этого прояснения можно будет ожидать истинно новых результатов.

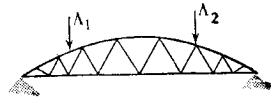


Рис. 13.3

В то же время бывает, что в технической литературе явно поднимаются топологические вопросы; общие теоремы относительно подъема путей равновесия, обсуждавшиеся у Томпсона и Ханта [110], стр. 62, лишь недавно были уточнены и доказаны для произвольных конечных размерностей Кёйпером (личное сообщение Чиллингворту) с существенным использованием алгебраической топологии.

Ситуация, представленная на рис. 13.1, конечно, несколько необычна; чаще нагрузка оказывается *распределенной*. Если имеются две точки, в которых независимо могут быть приложены нагрузки (рис. 13.3), то „нагрузка" становится двумерной величиной $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и равновесный путь заменяется *равновесной поверхностью* (или *поверхностью равновесия*), параметризованной вблизи морсовского минимума функции φ с помощью Λ. Если позволить нагрузкам Λ_1, Λ_2 менять точки приложения, то для описания нагрузки Λ понадобится еще больше измерений, и мы будем иметь *многообразие равновесия*. Непрерывно меняющаяся от точки к точке нагрузка описывается функцией, и пространство L возможных нагрузок становится бесконечномерным. Если (как это обычно бывает) L может быть наделено структурой банахова многообразия, то рассуждения, которые приводят к кривой равновесия через морсовский минимум, обобщаются и на этот случай, и мы получаем локальное существование бесконечномерного банахова многообразия равновесия.

Ясно, что мы попадаем в обычную для теории катастроф ситуацию, с Λ в качестве внешнего(-их), или управляющего(-их), параметра(-ов) и с кривой (поверхностью, многообразием) равновесия в качестве многообразия катастрофы. Правда, когда мы приближаемся к особенности, все немного усложняется. В механике обычно оказывается, что способ, которым рассматриваемый минимум становится

неморсовским (при изменении Λ), подобен конечномерному: гессиан приобретает конечное число направлений, в которых он вырождается, а другие направления четко отделяются с помощью бесконечномерного аналога рассуждений § 5 гл. 2. Вблизи точки, где это происходит, также оказывается справедливой и лемма расщепления в параметрической форме (§ 4 гл. 6); на самом деле, хотя доказательство для конечномерного случая использует лишь совершенно элементарные соображения, первое вообще опубликованное доказательство было как раз бесконечномерным и появилось лишь в 1969 г. (Громолл и Майер [100]). Та часть расщепления, которая относится к теореме о неявной функции (и дает локальное существование подмногообразия существенных переменных, но без униформизации квадратичной части в остальных точках), насчитывает уже около 70 лет и известна как *процесс приведения Ляпунова — Шмидта*; ее таким же образом можно использовать и для многих других целей. Справедливость указанного результата лежала в основе практического успеха вычислений в теории упругости, основанных на линеаризации и обратной подстановке, как ниже в § 5, и проводившихся начиная по крайней мере с 1744 г. (Эйлер [95]),— метод, который работает потому, что он аппроксимирует возможную редукцию к конечномерному случаю. Эта связь между топологией (также идущей от Эйлера) и механикой более тесная, чем мог предвидеть даже этот величайший из умов, которые дала Швейцария.

3 Новые моменты, связанные с бесконечномерностью

Когда предел устойчивости достигается таким удачным образом, как выше, редукция к конечному числу существенных переменных в $\mathscr{E}$ позволяет ввести в действие весь остальной аппарат конечномерной теории катастроф. (Или можно прямо доказать результаты типа теоремы 8.6, при тех же предположениях о вырожденности гессиана, см. Мэгнус [101—103].) Но одно из следствий доказательства того, что при этих условиях все идет, как надо, состоит в более ясном понимании того, каким образом дела могут пойти не так, как надо. Это связано с новыми возможностями получить особенности, возникающими для гессиана функции на *бесконечно*мерном пространстве. Их лучше описывать в терминах гессиана, рассматриваемого как линейный оператор; читатели, незнакомые с функциональным анализом, да простят нас за непонятность следу-

ющих двух абзацев, но изложение соответствующих предварительных сведений заняло бы у нас еще целую главу.

Одно из осложнений просто состоит в том, что гессиан H может вырождаться в бесконечно многих направлениях. Если задачу можно поставить в „хорошем" пространстве и нуль изолирован в спектре H, то с этим можно сладить различными способами (H должен иметь замкнутый образ), но все же пространство *существенных* переменных становится бесконечномерным, и коразмерность, разумеется, бесконечна. Это нельзя скинуть со счетов по соображениям типичности (особенно для „идеальных" систем, сходящих с чертежных досок), а вопросы, рассматриваемые в этой книге для конечномерных систем, не могут в этом случае изучаться теми же методами.

Другая возможность, интуитивно менее очевидная, заключается в том, что гессиан может стать особым не из-за того, что он вырождается в каком-нибудь направлении — как оператор он остается инъективным,— а из-за отсутствия сюръективности, хотя топологически образ его и будет плотным. Нам не удалось отыскать ни одного примера такого рода в специфически инженерных задачах (возможно, потому, что мы не знали, где искать). Однако математический анализ неоднородной „упругой нити", в которой локальное соотношение между растяжением и энергией не во всех точках нити биективно, приводит *типичным* и *устойчивым* образом именно к этому явлению (Мэгнус и Постон [104]). Редукция к одной существенной переменной (т. е. к одной *моде выпучивания* в терминологии, принятой ниже) оказывается невозможной вблизи точки бифуркации: гессиан не выделяет направления в пространстве конфигураций, вдоль которого энергия не возрастает. Тем не менее имеется вполне определенное многообразие равновесий, устойчивых или неустойчивых, геометрия которого устойчива и отвечает геометрии катастрофы складки. Еще неясно, насколько далеко можно обобщить этот пример на поддающиеся классификации семейства „нерасщепляемых" катастроф, связанные с семействами из гл. 7, где типичность и лемма расщепления позволяла нам сорить переменными, как деньгами.

Итак, мы не можем опираться на математическую „типичность" результатов, представленных в гл. 7, если только нет явных доказательств хорошего поведения гессиана. Но во всяком случае мы рассмотрим в этой главе запроектированные системы (см. сказанное о таких системах в § 3 гл. 7), для которых соображения типичности могут оказаться ненадежной опорой — выпученной тростинкой, если

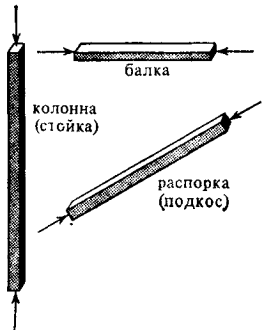


Рис. 13.4

не „тростью надломленной“ [1]. Более интересные для инженерных целей аспекты теории катастроф — это вычислительные приемы гл. 8, с помощью которых можно дать ответ на конкретные вопросы в тех конкретных математических задачах статической упругости, где удовлетворяются предположения леммы расщепления. Поскольку таким задачам посвящена значительная часть литературы, это условие нельзя считать чрезмерно ограничительным.

ЭЙЛЕРОВЫ СТЕРЖНИ

Мы начинаем разбор наших примеров со стержня, не потому что это последнее слово в науке о выпучивании, а потому что первое,— точно так же, как следующую главу мы начнем с уравнения ван дер Ваальса. Все новые продвижения в теории упругости, аналитические и численные, вначале проверялись на этом испытанном фаворите, именно по той причине, что этот пример столь хорошо понят, что может пролить свет на новые методы. Мы начнем фактически с простейшего возможного варианта.

4 Конечно-элементный подход

Мы займемся моделированием поведения длинного тонкого тела под действием сжимающих сил, приложенных на его концах. Терминология здесь меняется в зависимости от положения тела по отношению к вертикали (рис. 13.4); мы предпочтем нейтральный термин *стержень*.

Допустим, что продольная сжимаемость пренебрежимо мала по сравнению с деформациями изгиба стержня и что его концы *свободно оперты*; последнее означает, что они могут перемещаться лишь вдоль некоторой прямой, но не зажаты в определенном направлении. Дальше, допустим, что стержень все время находится в фиксированной плоскости; это предположение разумно для многих систем, так как обычно легко показать, что перемещениям, выводящим за пределы этой плоскости, отвечают несущественные переменные в смысле § 14 гл. 8. (Для некоторых систем это, конечно, не так.)

Прежде всего сосредоточим внимание на случае изгиба в одной точке. Именно (см. рис. 13.5), заменим наш стержень системой из двух *жестких* стержней (шатунов) шар-

[1] Намек на библейскую притчу (книга пророка Исайи, 42 : 3).— *Прим. ред.*

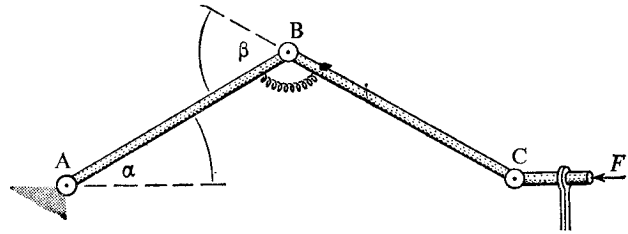


Рис. 13.5

нирными соединениями в точках A, B, C и пружинкой в B, которая стремится выпрямить шатуны в одну линию. Если пружинка линейна, она возбудит усилие $\gamma\beta$, пропорциональное углу β на рис. 13.5, и будет обладать упругой энергией $\gamma\beta^2/2$, где γ — „постоянная упругости" пружинки. Допустим, что каждый шатун имеет длину 1 (см. рис. 13.6). Суммируя упругую энергию пружинки и потенциальную энергию, отвечающую положению силы F, мы получаем полную энергию (с точностью до константы)

$$U = \frac{1}{2}\gamma(2\alpha)^2 + 2F\cos\alpha.$$

Значит,

$$j^4U = 2\gamma a^2 + 2F\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\right),$$

откуда

$$J^4U = (2\gamma - F)\alpha^2 + \frac{F}{12}\alpha^4.$$

Когда F меньше 2γ, U имеет морсовский минимум при $\alpha=0$ (и нетрудно увидеть, что это единственный минимум). Когда $F=2\gamma$, U имеет вырожденный минимум, в котором немедленно узнается точка *стандартной сборки*, так как коэффициент $F/12=\gamma/6$ при α^4 положителен. „Проводя" F через значение 2γ, скажем полагая $F=2\gamma+b$, мы получим деформацию

$$\frac{\gamma}{6}\alpha^4 + \frac{b}{12}\alpha^4 - b\alpha^2.$$

Она универсальна среди четных функций (хотя мы и не дали алгебры, нужной для установления этого факта), и в действительности деформация исходной функции U *сильно* эквивалентна вблизи интересующей нас точки деформации

$$\frac{\gamma}{6}\alpha^4 - b\alpha^2,$$

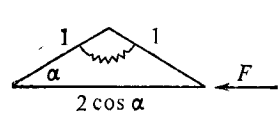


Рис. 13.6

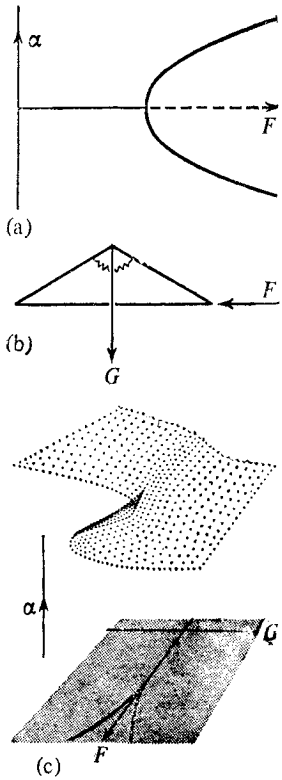


Рис. 13.7

диаграмма катастрофы для которой представлена на рис. 13.7(a). Но симметрия является здесь, конечно, неприемлемой как абсолютное ограничение, введение же почти любой асимметричной силы (рис. 13.7(b)) приводит нас к обычной картине сборки (рис. 13.7(c)). Действительно, для силы G такой, как показано на рисунке, имеем

$$U = \frac{1}{2}\gamma(2\alpha)^2 + 2F\cos\alpha + G\sin\alpha,$$

так что

$$j^5U = 2\gamma\alpha^2 + 2F\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\right) + G\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}\right),$$

или

$$J^5U = \frac{\gamma}{6}\alpha^4 - b\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right) + G\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}\right).$$

Отсюда следует по теореме 8.7, что U сильно эквивалентна

$$\frac{\gamma}{6}\alpha^4 - b\alpha^2 + G\alpha,$$

а это, с точностью до линейной замены, стандартная сборка.

В отличие от рассмотренного выше симметричного случая это описание *структурно устойчиво*. Возмутим функцию U, заменив ее на $U+tV$, где V — любая функция от α, F, G и каких угодно других „управляющих“ параметров, включенных в описание системы (разность длин шатунов, боковые смещения нагрузки G, угол между G и перпендикуляром к F и т. п.). Тогда при малых значениях t и прочих дополнительных параметров сохраняется не только та же картинка, но и та же формула, с точностью до гладкой замены переменных. (Верны и более сильные — более „равномерные“ утверждения, но здесь дело осложняется техническими деталями.) Точка острия, направление острия и пр. перемещаются плавно с изменением t и дополнительных параметров. Все это — следствие универсальности трансверсальных деформаций и устойчивости трансверсальности.

5 Классический (1744 г.) вариационный подход

Снова распределим „гибкость“ по всей длине стержня и вернемся временно к симметричному случаю (рис. 13.8), т. е. к случаю $G=0$, в обозначениях предыдущего параграфа. Отметим, что тем самым горизонтальный стержень на рис. 13.5 и 13.8 считается невесомым. „Качественно“, т. е.

топологически, *никакая* сила $G \neq 0$ не является пренебрежимой, но количественно G может быть малой. („Качественные" различия, как было замечено в § 10 гл. 10, могут быть тоньше количественных.) Мы все еще предполагаем, что стержень несжимаем по длине, которую примем равной 1; далее, мы предполагаем, что упругая энергия распределена по стержню пропорционально квадрату кривизны в данной точке с одной и той же константой пропорциональности. Будем считать, что конфигурация стержня описывается функцией



Рис. 13.8

$$s \longmapsto (f^x(s),\ f(s)),$$

отображающей единичный интервал в плоскость, и проигнорируем (как это обычно делается) все горизонтальные смещения f^x, которые незначительны при малых отклонениях, за исключением смещения правого конца $f^x(1)$. Так как концы стержня лежат на оси x, для них $f=0$; поскольку в концах нет изгибающего момента, для них также и $d^2f/ds^2=0$. (Совершенно иначе обстоит дело для *заделанного* (защемленного) стержня, у которого углы в концевых точках находятся под контролем.) Будем пользоваться обозначениями

$$f'(s) = \frac{df}{ds}(s), \qquad f''(s) = \frac{d^2f}{ds^2}(s) \text{ и т. д.}$$

Положим

$$\theta(s) = \arcsin(f'(s))$$

(рис. 13.9). Тогда

$$f'(s) = \sin\theta(s),$$
$$f''(s) = \theta'(s)\cos\theta(s)$$

(по цепному правилу). Кривизна по самому ее определению равна $\theta'(s)$, поэтому
кривизна в

$$\begin{aligned} s &= f''(s)/\cos\theta(s) \\ &= f''(s)/\sqrt{1-f'(s)^2} \\ &= f''(s)\left(1+\frac{1}{2}(f'(s))^2+\frac{3}{8}(f'(s))^4+\dots\right). \end{aligned}$$

Значит, упругая энергия равна

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\mu(\theta'(s))^2\,ds = \frac{\mu}{2}\int_0^1 (f''(s))^2\,ds + \frac{\mu}{2}\int_0^1 (f''(s))^2(f'(s))^2\,ds + \dots,$$

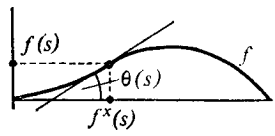


Рис. 13.9

где μ — модуль упругости на единицу длины, соответствующий γ из конечно-элементного метода. Аналогичным образом расстояние между концами стержня, пропорциональное раньше $\cos\alpha$, теперь равняется

$$f^*(1) = \int_0^1 \cos(\theta(s))\,ds = \int_0^1 \sqrt{1-(f'(s))^2}\,ds$$
$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}(f'(s))^2 - \frac{1}{8}(f'(s))^4 - \dots\right) ds.$$

Таким образом, с точностью до константы потенциальная энергия, связанная с перемещением правого конца, равна

$$-\frac{F}{2}\int_0^1 (f'(s))^2\,ds - \frac{F}{8}\int_0^1 (f'(s))^4\,ds - \dots.$$

Теперь, как обычно, мы ожидаем, что бифуркация происходит, когда квадратичная часть полной энергии

$$H(f) = \frac{\mu}{2}\int_0^1 (f''(s))^2\,ds - \frac{F}{2}\int_0^1 (f'(s))^2\,ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\mu(f''(s))^2 - F(f'(s))^2)\,ds$$

становится вырожденной. В бесконечномерном случае невозможна проверка H на вырожденность с помощью определителя, но мы можем продифференцировать „по f" и посмотреть, будет ли уравнение $DH(f)=0$ иметь ненулевые решения. В конечномерном случае существование такого решения *эквивалентно* вырожденности H (если это утверждение не кажется вам очевидным, рассматривайте его как дополнительное упражнение к гл. 3). В бесконечномерном случае вырожденность — вещь более тонкая, как отмечалось в § 3, но существование указанных решений всё еще *влечет за собой* вырожденность H, и мы допустим (как увидим, правильно), что в нашем случае этот критерий является полным.

Но как же дифференцировать по f? Здесь не место для систематического обзора вариационного исчисления с его ужасающим разнообразием используемых обозначений. Без такого обзора необходимые вычисления покажутся темными одним читателям, рутинно-скучными другим и никому ничего не прояснят. Достаточно будет сказать, что

уравнение $DH(f)=0$ — это уравнение Эйлера — Лагранжа для приведенного выше интеграла с данными граничными условиями, которое запишется как

$$\mu f''''+Ff''=0.$$

Как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение [1] с одной независимой переменной s, оно легко решается, и общее решение его такое:

$$f(s)=x\sin\left(\sqrt{\frac{F}{\mu}}\,s\right)+y\cos\left(\sqrt{\frac{F}{\mu}}\,s\right).$$

Как легко проверить, граничные условия удовлетворяются, если и только если $y=0$ и величина $\sqrt{F/\mu}$ кратна π. Поскольку при $F=0$ квадратичная форма H, очевидно, положительно-определенна, мы имеем минимум энергии при $f=0$ до тех пор, пока F возрастает до первой точки бифуркации, где существует первое нетривиальное решение уравнения $DH(f)=0$, т. е. первое вырождение H имеет место для

$$F=\mu\pi^2.$$

Чтобы понять, как выглядит выпучивание, „вернем“ назад (некоторые) члены высшего порядка. Пространство существенных переменных (обозначим его, скажем, через X) одномерно (ибо таково пространство решений „линеаризованного“ уравнения $DH(f)=0$) и представляет собой кривую в пространстве возможных решений, *касательную* к линеаризованному пространству решений — прямой L, состоящей из функций

$$s\longmapsto x\sin(\pi s)$$

для различных x. (Функция $\sin(\pi s)$, базисная для прямой L, аппроксимирующей криволинейную „ось существенных переменных“ X, носит название *моды выпучивания*.) Итак, мы аппроксимируем ограничение энергии на X ограничением ее на L.

Здесь есть момент, требующий известной осторожности, что мы можем ясно проиллюстрировать на конечномерном примере. Пусть

$$g(x,\ y)=x^2+4xy^2+2y^4.$$

Квадратичная часть здесь равна просто x^2, и поэтому ли-

[1] С постоянными коэффициентами.— *Прим. ред.*

неаризацией уравнения

$$Dg(x,\ y)=0$$

служит уравнение .

$$x=0.$$

Следовательно, L (в наших предыдущих обозначениях) — это просто ось y. Ограничение g на нее дает $2y^4$, и положительный коэффициент 2 мог бы заставить нас ожидать, что универсальной деформацией g будет стандартная катастрофа сборки.

Это не так.

Прежде чем приступать к заключениям, следует надлежащим образом отщепить несущественные переменные (о существовании которых нельзя забывать) посредством чего-нибудь вроде алгоритма приведения из гл. 8. Действительно,

$$g(x,\ y)=(x+2y^2)^2-2y^4,$$

и в координатах $(x+2y^2,\ y)$, в которых g расщепляется, 4-струя g, как мы видим, *отрицательно*-определенна по существенной переменной, и ее деформация будет представлять собой *двойственную* сборку (что означает совсем иное поведение). Таким образом, подстановка решения линеаризованного уравнения обратно в исходную функцию энергии не всегда приводит к качественно правильному ответу.

В этом примере все неприятности возникли из-за кубического члена. Если

$$h(x,\ y)=x^2+2y^4+(ax^3y+bx^2y+cxy^3)$$

для любых a, b, c, то, как показывает анализ процедуры приведения (или общая теория), заменой переменной *можно* превратить 4-струю функции h просто в x^2+2y^4. Поэтому здесь подстановка y обратно в h даст результат, сильно эквивалентный правильному, каковы бы ни были a, b, c и (в силу конечной определенности) высшие члены. Сходные результаты имеют место и в бесконечномерном случае (Мэгнус [103]), а отсутствие кубических членов как раз будет иметь место в примере, который мы рассматриваем.

Итак, параметризовав $L=\{s\to x\sin(\pi s)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ с помощью x, мы найдем правильную 4-струю энергии, ограниченную

на X, из следующих вычислений:

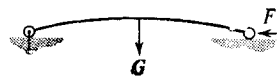


Рис. 13.10

$$\frac{\mu}{2}\int_0^1 (-\pi^2 x\sin(\pi s))^2\,ds+\frac{\mu}{2}\int_0^1 (-\pi^2 x\sin(\pi s))^2 \times(\pi x\cos(\pi s))^2\,ds$$
$$-\frac{F}{2}\int_0^1 (\pi x\cos(\pi s))^2\,ds-\frac{F}{8}\int_0^1 (\pi x\cos(\pi s))^4\,ds$$
$$=\frac{\mu\pi^4}{4}\left(x^2+\frac{\pi^2}{4}x^4\right)-\frac{F\pi^2}{4}\left(x^2+\frac{3\pi^2}{16}x^4\right)$$
$$=\left(\frac{\mu\pi^6}{16}-\frac{3F\pi^4}{64}\right)x^4+\frac{\pi^2}{4}(\mu\pi^2-F)x^2.$$

Эта струя вырожденна, как и ожидалось, при $F=\mu\pi^2$. Беря $F=\mu\pi^2(1+a)$, получаем

$$\frac{\mu\pi^6}{64}(1-3a)x^4-\frac{\mu\pi^4 a}{4}x^2$$

— деформацию струи $\mu\pi^6 x^4/64$. Как и в § 4, эта деформация ни универсальна, ни устойчива (за пределами четных функций), и нам нужно добавить еще асимметричную нагрузку. Для случая горизонтального положения стержня, к которому относятся все наши рисунки, этой нагрузкой мог бы послужить его вес, но с точки зрения легкости экспериментального варьирования лучше взять нагрузку, сосредоточенную посредине стержня (рис. 13.10). Это дает нам потенциальную энергию $G\times$ (высота средней точки стержня), что с точностью до членов первого порядка по x совпадает (благодаря касанию X и L) с

$$G(x\sin(\pi/2))=Gx$$

и, значит, с той же точностью является нечетной функцией от x. Таким образом, мы имеем деформацию, 4-струя которой равна

$$\frac{\mu\pi^6}{64}(1-a)x^4-\frac{\mu\pi^4 a}{4}x^2+G(x+O(3)).$$

По симметрии член 5-го порядка по x в этой деформации исчезает, и поэтому точная функция энергии стержня (ограниченная на пространство X существенных переменных) сильно эквивалентна (в силу теоремы 8.7) функции

$$\frac{\mu\pi^6}{64}x^4-\frac{\mu\pi^4 a}{4}x^2+Gx.$$

С точностью до положительных констант это как раз то, что мы получили в § 4, так что поведение в смысле выпучивания остается тем же самым. Хотя доказательства тут и заметно сложнее (мы еще немного поговорим об этом в § 7), но замечания об устойчивости, сделанные в конце § 4, остаются в полной мере справедливыми. Их практическая сила особенно убедительна в отношении чувствительности к несовершенствам, которая для различных систем рассматривается ниже. Здесь они предоставляют нам возможность ex post facto, но строго оправдать пренебрежение составляющей f^x, допущенное при постановке задачи,— если считать, что формальный аппарат, обсуждаемый в § 7, имеется в нашем распоряжении.

6 Анализ возмущений

В предыдущей главе при анализе асимптотики мы видели, что вблизи морсовской точки имела значение лишь квадратичная часть фазовой функции; поэтому коротковолновый предел (предел для случая малых длин волн) давал аппроксимацию, достаточную для многих практических целей. Здесь аналогичную роль играет „линеаризованная" теория, которую очень точно можно описать как предел для случая малых *возмущений*. Вблизи морсовского минимума (или седла) она дает хорошее описание, но при приближении к *вырожденной* критической точке приходится вернуть члены более высокого порядка. И стоит только случиться, чтобы вырожденность не имела специальных симметрий, которые выше убили кубические члены, или чтобы она давала особенность несколько более высокую, чем x^4, как простая „подстановка в линеаризованные уравнения" оказывается уже не заслуживающей доверия (как мы это видели). Иногда для того чтобы обратная подстановка в исходную функцию энергии стала надежным приемом, требуется аппроксимация более высокого порядка, чем та, которую дает прямая L для кривой X — оси существенной переменной (аналогично и в случае конечного числа существенных переменных).

Наиболее строгими и общими являются процедуры расщепления, использующие структуру гильбертова или банахова многообразия на пространстве положений системы (мы обсудим этот вопрос подробнее в следующем параграфе), но топология банаховых пространств не войдет в минимум инженерного образования ни в этом, ни в следующем году. (В действительности нам приходилось изумляться тому, как инженеры производят вычисления с недоступной нам

скоростью и в конечной, и в бесконечной размерности и получают при этом вполне разумные ответы,— и всё благодаря теореме о неявной функции, о которой, по их словам, они и не слышали.) Когда выполняются условия леммы о расщеплении, многие методы могут использовать ее справедливость при достаточно невысоком уровне анализа. Один из наиболее важных приемов — прием асимптотического разложения, аналогичный до некоторой степени методам предыдущей главы,— был введен в инженерную практику Сьюэллом в 1964 г. и с тех пор широко и эффективно используется. Это метод *статического возмущения*. Если параметризовать X (мы применяем введенные выше обозначения) с помощью x, этот метод по существу означает, что мы последовательно решаем системы линейных уравнений всё более высокого порядка для отыскания членов тейлоровского разложения функции, определяющей вложение кривой (или поверхности, или многообразия) X в пространство положений. Не вводя топологии в это пространство, мы не можем по-настоящему говорить о таком разложении; однако благодаря тому, что фактически задача допускает более глубокие структуры, чем это здесь представлено, метод, как правило, очень хорошо работает и, кроме того, прекрасно переводится на строгий язык.

Мы не будем входить в детали вычислений, отчасти потому, что они подобны тем, что были проведены в предыдущем параграфе (хотя их здесь и больше), а отчасти потому, что они прекрасно описаны в книге Томпсона и Ханта [105], которую каждый, кто думает одновременно об инженерных вопросах и о теории катастроф, во всяком случае должен прочитать, измарать, выучить и переварить. Она как раз предшествует контакту ее авторов с теорией катастроф, но показывает своими многочисленными, отчасти эвристическими, параллелями с ней, насколько созревшей для такого контакта была их область исследований. Значительная часть их материала весьма существенна для эффективного использования теории катастроф в теории упругости.

В случае эйлерова стержня, параметризуя кривую X (ось существенных переменных) отклонением b средней точки стержня и записывая

$$w(s)=bw_1(s)+b^2w_2(s)+\ldots,$$

где w_i — некоторые конфигурационные функции, Томпсон и Хант подсчитывают ([105], стр. 29—34), что в точке выпучивания

$$w_1(s)=\sin(\pi s),$$

как мы уже видели (мы переводим их результаты в наши обозначения, при этом, к сожалению, s и x меняются ролями),

$$w_2(s)=0,$$

что можно показать, воспользовавшись соображениями симметрии,

$$w_3(s)=-(\pi^2/64)(\sin(\pi s)+\sin(3\pi s)).$$
$$w_4(s)=0,$$

а дальше уже ясно. (Вообще говоря, b может быть и многомерным.) Рассуждение, использующее конечную определенность, показывает, что вопросы сходимости могут быть оставлены в стороне; но доказательство того, что то, что нужно аппроксимировать, существует, требует топологических методов типа описываемых в следующем параграфе. Когда задача надлежащим образом расщепляется, а уравнения, определяющие w_i, могут быть последовательно решены, подстановка возмущающего разложения до порядка k по b в точную функцию энергии даст правильные результаты, если возникающие многочлены от b (или от $(b_1, \ldots, b_n)$) являются k-определенными. Иногда (как это имеет место для эйлерова стержня) правильные результаты получаются с меньшим разложением, чем такое, и тот факт, что часто достаточно уже первого члена, помог всей теории начаться два века назад, а затем помог ей расцвести. Сводка приемов, дающих возможность заранее узнать, как много членов разложения потребуется, принадлежит той монографии о вычислительных методах, о которой упомянуто во введении к гл. 8.

7 Современный функциональный анализ

Чтобы проделать всё предыдущее „надлежащим образом", нам следует быть гораздо более точными в том, что касается пространства функций, описывающих возможные конфигурации. Чтобы уметь *доказывать* в конкретных случаях, что всё происходит так же, как при конечно-элементном подходе, мы нуждаемся в информации о структуре пространства $\mathscr{C}$. Конечномерные вещественные векторные пространства имеют одинаковые топологическую и дифференциальную структуры, если их размерности совпадают. Бесконечномерные пространства разнообразнее. Грубо говоря, самые ручные из них — это гильбертовы пространства (обладающие „скалярным произведением" с хорошими топологическими свойствами), затем идут банаховы простран-

ства (в которых имеется удобная *норма* — мера „длины" векторов), за ними следуют пространства Фреше (с бесконечным [1] числом „не совсем норм"), далее начинается вакханалия более слабых структур. В общем, бóльшая часть конечномерного анализа проходит для банаховых пространств, хотя даже и в гильбертовых пространствах таятся штучки вроде тех, что обсуждались в § 3. Наилучшее изложение этого предмета, по-видимому, всё еще содержится у Дьёдонне [106]. За пределами банаховых пространств жизнь много тяжелее. Мы хотели бы подчеркнуть, что большинство более слабых („диких") структур было открыто в приложениях, а не изобретено извращенными теоретиками; на самом деле уже пространство *ростков* („локально определенных функций"), в терминах которого по-настоящему надо было бы формулировать теоремы гл. 8, чтобы их можно было доказывать, настолько слабо по своей структуре, с точки зрения аналитика, что ни один из существенных результатов анализа, скажем теорема о неявной функции, не доказан для него. (Нет даже хорошего определения касательного вектора для пути в нем!) Есть подозрения, что оно обладает некоторой более сильной структурой, чем выяснено до сих пор, именно потому, что справедливы результаты типа теорем гл. 8 (доказанные пока, как это нутром чувствуют некоторые аналитики, обходными методами),— но несомненно, что с ним всё же работать будет сложнее, чем с банаховыми пространствами.

Таким образом, всюду, где возможно, стоит переводить постановку вариационной задачи в рамки гильбертова или банахова пространства (или многообразия). Иначе многие интуитивно очевидные утверждения, полезные с вычислительной точки зрения, могут оказаться просто неверными, а не только трудными для доказательства. Для большинства задач упругости это может быть проделано, но соответствующие методы появились лишь недавно (после второй мировой войны, а не в 1744 г.) и они довольно удивительны.

Наиболее очевидным кандидатом на роль пространства в нашем примере, пожалуй, является пространство гладких функций, определенных на интервале от 0 до 1. При более либеральном отношении к делу можно было бы потребовать и меньшей дифференцируемости; возьмем, скажем, пространство k раз непрерывно-дифференцируемых функ-

[1] Счетным.— *Прим. ред.*

ций для некоторого k. Поскольку в энергии встречается вторая производная, то как будто k должно быть не меньше 2, а наличие четвертой производной в линеаризованном уравнении заставляет думать о значении 4.

Эти пространства могут быть снабжены структурами, которые превосходны для некоторых целей, но не для нашей! Эти структуры не связаны с рассматриваемой проблемой и не обеспечивают достаточно удобного поведения функции энергии с точки зрения возможности эффективного математического подхода. Для того чтобы обеспечить правильные свойства сходимости и пр. („правильные" означает здесь, что мы можем что-то доказать для нашей задачи), приходится допустить гораздо более странные функции — лишь тогда сходимость становится „послушной". Наилучшим для постановки задачи о стержне представляется (Чиллингворт [107], Болл [108]) гильбертово пространство, обозначаемое через

$$H^2 \cap H_0^1.$$

Описать его нелегко; H^2 есть пространство функций на данном отрезке, квадраты которых, а также квадраты *обобщенных* первой и второй производных которых интегрируемы. „Обобщенных" означает тут, что в классическом смысле производные вовсе не обязаны существовать,— это измеримые функции, определенные лишь с точностью до значений на (произвольном) множестве меры нуль. (Мощные теоремы вложения Соболева позволяют по меньшей мере думать о самих функциях из H^2 как о непрерывных в классическом смысле.) Пространство H_0^1 нужно, чтобы доставить эквивалент граничных условий $f(0)=$ $=f(1)=0$; так много топологии входит в его определение, что мы даже не пытаемся его здесь описывать. Мы просто не ввели подходящего языка.

В этой постановке вычисления § 5 получают строгое обоснование, и можно показать, что *решения* задачи оказываются хорошими, классическими, гладкими функциями. (Все такие функции „включены" в пространство $H^2 \cap H_0^1$, но пространство гладких функций само по себе не дает достаточного топологического простора для решения задачи — хотя оно и содержит в себе ответы. Оно напоминает автомат по продаже карандашей с трехсантиметровой дыркой посредине — вы можете пощупать и покрутить карандаш, но не вытащить его.) Для более сложных задач выпучивания такая переформулировка повышает вычислительные возможности (см., например, статьи в сборнике [109] под редакцией Келлера и Энтмэна) и в то же время

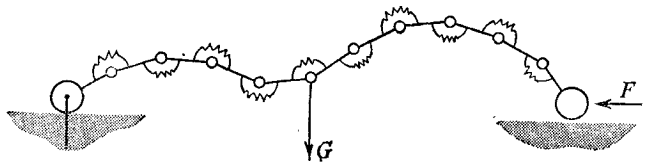


Рис. 13.11. *Конечно-элементная модель (не в равновесии).*

необходима для теоретического осмысления осложнений, подобных упомянутым в § 3. Там, где эти математические строгие методы позволяют вдаваться в такие тонкости, классические вариационные методы просто дают неверные ответы — неверные теоретически, качественно и численно. Современный подход, основанный на функциональном анализе, является необходимым и прочно установленным развитием классической теории, с обширной литературой по практическим приложениям.

Этот подход проливает также яркий свет на природу моделирования. Мы вышли за пределы вре́менного допущения о „конфигурациях, довольно-таки похожих на гладкие функции, если не рассматривать их слишком близко", сделанного нами в § 1. Мы делаем теперь очень тонкие предположения (типа квадратичной интегрируемости второй обобщенной производной), касающиеся как раз того, что бы мы увидели, если бы *могли* рассмотреть их достаточно близко; предположения, которые, как мы знаем, заведомо неверны. В каком смысле эти „инфинитезимальные" предположения можно считать моделирующими локальную усредненную природу упругих твердых тел, остается мерцающей в темноте тайной. Успехи модели в макроскопических предсказаниях действительно очень велики; но трудно сказать, в каком смысле эта теория более точна, чем приспособленный для вычислительных машин конечно-элементный подход, как в § 4, но с гораздо большим числом стержней и пружинок (рис. 13.11). (Часто наблюдаемая тесная связь между предсказаниями, даваемыми методом конечных элементов и непрерывным анализом, обстоятельно исследуется в книге Томпсона и Ханта [105].) Одна модель имеет число элементов, в бесконечное число раз большее числа упруго связанных молекул, составляющих стержень, другая — в конечное число раз меньшее. Выбор должен быть сделан на основе таких практических соображений, как стоимость, численное согласие и концептуальная ясность, а не на основе путаницы между точными *вычислениями* и точной *теорией*. (Мы включаем концептуальную ясность в число практических соображений вполне сознательно, так как длинные вычисления, которых вы не

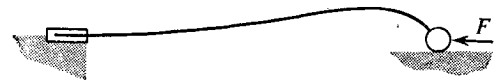


Рис. 13.12. *Стержень с одним защемленным концом.*

понимаете, будь то перемалывание чисел или методы банаховых пространств, дадут вам мосты, которые быстро обрушатся [1]. Теория хороша ровно настолько, насколько хорошо ваше понимание ее.)

Основанный на использовании гильбертова пространства подход к вычислениям в задаче о стержне из § 5 рассмотрен у Чиллингворта [107] с привлечением модели, заимствованной у Болла [108], которая близка к нашему взятию 4-струи (по f' и f'') функции энергии. (На первый взгляд разница между ними больше, но ее можно убрать с помощью диффеоморфизма.) В силу 4-определенности в точке выпучивания, модель (выраженная в терминах кривизны θ'), неусеченная по f' и f'', эквивалентна приведенной модели, и на этом каркасе можно построить доказательство устойчивости и универсальности подходящих трансверсальных деформаций. Кстати, Чиллингворт сначала проводит анализ для симметричного стержня со свободно опертыми концами, но затем вместо того, чтобы деформировать задачу (как у нас выше) с помощью новой нагрузки, он повторяет свой анализ для более сложной задачи, показанной на рис. 13.12, и деформирует *ее* универсально, варьируя угол, под которым закрепляется конец. Эта задача также приводится к стандартной сборке (на самом деле в обоих случаях видно, что приведение может быть осуществлено при *сильной* эквивалентности деформаций, для этого достаточно ввести в дело теорему 8.7). Мы не будем входить в подробности вычислений в гильбертовых пространствах, так как начальную часть книги мы употребили на изложение анализа лишь в конечномерных пространствах; однако некоторые общие вещи всё же уместно будет сказать.

Алгоритм приведения из гл. 8 здесь, конечно, не работает, поскольку он представляет собой способ распрямлять X „по одной размерности за шаг“; не работают и вычислительные методы, основанные на доказательстве леммы расщепления из гл. 6. Нужны сугубо бесконечномерные методы, и они появляются — самых разных очертаний и расцветок. В случае если задача сразу была явно сформулирована в терминах гильбертовых или банаховых про-

[1] См. сказанное о мостах в § 12.— *Прим. перев.*

странств, удобны методы, основанные непосредственно на доказательстве бесконечномерной леммы расщепления, данном Громоллом и Майером [100]. (Одна явная процедура (для универсальных деформаций) была предложена Мэгнусом [101].)

. Значительная часть литературы по функциональному анализу посвящена в действительности методам строгого сведения бесконечномерного случая к конечномерному. Стоит, однако, спросить (как Ленни Брюс [1] проповедника, стремившегося к царству божьему): „Как знать, что с ним делать, когда получишь его?" Невероятные теоретические усилия и вычислительное искусство были пущены в ход в бесконечномерном анализе для получения процедур приведения вроде метода Галёркина — Ритца, но возникающие в результате конечномерные задачи рассматриваются как более тривиальные, чем они есть на самом деле. В частности, в большинстве вопросов рассматривается лишь один управляющий параметр и встречающиеся особенности (гораздо более вырожденные — по построению,— чем фигурирующие в устойчивом или типичном одномерном семействе) не подвергаются деформации по другим параметрам. (Недавно стали появляться дву- и трехмерные деформации особенностей коразмерности *восемь*.) Вопросы структурной устойчивости как при возмущениях общего вида, так и при возмущениях, отвечающих специальным условиям задачи (типа симметрии), остаются благодаря этому вне поля исследования.

8 Выпучивание пружины

В §§ 4 и 5 мы считали стержень несжимаемым по длине. Это приближение достаточно хорошее, и в действительности если бы мы рассматривали стержень как длинный тонкий кусок изотропного твердого тела с соответствующей сжимаемостью, то мы пришли бы к той же самой бифуркации катастрофы сборки. (Здесь структурная устойчивость сборки полезна в том отношении, что она позволяет нам понять, почему небольшая продольная сжимаемость „не должна" повлиять на задачу настолько, чтобы изменить тип выпучивания. Эта пренебрежимость очевидна для опытного инженера, но, как мы уже говорили в главе о судах, никто не родится с годами опыта. Более того, метод распространяется на новые и более тонкие случаи быстрее

[1] Популярный американский эстрадный комик 60-х годов.— *Прим. ред.*

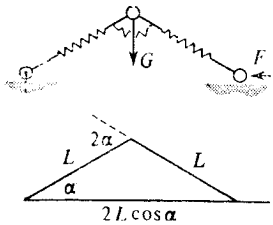


Рис. 13.13

и с большими шансами на успех, чем интуиция.) Однако если взять что-нибудь, сжимаемость чего значительна по сравнению с жесткостью, например пружину, то наблюдается совершенно иное поведение. Для экономии места и времени мы рассмотрим конечно-элементный подход; он даст нам также весьма элементарную иллюстрацию следующего общего принципа проектирования, частным случаем которого служит принцип неустойчивости симметрий: выбор проектного решения, имеющий целью упростить вычисления, может усложнить задачу. (Предварительное исследование непрерывного варианта как будто дает такую же геометрию катастрофы, но мы пока не провели анализ до конца.)

Итак, рассмотрим систему, представленную на рис. 13.13, подобную системам на рис. 13.5—13.7, за тем исключением, что оба шатуна имеют здесь переменную длину L. Допустим, что их сжатие пропорционально продольной нагрузке, и выберем единицы так, чтобы отвечающая сжатию энергия в каждом шатуне получила выражение $(1-L)^2/2$. (Мы используем без доказательства тот факт, что разность длин шатунов оказывается несущественной переменной вблизи невыпученных состояний; недоверчивый читатель может повторить наши рассуждения для случая с тремя переменными состояния.) Остальные переменные те же, что и в § 4. Полная энергия теперь будет равна

$$U(L, \alpha, F, G, \gamma) = (1-L)^2 + \frac{1}{2}\gamma(2\alpha)^2 + 2FL\cos\alpha + GL\sin\alpha.$$

Произведем зависящую от F замену

$$l = L + F - 1,$$

обратной к которой служит

$$L = l + (1-F).$$

В новых координатах l, α имеем

$$U = (F-l)^2 + 2\gamma\alpha^2 + 2F(l+1-F)\cos\alpha + G(l+1-F)\sin\alpha.$$

Беря разложение по l, α, получаем

$$J^4U = l^2 + \frac{F}{12}(1-F)\alpha^4 + (2\gamma - F(l+1-F))\alpha^2 + G(l+1-F)\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right).$$

Ясно, что если α и G равны нулю, то при условии равновесия и l должно обратиться в нуль (что и было причиной

выбора l в качестве координаты). Вблизи такого положения равновесия квадратичная часть U выглядит следующим образом:

$$J^2U = l^2 + (2\gamma - F + F^2)\alpha^2;$$

эта форма вырождается в точности тогда, когда коэффициент при α^2 равен нулю, т. е. когда продольная сила равна

$$F = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 8\gamma}.$$

Выбирая подходящее γ, можно избавиться от корня и придать всем формулам более опрятный вид; простейший точный квадрат, меньший 1, есть

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} = 1 - 8\left(\frac{3}{32}\right),$$

поэтому положим $\gamma = 3/32$. При этом для бифуркационной нагрузки получаем значения

$$F = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}.$$

Наибольший интерес представляет наименьшее значение, при котором происходит бифуркация, поэтому возьмем $F = 1/4$, что дает ($\gamma = 3/32$ и по-прежнему $G = 0$)

$$J^4U = l^2 + \frac{1}{48}\frac{3}{4}\alpha^4 - \frac{1}{4}l\alpha^2 = l^2 - \frac{1}{4}l\alpha^2 + \frac{1}{64}\alpha^4.$$

Для выяснения природы этой струи мы должны убрать смешанный кубический член, что оказывается даже слишком простым:

$$J^4U = \left(l - \frac{1}{8}\alpha^2\right)^2;$$

струя, очевидно, не является 4-определенной. Значит, хватит заниматься упрощением арифметики. По соображениям симметрии 5-струя нам тоже не поможет, и мы должны рассмотреть 6-струю:

$$\begin{aligned} J^6U &= \left(\frac{1}{4} - l\right)^2 + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720}\right) \\ &= l^2 - \frac{1}{4}l\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{64} + \frac{l\alpha^4}{48} - \frac{\alpha^6}{1920} \\ &= \left(l - \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{96}\right)^2 + \frac{\alpha^6}{480}. \end{aligned}$$

Эта струя 6-определенна согласно результатам гл. 4 и 6 или правилам гл. 8, и мы обнаруживаем, что поймали бабочку. Так как знак при 1/480 положителен, бабочка стандартная, а не двойственная. Для задач типа этой, где первоначальное рассмотрение заставляет допустить наличие симметрии, бабочки (стандартная и двойственная) должны быть столь же обычным для случая двух параметров (у нас γ и F), как сборки (стандартная и двойственная) — для случая одного. (Те же условия симметрии в термодинамике производят в изобилии „трикритические точки" — см. § 17 следующей главы — с двумя управляющими параметрами.) В *теории* упругости они встречаются редко (Томпсон и Хант [110]), так как в этой теории более чем один параметр зараз варьируется лишь в каких-то особых случаях (структурная оптимизация или анализ дефектов, см. ниже), но в упругих конструкциях они могут и не быть редкими. Наша бабочка очень естественно выпорхнула из вычислений. Посмотрим, как выглядит ее деформация.

Без всяких дополнительных вычислений мы знаем, что три параметра γ, F и G не дадут универсальной деформации, так как коразмерность бабочки 4. Алгебраически дополнить деформацию до универсальной для k-определенной функции тривиально (нужно просто дополнить кобазис для ее Δ_k в M^k), но для того, чтобы найти удобное „физическое" представление этих членов, требуется известное искусство. Здесь удобно выбрать в качестве четвертого параметра дефект настройки центральной пружинки, приводящий к отклонению от прямизны; в результате упругая энергия этой пружинки приобретает вид

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{32}(2\alpha+\varepsilon)^2=\frac{3}{16}\alpha^2+\frac{3}{16}\varepsilon\alpha+\text{сдвигающий член}$$

(пружинка была налажена неправильно, и она старается привести сочленение к углу, отличающемуся на $-\varepsilon$ от развернутого). Полагая теперь

$$b=F-\frac{1}{4},\quad c=\gamma-\frac{3}{32},$$

мы находим 6-струю полной энергии в виде

$$\left(l-\frac{1}{8}\alpha^2+\frac{\alpha^4}{96}\right)^2+\frac{\alpha^6}{480}-b\left(\frac{\alpha^2}{2}+l\alpha^2-\frac{\alpha^4}{24}-\frac{l\alpha^4}{12}+\frac{\alpha^6}{720}\right)$$
$$+\left(Gl+\frac{3G}{4}\right)\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha^5}{120}\right)+2c\alpha^2+\frac{3\varepsilon}{16}\alpha$$

с точностью до поправочного члена (ограничиваясь членами первого порядка малости по (b, G, c, ε)). С помощью

правил гл. 8 легко проверяется, что эта деформация универсальна и, значит, эквивалентна стандартной бабочке, изученной в гл. 9. Для читателя будет полезным упражнением найти замену для переменной α, которая устранит член восьмого порядка из продеформированной функции, и, опираясь на теорему 8.7, привести эту деформацию к стандартной форме. (Здесь существенно работать с *расщепленными* переменными $x=\alpha$, $y=l-\alpha^2/8+\alpha^4/96$.)

В совокупности с некоторыми более простыми вычислениями, показывающими, что для любого γ мы имеем *единственную* бабочку при $\alpha=l=0$ и что при другом бифуркационном значении ($F=1/2+(1/2)\sqrt{1-8\gamma}$) всегда будет двойственная сборка, предыдущее дает полную картину поведения системы в отношении выпучивания в области невыпученных состояний. Опишем это поведение сперва для $\varepsilon=0$, рисуя бифуркационное множество в плоскости F, G при разных γ, как показано на рис. 13.14.

При малых γ гибкость системы значительно выше, чем ее сжимаемость по длине, и при некотором малом значении F мы получим выпучивание по типу стандартной сборки (рис. 13.14(a), слева), как это было изучено в § 4. Действительно, нагрузка, вызывающая выпучивание, та же с точностью до первого порядка по γ. Единственное, что вызывается введением сжимаемости,— это рестабилизация по типу двойственной сборки при больших нагрузках с узкой областью устойчивости (рис. 13.14(a), справа). Так как значению $F=1$ отвечает в нашей модели нулевая длина, это значение не имеет физического смысла, если только не применены какие-нибудь специальные приспособления (рис. 13.15), чтобы удержать поведение в пределах области упругости и линейности.

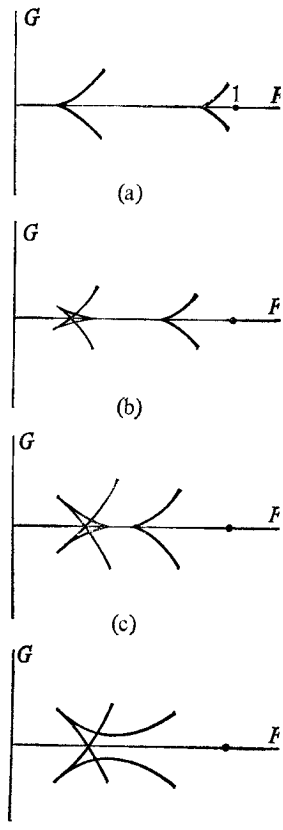


Рис. 13.14

Когда γ, увеличиваясь, проходит через значение 3/32, мы проходим через точку бабочки, изученную нами выше; рис. 13.14(b) соответствует чуть большему, непосредственно следующему за этим значению γ. Точка выпучивания, в которую мы приходим при возрастании F и $G=0$, теперь будет *двойственной* сборкой, и, когда F достигает этого значения, происходит „прощелкивание" — выпучивание с щелчком, скачок в системе. Заметим, однако, что для γ, лишь немного больших чем 3/32, система скакнет *недалеко*: два других листа минимумов еще близки. Если G чуть отлично от нуля, скачок произойдет раньше; эксперименты с машиной Зимана, имеющей малое трение, показывают, насколько трудно подойти точно к точке двойственной сборки.

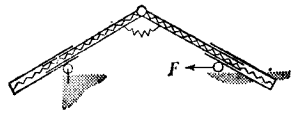


Рис. 13.15

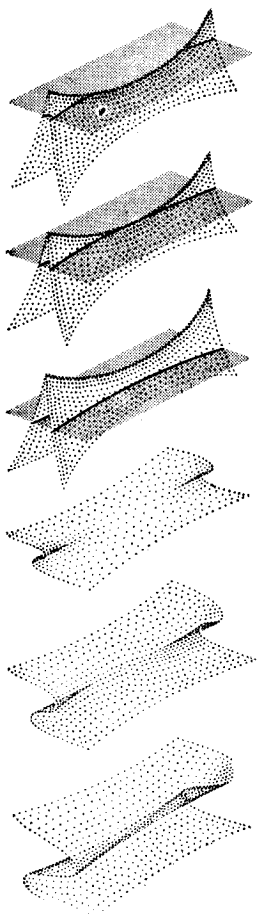


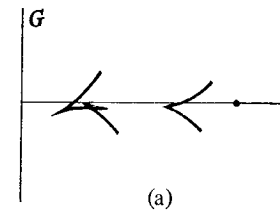
Рис. 13.16

Продвигаясь дальше, мы получаем „условную" катастрофу, т. е. лишь при условии, что блюдется различие между „параметрами" конструкции вроде (γ, ε) и „параметрами нагрузки" вроде (F, G) и запрещаются замены координат, перемешивающие эти группы друг с другом. Именно, мы получаем катастрофу „клюв-к-клюву" (Вассерман [111, 112]). Если же такое различие не блюдется, то это просто особый способ рассмотрения с помощью плоских сечений ребра возврата — искривленной линии сборок (рис. 13.16). К различиям такого рода мы еще вернемся ниже (§ 11). В нашем случае при $\gamma > 1/8$ становится возможным сжать систему до самого конца (в пределах применимости модели) без выпучивания. (Чем меньше γ—1/8, тем более деликатной будет эта операция вблизи середины пути: нужно удерживать G и ε вблизи нуля и избегать „резких движений.") При этих значениях γ побеждает жесткость.

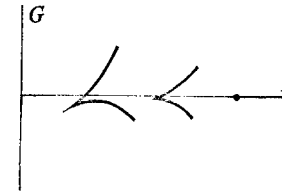
Наконец, обсудим влияние ненулевого ε. В отсутствие бабочки, вблизи точек сборки, как для системы из § 4, с помощью компенсирующего усилия G можно эффективно устранить это влияние, ввиду универсальности F и G как параметров деформации. Это просто сместит точку сборки с оси F на величину G, необходимую для того, чтобы удерживать систему в прямолинейном состоянии вопреки дефекту настройки пружинки. Но возле точки бабочки G, хотя и подавляет линейные по ε эффекты, оставляет нескомпенсированным кубический член. Возле сборки этот член лежал бы в Δ_k и не оказывал бы влияния с точностью до первого порядка (он *касательный*, как и квадратичный член sx^2 в § 6 гл. 8), но для бабочки он становится трансверсальным, и картинка на рис. 13.14(b) изменяется под его воздействием примерно так, как показано на рис. 13.17(a) или (b), в зависимости от его значения и значений других параметров. Детальное количественное исследование этого случая может быть проведено непосредственным применением методов гл. 9 к рассматриваемой деформации, но оно потребовало бы много места. Мы предоставляем провести его читателю. (Заметьте, что с глобальной точки зрения в этом примере, без усечения рядов Тейлора, переменные (γ, ε, l, α) задают невырожденные координаты на многообразии катастрофы, в терминах которых можно полностью записать отображение катастрофы.)

Это описание структурно устойчиво, но стоит заметить, что возмущения должны быть „малыми" 6-го порядка, чтобы оно имело силу; в частности, для пружин закон изменения силы со сжатием должен быть близок к линейному с точностью до пятого порядка. (Например, если бы энергия в

центральной пружинке была $3\alpha^2/16 - \alpha^6/480$, то мы бы обнаружили бифуркации более высокого порядка, коразмерности 6.) Однако то свойство, что имеется *по меньшей мере* катастрофа бабочки (при симметричной „совершенной" системе для $\varepsilon = G = 0$), устойчиво относительно гораздо больших возмущений, как можно показать с помощью количественной аранжировки геометрических рассуждений гл. 7.



(a)



(b)

Рис. 13.17

9 Предварительно выпученный стержень

Рассмотрим снова практически несжимаемый стержень, но теперь с обоими шарнирно закрепленными концами в *фиксированных* положениях A, B, расстояние между которыми меньше длины стержня L в нормальном состоянии (рис. 13.18). Он вынужден, следовательно, быть выпученным, даже если показанная на рисунке нагрузка F равна нулю. Что произойдет при возрастании F?

При выпучивании по типу стандартной сборки, как в §§ 4 и 5, когда $G = 0$, а F увеличивается, стержень внезапно перестает быть прямолинейным, но его *движение* при этом не будет разрывным. При $G \neq 0$ система идет по ту или по другую сторону сборки, перемещаясь дифференцируемым образом в зависимости от F. Наша же новая система ведет себя по-другому: она „схлопывает" — с щелчком перескакивает в новое положение, совершая внезапно большое движение.

Эту задачу можно трактовать по-разному. Наиболее полный подход состоит в том, чтобы работать с бесконечномерным многообразием конфигураций, будь то первоначальная модель „упругой кривой" Эйлера (возможно, дополненная введением сжимаемости) или же более тонкое описание стержня в „рациональной теории упругости" Трусделла и его последователей. Прежде всего надо найти конфигурацию, отвечающую $F = 0$, с той точностью, какая является разумной; как мы видели в § 6, конечные отклонения не *в точности* дают синусоиду, хотя малые отклонения (с малыми x) очень близки к этому. Отметим, что здесь мы уже имеем дело с выпучиванием *от ненулевого* отклонения, так что имеются ненулевые вклады от $\sin(3\pi s/L)$, $\sin(5\pi s/L)$ и т. д. Точное решение может оказаться возможным не в каждой модели, но достаточно хорошая оценка позволяет провести строгое количественное топологическое исследование. (В частности, мы имеем здесь в виду оценки нескольких первых тейлоровских коэффициентов, достаточно точные, чтобы можно было применять соображения конеч-



Рис. 13.18

ной определенности и трансверсальности независимо от того, где внутри этих оценок лежат „истинные" значения. Но то же самое относится, например, и к доказательству существования выпученного решения с помощью теории степени Лерэ — Шаудера, обеспечивающему возможность его вычисления „прямыми" вариационными методами.)

Далее следят за изменением этого решения при увеличении F; в нашем примере это аналитически легче проделать для нагрузки F, непрерывно распределенной по закону $f\sin(\pi s/L)$ (а не сосредоточенной в точке), чем и объясняется популярность такой довольно-таки нефизичной постановки задачи. Прослеживается эволюция гессиана по мере „движения" состояния равновесия, и выводятся оценки, касающиеся того, где и как он становится вырожденным и какие члены до порядка k имеются в соответствующей точке; при этом число k определяется из следующего условия: оно должно быть достаточно велико, чтобы дать невырожденный результат; для большинства постановок этой „задачи об арке" k берется равным 4. Наконец, изучается бифуркация вблизи этой точки.

Один из возможных приближенных подходов состоит в том, чтобы ограничиться рассмотрением какого-нибудь конечномерного подпространства возможных конфигураций. Здесь удобно выбрать, как это часто делают, плоскость P форм вида

$$x\sin(\pi s/L)+y\sin(3\pi s/L).$$

Ограничение, состоящее в том, что стержень должен иметь фиксированную длину, оставляет нам, конечно, от этой плоскости лишь некоторую кривую; беря для интеграла из § 5, выражающего длину, квадратичную по f' аппроксимацию, мы получаем, что эта кривая приблизительно представляет собой эллипс. (Таким образом, конфигурационное пространство при данных ограничениях оказывается *не* векторным пространством, а многообразием, топологически нетривиальным, за исключением бесконечномерного случая, где сферы стягиваемы.) Используя указанную аппроксимацию и заменяя энергию ее квадратичной частью по (x, y), Зиман [113] показал, что при правильном выборе физических переменных глобальная геометрия катастрофы в этой системе совпадает с точностью до линейной замены координат с геометрией эллиптической качалки (§ 3 гл. 1) или эллиптического судна (§ 7 гл. 10) с соответствующим эксцентриситетом. Как будто эта глобальная топологическая структура сохраняется, если в задачу вводятся члены четвертого порядка, хотя доказательство еще не появилось.

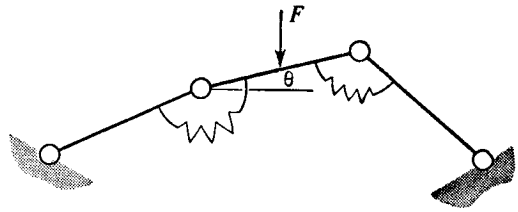


Рис. 13.19

Наконец, можно рассмотреть конечно-элементный аналог. Читателю рекомендуется в качестве упражнения исследовать систему, изображенную на рис. 13.19; предполагается, что, воспользовавшись углом θ, образуемым средним звеном с горизонталью, он проведет локальный анализ в духе § 4. (Множество возможных состояний топологически есть окружность, на которой θ не всюду оказывается подходящей координатой; при глобальном исследовании системы выбор „меток" для ее положений требует известной осторожности.)

Во всех обсужденных нами вариантах случай, когда F подчиняется исходной симметрии „арки" (является приложенной в центре, если нагрузка точечная, и симметрично распределенной в противном случае), приводит к 4-струе вблизи точки бифуркации с одной существенной переменной (скажем, x) и напоминает случаи из §§ 4 и 5, только знак при x^4 здесь отрицательный. Точно также как там введение G дало нам универсальную деформацию, так и здесь мы получим ее с помощью почти всего, чем можно измерить асимметрию. Подходящей мерой будет расстояние ε от точки приложения F до центра стержня (рис. 13.20); другой физически осмысленный вариант — снабдить один из шарниров A или B пружинкой. Взгляд на рис. 13.19 подсказывает много других возможностей, которые читатель приглашается исследовать. Однако любой *одной* из них, дающей вместе с F универсальную деформацию, уже „достаточно"; локально действие любого другого возмущения задачи может быть описано как гладкая перепараметризация картины, даваемой F и ε. Эти замечания приобретают особое практическое значение в следующем параграфе, с некоторыми оговорками, обсуждаемыми в § 12.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОЩЕЛКИВАНИЯ

10 Чувствительность к несовершенству

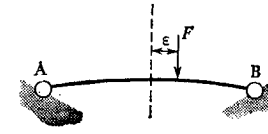


Рис. 13.20

Если один стержень в сложной конструкции начинает выпучиваться — тем более если несколько стержней сделают это одновременно,— это может вызвать более радикальное

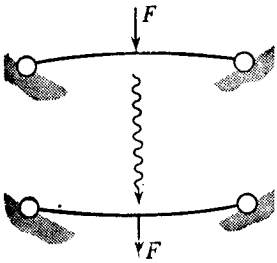


Рис. 13.21

поведение системы, чем то, которое изучалось в §§ 4 и 5. (Мы обсудим такое „сложное" поведение ниже.) Но поведение арки из предыдущего параграфа *уже* является внезапным и радикальным; в большинстве практически важных случаев скачок на рис. 13.21 представляет собой „прощелкивание".

Чтобы увидеть, чем на практике оборачивается геометрия двойственной сборки из предыдущего параграфа, вернемся к языку „равновесного пути," как в § 2. Система, для которой симметрия задачи (хотя и не обязательно решения, ср. § 17 гл. 14) является совершенной, даст бифуркацию энергии, приводимой к виду

$$(-c^2)x^4+(F_c-F)x^2,$$

где F_c — *критическая нагрузка*, а c — константа. На рис. 13.22(a) изображены соответствующие равновесные пути, жирные для минимумов (устойчивые равновесия) и штриховые — для неустойчивых равновесий. Эта картинка представляет собой, конечно, обычное центральное сечение двойственной сборки, двойственное к сечению, представленному на рис. 6.3. Она точно так же неустойчива; если рассмотреть для малого ε функцию

$$(-c^2)x^4+(F_c-F)x^2+\varepsilon x,$$

то рис. 13.22(a) заменится на рис. 13.22(b); мы видим, что наибольшее значение F, для которого существуют устойчивые равновесия, существенно ниже. Точнее говоря, нагрузка выпучивания как функция от ε задается (в правильных локальных координатах) бифуркационным множеством катастрофы двойственной сборки (рис. 13.22(c)). Устойчивое равновесие локально существует лишь для (F, ε) внутри острия сборки. Обратите внимание на быстрое падение от значения F_c с ростом $|\varepsilon|$.

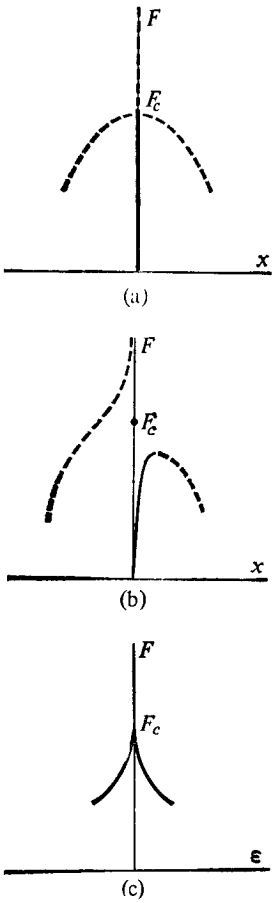


Рис. 13.22

Именно с этого начался строгий анализ чувствительности к несовершенству в 1945 г., когда Койтер в своей диссертации [114] получил такие диаграммы точным расчетом конкретных моделей. Значительное внимание стало уделяться *показателям чувствительности к несовершенству*. Поскольку из рис. 13.22(c) ясно, что нагрузка выпучивания не является гладкой функцией „параметра несовершенства" ε, нужно исследовать ее особенности. В нашем случае особенность подчиняется закону

$$(\text{нагрузка выпучивания}) \sim F_c - \varepsilon^{2/3}$$

в исходных координатах (где символ $\sim$ имеет свое обычное физическое значение „предельного показателя"). Разумеется, доказать через четверть века, что в подходящих координатах „$\sim$" можно заменить на „$=$", не бог весть какой триумф теории катастроф в инженерном деле! Особенно если учесть, что отчасти эвристичное использование тейлоровских разложений получило тем временем мощное развитие, а именно у Томпсона и его сотрудников. *Для рассматриваемого случая* (и вообще для выпучивания по типу двойственной сборки) всё имеющее практическую важность было сказано прежде, чем на сцену вышла теория катастроф. В частности, подход с многообразием катастрофы (в отличие от подхода, сосредоточенного исключительно на путях и их ветвлениях) был введен для случая двух измерений („равновесная поверхность") Сьюэллом в [115], где он на примере установил то (решающее для топологического анализа, основанного на „стратификации") обстоятельство, что кривая складок оказывается гладкой в многообразии катастрофы, а особенность (типа острия) имеет место для ее проекции в пространство параметров деформации. Всё же теория катастроф может быть применена и к особенностям, более высоким, чем сборка (критиков, читавших лишь популярные изложения теории, можно извинить за то, что им это неизвестно). *Надежды, возлагаемые на эту теорию, связаны с тем, что она позволяет управиться с этими высшими особенностями*, и с ее критериями для „достаточного" числа параметров деформации. (Заметьте, что то, что изображено на рис. 13.22(а), не представляет собой карты многообразия: невырожденная карта (§ 6 гл. 4) для множества равновесия становится возможной, лишь когда мы переходим к универсальной деформации.)

Отметим также, что здесь наибольшее значение приобретают вычислительные аспекты теории, типа тех, о которых шла речь в гл. 8. В инженерном деле, где количественная информация часто бывает легкодоступной, это может быть использовано для распознавания катастрофы. Мы обнаружили бабочку не по взмахам ее крылышек, а вычислив 6-струю. Никто никогда не предлагал решать инженерные задачи подгонкой известных данных под семь элементарных катастроф из списка Тома — во-первых, потому, что это было бы невозможно (см. § 13 ниже), а во-вторых, потому, что у нас в распоряжении есть гораздо более мощные вычислительные средства. Квадратная трубка, которую Кролл выдвигает в [116] как пример, когда такая подгонка данных могла бы ошибочно заставить думать о сборке, является химерой: с чуть большим числом деталей, чем он дает,

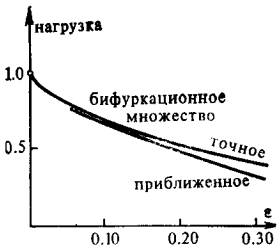


Рис. 13.23. *По Томпсону и Ханту* [*105*].

можно было бы произвести точный количественный анализ в духе выполненного выше. Даже и с приведенной у него информацией немедленно ясно из соображений симметрии, что в его примере никак нельзя думать о сборке (см. § 13).

Область, в которой методы тейлоровской аппроксимации, практикуемые инженерами и систематизированные теорией катастроф, дают хорошее согласие с действительностью уже в исходных координатах, часто оказывается достаточно широкой. Напомним, что теоремы гл. 8 обещают *точность* лишь после гладких замен координат — правда, если угодно, с производной, равной в точке выпучивания тождественному отображению, — и лишь в некоторой окрестности, априори, возможно, малой. Рисунок 13.23 получен при изучении другой двойственной сборки (подпертая консоль), проведенном Томпсоном и Хантом в [105], в котором точное бифуркационное множество оказалось необычайно легко отыскать в явном виде. (Кстати, Сьюэлл [96] выражает сожаление, что здесь используется термин „бифуркационное множество", поскольку складка не дает никаких бифуркаций для равновесного *пути*. Однако *функция энергии* разветвляется от некоторой точки перегиба на два близких типа с критическими точками и без них, что и располагает тополога к употреблению слова „бифуркация". Мы будем им пользоваться здесь из соображений согласованности со всеми остальными частями книги.)

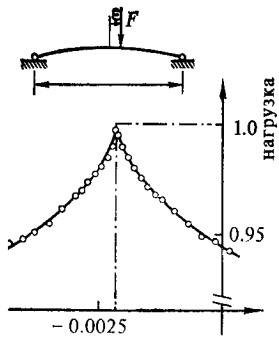


Рис. 13.24. *Кривая чувствительности к несовершенству для эйлерова стержня; сплошная линия — теоретическая, точки — экспериментальные. (По Роорде* [*117*].*)*

Бифуркации сборки и двойственной сборки часто дают одинаково хорошее согласие с экспериментом. Для слабо выгнутой арки (рис. 13.18) на рис. 13.24 представлены результаты экспериментов, проведенных Роордой [117] в 1965 г. Отметим, что степенной закон с показателем 2/3, предсказанный геометрией, выполняется лучше, чем симметрия; неизбежные экспериментальные погрешности сдвигают немного острие в плоскости εF, но это может быть скомпенсировано небольшой заменой координат. Приведем также следующую численную характеристику влияния несовершенств: асимметрия, эквивалентная перемещению груза примерно на $L/500$ в сторону, понижает нагрузку, при которой происходит прощелкивание, почти на 6%.

Но иногда „локальное" так и означает локальное — не более того. Например, рис. 13.14(b) показывает, что двойственная сборка может иметь лишь локальное влияние; „вторичные бифуркации", представленные двумя близкими стандартными сборками, скрадывают ее, если смотреть в более крупном масштабе. Как можно видеть из приведенной на рис. 13.25 диаграммы ветвления для „совершенной"

($G=\varepsilon=0$) системы, указанные на рисунке скачки, происходящие при возрастании F, будут совсем незначительными вблизи точки бабочки.

Отметим, что мы нашли эти „вторичные" складки на рис. 13.25, проследив их от первичной точки бабочки при изменении γ, а не с помощью специального исследования вторичных бифуркаций, которое обычно сложнее. Когда вторичные бифуркации имеют „организующий центр", как здесь, лучше проварьировать несколько дополнительных параметров, чтобы им воспользоваться, даже в случае, если на самом деле их значения фиксированы для данной системы.

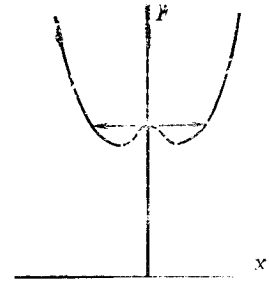


Рис. 13.25

11 (r, s)-устойчивость

Хотя переход от рис. 13.22(a) к (b) важен, он ни в коем случае не является единственно возможным возмущением для рис. 13.22(a). В частности, произвольно малое несовершенство в системе может отклонить вершину острия в плоскости εF, как показано на рис. 13.26(a). (Например, легкий наклон всей установки даст такой эффект.) Геометрия сборки сохранится, благодаря структурной устойчивости, но характер ветвления равновесных путей при различных фиксированных ε радикально изменится. Последовательность рис. 13.26(b) — (e) отвечает изменению ε слева направо на рис. 13.26(a). Если проводить жесткое различие между параметрами *несовершенства*, рассматриваемыми как фиксированные для данной физической конструкции, и параметрами нагрузки, которые варьируются, то преобразования, которые перемешивают эти переменные, запрещаются. Однако, лишь располагая такими преобразованиями, можно считать геометрию рис. 13.22 эквивалентной геометрии рис. 13.26. Поэтому „наклон" становится параметром несовершенства нового типа, действие которого *не* устраняется в этом новом классе допустимых преобразований. Это особенно наглядно показывает рис. 13.27, из которого видно, что при малом наклоне нагрузка, при которой впервые происходит прощелкивание (жирная кривая), становится *разрывной* функцией от ε, а не просто функцией, имеющей особенности. На экспериментальные точки на рис. 13.24 стоит посмотреть еще раз, имея в виду рис. 13.27.

Количественно эта чувствительность к малым наклонам не так резка, как чувствительность к малым ε (для канонической двойственной сборки несложно подсчитать, что максимум нагрузки падает квадратично с ростом наклона, подобно метацентрической высоте в § 6 гл. 10, а не с ка-

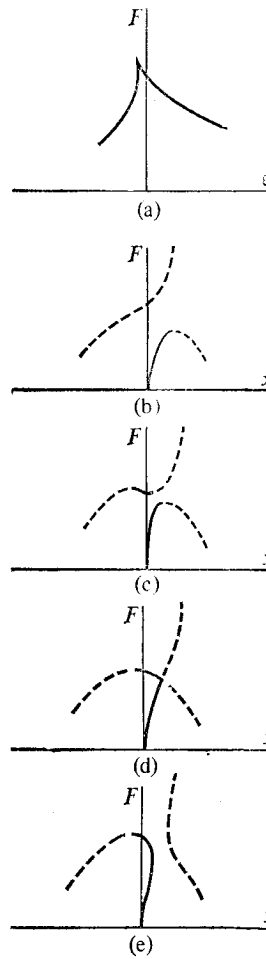


Рис. 13.26

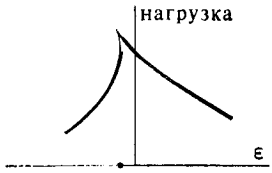


Рис. 13.27

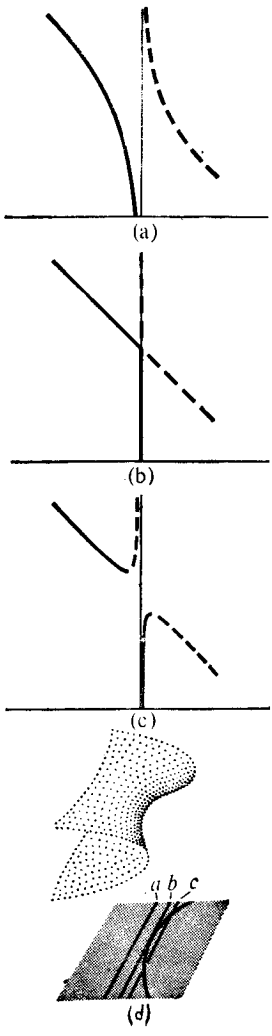


Рис. 13.28

ким-либо дробным показателем), однако такая „мягкость" не является универсальной для всех несовершенств. Возьмем, например, катастрофу складки. Если складка пересекается трансверсально при изменении нагрузки, взятой в качестве управляющего параметра, результат получится устойчивый и будет гладко отвечать на любые несовершенства. Но если энергия приводится для „совершенной" системы к виду

$$x^3 + (F_c - F)\,x^2,$$

результаты будут совсем другими. Мы видели в § 6 гл. 8, как это семейство, дополненное одним членом:

$$x^3 + (F_c - F)\,x^2 + \varepsilon x,$$

приводится к стандартной складке (рис. 13.28(d)). Но преобразования, которые приходится при этом привлекать, здесь совершенно необоснованны; мы не можем менять несовершенство по ходу изменения F, с тем чтобы превратить нагрузку в немой параметр. Учитывая это различие, мы видим, что в то время как отрицательные значения ε дают очень слабый эффект (рис. 13.28(a)), положительные приводят к прощелкиванию (рис. 13.28(c)), и притом с худшим понижением максимальной нагрузки, чем в задаче для арки, рассмотренной выше. Из рис. 13.28(d) ясно, что падение происходит по закону $\varepsilon^{1/2}$, а не $\varepsilon^{2/3}$. Эти свойства инвариантны (относительно диффеоморфизмов, которые сохраняют различие нагрузка — несовершенство), как и другие рассмотренные здесь свойства, и они подтверждаются экспериментальными данными Томпсона и Ханта [105]. Все двухпараметрическое семейство устойчиво, и поэтому в типичном случае нельзя избежать его, меняя одну нагрузку и еще какой-нибудь один параметр. Вот почему у Томпсона и Ханта в [110] указываются два общих типа выпучивания против одной томовской „складки" — они пользуются более тонкой классификацией, в которой обычная складка (их „предельная точка") и описываемое ими явление (асимметричная точка бифуркации) не эквивалентны.

Однако ящик Пандоры теории катастроф скрывает в себе еще много разных тварей кроме томовской семерки, и некоторые из них как раз подходят для преодоления этой трудности. Правильное математическое понятие эквивалентности в описанном контексте (как было недавно указано Томпсоном и Хантом [110]) — это (r, s)-*эквивалентность*, изученная Вассерманом [111, 112, 118]. На теперешнем нашем языке она заключается в точности в допущении координатных замен по s параметрам несовершенства

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ и только затем — зависящих от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ замен r параметров нагрузки $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$. Сверх всего этого, конечно, производится обычная зависящая от $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ замена поведенческих переменных (различение двух родов внешних переменных не снимает этой необходимости), так что обозначения и утверждения теории заметно усложняются. Довольно ясно, что (r, s)-классификация омбилик тесно связана с геометрической (не чисто топологической) и потому более тонкой классификацией омбилик у Портьюса [118a]. Мощная техника чистой дифференциальной геометрии мало пока эксплуатировалась в инженерной литературе.

Работа Вассермана содержит все необходимые для приложений в этой области теоремы, аналогичные теоремам гл. 7 и 8 (за исключением условий сильной эквивалентности, которые, вероятно, тоже могут быть получены стандартным образом). Но эти вычислительные результаты формулируются с предельной сжатостью языка „кольца ростков", используемого в строгих доказательствах (и даже при такой сжатости в аналоге критерия версальности из гл. 8 фигурирует, из-за отмеченной выше сложности, на шесть членов больше!), что вовсе не способствует быстрому пониманию этих результатов теми, кто является специалистом в других вопросах. Необходим перевод, подобный тому, который дан для общей формулировки в гл. 8 (впервые, как мы недавно узнали, произведенный Ч.Т.К. Уоллом несколько лет тому назад, но распространенный лишь среди нескольких специалистов по физике высоких энергий, которым так и не довелось им воспользоваться) и который бы сделал эти результаты инструментом для широких кругов ученых.

Изложение Вассермана ориентировано в действительности на приложения, но в том смысле, как их понимает тополог,— на приложения к классификации, а не к вычислениям (хотя в его доказательствах много вычислений), и имеет в виду „программу Тома", как ее иногда понимают: „Лишь устойчивые явления наблюдаются повторно, так классифицируйте их — и вы получите классификацию наблюдаемого мира". Поэтому он в виде итога перечисляет все (3,1)-устойчивые и (1,3)-устойчивые явления, где трех- и одномерные переменные представляют пространство и время. Но ограничения, наложенные на тип эквивалентности, приводят к тому, что меньшее число вещей оказывается устойчивым (как мы это хорошо видели в § 6 гл. 11), и если либо r, либо s больше 1, то мы получаем бесконечности, подобные тем, с которыми сталкивались в § 6 гл. 7 для $r>5$. В результате (r, s)-устойчивость не будет типичной для $r+s>2$,

и одна нога риторики такого понимания программы Тома подгибается („прощелкивает").

Для инженерных приложений эта авария не имеет, однако, значения, так как никакая устойчивость никогда не была типичной на чертежных досках — отсюда как раз и происходит нужда в анализе чувствительности к несовершенству. Но недостаток места препятствует нам включить в эту главу необходимые правила. Они заняли бы еще одну главу при том стиле изложения, который мы приняли в этой книге, а обсуждение их использования в технике на примерах, которые достаточно сложны для понимания, заняло бы уже целую монографию. Равным образом нам приходится опустить анализ односторонних ограничений (типа блокировки), которые могут оказывать сопротивление, но не удерживать, толкать, но не тянуть. Они, совсем не редкие в инженерных системах, приводят к *катастрофам с ограничениями*, каталогизированным в § 7 гл. 16. (Вычислительные правила для них имеют свои особенности, а при скрещивании с (r, s)-устойчивостью дают нечто почти столь же сложное, как и обычные инженерные формулы.) Заметим только, что „прощелкивание в нижнее положение" в конце § 3 работы Зимана [113] служит примером к рис. 16.9 (ii), а не к чему-либо из гл. 9.

Из анализа, проведенного Вассерманом, тривиально вытекает, что число, скажем i, параметров несовершенства, нужных для полного описания, больше или равно коразмерности вырожденной деформированной особенности минус число параметров нагрузки. (Часто, как и в предыдущих примерах со складкой и сборкой, оно действительно больше и легко может оказаться *много* больше.) Согласно § 11 гл. 8, эта коразмерность не меньше чем $m(m+1)/2$, где m — коранг особенности или, на языке предыдущих параграфов, число мод выпучивания. (Строгое равенство выполняется лишь для складки и первых двух омбилик.) В большинстве инженерных задач нагрузка дает одну размерность, так что мы имеем

$$i \geqslant \text{коразмерность} - 1 \geqslant \frac{1}{2} m(m+1) - 1.$$

Интересно сопоставить это с эмпирическим правилом $i=m$ из инженерной литературы. Для обычной складки $m=1$, и никакие параметры несовершенства не нужны в том смысле, что они могут влиять на нагрузку прощелкивания лишь гладким образом. Для „асимметричной точки бифуркации", упомянутой выше, $i=m=1$. Для сборок, оси которых не совпадают с равновесными путями (что редко в инженерной практике), верно то же самое. Для симметрич-

ных сборок, как в §§ 4—10, и для любых других особенностей i больше, чем m, причем в большинстве случаев намного больше. [*Добавление при корректуре* [1]. Голубицкий и Шеффер теперь систематизировали и подробно описали результаты такого рода анализа.]

12 Оптимизация

Для конструкций, назначение которых — нести данную максимальную нагрузку F, принято при проектировании рассматривать некоторое число регулируемых параметров, скажем $d_1, \ldots, d_r$, и затем что-нибудь *оптимизировать* (например, минимизировать вес или стоимость конструкции) по $(d_1, \ldots, d_r)$-пространству при условии, что нагрузка прощелкивания равняется F. (Иногда максимизируют F при данном весе или стоимости.) Затем ad hoc добавляется коэффициент надежности. Эта процедура часто ведет к особенностям высокой коразмерности и высокого коранга. На самом деле она так часто ведет к проектам с более чем одной модой выпучивания, что ее иногда насмешливо именуют „чудесным принципом фаэтона“ [2], известным также как *принцип одновременных мод*. (Грубо говоря, если конструкция выпучивается по моде A раньше, чем по моде B, вы понапрасну расточили силы и материал на моду B; поэтому оптимизация ведет к тому, чтобы заставить их выпучиваться вместе, если только устойчивость в отношении внезапного уменьшения нагрузки выпучивания не входит как часть в оптимизируемое целое.) Математически этот принцип говорит: „старайтесь построить машину с омбилической (или еще более высокого коранга) катастрофой“.

Получающиеся конструкции часто оказываются высокочувствительными к несовершенству. Эффекты бывают довольно удивительными; из комбинации двух мод выпучивания, каждая из которых *по отдельности* должна была бы управляться стандартной сборкой и выпучиваться внезапно, но непрерывно, может возникнуть нечто вроде двойственной сборки, только хуже — выпучивание *щелчком* с большими смещениями и резкой чувствительностью к несовершенству. Анализ подкрепленной пластины (пластины

[1] Английского издания.— *Прим. ред.*

[2] В оригинале „wonderful one-hoss shay principle“. Здесь „hoss“ — диалектное сокращение от horse, а „shay“ — народно-этимологическое образование единственного числа от французского слова chaise (в одном из значений, сейчас устаревшем: фаэтон), воспринятого как форма множественного числа.— *Прим. перев.*

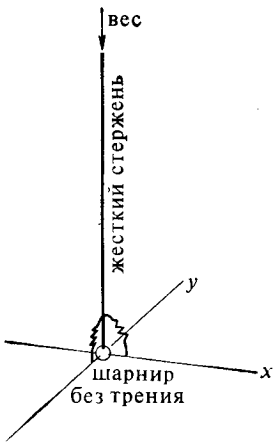


Рис. 13.29

с повышающими жесткость подкреплениями), для которой уравнивание нагрузок, вызывающих выпучивание всей пластины и выпучивание подкреплений, ведет к катастрофе гиперболической омбилики, можно найти у Томпсона и Ханта [23]. (Такие пластины служат стандартными элементами плитно-балочных мостов, обломки которых украшали автострады Великобритании и реки Австралии несколько лет назад; но столько всего там оказалось по выяснении дела неправильным, что действующая причина, ближайшая причина, конечная причина и пр. более чем неясны.)

Подобным образом и анализ модели Аугусти (рис. 13.29) у Томпсона и Ханта ([105], стр. 243—250) показывает, что при одинаковых пружинках в плоскостях xz и yz — как это требуется процедурой оптимизации — система становится чрезвычайно чувствительной. При ограничении перемещений плоскостями xz или yz она вела бы себя по типу стандартной сборки, начиная изгибаться при определенной нагрузке. Но в плоскостях $x=\pm y$ она ведет себя как при *двойственной* сборке, с внезапным „большим" прощелкиванием и с показателем две трети в законе чувствительности к несовершенству. На самом деле полное бифуркационное множество принадлежит к катастрофе *двойной* сборки коразмерности 8, геометрия которой еще не понята до конца. (В принципе тут нет проблем, и геометрия эта вполне поддается достаточно стандартной технике, но для исследования в восьми измерениях нужно время!) Вычисления, использующие обычную полную деформацию, заставляют думать, что линейный по параметру несовершенства член, изученный Томпсоном и Хантом, по-видимому, несет наихудший возможный здесь показатель, однако лишь анализ с помощью методов предыдущего параграфа даст возможность установить это.

Другие системы с аналогичным описанием были исследованы Томпсоном и Гаспаром [119], хотя главная их задача состояла в демонстрации появления параболической и символической омбилик в задаче выпучивания (как и бабочка, они редко встречаются в литературе). В своем анализе они ссылаются на браслет омбилик, и их работа так и напрашивается на различные обобщения.

13 Симметрия; стержни и оболочки

Как мы постоянно видели в последних трех главах (например, для плавучих платформ, шестивалковой мельницы и глории), симметрии обычно приводят к вырожденным функциям со сложными деформациями, для которых соображе-

ния типичности теряют силу. Мы обсуждали в § 3 гл. 7 тенденцию проектировщиков к введению симметрии; при проектировании с *оптимизацией* такая тенденция особенно выражена. Например, рис. 13.22(c) можно интерпретировать так что при $\varepsilon=0$ (совершенная зеркальная симметрия) имеется резкий оптимум; „оптимальная" модель Аугусти (с одинаковыми пружинками) имеет все симметрии квадрата. Если все симметрии, которые должны иметь место, заранее указаны, то можно с соответствующими предосторожностями использовать соображения типичности *внутри класса функций с этими симметриями*. Примером чрезвычайно успешного применения соображений такого рода в эксперименте может служить рассуждение, на основании которого мы решили, что шестивалковая мельница должна дать деформацию для x^3-3xy^2 (§ 11 гл. 11). Аналогичным образом 4-струя функции энергии для модели Аугусти в случае совершенной симметрии должна при любой нагрузке иметь вид

$$a(x^2+y^2)+b(x^4+y^4)+cx^2y^2.$$

Типичным образом в точке бифуркации ($a=0$) квартичный член невырожден ($c\neq 2b$). На самом деле совершенный оптимум в точке бифуркации в модели Аугусти имеет, согласно вычислениям Томпсона и Ханта [105], 4-струю

$$\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{24}y^4.$$

Квадратная трубка, описанная Кроллом [116], имеет те же симметрии — в действительности о ней больше ничего и не сказано,— так что мы вправе ожидать бифуркации по одному из трех типов двойной сборки (деформация $x^4+cx^2y^2+y^4$ для соответственно $c>2$, $-2<c<2$ и $c<-2$; существует еще один класс, представленный функцией x^4-y^4, но здесь нет симметрии квадрата). Таким образом, в результате малого несовершенства вполне могла появиться, как он и утверждает, гиперболическая омбилика — все три типа содержат пятимерные листы таких омбилик в своих универсальных деформациях. (Аналогичным образом они входят и в деформации более высоких вырождений, возможных для данных симметрий, так что ему могло посчастливиться напасть на одно из них,— без дополнительной информации мы не можем доказать, что его 4-струя невырожденна.) „Опасности теории катастроф", обсуждаемые Кроллом, сводятся всего лишь к опасности верить (положившись на какую-нибудь популярную статью), что „всё, что случается, содержится в списке Тома", без учета симмет-

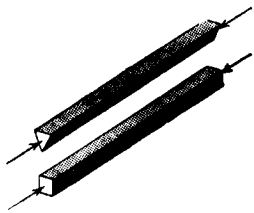


Рис. 13.30

рий. Такая опасность существует, но это общая опасность неправильного использования плохо понятой математики.

Симметрии иногда возникают и там, где мы заранее их не ожидаем; например в § 9 гл. 10 мы видели, что строго вертикальные борта судна (непрерывная симметрия относительно псевдогруппы вертикальных переносов!) дают поверхность метацентров с особенно простой геометрией — график квадратичной формы. В комбинации с более чем двумя вертикальными плоскостями симметрии, как для плавучей платформы, это приводит для „совершенной" системы к *круговой* симметрии и, значит, к бесконечно сложной чувствительности к несовершенству. В задаче оказывается больше симметрии, чем доступно глазу, и „рассуждения по типичности" в пределах класса с симметрией квадрата, которые работают для пирамидального судна, терпят крах в применении к судну с вертикальными бортами. Существуют и другие проблемы такого рода, и они вызывают значительные трудности, когда с ними приходится встретиться на деле.

Иногда, однако, они встречаются лишь *по видимости* (как у нас в § 9, где мы нашли бабочку) — из-за слишком большого желания „упростить" вычисления. Например, в технической литературе обычно считается, что изгибные свойства стержня зависят лишь от эллипса инерции его поперечного сечения и что, следовательно, если он обладает более чем двумя плоскостями симметрии (как, например, квадратный или треугольный стержень на рис. 13.30), эти изгибные свойства обладают вращательной симметрией относительно центральной оси стержня. Это делает „совершенный" анализ совсем легким, так как позволяет убрать из вычислений направление изгибания (почему в это так охотно и верят), и количественно получается не такая уж плохая аппроксимация, чтобы возникла абсолютная необходимость пересмотра такого подхода. В то же время „качественный" анализ становится почти невозможным, как и в аналогичном случае с плавучей платформой, ввиду бесконечной коразмерности. Поэтому тополог не так легко поверит в это, ибо его вычисления были не упрощены, а усложнены: разбивающие симметрию несовершенства могли бы давать бесконечное разнообразие эффектов. Это побуждает провести более подробное исследование, и на поверку оказывается, что теорема об „эллипсе инерции" отвечает усечению ряда Тейлора локальной теории упругости для изгибания стержня до наинизшей возможной разумной степени. Если в конце получается результат конечноопределенный и конечной коразмерности (как это будет для

случая выпучивания стержней прямоугольного или эллиптического поперечного сечения), это прекрасно, но когда усечение вводит вырожденность, самое благоразумное — вернуть назад некоторые отсеченные старшие члены! Мы думаем опубликовать в свое время строгое исследование по этой теме, здесь же мы можем только сообщить, что результаты предварительного анализа обнадеживающе согласуются с соображениями типичности.

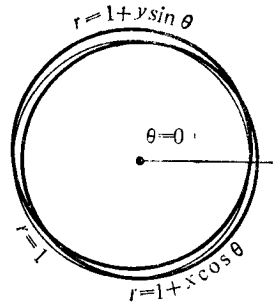


Рис. 13.31

Стержни, которые по техническим условиям должны иметь круговое сечение, конечно, имеют круговую симметрию с наилучшей точностью, какую могут обеспечить изготовители. Самое большее, на что тут можно надеяться,— это лишь количественный анализ эффектов возможных несовершенств, но даже и тогда для строгого исследования нужны новые методы.

Подобные же замечания применимы и к теории сферических и цилиндрических оболочек. Здесь сочетаются проблема большого коранга (или „многих одновременных мод“, или „собственных значений высокой кратности“ в зависимости от жаргона) и проблема симметрии. Например, в типичной теории цилиндра мы имеем несколько одновременных *пар* мод выпучивания, например

$$r=1+x \sin n\theta,$$
$$r=1+y \cos n\theta,$$

при различных n, как показано на рис. 13.31 для малых x, y и $n=1$. Вращательная симметрия задачи приводит к вращательной симметрии в каждой из этих плоскостей $x_n y_n$ (обычно их конечное число). Использование леммы расщепления даст поэтому конечномерную задачу, но с вырожденностью бесконечной коразмерности, с точки зрения тополога.

Такие задачи для оболочек действительно ужасно чувствительны к несовершенству; Томпсон и Хант [120] показывают на примере, что специально подобранные несовершенства, находящиеся в пределах нормальных технических допусков, могут понизить значение критической нагрузки в 10 раз. (Это объясняет, почему теоретическая прочность совершенных систем никогда не была реализована специалистами-практиками и почему многие из последних питают так мало уважения к теории. Без устойчивости, „точный“ — самым определенным образом не то же самое, что „правильный“.) *Априорный* метод выделения конечномерного семейства несовершенств, среди которых обязаны находиться наихудшие в смысле чувствительности, должен быть доступен для топологической техники, даже в задачах, где нет

конечной версальной деформации, если только лемма расщепления дает нам конечное число существенных переменных.

Во всяком случае следует признать, что трудности, которые встречаются при изучении цилиндрических и сферических оболочек, возникают вовсе не из-за извращенности той или иной математической формулировки задачи, будь то теория катастроф или метод конечных элементов, но из-за извращенности самой задачи. Хотя этим и не исключается возможность применения *концептуально* простых методов, вероятно, этим исключается *вычислительная* простота.

ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИН

14 Уравнения Кармана

Модель энергии, зависящей от кривизны, для изгибания стержня, принятая нами в § 5, была аппроксимацией к „действительным" энергиям растяжения и сжатия в теории упругого твердого тела для стержня конечной толщины. Соответствующие рассмотрения для тонких пластин сопряжены со значительными геометрическими тонкостями и требуют еще больше искусства при решении вопроса, какие именно аппроксимации *по дороге* к удобным уравнениям следует считать разумными. Говоря широко, союз функционального анализа со строгим усечением рядов методами приведения из теории катастроф может если и не заменить такое искусство, то поддержать его систематичностью и строгими доказательствами. У нас здесь нет места для вывода уравнений, и мы просто приведем наиболее популярную модель — уравнения Кармана, в безразмерной форме. (Сейчас изучаются другие модели для пластин, но чаще всего специалистами по функциональному анализу, которых интересуют топологические вопросы — например существование решений различных типов — а не численные. Это делает их подход „чисто качественным" не в большей степени, чем подход теории катастроф, но чтобы дойти до числа в любой теории, вы должны к этому *стремиться*.)

Положение пластины моделируется поверхностью $\mathbb{R}^3$, края которой должны оставаться на некотором прямоугольнике в плоскости xy: при отсутствии напряжений это прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(l, 0)$, $(l, 1)$. В уравнения входит функция $w(x, y)$, задающая z-координату точки, вначале находившейся в $(x, y, 0)$, и функция $f(x, y)$, описывающая напряжения. К краям $x=0$, $x=l$ прилагается распределенная нагрузка с безразмерной плотностью ρ, как показано на рис. 13.32. Мы возьмем уравнения

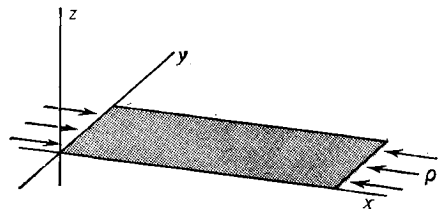


Рис 13.32.

Кармана в форме, предложенной Бауэром и Райссом [121]:

$$\nabla^2 f + \frac{1}{2}[w,\ w] = 0,$$

$$\nabla^2 w - [w,\ f] + \rho w_{xx} = 0$$

(где для любых функций u и v, определенных в указанном прямоугольнике,

$$[u,\ v] = u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy}$$

и нижние индексы обозначают дифференцирование), с граничными условиями

$$w = Dw = f = Df = 0,$$

которые призваны выразить тот факт, что пластинка *свободно оперта* подобно стержню в § 5.

Мы хотели бы здесь заметить, что такая „простая" опертость — совсем не простое понятие ни в теории — можно отстаивать и иные его математизации,— ни на практике. На рис. 13.33 показана в сечении обычная экспериментальная установка, пожалуй, легче усмотреть, что на края пластины действует небольшой вращающий момент, чем то, что они *принуждаются* быть прямыми. (В особенности для длинных сторон, на которые, как считается в этой модели, не действует никаких сдавливающих сил с краев вовнутрь!) Пазы заботливо обрабатываются и смазываются маслом; следы краски, нанесенной лаборантом, плохо понявшим инструкцию, могут смазать все результаты такого эксперимента. (Чувствительность к несовершенству не обязательно должна действовать по направлению к прощелкиванию. Не так-то легко заставить стержень выпучиться под продольной нагрузкой при столь *низком* ее значении, как предсказывает теория. Отчасти дело в том, любое трение порождает что-то вроде „тугой" машины Зимана, в которой скачок „медлит", пока точка управления движется прямо по оси; отчасти в том, что если шарнир страдает ревматизмом, то задача сдвигается в сторону задачи с защемленным



Рис. 13.33



$$\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\pi y$$

Рис. 13.34

концом, для которой нагрузка выпучивания, во всяком случае, более высока.)

Линеаризованным уравнением будет просто

$$\nabla^2 w + \rho w_{xx} = 0,$$

откуда получаются следующие методы выпучивания для указанных граничных условий:

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\sin(m\pi y).$$

Оказывается, что если на длинных сторонах силы нулевые или почти нулевые, то имеет значение лишь $m=1$; высшие m не могут дать *первую* моду выпучивания, или энергетически *устойчивое* равновесие. Значит, возможные моды выпучивания имеют вид $\sin(n\pi x/l)\sin(\pi y)$(рис. 13.34). Как и в задаче со стержнем, они дают лишь описание первого порядка для формы отклонения, но экспериментально (Саппл [122]) это описание оказывается прекрасным, скажем для стальной пластины вплоть до нагрузки в два с половиной раза больше критической.

Очевидно, пластина размером $l\times 1$ может выпучиться при той же нагрузке, что и пластина размером $2l\times 1$ или $3l\times 1$ и т. д. (поскольку $l\times 1$-моды, как и пластины можно стыковать друг с другом). Наинизшее значение критическая нагрузка будет иметь для квадрата или же для пластины размером $n\times 1$ (где n — целое число), составленной из квадратов. Общая формула, дающая значение ρ, при котором $\sin(n\pi x/l)\sin(\pi y)$ становится решением приведенного выше линеаризованного уравнения, для пластины длины l (в ненагруженном состоянии) выглядит так:

$$\rho = \frac{\pi^2(n^2+l^2)}{n^2 l^2};$$

соответствующие графики для различных n показаны на рис. 13.35. Ясно, что для большинства l вертикальная прямая, отвечающая возрастающему ρ, пересечет впервые лишь одну из этих кривых, и пластина выпучится по одной-единственной моде. Вблизи такой точки обычный анализ обнаруживает „устойчивую симметричную диаграмму ветвления", как выше на рис. 13.7(а); добавление сюда любого члена, представляющего нормальную нагрузку (Чжоу,

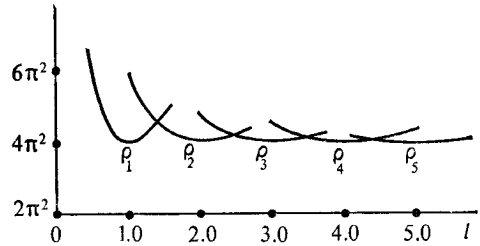


Рис. 13.35

Хейл и Малле-Парэ берут в [123] произвольную „абстрактную" добавку; в [124] они более конкретны), приводит к катастрофе стандартной сборки. Ее структурная устойчивость влечет за собой разумную нечувствительность к, скажем, тому обстоятельству, что в точности нулевые горизонтальные силы на длинных сторонах пластины с экспериментальной точки зрения весьма сомнительны.

Однако при $l=\sqrt{n(n+1)}$ для некоторого n возрастающее ρ на рис. 13.35 пересечет сразу две кривые; как и в модели Аугусти (рис. 13.29), бифуркация имеет две существенные поведенческие переменные. В частности, при $n=1$ мы имеем $l=\sqrt{2}$, и возникают две одновременные моды выпучивания, показанные на рис. 13.36. Переходя от уравнений Кармана к эквивалентной формулировке с энергией и производя в соответствующем гильбертовом пространстве редукцию к существенным переменным в точке выпучивания, мы приходим к такому выражению для энергии:

$$a\mu^4+b\mu^2\nu^2+c\nu^4;$$

здесь через (μ, ν) обозначена конфигурация, которая с точностью до первого порядка по (μ, ν) задается выражением

$$\mu \sin\frac{\pi x}{2}\sin(\pi y)+\nu\sin(\pi x\sqrt{2})\sin(\pi y)$$

(эксперимент показывает, что оно достаточно точно при довольно больших μ и ν). Вычисления (с тремя десятичными знаками) дают

$$a=0.592, \qquad b=6.013, \qquad c=3.899.$$

(Все результаты функционально-аналитических вычислений взяты из работы Мэгнуса и Постона [125].)

Симметрии задачи (к делу относятся здесь отражения в плоскостях xy и $x=l/2$) обеспечивают четность функции по каждой из переменных μ и ν в отдельности; при этом условии и с учетом произвольности нашего выбора точки с корангом 2 мы видим, что результат „типичен" настолько,

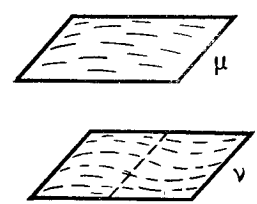


Рис. 13.36

насколько возможно,— это невырожденная 4-определенная квартика. Однако по мере увеличения n и $l=\sqrt{n(n+1)}$ мы довольно быстро приближаемся к вырожденной задаче бесконечно длинной пластины с ее непрерывной (переносной) симметрией. Как можно увидеть из рис. 13.35, моды выпучивания все больше скучиваются; кроме того, в точках двойных собственных значений коэффициенты квартики стремятся к вырождению (при $n=10$ наша 4-струя имеет вид kx^2y^2 с точностью до восьми значащих цифр). Для качественно точного описания длинных пластин необходимы, следовательно, иные методы.

15 Деформация двойного собственного значения

Мы, как и выше, будем работать с пластинкой размером $\sqrt{2}\times 1$; благодаря 4-определенности точки бифуркации нам не нужно рассматривать члены порядка выше 4. (В случае если рассматривается *сильная* эквивалентность деформаций, теорема 8.7 требует, чтобы мы для деформируемой струи — но не для деформирующих членов — дошли до порядка 6. Соответствующие результаты автоматически содержатся в дальнейшем.)

Положив $\rho_0=9\pi^2/2$, мы получим из задачи для совершенной пластины однопараметрическую деформацию

$$a\mu^4+b\mu^2\nu^2+c\nu^4+(\rho_0-\rho)((0.872)\mu^2+(3.489)\nu^2),$$

с точностью до четвертого порядка. При $\rho>\rho_0$ эта функция имеет 9 критических точек; это в точности максимальное число, возможное по теореме 8.5, поскольку прямым вычислением, как в § 13 гл. 8, устанавливается, что функция с 4-струей $a\mu^4+b\mu^2\nu^2+c\nu^4$ имеет коразмерность 8 при указанных значениях a, b, c. Это лишнее доказательство того, что нам нужно еще 7 членов для полной деформации; но прежде чем искать их, займемся „совершенной“ системой.

Наиболее простое представление о ветвлении решений дает рис. 13.37(a), но на нем две поведенческие переменные сжаты в одну. Рисунок 13.37 (b) делает более ясным относительное положение решений в (μ, ν)-пространстве; к этому надо добавить, что в плоскостях $\mu=0$ и $\nu=0$ расположены ветви с устойчивыми равновесиями; ветвь $\mu=\nu=0$ состоит из морсовских 2-седел (максимумы по существенным переменным), а остальные ветви — из 1-сёдел. На рис. 13.37(c) мы приводим картину линий уровня энергии как функции; отметим малые размеры „бассейнов притяжения“ минимумов на оси μ по сравнению с минимумами на оси ν. Эту черту можно было бы изменить диффеоморфизмом (хотя вблизи точки бифуркации замены, используемые при приведении,

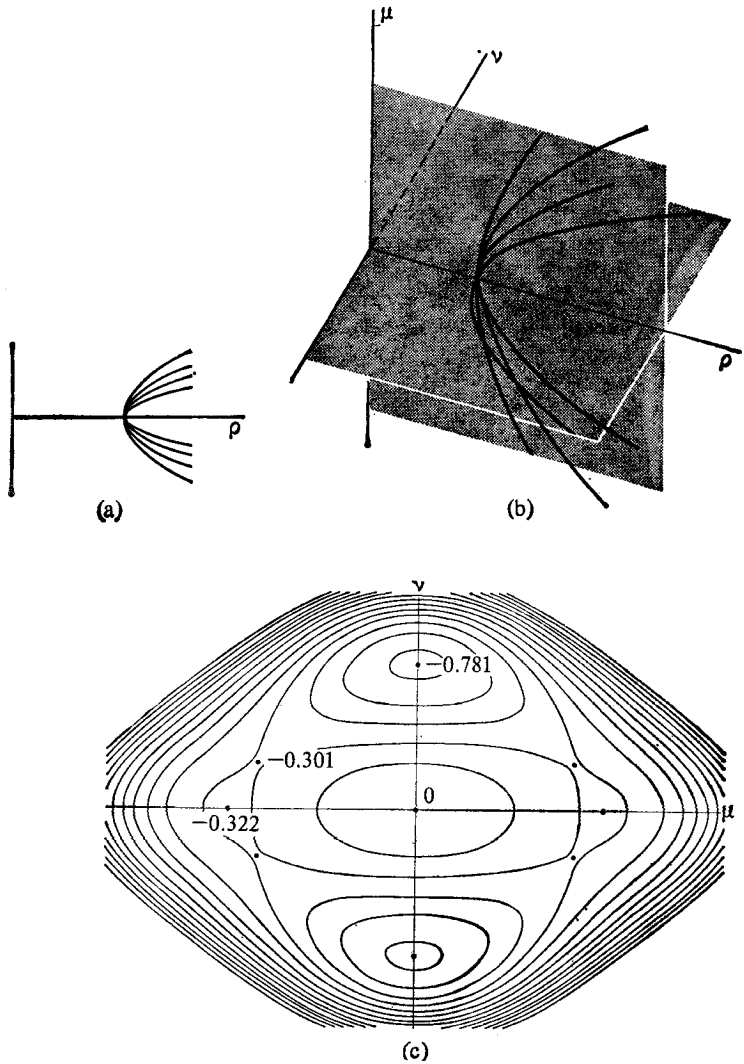


Рис. 13.37

близки к тождественной), однако относительные высоты в критических точках инвариантны относительно диффеоморфизмов в переменных состояния. Поэтому, рассматривая эту деформацию как выведенную из универсальной, можно показать, что если ограничиться членами второго порядка по $\rho - \rho_0$, то энергии в критических точках равны (с точностью до некоторой общей константы)

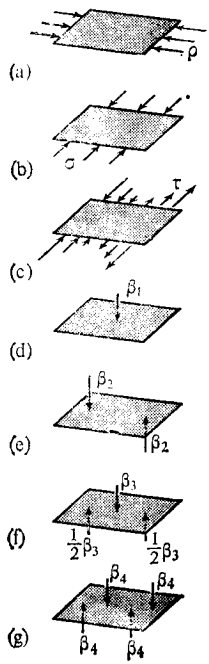


Рис. 13.38

$-0.332(\rho-\rho_0)^2$ для минимумов на оси μ,
$-0.781(\rho-\rho_0)^2$ для минимумов на оси ν,
$-0.301(\rho-\rho_0)^2$ для 1-седел,
0 для 2-седла в точке $\mu=\nu=0$.

Таким образом, энергия, нужная для того, чтобы перейти от одногорбого решения к седлу (а оттуда скатиться в двугорбое состояние), примерно в 23 раза меньше, чем нужно для обратного пути, не говоря уже о том, что требуется меньше заботы для организации такого выталкивания.

На самом деле близость в расположении и в значениях энергии решений на оси μ к седлам делает очевидным, что с помощью довольно малого возмущения мы можем полностью устранить эти минимумы, сохранив лишь сёдла между бассейнами минимумов на оси ν. Но систематическое изучение этого требует полной деформации. Мы предпочитаем производить деформацию в основном с переменными нагрузки (а не с несовершенствами), имея в виду возможные экспериментальные преимущества. Кроме того, это позволяет избежать сейчас проблемы двух классов параметров, которую мы обсудили в § 11.

В качестве четных членов берем $\rho_0-\rho$, как и раньше, затем σ — равномерно распределенную нагрузку на длинных сторонах и τ — линейно меняющуюся распределенную нагрузку на боковых сторонах (рис. 13.38(a) — (c)). Это вводит следующие квадратичные члены:

$$(\rho_0-\rho)\,((0.872)\mu^2+(3.489)\nu^2),$$
$$\sigma\,(1.774)\ (\mu^2+\nu^2),$$
$$\tau\,(0.889)\ \mu\nu.$$

Линейные и кубические члены входят вместе как подходящие комбинации нормальных нагрузок. Для точечных нагрузок приходится прибегать к чуть более тонким рассуждениям, чем для распределенных нагрузок, но мы все же возьмем точечные ради большей физической ясности. Естественный выбор для μ-члена показан на рис. 13.38(d); точнее, центральная нагрузка дает член

$$\beta_1(\mu-(0.0125)\ \mu^3-(0.0215)\mu\nu^2).$$

Любое расположение нагрузок, имеющее симметрию рис. 13.38(e), даст нам ν-член. Удобно взять нагрузку, сосредоточенную в точках средней линии на расстоянии $l/6$ от концов; ей отвечает член

$$\beta_2((1.732)\nu-(0.0134)\mu^2\nu-(0.0329)\nu^3).$$

В принципе почти любые две дополнительные переменные, отвечающие новым нормальным нагрузкам, в сочетании с уже приведенными дадут линейный и кубический члены, нужные для полной деформации, но как видно из предыдущих выражений, вклад кубического члена получается довольно малым. Поиск комбинации сил, которые бы дали не такие ничтожные чистые кубические члены, привел к конфигурациям нагрузок, прдставленным на рис. 13.38(f) и (g), и к членам

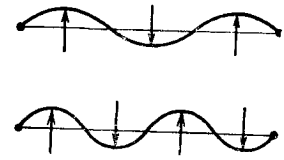


Рис. 13.39

$$\beta_3(-(0.0188)\mu^3+(0.0618)\mu\nu^2),$$
$$\beta_4(-(0.0122)\mu^2\nu-(0.00785)\ \nu^3).$$

Заметим (рис. 13.39), что эти конфигурации нагрузок как бы заталкивают пластинку в ее третью и четвертую моды выпучивания. Мы еще не проанализировали влияния этих форм как несовершенств, но поскольку малое отклонение в этих модах требует большей силы по сравнению с первыми двумя (так как пластина все еще *жесткая* — см. ниже § 17— в этих более высоких модах), кубические коэффициенты в соответствующем анализе влияния несовершенств, вероятно, окажутся сравнимыми с другими.

Остается найти квартичный член деформации. Любопытно, что ни одна из рассмотренных нами до сих пор конфигураций нагрузок, действующих в плоскости пластины, не дала члена деформации с квартичной частью, не лежащей в $\Delta_4(a\mu^4+b\mu^2\nu^2+c\nu^4)$; а член „двойного отношения" появится, только если изменить отношение l сторон пластины с $\sqrt{2}$ на $\sqrt{2}(1+L)$. С точностью первого порядка по L это дает член деформации

$$L(6.457\mu^2-25.830\nu^2+0.386\mu^4+2.956\mu^2\nu^2+2.397\nu^4).$$

Как может проверить читатель, полученные восемь членов, зависящих от ρ, σ, τ, L, β_1, β_2, β_3, β_4, дают теперь трансверсальную деформацию квартики, найденной нами в бифуркационном анализе.

Эта десятимерная геометрия (надо еще посчитать μ и ν) пока полностью не понята. Это еще один случай катастрофы двойной сборки, но у продеформированной нами квартики все корневые прямые комплексные (а не все вещественные, как в модели Аугусти), и геометрия деформации такая же, как и у квартики x^4+y^4, частично проанализированной Зиманом [7]. Полное понимание этого примера — а одновременно и других — будет, как мы видим, достигаться рука об руку с пониманием геометрии абстрактных особенностей. На самом деле анализ ветвления, проведенный

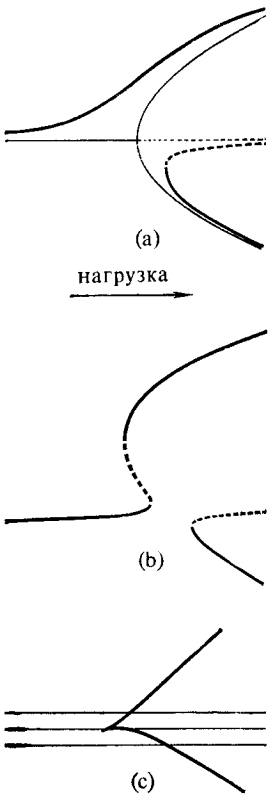


Рис. 13.40

Сапплом [122], представляет собой одно из самых важных опубликованных до сих пор исследований этой катастрофы.

К числу дочерних бифуркаций, „организованных" этой катастрофой в том же смысле, в каком линии складок организованы сборкой, принадлежат все катастрофы из списка в конце гл. 7, за исключением D_6^+ и D_6^-, плюс еще каспоид A_7 коразмерности 6, дающий деформацию для x^8. Это немного неожиданно (без теории катастроф) для исследования, в котором были оставлены лишь члены четвертого порядка: но поскольку тейл может быть *устранен* подходящим преобразованием, а не просто забыт, 8-определенность квартичных струй, получающихся в некоторых точках, гарантирует локальную точную приводимость к $\pm x^8 \pm y^2$, как и требовалось. (Ср. с обсуждением кубических точек сборки в эллиптической омбилике в § 6 гл. 9.) Все эти ласточкины хвосты, бабочки, вигвамы и A_7 реально и в точности имеются тут, несмотря на то что они очевидным образом требуют членов более высокого порядка, чем мы рассматривали. (Повторим снова: поведение рядов Тейлора от двух и большего числа переменных гораздо удивительнее, чем можно было бы подумать, и ничего более простого, чем правила гл. 8, для того чтобы можно было справиться с этой проблемой, вам не найти.)

Физически эта сложность как будто влечет за собой такие последствия. Для выпучивания по типу стандартной сборки мы получаем с помощью обычного анализа „совершенное" (светлые линии на рис. 13.40(a)) и „несовершенное" (жирные линии) поведение. Несовершенство, связанное с наклоном установки, равно как и те несовершенства, что были рассмотрены для двойственной сборки в § 11, могут вызвать выпучивание „щелчком" при возрастании нагрузки (рис. 13.40(b)), причем максимальная величина сначала линейно возрастает с несовершенством. Но даже и при наклоне большинство историй нагрузки не будет содержать такого прощелкивания; на рис. 13.40(c) оно имеет место лишь для средней линии, проходя через острие. Вероятность скачка не нуль, но и не велика. Однако вблизи *составной* точки выпучивания, которую мы рассматривали, вещи устроены гораздо тоньше. Анализ, проведенный у Мэгнуса и Постона [125], показывает, что в то время как скачки могут оставаться редкими для *грубых* экспериментов (где, по-видимому, доминируют линейные несовершенства), усовершенствование экспериментальной техники делает „скачки моды" все более и более частыми. Система ведет себя тем менее, а не тем более гладко, чем больше стараний было приложено! Далее, член двойного отношения, оказывается,

играет геометрически основную роль, несмотря на его топологическую незначительность,— *в особенности* для „простого" случая x^4+y^4. В иных случаях (как например, для пластин) он менее важен как член деформации, но *значение* двойного отношения в точке деформации сильно влияет на чувствительность к несовершенству.

ДИНАМИКА

16 Мягкие моды

Переходя от математических утверждений к физическим замечаниям о выпучивании, мы принимаем — как это обычно делается о работах по упругому выпучиванию — допущение о справедливости *принципа максимального промедления*. Для многих целей эта аппроксимация прекрасно работ ет, хотя ни при какой динамике, градиентной или любой другой, она не будет точной. (Лучше всего она работает для очень медленных — *квазистатических* изменений нагрузки.) Но если бы мы стали трактовать функцию энергии, которую мы до сих пор изучали в различных случаях, как часть гамильтониана (добавив член кинетической энергии), с тем чтобы рассмотреть консервативную [1] механику наших систем, возникли бы осложнения. Линеаризация получающихся уравнений дает теперь моды выпучивания в виде *мод колебаний*, возможных перед выпучиванием. Без линеаризации обычно наблюдается сложное эргодическое поведение — особенно вблизи точки бифуркации, рассмотренной в предыдущем параграфе,— которое становится все более и более заметным при больших колебаниях. Разбиение колебаний на моды служит, таким образом, лишь первым приближением, но в большинстве случаев оно полезно, в особенности когда имеется разумное демпфирование, позволяющее тем не менее наблюдать колебания.

В пределах данной моды колебаний восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть систему в состояние устойчивого равновесия, пропорциональна градиенту функции энергии; это правило обычно служит для *определения* восстанавливающей силы или градиента энергии. В случае квадратич-

[1] В инженерной литературе термин „консервативный" часто означает существование вполне определенной энергии конфигурации — т. е. упругое, а не пластическое поведение,— но с большой диссипацией, ведущей к минимизации энергии. (Это словоупотребление отличается от принятого в физике, где диссипативные члены исключаются). В действительности, слишком большая близость системы к „физически консервативной" делает квазистатические эксперименты по выпучиванию чрезвычайно трудными.

ного приближения для энергии (достаточно хорошего для морсовских минимумов энергии далеко от точек бифуркации, но не *точного*, так как законы динамики не инвариантны относительно диффеоморфизмов) эта сила пропорциональна амплитуде отклонения от равновесия. Значит, если по оси x в пространстве отклонения мы имеем с точностью до второго порядка энергию kx^2, то с точностью до первого порядка для рассматриваемой моды получается динамика

$$\ddot{x} = -2kx + \text{демпфирующие члены},$$

т. е. мы имеем *простой гармонический осциллятор с демпфированием*. Для большинства моделей с умеренным демпфированием начальное возмущение приводит к уменьшающимся по амплитуде колебаниям с периодом $\pi\sqrt{2/k}$. При стремлении k к нулю, т. е. при приближении к квазистатической точке выпучивания, этот период бесконечно возрастает, равно как и амплитуда колебаний с данной начальной энергией. Конечно, ни одна из этих бесконечностей не более реальна, чем бесконечные интенсивности в предыдущей главе. Когда квадратичный *член* „съеживается", квадратичная *аппроксимация* становится менее хорошей, и высшие члены предупреждают возникновение бесконечности в обоих случаях. Но чем меньше колебания, тем точнее согласие с опытом. В частности, если слегка ударить по стержню из § 5, он станет совершать колебания в форме $\sin(\pi s)$ с частотой приблизительно $\sqrt{(\mu\pi^2 - F)/8}$, вплоть до значения, близкого к значению выпучивания. Значит, ненагруженный, он издаст „тиньк", при умеренной нагрузке — „бумм", а вблизи точки выпучивания — „буиинньккк". (Это великолепно известно опытным инженерам, а неискушенного читателя должно предостеречь от предпочтения конструкций в тоне сопрано басовым.) Подобные явления имеют значение при изучении фазовых переходов (см. § 10 следующей главы), и в точности тот же анализ лежит в основе замечания о периоде малой качки как предупреждении о грозящем опрокидывании (§ 11 гл. 10).

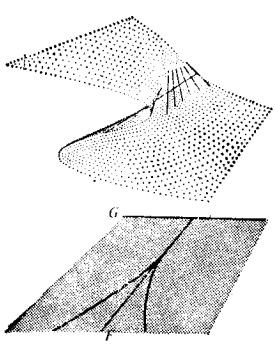


Рис. 13.41

17 Жесткость

Амплитуда рассмотренных выше колебаний пропорциональна квадратному корню из энергии возмущения (для данного k), но для того чтобы объяснить название *мягкая мода*, используемое для описания тех колебаний, для которых линеаризованное изложение не проходит, лучше вернуться к квазистатике с возмущающей *силой*. На рис. 13.41 пока-

заны для случая стержня ответы первого порядка на нормально приложенную силу G в виде касательных в направлении G к поверхности катастрофы над различными точками оси F. С точностью до первого порядка величина смещения от центрального положения при данной приложенной силе G пропорциональна $1/(\mu\pi^2 - F)$; стержень становится „мягче", менее жестким и неподатливым по мере приближения к выпучиванию. Отметим различие здесь между сборкой и двойственной сборкой: после приведения к стандартной форме оценка первого порядка расстояния до точки острия по жесткости и по периоду колебаний дает для них одинаковые ответы, но для стандартной сборки эта точка — *ближайшая* точка выпучивания. Для двойственной сборки другие точки на бифуркационном множестве гораздо ближе, и (при данной жесткости первого порядка), действуя, подобно Самсону, гораздо легче обрушить дом [1].

[1] Согласно библейскому преданию, силач Самсон „сдвинул... с места два средних столба, на которых был утвержден дом, упершись в них, в один правою рукою своею, а в другой левою". Дом обрушился, задавив и Самсона, и его врагов.— *Прим. ред.*

14 ТЕРМОДИНАМИКА И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Привлечение теории катастроф в термодинамику, подобно большинству термодинамических процессов, произвело больше тепла, чем света [1]. В этой главе мы не можем ставить себе целью больше, чем прояснение некоторых связей. Если уж теория катастроф при ее прямой эквивалентности геометрической оптике не доставляет Полного Ответа в физике каустик (гл. 12), то тем более она не доставляет Полного Ответа в физике фазовых переходов. Однако в точности также как и для каустик, мы исходим из той точки зрения, что теория катастроф должна входить необходимой составляющей в любое физическое толкование фазовых переходов, в отсутствие точных решений уравнения Шрёдингера для вещества. В неявном виде для более элементарных случаев теории катастроф оно так всегда и было, так что опять никаких новых результатов в малых коразмерностях ожидать нельзя.

Полное рассмотрение вопроса с этой точки зрения потребовало бы систематического изложения термодинамики и детального анализа нескольких случаев высокого порядка с совместным привлечением теории катастроф и теории ренормализационных групп (групп перенормировок) („асимптотический" метод, аналогичный методу быстро осциллирующих интегралов гл. 12). В настоящей книге это, разумеется, неосуществимо, но само по себе было бы достойной задачей. Кроме того, требующаяся здесь высокая математическая техника противоречила бы нашей главной цели — показать широким кругам ученых различные пути, на которых может применяться теория катастроф.

Для увязки с остальной частью книги выражение „критическая точка" мы используем в смысле „точка, где произ-

[1] Можно провести параллель с соотношениями Онсагера, которые породили начиная с 1931 г. огромное количество литературы, где они трактуются как краеугольный камень необратимой термодинамики. Столь же знаменитые физики утверждают (Трусделл [126]) не только то, что они плохо определены и не доказаны, но и что не было случая, когда бы они принесли практическую пользу.

водная функции обращается в нуль", как это принято в математике. В термодинамике это выражение обычно употребляется в более специальном смысле, который в случае теории Ландау переводится на наш язык так: „вырожденная критическая точка, которая к тому же является абсолютным минимумом (или, для энтропии, максимумом)".

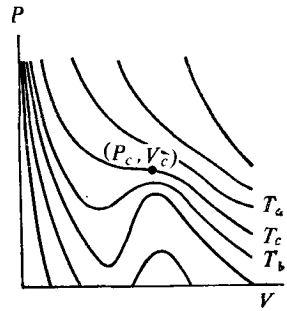


Рис. 14.1

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

1 Уравнение ван дер Ваальса

Как мы увидим дальше, описание фазовых переходов при помощи уравнений состояния не вполне адекватно, но оно удобно в качестве отправной точки. Начинаем с уравнения ван дер Ваальса (1873 г.), представляющего собой первый шаг за пределы закона $PV=RT$, описывающего идеальный газ. Исходя из физического рассуждения, в которое мы не будем здесь входить (поскольку никто теперь не верит в те представления, на которых оно основано), ван дер Ваальс предложил модифицированное уравнение

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta)=RT.$$

Здесь P, V и T — давление, объем и температура данного „куска" сплошной среды, а R — константа (обычно записываемая теперь как Nk, где N — число молекул в этом куске, а k — постоянная Больцмана, равная $1.380\cdot10^{-16}$ эрг/с). Константы α и β в наше время просто подбираются из условия наилучшего согласия с экспериментом и им больше не придается никакого физического смысла. Мы предполагаем, что читателю известно, что такое объем, давление и температура, хотя на самом деле их определение дело достаточно тонкое, особенно в отношении последней. Развернутое обсуждение этого вопроса можно найти в учебниках по термодинамике, например у Кэллена [127].

Уравнение ван дер Ваальса в указанной выше форме обычно представляют графически, рисуя графики P в зависимости от V при различных значениях T (рис. 14.1). (Более живо представить то же самое помогает поверхность на рис. 14.2, образованная точками (P, V, T)-пространства, удовлетворяющими нашему уравнению.) Пусть для рассматриваемого вещества понижается давление при постоянной температуре. Из рис. 14.1 видно, что может представиться несколько возможностей.

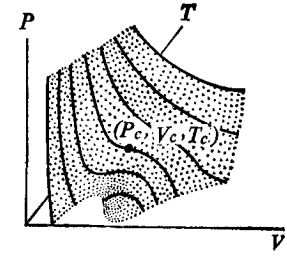


Рис. 14.2

(а) Если эта температура равна $T_a > T_c$, то объем плавно увеличивается.

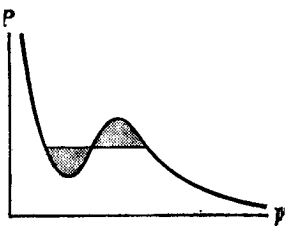


Рис. 14.3

(b) Если эта температура в точности равна T_c, то V будет непрерывной, но не дифференцируемой функцией от P.

(c) Если эта температура равна $T_b<T_c$, то имеются давления, при которых возможны несколько значений объема, так что из уравнения нельзя получить объем как функцию от давления. Очевидно, что вещество, вынуждаемое следовать по кривой, должно в некоторой точке произвести скачок. Перед скачком вещество отвечает на малое уменьшение объема значительно большим увеличением давления, чем после скачка; трудносжимаемая *жидкость* внезапно становится легкосжимаемым *газом*.

Каким же образом решает вещество, в какой точке совершить скачок? В 1875 г. Максвелл привел рассуждение, основанное на эквивалентности теплоты и работы, вывод из которого может быть геометрически выражен в виде *правила равных площадей*: часть исходной кривой надо заменить горизонтальным отрезком прямой, как на рис. 14.3, так чтобы заштрихованные площади оказались равными. Очень ясное объяснение того, почему физика получает здесь такое графическое выражение, имеется у Кэллена [127], стр. 148—153. (Обратите внимание, что его рис. 9.5 отвечает множеству сечений нашего рис. 7.14(b), а не катастрофе ласточкина хвоста.)

Теперь приступим к установлению связи с теорией катастроф, для чего произведем стандартную редукцию и замену переменных, указанную в статье Фаулера [128]. Легко находится, что точка (P_c, V_c, T_c), которая служит центром происходящего,— это точка

$$\left(\frac{\alpha}{27\beta^2},\ 3\beta,\ \frac{8\alpha}{27\beta R}\right).$$

Нормируем ее к (1, 1, 1), для чего положим

$$P'=P/P_c, \qquad V'=V/V_c, \qquad T'=T/T_c;$$

в результате придем к *приведенному уравнению ван дер Ваальса*

$$(P'+3/V'^2)\left(V'-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}T'.$$

Беря в качестве переменной вместо объема плотность X, т. е. производя замену $V'=1/X$, мы получим в некоторых отношениях более отвечающее интуиции описание „состояния“ вещества. Наконец, перенесем начало в (1, 1, 1), положив

$$p=P'-1, \qquad x=X-1, \qquad t=T'-1.$$

Наше уравнение примет вид

$$x^3+\frac{8t+p}{3}x+\frac{8t-2p}{3}=0,$$

или

$$x^3+ax+b=0,$$

где

$$a=\frac{8t+p}{3}, \qquad b=\frac{8t-2p}{3}.$$

Это в точности поверхность катастрофы сборки (см. § 2 гл. 5 и § 3 гл. 9), и мы снова изображаем ее на рис. 14.4, обрезав по жирным линиям, в соответствии с условием, что давление и температура неотрицательны.

Приложение максвеллова правила равных площадей предписывает жидкости единственный объем (и, значит, единственную плотность) при каждых температуре и давлении, т. е. единственный за исключением точек скачка. Перенося это в наши новые координаты, мы из рис. 14.4 получаем рис. 14.5. Однако произведенная замена переменных не сохраняет площади, и правило Максвелла не имеет простого выражения в координатах x, a, b. Множество точек, где происходят скачки, представляет собой кривую в плоскости ab, (жирная линия на рис. 14.5), касательную к оси a в начале, но не совпадающую с ней.

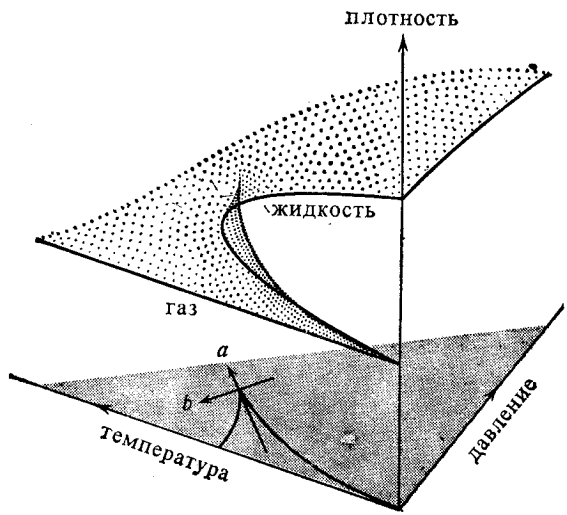


Рис. 14.4

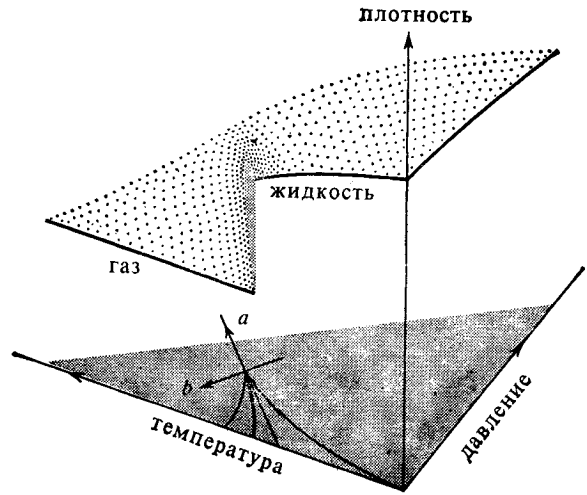


Рис. 14.5

В том, что уравнение ван дер Ваальса преобразуется в стандартное уравнение поверхности сборки, нет ничего случайного, случайна здесь лишь алгебраическая простота соответствующего преобразования. Полное описание фазового перехода жидкость/газ при помощи этой модели „уравнение ван дер Ваальса плюс правило Максвелла" более тонко, и мы подойдем к нему в § 6.

2 Ферромагнетизм

Рассмотрим теперь явление ферромагнетизма. При температуре более высокой, чем некоторая температура T_c, вещество может быть парамагнитным, при более низкой — ферромагнитным. Мы не желаем входить в физику этих терминов. Для наших целей здесь существенно то, что ферромагнитное вещество *намагничено* (обладает связанным с ним магнитным полем) даже в отсутствие внешнего поля. (Если все части некоторого куска вещества намагничены в одном направлении, то получается заметное суммарное поле. Примером служит обычный магнит.) Рассмотрим один из ранних подходов к описанию этого явления — модель Вейсса (1907 г.). Как и в случае уравнения ван дер Ваальса, мы опускаем физическую аргументацию (см. Хауг [129]) и обращаемся сразу к уравнению состояния

$$\operatorname{th}\eta = \frac{T}{T_c}\eta - \frac{\mu_B H}{\varkappa T_c},$$

где H — внешнее магнитное поле, η — приведенная намагниченность:

$$\eta = M/M_0$$

(напомним, что th является (аналитическим) диффеоморфизмом $\mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$), а M_0, β_B, $\varkappa$, T_c — константы. Переход из одного состояния в другое происходит, когда температура T проходит через *точку Кюри* T_c. Положим для краткости

$$\frac{T - T_c}{T_c} = \frac{A}{3}, \qquad -\frac{\mu_B H}{\varkappa T_c} = \frac{B}{3},$$

так что уравнение примет вид

$$\operatorname{th} \eta = \left(\frac{A}{3} + 1\right)\eta + \frac{B}{3}.$$

Но

$$\begin{aligned}\operatorname{th} \eta &= \eta - \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{2}{15}\eta^5 - \dots \\ &= \eta - \frac{1}{3}\eta^3 + t(\eta),\end{aligned}$$

где $t = O(5)$, поэтому последнее уравнение можно переписать так:

$$\eta - \frac{1}{3}\eta^3 + t(\eta) = \eta + \frac{A\eta}{3} + \frac{B}{3},$$

или

$$0 = \frac{1}{3}\eta^3 - t(\eta) + \frac{A}{3}\eta + \frac{B}{3}.$$

При $A = B = 0$ правая часть 3-определенна, согласно гл. 4 или 8. (В действительности она даже сильно 3-определенна, что вытекает из теоремы 8.1 или же из рассмотрения диффеоморфизма, построенного в теореме 4.4.) Обычным образом применяя теорему 8.7, заключаем, что деформация

$$\frac{1}{3}\eta^3 - t(\eta) + \frac{A}{3}\eta + \frac{B}{3}$$

сильно эквивалентна своему усечению до порядка 3, так что существует замена переменных

$$(\eta,\ A,\ B) \mapsto (x(\eta,\ A,\ B),\ a(A,\ B),\ b(A,\ B))$$

с тождественной производной в (0, 0), для которой

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\eta^3 - t(\eta) + \frac{A}{3}\eta + \frac{B}{3} &= \frac{1}{3}(x(\eta,\ A,\ B))^3 \\ &\quad + \frac{1}{3}a(A,\ B)x(\eta,\ A,\ B) + \frac{1}{3}b(A,\ B).\end{aligned}$$

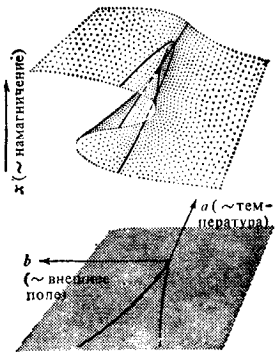


Рис. 14.6

Заметим, что поскольку нас интересуют *нули*, а не *минимумы* этой функции при различных A, B, мы не можем отбросить „переменную константу", обсуждавшуюся в § 6 гл. 8, и должны включить в деформацию как A, так и B, чтобы обеспечить трансверсальность. (Алгебраический критерий из теоремы 8.6 следует при этом модифицировать, заменив J_n^k на E_n^k. Так как мы обращаем внимание на значения, функция x^3 оказывается особой в двух отношениях — она имеет точку перегиба и принимает там значения 0; поэтому коразмерность этой особенности равна 2.) Это дает уравнение состояния в форме

$$\frac{1}{3}(x^3+ax+b)=0,$$

или снова

$$x^3+ax+b=0.$$

Таким образом, уравнение Вейсса описывает не что иное, как поверхность сборки (рис. 14.6), с точностью до (не вполне определенного) диффеоморфизма с тождественной производной в точке Кюри. Любое свойство модели, инвариантное относительно таких диффеоморфизмов (как например, *критический показатель*, рассматриваемый нами в § 8), может быть особенно легко получено с помощью этого представления.

Аналогичные замечания применимы и к сходным теориям, в которых функция $\mathrm{th}\eta-\eta$ заменяется какими-нибудь другими, скажем функциями Бриллюэна

$$B_J(\eta)=\frac{J+1}{3J}\eta-\frac{((J+1)^2+J^2)(J+1)}{90J^3}\eta^3+\dots$$

или функциями Ланжевена

$$L(\eta)=\mathrm{cth}-\frac{1}{\eta}=\frac{1}{3}\eta-\frac{1}{45}\eta^3+\dots$$

поскольку в каждом из этих случаев имеется ненулевой кубический член.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

3 Энтропия

Для воздуха, наполняющего комнату, несравненно больше таких состояний (или несравненно большую часть объема в пространстве состояний занимают такие состояния), когда воздух достаточно равномерно распределен, чем когда он весь находится в одном углу. Это верно уже для 16 шашек на шахматной доске; это становится верным во всё более ярко выраженной форме по мере возрастания рассматри-

ваемых чисел. Таким образом, если индивидуальные состояния равновероятны, то гораздо больше шансов на то, что воздух будет равномерно перемешан, чем на то, что он соберется весь в каком-нибудь углу. „Макросостояние" равномерной распределенности — неважно, в *какой* именно равномерно распределенной конфигурации, или „микросостоянии," — гораздо более вероятно, чем макросостояние сосредоточенности в углу. Если мы свяжем с каждым макросостоянием μ число n_μ микросостояний, которые ему „принадлежат", мы получим некоторую меру вероятности μ. (В действительности следует говорить о *плотности* вероятности в пространстве макросостояний с пиком в „состоянии равномерной перемешанности, так как вероятность того, что перемешивание *в точности* равномерно, равна нулю.) Фактически в качестве такой меры удобно принять $\ln n_\mu$. Действительно, если у нас имеются две комнаты, одна с n_1 состояниями равномерной перемешанности воздуха в ней, а другая с n_2, то общее число состояний равномерной перемешанности равно $n_1 n_2$. Перейдя к логарифмам, мы заменим умножение на сложение.

Взятая с некоторой константой, эта величина $\ln n_\mu$ называется *энтропией* S нашего воздуха. Часто вероятности (пропорциональные e^S) различных макросостояний дают столь резкий пик в *наиболее* вероятном состоянии (состоянии с максимальной энтропией), что соответствующие значения микропеременных вроде давления, плотности и т. п. могут служить для точного описания макросостояния через очень небольшое время после любого возмущения. (Полное изложение набросанного выше статистического обоснования понятия энтропии, включая подход квантовой статистики, имеется у Ландау и Лифшица [130].)

Можно было бы дать чисто макроскопический подход к определению энтропии, систематизировав, как это сделал в 1850 г. Клаузиус, относящиеся к 1824 г. рассуждения Карно о тепловой машине; однако при таком определении понятие выглядит гораздо таинственнее. (В частности, его математическое изложение дается обычно совершенно превратным образом; вся теория просто вопиет, чтобы ее переложили на язык дифференциальных форм,— переформулировка, начатая Яухом [131] незадолго до его смерти.)

Итак, в термодинамике принимают принцип, состоящий в том, что некая гладкая [1] функция S — энтропия — на

[1] Часто делается, но редко используется предположение об *аналитичности* функции S — разве лишь для того, чтобы мотивировать рассмотрение рядов Тейлора и многочленов, получаемых их усечением.

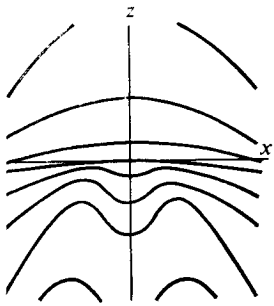


Рис. 14.7

пространстве X макроскопических переменных (энергия, давление, намагничение...) максимизируется веществом, с которым мы имеем дело, при каких угодно ограничениях (можно фиксировать энергию, изолировав рассматриваемую систему; можно фиксировать температуру, связав систему с большой массой, на собственную температуру которой нельзя существенно повлиять, и т. д.). Затем этот принцип трансформируется до бесконечности.

4 Трансформации принципа максимума энтропии

Удобно проиллюстрировать такие трансформации на следующем абстрактном примере. Рассмотрим две функции на плоскости $\mathbb{R}^2$ (с координатами (x, z))

$$p(x, z)=z,$$
$$q(x, z)=x^4+zx^2+z.$$

На рис. 14.7 показаны линии уровня для q, для p ими будут просто прямые $z=\text{const}$. Ни p, ни q нигде не имеют критических точек, так как $\partial p/\partial z=1$ тождественно, а $\partial q/\partial z=1+x^2$, и ни одна из этих производных нигде не обращается в нуль. Но ограничение p на кривую $q(x, z)=\text{const}$ и ограничение q на кривую $p(x, z)=\text{const}$ имеют критические точки. Более того, легко видеть, что эти точки совпадают. [*Доказательство.* Если функция $p|_{q^{-1}(c)}$ вырожденна в (x_0, z_0), то производная $Dp|_{x_0 z_0}$ должна обращаться в нуль на всех векторах, касательных к $q^{-1}(c)$ в (x_0, z_0). Но это в точности те самые векторы, на которых обращается в нуль $Dq|_{x_0 z_0}$, поскольку $Dq|_{x_0 z_0}\neq 0$. Согласно § 3 гл. 2, два линейных отображения $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ с одинаковым ядром являются скалярными кратными друг друга, так что $Dp|_{x_0 z_0}=\lambda Dq|_{x_0 z_0}$ для некоторого „лагранжева множителя“ $\lambda\in\mathbb{R}$. Поскольку это условие симметрично относительно p и q при $\lambda\neq 0$, мы видим, что (x_0, z_0) служит критической точкой для $p|_{q^{-1}(c)}$, если и только если она является таковой для $q|_{q^{-1}(d)}$, где $c=q(x_0, y_0)$, $d=p(x_0, y_0)$.]

Далее, легко видеть в этом примере, что q имеет локальный *минимум* на кривой $p=\text{const}$, в точности там, где p имеет локальный *максимум* на соответствующей кривой $q=\text{const}$. Эта теория прекрасно изложена у Спивака [132], том 4, стр. 428, где дано ее обобщение, показывающее, что „максимизация площади, заключенной в данном периметре“ (рис. 14.8(a)),— это то же самое, что и „минимизация периметра, охватывающего данную площадь“ (рис. 14.8(c)), а именно и то и другое дает круг (рис. 14.8(b)).

Бесконечномерная природа пространства кривых в рассмотренном примере не чужда термодинамике, которая также становится бесконечномерной, как только мы уделим внимание локальным вариациям состояния (даже без всякого обращения к микрофизике).

Итак, задачи максимизации и минимизации при ограничениях допускают много эквивалентных представлений в терминах экстремизации различных величин, подчиненных различным ограничениям. (Иногда математически может оказаться удобнее решить задачу экстремизации для данных физических ограничений, экстремизируя другую величину, подчиненную ограничениям, которые физически не могут быть реализованы.) Поэтому принцип максимизации энтропии, лежащий в центре термодинамики, часто может быть с пользой представлен в виде принципа минимизации некоторой другой функции (даже, быть может, такой, которая, подобно энергии изолированной системы, *физически не может* изменяться) на множестве состояний с одной и той же энтропией.

Если на рис. 14.7 использовать x как координату на кривых $p=c$, то q станет функцией от x (меняющейся с c); беря x в качестве координаты на кривых $q=d$, мы получим, что p станет функцией от x (меняющейся с d). Аналогами этих функций, которые подлежат экстремизации по x, возникающими в термодинамике, являются энтропия (максимизируемая) и великое множество функций, которые нужно минимизировать (при ограничениях), как например, *функция Гиббса*, *потенциал Гельмгольца* и *свободная энтальпия*. Мы будем, как это принято, ссылаться на них всех вместе как на *термодинамические потенциалы* и обозначать произвольный такой потенциал через Φ. (Кстати, лежащие в основе вероятности, обсуждавшиеся в § 3, выражаются через эти потенциалы в виде $e^{-\Phi}$ в противоположность e^{S}, поскольку максимумы вероятности связаны с *минимумами* Φ и *максимумами* S.)

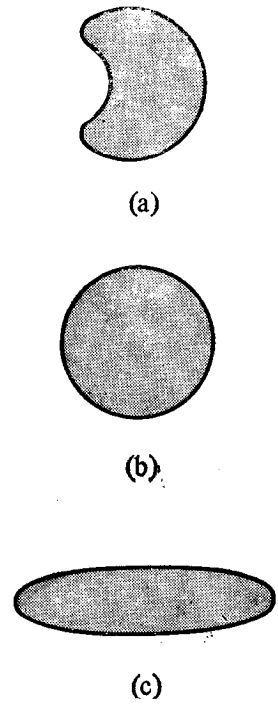


Рис. 14.8

5 Преобразование Лежандра

К несчастью, даже в наиболее математических книгах по термодинамике, таких как Кэллен [127], путают условие того, чтобы можно было провести указанную выше трансформацию задач экстремизации (в нашем примере условие, чтобы производные Dp и Dq нигде не обращались в нуль в отличие от своих сужений на специальные кривые; аналог этого условия в термодинамике выполняется почти универсально) с различными гораздо более сильными условиями.

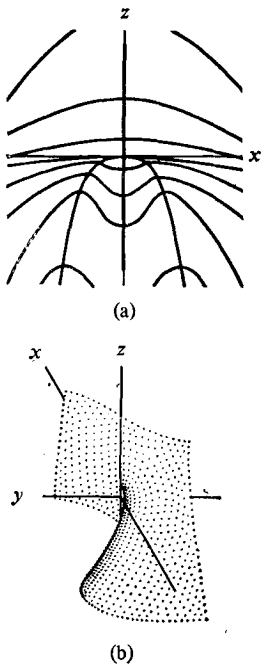


Рис. 14.9

Физики вообще хотят, чтобы всё, что они рассматривают, было функцией от всего остального,— желание, которое они удержали от математики девятнадцатого столетия. (Математики сдвинулись с этого — первый шаг состоял в замещении „многозначных функций" римановыми поверхностями, но физики почти так же нескоро узнают о новых математических точках зрения, как математическая община осознает новую физику. Имеются достойные уважения исключения, даже и теперь, но когда мы увидим нового Эйлера или Пуанкаре?) Правда, они, конечно, идут впереди вычислительных социологов, многие из которых, составляя свои программы для ЭВМ, исходят из того, что всё есть *линейная* функция от всего остального.

На рис. 14.9(a) мы отметили точки, где имеются эквивалентные экстремумы, при наших ограничениях; аналогичным образом на рис. 14.9(b) показаны точки в $\mathbb{R}^3$, являющиеся критическими для функции

$$P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
$$(x,\ y,\ z) \mapsto x^4 + zx^2 + yz + z,$$

ограниченной на кривые, на которых функция

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$(x,\ y,\ z) \mapsto (y,\ z)$$

принимает постоянное значение $(c_1,\ c_2)$, или, эквивалентно, точки, где функция Q, ограниченная на поверхность $P=$ $=\text{const}$, имеет особенность. В области положительных z имеется единственное значение x, максимизирующее p или P при фиксированном значении q или Q; аналогичное верно для минимизации q или Q при фиксированном p или P. Это служит поддержкой той точке зрения, что „x является функцией от q или Q" (соотв. от p или P), причем в указанной области неособой [1], так что x в качестве координаты можно заменить на p, P, q или соответствующую часть Q. (В этом именно и состоит теория „преобразований Лежандра".)

Очевидным образом этот подход не работает вблизи начала, представляющего собой точку наибольшего интереса в термодинамическом контексте. Одна из совсем не маленьких услуг, которые язык дифференциальной топологии (включая теорию катастроф) может оказать термодинамике,— это предложить ей формализм, не отказывающий в

[1] Для второго примера; для первого это, очевидно, неверно. То же относится и к следующему утверждению.— *Прим. перев.*

точках наибольшего интереса. (У нас здесь нет места для того, чтобы развить этот формализм до систематического исчисления; см. по этому поводу Дюбуа и Дюфур [132a] и Экланд [132b].) Конечно, физическое образование дает большой опыт работы с вычислениями, успешными несмотря на отказывающий формализм, и многие физики будут рассматривать такое предложение как образец наглой и бессмысленной мистификации. Для человека, проведшего всю жизнь стоя в гамаке, действительно может оказаться трудным приспособиться к кровати.

6 Явные потенциалы

Достаточно общих рассуждений, перейдем теперь к конкретным термодинамическим потенциалам — функциям состояния данного „куска" вещества, меняющимся в зависимости от того, какие переменные приняты за „независимые". Например, пусть в случае уравнения ван дер Ваальса нас интересует отыскание плотности по данным давлению и температуре. В этом случае подходящим термодинамическим потенциалом будет свободная энергия Гиббса; он был вычислен как бы специально для нас в принятых выше обозначениях Беллом и Лейвисом [133], которые дали достаточно подробное описание относящейся сюда термодинамики. С точностью до сдвигающего члена (который, как они замечают, не оказывает влияния на фазовый переход) этот потенциал задается формулой

$$\Phi(x,\ p,\ t)=\frac{16\,(t+1)}{9}\ln\left(\frac{2+2x}{2-x}\right)-\frac{2x\,(1+p)}{3\,(1+x)}-2x.$$

Заметьте, что оно совершенно отлично от простейшего, алгебраического потенциала

$$\tilde{\Phi}(x,\ p,\ t)=\frac{1}{4}x^4+\frac{8t+p}{6}x^2+\frac{8t-p}{3}x,$$

дифференцирование которого дает уравнение состояния

$$x^3+\frac{8t+p}{3}x+\frac{8t-p}{3}=0$$

из § 1, хотя Φ и строится как раз для того, чтобы дать это уравнение. Максвеллово правило равных площадей *не* отвечает минимизации $\tilde{\Phi}$, но *в точности* соответствует, как показывают Белл и Лейвис, выбору абсолютного минимума Φ. Чтобы увековечить память об этом соответствии, Том в [1] окрестил „выбор абсолютного минимума" *принципом*

Максвелла, в отличие от принципа максимального промедления.

Белл и Лейвис заключают отсюда, что поведение „жидкости ван дер Ваальса" (а также, кстати, жидкостей Бертело или Дитеричи) не отвечает катастрофе Римана — Гюгонио [1]. Это верно, однако, лишь если „отвечает" понимать в смысле „соответствует при простейшем алгебраическом преобразовании, переводящем уравнение состояния в уравнение поверхности сборки". Но это *неверно* для случая произвольных гладких замен переменных. Если мы разложим Φ в ряд Тейлора до пятого порядка, то получим

$$x^5\left(\frac{11t-20p}{30}-\frac{3}{10}\right)+x^4\left(\frac{8p-5t}{12}+\frac{1}{4}\right)+x^3\frac{2t-2p}{3}$$
$$+x^2\frac{2p-2t}{3}+x\frac{8t-2p}{3}.$$

Считая (p, t) параметрами деформации, мы видим, что Φ является деформацией для

$$\Phi_{00}=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{10}x^5+O(6).$$

Но струя $x^4/4$ сильно 4-определенна, согласно элементарному доказательству из § 4 гл. 4. Легко проверяется, что Φ служит *универсальной* деформацией для Φ_{00} и, значит, по теореме 8.6, Φ эквивалента вблизи начала стандартной деформации

$$\frac{x^4}{4}+\frac{a}{2}x^2+bx.$$

Мы можем сказать и больше. Рассмотрим замену

$$x=y+\frac{3}{10}y^2+\frac{2}{15}(t-p). \qquad (14.1)$$

Это диффеоморфизм для $y>-5/3$ с обратным

$$y=x-\frac{3}{10}x^2-\frac{2}{15}(t-p)+O(3).$$

Подставляя (14.1) в разложение для Φ и оставляя члены пятого порядка по y и первого по t и p, получим

$$-\frac{13}{750}(t-p)y^5+\left(1+\frac{62p-61t}{75}\right)\frac{y^4}{4}$$
$$+\left(\frac{2t+7p}{15}\right)y^2+\left(\frac{8t-2p}{3}\right)y.$$

[1] Первоначальное название сборки, данное Томом. Название „сборка" (cusp) идет от Зимана.

5-струя потенциала Φ_{00} для $t=p=0$ имеет вид $y^4/4$. Применим теперь теорему 8.7. Как легко проверить, мы находимся в случае (а) при $k=4$. Значит, данная деформация *сильно* эквивалентна деформации

$$I^5(\Phi_{00})+I^2\left(\frac{\partial}{\partial p}\Phi_{p0}\right)p+I^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{0t}\right)t,$$

которая во введенных выше y-координатах в точности принимает вид

$$\frac{y^4}{4}+\frac{2t+7p}{15}y^2+\frac{8t-2p}{3}y.$$

Это снова — стандартное семейство потенциалов сборки; если мы положим

$$\alpha=\frac{4t+14p}{15}, \qquad \beta=\frac{8t-2p}{3},$$

то получим выражение

$$\frac{y^4}{4}+\frac{\alpha}{2}y^2+\beta y.$$

Анализ влияния различия между α и членом

$$\frac{1}{3}(8t+p)$$

в прежнем „простейшем“ выражении может пролить свет на то, что *не* сохраняется при сильной эквивалентности (и это рекомендуется проделать в качестве упражнения читателям, интересующимся различными специальными свойствами, которые не обязательно сохраняются). К числу свойств, которые *сохраняются*, относится направление острия в точке сборки, а тем самым и направление, в котором множество Максвелла (или „кривая точек фазового перехода первого рода“) выходит из точки (0, 0, 0): по определению сильная эквивалентность сохраняет выходящие из начала направления. (Однако к этому числу не относятся такие вещи, как *кривизна* множества Максвелла, которая зависит от более высоких производных по p и t; для ее сохранения потребовалась бы еще более сильная эквивалентность, теоремы о которой могут быть доказаны теми же методами.) В нашем случае мы уже знаем это направление, так как оно зажато между кривыми складок проекции алгебраически простого многообразия катастрофы, заданного вандерваальсовым уравнением состояния. В других случаях мы можем найти его из соображений симметрии. Но когда термодинамический потенциал выводится

с помощью физических рассуждений более глубоких, чем подбор эвристического уравнения состояния, его поверхность критических точек может оказаться практически неописываемой в замкнутом виде, и такую информацию о направлении придется получать из разложения. В особенности это касается высших особенностей, где может быть несколько важных направлений и где лишь описанные нами методы указывают систематический путь к их уверенному выявлению.

Резюмируем: не только всю информацию, инвариантную относительно диффеоморфизмов, извлекаемую из вандерваальсова уравнения состояния, но также и всё, что вытекает из полной термодинамической информации о жидкости ван дер Ваальса, можно получить, изучая потенциал катастрофы сборки

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2+bx.$$

Масса информации, представляющей физический интерес, оказывается на деле в этой теории инвариантной относительно диффеоморфизмов и еще большая часть информации — инвариантной в смысле сильной эквивалентности. Аналогичные замечания справедливы и для жидкостей Бертело и Дитеричи, а также для различных моделей фазового перехода ферромагнетик/парамагнетик, упомянутых в § 2.

Между прочим, проблемы деформации и устойчивости для потенциала Φ и для уравнений состояния ($D\Phi=0$) эквивалентны, лишь когда у нас имеется только одна существенная переменная. Но если их две, то $D\Phi$ становится существенно $\mathbb{R}^2$-значным отображением *и среди таковых имеет более высокую коразмерность, чем* Φ *среди* $\mathbb{R}$*-значных*, поскольку имеет соседей, которые вовсе не являются градиентами (см. caveat в конце § 9 гл. 4). Тем самым вопрос об устойчивости звучит по-разному в случае коранга $\geqslant 2$ в зависимости от того, должны ли в данной задаче наши уравнения быть эквивалентными критичности некоторой вещественнозначной функции или это не обязательно. Здесь речь идет совсем не о том, можем ли мы явно построить такую функцию. Одно ее теоретическое существование или несуществование будет сказываться в количественных вопросах физической устойчивости.

7 Теория Ландау

Приведенные примеры проясняют причины чрезвычайного сходства самых различных моделей самых различных фазовых переходов. Этими причинами служат результаты о „ти-

пичности" из гл. 7 и результаты об определенности и деформациях из гл. 8. Они в значительной мере ответственны за успех теории Ландау, в которой предполагается, что рассматриваемый минимизируемый термодинамический потенциал Φ является достаточное число раз дифференцируемой функцией от, скажем, давления P, температуры T и еще одной величины η (плотность или намагничение в предыдущих примерах), изменение которой описывает изменение фазы вещества. Обычно η берется одномерной, если только соображения симметрии не требуют противного. Ее часто называют *степенью упорядоченности*, поскольку, скажем в примере с намагничением, она измеряет степень параллельности направлений намагничения в различных точках. Потенциал затем разлагается в ряд

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + \alpha(P, T)\eta + A(P, T)\eta^2 + B(P, T)\eta^3 + C(P, T)\eta^4 + \ldots$$

Представляют интерес точки равновесия, где Φ минимизируется, поэтому, выбирая начало по η в одной из таких точек, мы можем допустить без потери общности, что $\alpha = 0$. Из устойчивости морсовских функций (§ 5 гл. 4) вытекает, что если в рассматриваемой области A положительно, то ничего интересного не происходит. (В книгах по физике обычно ссылаются на более слабый результат о достаточных условиях второго порядка, гарантирующих минимум или максимум, которого в данном случае вполне хватает.) Если A всюду отрицательно, то вещество не останется в рассматриваемом состоянии равновесия по причине его неустойчивости. Нас интересует, таким образом, что́ происходит в точках, где A меняет знак и, значит, обращается в нуль. Если в такой точке B не нуль, то Φ имеет точку перегиба — снова неустойчивое равновесие (хотя и в меньшей степени, чем для максимума), и вещество „скатится" в направлении падения потенциала Φ к некоторому совсем другому значению η. Следовательно, в случае *непрерывного* изменения состояния (определяющее свойство *фазовых переходов второго рода* в отличие от переходов *первого рода* вроде кипения, когда плотность меняется скачком) мы должны иметь $A(P, T) = B(P, T) = 0$. Чтобы в интересующей нас точке имел место минимум, мы должны потребовать выполнения условия $C(P, T) > 0$ в этой точке (и, значит, по непрерывности, в некоторой ее окрестности).

Предыдущее представляет собой пересказ стр. 491—492 из книги Ландау и Лифшица [130]. Теперь момент прямо процитировать ее (стр. 493):

„Если же B не обращается тождественно в нуль [*по соображениям симметрии*], то точки перехода определяются из двух уравнений $A(P, T)=0$, $B(P, T)=0$. В этом случае, следовательно, точки непрерывного фазового перехода могут быть лишь изолированными точками."

Отметим неявное использование соображения трансверсальности в последней фразе. Существуют гладкие функции A и B, множеством общих нулей которых служит *какое-угодно замкнутое множество* в (P, T)-плоскости $\mathbb{R}^2$, и это делает возможными весьма странные объекты (см. Ньюмэн [134]). Но *в типичном случае* отображение

$$(A, B)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$(P, T) \mapsto (A(P, T),\ B(P, T))$$

трансверсально к $\{(0, 0)\}$, и поэтому его нули изолированны. (В действительности, поскольку условие трансверсальности здесь в точности то же самое, что и условие из теоремы об обратной функции, мы видим, что, более того, A и B могут быть использованы локально как гладкие координаты в (P, T)-плоскости.) Это служит иллюстрацией к нашей общей точке зрения, что соображения трансверсальности не являются лишенным физического смысла изобретением математиков; тот смысл, в котором в теореме Тома используются слова „почти все", в точности совпадает со смыслом, в котором многие физики пишут „все" — и пишут по тем же самым причинам. И дело не только в том, что честность — лучшая политика в этическом плане, но систематизация таких причин в рамках теории трансверсальности должна быть столь же плодотворной в течение долгого времени для различных наук, какой оказалась систематизация рассуждений, связанных с симметрией, в рамках теории групп.

Аналогичные соображения трансверсальности показывают, что (в отсутствие симметрии) (α, A) можно в типичном случае использовать в качестве локальных координат в (P, T)-плоскости; тогда Φ получает выражение

$$\Phi(\alpha, A, \eta) = \Phi_0(\alpha, A) + \alpha\eta + A\eta^2 + B(\alpha, A)\eta^3 + C(\alpha, A)\eta^4 + \dots .$$

Если функция Φ гладкая, то теоремы гл. 8 гарантируют существование гладкой замены координат, приводящей ее (с точностью до сдвигающей функции Φ_0) к виду

$$\frac{1}{4}\eta^4 + \frac{a}{2}\eta^2 + b\eta.$$

Конечно, если есть другие „управляющие параметры", сверх P и T, или же имеются симметрии, то возможны катастрофы более высокого порядка. Принимая во внимание лемму расщепления и используя дальнейшие соображения трансверсальности (как в § 2 гл. 7), мы можем освободиться от начального предположения (явного или неявного, где как), что η одномерно, хотя это утверждение требует уточнения при наличии симметрии. Сумма

$$\eta_2^2 + \ldots + \eta_N^2$$

независящих от A и B членов не влияет на физическую картину.

Итак, мы можем объяснить емкость теории Ландау, в которой берут общее тейлоровское разложение и, усекая его там, где это представляется нужным (причем в случае одной переменной интуиция является превосходным советчиком в вопросах определенности!), получают всю инвариантную относительно диффеоморфизмов информацию, содержащуюся в моделях, снабженных многочисленными физическими деталями. Отсюда и универсальность результатов.

В предыдущих рассмотрениях мы предполагали отсутствие симметрии; случай симметрии мы разберем в §§ 15—20.

ФЛЮКТУАЦИИ И КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

8 Классические показатели

Теория Ландау находит формы-архетипы для термодинамического потенциала с помощью метода, который сводится к варианту теории катастроф *как таковой*; иначе говоря, с помощью математики, изложенной нами в гл. 7 и 8. (Однако без привлечения формального математического аппарата, описанного в этих главах, имеется большой простор для математических ошибок в высших коразмерностях — с возможными последствиями для физики, см. § 18.) Другая ее главная составляющая как физической теории — это принцип, часто применяемый при работе с потенциалами, выведенными из рассмотрения детальных моделей: приближение *среднего* состояния *наиболее вероятным*, или, что эквивалентно, тем, которое минимизирует соответствующий потенциал. (Возможен более тонкий подход, при котором побочные пики вероятности, локальные минимумы потенциала, рассматриваются как *метастабильные* состояния, но нас это сейчас не касается.) Мы уже обсуждали такое приближение в контексте теории рассеяния и волновой теории (§ 3 гл. 12); обычно оно оказывается хорошим там, где ве-

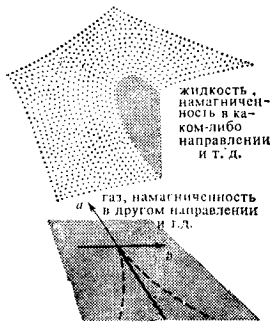


Рис. 14.10

роятность имеет резкий невырожденный пик, или, что в данном случае эквивалентно, там, где потенциал имеет резкий морсовский минимум. В термодинамике такие резкие пики обычны, как отмечается у Ландау и Лифшица [130], стр. 18:

„Если выделить в каком-либо газе участок, содержащий, скажем, всего 0.01 грамм-молекулы, то оказывается, что среднее относительное отклонение, испытываемое энергией этого количества вещества, от своего среднего значения составляет всего $\sim 10^{-11}$. Вероятность же найти (при однократном наблюдении) относительное отклонение, скажем, порядка 10^{-6} изображается чудовищно малым числом $\sim 10^{-3 \cdot 10^{15}}$."

Таким образом, указанным приближением часто можно пользоваться вполне безопасно.

Рассмотрим термодинамический потенциал для фазового перехода второго рода с архетипом катастрофы сборки, управляемый лишь двумя меняющимися „связями" (такими как P и T), к которому мы пришли в предыдущем параграфе:

$$\frac{1}{4}\eta^4 + \frac{a}{2}\eta^2 + b\eta.$$

Для него указанное правило дает как уравнение состояния

$$\eta^3 + a\eta + b = 0,$$

так и основания для выбора между конкурирующими слоями определенной тем самым поверхности. После подходящего преобразования правило „выбирай более глубокий минимум" в точности будет отвечать максвеллову правилу равных площадей всюду, где последнее уместно.

Каковы инвариантные относительно диффеоморфизмов предсказания теории? Одно состоит в том, что над множеством Максвелла, или *кривой сосуществования*, где два минимума функции $\frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{2}a\eta^2$ имеют равные значения, мы должны получить что-то вроде параболы (рис. 14.10). Точнее, если мы продолжим кривую сосуществования через точку фазового перехода второго рода до некоторой гладкой кривой (а то, что это возможно сделать, является фактом, инвариантным относительно диффеоморфизмов) и параметризуем ее с помощью параметра a, то в архетипичной форме множество точек скачка выразится как

$$b = 0, \qquad a + \eta^2 = 0$$

средственной близости от вырожденных особенностей она уже перестает годиться. Свет на этот вопрос пролило точное решение мало-помалу увеличивающегося начиная с 40-х годов числа детализированных статистических моделей упорядоченного вещества (многие из которых служат вариациями на тему так называемой „модели Изинга"); полученные в этих моделях значения критических показателей согласуются с экспериментом, а не с теорией Ландау. Не входя в детали статистики микросостояний, давайте рассмотрим, что́ тут происходит с термодинамической точки зрения.

Как мы это обсуждали в § 16 гл. 13, возмущение системы, которая стремится минимизировать свою функцию энергии, вызывает колебания этой системы, постепенно затухающие вследствие демпфирования. Вблизи морсовского минимума эти колебания можно с большой точностью считать простыми гармоническими с амплитудой, пропорциональной квадратному корню из энергии возмущения и обратно пропорциональной (как и период) собственному значению гессиана Φ, отвечающему рассматриваемому собственному направлению. По мере того как гессиан приближается к вырождению в этом направлении, та же самая возмущающая сила ведет к более широким и медленным колебаниям, которые соответственно и дольше затухают. Аналогичные эффекты наблюдаются для электромагнитных полей в некоторых кристаллах при приближении к фазовому переходу; колебания, которые замедляются, называются тут *мягкими модами* и имеют свою большую и растущую литературу. (К числу этих эффектов относится, в частности, эффект уменьшения скорости света в кристалле.)

Мы не можем утверждать в буквальном смысле слова, что, скажем, вещество вблизи точки фазового перехода второго рода газ/жидкость совершает затухающие простые гармонические колебания. Но в общем картина очень похожая; при температуре, для которой, согласно наиболее точному уравнению состояния, различия между жидкостью и газом уже не существует, оно отходит от состояния минимума термодинамического потенциала на непренебрежимое „расстояние" и на непренебрежимые отрезки времени. Образуются маленькие капельки с большей плотностью (за счет пониженной плотности рядом — вещество сдвигается в обе стороны от поверхности на рис. 14.4). Они вновь исчезают — их состояние даже не равновесное, тем более не устойчивое; однако они образуются достаточно часто и плотно и выживают достаточно долго, чтобы повлиять на макроскопические свойства вещества. На фото 16 представлено явление *критической опалесценции* — рассеяние света на

ности, которая лежит над внутренностью острия (кривая $4a=-3\eta^2$ в этом архетипе). Как та, так и другая имеют квадратичное касание с осью η, а значит, то же верно и для любой кривой, зажатой между ними, независимо от того, аналитична она в 0 или нет.

Предположение Шульмана [135] допустить произвольные негладкие преобразования (с помощью которых показатели можно менять ad libitum [1]) вводит в теорию негладкие *потенциалы*. Это подрывает самую основу рассуждений с трансверсальностью, неважно, являются ли они неявными, как при обычном изложении теории Ландау, или явными и формализованными, как в теории катастроф. Мы дали объяснение того, почему некоторые явления типичны среди достаточно гладких функций. Что же касается *непрерывных* функций, то на пространствах таких функций существуют достаточно естественные и важные меры, позволяющие сказать, что „почти все" непрерывные функции *нигде* не дифференцируемы. Значит, почти все функции не имеют производных, не имеют разложений Тейлора и дело с самого начала не может сдвинуться. (Теории, использующей типичные гладкие потенциалы, определенные в пространстве подлинных физических переменных, связанных с очевидными переменными негладким, но *фиксированным* преобразованием — хорошо бы *выведенным* из чего-нибудь,— возможно, удалось бы отвести это выражение и предсказать какие-то определенные показатели. Но насколько нам известно, никто еще не построил такой теории.)

В любой физической теории центральным является вопрос о том, какие допускаются преобразования. Допущение, как это предлагает Шульман [135], новых преобразований (если только оно не производится с величайшей осторожностью в качестве эвристического приема, как в гл. 11) столь же запутывает дело, как и попытки рассмотреть их в недостаточном количестве (Белл и Лейвис [133]).

10 Роль флюктуаций

Вся проблема, как и ее решение, на самом деле не принадлежат топологии. Эта проблема по сути своей статистическая, и корень ее лежит в отождествлении наиболее вероятного состояния со средним состоянием. Для морсовских экстремумов такая аппроксимация часто дает великолепные результаты, как мы это видели на примере оптики. В непо-

[1] Сколько и как угодно *(лат.)— Прим. ред.*

средственной близости от вырожденных особенностей она уже перестает годиться. Свет на этот вопрос пролило точное решение мало-помалу увеличивающегося начиная с 40-х годов числа детализированных статистических моделей упорядоченного вещества (многие из которых служат вариациями на тему так называемой „модели Изинга"); полученные в этих моделях значения критических показателей согласуются с экспериментом, а не с теорией Ландау. Не входя в детали статистики микросостояний, давайте рассмотрим, что́ тут происходит с термодинамической точки зрения.

Как мы это обсуждали в § 16 гл. 13, возмущение системы, которая стремится минимизировать свою функцию энергии, вызывает колебания этой системы, постепенно затухающие вследствие демпфирования. Вблизи морсовского минимума эти колебания можно с большой точностью считать простыми гармоническими с амплитудой, пропорциональной квадратному корню из энергии возмущения и обратно пропорциональной (как и период) собственному значению гессиана Ф, отвечающему рассматриваемому собственному направлению. По мере того как гессиан приближается к вырождению в этом направлении, та же самая возмущающая сила ведет к более широким и медленным колебаниям, которые соответственно и дольше затухают. Аналогичные эффекты наблюдаются для электромагнитных полей в некоторых кристаллах при приближении к фазовому переходу; колебания, которые замедляются, называются тут *мягкими модами* и имеют свою большую и растущую литературу. (К числу этих эффектов относится, в частности, эффект уменьшения скорости света в кристалле.)

Мы не можем утверждать в буквальном смысле слова, что, скажем, вещество вблизи точки фазового перехода второго рода газ/жидкость совершает затухающие простые гармонические колебания. Но в общем картина очень похожая; при температуре, для которой, согласно наиболее точному уравнению состояния, различия между жидкостью и газом уже не существует, оно отходит от состояния минимума термодинамического потенциала на непренебрежимое „расстояние" и на непренебрежимые отрезки времени. Образуются маленькие капельки с большей плотностью (за счет пониженной плотности рядом — вещество сдвигается в обе стороны от поверхности на рис. 14.4). Они вновь исчезают — их состояние даже не равновесное, тем более не устойчивое; однако они образуются достаточно часто и плотно и выживают достаточно долго, чтобы повлиять на макроскопические свойства вещества. На фото 16 представлено явление *критической опалесценции* — рассеяние света на

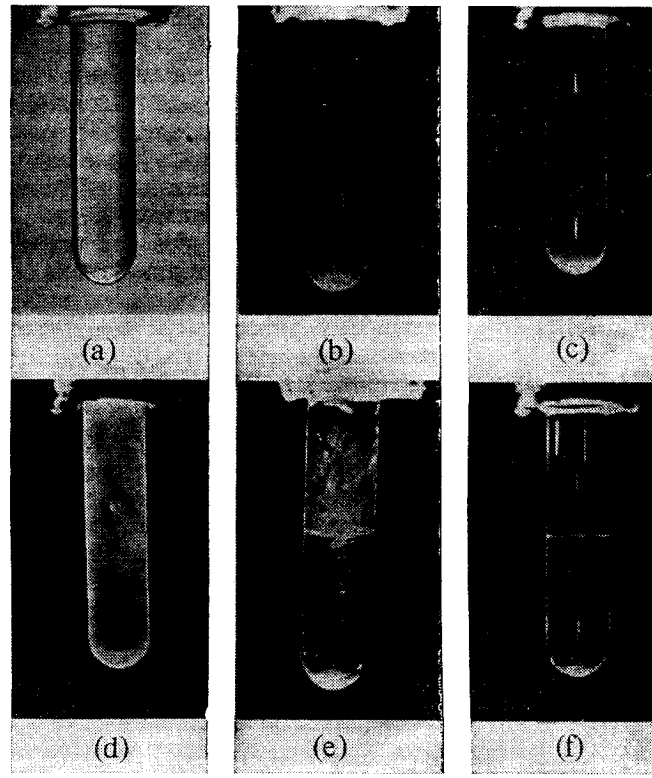


Фото 16. *Критическая опалесценция; доказательство наличия флюктуаций вблизи критической точки (из Стэнли [135a]; по Феррелу [225]).* (a) *T много больше* T_c; (b) *T немного больше* T_c; (c) *T примерно равно* T_c; (d) *T немного меньше* T_c; (e) *T меньше* T_c; (f) *T много меньше* T_c. *Жидкость — циклогексанилиновая смесь.*

мельчайших капельках тумана, неоднородностях в жидкости, которые были бы невозможны при строгой термодинамической экстремизации.

Четкие поверхности типа изображенной на рис. 14.10 должны, следовательно, уступить место картинкам типа рис. 14.11 с вероятностным облачком вблизи точки фазового перехода второго рода. В этой области *флюктуации* состояния вещества следует принимать во внимание в полной мере. (Стандартная теория Ландау тоже занимается флюк-

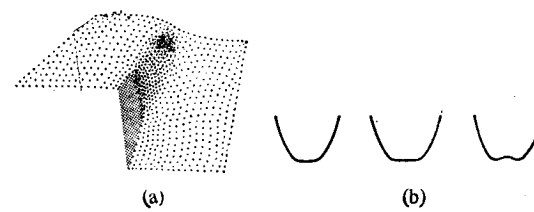


Рис. 14.11. *Все близкие к* x^4 *потенциалы вида* x^4+ax^4+bx *для действительно малых a и b выглядят, как кривые, показанные в части* (b), *и обладают „полом", по которому „растекается" система, статистически минимизирующая потенциал.*

туациями,— в самом деле, ν, один из доставляющих массу хлопот „классических критических показателей", имеет дело как раз с вариациями их величины при приближении к критической точке,— но лишь *после* того, как „наивероятнейшее" отождествлено со „средним". Чтобы составить представление о том, какая дикая мешанина аппроксимаций de façon franchement schizophrénique [1] используется в классических вычислениях, связанных с флюктуациями, можно посмотреть книгу Тулуза и Пфёти [136], стр. 48.)

11 Пространственные вариации

Посмотрев на рис. 14.11 и на расплывание кривой классических „точек скачка", естественно спросить, каким образом показатели вообще могут быть определены — а не то что аккуратно измерены и найдены лежащими ближе к 1/3, чем к 1/2. Ответ в том, что в этой области измеряют не скачки, а *корреляции*. В однофазной области более высокая плотность в одной точке ничего не говорит вам, даже в вероятностном смысле, о плотности (или что бы там η ни измеряло) в другой точке на некотором расстоянии от нее. В области же, где классически существуют две фазы, наибольшие мгновенные значения η в отдельных точках коррелированны, даже если средние по времени удалены от обеих поверхностей, поскольку вещество флюктуирует между ними. Поддается измерению тот факт, что отдельные части вещества флюктуируют до известной степени „в ногу". В точности так же мы рассматривали в § 10 гл. 11 измерение корреляции пространственного расположения растворенных полимерных молекул с помощью эффекта двулучепреломления; сами эти расположения сложны, разнообразны, изменчивы, и их гораздо труднее измерить. Аналогичные измерения выполняются и при определении критических показателей.

Итак, поскольку пространственные вариации непосредственно играют столь существенную роль в явлении, для описания которого служат критические показатели, модель, предсказывающая значения последних, не может ограничиваться одними однородными величинами, такими как плотность, давление, намагничение. Но точные статистические модели непросто строить (особенно для жидкостей; для кристаллов дело обстоит проще — достаточно хорошие приближения можно получать, рассматривая переменные, определенные лишь в узлах некоторой решетки) и еще слож-

[1] На явно шизофренический манер *(франц.)— Прим. ред.*

нее исследовать. Множество моделей, для которых найдены точные решения, пока еще очень далеко от богатого ассортимента фазовых переходов, активно изучаемых в физике и технике. Необходим „полумакроскопический" вариант термодинамики, который хотя и не идет вглубь до самого статистического ансамбля микросостояний, но все же может учесть пространственные вариации. Как в случае теории Ландау, так и при более тонких подходах используют метод, заключающийся в том, что одно-единственное число или вектор (скажем, плотность или намагничение) заменяют гладко меняющейся в пространстве величиной. (Многое из того, что мы сказали в § 1 гл. 11 о моделировании и масштабах, применимо и здесь. Места для повторения всего этого у нас нет, но читатель может считать, что повторение состоялось и с подчеркиванием.) Это приводит нас к бесконечномерным пространствам функций и вовлекает в тяготы функционального анализа. Чтобы быть точными: нужно аккуратно определить соответствующее функциональное пространство и его топологию (возможно, стоит использовать замечательные типы пространств, обсуждавшиеся в § 7 предыдущей главы), однако в этом аспекте, насколько мы знаем, проблема еще не рассматривалась. Поэтому мы пойдем по пути, проложенному много лет назад Дираком, и допустим, что бесконечномерное пространство — это то же самое, что и конечномерное, только не совсем.

12 Статистические суммы

Соответственно тому как наш общий параметр из §§ 3—7 обитал в конечномерном пространстве, скажем в $E=\mathbb{R}^n$, мы теперь имеем пространство Ω функций $M=(M_1, \ldots, M_n)$, отображающих множество X пространственных положений в нашем куске вещества в E. Обобщенный термодинамический потенциал представляет собой функцию $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, и минимизация Φ отвечает максимизации плотности вероятности на Ω, задаваемой с точностью до нормирующей константы функцией (называемой „статистической суммой")

$$M \longmapsto e^{-\Phi(M)}$$

(см. замечание в скобках в конце § 4). Но теперь нас интересует не *самое вероятное* M, а *среднее* M:

$$\overline{M} = \int_{\Omega} M e^{-\Phi(M)},$$

и аналогичные интегралы, дающие среднюю корреляцию и т. д. Заметим, что $\overline{M}$ представляет собой точку из Ω, т. е.

функцию $X \to E$, и может быть более явным образом записано как

$$\overline{M}(x) = \int_{\Omega} M(x)\, e^{-\Phi(M)}.$$

В тех случаях, когда Φ выводится из некоторой *квантово-статистической микромодели*, мы можем рассматривать такой интеграл как описывающий своего рода *суперпозицию* полуклассических состояний, в духе формулы (12.4), хотя, поскольку мы обсуждаем не колебания, а флюктуации, существенно квантовомеханическая способность к интерференции различных состояний вещества здесь „отфильтрована". (Интересно было бы поразмышлять о возможности „объединенного" асимптотического анализа, в котором фазовые переходы трактуются как каустики „волн вещества", из которых всё состоит.) Но какого же вида должно быть Φ? От этого, а также от того, как Φ меняется с температурой, давлением, внешним магнитным полем и т. д., зависят все представляющие физический интерес величины.

Дело значительно упрощается, если предположить, что $\overline{M}(x)$ и прочие родственные величины могут быть получены интегрированием не по всему X, а лишь по некоторой окрестности точки x; другими словами, что взаимодействия между различными точками *локальны* (являются *близкодействующими*). Таким образом, мы предполагаем, что для малой окрестности U точки $x \in X$

$$\overline{M}(x) = \int_{\Omega} M(x)\, e^{-\Phi_U(M|U)}.$$

(Мы должны ввести новый функционал Φ_U, поскольку исходный, Φ, определен лишь на функциях, областью определения которых служит всё X.) Но все функции M, за исключением принадлежащих множеству бесконечной коразмерности (§ 7 гл. 8), k-определенны в x, каждая при своем k. Фактически тщательный анализ с точки зрения теории меры тех утверждений теории особенностей, где фигурируют слова „почти все", дал бы конечную верхнюю границу, скажем K, для числа определенности в x функций, вносящих вклад в интеграл [1]. Поэтому с точностью до диффеоморфизма ок-

[1] Конечно, если M постоянна на X, то она нигде не будет конечно-определенной, так что для этого рассуждения *существенно* наличие флюктуаций, из-за которых стало необходимым и всё обсуждение.

рестности U, если эта окрестность достаточно мала, то Φ_U зависит лишь от K-струи

$$j^K_x M = j^K M(x)$$

в x, а пространство таких струй конечномерно. Мы можем, следовательно, положить

$$\overline{M}(x) = \int\limits_{E^K_d} M(x)\, e^{-\varphi(j^K_x M)},$$

где d — размерность (физического) пространства, в обозначениях гл. 8. Так как „почти все" функции M морсовские, наверное, можно взять $K=2$. Фактически в большинстве физических вычислений берут $K=1$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы построить тейлоровское разложение для φ и применить соответствующие результаты о трансверсальности и определенности, как мы это делали для глобальных термодинамических потенциалов в § 7. (Здесь нужны результаты несколько более тонкие, чем приведенные в гл. 8, так как использование соображений определенности для φ требует локальных диффеоморфизмов пространства E^K_d, которые должны быть индуцированы локальными диффеоморфизмами X. От последних, таким образом, требуется, чтобы они *одновременно* подправляли M вблизи x и φ вблизи $j^K_x M$. Доказательство в духе теоремы Тома об изотопии должно бы работать и здесь, но сослаться на какой-нибудь опубликованный результат пока как будто нельзя.) Фактически в большинстве физических изложений берут

$$\varphi(j^1_x M) = F(M(x)) + K \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial M}{\partial x_j}\right)^2,$$

где F — некоторая полиномиальная функция от $M(x)$, вообще говоря зависящая от параметров (конкретных вроде P, T, H из §§ 1 и 2 или же абстрактных вроде A, B, C из теории Ландау, § 7). Определенность, трансверсальность и пр. здесь очевидны, если они имеются для F, и точно так же физические рассуждения из § 7 (с неформальным использованием трансверсальности и неявным использованием конечной определенности) могут быть применены и применяются к F.

13 Группа перенормировок

После того как найдено то, что надо интегрировать, какой следующий шаг? Применяется тот же прием, что и в гл. 12,— изучение асимптотического поведения. Там метод состоял в рассмотрении все более коротких длин волн, так что колебания в пределе становились ненаблюдаемыми; здесь он состоит в том, чтобы брать все бóльшую единицу длины (так что *каждому данному* расстоянию приписываются всё меньшие числа), с соответствующим влиянием на флюктуации. В обоих случаях цель не столько в том, чтобы *найти* предел, сколько в том, чтобы изучить характер приближения к нему; отступая от него немного назад, мы получаем подтверждаемую экспериментально картину того, что „действительно происходит". Метод изменения масштаба, используемый здесь, известен как метод *ренормализационной группы*, или *группы перенормировок*. Термин „перенормировка" пришел из квантовой теории поля, где перенормировки были впервые применены для решения куда более волнующих проблем, чем получение показателя 1/3 вместо 1/2,— таких как предсказываемая теорией бесконечности масса покоя (вроде бесконечных интенсивностей в геометрической оптике). Появление слова „группа" объясняется тем фактом, что операции по изменению масштаба, вообще говоря, образуют полугруппу. (Для гладких моделей, описанных выше, они действительно образуют группу, но применительно к детализованной статистической модели замена масштаба сопряжена с „забыванием" некоторых тонких подробностей, которые не восстанавливаются при обратной замене.) Аналогичный язык используется в квантовой теории поля.

Мы не можем входить в технические тонкости теории группы перенормировок, которые подчас неожиданны (например, размерность пространства становится непрерывной переменной, меняющейся от -2 до ∞). Очевидно, было бы желательно доказать, что асимптотическое поведение указанных интегралов инвариантно относительно диффеоморфизмов описанного выше типа, или хотя бы доказать инвариантность таких предсказываемых теорией величин, как критические показатели. (Если они не инвариантны, то этот факт сам по себе интересен и довольно удивителен.)

В целом намеченная тут программа, пожалуй, труднее, чем аналогичная теория, представленная в гл. 12, которая является плодом нескольких лет работы квалифицированных специалистов — математиков и физиков в области, где диалекты этих двух племен ближе друг к другу, чем обычно. Если предыдущее обсуждение удалось нам хотя бы настоль-

ко, чтобы быть скорее верным, чем неверным, в отношении физики и математической формулировки подхода с трансверсальностью,— и то это больше удача, чем свидетельство широты наших познаний. Но мы совершенно уверены, что главное утверждение, состоящее в том, что соображения теории катастроф неявным образом, но неотделимо замешаны во всех теориях фазового перехода, верно. (Даже аналитические решения для точных моделей, чтобы они представляли физический интерес, должны обладать некоторой устойчивостью относительно малых изменений характера взаимодействия по сравнению с предположенным.) Дело лишь выиграет, если их использование станет явным и точным.

По аналогии с анализом того, насколько близко в каустике можно без опасений применять геометрическую оптику, для фазовых переходов имеется *критерий Гинзбурга* (см. Тулуз и Пфёти [136]), говорящий, насколько близко к фазовому переходу применима теория Ландау, и дающий *критическую область*, где она неприменима. Довольно удивительно, что для размерностей бóльших четырех эта область исчезает, так что теория Ландау становится точной, по крайней мере в отношении критических показателей, для семейства термодинамических потенциалов типа сборки. Для катастрофы бабочки, или *трикритической точки*, критическая размерность равна 3. Наше физическое пространство, таким образом, оказывается в этом случае на пороге применимости. Критические размерности для высших катастроф (сюда имеют отношение лишь те из них, для которых функции из рассматриваемой деформации обладают строгим минимумом), по-видимому, еще не подсчитывались.

14 Структурная устойчивость ренормализации

Интересно, что анализ исчезновения упомянутой выше критической области приводит к семейству дифференциальных уравнений, которое *не* является структурно устойчивым (в смысле Андронова — Понтрягина). Мы не рассматривали общих динамических систем, но мы можем сейчас последовать за Тулузом и Пфёти [136] и обсудить в описательных терминах следующую систему:

$$\frac{dr_0}{dl} = 2r_0 + bu_0(1 - r_0),$$

$$\frac{du_0}{dl} = (4 - d)u_0 - cu_0^2.$$

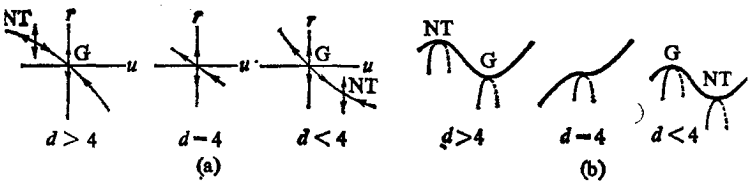


Рис. 14.12. (a) *„Обмен устойчивостью" между гауссовской неподвижной точкой* (G) *и нетривиальной неподвижной точкой* (NT). *При $d>4$ гауссовская неподвижная точка более устойчива, чем нетривиальная. При $d=4$ обе точки совпадают. При $d<4$ более устойчива нетривиальная неподвижная точка.* (b) *Изображение „в профиль" обмена устойчивостью, представленного в части* (a) *рисунка. По Тулузу и Пфёти* [136].

Эти уравнения управляют эволюцией физических параметров r_0 и u_0 при изменении масштаба (d — размерность, b и c — положительные константы). Соответствующие векторные поля (для различных d) не будут градиентами никаких функций, но специалист по динамическим системам сразу преобразует их в градиентные. На рис. 14.12 (взятом из книги Тулуза и Пфёти [136], стр. 128—129) показаны эти градиентные поля и функции, градиентами которых они являются; случай, когда „гауссова неподвижная точка" более устойчива, отвечает пригодности теории Ландау критических показателей. Связи между седлами на рис. 14.12 (a) (неустойчивые, как мы видели в § 5 гл. 11) в действительности незаконные и не отвечают данным уравнениям. Упомянутая структурная неустойчивость — это неустойчивость однопараметрического семейства, топологически соответствующего (как можно понять из рис. 14.12 (b)) градиентам семейства

$$x^3+(4-d)x^2-y^2.$$

Если оставить в стороне не зависящую от d морсовскую часть в y-направлении, то это — в точности то же самое нетрансверсальное семейство, которое мы изучали в § 6 гл. 8. Добавление малого члена εx к этому семейству (или малой константы ε ко второму из исходных уравнений) полностью устранит бифуркацию при $\varepsilon<0$ и создаст две отдельные катастрофы складки при $\varepsilon>0$. На рис. 14.13 представлена эволюция неподвижных точек при изменении d для различных ε; координата r_0 не показана.

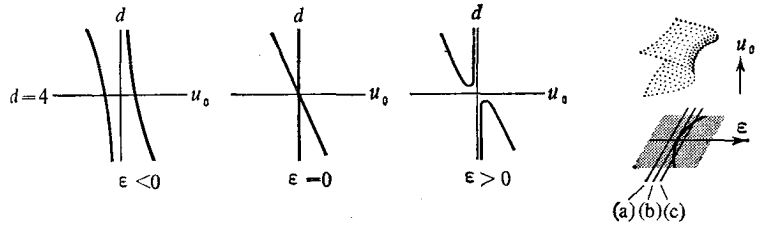


Рис. 14.13

Нам не удалось выяснить, имеются ли физические причины для постоянного появления неподвижной точки в начале (*при этом условии* семейство становится структурно устойчивым). Если добавление возмущающего члена εx, изменяющего картину в сторону рис. 14.13(a) и (c), не может быть физически исключено, эти результаты представляли бы физический интерес. Если нет, то все равно очевидно, какую важную роль теория бифуркаций векторных полей (старшая сестра теории катастроф) может сыграть в изучении математических явлений, возникающих в этой области физики, и помимо тех аспектов, которые обсуждались выше.

РОЛЬ СИММЕТРИИ

15 Четные функции

Рассмотрим для модели Вейсса, описанной в § 2, поведение кристалла в отсутствие внешнего поля, т. е. при $H=0$. (Это, конечно, атипично „на улице", но часто годится в качестве первого приближения. В лаборатории это условие можно обеспечить с большой точностью.) В координатах, существование которых гарантируется теоремами гл. 8, уравнение состояния принимает вид

$$x^3+ax=0.$$

Аналогичным образом термодинамический потенциал можно привести к виду

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2$$

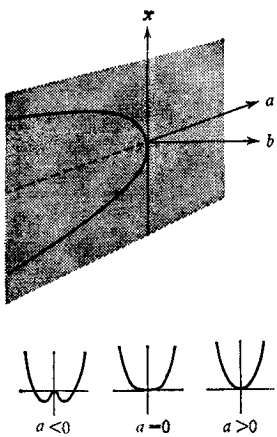
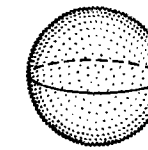


Рис. 14.14

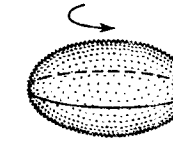
(хотя и не каждое преобразование, осуществляющее первое приведение, осуществляет второе, как мы это видели на примере уравнения ван дер Ваальса). Отвечающее $b=0$ сечение картины катастрофы (рис. 14.6), а также некоторые потенциалы показаны на рис. 14.14.

Деформация $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2$ нетрансверсальна, неустойчива и атипична. Однако *среди четных функций от* x, т. е. тех, для которых $f(x)=f(-x)$, это единственное устойчивое однопараметрическое семейство вблизи $x=0$, как обычно, с точностью до диффеоморфизмов (также симметричных относительно отображения $x\mapsto -x$). Поскольку для этой симметрии можно найти серьезные физические основания, имеющие ту же силу (в отсутствие внешнего поля), как и остальная часть нашего математического моделирования, это семейство представляет собой „универсальную модель" для

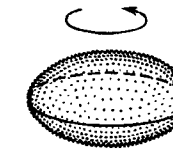
локальной формы однопараметрических семейств в данном контексте. Всё изложение §§ 3—14 можно снова повторить для этого случая.



(a)



(b)



(c)

Рис. 14.15

16 Формы вращающихся звезд

Интересный пример такой „четной" бифуркации возникает в геометрии звезд (в данном случае ньютоновых, но, повидимому, можно указать и релятивистские аналоги). Невращающаяся жидкая звезда по очевидным причинам имеет форму шара (рис. 14.15(a)). Медленное вращение превращает ее в эллипсоид вращения (показанный утрированно на рис. 14.15(b)). Более быстрое вращение дает эллипсоид общего вида (рис. 14.15(c)). Мы можем описать эти формы при помощи *меридионального эксцентриситета* e и *экваториального эксцентриситета* η. По модулю обычной термодинамической путаницы, что есть функция от чего, Бертэн и Радикати [137] следующим образом записывают полную энергию звезды:

$$E(e,\ \eta) = \text{гравитационная энергия} + \text{энергия вращения}$$
$$= W_0 \frac{(1-e^2)^{1/2}(1-\eta^2)^{1/6}}{e} \int_0^{\arcsin e} \times \left(1 - \frac{\eta^2}{e^2}\sin x\right)^{-1/2} dx + K_0 \frac{2(1-e^2)^{1/3}(1-\eta^2)^{1/3}}{2-\eta^2}$$

с точностью до „сдвигающего члена", не зависящего от формы; здесь W_0 и K_0 — некоторые величины, вобравшие в себя константы (см. приложение из их статьи). Принимая e за внешний параметр (можно было бы сделать и другой выбор, скажем взять момент количества движения) и производя разложение по η вблизи нуля, получаем

$$J^5 E(e,\ \eta) = \eta^2 \left[\frac{W_0(1-e^2)^{1/3}}{e}\left\{-\frac{\arcsin e}{6} + \frac{1-(1-e^2)^{1/2}}{2e^2}\right\} + \frac{K_0}{6}(1-e^2)^{1/3}\right]$$
$$+ \eta^4 \left[W_0 \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}\left\{-\frac{5\arcsin e}{72} - \frac{1-(1-e^2)^{1/2}}{12e^2} + \frac{3}{16e^4}\left(\arcsin e - e(1-e^2)^{1/2}\right)\right\} - K_0\frac{(1-e^2)^{1/3}}{36}\right]$$
$$= t_2(e)\,\eta^2 + t_4(e)\,\eta^4.$$

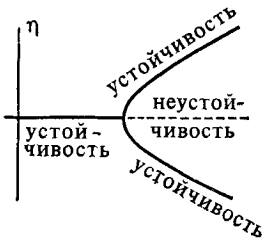


Рис. 14.16

(Мы считаем здесь, что $e>0$.) При первой бифуркации t_2 трансверсально проходит через нуль, когда e проходит некоторое критическое значение e_c с $t_4(e_c)>0$; поэтому, согласно „симметризованному" варианту гл. 8, это семейство сильно эквивалентно вблизи $(e_c, 0)$ семейству

$$(t_4(e_c))\,\eta^4+\left((e-e_c)\frac{dt_2}{de}\Big|_{e_c}\right)\eta^2,$$

или, после сдвига начала и изменения масштаба, семейству

$$x^4+ax^2.$$

Итак, мы получаем для равновесных форм рис. 14.16, диффеоморфный стандартному рис. 14.14.

Поскольку эта система макроскопична (даже в большей степени, чем машина Зимана!), роль флюктуаций должна быть для нее гораздо меньше, чем для обсуждавшихся выше фазовых переходов; поэтому допущение, что система просто минимизирует энергию, должно служить хорошей аппроксимацией при изучении „статики" вращающейся звезды. Однако динамика звезды будет более, чем обычно, осложнена вблизи точки бифуркации, ибо звезда приобретает η в качестве „мягкой моды" колебаний с бесконечным периодом в линеаризованном подходе. (В действительности чем шире колебания, тем в большей степени члены высших порядков укорачивают период.) Могут ли эффекты столь легко возникающего расшатывания проявляться на астрономических расстояниях — это вопрос, достойный рассмотрения; если да, то, по-видимому, имеется достаточно данных, чтобы выбрать кандидатов для изучения среди близких звезд.

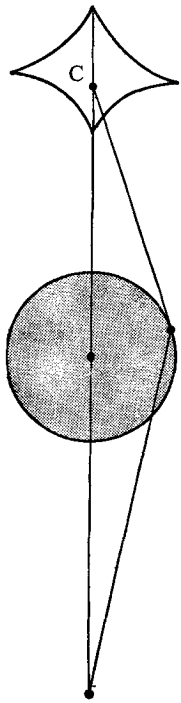


Рис. 14.17. *Колёсико машины Зимана при симметричном расположении конца резинки в точке* C *находится в асимметричном положении равновесия (влево или вправо).*

17 Нарушения симметрии

Заметим, что хотя наши потенциалы всегда имеют определенную симметрию, отдельные решения при $a<0$ задачи минимизации не обязаны ее сохранять. Таким образом, система, могущая пребывать в том или другом состоянии минимума (рис. 14.17), „нарушает" симметрию. (В случае когда становятся важными флюктуации, так что система не пребывает в состоянии минимума, соответствующее утверждение усложняется.) Однако симметрия не теряется в задаче минимизации — *множество* минимумов все еще обладает ею. Мы можем сказать, что симметрия задачи „раздробилась" в симметрию множества решений, обладающих ею лишь коллективно (подобно Национальному парку), а не

индивидуально (подобно Королевскому парку Нью-Форест). Это часто называют „спонтанным нарушением симметрии", но нам представляется полезным сохранить термин „нарушение" для тех членов, которые полностью устраняют симметрию, таких, как например, магнитное поле (в модели Вейсса) или смещение в сторону от оси (в машине Зимана). Такие члены мы будем называть *членами, нарушающими симметрию.*

Мы предполагали повсюду в этой главе, что на область допустимых состояний не налагается никаких ограничений (типа $\eta \geqslant$ некоторой константы). Если бы в машине Зимана из гл. 1 (рис. 1.1) имелся ограничитель, не дающий B подниматься выше, чем O, то поведение машины стало бы совсем иным! Такие ограничения могут возникать в задачах с термодинамическими потенциалами, и это приводит к *катастрофам с ограничениями*, которыми мы займемся в § 7 гл. 16. В примере из лазерной физики, упоминаемом в конце этого параграфа, имеется линия „фазовых переходов второго рода" (типа показанной на рис. 16.9 (c)), в точках которой обращаются в нуль лишь первые, но не вторые и не третьи производные. Условия на более высокие производные для струи, подвергаемой деформации, заменяются условием „расположения на границе". Существование границы математически более устойчиво, чем наличие симметрии; оно не может быть разрушено малыми возмущениями. Однако у Томпсона [137a] при *получении* формулировки соответствующей задачи теории катастроф с ограничениями *используется* замена переменных, существующая лишь в силу предположенной круговой симметрии, что делает исходную задачу вырожденной, если только эта симметрия не точна. (Как и в § 13 предыдущей главы, допущения, принятые с целью упростить суммы, усложняют задачу!) Если к гамильтониану, имеющему лишь конечные симметрии рассматриваемой решетки, добавляются члены высшего порядка, то возникает проблема конечной определенности; всё что пока можно сказать,— это что омбилические катастрофы, связанные с действием разбивающих симметрию членов, приводят к очень запутанной картине поведения, которая лишь в общих чертах близка к тому, что описывается моделью Томпсона.

Всё же круговая симметрия *может* реально с прекрасной точностью поддерживаться физикой явления. Звёзды из предыдущего параграфа обладают ею в пространстве перед бифуркацией; и даже затем они обладают симметрией, которая поворачивает их на 180°, с опережением на полпериода, и которая оказывается вполне устойчивой по физи-

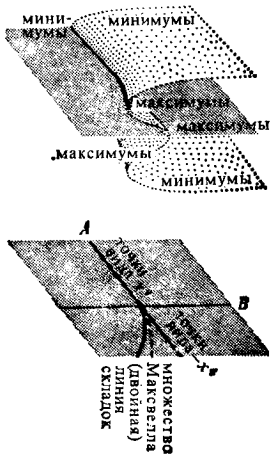


Рис. 14.18.

ческим причинам, обеспечивая в свою очередь устойчивость четной бифуркации (η и $-\eta$ — это два варианта одной и той же формы, различающиеся лишь поворотом).

18 Трикритические точки

Среди четных потенциалов (трактуемых в рамках теории Ландау или какой-либо более глубокой теории) точки типа η^4 имеют коразмерность 1, так что, скажем, в (P, T)-плоскости мы ожидаем увидеть и действительно видим целые кривые, состоящие из точек фазового перехода второго рода (в точности также как в асимметричном случае два управляющих параметра дали кривые, состоящие из точек складки типа η^3, и изолированные точки сборки типа η^4). Аналогичным образом в изолированных точках (P, T)-плоскости мы можем ожидать потенциалы, приводимые к виду η^6. Подходящие координатные замены (существующие, как и раньше, в силу тех же условий трансверсальности, благодаря которым эти точки изолированны) превращают семейство вблизи таких точек в

$$\eta^6 + A\eta^4 + B\eta^2.$$

Геометрия множества критических точек показана на рис. 14.18. (Заметим, что „множество Максвелла" точек скачка в теории Ландау имеет лишь параболическое касание с линией точек фазового перехода второго рода, а не продолжает ее гладко, как иногда рисуют.)

Что же добавляют к этому члены, нарушающие симметрию? Например, если, как в модели Вейсса, η обозначает намагничение, каков будет эффект внешнего поля H? Обычно применяемый подход состоит в добавлении строго линейного по H и по η члена, скажем $hH\eta$, где h — константа; для уравнения состояния из 2 это означает добавление члена $-\mu_B H/\varkappa T_c$. Это может оказаться верным физически в какой-либо точной теории, но математически это ошибочно в отношении соображений трансверсальности, фундаментальных для теории Ландау и во многом для методов ренормализационной группы. Действительно, допустим, что потенциал по η зависит от A, B, H *в точности* следующим образом:

$$\Phi(\eta, A, B, H) = \varphi(\eta, A, B) + hH\eta,$$

где φ локально приводится к виду $x^6 + ax^4 + bx^2$ с помощью преобразования

$$(\eta, A, B) \mapsto x(\eta, A, B),$$
$$(A, B) \mapsto (a(A, B), b(A, B)).$$

Как уже отмечалось, эта ситуация типична. Далее, благодаря сильной 6-определенности мы можем потребовать, чтобы

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}(0,\ 0,\ 0)=1,$$

так что x и η совпадают с точностью до первого порядка. Разлагая η по x (при $A=B=0$), мы получим

$$\eta=x+\lambda x^2+\ldots$$

для некоторого λ. Если желать, чтобы λ обратилось в нуль, т. е. чтобы x и η совпадали с точностью до третьего порядка, то нам пришлось бы удержать в тейлоровском разложении φ по η члены восьмого порядка. (Чтобы увидеть причины этого, нужно повторить рассуждения определенности из гл. 8 для этой „ультрасильной определенности", т. е. с новым более сильным условием на замены координат.) Теперь же мы можем ограничиться шестым порядком, как обычно и делают, правда ценой того, что простейшая алгебраическая форма для φ дается в виде

$$x^6+ax^4+bx^2+hH\,(x+\lambda x^3+\ldots),$$

где λ, вообще говоря, не равно нулю. Применение теорем о деформации показывает, что эта форма эквивалентна

$$x^6+ax^4+bx^2+hH\,(x+\lambda x^3),$$

но не обязательно

$$x^6+ax^4+bx^2+hHx$$

— совсем другому сечению катастрофы бабочки. (Этот результат отличается от результата для деформации x^4, к которой x^3 „касательно" в смысле, обсуждавшемся в § 6 гл. 8.) Линейность в исходных координатах, даже если она имеет под собой серьезные физические основания, *не* гарантирует линейности после замены координат, обеспечивающей отбрасывание членов порядка выше 6 по η.

Это частное исправление вида подходящего „общего члена деформации" не меняет тех критических показателей теории Ландау, которые мы до сих пор подсчитали (правда, этого нельзя сказать про все критические показатели, и мы пока еще не приступали к соответствующим вычислениям в методе ренормализационной группы). Но оно иллюстрирует деликатность тех вопросов, которые возникают у края „некритической области", где физическая интуиция перестает быть надежным советчиком в отношении определенности и трансверсальности.

19 Симметрии кристаллов

Дело существенно усложняется, когда η становится многомерным, а симметрии — менее простыми. Важен случай, когда η трехмерно, а рассматриваемая симметрия есть симметрия кристалла. Для функций n переменных, инвариантных относительно действия конечной группы (например, какой-нибудь из 32 кристаллографических точечных групп) или компактной группы, результаты гл. 8 остаются в основном теми же самыми. Их, однако, уже нельзя выразить на нашем „подсокращенном" языке, и тут мы можем лишь отослать читателя к строгим математическим изложениям, а именно к работам Бирстоуна [138], Филда [78] Поэнару [79—81], Ронга [139] и к прекрасно приспособленному для приложений изложению Вассермана [81a]. Частный случай кристаллографических групп разбирается с соответствующей физической интерпретацией математики в работе Эшера, Гея и Постона [140].

Пусть, например, рассматриваемые функции от вектора $\eta=(x, y, z)$ удовлетворяют условию

$$f(-x, y, z)=f(x, y, z)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y, z\right)$$

(симметрия относительно группы $3m$ в обозначениях по международной кристаллографической системе, или системе Германна — Могена). Тогда типичное двухпараметрическое семейство таких функций будет состоять лишь из функций, приводимых вблизи начала к одной из форм:

$$\begin{aligned}
&z,\\
&\pm(x^2+y^2)\pm z^2,\\
&\pm(x^2+y^2)+z^3,\\
&\pm(x^2+y^2)\pm z^4,\\
&(3x^2y-y^3)\pm z^2,\\
&\pm(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)\pm z^2 \qquad (\alpha\neq 0),\\
&(3x^2y-y^3)+(x^2+y^2)z+\beta z^3 \qquad \left(\beta\neq 0, \frac{9}{2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь α и β — инвариантные относительно диффеоморфизмов константы типа двойного отношения, встречающегося в высших размерностях в асимметричном случае (§ 6 гл. 7). Первые две формы устойчивы, и с ними не связано никаких бифуркаций. Третья и четвертая дают обычные катастрофы складки и сборки с z в качестве существенной переменной. Остальные имеют следующие универсальные деформации

(в пределах класса симметричных относительно указанной группы функций):

$$(3x^2y - y^3) \pm z^2 + t_1(x^2 + y^2),$$
$$\pm(x^2 + y^2)^2 + \alpha(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) + [t_3(x^2 + y^2)^2] + t_2(3x^2y - y^3) + t_1(x^2 + y^2),$$
$$(3x^2y - y^3) + (x^2 + y^2)z + \beta z^3 + [t_3 z^3] + t_2 z^2 + t_1 z.$$

(Члены в квадратных скобках оказывают влияние лишь на дифференциальные инварианты α или β, но не на топологию деформации.)

20 Особенности спектров

Не все из выписанных выше многочленов могут служить термодинамическими потенциалами (из-за отсутствия абсолютного минимума), но они могут быть важны в других интересных для физики вопросах. Например, в тех точках, где дисперсионные соотношения, описывающие механические или электромагнитные колебания в кристалле, приводят к особенностям в соответствующем спектре, последний можно рассматривать локально как график некоторой функции, отображающей волновые векторы в значения энергии. (Геометрическое изложение вопроса имеется в статье Постона и Бадгора [141]; правда, аспекты теории катастроф там не выявляются.) Эта функция наследует симметрии кристалла без всяких требований „строгого минимума", и ее бифуркация при изменении внешних параметров — приводимая в типичном случае к одной из указанных выше форм — вызывает соответствующую бифуркацию структуры особенностей спектра.

Резюмируем: все эти утверждения о „типичности" не означают, что невозможно или нефизично, чтобы произошло что-нибудь еще. Они означают, что если случается что-то еще, то это *требует специального исследования и обоснования*, как потребовало бы их, например, открытие трикритической точки при управлении лишь одной переменной (скажем, температурой), будь то в теории Ландау или в рамках какого-нибудь тонкого метода. Используемые при этом теоремы формализуют и углубляют традиционные рассуждения физиков. Как сказал в своей Королевской лекции в 1918 г. Эддингтон: „В двух измерениях любые две линии почти обязательно раньше или позже пересекаются, но в трех измерениях, а тем более в четырех две линии могут пройти и, как правило, проходят мимо друг друга, и наблюдение, состоящее в том, что такие линии встретились,— реальная прибавка к нашему знанию".

15 ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Эта глава целиком основана на работе Боба Гилмора (Тампа, Флорида) и Лоренцо Нардуччи (Дрексель), и мы чрезвычайно признательны им не только за предоставленную нам возможность свободно пользоваться их результатами, но также и за набросок, содержащий эти результаты и все вычисления, который составил для нас Гилмор. Отклонения от этого наброска объясняются лишь желанием добиться согласованности с остальным содержанием книги.

Работа возникла из переписки между одним из нас и Гилмором относительно теории катастроф вообще и между Гилмором и Нардуччи — относительно рассмотрения недавних экспериментальных результатов в ясной теоретической перспективе. В этой работе существенно использовалась теория катастроф, как для объяснения геометрии, управляющей действием лазера, так и для получения новой количественной информации.

Отождествление лазера с катастрофой не просто формализм. Физическое состояние лазера вполне определяется некоторым оператором, а именно оператором плотности. Мы находим, что оператор плотности для лазера распадается на две части — геометрическую и физическую. Геометрическая часть есть оператор и вполне определяется некоторой точкой на ассоциированном многообразии сборки. Физическая часть есть число, которое измеряет шум. Следовательно, все физические измерения лазера могут быть выражены с помощью катастрофы сборки и еще одного физического параметра. Согласие между теорией и экспериментом (см. рис. 15.8) заставляет думать, что дальнейшие улучшения в теории понадобятся (или смогут быть проверены) лишь при радикальном усовершенствовании эксперимента.

Эта глава состоит из четырех частей с эпилогом. В первой части приведены сведения из элементарной квантовой механики, достаточные, чтобы обеспечить язык описания невозможного в классическом смысле лазера. Стандартные правила для вычислений на этом языке потребовали бы примерно стольких же объяснений, как вычисления в гл. 8, но для

этого у нас здесь нет места. Читатель, незнакомый с этим языком, может пропустить вычисления, но мы их все же включили в достаточно подробном виде, так как они много проще всего, на что мы могли бы сослаться в литературе.

Во второй и третьей частях содержится вывод „лазерных уравнений" и описание нескольких экспериментов, которые проводились с лазером. В четвертой части лазерные уравнения движения изучены при совершенно другом наборе граничных условий. Мы приходим к неожиданному результату, что имеется взаимно-однозначное соответствие между этими двумя совсем разными физическими системами и что это соответствие устанавливается с помощью многообразия катастрофы, которое их обоих представляет. В эпилоге обсуждаются возможные пути эксплуатации таких соответствий в будущих исследованиях в области критических физических систем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1 Атомы

Структура энергетических уровней атомов или молекул в лазере, как правило, очень сложна (рис. 15.1 (a)). Атомы тем или иным способом возбуждаются и переходят из основного состояния в одно из состояний с более высоким энергетическим уровнем (шаг A). Затем атомы спускаются до некоторого метаустойчивого состояния (шаг B). Они остаются в этом состоянии, пока не будут стимулированы (stimulated — отсюда буква S в „LASER") к испусканию светового излучения (emit light radiation — отсюда буквы E, L и R), в результате чего они перейдут на некоторый вполне определенный более низкий уровень (шаг C). С этого более низкого уровня атомы переходят опять в основное состояние, и процесс возобновляется.

Весь процесс может быть чрезвычайно сложным, поэтому мы не сможем здесь изучить его подробно. Для многих целей в физике практически достаточно ограничиться рассмотрением двух энергетических уровней атома (рис. 15.1 (b)). Мы здесь последуем этому обычаю. В упрощенной двухуровневой атомной модели (рис. 15.1 (b)) „основное" состояние в действительности не будет состоянием с наименьшей энергией.

Для наших целей детальная природа механизмов D — A — B, ведущих от *основного* к *возбужденному* состоянию, не имеет большого значения. Достаточно знать, что мы можем „накачать" атомы от основного до возбужденного состояния, откуда они могут вернуться, испуская фотоны и

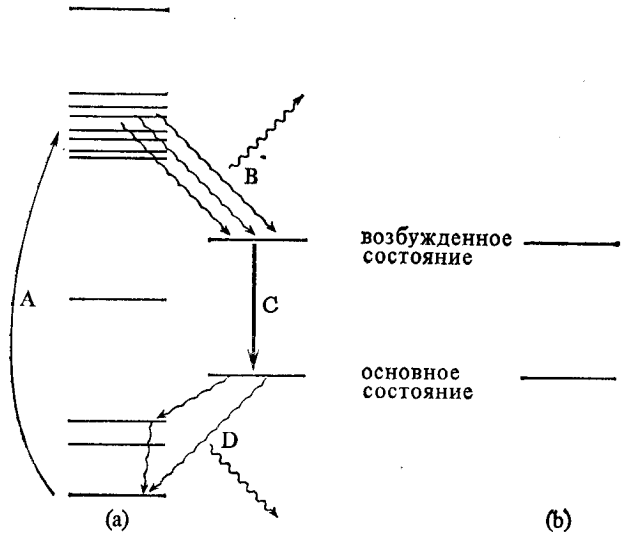


Рис. 15.1

тем самым усиливая (amplifying — отсюда буква A) соответствующий электромагнитный сигнал.

Этот упрощенный атом с двумя состояниями не будет находиться с определенностью „в" том или другом состоянии, если только мы его не вынудим к этому (точно так же, как фотон будет с определенностью поляризован некоторым образом, лишь если мы только что пропустили его через поляризатор): состояние атома представляет собой *суперпозицию* (линейную комбинацию) двух состояний и, значит, пространство состояний является векторным пространством, натянутым на основное состояние $g=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ и возбужденное состояние $e=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$. Поскольку эти базисные состояния в некотором отношении напоминают моды колебаний и накладываются друг на друга с определенным соотношением фаз, векторное пространство должно быть *комплексным*; так как базис фиксирован, его можно отождествить с пространством упорядоченных пар комплексных чисел, и мы обозначаем его через $\mathbb{C}^2$. Для описания движения в этом пространстве нужно использовать различные возможные операторы на этом пространстве; или, точно так же как в § 2 гл. 8 мы находили матрицы, дающие *направления смещения* в I_1^4, так здесь мы будем искать аналогичные матрицы для $\mathbb{C}^2$. (Говоря формально, мы собираемся работать не с *группой* Ли обратимых операторов в $\mathbb{C}^2$, а с ее *алгеброй* Ли, т. е. с касательным пространством к этой группе в точке, отвечающей тождественному преобразованию.) То, что мы выписали

в гл. 8, представляло собой на деле тождественную матрицу плюс различные такие „матрицы-направления", зависящие от всевозможных α, β, γ; здесь же мы будем использовать „матрицы-направления" сами по себе. В данном случае оказываются полезными матрицы, натянутые на

$$\sigma^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{15.1}$$

Заметим, что σ^- как бы заставляет нас добавлять что-то „основное", если у нас есть что-то „возбужденное" (и наоборот для σ^+), в то время как σ^z *увеличивает* „возбужденное" и *уменьшает* „основное". (Это грубо выражено, но попробуйте представить себе, что делает матрица $I+t\sigma$ при малых t, беря по очереди $\sigma=\sigma^+, \sigma^-, \sigma^z$.) Для вычислений важны следующие *коммутационные соотношения*, показывающие, как влияет на результаты изменение порядка этих „направлений" во времени:

$$\begin{aligned} [\sigma^z,\ \sigma^+] &= 2\sigma^+, \\ [\sigma^z,\ \sigma^-] &= -2\sigma^-, \\ [\sigma^+,\ \sigma^-] &= \sigma^z, \end{aligned} \tag{15.2}$$

где

$$[\sigma,\ \tau] = \sigma\tau - \tau\sigma.$$

Алгебры Ли классифицированы (в тонком взаимоотношении с теорией катастроф, см. работу Арнольда [40]); наша алгебра является простейшей, A_1.

Реальный лазер состоит из большого числа N атомов. Каждый двухуровневый атом может быть представлен вектором в своем собственном двумерном пространстве $\mathbb{C}^2_j$. Со всяким атомом ассоциирована система из трех операторов $\sigma_j^{\pm}$, σ_j^z. Операторы для одного атома перестановочны с операторами для любого другого:

$$[\sigma_j^{\#},\ \sigma_k^{\#}] = 0, \qquad 1 \leqslant j \neq k \leqslant N; \qquad \# = +,\ -,\ z. \tag{15.3}$$

Гильбертово пространство H_A для системы из N двухуровневых атомов — это тензорное произведение $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ размерности 2^N.

2 Поле

Электромагнитное поле также имеет очень сложную структуру. Вообще говоря, электромагнитное поле „полихроматично", т. е. содержит компоненты с многими различными частотами (солнечный свет). Даже если мы посмотрим на монохроматичное поле (профильтрованный солнечный свет), оно еще будет содержать много различных мод. Эти моды описываются направлением распространения соответствующих фотонов. Фотоны с различными импульсами $\hbar k_1, \hbar k_2, \ldots$ могут иметь одну и ту же частоту $\hbar\omega = \hbar c|k|$, если только все импульсы совпадают по абсолютной величине: $|k_1| = |k_2| = \ldots$. В полости лазера обычно можно установить зеркала или другие приспособления так, чтобы лишь одна мода электромагнитного поля участвовала в лазерном переходе.

Для простоты будем предполагать, что присутствует лишь одна-единственная мода поля (аналогично принятому с той же целью в § 1 допущению о двухуровневом атоме). В этой моде может оказаться 0, 1, 2, ... фотонов. Снова состояние моды может быть представлено вектором в гильбертовом пространстве. Базисные векторы в этом пространстве, называемом *пространством Фока* и обозначаемом через H_F,— это векторы $|n\rangle$, $n=0, 1, 2, \ldots$, отвечающие состояниям с 0, 1, 2, ... фотонов. Отметим, что H_F бесконечномерно, так как мы не ограничиваем числа фотонов. Мы будем пользоваться (как мы это только что уже сделали) дираковскими обозначениями: $|\ \rangle$ для векторов из H_F и $\langle\ |$ для линейных функций $H_F \to \mathbb{C}$ (элементов сопряженного пространства), а также применим дираковский подход к различию между конечномерным и бесконечномерным — не обращать на это внимания, пока „не кусается". (Пока нет.) Опять общее состояние поля обычно будет *суперпозицией* базисных векторов: вообще говоря, мы не будем с определенностью знать, что поле находится в каком-то конкретном состоянии. (См. в Фейнмановских лекциях [54], том 3, прекрасное объяснение, почему, когда мы *можем* это знать, сразу же исчезают квантовые эффекты. Так как действие лазера — это *квантовый* эффект, мы *не желаем* знать, сколько там точно фотонов,— нам нужен лазер!)

Для физических подсчетов в особенности полезны три линейных оператора в H_F. Это операторы *рождения* (a^+) и *уничтожения* (a), и также их композиция — оператор *числа фотонов* (a^+a); они определяются своим действием на базисные векторы $|n\rangle$:

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

и, значит,

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle. \tag{15.4}$$

Слова „рождение" и „уничтожение" выбраны в связи с наличием переходов из одного определенного состояния в другое, когда становится одним фотоном больше или меньше; название „число фотонов" мы объясним чуть позже. Эти три оператора вместе с тождественным оператором I в H_F также порождают алгебру Ли $h(4)$ с соотношениями

$$\begin{aligned} &[a^+a,\ a^+] = a^+, \\ &[a^+a,\ a] = -a, \\ &[a,\ a^+] = I, \\ &[\text{что угодно},\ I] = 0. \end{aligned} \tag{15.5}$$

3 Взаимодействие

Состояние объединенной системы (атомы + поле) описывается вектором $|\varphi\rangle$ в *тензорном произведении* $H_F \otimes H_A$ указанных двух пространств. (За объяснением знака $\otimes$, но не того, почему он тут уместен, отошлем читателя к Додсону и Постону [5].) Эволюция во времени для таких состояний задается сопоставлением каждому $|\varphi\rangle$ направления движения в $H_F \otimes H_A$. При этом имеет место линейная зависимость от $|\varphi\rangle$ (что очень удобно). По той исторической причине, что соответствующее дифференциальное уравнение приобрело известность раньше, чем обозначения Дирака, это уравнение *(уравнение Шрёдингера)* обычно записывают без дираковских скобок $|\ \rangle$:

$$\mathcal{H}\varphi = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{15.6}$$

где $2\pi\hbar$ — постоянная Планка, а $\mathcal{H}$ — линейный оператор (называемый *гамильтонианом*), от которого требуется, чтобы он был эрмитовым, по причинам, которые мы здесь обсуждать не будем. В любой физической модели, разумеется, $\mathcal{H}$ нужно задавать достаточно явно.

Почти во всех случаях уравнение Шрёдингера оказывается слишком сложным, чтобы можно было решить его; как и в § 5 гл. 12, мы будем искать решения, которые описывают лишь колебания по закону

$$|\varphi_j(t)\rangle = |\varphi_j(0)\rangle e^{-iE_jt/\hbar}.$$

Подставляя это в (15.6), мы получаем уравнение для $\varphi_j(0)$, и отбрасывая, как обычно (0), приходим к уравнению для собственных значений

$$\mathscr{H}\varphi_j = E_j\varphi_j. \tag{15.7}$$

Число E_j, отвечающее данному собственному вектору $|\varphi_j\rangle$, дает *частоту* и тем самым *энергию* решения, так что E_j — это *энергетические уровни* системы.

Итак, мы должны ввести гамильтониан $\mathscr{H}$ для лазера, или, точнее, для описанной выше упрощенной модели. Наиболее часто используется гамильтониан, предложенный Дикке [142]; обширный обзор (с библиографией) соответствующих математических подходов дан у Хакена [143]. Гамильтониан Дикке имеет вид [1]

$$\mathscr{H} = \hbar\omega a^+ a + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon\frac{1}{2}\sigma_j^z + \sum_{j=1}^{N}(\lambda^* a^+\sigma_j^- + \lambda a\sigma_j^+). \tag{15.8}$$

Этот оператор действует в гильбертовом пространстве $H_F \otimes H_A$. С точки зрения задачи о собственных значениях отдельные члены здесь имеют следующее значение:

(a) Первый член измеряет энергию моды поля в предположении, что она единственная, с энергией фотонов $\hbar\omega$. Этот член действует лишь на первый сомножитель векторов вида $v \otimes w$ из $H_F \otimes H_A$.

(b) Второй член измеряет энергию в атомных системах. Мы принимаем, что энергии возбужденного и основного состояний равны соответственно $\varepsilon/2$ и $-\varepsilon/2$. Этот член действует лишь на второй сомножитель.

(c) Третий член описывает испускание фотонов, когда j-й атом переходит из возбужденного в основное состояние ($a^+\sigma_j^-$), и переход j-го атома из основного в возбужденное состояние, когда поглощается фотон ($a\sigma_j^+$). Константа связи λ характеризует, насколько сильно взаимодействуют атомы и поля. Этот член действует на оба сомножителя в $H_F \otimes H_A$. Именно благодаря ему гамильтониан (15.8) становится физически интересным и математически трудным.

4 Измерения

Еще несколько слов о дираковских обозначениях: для всякого вектора $|\varphi\rangle \in H_F \otimes H_A$ *дуальный вектор* $\langle\varphi|$: $H_F \otimes H_A \to \mathbb{C}$ определяется так: он принимает значение 1 на $|\varphi\rangle$ и 0

[1] Ниже звездочка означает комплексное сопряжение.— *Прим. ред.*

на всех векторах, ортогональных к $|\varphi\rangle$. Если φ_j — собственный вектор оператора $\mathscr{H}$, то для энергии соответствующего состояния $|\varphi_j\rangle e^{-iE_j t/\hbar}$ имеем

$$\langle\varphi_j|\mathscr{H}|\varphi_j\rangle = \langle\varphi_j|(E_j|\varphi_j\rangle) = E_j(\langle\varphi_j|\varphi_j\rangle) = E_j. \tag{15.9}$$

E_j — это энергия, которую мы ожидаем найти (и с определенностью находим, если физическая система находится точно в этом состоянии). Вообще „ожидаемое значение" для произвольного оператора [1] $\mathscr{O}$ в таком состоянии равно

$$\langle\varphi_j|\mathscr{O}|\varphi_j\rangle. \tag{15.10}$$

В частности, когда поле находится точно в собственном состоянии $|n\rangle$, ожидаемое значение для a^+a в точности равно n; отсюда и название „число фотонов".

Этот формализм подсчета ожидаемых значений для операторов прекрасен, если:

(a) нам известны собственные состояния $|\psi\rangle$;

(b) мы знаем, что физическая система находится в некотором собственном состоянии.

Однако значительно чаще:

(a′) мы не можем определить собственные состояния;

(b′) физическая система не находится ни в одном из собственных состояний.

Для модельного лазера с гамильтонианом (15.8) мы сталкиваемся с ситуацией (a′). Для реальной физической системы мы сталкиваемся также и с ситуацией (b′). Как поступать в таком случае? Среди физиков популярны два подхода к такого рода трудным проблемам:

(a″) игнорировать проблему в надежде, что она снимется сама собой (применяется иногда);

(b″) подкрасться к проблеме сзади (применяется как правило).

Последний подход в некотором отношении полезнее, и мы здесь ему последуем.

Если *бы* система находилась в собственном состоянии $|\psi_j\rangle$ (неважно, что мы не можем найти $|\psi_j\rangle$), то ожидаемое значение наблюдаемой $\mathscr{O}$ было бы $\langle\psi_j|\mathscr{O}|\psi_j\rangle$. Если система находится в состоянии $|\psi_j\rangle$ с вероятностью p_j, то ожидаемое

[1] Отвечающего некоторой *наблюдаемой* (величине). Обычно операторы и наблюдаемые отождествляют.— *Прим. ред.*

значение $\mathcal{O}$, обозначаемое через $\langle\mathcal{O}\rangle$, равно

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \sum_j p_j \langle\psi_j|\mathcal{O}|\psi_j\rangle. \tag{15.11}$$

Это можно записать иначе в форме, напоминающей то, как записывается оператор проектирования:

$$\sum_j p_j \langle\psi_j|\mathcal{O}|\psi_j\rangle = \mathrm{tr}\left(\sum_j |\psi_j\rangle p_j \langle\psi_j|\right)\mathcal{O}$$
$$= \mathrm{tr}\,\rho\mathcal{O}. \tag{15.12}$$

Оператор $\rho = \sum_j |\psi_j\rangle p_j \langle\psi_j|$ называется *оператором плотности*. Оператор плотности полностью характеризует физическую систему.

Проблемы (a′) и (b′), о которых говорилось выше, разрешаются (или, если угодно, обходятся) при помощи оператора плотности. В действительности ρ зачастую нам даже не нужен, нужно знать лишь некоторые ожидаемые значения. Для одного ряда измерений (представленных выборкой на рис. 15.8 ниже) мы, однако, подсчитаем ρ в явном виде.

Разумеется, не каждый оператор в бесконечномерном случае *имеет* след (тождественный оператор I его не имеет), но чтобы соблюсти строгость в этом месте, нам нужно подкрадываться уж слишком издалека. Строгость и геометрические объяснения потребовали бы от нас принять целый ряд предложений о системе и двигаться через проекторнозначные меры к операторам, с которых мы начинаем при нашем „элементарном" подходе. Здесь нет места для пересказывания книги Яуха [144] или одного из томов Варадараджана [145], так что мы будем хладнокровно пользоваться обозначениями практической физики и точкой зрения Дирака на бесконечномерность (ср. это с замечаниями в конце § 11 гл. 14).

КАТАСТРОФЫ ЛАЗЕРА

5 Деформация гамильтониана

На этот раз мы начнем не с предварительного изучения структурно неустойчивой задачи бифуркации, с тем чтобы затем добавить члены деформации, как мы постоянно делали в гл. 13, но сразу же введем дополнительный член, поскольку здесь дело обстоит несколько сложнее.

В данном случае полезнее использовать для описания лазера не простой модельный гамильтониан (15.8), а чуть более сложный гамильтониан, который учитывает взаимо-

действие атомов с классическим внешним электрическим или магнитным полем. Для этого нужно включить в него дополнительный член вида $\Sigma_j(\lambda^*\alpha^*\sigma_j^- + \lambda\alpha\sigma_j^+)$, где α представляет напряженность внешнего поля. Гамильтониан, используемый нами для моделирования реального физичеекого лазера, выглядит так:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\alpha) + \text{еще кое-что}, \tag{15.13a}$$

$$\mathcal{H}(\alpha) = \hbar\omega a^+ a + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_j^z + \sum_{j=1}^{N} \{\lambda^*(a^+ + \alpha^*)\sigma_j^- + \lambda(a+\alpha)\sigma_j^+\}. \tag{15.13b}$$

Дополнительный член α, учитывающий внешнее поле, должен быть введен по двум важным причинам:

(a) Физически внешнее поле дает полезное средство для изменения условий эксперимента.

(b) Математически результат изучения становится структурно устойчивым, давая универсальную деформацию рассматриваемой точки бифуркации. (Конечно, было бы желательно, чтобы сам $\mathcal{H}$ был в подходящем смысле универсальной деформацией гамильтониана в точке бифуркации, но мы не слыхали, чтобы кто-нибудь разработал соответствующий аппарат.)

Второе слагаемое „еще кое-что" обсуждается в следующем параграфе.

6 Уравнения движения

Зависимость от времени для ожидаемого значения оператора в „чистом" состоянии $|\psi_j\rangle$ может быть выведена из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_j|\mathcal{O}|\psi_j\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_j|\right)\mathcal{O}|\psi_j\rangle + \langle\psi_j|\mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_j\rangle\right) + \left\langle\psi_j\left|\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right|\psi_j\right\rangle. \tag{15.14}$$

Из уравнения Шрёдингера (15.6) мы знаем, что $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle$ и $\langle\psi|\mathcal{H} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\langle\psi|$. Поэтому (15.14) упрощается до *уравнения Гейзенберга*[1]

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle j|\mathcal{O}|j\rangle = \langle j|[\mathcal{O}, \mathcal{H}]|j\rangle + \left\langle j\left|i\hbar\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right|j\right\rangle. \tag{15.15}$$

[1] Этот материал излагается в любом хорошем учебнике по элементарной квантовой механике; см., например, Дикке и Виттке [146].

Если система в действительности описывается оператором плотности с вероятностями p_j, не зависящими от времени (см. (15.10)), то (15.15) для чистого состояния $|\psi_j\rangle$ можно умножить на p_j и просуммировать по j, что даст

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathcal{O}\rangle = \langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}]\rangle + \left\langle i\hbar \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}\right\rangle. \tag{15.16}$$

Значит, для подсчета производной по времени от ожидаемого значения не зависящего от времени оператора $\mathcal{O}$ надо лишь вычислить ожидаемое значение коммутатора $[\mathcal{O}, \mathcal{H}]$, поскольку $\partial\mathcal{O}/\partial t = 0$.

Если использовать уравнение (15.16) совместно с (15.13), то составить уравнения движения для $\langle a\rangle, \langle\sigma^-\rangle, \langle\sigma_j^z\rangle$ не представляет труда. Поскольку $\langle\sigma_j^-\rangle = \langle\sigma_k^-\rangle$ и $\langle\sigma_j^z\rangle = \langle\sigma_k^z\rangle$ для всех $j, k = 1, 2, \ldots, N$, опустим индексы у атомных операторов:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle a\rangle &= \hbar\omega\langle a\rangle + N\lambda^*\langle\sigma^-\rangle + \langle[a, \text{ еще кое-что}]\rangle,\\
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\sigma^-\rangle &= \varepsilon\langle\sigma^-\rangle - \lambda\langle(a+\alpha)\sigma^z\rangle\\
&\quad + \langle[\sigma^-, \text{ еще кое-что}]\rangle, \qquad (15.17)\\
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\sigma^z\rangle &= 2\lambda\langle(a+\alpha)\sigma^+\rangle - 2\lambda^*\langle(a^+ + \alpha^*)\sigma^-\rangle\\
&\quad + \langle[\sigma^z, \text{ еще кое-что}]\rangle.
\end{aligned}$$

При выводе уравнения (15.17) использовались коммутационные соотношения (15.3) и (15.5), а также билинейность коммутатора и его свойство $[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$ („формула Лейбница“).

Уравнения (15.17) фактически не так уж полезны, поскольку коммутаторы $\langle[\,\cdot$, еще кое-что $]\rangle$ не дают никакой информации. Но в то время как член „еще кое-что“ в (15.13) сам по себе довольно сложен, этого нельзя сказать о его влиянии на уравнения движения. На самом деле его влияние заключается в трех эффектах (первые два обсуждались Хакеном в [143], третье — Гилмором и Нардуччи в [147]).

(а) *Затухание.* Если ожидаемое значение, скажем $\langle a\rangle$, отклоняется на δa от своего равновесного значения $\langle a\rangle_e$, то оно возвращается обратно к своему равновесному значению по типичному экспоненциальному закону:

$$\langle a\rangle(t) = \delta a e^{-\gamma a t} + \langle a\rangle_e.$$

Это может быть полностью учтено с помощью подстановки вида

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle a\rangle \mapsto \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_a\right)(\langle a\rangle-\langle a\rangle_{\mathrm{e}})$$

в (15.17). Равновесное ожидаемое значение — это то, которое было бы получено в отсутствие диссипативных потерь („трения").

(b) *Шум.* Дополнительные члены в (15.13) приводят также к появлению случайного неоднородного вынуждающего члена в правых частях каждого из уравнений (15.17). Этими шумовыми членами чаще всего пренебрегают. При обсуждении уравнений лазера мы поступим точно так же. (Как говорилось в предыдущей главе, в § 10 и дальше, пренебрежительное отношение к флюктуациям ведет к затруднениям в непосредственной близости от критической точки; в данном контексте это затруднение известно как „конкуренция между модами". То, что мы находим, это на самом деле *пики* вероятности, которые можно толковать как предсказания о возможных *средних*, если они достаточно резки,— как и бывает всюду, за исключением окрестности точки бифуркации.)

(c) Дополнительные члены требуют также, чтобы ожидаемые значения $\langle a^+\rangle=\langle a\rangle^*$ были вещественными, если таково α. Это очень удобно, так как канонические уравнения (15.22) и (15.44) не были бы структурно устойчивыми при вещественных одномерных A, B, если бы $\langle a\rangle$ было комплексным. Короче говоря, уравнения (15.17) „упрощаются" так:

$$\begin{aligned}
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_a\right)(\langle a\rangle-\langle a\rangle_{\mathrm{e}}) &= \hbar\omega\langle a\rangle+N\lambda^*\langle\sigma^-\rangle,\\
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_\sigma\right)(\langle\sigma^-\rangle-\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}) &= \varepsilon\langle\sigma^-\rangle-\lambda\langle(a+\alpha)\sigma^z\rangle,\\
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_z\right)(\langle\sigma^z\rangle-\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}) &= 2\lambda\langle(a+\alpha)\sigma^+\rangle\\
&\quad -2\lambda^*\langle(a^*+\alpha^*)\sigma^-\rangle.
\end{aligned}\tag{15.18}$$

7 Приближение среднего поля

Уравнения (15.18) все еще недостаточно просты. Они нерешаемы. Дифференциальные уравнения для ожидаемого значения одного оператора требуют привлечения операторных произведений, таких как $\langle a\sigma^z\rangle$ и $\langle a^+\sigma^-\rangle$.

Одна из возможностей заключается в том, чтобы построить уравнения движения для этих операторов: $\mathrm{d}\langle a^+\sigma^-\rangle/\mathrm{d}t=$

$=\ldots$, с надеждой получить таким образом систему замкнутых уравнений. Это тщетная надежда. Уравнения движения для произведения двух операторов требуют произведения трех, и всё быстро ухудшается.

Другая возможность заключается в том, чтобы сделать систему (15.18) замкнутой, предположив, что ожидаемые значения произведений операторов „расщепляются", например в том смысле, что $\langle a\sigma^+\rangle = \langle a\rangle\langle\sigma^+\rangle$. Тогда (15.18) становится замкнутой системой нелинейных уравнений. Нелинейность приводит к очень интересному поведению. В действительности она ведет к катастрофе сборки.

Хотя совершенно ясно, зачем нужна эта расщепляемость (мы не можем без нее сдвинуться с места), неясно, как ее оправдать. Однако оказывается, что относительная ошибка, получаемая при вычислении любого ненулевого ожидаемого значения при таком допущении, имеет порядок $\ln N/N$, где N — число атомов. В небольшом лазере N может равняться, скажем, 10^{12}, так что $\ln N/N = 12 \cdot 2.3 \cdot 10^{-12} =$ (малое число). Это число достаточно мало, чтобы доставить удовольствие даже самым страстным приверженцам (ε, δ)-математики; тем более, оно внушает мало беспокойства физику-экспериментатору.

Предположение о расщепляемости эквивалентно допущению о среднем поле. Это допущение заключается в том, что по отношению к полю атомы выглядят классическими источниками, а по отношению к атомам классическим выглядит поле. Скажем иначе: если мы желаем рассматривать лишь поля, то будет вполне адекватным заменить атомные операторы $\sigma^\pm$, σ^z на их ожидаемые значения $\langle\sigma^\pm\rangle$, $\langle\sigma^z\rangle$, и обратно. В свою очередь это эквивалентно допущению, что оператор плотности ρ для всей взаимодействующей системы атомы — поле *расщепляется* в прямое произведение двух *приведенных* операторов плотности ($\rho = \rho_F \otimes \rho_A$), одного — только для подсистемы поля, другого — только для подсистемы атомов. Хотя мы и не можем вычислить ρ для (15.13), мы можем найти как ρ_F, так и ρ_A в приближении среднего поля. Далее, ρ_F (и ρ_A) является оператором, определяемым точкой на многообразии сборки.

Расщепленные уравнения (15.18) теперь могут быть несколько упрощены. Это можно сделать, устранив сильную зависимость от времени у $\langle a\rangle$, $\langle\sigma^-\rangle$. А это делается с помощью подстановок $\langle a\rangle(t) = e^{-i\omega t}\langle\tilde{a}\rangle(t)$, $\langle\sigma^-\rangle(t) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\langle\tilde{\sigma}^-\rangle(t)$ и аналогичных подстановок для $\langle a\rangle_e$, $\langle\sigma^-\rangle_e$. Затем немного алгебры, и мы имеем новую систему уравнений с тильдами (также и $\tilde{\lambda} = \lambda \exp(i(\varepsilon - \hbar\omega)t/\hbar)$). Отбрасываем тильды в уго-

ду типографии и получаем упрощенную систему уравнений

$$
\begin{aligned}
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_a\right)\langle a\rangle &= \hbar\omega\langle a\rangle_{\mathrm{e}}+N\lambda^*\langle\sigma^-\rangle,\\
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_\sigma\right)\langle\sigma^-\rangle &= \varepsilon\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}-\lambda(\langle a\rangle+\alpha)\langle\sigma^z\rangle,\\
i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma_z\right)(\langle\sigma^z\rangle-\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}) &= 2\lambda(\langle a\rangle+\alpha)\langle\sigma^-\rangle^*\\
&\quad -2\lambda^*(\langle a\rangle+\alpha)^*\langle\sigma^-\rangle.
\end{aligned}
\tag{15.19}
$$

В этом выводе мы использовали соотношения $\langle\sigma^-\rangle^*=\langle\sigma^+\rangle$, $\langle a\rangle^*=\langle a^+\rangle$.

8 Граничные условия

Уравнения (15.19) изучались при двух совершенно различных наборах физических условий (Хакен [143], Хепп и Либ [148], Гилмор и Боуден [149]) — *равновесных* и *неравновесных* граничных условиях.

Модель лазера состоит из уравнений (15.19) вместе с предположениями о неравновесности. Предполагается, что существует некий механизм, накачивающий атомы из основного в возбужденное состояние. Скорость накачки влияет на $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}$. Без накачки $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}=-1$. При очень сильной накачке $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}=+1$. При промежуточных скоростях накачки $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}$ получает промежуточные значения. По этой причине мы принимаем $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}$ в качестве удобной *меры* скорости накачки; это даст нам один из параметров деформации. В данной модели, кроме того, предполагается, что $\langle a\rangle_{\mathrm{e}}=\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}=0$ (Хакен [143]).

Модель (15.19) можно также изучать при граничных условиях теплового равновесия, с равновесной температурой T. Накачки нет, все временны́е производные равны нулю, и $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}$ определяется понятным образом по $\langle a\rangle_{\mathrm{e}}$ и $\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}$. Интересные вещи происходят, лишь если $\langle a\rangle_{\mathrm{e}}\neq 0$, $\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}\neq 0$.

Хотя зависящие от времени уравнения (15.19) и могут быть изучены, полезнее будет отыскать стационарные решения этих уравнений. Они получаются приравниванием всех временны́х производных нулю. Такие решения помечаются индексом s (от stationary). Для равновесных граничных условий $\langle a\rangle_{\mathrm{s}}=\langle a\rangle_{\mathrm{e}}$, $\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{s}}=\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}$, $\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{s}}=\langle\sigma^z\rangle_{\mathrm{e}}$. Для неравновесного случая $\langle a\rangle_{\mathrm{s}}\neq\langle a\rangle_{\mathrm{e}}$, $\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{s}}\neq\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}$, даже если мы не предполагаем, что $\langle a\rangle_{\mathrm{e}}=\langle\sigma^-\rangle_{\mathrm{e}}=0$.

9 Многообразие неравновесных стационарных состояний

Теперь мы ищем стационарные решения нелинейных уравнений (15.19) с неравновесными (т. е. лазерными) граничными условиями. Эти уравнения упрощаются (при $\langle a\rangle_e = \langle\sigma^-\rangle_e = 0$) до

$$\begin{aligned} i\hbar\gamma_a \langle a\rangle_s &= N\lambda \langle\sigma^-\rangle_s, \\ i\hbar\gamma_\sigma \langle\sigma^-\rangle_s &= -\lambda(\langle a\rangle_s + \alpha)\langle\sigma^z\rangle_s, \\ i\hbar\gamma_z(\langle\sigma^z\rangle_s - \langle\sigma^z\rangle_e) &= 2\lambda(\langle a\rangle_s + \alpha)(\langle\sigma^-\rangle_s^* - \langle\sigma^-\rangle_s). \end{aligned} \tag{15.20}$$

При выводе (15.20) мы приняли α (амплитуду внешнего поля) вещественной, так что $\langle a\rangle$ также вещественно, согласно замечанию (c) из § 6; для простоты λ также вещественное. Уравнение для стационарных значений $\langle a\rangle_s$ получается решением первого из уравнений (15.20) относительно $\langle\sigma^-\rangle_s$ и третьего относительно $\langle\sigma^z\rangle_s$, с последующей подстановкой во второе уравнение. После некоторых преобразований получаем уравнение

$$\begin{aligned} -\gamma_a\gamma_\sigma \langle a\rangle_s = &-(\lambda/\hbar)^2(\langle a\rangle_s + \alpha) \\ &\times\left\{N\langle\sigma^z\rangle_e - \frac{4\gamma_a}{\gamma_z}(\langle a\rangle_s + \alpha)\langle a\rangle_s\right\}. \end{aligned} \tag{15.21}$$

Это — кубическое уравнение относительно ожидаемого значения амплитуды поля $\langle a\rangle_s$ („параметра порядка"), поэтому оно может быть приведено к канонической форме многообразия катастрофы сборки:

$$X^3 - AX - B = 0,$$

где

$$X = \langle a\rangle_s + \frac{2}{3}\alpha,$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha^2}{3} + \frac{N\gamma_z}{4\gamma_a}\left[\langle\sigma^z\rangle_e - \frac{\gamma_a\gamma_\sigma}{N(\lambda/\hbar)^2}\right], \\ B &= \frac{2}{27}\alpha^3 + \frac{\alpha}{3}\frac{N\gamma_z}{4\gamma_a}\left[\langle\sigma^z\rangle_e - \frac{\gamma_a\gamma_\sigma}{N(\lambda/\hbar)^2}\right] + \frac{\gamma_\sigma\gamma_z}{4(\lambda/\hbar)^2}\alpha. \end{aligned} \tag{15.22}$$

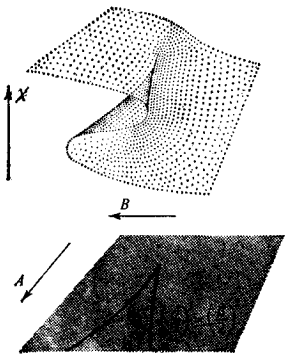


Рис. 15.2

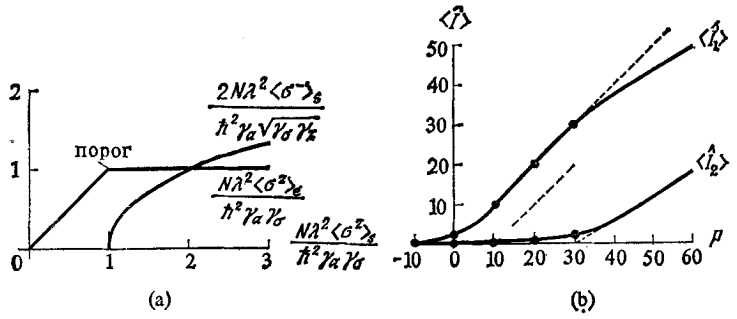


Рис. 15.3. (a) *Амплитуду* $\langle a\rangle_s$ *найти нелегко, так как оптические приборы обычно измеряют интенсивность. Однако эта амплитуда линейно связана с атомной поляризацией* $\langle\sigma^-\rangle$ *согласно уравнению (15.20). Две кривые на графике показывают, как зависят* $\langle\sigma^z\rangle_s$ *и* $\langle\sigma^-\rangle_s$ *от равновесной инверсии населенностей* $\langle\sigma^z\rangle_e$. *Для удобства оси „растянуты", как это указано на рисунке. (По Грейему. См. Хаке [227].)* (b) *Лазер настроен таким образом, что обе моды являются активными при достаточно высокой скорости накачки p (пропорциональной A). При* $p<0$ *имеем допороговый режим. При* $0<p<30$ *лазер находится в послепороговом режиме для первой моды. За исключением пороговых областей для обеих мод, где имеется искривление вследствие флюктуаций, интенсивность возрастает линейно. Поскольку моды конкурируют, при генерации моды 2 несколько подавляется интенсивность моды 1 (уменьшается коэффициент наклона). (По Гроссмэну. См. Хакен [227].)*

Уравнения (15.22) отождествляют точку на многообразии сборки (рис. 15.2) со стационарным состоянием лазера с параметром порядка $\langle a\rangle_s$, определенным из (15.22), и параметром порядка $\langle\sigma^-\rangle_s$, определенным из (15.20). Далее, матрица Якоби преобразования от α, $\langle\sigma^z\rangle_e$ к A, B неособая вблизи $\alpha=0$, так что мы имеем универсальную деформацию „сингулярного" уравнения для стационарных значений, отвечающего значениям управляющих параметров

$$\alpha = 0,$$

$$\langle\sigma^z\rangle_e = \gamma_a\gamma_\sigma/N\,(\lambda/\hbar)^2$$

(если последнее значение возможно — напомним, что $\langle\sigma^z\rangle_e\leqslant 1$ по определению). Заметим, что, как и в § 2 гл. 14, мы продеформировали не „потенциал", а „уравнение состояния". Таким образом, замечания в конце § 6 гл. 14 означают, что для бифуркаций более высокого коранга потребуется выяснить, существует (или нет) потенциал, по крайней мере теоретически, если не для расчетов.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сравнение математических предсказаний с результатом эксперимента всегда служило физику проверенным средством отделения зерен от плевел. Давайте займемся этой процедурой. Мы описываем по одному эксперименту в каждом из следующих трех параграфов. Первые два „грубы" и „ортогональны друг другу". Грубы в том смысле, что они измеряют лишь усредненные свойства поля, связанного с лазером. Ортогональны в том смысле, что варьируются совершенно различные физические управляющие параметры и

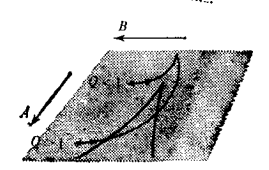


Рис. 15.4

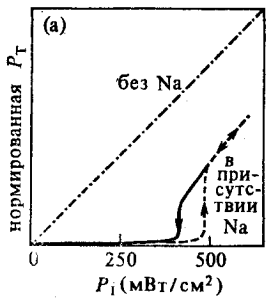


Рис. 15.5. *Оптическая бистабильность в парах натрия. Штриховой линией показан след, образующийся на осциллографе, когда интенсивность возрастает, а сплошной линией — когда она убывает.* (b) *Характерная зависимость, получаемая с помощью интерферометра Фабри — Перо. Расстояние между линиями дается в МГц; общая ширина спектра около 1364 МГц. (Гиббс, Мак-Колл и Венкатесан [150].)*

реакции лазера на изменения этих параметров также совершенно различны. Третий эксперимент — это эксперимент второго поколения, он зондирует детальную структуру электромагнитного поля, порождаемого лазером.

10 Лазерный переход

Если пороговое значение $\gamma_a\gamma_\sigma/N(\lambda/\hbar)^2$ меньше 1 и тем самым физически оно возможно для $\langle\sigma^z\rangle_e$, то мы получаем стандартную катастрофу сборки. Для классического внешнего поля α, в точности равного нулю, мы имеем стандартное „четное сечение" (рис. 6.3, 13.40(a), 14.14, 14.17) с амплитудой поля $\langle a\rangle_s$, меняющейся параболически, когда скорость накачки возрастает, проходя через критическую точку. Так как *интенсивность* поля, а значит, и *выходная мощность* лазера пропорциональны $(\langle a\rangle_s)^2$, они возрастают в первом приближении линейно по отношению к скорости накачки, если $\langle\sigma^z\rangle_e$ на самом деле — гладкая перепараметризация последней. Экспериментальные данные хорошо подтверждают это (рис. 15.3).

Как обычно, эта картина структурно неустойчива относительно возмущений, нарушающих симметрию, и, что также является обычным, такие возмущения реализуемы физически — в нашем случае с помощью поля α. Изменяя α, мы изменяем картину обычным образом (рис. 6.4, 13.40(b)). Вклад теории катастроф здесь заключается в удостоверении того, что скорость накачки и α совместно охватывают *все* такие эффекты; любой новый полевой член, каким бы экзотическим он ни был (скажем, плотность заколдованных гремлинов [1]), если только он гладко влияет на уравнение (15.21), может быть локально нейтрализован посредством волшебной палочки гладкой перепараметризации.

11 Оптическая бистабильность

В этом классе экспериментов $\langle\sigma^z\rangle_e$ поддерживается фиксированным ниже порога активности лазера. Это достигается просто тем, что накачка отсутствует. Тогда $A<0$, $B=0$ при $\alpha=0$. Внешнее поле медленно возрастает. Возможные траектории (в предположении, что поведение $\langle a\rangle_s$ подчиняется

[1] Гремлин (gremlin) — злой гном, приносящий неудачу летчику.— *Прим. перев.*

принципу максимального промедления) показаны на рис. 15.4. Как легко усмотреть из (15.22), траектория решающим образом зависит от значения

$$\frac{-N\,(\lambda/\hbar)^2\,\langle\sigma^2\rangle_e}{8\gamma_a\gamma_\sigma},$$

которое мы обозначим через Q (Гилмор и Нардуччи [147]). При $Q<1$ ничего интересного не происходит. Но при $Q>1$ траектория пересекает обе кривые складок совершенно асимметрично, как показано на рисунке: принцип промедления дает бистабильность и гистерезис. (Траектории расходятся и при любом другом принципе.)

Оптическая бистабильность наблюдалась в натриевых парáх в отсутствие накачки; пары́ находились в полости Фабри — Перо при давлении от 10^{-4} до 10^{-5} мм. рт. ст. и облучались внешним классическим полем $\sim$10 мВт с расстройкой 150 МГц по отношению к переходу $^2S_{1/2} \to {}^2P_{3/2}$ (Гиббс, Мак-Колл и Венкатесан [150]). Данные представлены на рис. 15.5, где нанесена переданная мощность P_T (интенсивность в секунду) в зависимости от падающей мощности P_I. Переданная амплитуда равна $\langle a\rangle_s+\alpha$, а падающая α. Следовательно, можно сравнить рис. 15.5 с предсказанием, сделанным на основе катастрофы сборки, нанося значения $(X+\alpha/s)^2$, пропорциональные переданной мощности $(\langle a\rangle_s+{}+\alpha)^2$, против значений α^2, пропорциональных падающей мощности. Это проделано на рис. 15.6.

Форма кривых на рис. 15.5 заставляет думать, что имеет место поведение, очень близкое к описываемому принципом максимального промедления, так как параболическое касание с вертикалью сечения, проходящего через линию складок, видно у всех предпрыжковых скатов, в случае когда скачок достаточно глубок, чтобы его вертикальная часть могла быть отмечена (ср. с рис. 15.7). Это свойство инвариантно относительно диффеоморфизмов и прекрасно может быть проверено численно (часто даже тогда, когда мало что еще доступно такой проверке, как мы убедимся в следующей главе на примере движущихся экологических границ). Оно характеристично для принципа максимального промедления, поскольку *только* на складке многообразие катастрофы имеет параболическое касание с вертикалью. (В точках скачка Максвелла, например, это многообразие вообще не вертикально.) Было бы интересно проанализировать в этой связи числа, полученные в эксперименте.

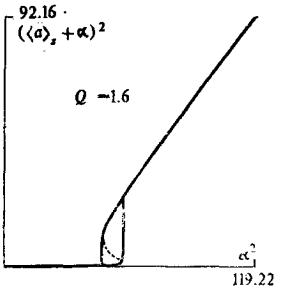


Рис. 15.6. *Предсказания, полученные на основе модели теории катастроф для экспериментальных данных на рис. 15.5. (Бонифацио и Луджато [151], Гилмор и Нардуччи [147].)*

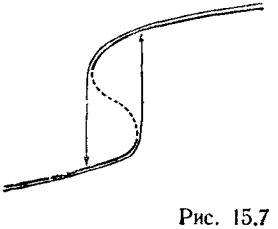


Рис. 15.7

12 Распределение фотоответов

В экспериментах с фотоответами (Глаубер [152, 153]) подсчитывается число фотонов. Если состояние электромагнитного поля представляется вектором $|\psi\rangle$ в пространстве Фока, то скалярное произведение $\langle m|\psi\rangle$ представляет собой амплитуду вероятности того, что в эксперименте будет получено m фотонов (т. е. что данное состояние содержит m фотонов). Вероятность $P(m)$ регистрации ровно m фотонов равна квадрату абсолютной величины этого комплексного числа:

$$P(m) = |\langle m|\psi\rangle|^2 = \langle m|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle. \tag{15.23}$$

Если мы не можем гарантировать, что система находится в состоянии $|\psi\rangle$, но можем лишь считать, что это так с вероятностью p_i, то (15.23) слегка меняется:

$$P(m) = \left\langle m\left|\left(\sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|\right)\right|m\right\rangle. \tag{15.24}$$

Оператор в скобках оказывается нашим старым приятелем, оператором плотности ρ (см. (15.12)). Оператор ρ может быть выражен с помощью полного ортонормированного базиса $|n\rangle$ пространства Фока:

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} |n\rangle \rho_{nn'} \langle n'|. \tag{15.25}$$

Значит, вероятность $P(m)$, которую мы ищем, является элементом матрицы оператора плотности:

$$P(m) = \langle m|\rho|m\rangle = \rho_{mm}. \tag{15.26}$$

Следующий шаг в процессе поиска функции вероятностного распределения для фотосчетчика заключается в простой арифметике:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1} \tag{15.27}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} \to k!\delta_{n,k}$$

при $x \to 0$.

Так как $a^+a|n\rangle = n|n\rangle$, можно также записать $x^n = \langle n|x^{a^+a}|n\rangle$. Фактически, используя представление (15.25) для оператора

плотности, мы имеем

$$\langle x^{a^+a}\rangle = \operatorname{tr}\rho x^{a^+a} = \operatorname{tr}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}|n\rangle\rho_{nn'}\langle n'|\right)x^{a^+a}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\rho_{nn'}\langle n'|x^{a^+a}|n\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\rho_{nn'}x^n\delta_{nn'} = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}x^n. \tag{15.28}$$

В этом выводе мы использовали ортонормированность состояний $|n\rangle$: $\langle n'|n\rangle=\delta_{n'n}$, где $\delta_{n'n}$ — символ Кронекера ($=+1$, если $n'=n$, и 0 в противном случае). Комбинируя (15.26), (15.27) и (15.28), мы приходим к равенству

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\langle x^{a^+a}\rangle|_{x=0} = \rho_{kk} = P(k). \tag{15.29}$$

До сих пор мы обходили молчанием то, как можно вычислить оператор плотности ρ_F для поля, не говоря уж об ожидании $\langle x^{a^+a}\rangle$. Эти вопросы оказываются также удивительно простыми.

В приближении среднего поля, введенном в § 7, атомы ведут себя подобно классическим источникам, постольку поскольку речь идет о поле. Поэтому, если бы нам было нужно выписать гамильтониан только для подсистемы поля, он был бы линейной суперпозицией операторов числа фотонов, рождения и уничтожения (ср. с (15.8) или (15.13)). Для такого гамильтониана имеется чудесная теорема (Гилмор и Нардуччи [147]), которая гарантирует нам, что при подходящих условиях (выполненных в данном случае) приведенный полевой оператор плотности имеет такой общий вид:

$$\rho_F \simeq \mathrm{EXP}(Ma^+a + Ra^+ + La), \tag{15.30}$$

где $M^*=M$, $R^*=L$, а $\simeq$ означает „пропорционально“. Оператор плотности должен быть нормирован на единицу: $\operatorname{tr}\rho=\Sigma p_i=1$ (см. (15.11)). Мы можем работать и с ненормированным оператором плотности, если только ожидаемые значения определены как $\langle\mathcal{O}\rangle=\operatorname{tr}\rho\mathcal{O}/\operatorname{tr}\rho$.

Мы хотим ассоциировать параметры M, R, L с точками на поверхности многообразия сборки. Прежде чем сделать это, полезно пойти на одно дополнительное усложнение. А именно, нужно вычислить ожидаемое значение еще для одного оператора. Мы делаем это, чтобы получить очень удобную производящую функцию. Оператор этот

EXP (ma^+a+ra^++la), а его ожидаемое значение равно

$$\langle \mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la)\rangle = \frac{\mathrm{tr}\,(\mathrm{EXP}\,(Ma^+a+Ra^++La)\,\mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la))}{\mathrm{tr}\,(\mathrm{EXP}\,(Ma^+a+Ra^++La))}. \tag{15.31}$$

Коэффициенты (M, R, L) и (m, r, l) не имеют между собой ничего общего. Можно доказать (недостаток места вынуждает нас опустить соответствующее рассуждение, использующее ряд глубоких результатов из теории групп Ли (Гилмор [147a])), что след в числителе равняется

$$\frac{1}{1-e^{M+m}}\exp\left\{-\left(\frac{LR}{M}+\frac{lr}{m}\right)+\left(\frac{L}{M}-\frac{l}{m}\right)\times\left(\frac{R}{M}-\frac{r}{m}\right)\frac{(e^M-1)(e^m-1)}{e^{M+m}-1}\right\}. \tag{15.32}$$

Это верно при $M+m<0$. Знаменатель в (15.31) является частным случаем числителя, и вся дробь (15.31) легко вычисляется; в результате получаем

$$\langle \mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la)\rangle = \frac{1-e^M}{1-e^{M+m}}\exp\left\{-\frac{lr}{m}+\left(\frac{L}{M}-\frac{l}{m}\right)\left(\frac{R}{M}-\frac{r}{m}\right)\times\frac{(e^M-1)(e^m-1)}{e^{M+m}-1}\right\}. \tag{15.33}$$

Хотя это выражение для ожидаемого значения довольно неуклюже, оно содержит в себе всё, что мы хотим знать:

$$\langle a\rangle = \frac{\partial}{\partial l}\langle \mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la)\rangle\,|_{m=r=l=0} = -\frac{R}{M}, \tag{15.34a}$$

$$\langle a^+\rangle = \frac{\partial}{\partial r}\langle \mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la)\rangle\,|_{m=r=l=0} = -\frac{L}{M}, \tag{15.34b}$$

$$\langle a^+a\rangle = \frac{\partial}{\partial m}\langle \mathrm{EXP}\,(ma^+a+ra^++la)\rangle\,|_{m=r=l=0} = \frac{e^M}{1-e^M}+\left(\frac{-L}{M}\right)\left(\frac{-R}{M}\right). \tag{15.34c}$$

Теперь мы в состоянии установить связь с многообразием сборки. В силу (15.34a, b), имеем $R=-M\langle a\rangle$ и $L=-M\langle a^+\rangle$, так что оператор плотности ρ_F в (15.30) приоб-

ретает вид ($\langle a^+\rangle = \langle a\rangle^*$):

$$\rho_F \simeq [\rho\ (\text{геометрия})]^{M\ (\text{физика})},$$
$$\rho\,(\text{геометрия}) \simeq \mathrm{EXP}\{a^+a - \langle a\rangle (a^+ + a)\}, \qquad (15.35)$$
$$\langle a\rangle = X - \frac{2\alpha}{3}.$$

Примечательно, что полевой оператор плотности „расщепляется" на две части. Операторная часть зависит от геометрии катастрофы сборки в точке $X = \langle a\rangle_s + 2\alpha/3$. Число M зависит от физических факторов и фактически тесно связано с шумом.

В экспериментальных целях удобно описать измерение в терминах сигнала и шума. (Подробное обсуждение того, как экспериментатор может удостовериться, что реально измеряемые им эффекты действительно соответствуют эффектам, которые его интересуют, см. у Ареччи [154].) Такое разложение на сигнал и шум очевидно из (15.34c), где сигнал $\mathscr{S} = |\langle a\rangle|^2$, а шум системы $\mathscr{N}$ представляет собой корреляционную функцию $\langle a^+a\rangle - \langle a^+\rangle\langle a\rangle$:

$$\mathscr{S} = \left(-\frac{L}{M}\right)\left(-\frac{R}{M}\right) = \left(X - \frac{2\alpha}{3}\right)^2 = \langle a^+\rangle\langle a\rangle,$$
$$\mathscr{N} = \frac{1}{e^{-M} - 1} = \langle a^+a\rangle - \langle a^+\rangle\langle a\rangle. \qquad (15.36)$$

Точка X на многообразии сборки определена (самое большое с выбором из двух возможностей — верхнего или нижнего листа) сигналом системы, а M (физика) определяется по шуму системы: $-M = \ln(1 + \mathscr{N}^{-1}) > 0$.

Теперь уже найти функцию $P(k)$ (15.29) вероятностного распределения фотосчетчика — довольно простое дело (Глаубер [152]). Для этого прежде всего мы подставляем $r = l = 0$ в (15.33), получая ожидание $\langle (e^m)^{a^+a}\rangle$. Если теперь положить $e^m = x$, то мы значительно приблизимся к цели:

$$\langle x^{a^+a}\rangle = \frac{1 - e^M}{1 - xe^M} \exp\left\{\frac{LR}{M^2}\frac{(1 - e^M)(x - 1)}{1 - xe^M}\right\}. \qquad (15.37)$$

Это выражение просто напрашивается, чтобы его разложили по степеням x (взгляните на (15.29)). Более того, что-то тут смутно напоминает о производящей функции многочленов Лагерра (Абрамовиц и Стиган [69])

$$\frac{1}{1 - z}\exp\left\{\frac{-yz}{1 - z}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(y)\, z^k, \quad |z| < 1. \qquad (15.38)$$

Чтобы сделать соответствие между (15.37) и (15.38) не столь

смутным, запишем:

$$\frac{1-e^{M}}{1-xe^{M}}=\frac{1-e^{M}}{1-e^{M}+e^{M}(1-x)}=\frac{1}{1+\mathcal{N}(1-x)}$$

$$=\frac{1}{1+\mathcal{N}}\frac{1}{1-\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}x},$$

$$\frac{LR}{M^2}\frac{(1-e^{M})(x-1)}{1-xe^{M}}=\frac{-\mathcal{S}}{1+\mathcal{N}}\left\{1-\frac{\frac{1}{1+\mathcal{N}}x}{1-\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}x}\right\}$$

$$=\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}(1+\mathcal{N})}\frac{\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}x}{1-\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}x}-\frac{\mathcal{S}}{1+\mathcal{N}}. \qquad (15.39)$$

Мы видим, что

$$-y=\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}(1+\mathcal{N})}, \qquad z=\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}x,$$

$$\langle x^{a+a}\rangle=\frac{1}{1+\mathcal{N}}\sum_{k=0}^{8}L_k\left[\frac{-\mathcal{S}}{\mathcal{N}(1+\mathcal{N})}\right]$$

$$\times\left[\frac{\mathcal{N}x}{1+\mathcal{N}}\right]^{k}\exp\left[\frac{-\mathcal{S}}{1+\mathcal{N}}\right]. \qquad (15.40)$$

Функция вероятностного распределения фотосчетчика может быть найдена путем сопоставления (15.40) и (15.29):

$$P(k)=\frac{1}{1+\mathcal{N}}\left[\frac{\mathcal{N}}{1+\mathcal{N}}\right]^{k}L_k\left[\frac{-\mathcal{S}}{\mathcal{N}(1+\mathcal{N})}\right]\exp\left[\frac{-\mathcal{S}}{1+\mathcal{N}}\right]. \qquad (15.41)$$

По поводу экспериментов, позволяющих измерить это распределение (в предположении применимости закона больших чисел), см. Ареччи [154]. Типичный результат сравнения (15.41) с экспериментом показан на рис. 15.8, взятом из статьи Фрида и Хауса [155]. Предпочесть этому какую-либо более отточенную теорию было бы делом затруднительным.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ

В этой части главы мы вновь рассматриваем „лазерные" уравнения движения (15.19), но на этот раз с другими граничными условиями. А именно, мы ищем стационарные решения при термодинамическом равновесии с температурой $T(\beta=1/kT)$. В результате мы снова приходим к катастрофе сборки. Так как рассуждения при равновесных граничных

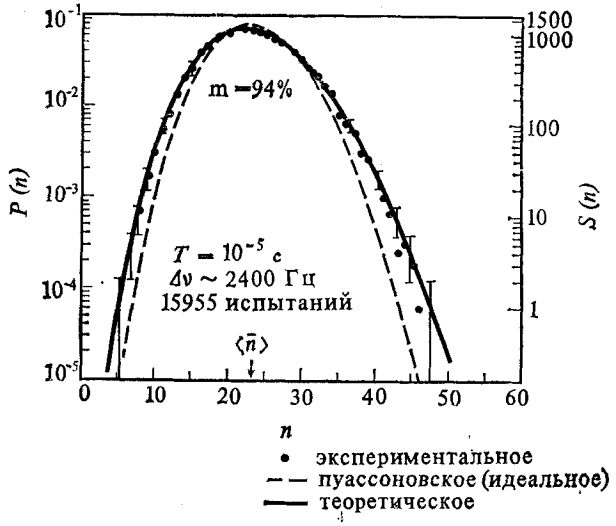


Рис. 15.8. *Распределение вероятностей при послепороговом режиме работы лазера, $T = 10^{-5}$ с, $\Delta\nu \sim 2400$ Гц. (Фрид и Хаус [155].)*

условиях очень похожи на аналогичные рассуждения, проведенные в § 9, материал §§ 13—16 будет изложен довольно сжато. Главный результат — довольно неожиданный — состоит в том, что различные результаты, предсказанные с помощью (15.19) при равновесных и неравновесных граничных условиях, очень тесно связаны друг с другом и могут быть получены друг из друга посредством „вещественно-аналитического соответствия" на многообразии сборки. (Мы могли бы сказать „аналитического продолжения", но это плохо вяжется с тем, к чему привыкли математики.)

Этим демонстрируется вездесущность и унифицирующая мощь теории катастроф в самой сильной форме: это не столько слова „в некоторой размерности всё есть сборка", сколько возможность для нас найти общую каноническую форму для различных детально разработанных моделей, так что их соответствие становится ясным и предсказания и эксперименты одной отображаются в предсказания и эксперименты другой. Распознать появление катастрофы сборки столь же важно и полезно, как и распознать появление простого гармонического осциллятора.

13 Равновесные граничные условия

При равновесных граничных условиях стационарное состояние и равновесные ожидаемые значения — это одно и то же, и $\langle\sigma^2\rangle$ определяется понятным образом. Уравнения

(15.19) сводятся (Гилмор и Боуден [156]) к уравнениям

$$\hbar\omega\langle a\rangle_e + N\lambda^*\langle\sigma^-\rangle_e = 0,$$
$$\varepsilon\langle\sigma^-\rangle_e - \lambda(\langle a\rangle_e + \alpha)\langle\sigma^z\rangle_e = 0,$$

где

$$\langle\sigma^z\rangle_e = -\left(\frac{\varepsilon}{2\theta}\operatorname{th}\beta\theta\right)$$

и

$$\theta^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \lambda^2(\langle a\rangle + \alpha)^2. \qquad (15\ 42)$$

Мы можем считать λ вещественным без потери общности, а $\langle a\rangle_e$ вещественно, если α вещественно, как было сказано в § 6.

14 Многообразие равновесия

Многообразие, описывающее равновесные значения параметров порядка $\langle a\rangle_e$, $\langle\sigma^-\rangle_e$, можно получить исключением $\langle\sigma^-\rangle_e$, $\langle\sigma^z\rangle_e$ из (15.42):

$$\hbar\omega\langle a\rangle_e - \frac{N\lambda^2}{2\theta}(\langle a\rangle_e + \alpha)\operatorname{th}\beta\theta = 0. \qquad (15.43)$$

Это уравнение может быть приведено к канонической форме для катастрофы сборки посредством разложения θ и $\operatorname{th}\beta\theta$ до членов, содержащих $(\langle a\rangle_e+\alpha)^2$, и применения теорем из гл. 8. После несложных арифметических преобразований мы убеждаемся, что вблизи $A=B=0$ уравнение (15.43) эквивалентно (в смысле эквивалентности деформаций) уравнению

$$X^3 - AX - B = 0,$$

где

$$X = \langle a\rangle_e + \alpha,$$
$$A = -[\varepsilon\hbar\omega - N\lambda^2\operatorname{th}(\beta\varepsilon/2)]/C,$$
$$B = \varepsilon\hbar\omega\alpha/C, \qquad (15.44)$$
$$C = 2N(\lambda^2/\varepsilon)^2[\operatorname{th}(\beta\varepsilon/2)\operatorname{sech}^2(\beta\varepsilon/2)].$$

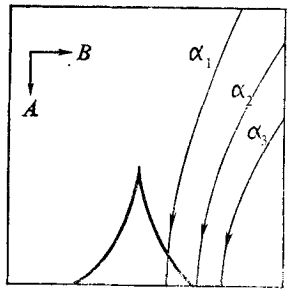
Коэффициент C положителен для всех конечных температур T, $0 \leqslant T < \infty$.

15 Термодинамический фазовый переход

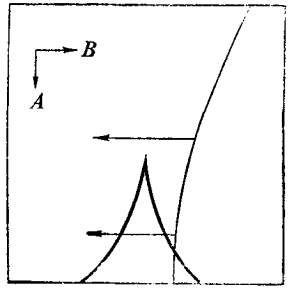
В отсутствие внешнего поля $\alpha=0$ и $B=0$. Коэффициент A отрицателен при достаточно высоких температурах и должен оставаться отрицательным при любой температуре,

если $N\lambda^2 < \varepsilon\hbar\omega$. Однако если $N\lambda^2 > \varepsilon\hbar\omega$, то траектория в пространстве управляющих параметров проходит через точку острия, состояние системы переходит на верхний или нижний лист и система претерпевает фазовый переход второго рода (Хепп и Либ [148], Гилмор и Боуден [149]) при критической температуре T_c, определяемой из условия

$$\varepsilon\hbar\omega = N\lambda^2 \operatorname{th}(\beta_c\varepsilon/2). \tag{15.45}$$



(a)



(b)

Рис. 15.9.

16 Критическое поведение

Существование фазового перехода второго рода приводит к „сборке в портновском смысле“ [1] на поверхности равновесия (английскому pleat отвечает французское fronce — термин, используемый во французской математической литературе для обозначения катастрофы сборки [2]). Деформация (15.44) версальна и, следовательно, универсальна: как для равновесных, так и для неравновесных условий никакие дополнительные возмущения, которые гладко меняют уравнение (15.44), не привнесут никаких неожиданностей при малых значениях. Все возможные типы критического поведения описываются катастрофой сборки.

На рис. 15.9(a) мы нанесли несколько траекторий в пространстве управляющих параметров, полученных при фиксации различных значений α и уменьшении температуры. Никаких фазовых переходов нет, состояние системы гладко движется по верхнему листу. На рис. 15.9(b) показано, что происходит, когда фиксирована температура, а α убывает от исходного положительного значения, проходя через нуль и доходя до достаточно больших отрицательных значений. Расхождение очевидно. При $T > T_c$ фазовых переходов нет. При $T < T_c$ происходят фазовые переходы первого рода. Если система подчиняется принципу максимального промедления, то эти переходы происходят при пересечении траекториями линий складок. Имеет место гистерезис (Гилмор и Нардуччи [147]).

17 Аналитическое соответствие между экспериментами

Стационарные значения динамических уравнений (15.19) находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками на многообразии сборки, как при равновесных, так и при

[1] В оригинале pleat — складка, сборка.— *Прим. ред.*
[2] В русской математической литературе ситуация аналогичная.— *Прим. ред.*

неравновесных граничных условиях. Тем самым любая равновесная система может быть отождествлена с некоторой неравновесной системой — через точку на многообразии сборки. Мы можем назвать это *вещественно-аналитическим соответствием*, поскольку оно позволяет нам отобразить все свойства одной системы (допустим, равновесной) в соответствующие свойства другой (неравновесной) посредством вещественно-аналитического многообразия.

Разумеется, искривленные пути, полученные в неравновесном режиме фиксацией $\langle\sigma^z\rangle_e$ и варьированием α (рис. 15.5), оказываются образами путей в равновесном режиме, которые получаются при *одновременном* изменении как температуры (или β), так и поля (α). Конкретные отображения получаются с помощью (15.22) и (15.44). Каково именно отображение — не так важно. Главное — что такое отображение существует. Например, зная, что фазовые переходы второго рода происходят в неравновесном (лазерном) случае, мы можем гарантировать появление сборки в многообразии стационарных состояний. Это в свою очередь гарантирует существование фазовых переходов первого рода (скачков). Они притаились где-то поблизости — нужно только найти подходящие физические управляющие параметры, чтобы поймать их. Аналогично, зная о существовании аналитического соответствия между неравновесным и равновесным режимами, мы можем гарантировать существование фазовых переходов второго и первого рода при термодинамическом равновесии.

Чтобы проиллюстрировать важность этой концепции, рассмотрим эксперименты с фотосчетчиками, описанные в § 12. Прежде всего, все данные брались в частном случае нулевого внешнего поля. Предсказания (15.41) могут быть немедленно расширены на случай $\alpha\neq 0$ с помощью (15.35). Если уровень шума в эксперименте не изменяется, то распределения фотосчетчика будут иметь одинаковую форму во всех экспериментах с одним и тем же сигналом $\mathscr{S}=(x-2\alpha/3)^2/M^2$. Следовательно, *все значения физических управляющих параметров* $\langle\sigma^z\rangle_e$, α, *дающие одно и то же значение* $\langle a\rangle_s=x-2\alpha/3$, *должны приводить к одному и тому же распределению фотосчетчика в экспериментах, проводимых при постоянном уровне шума.*

Мы можем сказать теперь еще больше, призвав на помощь концепцию аналитического соответствия. В равновесном случае приведенный оператор плотности для поля задается с помощью (15.35), где $\langle a\rangle_e$ заменено на $x-\alpha$ и $-M=1/kT$. Значит, при равновесных условиях распределения фотосчетчика определяются (15.41), где $\mathscr{S}=(x-\alpha)^2$

и $\mathcal{N}=(e^{\beta\hbar\omega}-1)^{-1}$. При помощи многообразия сборки точно таким же образом может быть установлено соответствие и между другими экспериментальными результатами для равновесной и неравновесной конфигураций.

18 Перспективы

Универсальность деформаций (15.22) и (15.43) позволяет утверждать, что более интересные новые эффекты будут предсказаны и открыты лишь тогда, когда будут изучены более сложные гамильтонианы. Это могли бы быть трех- или четырехуровневые системы или более высокие симметрии, чем простая четность модели (15.8), которую мы продеформировали одним-единственным нарушающим симметрию полем.

Как следовало бы проводить такое изучение? Проделанная выше работа подсказывает ясный путь:

(a) Продеформировать универсальным образом новый гамильтониан.

(b) Подробно изучить все критические возможности при каком-либо одном наборе граничных условий, допустим равновесных.

(c) Перенести полученную информацию на случай неравновесного режима с помощью стандартной модели подходящей катастрофы. Если поведение в обоих режимах *не согласуется* (скажем, в одном появляется сборка, а в другом двойственная сборка), следует поискать катастрофу более высокого порядка (вроде бабочки, посредством которой выпучивание по типу сборки переходит в выпучивание по типу двойственной сборки, см. § 8 гл. 13).

16 БИОЛОГИЯ И ЭКОЛОГИЯ

Для Тома исходной мотивировкой для изучения катастроф (в широком смысле) был поиск рамок теории, сводящей воедино накопленное в биологии огромное количество данных наблюдений. Есть какая-то ирония в том, что в действительности лишь немногие из существующих данных могут быть использованы при проверке возникающих теорий, поскольку предсказываемые ими явления для своего экспериментального подтверждения требуют новых данных. Теории Тома широки и философичны, они определяют стиль моделирования, но не его детали. Наилучшей попыткой осуществить программу Тома на практике является статья Зимана [157], в которой выдвинута интерпретация образования биохимической границы на основе катастрофы сборки, и эта интерпретация применена к гаструляции и образованию сомитов у амфибий, а также к кульминации плазмодия миксомицетов. Зиман отметил также, что подобные границы могут образовываться между видами в экологии.

Наша цель здесь еще скромнее. Она состоит в обсуждении возможных теоретико-катастрофических механизмов, ответственных за образование границ, преимущественно на примерах из экологии, где имеются соответствующие данные (хотя и не в изобилии) и где эффекты, вероятно, проще, а также в объяснении того, как наши заключения распространяются на биохимические границы. Мы начинаем с „экономической" модели, которая может объяснить, почему пчелы встречаются либо как виды, для которых характерен одиночный образ жизни, либо как общественные насекомые, образующие очень большие группы. В чем причина такого заметного разрыва? Изучая этот вопрос с помощью относительно простой, но достаточно реалистичной модели, мы приходим к новому классу катастроф — *катастрофам с ограничениями*, применимым к областям, имеющим границы. Те же методы, которыми были получены первоначальные семь катастроф Тома, пригодны и здесь, хотя список получается более обширным. Мы связываем эти идеи с принадлежащей Зиману теорией границ

и обсуждаем имеющиеся числовые данные и те эксперименты, которые можно было бы провести. В заключение мы переходим к эмбриологии. Зиманова модель гаструляции и образования сомитов требует большего знания основ эмбриологии, чем можно было бы включить в нашу книгу, и, во всяком случае, она очень ясно изложена в его статье. Читателю, который заинтересуется биологическими подробностями, следует обратиться к ней, вооружившись сведениями, содержащимися в настоящей главе.

РАЗМЕРЫ СООБЩЕСТВ ПЧЕЛ

1 Пчелиная экономика

Известно около 20 000 видов пчел. Из них все, кроме примерно 5%, *одиночные*, подобно большинству насекомых,— они не образуют кооперативных колоний. Остальные — *общественные* виды, они образуют оформленные сообщества. Общественные пчелы распадаются на три группы: шмели (Bombinae), мелипоны [1], или тропические пчелы без жала (Melponinae), и медоносные пчелы (Apinae). Колонии шмелей редко достигают значительных размеров; колонии из 1000 особей уже исключительны. Средняя колония Bombus muscorum содержит около 120 особей. Для мелипон размер колоний меняется от вида к виду; в одних — несколько дюжин, в других — несколько тысяч. Медоносные пчелы образуют, как правило, многотысячные группы, доходящие до 180 000 и более особей. За редкими исключениями (в особенности вне тропиков), различие очень резко: или мы находим группы из нескольких тысяч особей, или же небольшие и примитивные колонии, если они вообще образуются.

Почему?

Рассмотрим местность, продуцирующую достаточно нектара, чтобы плотность популяции поддерживалась на уровне B пчел/км ^{2}. Колония из N пчел будет сохраняться в равновесии на территории площадью N/B, радиуса, скажем, R. Грубо (так как территории могут перекрываться) у нас получится

$$N=\pi R^2 B. \tag{16.1}$$

Заметим, что поскольку тривиальным образом $N\geqslant 1$, отсюда следует, что

$$R\geqslant R_{\min}=\sqrt{1/\pi B}. \tag{16.2}$$

[1] Не все мелипоны образуют сообщества.— *Прим. перев.*

Среднее время, затрачиваемое на полет из улья и обратно для сбора взятка (не считая времени на разведку), пропорционально средней длине пути

$$2R/3B.$$

Поскольку для производства меда это время теряется, среднюю продуктивность пчелы можно выразить следующим образом:

$$P(R) = C - \frac{A}{B} R = C - \frac{A}{\pi B^{3/2}} \sqrt{N}, \tag{16.3}$$

где A и C — константы, зависящие от пчелиных приемов сбора нектара, от скорости, грузоподъемности и пр. То что виды с меньшей эффективностью использования ресурсов среди конкурирующих за ту же самую пищу вытесняются под давлением естественного отбора,— это один из основных экологических принципов, и если бы вся пчелиная экономика сводилась к одному соотношению (16.3), то общественные пчелы, конечно, исчезли бы, вытесненные какими-нибудь видами одиночных пчел той же местности.

2 Преимущества объединения

Преимущества объединения, позволяющие видам с большими N и R быть конкурентоспособными, заключаются, разумеется, в разделении труда. Подсчет этих преимуществ восходит к родоначальнику систематической экономики Адаму Смиту, который подсчитал, что 10 человек, используя разделение труда, могут изготовить 48 000 булавок в день, в то время как один, работающий в одиночку, сделал бы всего 20. Не входя в детали экономики улья, давайте допустим, что выигрыш S от объединения возрастает по меньшей мере линейно с N, а для небольших N, возможно, и быстрее. Многие детально разработанные модели подтверждают этот вывод. Следовательно, S возрастает по меньшей мере квадратично по R при небольших R (в силу (16.1)), и мы приходим к нашему первому постулату:

(а) Выигрыш S на пчелу от объединения как функция от R имеет положительную производную $\mathrm{d}S/\mathrm{d}R$, возрастающую при $R_{\min}$.

Второй наш постулат — это, по существу, закон уменьшения рентабельности.

(b) Производная dS/dR в конце концов при больших R становится убывающей функцией от R, причем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{dS}{dR}=0.$$

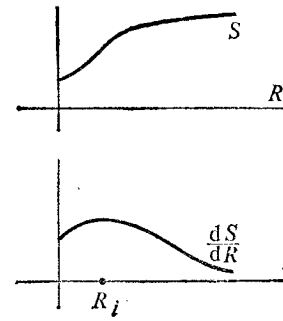


Рис. 16.1

Это гарантировано, например, если любая данная работа подразделяется лишь до определенного момента. Тогда кривая S будет стремиться к «насыщению», не поднимаясь выше некоторого уровня; удвоение популяции просто удваивает число пчел, выполняющих каждую операцию, но не увеличивает продуктивности. Равным образом это свойство следует из более слабого допущения, что $S(R)$ возрастает лишь логарифмически при больших R, или из более сильного, что организационные трудности, удаление отходов и прочее вызывают действительное понижение $S(R)$ при больших R. (Это можно проиллюстрировать, например, расширением прямой кишки у медоносной пчелы по сравнению с другими пчелами, что позволяет ей удерживать фекалии, пока она находится внутри улья.) Специализация на типах цветков (Хайнрих [157a]) достигает насыщения, когда специалистов столько же, сколько типов цветков.

Из постулатов (a) и (b) вытекает, что у dS/dR имеется по меньшей мере один максимум, скажем в R_i, как на рис. рис. 16.1. Для определенности S изображается здесь кривой с насыщением, хотя, как было сказано, в этом нет существенной необходимости. Мы также сделали упрощающее предположение, что dS/dR имеет *только* один максимум; к более сложным случаям мы обратимся позже.

3 Геометрия катастрофы

Теперь рассмотрим полную функцию полезности

$$\begin{aligned}F(R)&=P(R)+S(R)\\&=C-\frac{A}{B}R+S(R).\end{aligned}\tag{16.4}$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dF}{dR}(R)=\frac{dS}{dR}(R)-\frac{A}{B}.\tag{16.5}$$

Мы видим, что график dF/dR при различных A/B чрезвычайно легко строится из графика для dS/dR (рис. 16.2); далее, элементарный факт, состоящий в том, где

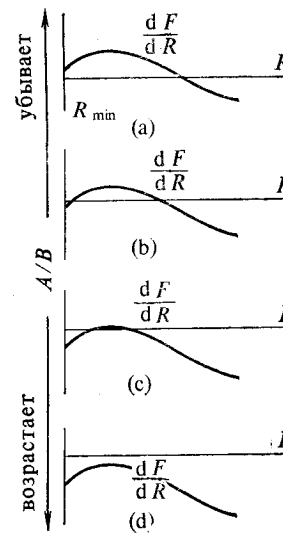


Рис. 16.2

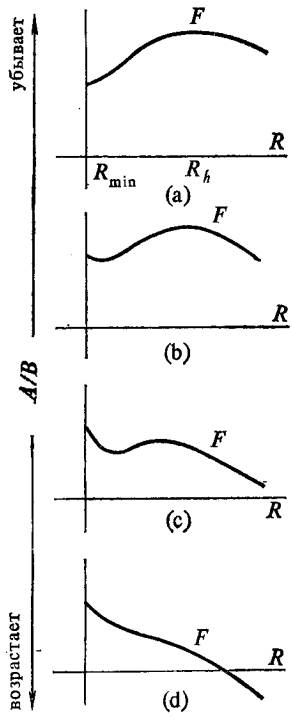


Рис. 16.3

dF/dR возрастает или убывает, проходя через нуль, F соответственно имеет максимум или минимум, приводит к рис. 16.3. Постоянная интегрирования не имеет значения для последующего.

Очевидная связь с тем, что мы делали в § 2 гл. 7, дает нам возможность нарисовать „график" локальных минимумов или максимумов в зависимости от A/B и получить рис. 16.4 с катастрофой складки в точке (A_2, R_i). Если B достаточно велико (т. е. пищи вполне хватает для достаточно большой плотности популяции B), так что $A/B<A_1$, то F выглядит так, как на рис. 16.3(a). Единственный максимум имеется при большом значении R_h для R, что означает большие колонии. Любой вид, который почему-либо экспериментирует с кооперацией, быстро расширится до колоний с размером популяции $N=\pi R_h^2 B$, поскольку сдвиг в этом направлении немедленно вознаграждается эффективностью и конкурентоспособностью и потому будет закреплен генетически. („Быстро" — на эволюционной временно́й шкале, разумеется; суть та, что на протяжении произвольно взятого столетия маловероятно увидеть вид далеко от точки равновесия.)

Неблагоприятное окружение, удерживающее плотность популяции на столь низком значении, что $A/B>A_2$, приведет к единственному максимуму у F в точке R_{min} (рис. 16.3 (d))). При этих условиях (если только изменение в пчелиной технологии не сможет изменить в нужную сторону A или форму F) общественные пчелы не смогут эффективно конкурировать с видами одиночных пчел и исчезнут. (В Англии в диком виде находят лишь шмелей, а они, как мы знаем, стремятся жить небольшими колониями, с широкими сезонными колебаниями численности, которые мы оставляем сейчас в стороне.) Эта модель, конечно, чрезвычайно упрощена. В ней не учитываются некоторые типы адаптаций, которые позволяют видам одиночных пчел анархически выживать на территории, принадлежащей какому-нибудь сообществу, а именно изобретательные уловки вроде имитации общественных видов, вплоть до внедрения в сообщества последних и разделения с ними их пищи, но не их работы (метод, не чуждый для рода Scientist [1]), и много других тонкостей пчелиной экологии. Однако рис. 16.4 делает ясными следствия из постулатов (a) и (b): следует ожидать *внезапных* появлений и исчезновений значительных колоний (даже при небольших изменениях в окруже-

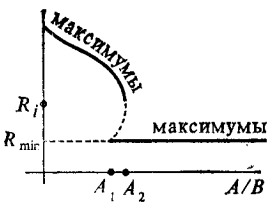


Рис. 16.4

[1] Ученый (*англ.*, а не *лат.!*).— *Прим. ред.*

нии). Кроме того, колонии, содержащие больше чем, скажем, несколько сотен пчел (когда соотношение (16.3) подрывается случайными флюктуациями в распределении пищи), но меньше чем $R_i^2 B$ (гораздо большая величина), должны быть редки, и они либо растут или сокращаются, либо составляют часть быстро развивающегося вида.

4 Пространственные вариации

Рассмотрим улучшающуюся среду, первоначально не содержащую общественных пчел и недоступную для общественных пчел со стороны. Можно ожидать, что будет действовать принцип промедления; так что общественные виды не появляются до тех пор, пока B не достигнет величины, для которой $A/B < A_1$. (Маловероятно, чтобы у пчел появились заметные генетические изменения, необходимые для образования большого сообщества прежде, чем малые сдвиги *в направлении к* нему будут подкреплены.) Если же меняющаяся среда имеет резервуар как общественных, так и одиночных видов, размещенных различно, но всегда готовых к расселению по территории, будет действовать правило Максвелла. В конкуренции за одинаковую пищу преимущество получит абсолютный максимум эффективности, если в конкуренции участвуют представители всех локальных максимумов. Это заставляет предположить, что всякий общественный вид будет встречаться в точности тогда и там, где для данных S и A, свойственных этому виду, емкость среды B превышает некоторое значение B_c, лежащее между A/A_2 и A/A_1. В среде, меняющейся гладко в пространстве и стационарной во времени (в экологической литературе в этом случае обычно говорят о *градиенте среды*), соответствующая область будет иметь четкую границу в виде кривой $B=B_c$. Если имеет место и гладкое изменение во времени, то эта кривая будет меняться, как береговая линия во время прилива и отлива, создавая, разрушая, разделяя и объединяя островки обитания общественных пчел. Это не обязательно должно быть связано с резкими изменениями окружающей среды, за исключением тех изменений, которые сами могут быть следствием присутствия или отсутствия общественных пчел. Если проявления конкуренции не столь сильно выражены, что позволяет локальным максимумам эффективности выживать, давая нечто напоминающее принцип промедления, то граница становится зависящей от истории развития ареалов, но все же остается четкой.

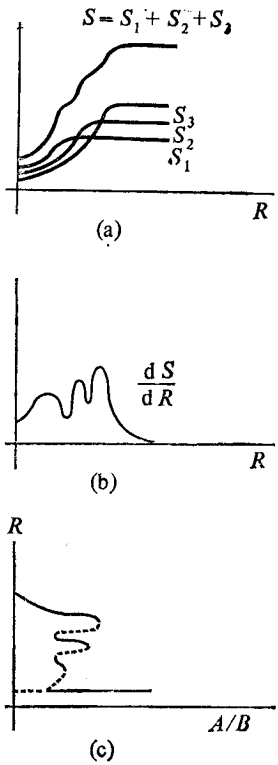


Рис. 16.5

5 Усложнения

Если по-прежнему выполняются постулаты (a) и (b), но функция S осложнена существованием более чем одного максимума dS/dR (как, например, на рис. 16.5, где S является суммой нескольких кривых насыщения, каждая из которых относится к разделению труда при выполнении разных работ), геометрия катастрофы становится более сложной. Но значительная часть проведенных рассуждений сохраняет силу.

Подобное использование теории катастроф проясняет суть дела и иллюстрирует возможности применения теории. Такие применения станут более тонкими и мощными, в особенности там, где модели порождают катастрофы более высокого порядка, увязанные с экспериментальными данными. Но уже ясно, что сравнительно простые динамические системы, неявно заложенные в моделирование с катастрофами, не могут служить достаточной основой для всей математической экологии. На самом деле последняя привлекает интерес ведущих специалистов теории динамических систем как раз потому, что многие разумные экологические модели, обманчиво простые на первый взгляд, демонстрируют математически „хаотическое" поведение (вроде того, которое мы обсудим в § 7 гл. 17). Тут, как и во многих других областях науки, теория катастроф — это полезный инструмент, а не „сезам, откройся" для всех секретов природы. (При более широком томовском понимании термина „катастрофа" эта теория является „сезамом", но уже не всегда — полезным инструментом!)

КАТАСТРОФЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

6 Граничные эффекты

Читатель, возможно, уже заметил, что изображенная на рис.16.4 катастрофа, при которой меняется характер локальной устойчивости одиночного образа жизни (по отношению к объединению), не принадлежит к явлениям, изучавшимся в гл. 7—9. Однако это — совершенно устойчивое событие коразмерности 1, что должно быть ясно из рис. 16.6, где показаны эта катастрофа и двойственная к ней. Таким образом, эта бифуркация совершенно устойчива в однопараметрическом семействе, и, однако, она не находит себе места в списке Тома. Она не служит контрпримером к теореме Тома; как и в случае с эффектами симметрии (§ 3 гл. 7, §§ 15—20 гл. 14), это лишь показывает, с какой осторожностью следует подходить к этой теореме. Все рас-

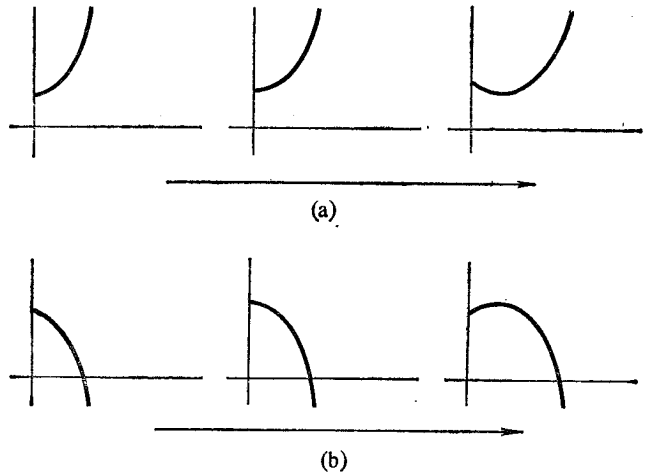


Рис. 16.6

суждения гл. 7 опирались на отождествление максимумов, минимумов и т. д. с точками, где обращается в нуль производная. Это справедливо внутри области определения функции, но если область имеет четкую границу, это неверно. Нужное условие теперь заключается в том, чтобы обращалась в нуль первая производная *по направлениям вдоль границы* (рис. 16.7). (Если граница области нульмерна, как на рис. 16.6, это условие удовлетворяется автоматически.)

Поскольку неравенства составляют неотъемлемую часть математики, используемой в биологических и социальных науках (популяции или химические концентрации не могут быть отрицательными; в предыдущем параграфе радиус территории не мог быть меньше чем $R_{\min}$; самое большее N автомобилей в час может пройти по данному отрезку шоссе), бифуркации в соответствующих задачах оптимизации обязательно будут встречаться с такими критическими точками. (В „нелинейном программировании", как именуется вычислительный аспект задач, экстремумы чаще всего встречаются на границе.) Результаты гл. 7 и 8 не могут быть здесь применены, *однако методы могут*. В отсутствие специальных условий типа симметрии или линейности мы снова можем перечислить типичные явления, которых можно ожидать в r-параметрических семействах при различных r. Полное изложение будет дано у Питта и Постона [158]; здесь мы лишь иллюстрируем возникающие в этом случае виды *катастроф с ограничениями*. (Заметим, что обычные катастрофы по-прежнему могут встречаться внутри обла-

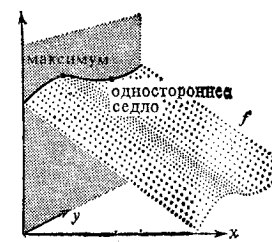


Рис. 16.7

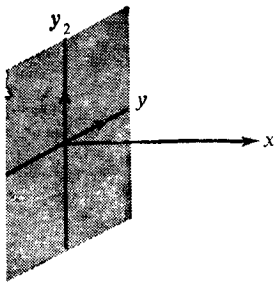


Рис. 16.8

сти; на самом деле большинство катастроф с ограничениями имеют сопровождающие их семейства „внутренних" катастроф меньшей коразмерности.)

7 Классификация

Даже если ограничение и кривое в исходных координатах (как например, $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$), оно в типичном случае дает гладкую границу, и теорема о неявной функции позволяет нам выбрать координаты $(x, y_1, \ldots, y_n)$ вблизи интересующей нас точки так, чтобы ограничение локально могло быть задано просто неравенством $x\geqslant 0$, как на рис. 16.8. (Мы опускаем здесь случай, когда комбинация двух или нескольких ограничений порождает угол или же когда ограничение само варьируется в некотором r-параметрическом семействе с бифуркацией, хотя это и можно изучить тем же самым способом.) Если оставить в стороне устойчивые случаи (минимумы, некритические точки и т. д.), то в таких координатах r-параметрические семейства для $r\leqslant 4$ типичным образом содержат функции, универсальные деформации которых (в рассматриваемом ограниченном смысле) могут быть приведены к следующим формам:

$$
\begin{aligned}
r=1:\quad & \pm(x^2+ax)+M_n(y_1,\ \ldots,\ y_n);\\
r=2:\quad & \pm(x^3+bx^2+ax)+M_n(y_1,\ \ldots,\ y_n),\\
& xy_1\pm y_1^3+by_1+ax+M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n);\\
r=3:\quad & \pm(x^4+cx^3+bx^2+ax)+M_n(y_1,\ \ldots,\ y_n),\\
& \pm(x^2+y_1^3+cxy_1+by_1+ax)+M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
& \pm(xy_1+y_1^4+cy_1^2+by_1+ax)\\
& \qquad +M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n);\\
r=4:\quad & \pm(x^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax)\\
& \qquad +M_n(y_1,\ \ldots,\ y_n),\\
& xy_1\pm y_1^5+dy_1^3+cy_1^2+by_1+ax\\
& \qquad +M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
& \pm(x^3+3tx^2y_1+y_1^3+[ex^2y_1]+dxy_1+cx^2+\\
& \quad +by_1+ax)+M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n),\ t^3\neq 1/4,\\
& \pm(x^2\pm xy_1^2+tx^4+[ey_1^4]+dxy_1+cy_1^2+by_1+ax)\\
& \qquad +M_{n-1}(y_2,\ \ldots,\ y_n),\ t\neq 1/4,\\
& \pm(x(y_1+ty_2)+y_1^2y_2-y_2^3+[exy_2]+dy_2^2+cy_2\\
& \quad +by_1+ax)+M_{n-2}(y_3,\ \ldots,\ y_n),\ t^2\neq 1.
\end{aligned}
$$

Здесь M_i обозначает морсовскую сумму i квадратов, взятых с плюсами или минусами (ср. § 7 гл. 7). Мы не пере-

числили здесь форм вида

$$x+[\text{что-нибудь из списка Тома от } (y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_r)],$$

поскольку ново здесь лишь то, что направление „внутрь" дает несущественную переменную нового рода. Для случая $r=4$ члены, содержащие t и e, порождаются бесконечными семействами типов того же рода, что и в § 6 гл. 7 и § 19 гл. 14; четырехпараметрическое семейство может содержать какой-то один тип (для данного значения t), для которого трансверсальности можно добиться лишь с пятью параметрами. Немного возмутим это четырехпараметрическое семейство, и в нем появится другой тип, приводимый к такой же форме, но с другим значением t. (В каждом из перечисленных случаев препятствие к эквивалентности типов с различными значениями t снова геометрически может быть выражено при помощи двойного отношения четырех прямых.) Таким образом, здесь „почти всё устойчиво" лишь вплоть до $r=3$, а не до $r=5$, как в ситуации гл. 7.

Если не различать двойственных между собой катастроф, то этот список дает нам 14 новых катастроф (с точностью до значений t) в добавление к 7 старым (внутри или на границе); в совокупности они описывают всё, что типично может произойти при не более чем четырех внешних переменных. Геометрия первых шести из них показана на рис. 16.9 (а для высших случаев будет разобрана у Питта и Постона [158]; здесь нам не хватит для этого места). Как и в случае внутренних катастроф, высшие катастрофы „организуют" низшие; например, (c) содержит линию, состоящую из катастроф (d), линию из катастроф (b) и линию складок. В (e) и (f) мы опустили x-направление, оставив вертикальное направление для y, чтобы был возможен рисунок. Жирные линии в плоскости ab во всех случаях отмечают точки, где меняется число минимумов. Заметим, что хотя (c) напоминает сборку (a (f) — двойственную сборку), поскольку область, над которой лежат два минимума, сходится к острию, однако точка острия здесь служит точкой параболического касания двух кривых. Поэтому, скажем, мы могли бы гладкой заменой создать в этой точке выпуклость с одной стороны и вогнутость с другой, в то время как из-за бесконечной кривизны в точке возврата кривой складок в обычной сборке двояковогнутость вблизи этой точки является свойством, инвариантным относительно диффеоморфизмов.

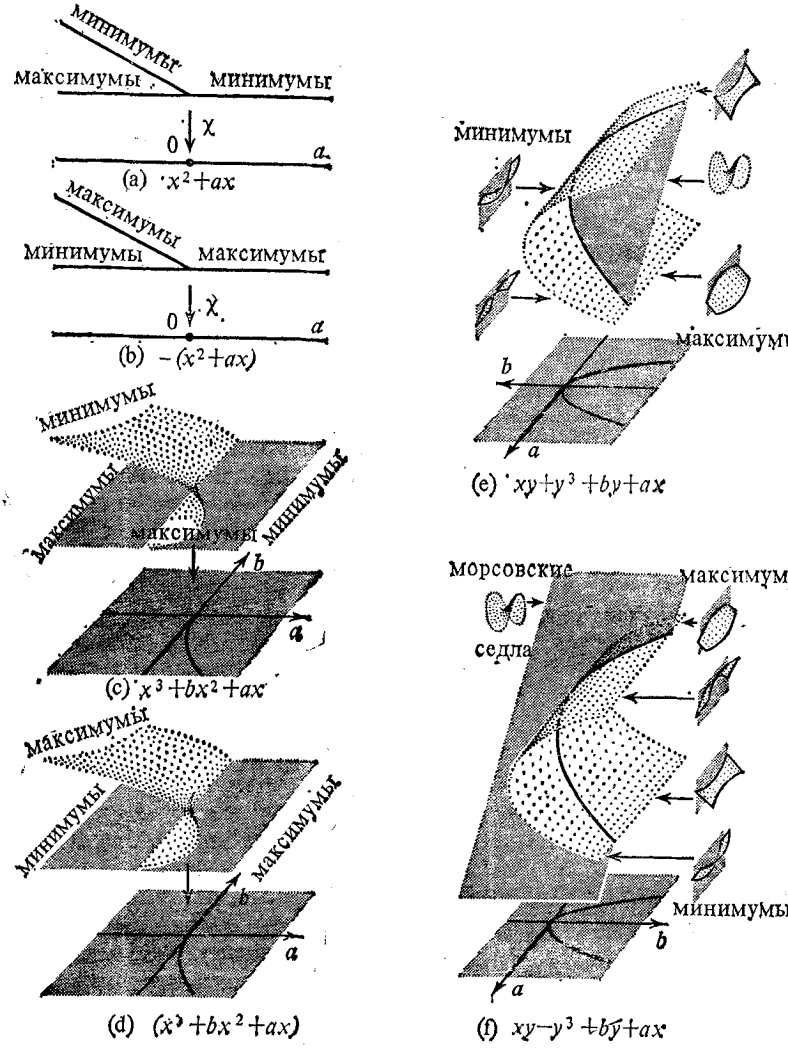


Рис. 16.9

Эта классификация слишком нова для нас, чтобы мы могли предложить столько же примеров и приложений, сколько мы дали для внутренних катастроф в предыдущих главах, однако сфера их применимости столь же широка. Рисунок 16.4 мы получили в результате исследования экономики пчел, но впервые подумали про него в связи с археологией (см. § 2 гл. 17, а также Ренфри и Постон [159]), а позже применили аналогичные рассуждения к проблеме

размещения и размеров торговых центров (Постон и Уилсон [160]). Совсем недавно мы нашли пример из физики лазеров (см. также гл. 15), где появляется не только рис. 16.4, но и рис. 16.9 (c), фронтальным сечением которого служит рис. 16.4. Предложенная Томпсоном [161] явная модель перехода с участием фононов, переводящего систему в возбужденное состояние (лазерное действие), локально приводима с помощью соответствующих этому контексту теорем об определенности и деформации к катастрофе x^3+bx^2+ax плюс положительно-определенный член y^2, отвечающий „несущественной переменной".

Как было отмечено в § 17 гл. 14, имеется тесная связь между катастрофами с ограничениями и катастрофами с условием инвариантности относительно действия заданной группы; фактически эти задачи часто оказываются математически эквивалентными. Возьмем не лазер Томпсона (переход с участием фононов), а более простой лазер предыдущей главы при нулевом внешнем магнитном поле α. Этот случай приводится к форме X^4-AX^2 (в проинтегрированном, „потенциальном" виде), и в рамках пространства четных функций, поскольку оно есть одновременно пространство всех функций от X^2, мы могли бы заменить переменную X на $\eta=X^2$ и получить катастрофу с ограничением $\eta^2-A\eta$, $\eta\geqslant 0$. Это в точности то, что делается при замене *амплитуды* (которая может быть отрицательной — с противоположной фазой) на *интенсивность* (которая существенно положительна). Однако, как только симметрия нарушается (например, из-за внешнего поля), эта замена лишь запутывает дело, ничему не помогая.

Обратите внимание, каким образом математическая устойчивость зависит от „устойчивости" исходных гипотез: экономические ограничения (типа „цена$\geqslant$0") гораздо устойчивее, чем симметрии (типа „магнитное поле = 0"), и это позволяет осуществить преобразование к задачам с ограничениями. Мы могли бы преобразовать экономическую задачу в симметричную, нарушить симметрию и сказать „смотри, вот неустойчивость!" — но нарушающий симметрию член нельзя „провести назад" через это преобразование. Структурная устойчивость, должны мы повторить, зависит от постановки задачи и от класса возмущений, устойчивость по отношению к которым мы рассматриваем, равно как и от используемого понятия эквивалентности.

Тот же самый набор стандартных многочленов (но с иной интерпретацией, отличающейся от описанной здесь настолько, что она дает другие картинки) очень естественно появится снова в § 14.

ДВИЖУЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ЭКОЛОГИИ

8 Выбор соглашений и модели

В § 4 мы привели соображения в пользу пригодности правила Максвелла при изучении динамики образования сообществ у пчел, однако̀ эти соображения — даже если в настоящем случае они и справедливы — не могут иметь универсального значения в экологии. Они соответствуют на языке экономики системе (в ее чистом виде встречающейся лишь в речах американских конгрессменов), в которой различные предприниматели *конкурируют*, но не *взаимодействуют* между собой. Однако если вы и в состоянии делать бейсбольные биты несколько получше и подешевле, чем ваш конкурент, но ему принадлежат все магазины для их продажи, он все же победит вас. Вам нужен капитал, чтобы основать собственную сеть магазинов,— просто для того, чтобы войти в игру.

Аналогично, если вид деревьев A лучше, чем вид B, приспособлен к некоторому грунту G в данных условиях, но в результате исторического развития территорию захватил вид B, то, вероятно, B там и останется. Пусть молодые особи A лучше произрастают на G, чем молодые особи B, и то же самое верно для зрелых особей, но дело в том, что A может вторгнуться на новую территорию лишь в виде семян, а зрелая поросль B легко с ними расправится. (Крайним случаем тут служит тисовое дерево, не только забирающее весь солнечный свет, но также и отравляющее почву под собой, так что это место годами остается голым после того, как дерево срублено.) Поэтому если мы вообще можем воспользоваться здесь теорией катастроф, то естественно применение принципа максимального промедления. Часто требуется что-нибудь более общее, чем теория катастроф,— точные экологические модели могут претерпевать бифуркации иного типа, от классических бифуркаций Хопфа в дифференциальных уравнениях (Хопф [162], Хирш и Смейл [163], Марсден и Мак-Крэкен [164]) до возникновения „хаоса“,— но в то же время часто бывает и так, что системы, динамика которых устроена по более сложному принципу, чем простая минимизация или максимизация, обнаруживают поведение, сводимое к какой-либо катастрофе. И поэтому эмпирическое правило всех наук „сначала испытай линейную модель“ мы можем дополнить — для случая когда бифуркации делают ясным, что линейная модель не годится,— правилом „затем попробуй катастрофы“. Если это дает экспериментально подтверждаемые результаты, то, значит, мы ухватили по крайней мере следствия

лежащей в основе явлений динамики и сделали большой шаг на пути изучения сложных механизмов, порождающих эти явления. И мы также нашли описание, обладающее всей нечувствительностью к помехам, которую гарантирует структурная устойчивость,— поэтому Том и сделал катастрофы краеугольным камнем своей философии. Если же такая модель не согласуется с экспериментом и особенно если выявились черты, которые определенным образом не могут быть получены из геометрии катастроф, то мы и в этом случае узнали нечто важное о динамике явления. (Подобно тому как опыт Майкельсона — Морли показал, что распространение света нельзя трактовать как колебания эфира, и тем подготовил почву для теориии относительности.) На основании общих соображений можно сказать, что теория катастроф должна часто, хотя и не всегда, иметь успех как описательный метод.

9 Границы

Мы можем рассмотреть с этой точки зрения явление образования, движения и исчезновения экологических границ — резких различий в распределении видов. (Возможность такого рода модели была отмечена в [157] Зиманом, однако он скорее имел в виду те границы, которые образуются внутри развивающегося организма и разделяют участки, отличающиеся направленностью биохимических процессов.) Такие границы обычны; мы цитируем Коннелла, Мерца и Мёрдока [165], стр. 103:

„С другой стороны, границы часто бывают более резки, чем любые изменения в физическом окружении, и это заставляет предположить, что либо ограничивающие физические факторы преходящи (как огонь), либо биотические факторы могут быть ограничивающими. Так, хищник может уничтожить всех особей вне безопасного убежища . . . или же некий вид может полностью вытеснить своего конкурента из части его местообитания."

Более конкретно Коннелл [166] замечает:

„При изучении животных части скалистого берега, покрываемой приливом, я отметил, что два вида обрастателей образовали две горизонтальные зоны взрослых особей с небольшим перекрытием, а молодые представители верхнего вида в большом числе находились в нижней зоне. Таким образом, верхний вид *Chthamalus stellatus* расселялся, но не выживал в нижней зоне. Казалось вероятным, что ниж-

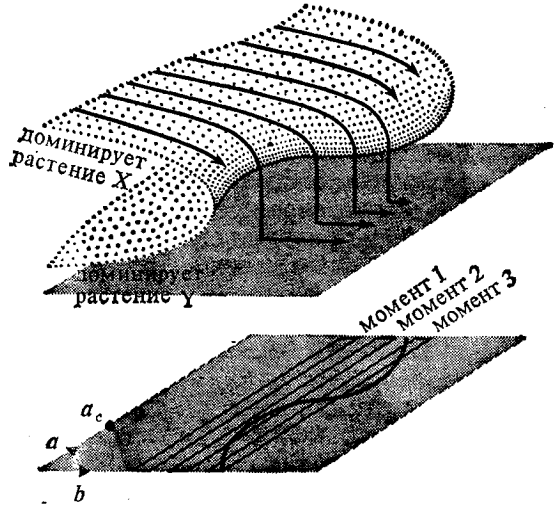


Рис. 16.10

ний вид *Balanus balanoides* ограничивал верхний в борьбе за что-то необходимое им обоим и имевшееся в недостаточном количестве."

В экологической литературе существует много подобных наблюдений относительно самых разных видов; так, ряд примеров из жизни растений приводит Добенмайр [167], а Форд [168] описывает один такой случай для бабочки *Maniola jurtina.*

Для простоты мы рассмотрим лишь одно пространственное измерение, например высоту склона, вместе с которой изменяются температура и водный режим, или же высоту берега для соперничества *Chthamalus* и *Balanus.* Наше обсуждение можно экстраполировать и на большее число пространственных измерений, однако при этом возрастет число возможных случаев. Допустим, что условия среды меняются в пространстве гладко, как и биота [1]. (В частности, можно взять участок земли, полностью расчищенный человеком или изначально пустой, как, скажем, кучи шлака, так что различные расселяющиеся виды располагают вначале гладко меняющимися возможностями, даваемыми местной средой.) Как будут развиваться границы? И как должны они выглядеть, после того как сформируются?

Простейшая модель представлена на рис. 16.10. В момент 1 на всем протяжении диапазона изменения пространствен-

[1] То есть флора и фауна.— *Прим. ред.*

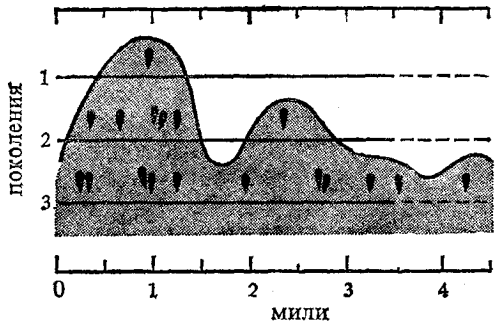


Рис. 16.11. *Распределение чрезвычайно активных колоний* Malacasoma pluviale *вдоль лесистой придорожной полосы после появления в ней первой колонии. Кривая на схеме обозначает границу. (Заимствовано с упрощениями из Уэллингтона [169].)*

ной переменной a условия гораздо более благоприятны для растения X, которое всюду и расселяется. На этой стадии условия препятствуют вторжению растения Y. Но по мере своего созревания и разрастания X само меняет эти условия, пока в момент 2 они не станут в точке a_c благоприятными для молодых представителей Y. Типичный способ проходить кривую складок (в отсутствие катастроф более высокого порядка) — параболический [1], как и показано на рисунке; более того, Вассерман доказал в [112], что этот способ структурно устойчив. Однако чрезвычайно неустойчива ситуация, при которой весь участок одновременно проходит через складку: это потребовало бы строгой однородности почвы, водоснабжения и т. д. Поэтому Y появляется небольшими „пятнами". Эта „пятнистость" несомненно наблюдается в последовательной смене растительности, например там, где возвращается лесной покров местности; она наблюдается и для многих других видов (например, для мотылька *Malacasoma pluviale*, изученного Уэллингтоном [169]). Помимо этого, наша модель предсказывает, что начальное расширение сегментов (или двумерных пятен в случае двух измерений) будет носить взрывной характер, а именно будет следовать (асимптотически) закону квадратного корня. Финальное исчезновение пятен X должно быть столь же ярко выраженным, как и возникновение отдельных пятен Y. (Наблюдения Уэллингтона за популяцией мотыльков ([169], стр. 444) подтверждают это (см. рис. 16.11), но недостаточно обширны, чтобы служить действительно хорошей проверкой.)

[1] „Параболический" не означает здесь, что соответствующая кривая в точности есть парабола, а означает, что локальная ситуация диффеоморфна касанию параболы с ее касательной. Это дает (асимптотический) закон квадратного корня вблизи точки касания, инвариантный относительно диффеоморфизмов.

Заметим, что рис. 16.10 неявно опирается на еще одну гипотезу помимо принципа промедления: существенно, что, когда исчезает одно равновесное состояние, система переходит к другому *быстро*, как машина Зимана. В нашем случае это означает, что скачок должен занимать меньше времени, чем интервал между двумя подсчетами в полевой работе. В некоторых случаях можно считать, что это так, но даже там, где выполняются многие другие допущения, это не обязательно является их следствием. Если оно неверно, то и заключения тоже. Мы к этому вернемся ниже в § 12.

10 Численная проверка

Если имеются соответствующие данные полевых исследований, то эти предсказания поддаются вполне строгой проверке. Модель с достаточным числом подбираемых параметров можно подогнать под любые факты. Но предсказание закона квадратного корня

$$(\text{ширина пятна}) \sim \alpha (\text{время жизни пятна})^{1/2}$$

требует подбора лишь одного числа α, и если такое предсказание неверно, то это можно будет легко установить. (С незначительными усложнениями, возникающими из-за *локальной* природы этого предсказания, легко справиться обычным способом.)

Другая возможность численной проверки представляется предсказанной формой границы. Рассмотрим ситуацию на рис. 16.10 в момент 3, которую можно трактовать либо как переходную на пути к окончательному доминированию Y, либо как конечное состояние. (Небольшие рощи в степи или лес с полянками могут существовать как вполне устойчивые состояния.) В качестве вертикального измерения на рис. 16.10 разумно принять число N_X особей вида X; можно было бы уточнить описание, введя также гладкие вариации плотности Y, но это не повлияет на последующее. Состояние представляется так, как на рис. 16.12, где N_X— разрывная функция положения a, представленная жирной линией. Предсказание, таким образом, заключается в том, что при переходе из области „X отсутствует" в область „X доминирует" N_X совершает скачок от нуля до, скажем, c и затем возрастает как $c+\alpha$ (расстояние)$^{1/2}$ для некоторого α. (Зиман говорит об этом эффекте, как о „гладди перед волной"; отметим, что скачки на рисунке отодвигаются друг от друга в соответствии со смыслом рис. 16.10.)

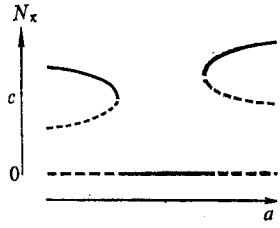


Рис. 16.12

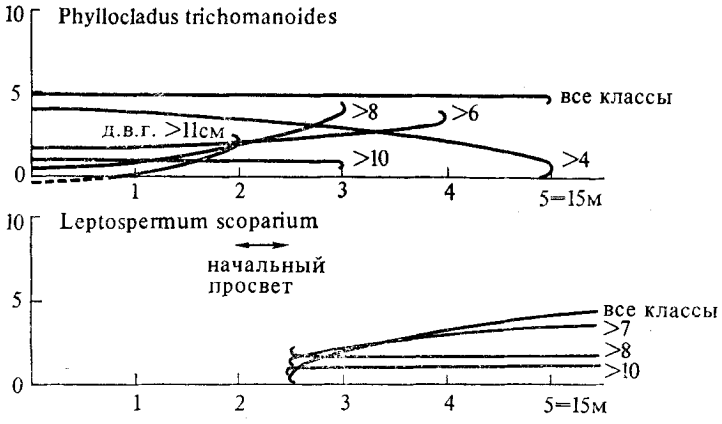


Рис. 16.13. *Параболические кривые, полученные подгонкой к (предварительным) данным о распространении Phyllocladus trichomanoides и Leptospermum scoparium в Парке Каури, Бёркдейл, Окленд (д. в. г. — диаметр на высоте груди). (Любезно предоставлено Кеном Эштоном.)*

Появились некоторые экспериментальные данные, подтверждающие это предсказание. Кен Эштон из Оклендского университета в своих еще не завершенных исследованиях (см. Эштон [170]) изучает границы в лесах (поляны и т. д.) посредством следующей процедуры:

(a) Проверить отсутствие разрывов в субстрате (почве, водном режиме и т. п.) и определить все растения в исследуемой области, вплоть до некоторого выбранного уровня.

(b) Картировать полосу (трансекту), пересекающую границу под прямым углом (в типичном случае от 15 до 30 м длины, от 2 до 4 м ширины). Определить каждое отдельное дерево в этой полосе, отметить его место и измерить диаметр на высоте груди (д. в. г.).

(c) Проверить полученные данные на согласованность с описанной выше теоретической моделью.

Так как д. в. г. дерева тесно коррелирован с его возрастом (см. Добенмайр [167]), это дает не только мгновенную картину, но и (с учетом погибших деревьев) историю трансекты. Хотя полученные данные еще не в полной мере проанализированы, мы можем сообщить некоторые предварительные результаты и первые общие впечатления.

На рис. 16.13 показаны параболические кривые, полученные подгонкой к данным, касающимся двух видов деревьев *Phyllocladus trichomanoides* и *Leptospermum scoparium*, из исследованной трансекты на территории Парка Каури в Окленде. Число при каждой кривой обозначает д. в. г. в сантиметрах. Граница для *Leptospermum* явно стабилизировалась, в то время как *Phyllocladus* продвигается. Подо-

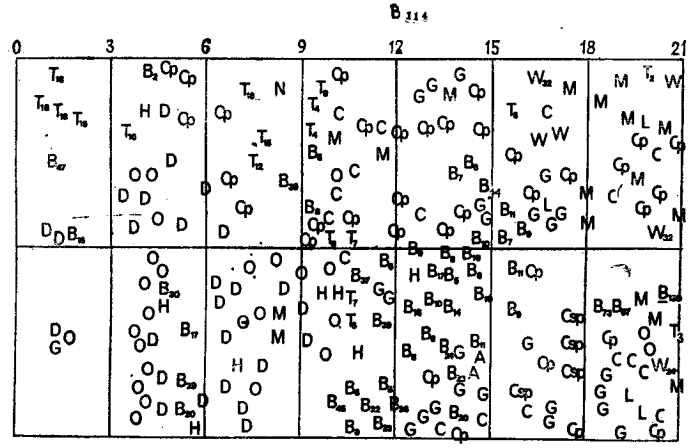


Рис. 16.14. Трансекта на Руапеху. Интервал 3 м, ширина 2м×2.4 м. Виды помечены следующим образом: (B) *Nothofagus solandri* var *cliffortioides*, (T) *Phyllocladus alpinus*, (D) *Dracophyllum filifolium*, (O) *Olearia nummularifolia*, (C) *Coprosma foetidissma*, (Cp.) *C. pseudacuneata*, (Csp.) *C. spathulata*, (M) *Myrsine divaricata*, (M) *Hebe venustula*, (N) *Nepanax* (*Pseudopanax*) *simplex*, (L) *Leptospermum scoparium*, (G) *Gleichenia cuninghamii*, (A) *Astelia sp.*; *B — мертвое дерево*; *числа указывают д. в. г. в см.* (*Любезно предоставлено Кеном Эштоном.*)

гнанные кривые хорошо согласуются с первичными данными, ошибки имеют порядок 5% или того меньше.

На рис. 16.14 показана трансекта склона горы Руапеху, расположенной в центре острова Северного в Новой Зеландии. Руапеху является действующим вулканом, и растительность часто страдала как от извержений, так и от пожаров, вызванных человеком. На рис. 16.15 представлены подгоночные кривые для двух встречающихся там видов. Похоже на то, что в период прорастания деревьев, имеющих теперь д. в. г. 15 см, произошло какое-то нарушение в развитии растительности. После этого *Phyllocladus* про-

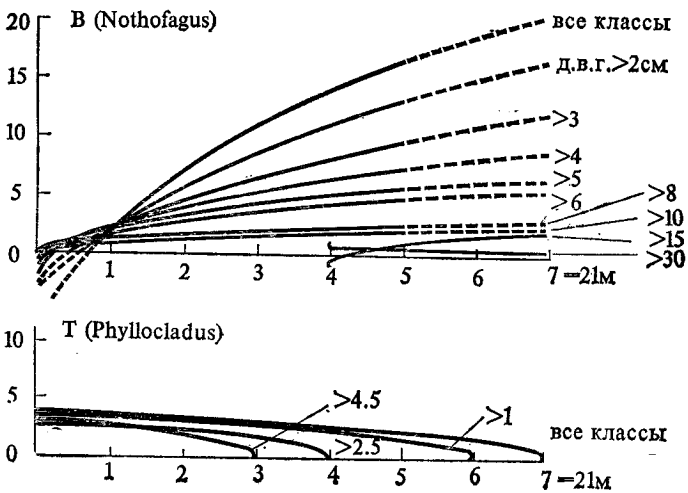


Рис. 16.15. Параболические кривые, полученные подгонкой к данным рис. 16.14 для Nothophagus и Phyllocladus. (Любезно предоставлено Кеном Эштоном.)

двигался всё время. *Nothofagus* быстро продвинулся и стабилизировался.

Даже из такого предварительного анализа полученных Эштоном данных (из которых приведена лишь небольшая часть) видно, что имеется определенное сходство с предположенным механизмом распространения волны и, во всяком случае, видна ценность подгоночных параболических кривых для получения истории трансекты. Однако Эштон замечает, что волны, характерные для катастрофы типа складки, обычно встречаются в виде сложных, множественных форм, причем обнаруживаются последовательности волн, движущихся одна за другой. Вероятно, по ним можно проследить вызвавшие их нарушения среды.

Обещаны дальнейшие результаты, и они могут появиться прежде, чем эта книга выйдет в свет. Но в любом случае конечный результат менее важен для наших целей, чем сама процедура; наша цель состоит не в провозглашении Большого Триумфа теории катастроф, а в том, чтобы наметить пути ее возможного использования и количественной проверки в экологии. Если никакие критерии такого рода, предлагаемые моделями катастроф малых размерностей, не дадут разумного согласия с опытом, этот подход следует оставить. Если же накопится опыт его успешного использования, то это создаст основу для понимания более сложных явлений с точки зрения теории катастроф с управляющими параметрами.

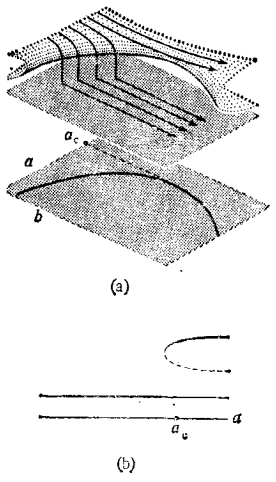
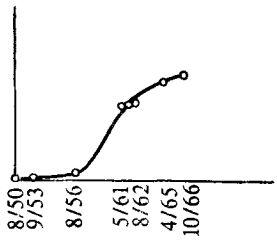


Рис. 16.16

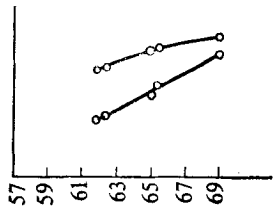
11 Как стабилизируются границы

По-прежнему допуская применимость теории катастроф с принципом промедления и быстрыми прыжками, мы можем вывести всё интересующее нас из рис. 16.16. Зиман [157] первый указал, что граница такого рода, останавливаясь в своем движении, должна замедляться вовсе не экспоненциально, как, скажем, делает это маятник с сильным трением при возвращении в состояние равновесия; граница должна замедляться параболически [1], останавливаясь в определенный момент в некоторой точке a_c. Более поздние состояния должны выглядеть так, как на рис. 16.16 (b). Снова резуль-

[1] См. предыдущее подстрочное примечание. Факт параболического замедления инвариантен относительно диффеоморфизмов и не зависит — как думают некоторые авторы — от того, используются или нет канонические координаты, в которых катастрофа приобретает свою стандартную полиномиальную форму. Это очевидным образом следует из структурной устойчивости морсовских критических точек.



(a)



(b)



(c)

Рис. 16.17

таты о типичности и устойчивости, полученные Вассерманом [111], дают этому обоснование, при принятых общих предположениях о динамике.

Эштон [170] приводит свидетельства также и в пользу этого; работа здесь тоже еще не закончена, и дальнейшие результаты должны быть более значительными. Ледник Франца-Иосифа на острове Южном в Новой Зеландии в течение некоторого времени медленно отступал, и различные типы растительной жизни начали вторгаться в долину по мере отхода льда: лишайники, мхи, кустарники. Поскольку лед отступал, путешествие вверх по долине аналогично путешествию назад во времени в определенной точке долины. По фотографиям долины можно нанести на график форму и продвижение границы („линии кустарников"), разделяющей кусты и более мелкие растения. На рис. 16.17 (a) показано продвижение различных типов кустарника по морене на южной стороне долины; на рис. 16.17 (b) показаны пятна кустарниковых зарослей на северной стене; на рис. 16.17 (c) нанесена (в обращенном виде) линия кустарников на северной стене, спускающаяся вниз по долине до того места, где кустарник достигает ее дна. На трех из этих графиков имеется замедление; в области замедления графики отличаются от подогнанных параболических кривых менее чем на 1.4%. Наилучшее согласие, достижимое для экспоненциального замедления, оказывается менее хорошим. Здесь опять же должны быть собраны дополнительные данные.

12 Как начинается дифференциация

В §§ 9 и 10 речь шла о переменах в доминировании одного вида над другим; в экологии это достаточно обычно. Однако иногда первоначально непрерывные изменения превращаются в разрывные — так что мы в конце получаем границу — таким образом, что ни в одной данной точке пространства внезапных скачков не наблюдается. Как это согласовать с нашим общим подходом?

Простейший ответ, не связанный с отказом от предположений теории катастроф, что бифуркации устойчивы и подобны бифуркациям гладкой градиентной динамики (эти предположения Зиман называет в [157] предположениями о повторяемости, непрерывности и гомеостазе, понимая последний в смысле тенденции к биохимическому равновесию), заключается в том, чтобы отбросить предположение, что скачки при исчезновении равновесий происходят быстро. Тогда могут наблюдаться картины вроде изображенной на рис. 16.18, где посреди X возникает пятно из Y. Заметьте,

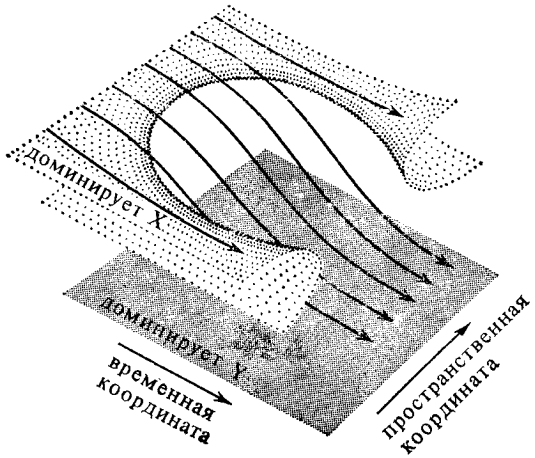


Рис. 16.18

что в момент фиксации положения границы (т. е. в момент, когда со складки сошли все точки, которые должны были это сделать) еще ни одна точка не отошла далеко от состояния «X доминирует», причем меньше всего сдвинулись точки, наиболее близкие к линии складок; еще не видно никакого разрыва. Кромка границы начинает появляться, когда локальное состояние тех точек в пространстве, которые уже пересекли складку, начинает отличаться от локального состояния точек, которые этого не сделали: очевидно, что эта кромка фиксирована в пространстве. Никакие из количественных выводов §§ 10 и 11 не остаются справедливыми в этой ситуации.

Таким образом, теорема Зимана [157] о том, что граница вначале должна двигаться, основывается еще на одном постулате, кроме упомянутых им, поскольку требование, чтобы скачки были быстрыми, у него фигурирует лишь неявно. Можно было бы возражать против этого постулата на том основании, что он требует быстрого ускорения вблизи (равновесных) точек складки, а это, мол, неразумно энергетически. Такие доводы, как и многие другие, основанные на „общих соображениях", легко отводятся экспериментом: предположение о „быстром скачке с быстрым последующим установлением нового равновесия" превосходно согласуется с реальным поведением машины Зимана. Впрочем, равным образом можно продемонстрировать в эксперименте и принцип промедления с медленными скачками, проводя опыты с машиной Зимана, погруженной в вязкую жидкость. Априори вполне возможно, чтобы одни биологические системы допускали быстрые скачки, а другие медленные.

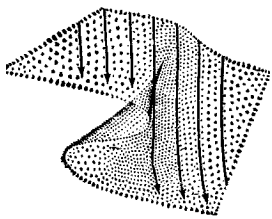


Рис. 16.19

(Отметим, что в условиях быстрого непрерывного изменения обстановки — скажем, при простом смещении положения равновесия без участия катастроф — медленный поиск равновесия будет, как правило, начинаться настолько далеко от нужного места, что геометрия катастроф бесполезна для описания происходящего.)

Если же добавить этот постулат быстрого скачка, то можно вывести, что разделение на два листа требует катастрофы сборки (рис. 16.19). Обычно направление „потока" будет достаточно отличаться от направления, касательного к острию, чтобы можно было наблюдать движение границы в пространстве по мере последовательного прохождения точек через складку (что, по-видимому, и происходит для линии кустарников на леднике Франца-Иосифа, а возможно, и для линии между *Balanus* и *Chthamalus* во взрослеющей популяции) и упрочение этой границы в стороне от того места, где она начала образовываться. Если бы принципы максимального промедления и быстрого скачка выполнялись строго, то можно было бы сказать, что *в типичном случае* всё так и происходит и что ничто другое не является структурно устойчивым. Однако даже и для явно градиентной динамики

$$\frac{dx}{dt} = -D_x\Phi$$

эти принципы служат лишь приближением (см. Постон [171]), становящимся всё менее справедливым при приближении к точке сборки. Именно недостаточно сильное притяжение к многообразию катастрофы в случае принципа Максвелла было причиной трудностей с флюктуациями и критическими показателями, которые мы обсуждали в гл. 14. Здесь оно приводит к тому, что чем ближе мы подходим к точке сборки, тем меньше градиентная динамика похожа на „промедление и скачок".

Лучшее, что мы в таком случае можем сказать, это что соображения типичности заставляют считать маловероятным явление, неотличимое (на том уровне различения, который делает принцип „промедления и скачка" полезным приближением) от изображенного на рис. 16.20. Невероятно, чтобы мы экспериментально обнаружили, что некоторые точки движутся по одну ее сторону, другие по другую, но ни одна не пересекает самой линии складок. Однако вероятность этого ненулевая, хотя оценить ее нелегко.

Принятие модели промедления и скачка в качестве точной модели и применение соображений типичности приводят к некоторым количественным предсказаниям (Зиман [157]),

таким как параболический рост высоты скачка или ненулевая начальная скорость и бесконечное [1] ускорение при „старте" границы, вызванное бесконечной кривизной в точке сборки. Но в свете предшествующего обсуждения экспериментальная их проверка представляет серьезные трудности. Зиманова теория параболической остановки, обсуждавшаяся в предыдущем параграфе, является гораздо более здравой.

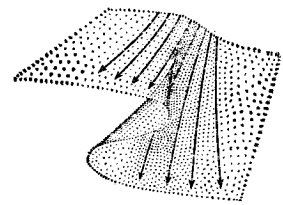


Рис. 16.20

ЭМБРИОЛОГИЯ

13 Дифференцировка клеток

Рассмотрим эмбрион — сперва оплодотворенное яйцо, затем бластулу, круглый шарик из одинаковых клеток. Клетки тождественны не только на глаз, но и по своим возможностям; у многих видов бластула, разделенная случайным образом на две равные части, произведет две полноценные особи без каких-либо нехваток отдельных частей. Однако потомки этих клеток оказываются индивидуально определимыми как клетки печени, нервные клетки, клетки кожи и т. д., связанные чрезвычайно специфическими геометрическими соотношениями. Главная задача эмбриологии — объяснить, как возникают проявления этих структурных различий, этот *морфогенез*.

Несмотря на то что растения и другие представители биоты, рассматривавшиеся нами в предыдущих параграфах, состоят из миллионов клеток, экология во многих отношениях менее сложна, чем один эмбрион. Нам не нужны были химия или аэродинамика пчел, чтобы получить соотношение (16.3) и § 1, и во многих экологических исследованиях достаточно рассматривать небольшое число взаимодействующих видов при сравнительно простой модели поведения каждого из них. (Аналогично тому как инженера-строителя, имеющего дело со сталью и бетоном, редко интересует квантовая физика твердого тела, и таких макроскопических характеристик, как модули упругости, вполне достаточно для проводимого им анализа.) Однако клетка содержит много тысяч различных веществ, каждое из которых важно и, как правило, связано с определенными местами в клетке (ядром, рибосомами и пр.). Как же подступиться к моделированию всего этого?

[1] Бесконечное, но убывающее столь стремительно, что следствие 1 из § 9 работы Зимана [157], гласящее, что начальное движение происходит с постоянной скоростью, оказывается разумным приближением.

В последние десятилетия основным подходом, имеющим за собой огромные достижения, была *модель генетического переключения* (в которой гены, ответственные за синтез различных белков, включены или выключены и взаимодействуют подобно триггерам цифровой вычислительной машины). Мы отложим ее рассмотрение до следующего параграфа, а сейчас обратимся к гладким моделям.

Клетку можно рассматривать как полупроницаемый мешок с химикалиями, причем между ней и соседями происходит обмен молекулами, а внутри нее происходят реакции, описываемые дифференциальными уравнениями. Первый заслуживающий внимания подход к моделям дифференцировки такого рода был развит Тьюрингом [172], который также был и первым настоящим теоретиком цифровых вычислительных машин. Уравнения, показывающие, как диффузия может сама по себе произвести пространственные вариации в распределении видов при *однородном* окружении (не меняющемся даже и гладко), можно найти у Хаделера, ан дер Хейдена и Роте [173]. Статья Тьюринга породила значительную литературу (хотя и много меньше, чем литература об абстрактных „машинах Тьюринга"), которая получила новую жизнь с привлечением методов современной теории динамических систем в духе Смейла [174, 175]. Совершенно ясно, однако, что динамику клетки не всегда можно трактовать как дифференциальное уравнение для средних концентраций веществ, поскольку не только эти вещества локализованы в пространстве, но большинство клеток содержит в огромном количестве складчатые мембраны, что усложняет реакции. Сводя эволюционистскую аргументацию к простой телеологии, можно было бы сказать, что такого сложного строения не было бы, если бы оно не влияло существенным образом на динамику клетки.

Но гладкая модель с реакциями, происходящими в каждой точке (с заменой дискретной клеточной структуры на некоторый континуум), и диффузией между ними по-своему интересна как для биологии, так и для теории химических веществ в растворе (где эта модель является приближенной в гораздо меньшей степени). Таким *уравнениям реакции-диффузии* было посвящено много работ, особенно с тех пор как стало известно эффектное образование геометрических структур при реакции Жаботинского. (Изложение с фотографиями имеется у Уинфри [176, 177]; из математической литературы см., например, Ховард [178].) В частности, из работы Коупелла и Ховарда [179] становится ясным, что наивный подход, основанный на динамическом описании событий, происходящих в каждой точке,— гра-

диентном или каком-либо другом — неадекватен; но, как и для каустик, геометрия катастроф, по-видимому, играет свою роль, см., например, Гукенхаймер [180]. В подходе брюссельской школы (см., скажем, Пригожин [181]), более элементарном с математической точки зрения, бифуркационные диаграммы в большинстве случаев, по-видимому, представляют собой частные неустойчивые сечения каспоидных катастроф; это заставляет думать, что возможен — и полезен — синтез с теорией катастроф, лишь только будет проделана определенная работа по приведению в порядок системы математических обозначений.

Подход элементарной теории катастроф, при котором клетки трактуются как континуум для дифференциальных уравнений, а диффузия служит для обеспечения пространственной непрерывности параметров уравнений, а не входит активно в динамику, является тем самым в принципе ложным. Но также как и в случае уравнений гидродинамики и подхода теории катастроф к функциям тока, принципиальная сомнительность и громадный практический успех которых были описаны в гл. 11, здесь нет причин отказываться от него. Его следует рассматривать как подход, предсказывающий, что было бы полезно искать, а не что мы обязательно должны увидеть. В настоящее время лишь эксперимент может служить для определения того, какие аспекты клеточного роста и дифференцировки могут быть эффективно описаны при помощи этого подхода, а какие не могут. Развитие более изощренных теорий даст критерии надежности его употребления, в точности так же, как мы имеем критерий того, насколько близко к каустике можно пользоваться приближением геометрической оптики (§ 8 гл. 12), или же критерий Гинзбурга для применимости теории Ландау (§ 13 гл. 14). В физике геометрической оптикой и теорией Ландау пользуются вплоть до пределов их строгой применимости — а часто и дальше — из-за их большого удобства. Орбиты космических кораблей тоже рассчитывают не релятивистски.

Очень вероятно, что и в биологии существует подобное прочное место для элементарной теории катастроф. Наиболее ограничительной является гипотеза о том, что бифуркации локальных дифференциальных уравнений являются градиентно-подобными (т. е. могут быть приведены к бифуркациям подходящим образом построенных функций Ляпунова; это не значит, что сама динамика необходимо градиентная). Однако многие заключения, полученные первоначально в предположении градиентно-подобного поведения, на самом деле оказываются справедливыми в бо-

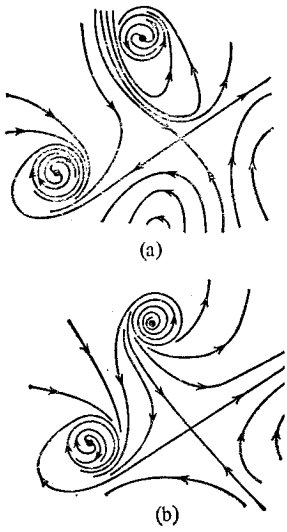


Рис. 16.21

лее широкой области. Например, на рис. 16.21 показано устойчивое явление коразмерности один, которое не может быть сведено к складке. В случае (a) имеются два притягивающих цикла, изображающие собой два колебательных состояния, возможные для клетки. При изменении к случаю (b) верхний цикл исчезает в результате нелокального взаимодействия с седлом, и любая клетка, обошедшая его, начинает двигаться прямо к другому циклу — в конкретных моделях обычно очень быстро. (Если вслед за тем динамика вернется к случаю (a), то клетка этого не заметит; следует ожидать, что наблюдаемое поведение будет очень хорошо моделироваться принципом промедления, хотя и с обычными осторожностями.) Множество таких точек скачка в типичном случае гладко и имеет коразмерность один, точно также как и линии или поверхности складок; то же самое рассуждение, которое приводит к зиманову закону параболической стабилизации границ, применимо и здесь. Это служит иллюстрацией того, что математическим инструментарием биолога должно быть скорее знание теории динамических систем вообще, чем список теорем, который мы дали в гл. 8. Следует всячески приветствовать включение в биологические исследовательские группы надлежащим образом ориентированных математиков; ввиду же наблюдающегося в последнее время перепроизводства квалифицированных специалистов с докторской степенью, недостатка в них не будет.

Эти замечания, разумеется, имеют ценность при условии, что такая математика действительно может быть с пользой применена в эмбриологии. (Мы считаем, что для экологии это установлено.) Главное, что тут уже можно продемонстрировать,— это теория гаструляции, принадлежащая Зиману и Куку (Зиман [157, 182], Кук и Зиман [183]), но ее фоном служит детальная эмбриология, а изложить ее вкратце неспециалисту гораздо сложнее, чем даже гидродинамику, которая из всех наших приложений потребовала больше всего места для предварительных объяснений (гл. 11). Мы просто не сумеем проделать это должным образом на том пространстве, которым мы здесь располагаем, и потому отсылаем читателя к оригинальным статьям; весьма удобно, что все они собраны вместе в сборнике работ Зимана [48]. Эта модель еще не получила общего признания, а даже если бы и получила, она, без сомнения, была бы при этом модифицирована, но во всяком случае она привела к успешным экспериментам. Было очень интересно в наших беседах с биологами, на которых до этого теория катастроф не производила особого впечатления, встретиться с реак-

цией, что вот, наконец, есть теория, которую по крайней мере можно принять всерьез и обсуждать *как биологическую*, независимо от математических рассуждений — строгих или по аналогии,— лежащих за ней. Это само по себе важное достижение, так как глубины книги Тома чрезвычайно трудно поддаются передаче. Зиману, который описывает свою работу как попытку осуществить на практике программу этой книги, потребовалось несколько лет взаимных усилий для нахождения общего языка с Куком и другими биологами.

14 Катастрофы переключения

Выше мы уже упомянули, не останавливаясь на ней подробнее, важную модель генных переключений в динамике клетки. В некоторых кругах ученых эта парадигма стала столь доминирующей, что работу клетки стали воспринимать почти буквально как действие большой вычислительной программы. В этой картине, начиная с Тьюринга и далее, не оставляют никакой роли для дифференциальной динамики. Конечный автомат действует согласно законам комбинаторики, что заставляет отказаться от описания с помощью анализа бесконечно малых и всего, что с ним связано. Хотя программа, содержащаяся в дополнении 1, предназначена для использования в математическом анализе, никто не станет применять математический анализ для изучения работы вычислительной машины [1]. С этой точки зрения молекулярная биология занимает центральное положение, будучи ключом для нахождения всех правил переключения и для прочтения Великой Программы Жизни, включая и морфогенез.

В пользу такого подхода можно сказать много. Он дает нам не просто абстрактную, но медицинскую информацию — „расшифровку" различных заболеваний, прояснение роли антигенов в иммунологии и т. д. Но вывод о том, что мы поймем систему, лишь только узнаем, как связаны друг с другом ее переключения, вызывает большие сомнения; оставляя в стороне общеизвестную трудность понимания программы, написанной кем-нибудь другим, отметим, что существуют глубокие теоремы, которые необходимо учитывать. А именно, в общем случае для абстрактной машины Тьюринга *даже в принципе* есть лишь один-единствен-

[1] Это не так. См., например, книгу Д. Кнута „Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы" (М.: Мир, 1976).— *Прим. ред.*

ный способ узнать такие элементарные факты о ее работе, как то, остановится она или нет через конечное число шагов,— это... запустить ее и посмотреть! (Теперь изучают и другие типы абстрактных автоматов, например со встроенными в них оракулами, но миазмы формальной неразрешимости пропитывают весь предмет.) Ясно, что „понимание" поведения такой машины осуществимо лишь в более слабом смысле, чем устраивающее нас понимание морфогенеза. Разумеется, это не значит, что клетка не может аккуратно описываться моделью конечного автомата.

Как бы то ни было, трудно принять, что правила переключения генов могут быть вполне адекватны в качестве модели. Несомненно, что в клетке содержатся химические вещества в различных концентрапиях, а реакции, в которые они вступают, моделируются, как согласится каждый, дифференциальными уравнениями, причем эти реакции часто составляют, помимо всего прочего, функции клетки в объемлющем организме (например, удаление шлаков, накапливание жира,...— весь химический метаболизм). Такие реакции чрезвычайно подвержены влиянию внешних по отношению к клетке условий, поскольку эти условия — как раз то, с чем они предназначены иметь дело. Для управляющей переключательной системы необходима обратная связь с динамикой, поскольку система не может знать заранее, какие ферменты должны быть синтезированы в те или иные моменты. Связь между переключениями, чаще всего моделируемая включением или выключением гена в зависимости от того, с какой стороны от порогового значения X_c лежит данная концентрация X, оказывается, таким образом, откликающейся на динамику. Обычная неявная гипотеза здесь состоит в том, что X является *функцией* (вообще говоря, нелинейной) от различных $Y_1, \ldots, Y_N$; сюда включают концентрации шлаков, температуру, вещества, диффундирующие из других клеток.

Здесь, пожалуй, слишком упрощенно понимается роль динамики химических реакций, точно также как в полностью дифференциальной модели недооценивается роль переключений. Эксперимент показывает, что важные гены действительно включаются и выключаются, и допущение, что для описания этого достаточно скачков теоретико-катастрофической модели самих по себе, не будет удовлетворительным (как раз потому, что такие модели предсказывают вещи вроде параболического возрастания размера скачка: разница между включенным и выключенным состоянием — отнюдь не то, что может расти параболически). Нам приходится допустить модель переключения с „пороговым зна-

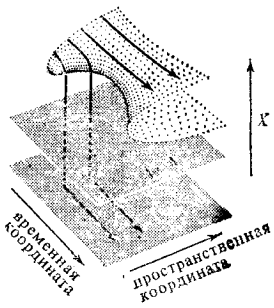


Рис. 16.22

чением X_c для X", но мы надеемся, что читатель, который добрался до этой главы, прочтя предыдущие, посчитает простую функциональную зависимость $X(Y_1, \ldots, Y_N)$ неправдоподобно специальным случаем. Если динамика все же дает *единственное* значение X для каждой комбинации влияющих факторов $Y_1, \ldots, Y_N$, то можно показать, обобщая рассмотрения гл. 6 на случай более общей динамики, что этот факт является устойчивым относительно малых возмущений; поэтому нельзя сказать, что типично он не будет иметь места (понимая „типичность" в смысле гл. 7), однако несомненно, что это весьма и весьма частный случай. Мы выявили вездесущность кратных равновесий и бифуркаций структуры равновесных состояний для гораздо более простых систем; с чего бы сложной динамике клетки вдруг быть в этом единственном пункте столь простой?

Давайте рассмотрим простейшую динамику, выходящую за рамки тривиальной функциональной связи $X=X(Y_1, \ldots, Y_N)$, — градиентно-подобную геометрию бифуркации с принципом промедления и быстрого скачка. Первое, что мы обнаружим,— это опять же зиманов закон параболической остановки. Граница на рис. 16.22 (между теми клетками, для которых X уже прошло через критическое значение X_c, так что они переключились в другое состояние, и теми, для которых еще не прошло) движется в точности так же, как на рис. 16.16. Подобный пороговый уровень, который должен проходиться при скачках, можно ввести во многие теоретико-катастрофические модели, и это дает устойчивые модели с аналогичными свойствами. Однако свойства измененной модели не будут абсолютно тождественны свойствам исходной, так как наличие дискретных состояний типа включено / выключено (или вытекающие отсюда следствия) изменяет такие предсказания, как параболическая локальная геометрия рис. 16.12. Наблюдения Эштона, описанные в § 10, очевидно, имели место в контексте *без* переключений. В экологии леса для них нет очевидных причин, хотя экологические дискуссии о „лими-

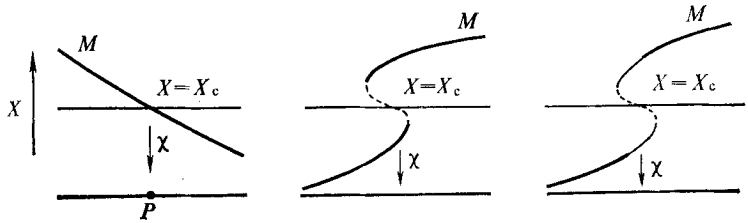


Рис. 16.23

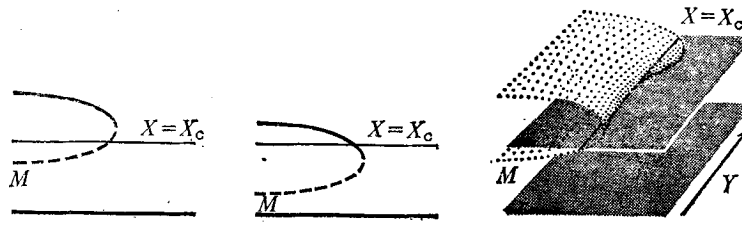


Рис. 16.24

тирующем факторе" исходят как раз из этого допущения (вместе с допущением о функциональной зависимости, поставленным нами выше под сомнение). Количественные геометрические следствия для этих моделей настолько различны, что в программе экспериментальных исследований типа проводимой Эштоном вполне возможно в отдельных случаях произвести выбор между ними.

Несколько более новый для теории катастроф тип поведения возникает, когда поверхность катастрофы и уровень порога имеют пересечение. На рис. 16.23 (a) переход в пространстве управления через точку P немедленно приводит к *обратимому* внезапному изменению (стандартная модель генного переключения; в теории катастроф это более известно как результат принципа Максвелла). Ситуация же, представленная на рис. 16.23 (b), дает гистерезис. Если „управляющей" переменной служит точка физического пространства, то в случае рис. 16.23(a) мы имеем границу, которая будет сдвигаться при малых изменениях многообразия катастрофы M со временем в результате пересечения клетками порога переключения. В случае же рис. 16.23 (b) принцип промедления даст в типичном случае множество состояний, подобное жирной кривой на рис. 16.23 (c), с разрывом, на положение которого малые изменения M не влияют.

Для двух различных геометрий вроде изображенных на рис. 16.24 (a) и (b) переход от одной из них к другой, происходящий при изменении второго управляющего параметра Y, типично будет таким, как показано на рис. 16.24 (c). Локальная геометрия типичных ситуаций, которые тут встречаются при числе управляющих параметров не выше четырех, описывается списком многочленов из § 7, поскольку применяется в точности та же самая алгебра определенности и деформации независимо от того, будет ли $X=X_c$ дальше интерпретироваться как граница, определяющая ограничение, или как порог. Соответствующее поведение и

геометрия бифуркационных множеств, однако, совершенно различны для этих двух интерпретаций — сравните между собой рис. 16.24(c) и 16.9(c). Эти два типа геометрий будут проанализированы в книге Питта и Постона [158].

Чтобы на основе такой геометрии „катастроф переключения" построить детальные теории конкретных явлений морфогенеза, потребуются столь же напряженные усилия на стыке двух наук, каких потребовала модель гаструляции Зимана и Кука, однако дело сто́ит того. Заметим здесь снова, что мы говорим о приложении не списка Тома, а *томистских методов*. Единственная математика, которой можно надежно пользоваться, не понимая рассуждений, на которых она основана, это таблица умножения, но даже и здесь такое использование вслепую ведет к неэффективности.

17 ПРОБЛЕМЫ СОЦИОЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Попытки применения теории катастроф в социальных науках *ставят нас перед лицом* общих проблем методологии этих наук, а вовсе не *решают* их автоматически. Вместо того чтобы стараться представить здесь обзор великого разнообразия идей и предложений, имеющихся в литературе (многие из них собраны у Зимана [48]), мы посмотрим на примерах, каким образом теория катастроф может (или не может) быть с пользой применена в конкретных ситуациях и как можно проверить такие ее применения. Спорные вопросы были в последнее время в значительной мере прояснены в результате бурного роста числа хорошо обоснованных физических приложений, нашедшего свое отражение в предыдущих главах; некоторые критики социального контекста теории высказывали возражения общего характера, и для них мы теперь можем представить контрпримеры успешного ее применения в физике. Это освобождает нам руки для исследования проблем (а их множество), которые более характерны для социальных наук.

В конце главы мы исследуем одну простую модель, показывающую, что хотя геометрия, которой мы занимались в этой книге, может иметь полезные применения в социологическом моделировании, но гипотезы, обусловливающие ее применимость,— это вовсе не универсальные истины. Заключения, выведенные из них, могут быть полезными (мы считаем, что они часто будут таковыми), но их нельзя рассматривать как Теоремы об Обществе.

1 Выбор переменных

Большинство переменных, составляющих ныне основу физики, потребовали сотен лет для их нахождения. Что такое „скорость", по-видимому, понимал уже Эвдокс (см. Зиман [184]), но в обиход научного мышления это понятие вошло лишь спустя почти два тысячелетия. „Энергия", „импульс", „температура", „вероятность" (как *число*), „заряд",—

все они появились благодаря неустанной работе гениев. (Процесс этот еще продолжается, как например в теперешнем поиске „шарма" у кварков и в проблеме его распознавания, если он существует.) Эти физические величины не были очевидными, и лишь их великолепная согласованность и успешность их применения позволили неявно скрытой в них точке зрения на мир стать доминирующей в науке. Благодаря им мир выглядит для нас совсем не таким, каким он выглядел для ученых средневековья.

Столь же крутое изменение величин, используемых в мышлении, имело место и в социальных науках. Средневековый ученый, занятый исследованием *справедливой цены* и зла *ростовщичества*, не смог бы сравнить свои величины с величинами, используемыми современным теоретиком *рыночной цены*, исследующим слишком высокие или слишком низкие *процентные ставки*. Здесь можно было бы повторить слова Блейка: „Дурак видит не то самое дерево, что видит умный" — за исключением предположения, что один из этих экономистов дурак; решающий момент здесь — разница взглядов. Современный анализ не обесценивает прежний; действительно, недавние истории в ряде стран с продовольственными товарами и нефтью показывают, что правительства, не учитывающие сложившейся точки зрения на справедливую цену, имеют столько же неприятностей, как и те, которые пренебрегают учетом рыночной цены.

Как бы ни провозглашали себя экономические теории „научными" или „объективными", для выбора модели решающей остается идеология (мировоззрение, парадигма). Не в меньшей степени это верно и в физике — Эйнштейн не мог принять „бога, играющего в кости" в квантовой механике, а Майкельсон (один из авторов опыта Майкельсона — Морли) умер в 1933 г., так и не приняв теории относительности. Можно считать, что в каждом из этих двух случаев весь вопрос в том, какие переменные „действительно" *описывают* систему; детали того, как связаны между собой эти переменные, почти что второстепенны. У нас не получится никакого разумного обсуждения вопроса о том, каким гамильтонианом следует моделировать лазер (гл. 15), пока мы не примем соглашения, что „состояния" суть точки комплексного гильбертова пространства, в котором „наблюдаемые" являются операторами. Никаких таких общепринятых соглашений не существует для социологических теорий, кроме как внутри противоборствующих школ; поэтому осмысленные дебаты имеют место обычно *внутри* школ. Дискуссия между экономистами различных школ

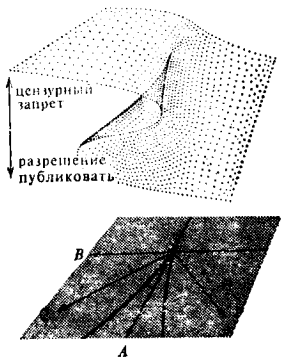


Рис. 17.1

чаще всего превращается в соревнование терминологий. (Это имеет печальные последствия. Представитель одной из школ, совершенно справедливо заметив, что дебаты внутри его собственной группы конструктивны и разумны, а между ней и другой группой — совсем напротив, склонен заключить, что это именно *его школа* разумна, а другая нет.)

Любая социологическая модель, таким образом, неважно словесная или математическая, всегда неявно несет в себе идеологию.

Способ преподнесения математического моделирования, практикуемый большинством школ, пытается скрыть этот факт, в чем легко убедиться, пройдясь, скажем, по номерам журнала „Econometrica"; стремление к маскировке само по себе столь же идеологично, как и попытки проследить детальную связь с мыслями председателя Мао, которыми иной раз отличаются китайские статьи по физике высоких энергий.

Всё это не означает, что наука не может здесь продвигаться вперед весьма эффективно,— не в большей степени, чем вопрос об окончательной „истинности" выбора пространства $H^2 \cap H_0^1$ для описания возможных положений стержня в § 7 гл. 13 мешает успеху теории упругости. Скорее это означает, что критика в адрес любой математической модели — неважно, теоретико-катастрофической или нет,— должна разграничивать возражения к идеологии и к математике в большей степени, чем это было принято до сих пор. Нам удобно будет проиллюстрировать это на примере одной весьма гипотетической модели, предлагающей геометрическое описание цензурирования (Иснард и Зиман [185]). Мы не будем обсуждать ее математических достоинств и пороков; нас интересует скрытое в ней мировоззрение. В этой модели предполагается, что реакция тех, кому приходится цензурировать искусство, может быть описана катастрофой сборки (рис. 17.1), где A — это „эстетическая ценность", а B — „эротическое содержание". Подробное рассмотрение этой модели показывает, что она является во всяком случае разумной геометризацией представлений либерального истэблишмента о том, как принимаются цензурные решения (обществом или властями). Радикалы могли бы подвергнуть ее критике следующим образом:

„Суждение об эстетической ценности зависит от реакции на сексуальное содержание, поэтому указанные переменные не могут быть разделены. (Действительно, если эротическое содержание и не совпадает с самой эстетической ценностью, то уж во всяком случае его воздействие обратно

анестезирующему.[1]) И что еще более важно, те, кого сексуальное беспокойство превращает в цензоров, реагируют не непосредственно на эротическое содержание, а на опасность сексуальности, ее же они усматривают в том, что мирной копуляции отвечает пониженная обороноспособность. Половое насилие часто встречается в *разрешенных* книгах и фильмах, в особенности в достойном восхваления контексте войны; что делало старые секс-фильмы и комиксы полностью неприемлемыми, так это отсутствие в них насилия. В них едва ли когда-нибудь причиняли боль (см. анонимную книгу [186], где исследована обширная выборка из таких фильмов). Различие между фильмом „Соломенные псы" и самым „крепким порно" лишь в первобытной жестокости первого. Лучшим описанием, если уж вы настаиваете на катастрофической картинке, было бы использование на рис. 17.1 осей P и Q, представляющих соответственно „насилие" и „сексуальность"."

Мы не делаем попыток утвердить ни этот взгляд на политику в области секса, ни какую-либо другую модель, ему отвечающую. Напротив, наша точка зрения состоит в том, что между теми, кто выражает с помощью законов представление, что эротическое содержание должно „искупаться" литературной ценностью, и теми, кто рассматривает цензурирование как действия *людей*, нуждающихся в „спасении", лежит пропасть, которая не имеет отношения к математике. Если бы обе стороны обратились к числам, они бы восприняли и измерили настолько различные величины, что их гипотезы не смогли бы быть взаимно проверены по данным другой стороны.

Роль математики не в том, чтобы посредничать между моделями, а совсем в другом: прояснить каждую отдельную теорию и обнаружить больше, чем видно на глаз, вытекающих из нее следствий, чтобы затем можно было сопоставить их с наблюдениями. Мы показали в предыдущих главах, насколько эффективно может использоваться теория катастроф для получения новых предсказаний на основе испытанных физических гипотез. Мы можем отнести оптику, механику жидкостей, теорию упругости и т. д. к „моделям, порождающим катастрофы". В следующем параграфе мы опишем вкратце один пример такого же рода, отправляясь от распространенных общих *экономических* гипотез, прежде чем обратиться затем к тонкостям использования катастроф *в качестве* моделей.

[1] В оригинале игра слов: aesthetic — anaesthetic.— *Прим. ред.*

2 Археология и внезапные изменения

Из-за недостатка места нам приходится говорить об этой теории кратко; значительно подробнее она изложена у Ренфри и Постона [159]. Аналогичные соображения могут быть применены к анализу размера и размещения торговых центров (Постон и Уилсон [160]).

Как современные, так и древние поселения в сельскохозяйственных районах демонстрируют большое разнообразие типов — от крайнего *рассредоточения* населения по отдельным разбросанным домам до концентрации его в городах, насчитывающих до 5000 жителей (хотя и не обязательно играющих „центральную" роль по отношению к населению, не живущему в городе). Далее, археологические находки показывают, что происходили внезапные переходы между этими типами. В археологической литературе всех частей света эти перемены рассматриваются (при отсутствии признаков стихийных бедствий) как веское свидетельство вторжения нового „народа", повергающего в прах города или строящего их.

Они не являются такими свидетельствами.

Экономика разделения труда для людей во многом та же, что и для пчел (см. § 2 гл. 16). Экономическая невыгодность передвижения на большое расстояние для работы в поле соответствует невыгодности далеких полетов в поисках нектара. Если мы допустим, что в течение значительных периодов времени удерживаются лишь такие схемы размещения населения, которые локально максимизируют экономическую выгоду (гипотеза о „рационально-экономическом человеке"), то применима геометрия из § 3 гл. 16. (На самом деле все рассуждения и обсуждения были проведены сначала именно для этого случая, а не для пчел.) Поэтому постепенные гладкие изменения плодородия почвы или численности населения или же *медленные* внешние влияния (проникновение и внедрение новой техники или новых агротехнических методов и сельскохозяйственных культур) вынуждают население, „максимизирующее свою выгоду", осуществлять внезапные изменения. (У Ренфри и Постона [159] это обсуждение распространено на преимущества, связанные с обороноспособностью, на „неэкономические преимущества" более легкого сбора гражданских и церковных налогов, а также на переселения с равнин на холмы и наоборот.) Предположения, аналогичные предположениям (a) и (b) из § 2 гл. 16, легко выполнимы и, вероятно, часто выполнялись.

Следовательно, такие внезапные изменения при весьма

общих допущениях должны бы происходить достаточно часто и без внезапных внешних воздействий. Из разумных экономических гипотез *вытекает* возможность таких скачков, и поэтому скачки не являются доказательством вторжений.

Разумеется, необходима большая работа, чтобы провести численный анализ для конкретных случаев, но здесь именно качественные заключения имеют наибольшее отношение к предыдущим исследованиям. Подобно тому как вся сумма экспериментальных данных по изменениям электрического поля при росте растений была перечеркнута экспериментом, показавшим, что прибор ведет себя совершенно так же, если вы унесете растение, значительная часть исторической аргументации улетучивается в результате доказательства того факта, что по-прежнему можно получить внезапные изменения, даже если исключить вторжения. Из работ, посвященных *не* опровергнутым в данный момент точкам зрения, не всегда бывает ясно, насколько прогресс в любой науке зависит от таких очистительных акций.

3 Катастрофы как модели

Для описанной выше археологической модели не *требуется* теория катастроф (в том смысле, в каком она требуется для изучения течений в шестивалковой мельнице из гл. 11), во всяком случае эта модель нуждается в ней не в большей степени, чем сборка ван дер Ваальса (гл. 14). Она может быть выведена и объяснена, устоит или падёт и без этой теории. Теория катастроф просто показывает ее естественность и гарантирует, что две относящиеся сюда катастрофы (складка и еще одна катастрофа с ограничением) являются структурно устойчивыми и типичными явлениями при данном числе измерений модели. Эта модель заставляет предположить, что много катастроф будет обнаружено в математической экономике, как только эта наука откажется от своего пристрастия к таинственным гипотезам, подразумевающим существование единственного оптимума, к которому всех нас ведет „невидимая рука рынка", и обратится к множественным оптимумам, встречаемым на рыночной площади.

Однако много ли можно вывести непосредственно из самой теории катастроф? Приняв определенную точку зрения на то, какого рода переменные описывают систему в целом (или, допустим, остановившись на точках зрения организаторов переписей 1950, 1960 и 1970 гг., поскольку мы не можем вернуться в эти годы с другими вопросами), много

ли мы можем сказать о том, каким типичным геометриям будут подчиняться имеющиеся данные? Идея здесь такая: предположить, что точка, изображающая состояние системы, обычно находится вблизи многообразия катастрофы, и дальше рассуждать, исходя из соображений типичности.

Иногда раздаются голоса, возражающие против этой процедуры, поскольку природа силы, удерживающей точку на многообразии катастрофы (потенциал, функция Ляпунова и т. д.), не определена; это те же голоса, mutatis mutandis, что возражали против необъясненных сил, действующих на расстоянии, в ньютоновой модели тяготения. Вполне законно будет сказать вместе с Ньютоном: „Hypothesis non fingo"[1], и приступить к проверке модели. Можно по-прежнему надеяться на улучшенную теорию, которая даст более подробные объяснения действующим силам, как это сделала общая теория относительности для силы тяготения, но *требовать* этого неоправданно. (Никто не спрашивает, какой потенциал удерживает общественные системы на плоскостях и гиперплоскостях, столь прилежно изыскиваемых современной численной социологией. Точно также нам не нужно было в гл. 11 заниматься обсуждением динамики при рассмотрении блистательно успешного приложения к исследованию течений в полимерных растворах.) Чтобы проверить модель, мы должны, как делал Ньютон, получить предсказания с помощью отвечающей ей геометрии и сравнить их с данными наблюдений. Какие же проверяемые предсказания можем мы получить из сделанного общего допущения в нашем случае?

Ответ зависит, причем довольно сложно, от числа относящихся к делу измерений. Если мы можем разумно определить r внешних переменных (таких как положение в пространстве и времени), *где r достаточно мало*, и указать N внутренних переменных (безразлично сколько), по которым проводится экстремизация, то дело обстоит хорошо. (*Необходимо*, чтобы мы могли считать, что система обычно находится в состоянии, являющемся локально экстремальным по *всем* N направлениям.) В типичном случае, если исключить симметрии и пр., локальное поведение этих N переменных будет соответствовать списку катастроф, встречаемых при не более чем r параметрах управления. (Если некоторые из N внутренних переменных ограничены посредством неравенств, то этот список должен включать в себя катастрофы с ограничениями из §§ 6 и 7 гл. 16.) Бо-

[1] Гипотез не строю *(лат.)*.— *Прим. ред.*

лее того, для катастрофы коранга m почти любые m из N переменных годятся для полного описания, поскольку лемма о расщеплении (гл. 6) гарантирует, что указанное поведение полностью описывается некоторым m-мерным многообразием C в $\mathbb{R}^N$, гладко изменяющимся при изменении внешних параметров. Например, если $m=1$, то C — кривая; как видно из рис. 17.2, каждая из переменных x, y дает вполне пригодную параметризацию C. Беря $(x_1, \ldots, x_N)$ вместо (x, y), получаем, что в типичном случае каждая из переменных x_i дает пригодную параметризацию. Всё это верно независимо от N, которое может быть любым конечным числом, сколь угодно большим.

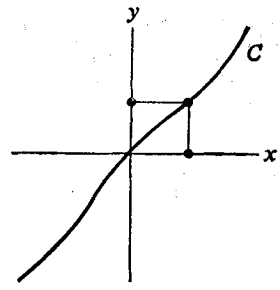


Рис. 17.2

Таково, например, положение дел в области экологических приложений, обсуждавшихся в §§ 8—12 гл. 16, которое представляется сейчас, когда мы сдаем книгу в печать, очень многообещающим в экспериментальном отношении. Размерность r в рассматриваемых здесь вопросах разумно принять равной двум — одна для пространства, одна для времени,— и полученные до сих пор данные хорошо укладываются в типичные предсказания для $r=2$. Неформальные соображения типичности, на которых основаны теории фазовых переходов — как теория Ландау, так и ренормализационная теория (см. §§ 7 и 12 гл. 14),— безусловно, чрезвычайно плодотворны.

Однако, что, если r велико? В макроэкономике это, бесспорно, так; например, мировая экономика зависит от урожая, а стало быть, от погоды во многих различных местах. Погода пока еще не выбирается из соображений максимизации полезности и, следовательно, должна рассматриваться как внешняя переменная для экономики. (В метеорологии она является внутренней переменной по определению, но динамика здесь во всяком случае более общая, чем динамика градиентных систем, и, вероятно, „хаотическая" в смысле, поясняемом ниже в § 7.) Читатель, несомненно, может увеличивать число таких внешних факторов для любой данной макроэкономической задачи быстрее, чем успевать их записывать. Возникающие отсюда трудности можно прекрасно проиллюстрировать на примере катастрофы складки, поэтому допустим на минуту, что ничего более сложного не происходит.

На рис. 17.3 показано двумерное управление переменной x посредством динамики катастрофы. Предположим, что в точке O мы имеем потенциал

$$x^2 + (\text{морсовская функция от остальных поведенческих переменных}).$$

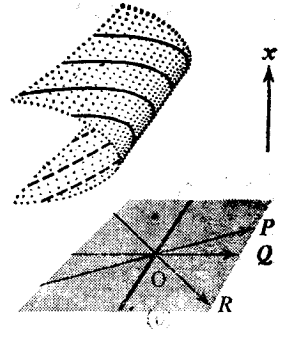


Рис. 17.3

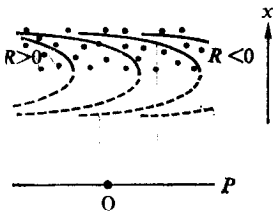


Рис. 17.4

Тогда в типичном случае (в силу соображений трансверсальности и теорем гл. 8) через O пройдет *кривая* складок. Любая из осей P, Q, R, указанных на рисунке, будет трансверсальна к ней, и поэтому любая из них может служить в качестве той единственной переменной деформации, которая нужна в точке складки. И однако...

Мы уже видели, что на рис. 17.2 почти любая внутренняя переменная годится для маркировки поведения, придерживающегося кривой C; мы могли бы использовать любую из переменных x, y и *забыть о другой*. Говоря более формально, почти любая проекция на подпространство m поведенческих переменных сохраняет структуру катастрофы коранга m. Для переменных деформации глубокие теоремы гарантируют *существование* проекции на подпространство всего лишь нескольких таких переменных, которая сохраняет структуру катастрофы; на этот раз важно то, что почти все другие проекции уничтожают ее. Рисунок 17.4 показывает, что получается, если выбрать в качестве управляющей переменной P, а тот факт, что R может меняться, просто забыть. Кривые $R=\text{const}$ на рис. 17.3 проектируются при этом, как изображено на рис. 17.4. Точки, которые представляют „совершенные" данные, лежащие точно на поверхности катастрофы, никак не выявляют на рис. 17.4 геометрию складки. Чтобы как следует выявить складку, нам нужно найти правильную проекцию на ось P, параллельную линии складок; это очень редко означает простое отбрасывание переменных. Как правило, она не будет даже линейной, но уже для того только, чтобы определить ее линейную часть, нужно r—1 чисел. Проекция на две переменные, необходимая для сборки, требует $2(r-2)$ чисел. Если данные содержат 100 управляющих переменных, то это означает необходимость определения около 200 чисел. Если из этих 100 переменных пропущена одна важная, вроде R, по которой происходят существенные изменения, результат все еще будет такой, как на рис. 17.4.

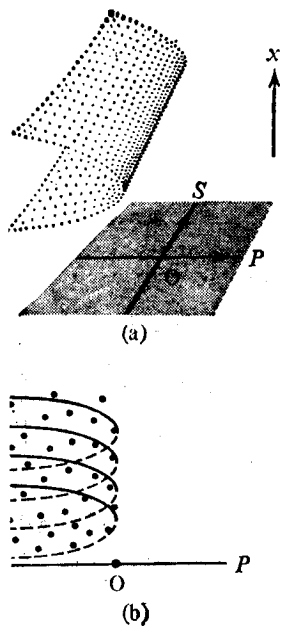


Рис. 17.5

Далее напомним, что при указанной проекции требуется зависящая от управляющих переменных замена параметризующей поведение переменной x. Если управляющую переменную S можно спроектировать на ось P простым забыванием о ней, но при этом складка лежит над осью S не горизонтально (рис. 17.5(a)), то игнорирование S может растянуть картину по вертикали, как на рис. 17.5(b).

С помощью некоторой комбинации неизмеренных параметров, таких как R или S, можно, следовательно, равномерно распределить точные данные о складке на всю (P, x)-плоскость!

(Разумеется, если мы можем ограничиться рассмотрением действительно одномерного *сечения* в пространстве параметров управления, двигаясь только по оси P, то эти проблемы не возникнут. Успехи физических наук связаны именно с этой тактикой фиксации значений все большего числа переменных до тех пор, пока не начнут получаться воспроизводимые результаты. Но этот прием не всегда возможен в социальных науках.)

До некоторой степени, стало быть, теорема о том, что все управляющие параметры, кроме одного, вблизи складки могут быть сделаны „немыми", хотя и верна, оказывается ловушкой и обманом: *для того чтобы* устранить эти остальные параметры, нам надо получить о них целую кучу данных.

В задачах, возникающих в социальных науках, где многие из управляющих параметров неизвестны и „неуправляемы", графики, образуемые экспериментальными точками, могут, как мы видим, не выявлять вполне добротные катастрофы из-за того, что выбранная проекция неудачна. Здесь не поможет никакое преобразование данных; помочь может лишь лучшее понимание влияния „лишних" параметров или же более тщательно продуманный эксперимент, при котором фиксируется больше параметров. Это весьма серьезная проблема, и она не может быть устранена мановением волшебной палочки теории катастроф. Но и обратно — если данные приводят к хорошим кривым или поверхностям, то, значит, выбор параметров управления был в самом деле сделан очень удачно.

К этому вопросу самое непосредственное отношение имеет работа Коувера [187], очень полезное обсуждение которой можно найти у Бремермана [188], стр. 17—23. В ней показано, что если мы пытаемся разбить N точек в $\mathbb{R}^n$ на два класса при помощи многочлена, зависящего от M регулируемых параметров, который должен принимать на одном классе положительные значения, а на другом — отрицательные, то при большом M вероятность успеха внезапно и резко падает от почти полной достоверности до почти полной невозможности, как только N становится больше, чем $2M$. Другими словами, если число точек, классифицируемых моделью, более чем вдвое превышает число регулируемых параметров, то эта модель необычайно хороша в очень сильном смысле. Когда же мы используем не произвольные многочлены, а лишь многочлены из небольшого списка стандартных типов, то этот смысл становится еще

более сильным. Дальнейшая работа в этом направлении может привести к полезным критериям согласия для моделей с катастрофами.

Как и в физике (см., например, § 5 гл. 11), здесь чрезвычайно важно проводить различие между точной или явной системой уравнений и точной теорией. Многие из тех, кто занимался явлениями физических бифуркаций, пробовали применить свои усилия также и в социологических науках. Прекрасным примером служит работа Вайдлиха [188(а)], где формируются подробно разработанные гипотезы, приводящие к некоему варианту уравнения Фоккера — Планка из статистической физики,— сложная, детальная, аккуратная математика. Теми же методами, что и в гл. 15, его заключения сводятся к картине катастрофы сборки, которая более наглядно всё объясняет и содержит в себе все его доступные проверке предсказания (которые являются количественными — при незнании значений неизвестных параметров — не в большей степени, чем модели цензурирования из § 1). Таким образом, просто принять модель сборки, экспериментально неотличимую от сложной модели с „точным" уравнением, будет куда более здравым решением. Сборка нечувствительна к малым возмущениям, в то время как небольшие изменения могут полностью изменить вид (а иногда и сущность) статистических уравнений. В устойчивости модели Вайдлиха (которую он не обсуждает) мы убеждаемся лишь при помощи теории катастроф.

В точности также как по меньшей мере десять различных статистических процессов приводят к пуассоновскому распределению (и потому статистические измерения не могут сказать нам, какой процесс происходит в данном случае), много разных процессов приводит — как предсказывает теорема Тома — к катастрофе сборки. Гипотеза пуассоновского распределения или гипотеза сборки по крайней мере проверяемы (когда нам повезло и мы имеем хорошие данные), и изучать их согласие с наблюдениями не в меньшей степени научно, чем изучать согласие планетных орбит с эллипсами.

В дальнейших трех параграфах мы обсуждаем три конкретные модели, которые можно характеризовать как „пригонку катастроф", с тем чтобы проиллюстрировать разнообразие возможных подходов и возникающих при этом проблем.

4 Тюремные бунты

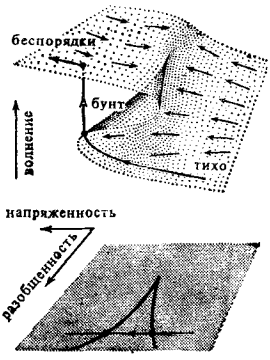


Рис. 17.6

В этом параграфе мы обсудим исследование нарушений режима в тюрьме Гартри в течение 1972 г., проведенное Зиманом, Холлом, Хэррисоном, Мэрриджем и Шеплэндом [189].

Предварительный статистический факторный анализ данных показал, что факторы, влияющие на беспорядки, могут быть разделены на две в основном независимые группы:

напряженность (чувство разочарования и безысходности, бедственное положение);

разобщенность (взаимная отчужденность, отсутствие общения, разбиение на два лагеря).

Далее, с ростом напряженности повышается вероятность волнений, а увеличение разобщенности ведет к тому, что волнения принимают характер более внезапных и яростных вспышек. Это заставляет подумать о катастрофе сборки, с осью напряженности, нормальной к острию, и осью разобщенности, идущей вдоль острия (рис. 17.6). К этому добавляются еще гипотезы, определяющие динамическое поведение системы в виде *потока обратной связи* на многообразии катастрофы, указанного стрелками на рис. 17.6. (Использование таких потоков — любимый прием Зимана, но обсуждение этого вопроса выходит за принятые нами рамки. Математическое изложение вопроса можно найти у Такенса [190, 190 a].) Предполагается, что система вначале „садится" по вертикали на многообразие катастрофы („быстрый поток"), а затем подчиняется обратной связи („медленный поток"). Из рис. 17.6 видно, что при низких значениях разобщенности система стремится к устойчивому положению умеренного волнения, но при высоком уровне разобщенности она совершает колебания внутри бифуркационного множества катастрофы сборки, прыгая попеременно с верхнего листа на нижний и обратно.

Эта картина будет отчасти смазываться случайным шумом, но колебательный характер поведения тем не менее должен проявляться.

Дальнейший статистический факторный анализ дал в качестве меры напряженности сумму взвешенных значений еженедельного числа обращений к врачу, жалоб на недомогание во время работы, санкций, примененных начальником тюрьмы, и благотворительных посещений. Разобщенность измерялась суммой числа заключенных, находящихся в карцере, и заключенных, просящих об отделении. Для выявле-

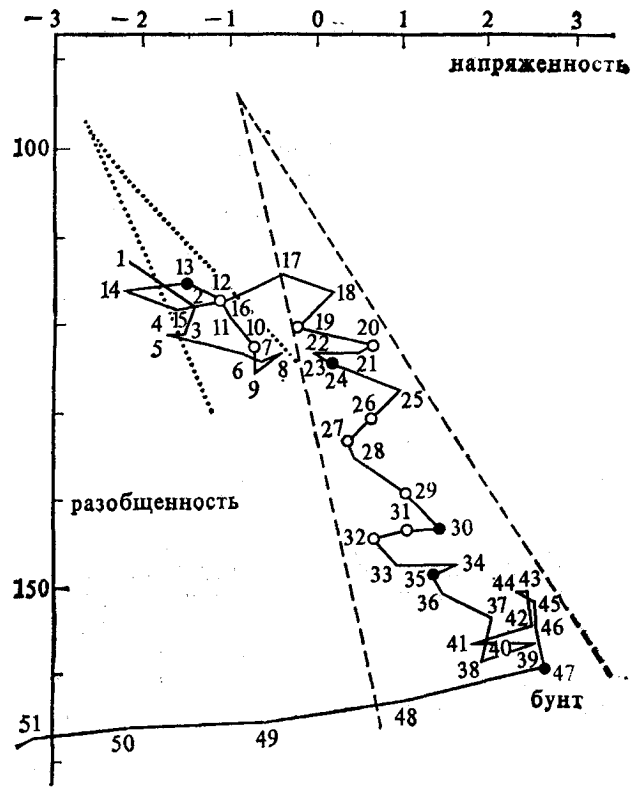


Рис. 17.7

ния трендов данные были сглажены; результат представлен на рис. 17.7. Здесь показано изменение во времени параметров управления, прослеженное неделя за неделей. Серьезные происшествия отмечены кружками. Черные кружки помечают новые формы массового протеста. Они шкалированы по степени серьезности от 0 до 10. (Оценивание проводилось независимо семью экспертами, причем их оценки обнаруживают высокую взаимную корреляцию.)

Эти данные ясно выявляют колебания. Однако для получения четких сборок, по-видимому, необходимо выделить две различные сборки — одну для первых 17 недель (пунктир), другую — для остальных (штрихи). Это следует рассматривать как дефект модели, но не очень серьезный; Зиман и др. [189] допускают, что это могло произойти из-за изменения „лица" заведения. (Возможно также, что острие

нужно было бы рисовать с изгибом, чтобы охватить все колебания; модель сама по себе позволяет до некоторой степени сделать это.) Зиман и др. дают в [189] более полный анализ данных с некоторыми выводами, включая, в частности, оправдание политики „непроявления эмоций".

Статья заканчивается словами: „Есть надежда, что в Гартри будет установлена непрерывная система контроля, с лучшим выбором единиц измерения для переменных. Она будет использована администрацией как часть информации, на основе которой принимаются решения. Только таким образом, считаем мы, можно проверить модель на точность предсказаний." Такая система наблюдения (не скрытые камеры, как смехотворно утверждал журнал „Ньюсуик" (Панати [191]), а непрерывный сбор данных типа указанных выше) действительно функционировала в течение некоторого времени. В одном случае, когда траектория пересекла бифуркационную линию, произошел бунт.

5 Бистабильность восприятия

Имеются свидетельства в пользу того, что катастрофы встречаются в восприятии; это связано с существованием двусмысленных, или „мультистабильных", фигур. Среди фигур, показанных на рис. 17.8, четвертая слева в верхнем ряду, согласно Фишеру [192, 193], воспринимается с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки. Эттнив [194] сообщает, что если эта фигура включена в последовательность (верхний ряд на рис. 17.8), то восприятие средних фигур сдвигается в зависимости от порядка, в ко-

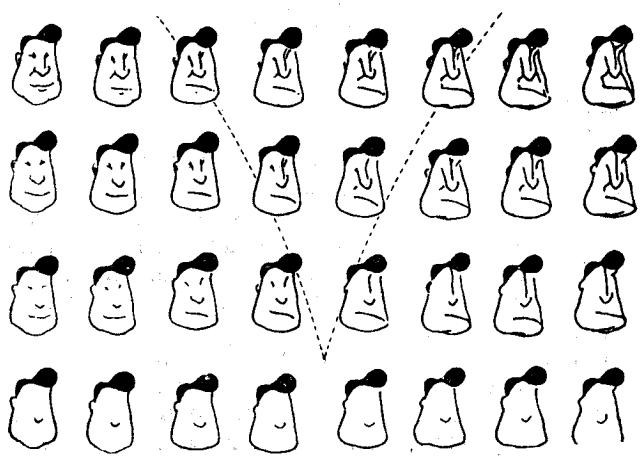


Рис. 17.8

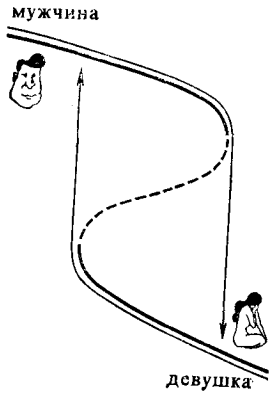


Рис. 17.9

тором эта последовательность рассматривается: в сторону мужчины, если фигуры рассматривать слева направо, и в сторону девушки в противном случае.

Эти замечания позволяют предположить, что мы имеем здесь одномерное сечение катастрофы сборки (рис. 17.9) с принципом промедления. Рисунок 17.8 представляет собой попытку расширить эту последовательность до полного двумерного массива, демонстрирующего катастрофу сборки, посредством введения еще одного фактора, отвечающего степени детального изображения. На основании субъективных впечатлений намечено бифуркационное множество сборки. По-видимому, возможно расширить опыты Эттнива, с тем чтобы проверить, действительно ли тут имеется катастрофа сборки, но пока нам неизвестны никакие данные об этом. Поскольку, по данным Эттнива, для верхнего ряда наблюдается воспроизводимое поведение, проблемы, рассматривавшиеся в § 3, не должны помешать тому, чтобы работа над всем массивом оказалась полезной.

Когда эта книга была уже сдана в печать, мы узнали о тщательных и значительных по объему экспериментальной работы исследованиях такого рода модели восприятия, осуществленных Инуи и др. (см. Инуи [199a], Браун, Инуи, Уильямс и Боррус [199b]).

Заметим, что хотя рис. 17.9 не обязательно должен быть сечением сборки (равным образом он мог бы быть и сечением $Q=0$ на рис. 17.10), все же сборка встречается *очень* часто — мы дали явные примеры от судостроения до квантовой оптики. Следовательно, при изучении бистабильных явлений с гистерезисом всегда разумно попытаться найти новую управляющую переменную, обеспечивающую гладкий „путь в обход" острия той сборки, которая „организует" эти две точки скачка на складках. Постон [171] описывает новые свойства, которые таким способом обнаруживаются у машины катастроф с мыльными пленками, предложенной Курантом [195].

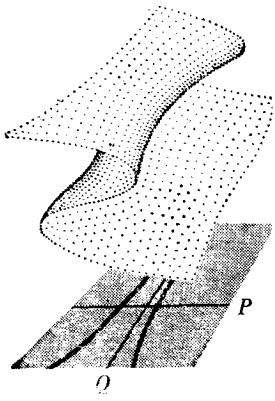


Рис. 17.10

Эта модель, возможно, имеет некоторое отношение к теориям Зимана о поведении мозга (Зиман [196—198]). Зиман рассматривает мозг как большое число спаренных нелинейных осцилляторов, для которых, как он показывает, *могут* происходить бифуркации элементарных катастроф (хотя и *не всегда* происходят). Подобное моделирование мозга динамическими системами восходит по крайней мере к Эшби [199], и поскольку теория катастроф является частью теории динамических систем и причастна к вопросам, поднятым Эшби, наверное, стоит привлечь внимание нейрофизиологов к указанным взаимосвязям. Нужно также отме-

тить, что „типичность" элементарных катастроф ослабляет иногда высказываемый аргумент: дескать, присутствие в двух различных областях одной и той же катастрофы должно указывать на связь между ними. Данные о наличии связей между соответствующими переменными могут, разумеется, сделать этот аргумент более весомым.

6 Алкоголь и интроверты

Еще одна модель, основанная на экспериментальных данных,— это модель Зимана [200], касающаяся влияния алкоголя на водителей. Она довольно хорошо согласуется с экспериментальными данными, и однако, как ни парадоксально, мы приходим к выводу, что это одна из самых неубедительных и неудовлетворительных моделей Зимана.

Данные были собраны Дрю, Колкьюхауном и Лонгом [201]. Испытуемого помещали в симулятор и просили вести машину с нормальной скоростью, которую и записывали. Затем ему давали некоторую дозу алкоголя и повторяли эксперимент. Отклонение скорости от нормальной наносили на график, причем абсциссой служила психологическая оценка испытуемого по шкале интроверсии/экстраверсии („шкале Бернрейтера"). Результаты показаны на рис. 17.11. Вывод очевиден: экстраверты ведут машину с прежней скоростью даже после принятия алкоголя, а интроверты едут либо слишком быстро, либо слишком медленно. Такие шкалы, конечно, служат предметом спора совершенно независимо от их использования в теории катастроф, но мы не будем здесь обсуждать их достоинства. Определить переменные в психологии не легче, чем в любой другой области.

Ссылаясь на рис. 17.11, Зиман спрашивает: „Почему точки в грубом приближении распределяются по кривой, имеющей вид острия сборки?" Предлагаемая им в качестве ответа модель (которой, честно говоря, мы не можем уделить здесь должного места) — это катастрофа сборки, причем в качестве управляющих параметров берутся мера интроверсии/экстраверсии и скорость езды (по удобной терминологии Зимана, это соответственно „расщепляющий" и „нормальный" факторы, т. е. направленный вдоль оси сборки и по нормали к ней). За поведенческую переменную он принимает *оценку* испытуемым своей скорости. Это приводит к графику на рис. 17.12.

Экстраверты способны вести машину с той скоростью, которую они оценивают как свою нормальную скорость и делают это. За „интровертами" же такая способность отрицается, так как средний лист поверхности недостижим.

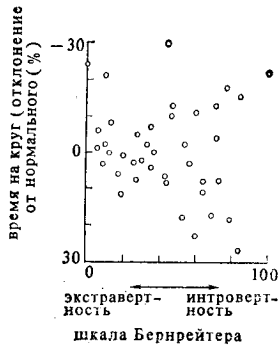


Рис. 17.11

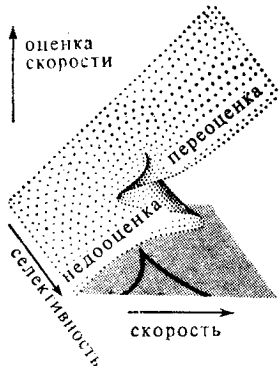


Рис. 17.12

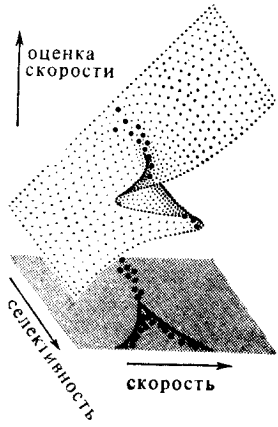


Рис. 17.13

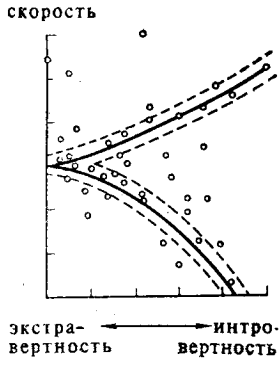


Рис. 17.14

Зиман постулирует, что они делают то лучшее, что могут, и поэтому „балансируют на грани катастрофы". Поэтому поведение испытуемых распределяется по многообразию катастрофы так, как показано на рис. 17.13; проекция в пространство управления дает скопление точек вблизи кривой с острием — бифуркационного множества сборки. На рис. 17.14 показана сборка, аппроксимирующая данные рис. 17.11. При небольшом „стандартном отклонении", отмеченном штриховыми линиями, 50% всех точек оказывается в пределах этого отклонения от кривой. Зиман добавляет, что „при утроении этого отклонения будет охвачено около 80% всех испытуемых".

Первое возражение состоит в том, что согласие не столь хорошо, как могло бы показаться. Фактически вообще очень трудно предложить какую-либо удовлетворительную проверку качества согласованности искривленных графиков с данными; но во всяком случае ясно, что цитированное замечание об утроении отклонения малоубедительно: не только 80% точек войдет в область вокруг кривой,— эта область просто заполнит половину всего участка, где располагается график. При *любом* расположении 40 точек, отличном от случайного плам-пудинга [1], можно подогнать кривую так, чтобы заполняющая половину всего участка область вокруг нее содержала также и большинство этих точек!

Следующее возражение заключается в том, что модель слишком искусственна. Переменная состояния — оценка скорости — не из тех, для которых можно собрать данные. Тогда неясно, почему оценка интровертом своей скорости столь неизменно должна быть ошибочной, почему нужно отказывать ему как раз в том, чего он ищет. Более разумно ожидать, что хотя он действительно, стараясь делать лучшее, на что способен, окажется на кривой складок, но будет при этом колебаться между пере- и недооценкой своей скорости. Если, как предполагает Зиман, он позже выучивается держаться некоторой фиксированной оценки с значительной точностью, то почему не может он сделать это в отношении своей *нормальной* скорости?

Далее, это допущение влияет на наше суждение о согласии с данными; действительно, по такой „более разумной" теории точки должны скапливаться *внутри* бифуркационного множества, примерно как на рис. 17.15. Но теперь нам нужно большее „стандартное отклонение", чтобы охватить то же самое число точек.

[1] Рождественский пудинг с коринкой или черносливом.— *Прим. перев.*

Однако все это пока придирки. Настоящее возражение состоит в том, что весь этот механизм является конструкцией ad hoc, продиктованной начальным предположением, что *график есть сборка*. Несмотря на дату публикации, эта модель восходит к тому раннему времени, когда моделирование с помощью катастрофы сборки понималось просто как „ищи кривую с острием". Если принять рис. 17.11 за кривую с острием, то волей-неволей приходится считать ее бифуркационным множеством, а оно лежит в пространстве управления; поэтому наблюдаемая скорость автоматически оказывается *управляющей* переменной. Но это допущение как-то извращает суть дела: реакцию испытуемого наиболее естественно считать поведенческой переменной, и пока эта возможность не исключена, неразумно предполагать иное. Принятие наблюдений скорости за управляющую переменную порождает две проблемы. Первая — подыскать переменную состояния; вторая — объяснить, почему все точки сидят над бифуркационным множеством, а остальная часть многообразия катастрофы фактически незаселена. Именно для того чтобы решить эти проблемы, и было предложено использовать „оценку скорости".

Мы не хотим этим сказать, что модель Зимана неверна; просто она представляется излишне усложненной. Две другие более простые модели, которые мы описываем ниже, по-видимому, столь же хорошо укладываются в приведенные данные, и без значительного уточнения последних нельзя рассчитывать, что мы сможем решить, какая из трех верна (если хотя бы одна верна).

Допустим, что мы поступим естественным, очевидным образом и будем рассматривать скорость как поведенческую переменную. Меру интроверсии/экстраверсии по-прежнему разумно использовать в качестве управляющего параметра, а именно в качестве расщепляющего фактора, ибо в этом и состоит ее действие. Поскольку теперь нормальный фактор на рис. 17.11 отсутствует, этот рисунок представляет собой проекцию многообразия катастрофы при виде сбоку. *Если* в качестве первого приближения мы совсем проигнорируем вторую управляющую переменную, то *можно* ожидать, что мы увидим какое-нибудь *сечение* катастрофы сборки, так что точки должны группироваться около обычной „вилообразной" кривой, как на рис. 17.16 (a) или (b). Наиболее характерная черта катастрофы сборки при виде сбоку — это параболическая „дыра" неустойчивых состояний; можно попытаться подобрать по данным точкам параболу, проходящую через них или лежащую внутри дыры. (Чтобы не впасть в противоречие с одним из сделан-

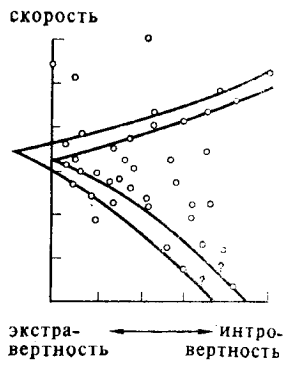
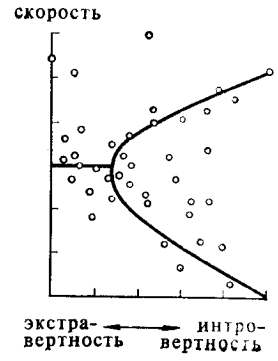


Рис. 17.15



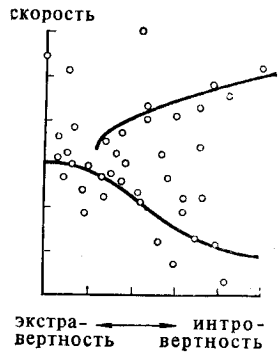


Рис. 17.16



Рис. 17.17

ных выше замечаний о модели Зимана, надо потребовать, чтобы точки лежали вне параболы, а не вокруг нее.)

Теперь ясно видно, что согласие здесь имеет такой же порядок, как и для рис. 17.14 (и было бы трудно придумать эффективный способ оценки качества согласия для их сравнения). То что ветвление происходит на „интровертной", а не „экстравертной" стороне, вполне естественно (особенно если, как это делает Зиман, игнорировать группу из трех „лихачей" слева вверху на рис. 17.11). Однако наш график является не *сечением* катастрофы, а ее *проекцией*, и (как было объяснено в § 3) мы не имеем права отбрасывать недостающий управляющий параметр, как если бы его совсем не было. Если мы примем в качестве модели рис. 17.17 (a) с неизвестным нормальным фактором, то график на рис. 17.11 как раз представит его вид сбоку. При примерно равномерном распределении точек (в пределах некоторого фиксированного участка поверхности катастрофы) результат должен напоминать рис. 17.17 (b). Что мы и имеем.

Подходящим кандидатом на роль недостающего нормального фактора могла бы быть нормальная скорость водителя; к несчастью, эта возможность не может быть проверена с помощью имеющихся данных, поскольку они показывают лишь отклонение скорости каждого водителя от его нормальной скорости. Очень похоже, что в этих данных нормальный фактор отнормирован напрочь!

Продолжая эту линию мысли, можно предположить, что наблюдаемое расхождение является артефактом подобной нормировки и здесь вообще нет никакой катастрофы,— видимая „дыра" среди нанесенных точек может быть просто областью, где точки редки, что может иметь место для однозначного (т. е. не катастрофичного) графика с крутыми наклонами в соответствующих местах, как на рис. 17.18.



Рис. 17.18

Это поднимает больше вопросов, чем дает ответов, но показывает, каким решающим образом зависят модели с катастрофами от исходных допущений.

7 За пределами элементарной теории катастроф

Не все динамические явления приводятся в действие максимизацией или минимизацией некоторого потенциала, с соответствующей геометрией катастроф при изменениях этого потенциала. Многие явления, для которых это не так, могут быть связаны с теорией катастроф менее прямыми способами: при помощи построения функций Ляпунова, как для уравнения Дуффинга (Холмз и Рэнд [202]); при помощи

вариационных принципов, как в оптике (гл. 12); при помощи функций тока (гл. 11) и т. д. Теория катастроф (в том смысле, в котором мы употребляли эти слова) применима не универсально, но часто слышимое утверждение, что „она применима лишь к градиентным системам",— это просто результат недопонимания, вызванного ограниченностью ее первых применений.

Однако, с другой стороны, мы не желаем оставлять у читателя впечатление, что *всюду*, где игра называется оптимизацией, теорию катастроф можно применять некритически. Стоит проиллюстрировать это следующим примером, где два игрока пытаются оптимизировать ситуацию, каждый со своей точки зрения.

Если вы начнете выпускать книги, когда никто еще этим не занимается, вы не сумеете продать их много. У населения не будет привычки покупать книги, и не будет также никакой индустрии их распространения, которая могла бы доставить вашу продукцию в Халл и Галифакс [1]. С другой стороны, если другие производители выпускают книги в огромных количествах, то ваши книги затеряются среди множества других, и вы опять же продадите немного. Ваша торговля пойдет лучше всего, если вклад других будет существовать, но будет умеренным. Наиболее выгодно, разумеется, печатать ровно столько, сколько вы сможете продать.

Это описание, конечно, переупрощено, но поскольку мы хотим показать, какое сложное поведение может быть следствием простых допущений, это не испортит рассуждения; реалистичное усложнение допущений приведет к дальнейшему усложнению поведения. (Здесь надо различать два случая. В неорганизованной сложности совокупностей „простых" систем, изучаемых в физике (каковой является, скажем, сплошная среда), сложности, которые реально проявляются у компонентов, часто даже упрощаются статистически для достаточно крупных совокупностей. Но в высокоструктурированной, организованной сложности экономики или мозга осложнения на каждом уровне часто соединяются — а не уничтожаются осреднением — на следующем уровне.) В действительности мы еще упростим дело, взяв случай двух в точности идентичных производителей. Допустим, что когда один из них производит P единиц товара, оптимальная продукция для другого выражается функцией

[1] То есть во все страны света. Портовые города с такими названиями есть по разные стороны Атлантического океана — в Англии (на родине авторов) и в Канаде.— *Прим. ред.*

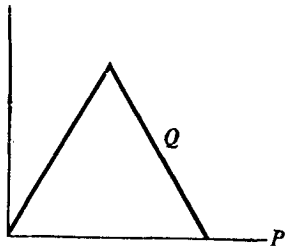


Рис. 17.19

$Q(P)$, график которой представлен на рис. 17.19. Модель такого рода известна как *диполия*[1] *Курно*, она восходит к 1843 г. (Курно [203], Вальд [204]). Допустим, далее, что каждый производитель исходит из того, что Том называет stratégie myope[2]: на каждый очередной год он принимает, что другой производитель произведет столько же, сколько в предыдущем, и соответственно планирует свое собственное производство. Таким образом, он планирует на будущий год то, что было бы оптимальным для него в прошедшем году. Это описание удручающе хорошо подходит к стратегии многих экономических агентов (например, фермеров), поведение которых усиленно изучалось, равно как и к экономическому мышлению многих политиков. („Близорукость" здесь предположена лишь из-за краткости ее описания, она не является необходимым условием дикого поведения, с которым мы встретимся ниже. Модели с более „просвещенными" стратегиями также могут кусаться.)

Обозначим продукцию одного производителя через P_1, другого — через P_2. Типичные изменения пары (P_1, P_2) от данного года к следующему показаны на рис. 17.20. Штриховые стрелки изображают сдвиги, которые предпринимают производители (осуществляя оптимизацию согласно функции Q, в допущении что продукция второго не меняется). Сплошные стрелки показывают результирующее изменение пары.

Можно было бы думать, что это приведет к постоянному масштабу производства для каждого агента или хотя бы к регулярному циклу. Однако для типичной последовательности сдвигов, показанной на рис. 17.21, не видно никаких очевидных закономерностей. Мы наблюдаем здесь то, что в математической экологии известно после статьи Ли и Йорка [206] как *хаос*. Отсутствие очевидных закономерностей было доведено во многих примерах такого рода до математических доказательств невозможности отличить с помощью какой-либо статистической методики поведение этих заведомо детерминистских систем от поведения чисто случайных систем. (По поводу общего обсуждения этих вопросов см. Гукенхаймер [207] и Гукенхаймер, Остер и Ипакчи [208]). Все характеристики „статистического" поведения, вроде закона больших чисел, прекрасно могут удовлетворяться для простых *детерминистских* моделей такого рода. (Таким образом, поведение цен на фондовой

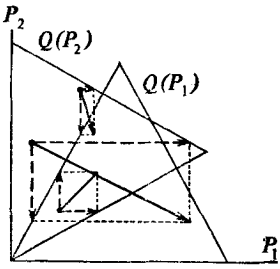


Рис. 17.20

[1] Монополия двух компаний.— *Прим. ред.*
[2] Близорукой стратегией *(франц.)*.— *Прим. ред.*

бирже, превосходно укладывающееся в модель „случайного блуждания", при котором предыдущее движение не имеет никакой предсказательной силы для будущего, равным образом могло бы моделироваться детерминистской системой, демонстрирующей хаос.) Для рассматриваемого нами случая Рэнд [209] непосредственно доказал, что хотя регулярные циклы всех возможных периодов (1, 2, . . ., 2001, . . . лет) и существуют, но все они *неустойчивы*: отклонитесь от одного из них на волос, и вместо того чтобы продолжать приблизительно следовать за ним, система быстро отойдет от него прочь, и цикл станет бесполезным даже как аппроксимация. Приближенное знание настоящей ситуации, сколь бы точным оно ни было, бесполезно для долговременных предсказаний — произвольно близкие точки имеют совсем разное будущее. *Типичное* поведение — это на самом деле поведение типа хаоса, изображенного на рис. 17.21.

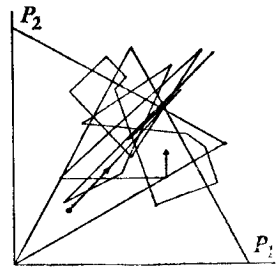


Рис. 17.21

Это экзотическое поведение не является следствием специального вида функции Q, скажем ее кусочной линейности или того, что у нее острый пик посередине. Рэнд [209] показал, что поведение с гладкой функцией Q типа изображенной на рис. 17.22 описать еще труднее и что сложность его вполне устойчива при малых возмущениях Q. (Здесь речь идет о двух разных устойчивостях, и их не следует смешивать: резкие неустойчивости внутри системы с заданной Q сохраняются *устойчиво* при небольших изменениях Q.)

Еще более сложного поведения можно ожидать от моделей со многими экономическими структурами, достаточно разработанных, чтобы даже отражать реальность. Недавно Смейл [210] доказал, что системы, изучавшиеся в экологии и в „общей теории равновесия" математической экономики, не образуют специальный „ручной" класс, как это свободно допускалось. Абсолютно все типы хаотического поведения— „странные аттракторы" (Гукенхаймер, Остер и Ипакчи [208]), „омега-взрывы" и прочие причудливые создания, с которыми имеют дело маги современной теории динамических систем,— могут устойчивым образом встречаться в этом классе моделей. (При более общем толковании термина „катастрофа", как его понимает Том, принимаются в расчет и эти явления — но зато отсутствует общая теория, и практическое преимущество поэтому невелико; вклад в философию, возможно, больше.) Когда это будет понято достаточно широко для того, чтобы специалисты по прикладной математической экономике не считали эти явления огрехами программ и не уводили свои параметры или модели прочь от реальности, чтобы устранить их, станут обычными также

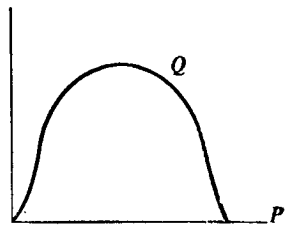


Рис. 17.22

и явные примеры с детализированными моделями, „взятыми из жизни". Пока же все это слишком непопулярно среди лиц, отпускающих средства на крупные исследования с помощью вычислительных машин в экономике.

Таким образом, тот факт, что система состоит из подсистем, *стремящихся* к максимизации некоторой простой функции, сам по себе еще не означает, что к ней применима математика, описанная в этой книге,— надо, чтобы такое оптимальное поведение действительно достигалось в течение большей части времени. Часто это будет не так, и нам потребуются более мощные средства анализа, даже для теоретических нужд. Разработка адекватной математики для *планирования* при наличии таких явлений — еще более далекая цель.

18 ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ. ЧТО ДАЛЬШЕ?

1 Нынешнее состояние

Теория катастроф уже начинает исчезать. То есть „теория катастроф" как связная система знаний с группой взаимно известных друг другу специалистов, работающих над ее проблемами, ускользает в прошлое, по мере того как ее методы более прочно входят в сознание научной общественности. „Строго чистые" математики из тех, кто нашел и доказал главные теоремы этого предмета, остались „чистыми", перейдя в другие области, ближние или дальние, где еще нужно решать математические задачи. Имеется много областей для дальнейшей работы с ориентацией на приложения; сюда относятся „эквивариантные" катастрофы (катастрофы с симметриями), связь между дифференцируемой и топологической эквивалентностями, использование бесконечномерных пространств состояний и многочисленные варианты элементарных катастроф, таких как катастрофы во времени Вассермана [112] и катастрофы с ограничениями, упомянутые в гл. 16. Это лишь то, что наиболее тесно связано с элементарными катастрофами; но и вся область динамических систем и теории бифуркаций получает все возрастающее внимание. Потенциальные возможности для союза между мощными топологическими методами математиков и мощными численными методами (такими как метод конечных элементов), используемыми исследователями-практиками, огромны.

Те, кто остается привязанным к самой теории катастроф, работают над проблемами соотношения ее теорем и природы реального мира. Самостоятельно или все чаще в сотрудничестве со специалистами *по вещам* (волнам, взяткам, эмбрионам и т. д.) они *прикладывают* математику. (Мы сознательно не хотим говорить, что они занимаются „прикладной математикой", так как по злой шутке британской академической истории чрезвычайно много из того, что шло под этим именем, не было ни математикой с какой-либо концептуальной целостностью, ни приложением к чему-либо прак-

тически важному или к области, где можно было бы экспериментально проверить, верно оно или неверно. Это не только наше собственное мнение — оно в развернутой форме высказывается в отчете Королевского общества „Подготовка аспирантов в Соединенном Королевстве. 4. Прикладная математика".) Вторая половина нашей книги позволяет составить некоторое представление о распространенности этих приложений; значительно более полное представление об этом дает библиография. Даже составление такой библиографии теперь дело очень сложное, соответствующие работы рассеяны по самым разным изданиям — от журналов по физической химии до журналов по градостроительству. Через несколько лет это уже станет не только невозможным, но и бесцельным упражнением. Некоторое время после Ньютона и Лейбница можно было перечислить все работы по дифференциальному исчислению; еще некоторое время спустя можно было составить список всех оригинальных и главных обзорных трудов; но кто попытался бы сделать это сегодня? Идеи и методы дифференциального исчисления теперь входят в научный багаж почти каждого ученого, достойного такого наименования. То же произошло и с теорией вероятности, вариационными методами, теорией бесконечномерных векторных пространств и всеми другими ветвями математики, которые пополнили инструментарий работающего ученого.

Теорию катастроф, хотя и стоящую в некотором смысле за пределами анализа (благодаря ее топологической окраске), тем не менее лучше всего рассматривать как новое направление *в рамках* анализа. С нашей точки зрения, часто повторяемое утверждение, что, мол, „не нужно понимать математику, стоящую за теорией катастроф, чтобы иметь возможность применять ее", вводит в заблуждение. Тот, кто *хоть как-то* не чувствует этой математики (а математические главы этой книги составляют абсолютный минимум), не будет защищен в своих приложениях от серьезных ошибок. (То же самое верно, для случая приложений, и в отношении предмета, к которому прикладывается математика; вот почему теория катастроф все в большей степени становится командным видом спорта.)

Одна из наиболее привлекательных черт этого предмета для математика — то, что он одновременно объясняет и проливает новый свет на постоянное появление некоторых математических структур в самых разных областях науки. Но это обстоятельство не интересует и не будет интересовать большинство ученых, которые обычно удовлетворяются тем, что называют математический результат по имени

того, кто первый заметил его *в их собственной области*. Присутствие его под другими именами в других областях, будь он там открыт раньше или позже, не играет никакой роли. А общие структуры волнуют их еще менее, чем общие теоремы. Таким образом, та черта теории катастроф, которая, возможно, представляет наибольший интерес для неспециалиста,— ее объединяющая мощь — специалиста интересует гораздо меньше. Например, сборка — простейшая „интересная" катастрофа — имеет бесчисленные имена в бесчисленных областях, она вездесуща, как оно и должно быть, согласно результатам гл. 7. В каждой давно существующей области науки она была более или менее полно проанализирована, причем почти всегда способом, приспособленным для данной конкретной цели. Именно потому, что это одна из простейших катастроф, исследования, проводимого голыми руками, как в гл. 5, достаточно, чтобы ответить на любой вопрос о ее геометрии. Такие исследования проводились все снова и снова и снова, к полному удовлетворению тех, кто имел к этому отношение. С другой стороны, такие факты, как структурная устойчивость сборки, *не* могут быть установлены элементарными методами. Но мало людей склонны волноваться из-за вопросов — как бы они ни были уместны,— которые они не сами задают. Большинство ученых утверждают, что им нужны только числа.

Теория катастроф, как и вообще анализ, *дает* числа. Она также дает ответы на топологические вопросы, а поскольку ее изобрели и впервые проповедовали топологи, именно на эти ответы и был сделан акцент. Отсюда миф, получивший вскоре хождение и все еще широко распространенный, что она является „чисто качественной". Как только она была понята учеными, которые мыслили в физических числах, вводили в нее физические числа и задавали ей численные вопросы, теория катастроф начала доставлять численные ответы. Эти ответы, нужно сказать, основаны на математических описаниях, принятых в данный момент учеными; это замечание иногда интерпретируется (см., например, Кролл [116]) как то, что „теория катастроф ни о чем не дает новой информации". Это просто выражение общей точки зрения на математику в целом как на „тавтологичную", нуждающуюся в гипотезах, чтобы производить заключения. Никакая математическая теорема никогда не дает „информации" в смысле теории информации — информации о том, что нечто, *не обязательно* верное, *оказалось* верным в данном случае,— лишь эксперимент может это сделать. Во всякой научной теории „информация" лежит

в ее гипотезах о том, что имеет место, и все ее предсказания содержатся тут. Как замечалось много раз на протяжении столетий в опровержение возражений „нет содержания" по отношению к математическим переформулировкам, вся проблема заключается *в извлечении информации* [1]. И здесь теория катастроф служит мощным новым оружием — как показывает вторая половина этой книги. Она не *замещает* прежние методы, а *дополняет* их. Мы дали этому много примеров, включая численные ответы на численные вопросы. Надеемся, что наша книга содействует получению многих новых ответов, равно как постановке вопросов нового рода, которые, кажется нам, будут в такой же мере физическими (или химическими, или биологическими, или...).

2 Будущее

В ближайшее время, по-видимому, „жесткие" науки — физика, химия, технические дисциплины — извлекут наибольшую пользу из теории катастроф, которая в соединении с современными методами и теориями послужит средством для раскрытия новых следствий из математических моделей, для которых разумные гипотезы уже установлены, а выводы из них все еще исследуются. Примерами служат гл. 10—15. („Всякому имеющему дано будет.") *Устойчиво* нелинейный характер поведения катастрофических явлений, которого не может изменить никакая перепараметризация или малая подгонка, указывает на абсурдность таких упрощающих предположений, как линейность или выпуклость, используемых в большинстве социологических моделей,— но в то же время часто (§ 3 гл. 17) увеличивает требования к данным даже сверх недостижимых в настоящее время требований нынешних невероятно простых моделей. („А у неимеющего отнимется и то, что имеет".)

Если говорить о более отдаленном времени, то пропорции, вероятно, изменятся. В области биологии мы сталкиваемся с теми же трудностями организованной сложности, что и в социологических науках, но жесткие данные и воспроизводимые эксперименты здесь доступны. Подлинные триумфы молекулярной биологии постепенно перестают заслонять тот факт, что знание аксиом даже простой системы не влечет за собой понимания ее поведения. (Биохимия, конечно, принадлежит к числу „жестких наук", упомянутых

[1] На ум приходит король из сказки, выражающий волшебнику свое недовольство по поводу плаща-невидимки: „Я все еще могу натыкаться на вещи!".

выше, и поскольку столь много реакций управляется минимизацией свободной энергии, этот предмет будет обогащен новыми вычислительными методами и геометрией, как только относящиеся к делу математические и химические знания соединятся в нужных лицах или командах. Но не об этом сейчас речь.) Статистическая механика, например, не пытается анализировать глобальное поведение неорганизованной массы простых молекул, вводя в модель изученные во всех подробностях свойства, скажем, двуокиси углерода. Вместо этого в ней рассматриваются „абсолютно упругие шарики" и т. п. В живых системах мы имеем дело с *организованной* сложностью и с самыми разнообразными молекулами, индивидуальная сложность которых оказывается решающей для тонкого поведения системы. Можно ли рассчитывать вывести на основе лишь полного молекулярного описания ребенка, что нормальный срок человеческой жизни длится семьдесят лет? Что через несколько десятков лет вылезут зубы мудрости? Наука должна работать со многими описаниями на многих уровнях, причем крупномасштабные модели могут иногда явным образом противоречить тому, что известно о явлениях меньшего масштаба (как мы уже говорили это в связи с обсуждением динамики жидкости в § 1 гл. 11). В противоположном направлении: в большинстве квантовомеханических вычислений, относящихся к твердым телам или жидкостям, принимаются допущения об одновременности, которые теми, кто их принимает, считаются неверными! Релятивистской квантовой химии не видно даже в перспективе.

Вероятно, биология станет в течение ближайших десятилетий полигоном для математических методов моделирования агрегированного поведения систем, имеющих в своей основе организованную сложность. В этих исследованиях теория катастроф будет играть ведущую роль; все же мы с самого начала можем быть уверены, что ею одной не обойтись; не обойтись даже и теорией динамических систем, частью которой она является. Всё же бифуркация вещественнозначных функций описывает простейшие виды существенно нелинейного поведения. Как показывают гл. 10—18, многие явления сводятся, строго или эвристически, к такому описанию, *но не дальше* — без потери чего-нибудь важного для понимания явления. Проникновение в суть соображений, намеченных в гл. 7, и разбор достаточного числа примеров убеждают, что понимание природы элементарных катастроф будет существенным знанием в математизации биологии.

И недостатка в таком знании не будет. Если бы теория

катастроф имела отношение *лишь* к биологии, то отсутствие ярких применений в течение ряда лет привело бы к потере лица, благоприятный момент был бы упущен, и она могла бы быть просто забыта. Но в жестких науках теория катастроф во всевозрастающей степени будет усваиваться как общеизвестное исчисление. Применение правил конечной определенности станет столь же обычным делом, каким является сейчас применение их частного случая — того факта, что положительная определенность матрицы Гессе влечет минимум. Когда этот комплекс результатов и точек зрения столь же прочно утвердится в научном мышлении, как привычка писать дифференциальные уравнения, не будет нехватки в специальных знаниях в многочисленных вариантах того, во что разовьется „теория катастроф". Совершенно независимо от успеха или неудачи теперешних многообещающих попыток, таких как исследования Зимана [157] и Кука в эмбриологии, биология не в большей степени забудет о теории катастроф, чем она забудет о математическом анализе.

Более общим образом, мы можем предсказать, что в будущем проблемы, поставленные биологией, ныне лишь находящиеся на трудном пути к точной постановке, окажут влияние на основной поток математического развития, как это было в прошлом с физикой. По мере того как методы, пригодные для изучения организованной сложности, будут развиваться в этой лабораторной науке, социологические науки будут получать пропорциональный выигрыш. Новые понятия — сливаясь с современным пониманием мира, изменяя и дополняя его — могут привести к определению и измерению величин, более важных для „здорового общества", чем „жизненный уровень", включающий в себя бесполезные выбрасываемые упаковки [1], или „общий национальный продукт", включающий в себя машины, производительность которых выражается в мегасмертях. При том отсутствии искусства общения, в условиях которого мы живем, все предсказания о будущем нашей научной культуры (если не всего рода человеческого) сводятся к одному отрицанию. Если какие-либо математические методы *вообще могут* помочь росту такого искусства, теория катастроф будет их частью.

[1] Намек на движение против лишних упаковок, охватившее недавно некоторые западные страны.— *Прим. ред.*

Дополнение I. Программа для проверки на конечную определенность и нахождения трансверсальных деформаций

Д. Р. ОЛСЕН, С. Р. КАРТЕР и Э. РОКВУД

Для читателей, желающих применять теорию катастроф к сложным ситуациям в жестких науках и имеющих доступ к хорошей вычислительной машине, мы приводим здесь написанную на Алголе программу, которая выполняет наиболее важные вычисления гл. 8— проверяет функции на сильную конечную определенность и локальную конечную определенность, вычисляет коразмерность и находит трансверсальные информации. (Проверка на обычную конечную определенность, связанная с использованием теоремы 8.4, более трудоемка, но обещано, что соответствующая экономная программа появится еще до выхода этой книги в свет.) Из соображений алгебраического удобства постоянный многочлен 1 включен в вычисления (см. обсуждение этого вопроса в § 6 гл. 8), и поэтому для согласования с тем, что было в основном тексте книги, читателю следует уменьшать вычисленную коразмерность на 1 и игнорировать постоянный член.

Большинство возникающих в различных науках функций и деформаций, конечно, не являются многочленами, как мы и видели; настоящая программа требует, чтобы в нее была введена k-струя. Формальное дифференцирование — хорошо разработанная вещь, так что нет необходимости включать сюда соответствующую подпрограмму. Читатель, желающий проверять функции и деформации, выраженные прямо через sin, th и т. п., должен пользоваться предлагаемой ниже программой в паре с какой-либо программой для формального дифференцирования, например с довольно хитрой программой, придуманной в Массачусетском технологическом институте; познакомиться с ней можно по следующим источникам:

ACM Proceedings of the Second Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation, Los Angeles, California, March 1971.

ACM Communications **14**, № 8, 1971.

ACM Journal **18**, № 4, 1971.

'MACSYMA — the fifth year' *SIGSAM Bulletin* August 1974.

Элементарные неполиномиальные функции будут допускаться вариантом программы, который сейчас подготавливается.

Приводимая ниже программа[1] производит проверку на сильную и локальную k-определенность при заданном k (и требует другое k, если ответом будет „нет"). После того как число определенности установлено, программа проверяет любую предложенную (в полиномиальном виде) деформацию на трансверсальность, а также определяет коразмерность. Если предложенная деформация нетрансверсальна, программа выдаст список полиномиальных членов деформации, которые дополняют ее до трансверсальной. (Так, в приведенном в конце дополнения примере выдачи, где машине не было предложено никаких членов деформации, она просто перечислила некоторый кобазис, задающий универсальную деформацию.)

Ранние варианты этой программы, делавшие меньше, были довольно дорогими, но теперь эта проблема решена. Упомянутый пример выдачи — один из 10 полученных за один прогон, который стоил 1.21 доллара.

[1] Вот перевод комментария к программе:

Это программа для проверки многочленов от любого числа переменных на сильную или локальную k-определенность при любом данном k.

Замечание: Программа будет работать для любого значения k при любом числе переменных, но требования, связанные с размерами оперативной памяти, чрезмерно высоки для некоторых классов машин, когда число переменных или значение k становится большим. (Новые способы программирования, разрабатываемые в университете Бригэма Янга, должны решить эту проблему.)

Многочлены вводятся и представляются как список членов, а каждый член представляется целым коэффициентом и списком целых показателей.

Авторы: Дэн Р. Олсен-мл., Стефан Р. Картер, Элин Роквуд
Консультант: Хелэмэн Р. П. Фергусон
Финансирующие организации: Университет Бригэма Янга
Факультет вычислительной математики
Исследовательский институт Эйринга

Основной текст мы, естественно, не переводим. Напомним только, что unfolding означает „деформация".— *Прим. перев.*

```
!*************************************************************************
!*                                                                       *;
!*      THIS IS A PROGRAM TO CHECK POLYNOMIALS IN ANY NUMBER OF          *;
!*      VARIABLES FOR STRONG OR LOCAL K-DETERMINACY FOR ANY GIVEN        *;
!*      VALUE OF K.                                                      *;
!*              NOTE:   THE PROGRAM WILL HANDLE ANY VALUE OF K IN        *;
!*                      ANY NUMBER OF VARIABLES BUT THE CORE             *;
!*                      REQUIREMENTS ARE EXCESSIVE FOR SOME MACHINES     *;
!*                      IF THE NUMBER OF VARIABLES OR THE VALUE OF       *;
!*                      K BECOMES LARGE. (NEW PROGRAMMING TECHNIQUES     *;
!*                      BEING DEVELOPED AT BRIGHAM YOUNG UNIVERSITY      *;
!*                      WILL SOLVE THIS PROBLEM)                         *;
!*      POLYNOMIALS ARE ENTERED AND REPRESENTED AS A LIST OF TERMS       *;
!*              WITH EACH TERM BEING REPRESENTED BY A INTEGER            *;
!*              COEFFICIENT AND A LIST OF INTEGER EXPONENTS              *;
!*                                                                       *;
!*      AUTHORS:        DAN R. OLSEN JR,  STEPHAN R. CARTER,             *;
!*                      ALYN ROCKWOOD                                    *;
!*      CONSULTING:     MELAHAN R. P.FERGUSON                            *;
!*      SPONSORS:       BRIGHAM YOUNG UNIVERSITY                         *;
!*                              COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT              *;
!*                      EYRING RESEARCH INSTITUTE                        *;
!*                                                                       *;
!*************************************************************************;
BEGIN
EXTERNAL PROCEDURE SORT,UNFOLD,ORDINARY;

EXTERNAL BOOLEAN PROCEDURE KDET;
EXTERNAL PROCEDURE PARTIAL;
INTEGER N,VARIABLES, N,TERMS,CMND;
BOOLEAN STRONG;
INTEGER K;
WRITE("WELCOME TO THE BLESSED WORLD OF CATASTROPHE THEORY[CC]");
WRITE("[T]NUMBER OF VARIABLES =[SB]");
READ(N,VARIABLES);
WRITE("[T]NUMBER OF TERMS IN THE POLYNOMIAL =[SB]");
READ(N,TERMS);
        BEGIN !SET UP STORAGE FOR FUNCTION AND GET FUNCTION;
        INTEGER  ARRAY [ERMS[1:N,VARIABLES,1:N,TERMS],
                DEGREE[1:N,TERMS],
                PART[1:N,VARIABLES,1:N,VARIABLES,1:N,TERMS],
                COEF[1:N,TERMS],PCOEF[1:N,VARIABLES,1:N,TERMS];
        INTEGER I,J,K,L,M,N;
        WRITE("IT IS NOW TIME TO INPUT THE POLYNOMIAL [C]");
        WRITE("EACH OF THE[S]");
        PRINT(N,TERMS,3,0);
        WRITE(" TERMS OF THE POLYNOMIAL");
        WRITE("IS INPUT [C] USING THIS FORMAT[B]");
        WRITE("(CT)C ");
        FOR I := 1 UNTIL N,VARIABLES DO WRITE("D ");
        WRITE("[2CB]");
        WRITE("WHERE C IS THE COEFFICIENT AND D IS THE DEGREE[CB]");
        WRITE("PLEASE INPUT THE TERMS [CC]");
        FOR I := 1 UNTIL N,TERMS DO
                BEGIN
                WRITE("!ERM "); PRINT(I,3,0); WRITE("[SB]");
                READ(COEF[I]);
                DEGREE[I] := 0;
                FOR J := 1 UNTIL N,VARIABLES DO
                        BEGIN
                        READ(TERMS[J,I]);
                        DEGREE[I] := DEGREE[I] + TERMS[J,I];
                        END;
                END;
        SORT(TERMS,N,VARIABLES,N,TERMS,COEF,DEGREE);
        PARTIAL(TERMS,COEF,PART,PCOEF,N,VARIABLES,N,TERMS);
        WRITE("WHAT K DO YOU WANT TO TRY? (0 TO STOP) [B]");
        READ(K);
        WHILE K<>0 DO
                BEGIN
                IF KDET(PART,PCOEF,N,VARIABLES,N,TERMS,K,STRONG) THEN
```

```
                        BEGIN
                        IF STRONG THEN
                                BEGIN
                                WRITE("*** STRONGLY DETERMINED ***[CCB]");
                                UNFOLD(PART,PCOEF,N.VARIABLES,N.TERMS,K);
                                END
                        ELSE
                                BEGIN
                                WRITE("*** LOCALLY DETERMINED ***[CCB]");
                                WRITE("DO YOU WANT TO TRY ORD");
                                WRITE("INARY DETERMINACY? [CB]");
                                WRITE("1 = YES, 0=NO[CB]");
                                READ(CMND);
                                IF CMND=1 THEN ORDINARY(K);
                                K:=K+1;
                                UNFOLD(PART,PCOEF,N.VARIABLES,N.TERMS,K);
                                END;
                        END
                ELSE
                        WRITE("FAILED - - TRY A LARGER K[CCB]");
                WRITE("WHAT K DO YOU WANT TO TRY? ");
                WRITE("(0 TO STOP) [B]");
                READ(K);
                END;
        END;
END
!COMPUTES THE MATRIX SIZE, ALLOCATES THE MATRIX AND CALLS SOLVED TO
        CHECK FOR K-DETERMINACY;
BOOLEAN PROCEDURE KDET(PART,PCOEF,N.VAR,N.TERMS,K,STRONG);
VALUE N.VAR,N.TERMS,K;
INTEGER ARRAY PART;
INTEGER ARRAY PCOEF;
INTEGER N.VAR,N.TERMS,K;
BOOLEAN STRONG;
BEGIN
EXTERNAL BOOLEAN PROCEDURE SOLVED;
EXTERNAL INTEGER PROCEDURE KTERM;
INTEGER COL,ROW,I,J,DEG,MINDEG,K1,START;
MINDEG:=K+1;
KDET:=TRUE;
FOR I:=1 UNTIL N.VAR DO  !LOOP THRU PARTIALS;
        BEGIN
        DEG:=0;
        FOR J:=1 UNTIL N.VAR DO  !LOOP THRU EXPONENTS;
                DEG:=DEG+PART[I,J,1];
        IF DEG<MINDEG THEN
                MINDEG:=DEG;
        END;
IF K<=MINDEG THEN
        BEGIN
        WRITE("ERROR *** K TO SMALL[CCB]");
        KDET:=FALSE;
        GOTO OUTR;
        END;
ROW:=N.VAR*KTERM((K-MINDEG+1),N.VAR);
COL:=KTERM((K+1),N.VAR)-KTERM(MINDEG-1,N.VAR);
WRITE("THE MATRIX HAS BEEN ALLOCATED AT "); PRINT(ROW); WRITE(" BY ");
PRINT(COL); WRITE("[CB]");
        BEGIN
        INTEGER ARRAY N.MATRIX[1:ROW,1:COL],D.MATRIX[1:ROW,1:COL];
        INTEGER I,J;
        KDET:=SOLVED(N.MATRIX,D.MATRIX,ROW,COL,K,MINDEG,N.TERMS,PART,
                PCOEF,N.VAR,STRONG);
        END;
OUTR: END
!SETS UP MATRIX AND CALLS FOR GAUSSIAN REDUCTION TO CHECK TO SEE IF
THE POLYNOMIAL IS DETERMINED AT K;
BOOLEAN PROCEDURE SOLVED(N,MATRIX,D,MATRIX,ROW,COL,K,MINDEG,N.TERMS,PART,
```

```
        PCOEF,N,VAR,STRONG);
INTEGER ARRAY N,MATRIX,D,MATRIX,PART,PCOEF;
INTEGER ROW,COL,K,MINDEG,N,VAR,N,TERMS;
BOOLEAN STRONG;

BEGIN
EXTERNAL PROCEDURE FILLMATRIX;
EXTERNAL BOOLEAN PROCEDURE SINGULAR;
INTEGER ARRAY POINTER[1:COL],TERM,LIST[1:COL,1:N,VAR];
INTEGER EACH,K1,TERM,PNT,K1,START,MONPNT,PARTITION,K1DEG;
FILLMATRIX(N,MATRIX,D,MATRIX,PART,PCOEF,N,VAR,N,TERMS,K,K1,START,MINDEG,
        COL,ROW,PARTITIUN,TERM,LIST,K1DEG);
MONPNT←1;
STRONG←TRUE;
FOR TERM,PNT←1 UNTIL COL DO
        POINTER[TERM,PNT]←TERM,PNT;
FOR TERM,PNT←1 UNTIL COL DO
        BEGIN
        N,MATRIX[ROW,TERM,PNT]←0;
        D,MATRIX[ROW,TERM,PNT]←1;
        END;
SOLVED ← SINGULAR(N,MATRIX,D,MATRIX,POINTER,ROW,COL,PARTITION,STRONG,
                TERM,LIST,K1DEG,N,VAR);
END
!THIS PROCEDURE PERFORMS A GAUSSIAN REDUCTION OF THE MATRIX;
!IF PARTITION IS EQUAL TO ZERO THE ROUTINE CHECKS UNFOLDINGS
        OTHERWISE IT CHECKS FOR K-DETERMINACY;
!ALL ARITHMATIC IS RATIONAL WITH NUMERATOR AND DENOMINATOR STORED
        IN IDENTICAL ARRAYS;
BOOLEAN PROCEDURE SINGULAR(N,MATRIX,D,MATRIX,POINTER,ROW,COL,PARTITION,STRONG,TERM,LIST,
INTEGER ARRAY N,MATRIX,D,MATRIX,TERM,LIST;
INTEGER ARRAY POINTER;
INTEGER ROW,COL,PARTITIUN,K1,DEG,N,VAR;
BOOLEAN STRONG;

BEGIN
BOOLEAN SING,FLG;
INTEGER ROWI,COLI,COLSRCH,COLPNT,TEMP,K,T,UNFLDCNT;
BOOLEAN FOUND,USED;

!THIS PROCEDURE REDUCES FRACTIONS TO PREVENT OVERFLOW;
PROCEDURE REDUCE(N,D);
INTEGER N,D;
        BEGIN
        INTEGER N,DIV,D,DIV,I,INC,END,DA,NA;
        IF N=0 THEN GOTO END,REDUCE;
        NA←N;
        IF NA<0 THEN NA←-NA;
        DA←D;
        IF DA<0 THEN DA←-DA;
        INC,END←DA-NA;
        IF INC,END<0 THEN INC,END←-INC,END;
        IF INC,END>NA THEN INC,END←NA;
        IF INC,END>DA THEN INC,END←DA;
        IF N=D THEN
                BEGIN
                N←1;
                D←1;
                END
        ELSE
                BEGIN
                FOR I←2 UNTIL INC,END DO
                        BEGIN
                        N,DIV←N/I;
                        D,DIV←D/I;
                        WHILE ((N,DIV*I=N)AND((D,DIV*I)=D)) DO
                                BEGIN
                                N←N,DIV; D←D,DIV;
```

```
                                N.DIV:=N/I;
                                D.DIV:=D/I;
                                END;
                        END;
                END;
        END.REDUCE; END REDUCE;

COLPNT:=1;
UNFLOCNT:=0;
FOR ROWI:=1 UNTIL ROW DO
        BEGIN
        IF COL<COLPNT THEN
                BEGIN
                ROWI:=ROW;
                END
        ELSE
BEGIN
USED:=FALSE;
FOR COLSRCH:=COLPNT UNTIL COL DO
        BEGIN
        IF N.MATRIX[ROWI,POINTER[COLSRCH]]#0 THEN
                BEGIN
                TEMP:=POINTER[COLPNT];
                POINTER[COLPNT]:=POINTER[COLSRCH];
                POINTER[COLSRCH]:=TEMP;
                COLSRCH:=COL+3;
                USED:=TRUE;
                END;
        IF COLSRCH=COL+3 THEN
                BEGIN
                INTEGER N,D,NUM,DENUM,R;
                COLI:=POINTER[COLPNT];
                IF N.MATRIX[ROWI,COLI]#0.MATRIX[ROWI,COLI] THEN
                        BEGIN
                        NUM:=N.MATRIX[ROWI,COLI];
                        DENUM:=D.MATRIX[ROWI,COLI];
                        FOR R:=ROWI+1 UNTIL ROW DO
                                BEGIN
                                N:=N.MATRIX[R,COLI];
                                IF N#0 THEN
                                        BEGIN
                                        N:=N*DENUM;
                                        D:=D.MATRIX[ROW,COLI];
                                        D:=D*NUM;
                                        REDUCE(N,D);
                                        N.MATRIX[R,COLI]:=N;
                                        D.MATRIX[R,COLI]:=D;
                                        END;
                                END;
                        END;
                IF ROWI > PARTITION THEN
                        BEGIN
                        IF N.MATRIX[ROWI,COLI]#0 AND
                                COLI >= KIDEG THEN STRONG:=FALSE;
                        END;
                N.MATRIX[ROWI,COLI]:=1;  !SET PIVOT TO 1;
                D.MATRIX[ROWI,COLI]:=1;
                COLPNT:=COLPNT+1;
                FOR COLSRCH:=COLPNT UNTIL COL DO
                        BEGIN
                        INTEGER MUL.N,MUL.D,NN,DN,DA,NA,
                                OI,NI,COLA,R;
                        COLI:=POINTER[COLSRCH];
                        COLA:=POINTER[COLPNT-1];
                        MUL.N:=N.MATRIX[ROWI,COLI];
                        IF MUL.N#0 THEN
                                BEGIN
                                MUL.D:=D.MATRIX[ROWI,COLI];
```

```
                                                        D.MATRIX[ROWI,COLI]←1;
                                                        N.MATRIX[ROWI,COLI]←0;
                                                        FOR R←(ROWI+1) UNTIL ROW DO
                                                                BEGIN
                                                                NA←N.MATRIX[R,COLA];
                                                                IF NA#0 THEN
                                                                   BEGIN
                                                                   DA←D.MATRIX[R,COLA];
                                                                   DI←D.MATRIX[R,COLI];
                                                                   NI←N.MATRIX[R,COLI];
                                                                   DN←DI*MUL.D*DA;
                                                                   NN←NI*MUL.D*DA-
                                                                        NA*MUL.N*DI;
                                                                   REDUCE(NN,DN);
                                                                   D.MATRIX[R,COLI]←DN;
                                                                   N.MATRIX[R,COLI]←NN;
                                                                   END;
                                                                END;
                                                        END;
                                                END;
                                        END;
                                END;
                        IF PARTITION <= 0 AND NOT USED THEN
                                BEGIN
                                T←ROW-ROWI+1;
                                IF T<=K1DEG THEN
                                        BEGIN
                                        WRITE("UNFOLDING TERM ");
                                        PRINT(T,3);
                                        WRITE(" IS REDUNDANT (CB)");
                                        UNFLDCNT←UNFLDCNT+1;
                                        END;
                                END;
                        END;
                END;
        END;
SING.FLG←TRUE;
IF PARTITION<=0  THEN
        BEGIN
        WRITE("(CC)CODIMENSION = ");
        PRINT(COL-COLPNT+1+K1DEG-UNFLDCNT,3);
        WRITE("(CB)");
        WRITE("ADDITIONAL UNFOLDING TERMS ARE(CC)");
        FOR COLSRCH ← COLPNT UNTIL COL DO
                BEGIN
                COLI ← POINTER(COLSRCH);
                FOR ROWI ← 1 UNTIL N.VAR DO
                        PRINT(TERM.LIST[COLI,ROWI],3);
                WRITE("(C)");
                END;
        WRITE("(CB)");
        END
ELSE
        BEGIN
        FOR COLSRCH←COLPNT UNTIL COL DO
                BEGIN
                IF POINTER[COLSRCH]>=K1DEG THEN
                        BEGIN
                        SING.FLG←FALSE;
                        COLSRCH←COL+1;
                        END;
                END;
        END;
SINGULAR←SING.FLG;
END
!GENERATES THE SET OF ALL POLYNOMIALS WHICH EQUAL K-JETS OF THE
        PARTIALS MULTIPLIED BY ALL MONOMIALS OF DEGREE D SUCH THAT
        0<=D<=K+1       AND STORES IN THE MATRIX WITH ROWS REPRESENTING
```

```
        POLYNOMIALS AND COLUMNS REPRESENTING TERMS WITH THE COEFICIENTS
        OF THE TERMS AS ELEMENTS;
PROCEDURE FILLMATRIX(N,MATRIX,D,MATRIX,PART,PCOEF,N,VAR,N,TERM,K,K1,START,
        MINDEG,COL,ROW,PARTITION,TERM,LIST,K1DEG);
INTEGER ARRAY N,MATRIX,D,MATRIX,PART,PCOEF,TERM,LIST;
INTEGER N,VAR,K,K1,START,COL,ROW,N,TERM,MINDEG,PARTITION,K1,DEG;

BEGIN
EXTERNAL BOOLEAN PROCEDURE NEXTMON;
INTEGER P,PNT,KLV,TERM,PNT,D,D,SAVE,ROW,P,J,I,T,L,M,X;
INTEGER ARRAY MONOM[1:N,VAR],DEG,LIST[MINDEG:(K+1)],TERM[1:N,VAR];
BOOLEAN F,Z;
        FOR I:=1 UNTIL ROW DO    !ZERO OUT MATRIX;
                BEGIN
                FOR J:=1 UNTIL COL DO
                        BEGIN
                        N,MATRIX[I,J]:=0;
                        D,MATRIX[I,J]:=1;

                END;
TERM,PNT:=1;
FOR KLV:=MINDEG UNTIL (K+1) DO
        BEGIN
        DEG,LIST[KLV]:=TERM,PNT;
        K1DEG:=TERM,PNT;
        FOR I:=1 UNTIL N,VAR DO
                MONOM[I]:=0;
        WHILE NEXTMON(MONOM,N,VAR,KLV) DO
                BEGIN
                FOR I:=1 UNTIL N,VAR DO
                        BEGIN
                        TERM,LIST[TERM,PNT,I]:=MONOM[I];
                        END;
                TERM,PNT:=TERM,PNT+1;
                END;
        END;
ROW,P:=0;
FOR KLV:=K+1=MINDEG STEP -1 UNTIL 0 DO
        BEGIN
        Z:=FALSE;
        FOR I:=1 UNTIL N,VAR DO
                MONOM[I]:=0;
        IF KLV=0 THEN
                Z:=TRUE
        ELSE
                PARTITION,ROW,P;        !PREVIOUS ROW,P AS PARTITION POINTER;
        WHILE NEXTMON(MONOM,N,VAR,KLV) OR Z DO
                BEGIN
                Z:=FALSE;
                FOR J:=1 UNTIL N,VAR DO  !LOOP THRU PARTIALS;
                        BEGIN
                        D:=0;
                        ROW,P:=ROW,P+1;
                        FOR T:=1 UNTIL N,TERM DO
                                BEGIN
                                D:=0;
                                FOR L:=1 UNTIL N,VAR DO
                                        BEGIN
                                        TERM[L]:=MONOM[L]*PART[J,L,T];
                                        D:=D+TERM[L];
                                        END;
                                IF D<=K+1 THEN
                                        BEGIN
                                        D:=DEG,LIST[D];
                                        F:=FALSE;
                                        WHILE NOT F DO
                                                BEGIN
```

```
                                                F:=TRUE;
                                                FOR M:=1 UNTIL N.VAR DO
                                                        BEGIN
                                                        IF TERM.LIST[O,M]#
                                                           TERM[M] THEN
                                                                BEGIN
                                                                F:=FALSE;
                                                                M:=N.VAR;
                                                                END;
                                                        END;
                                                IF NOT F THEN D:=D+1;
                                                END;
                                        N.MATRIX[ROW,P,O]:=PCOEF[J,T];
                                        END;
                                END;
                        END;
                END;
        END;
K1.START:=DEG.LIST[K+1];
END
!SURTS TERMS OF A POLYNOMIAL INTO ASCENDING DEGREE ORDER;
PROCEDURE SORT (A,V,T,C,D); !A=ARRAY V=VARIABLES T=TERMS C=COEF ARRAY D=DEGREE ARRAY;
INTEGER ARRAY A,D,C; VALUE V,T; INTEGER V,T;
BEGIN
INTEGER I,TEMPI,M,N,L; REAL TEMP;
FOR I:=1 UNTIL (T-1) DO
        BEGIN
        IF D[I] > D[I+1] THEN
                BEGIN
                FOR N:=1 UNTIL  V DO
                        BEGIN
                        TEMPI:=A[N,I]; !SWAP;
                        A[N,I]:=A[N,I+1];
                        A[N,I+1]:=TEMPI;
                        END;
                TEMP:=C[I];
                C[I]:=C[I+1];
                C[I+1]:=TEMP;
                TEMP:=D[I];
                D[I]:=D[I+1];
                D[I+1]:=TEMP;
                I:=I-2;
                IF I <= -1 THEN I:=1;
                END;
        END;
END
!COMPUTES THE NUMBER OF TERMS OF DEGREE <= K IN V VARIABLES;
INTEGER PROCEDURE KTERM (K,V);
!COMPUTE (K+V) THINGS TAKEN V AT A TIME;
VALUE K,V;
INTEGER V,K;
BEGIN
INTEGER N,TOP,BOTTOM,I;
N:=V+K;  TOP:=1;  BOTTOM:=1;
IF V<K THEN
        BEGIN
        FOR I := V+1 UNTIL N DO TOP:=TOP*I;
        FOR I := 1 UNTIL K DO BOTTOM:=BOTTOM*I;
        END
ELSE
        BEGIN
        FOR I := K + 1 UNTIL N DO TOP:=TOP*I;
        FOR I := 1 UNTIL V DO BOTTOM:=BOTTOM*I;
        END;
KTERM:=TOP/BOTTOM;
END
```

```
!TAKES ALL PARTIAL DERIVITIVES OF A POLYNOMIAL;
PROCEDURE PARTIAL(TERMS,COEF,PART,PCOEF,V,T);
        VALUE V,T;
INTEGER ARRAY COEF,PCOEF;
INTEGER ARRAY TERMS,PART;
INTEGER V,T;
BEGIN
INTEGER I,N,M;
FOR I:=1 UNTIL T DO       !LOOP THRU TERMS;
        BEGIN
        FOR N:=1 UNTIL V DO              !LOOP THRU PARTIALS;
                BEGIN
                FOR M:=1 UNTIL V DO              !TAKE PARTIAL OF EACH TERM;
                        BEGIN
                        IF N=M THEN
                                BEGIN
                                PCOEF[N,I]:=COEF[I]*TERMS[M,I];
                                IF PCOEF[N,I]=0 THEN
                                        PART[N,M,I]:=999999
                                ELSE
                                        PART[N,M,I]:=TERMS[M,I]-1;
                                END
                        ELSE
                                BEGIN
                                PART[N,M,I]:=TERMS[M,I];
                                END;
                        END;
                END;
        END;
END
!GENERATES SUCCESSIVE MONOMIALS OF DEGREE K;
BOOLEAN PROCEDURE NEXTMON(MONOM,N,VAR,K);
VALUE N,VAR,K;
INTEGER ARRAY MONOM;
INTEGER N,VAR,K;
BEGIN
        INTEGER SUM,I;
        IF K=0 THEN
                BEGIN
                NEXTMON:=FALSE;
                GOTO RETURN;
                END;
        NEXTMON:=TRUE;
LOOP1:  MONOM[N,VAR]:=MONOM[N,VAR]+1;
LOOP2:  SUM:=0;
        FOR I:=1 UNTIL N,VAR DO
                SUM:=SUM+MONOM[I];
        IF SUM>K THEN
                BEGIN
                I:=N,VAR;
                WHILE MONOM[I]=0 DO I:=I-1;
                IF I=1 THEN
                        BEGIN
                        NEXTMON:=FALSE;
                        GOTO RETURN;
                        END;
                MONOM[I]:=0;
                MONOM[I-1]:=MONOM[I-1]+1;
                GOTO LOOP2;
                END;
        IF SUM=K THEN GOTO RETURN;
        GOTO LOOP1;
RETURN; END
!COMPUTES MATRIX SIZE NEEDED TO COMPUTE UNFOLDING, ALLOCATES MATRIX
        AND CALLS ROUTINE TO CHECK UNFOLDINGS;
PROCEDURE UNFOLD(PART,PCOEF,N,VAR,N,TERMS,K);
INTEGER ARRAY PART,PCOEF;
INTEGER  N,VAR,N,TERMS,K;
```

```
BEGIN
EXTERNAL INTEGER PROCEDURE KTERM;
INTEGER UNFOLDING.TERMS,COL,ROW,C,R;
EXTERNAL PROCEDURE VERSAL;
UNFOLDING.TERMS:=0;
WHILE UNFOLDING.TERMS=0 DO
        BEGIN
        WRITE("HOW MANY UNFOLDING TERMS DO YOU HAVE? (0)");
        READ (UNFOLDING.TERMS);
        COL_KTERM(K,N.VAR);
        ROW_N.VAR*COL+UNFOLDING.TERMS;
                BEGIN
                INTEGER ARRAY NUMER[1:ROW,1:COL],DENOM[1:ROW,1:COL];
                FOR R:=1 UNTIL ROW DO
                        BEGIN
                        FOR C := 1 UNTIL COL DO
                                BEGIN
                                NUMER[ROW,COL]:=0;
                                DENOM[ROW,COL]:=1;
                                END;
                        END;
                VERSAL(NUMER,DENOM,K,N.VAR,N.TERMS,PART,PCOEF,ROW,COL,
                        UNFOLDING.TERMS);
                END;
        WRITE("ENTER 0 FOR ANOTHER UNFOLDING (0)");
        READ(UNFOLDING.TERMS);
        END;
END;
!FILLS MATRIX, ENTERS USER UNFOLDING TERMS AND CALLS SINGULAR TO
        COMPUTE UNFOLDING;
PROCEDURE VERSAL(NUMER,DENOM,K,N.VAR,N.TERMS,PART,PCOEF,ROW,COL,UNFLD.TRMS);
INTEGER ARRAY NUMER,DENOM,PART,PCOEF;
INTEGER K,N.VAR,N.TERMS,ROW,COL,UNFLD.TRMS;
BEGIN
EXTERNAL PROCEDURE FILLMATRIX;
EXTERNAL BOOLEAN PROCEDURE SINGULAR;
EXTERNAL INTEGER PROCEDURE MAP;
INTEGER ARRAY TERM.LIST[1:COL,1:N.VAR],POINT[1:COL],MONOM[1:N.VAR];
INTEGER I,L,J,TERMS,COEF;
BOOLEAN DUMMY,DUM2;
J_0;
I_0;
L_0;
FILLMATRIX(NUMER,DENOM,PART,PCOEF,N.VAR,N.TERMS,(K-1),I,0,COL,ROW,J,
        TERM.LIST,L);
FOR I_1 UNTIL UNFLD.TRMS DO
        BEGIN
        WRITE("HOW MANY TERMS IN UNFOLDING TERM");PRINT(I);WRITE(" ? (0)");
        READ (TERMS);
        FOR J_1 UNTIL TERMS DO
                BEGIN
                WRITE("(C)OEF = (0)");
                READ(COEF);
                WRITE("EXPONENTS = (0)");
                FOR L_1 UNTIL N.VAR DO READ(MONOM[L]);
                NUMER[(ROW=I+1),MAP(MONOM,N.VAR,TERM.LIST)]_COEF;
                END;
        END;
FOR I_1 UNTIL COL DO POINT[I]_I;
J_0;
DUMMY_SINGULAR(NUMER,DENOM,POINT,ROW,COL,-1,DUM2,TERM.LIST,UNFLD.TRMS,N.VAR);
END;
!SEARCHS FOR THE MATRIX COLUMN CORRESPONDING TO THE TERM IN MONOM;
INTEGER PROCEDURE MAP(MONOM,N.VAR,TERM.LIST);
INTEGER ARRAY MONOM,TERM.LIST;
INTEGER N.VAR;
BEGIN
INTEGER MP,I,INC;
```

```
BOULEAN FOUND;
MP:=0;
I:=1;
WHILE MP=0 DO
        BEGIN
        FOUND:=TRUE;
        FOR INC:=1 UNTIL N.VAR DO
                BEGIN
                IF MONOM[INC]#TERM.LIST[I,INC] THEN
                        BEGIN
                        FOUND:=FALSE;
                        INC:=N.VAR+1;
                        END;
                END;
        IF FOUND THEN
                MP:=I;
        I:=I+1;
        END;
MAP:=MP;
END;
```

Пример выдачи

```
 RUN KDET

WELCOME TO THE BLESSED WORLD OF CATASTROPHE THEORY

        NUMBER OF VARIABLES = 3
        NUMBER OF TERMS IN THE POLYNOMIAL = 4
IT IS NOW TIME TO INPUT THE POLYNOMIAL
EACH OF THE    4 TERMS OF THE POLYNOMIALIS INPUT
 USING THIS FORMAT
        C D D D

WHERE C IS THE COEFFICIENT AND D IS THE DEGREE
PLEASE INPUT THE TERMS        означает

TERM    1 1 2 0 1        1x^2z
TERM    2 1 0 3 0          + 1.y^3
TERM    3 1 0 0 4            + 1.z^4
TERM    4 1 0 1 3              + 1.yz^3
WHAT K DO YOU WANT TO TRY? (0 TO STOP) 4
THE MATRIX HAS BEEN ALLOCATED AT          60 BY          52
*** STRONGLY DETERMINED ***

HOW MANY UNFOLDING TERMS DO YOU HAVE? 0


CODIMENSION =    10  (—9, если постоянные члены игнорируются)
ADDITIONAL UNFOLDING TERMS ARE

    0    0    2          z^2
    0    1    1          yz
    0    0    1          z
    1    0    0          x
    1    1    0          xy
    2    0    0          x^2
    0    0    3          z^3
    0    1    0          y
    0    3    0          y^3
    0    0    0       постоянный член 1

ENTER 0 FOR ANOTHER UNFOLDING !
WHAT K DO YOU WANT TO TRY? (0 TO STOP) 0


END OF EXECUTION.
```

Дополнение 2. Катастрофы в численном анализе

Требуя новых численных методов, теория катастроф может в то же время помочь понять старые методы; на самом деле эти два аспекта — две стороны одной медали. С помощью каспоидных катастроф можно исследовать явления неустойчивости для решений полиномиальных уравнений. Эктон [211], стр. 201, приводит принадлежащий Уилкинсону [212] пример многочлена

$$f(x) = \prod_{r=1}^{20} (x+r) = x^{20} + 210x^{19} + \ldots + 20!,$$

корнями которого служат —20, —19, . . ., —1. Добавляя 2^{-23} к коэффициенту при x^{19}, мы получим распределение корней в комплексной плоскости, показанное на рис. Д2.1. Серьезные изменения произошли с корнями от —9 до —20; десять из них стали комплексными с большими мнимыми частями. Хорошо известно, что неустойчивость такого рода присуща *вырожденным* многочленам — многочленам с кратными корнями. Но относительно $f(x)$ Эктон [211] замечает: „Вряд ли корни могли бы быть изолированными в большей степени". Откуда же возникает эта неустойчивость? Снова процитируем Эктона [211]:

„Этот пример поистине ужасает. Ибо если мы увидели одного тигра, то не кишат ли все джунгли тиграми, и кто знает, где притаился следующий? Уилкинсон показывает, что эта трудность вызвана правильным расположением корней..."

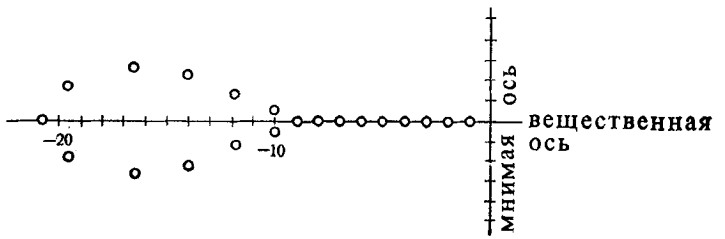


Рис. Д2.1

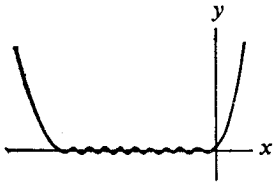


Рис. Д2.2

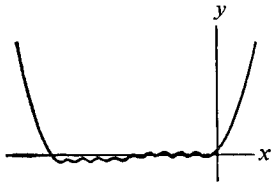
Геометрия каспоидов помогает приручить тигров. Действительно, при варьировании коэффициентов $a_{r-1}, \ldots, a_0$ решения полиномиального уравнения

$$x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_0 = 0$$

определяют многообразие каспоидной катастрофы типа A_r с управляющими переменными $a_{r-1}, \ldots, a_0$ (из которых a_{r-1} можно сделать немым при помощи преобразования Чирнхауза $x \mapsto x + a_{r-1}/r$) и поведенческой переменной x. Приведенный выше многочлен f, у которого все 20 корней вещественны, помещается над той частью бифуркационного множества, где все корни вещественны,— над самым внутренним „карманом" каспоида. Рисунок Д2.2, взятый у Вудкока и Постона [20], иллюстрирует на примере A_7 тот факт, что этот карман оказывается в типичном случае очень малым; из других картинок в той же книжке видно, что этот карман также и очень непрочный и имеет тенденцию совсем пропадать при изменении управляющих параметров. Значит, малое возмущение какого-либо коэффициента вполне может вывести f из этой области, при этом некоторые вещественные корни станут комплексными. Когда два вещественных корня сходятся и образуют комплексно-сопряженную пару, по меньшей мере один из них должен пройти больше половины начального расстояния между ними, поэтому можно ожидать, что смещения корней будут такого порядка величины. Область, где все корни вещественны, быстро уменьшается с ростом r, так что многочлены высоких степеней оказываются особенно чувствительными (если у них все корни вещественны). Но малость этой области означает, что и самих таких многочленов немного. (Аналогичные замечания относятся и к высшим катастрофам от нескольких существенных переменных.)



(a)



(b)

Рис. Д2.3

С другой стороны, мы можем заметить, что о корнях f никак нельзя сказать, что „они" вряд ли могли бы быть изолированными в большей степени. В сравнении с размерами коэффициентов они чрезвычайно сильно скучены: все двадцать корней зажаты в интервале длины 19, а коэффициенты размахнулись до $20! \sim 2.4 \cdot 10^{18}$. Поэтому в подходящем масштабе график $f(x)$ выглядит, примерно как график на рис. Д2.3(a), с очень плоским „дном", и почти столь же вырожден, как и многочлен x^{20}, вырожденность которого максимальна. Ничтожные возмущения (особенно коэффициентов при высоких степенях) могут поднять один конец графика, как на рис. Д2.3(b), лишив многочлен вещественных корней и, следовательно, сдвинув их на заметное расстояние в комплексной плоскости.

Таким образом, не *регулярное* расположение корней, а

их *скученность* вызывает все неприятности. Любой сомневающийся специалист по численному анализу пусть проведет такой эксперимент: разместить 20 точек θ_i случайным образом на интервале между —1 и —20. Тогда многочлен

$$g(x)=\prod_{i=1}^{20}(x-\theta_i)$$

проявит в точности такую же крайнюю чувствительность, как и f. Мы должны опасаться не страшной симметрии тигра, а его пристрастия к добыче, собирающейся в стада. (Все многочлены, встречающиеся при переходе от f к рис. Д2.1, столь же неустойчивы, как и f, но расположение их корней гораздо менее регулярно. И хотя вещественность всех корней приводит к их скучиванию, эта вещественность тоже не является необходимым условием повышенной чувствительности, по той же самой причине.) Тем не менее симметрия на самом деле страшна, но не из-за того что вызывает к жизни тигров такого рода, а из-за того что делает действительную вырожденность более широко распространенной, чем это могло бы быть, как мы в этом убедились в § 13 гл. 13.

Анализируя геометрию каспоидов, можно было бы получить количественные оценки того, насколько малы указанные „малые" области — бесспорно, важное дело — или насколько „близок" многочлен к вырожденности. Но даже и без этого мы уже гораздо лучше чувствуем опасные места. Джунгли больше не полны тиграми. Тигры обитают лишь в узких областях вблизи бифуркационного множества соответствующего каспоида и могут быть обнаружены по относительно большой скученности корней (эта черта сохраняется при возмущениях и потому может *устойчиво* использоваться в качестве критерия). Но если уж тигр обнаружен, то лучшее, что мы можем сделать, это обращаться с ним поосторожнее — проводить вычисления с более высокой точностью. Если мы обнаружили его в *спроектированной* системе, то такая же высокая точность должна быть соблюдена и при исполнении проекта, если мы хотим, чтобы вычисления имели к нему отношение. Численная неустойчивость является показателем либо того, что Эктон [211] метко назвал „извращенными формулировками", либо же структурной неустойчивости системы. В таком случае абсолютно необходимы либо изменения в описании проблемы, либо тщательный анализ чувствительности к несовершенствам (см. гл. 13). Слепое переписывание неустойчивой программы в варианте с тридцатью десятичными знаками для всех переменных — это дорогой рецепт для, весьма возможно, реальной катастрофы.

ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ЛИТЕРАТУРЕ

Литература по теории катастроф разнообразна и разбросана по самым разным изданиям, а требования к читателю сильно меняются от работы к работе как по тематике, так и по уровню. Мы прилагаем краткий путеводитель по некоторым из наиболее заметных работ.

1. ОТКУДА ВСЕ ПОШЛО[1]. В начале был Том [1]. Это чрезвычайно сжато написанная, крайне требовательная к читателю книга, по которой нужен отдельный путеводитель. Изложение сильно проясняется при знакомстве с теорией динамических систем 60-х годов (которое можно приобрести, прочтя обзорную статью Смейла [175]), аналогии с этой теорией составляют непрерывный подтекст и источник идей. Книга местами вызывающа, к ней надо подходить без предвзятости и тщательно обдумывать каждое слово. Даже самые пустячные замечания могут таить в себе золото. Чем больше вы прочтете других работ по этому предмету, тем больше вы получите от Тома.

2. ОБЩИЕ ВВОДНЫЕ ИЗЛОЖЕНИЯ. Таких много, но часть из них не указывает достаточно ясно ограничений, нужных для применимости теоремы Тома о классификации, и сверхоптимистично настроена насчет ее универсальности. По ясности изложения прекрасна статья Зимана [213] (препринт [44] содержит больше материала и в некоторых отношениях лучше). Можно рекомендовать также статьи Чиллингворта [214] и Стюарта [215, 216]. Из вводных изложений на более высоком математическом уровне отметим очень хорошо написанный обзор Арнольда [59].

3. МАТЕМАТИКА. Эта часть литературы —самая большая сравнительно со всеми другими, но представлена в основном оригинальными статьями и доступна лишь тем, кто

[1] В оригинале The voice of The Master (Голос Учителя, Оракула, Бога).— *Прим. ред.*

имеет хорошую подготовку в дифференциальной топологии и других областях математики. В нашей книжке [25] описаны некоторые мотивировки без доказательств, но так как то была предшественница настоящей книги, лучше ссылаться на гл. 7 и 8 этой последней. (Однако книжка [25] дешевле.) Наиболее читабельные изложения классификационной теоремы даны, по-видимому, Брёкером и Ландером [9] и Лю [28]. У Тротмэна и Зимана [22] изучаются стратификации, используемые для получения форм глобально типичных катастроф в коразмерностях не больших 5; у Брёкера и Ландера этот материал опущен. Другое изложение дано Вассерманом [36]. По поводу *топологического* (а не дифференциального) подхода см. Гибсон, Виртмюллер, дю Плесси и Лоэйенга [27]. Действительно трудные орешки — статьи Мезера и Арнольда (см. список ниже); публикации последнего более интересны тем, кто желает *применять* теорию. Дикин [218] использует иной подход, через формальные степенные ряды, что дает полезные мотивировки (особенно для тех, кто предпочитает думать алгебраически, а не геометрически). По общей теории динамических систем можно посмотреть Чиллингворта [52] (мотивировки и подготовительное изложение) и Хирша и Смейла [163] (изложение, рассчитанное на студентов старших курсов). Основные сведения о многообразиях и многомерном анализе можно найти у Додсона и Постона [5] и Спивака [8]. Картинки катастроф имеются у Тома [42], Брёкера и Ландера [9], Вудкока и Постона [20] и Зимана [48].

4. *ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ*. В каждой главе о приложениях перечисляется подходящая литература по изложенному в ней материалу. По судам единственная работа, на которую можно пока сослаться, это Зиман [48]. По оптике очень рекомендуем статьи Берри и его сотрудников [61—64, 75], плюс к этому Арнольд [59, 74, 217] и Шазарэн [67]. Дёйстермат [41] почти непробиваем. Практически весь материал по упругим конструкциям покрывается работами Томпсона и Ханта [105, 110] и Сьюэлла [96]. По течениям жидкости нужно посмотреть статьи Мэкли и его сотрудников вместе с указанной там литературой. Голубицкий [86] и Гукенхаймер [219] занимаются ударными волнами, интересной темой, которую мы были вынуждены опустить из-за недостатка места. Холмз и Рэнд [202] дают хорошее вводное изложение вопросов использования теории катастроф в нелинейных дифференциальных уравнениях.

5. *ПРИЛОЖЕНИЯ К БИОЛОГИИ*. Книга Тома [42] стимулирует, но трудночитаема, его работа [220] в этом отно-

шении лучше и представляет собой хорошее введение в предмет. Модель биологического архетипа в томистском духе дана в работе Зимана [157], где вообще много интересных идей. (Не принимайте чересчур всерьез употребление там слова „теорема".) Сюда относятся также несколько статей из сборника под редакцией Уоддингтона [221]. Доступная литература должна здесь быстро возрастать.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИЯМ ПОВЕДЕНИЯ. Многие из главных идей обсуждаются у Иснарда и Зимана [185]. Статья Зимана, Холла, Хэррисона, Мэрриджа и Шеплэнда [189] представляет интерес из-за включенных в нее экспериментальных данных. Сборник работ Зимана [48] довольно полно покрывает всю эту область. Лучшим источником по проблеме потери аппетита является в данный момент препринт [44] статьи Зимана [213] в журнале Scientific American. Ренфри и Постон [159] подчеркивают необходимость использовать методы Тома, а не одни лишь его теоремы. Постон обсуждает в [222] роль этих методов в суждениях о „простоте". Сентябрьский выпуск журнала Behavioral Science за 1978 г. будет специально посвящен теории катастроф.

7. ФИЛОСОФИЯ И КРИТИКА. Подход Тома носит более философский характер, чем подход, принятый в настоящей книге; см., например, интервью Тома (Фожель, Гю и Том [223], Уолгейт [224], Диксон и Том [225]) и, конечно, его книгу [1]. Бóльшая часть критики была до сих пор чисто устной; один из редких примеров печатной критики — статья Кролла [116], который, несмотря на недопонимание некоторых вопросов, делает ряд хороших замечаний; см. также Зуссманн и Цалер [1]. Последняя статья получила определенную известность, но ее ценность серьезно снижают постоянные ошибки.

8. ПРОЧИЕ ИСТОЧНИКИ. Программа „Горизонт" Британской радиовещательной корпорации (Би-би-си) посвятила теории катастроф 30 минут (записи этой программы хранятся в архивах Би-би-си). Э. Э. Р. Вудкок (Биологическая лаборатория Томпсона, Уильямс-колледж, Массачусетс) снял фильм о геометрии катастроф; еще один фильм сделал Нелсон Мэкс (Университет Брауна, математический факультет, Провиденс, Род-Айленд).

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Все перечисленные здесь работы либо имеют явное отношение к теории катастроф или к очень тесно связанным с ней областям математики, либо представляют собой „неявные" приложения теории катастроф к различным наукам. Мы стремились, насколько возможно, учесть всё, относящееся к первой категории, хотя, без сомнения, наш список не исчерпывающ; ко второй категории мы подходили более избирательно, приводя лишь статьи, непосредственно относящиеся к обсуждаемому материалу. (Включение той или иной работы в этот список не означает, что ее содержание безошибочно; в действительности некоторые из приводимых ниже работ содержат серьезные ошибки. Вместо того чтобы создавать у читателя предубеждение против них, мы предоставляем ему возможность составить о них свое собственное мнение.)

АБРАХАМ Р. (R. Abraham). Predictions for the future of differential equations. In *Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick* 1968—69. Lecture Notes in Mathematics 206 (D. R. J. Chillingworth, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 163—166.

✧ Introduction to morphology. In *Quatrième Rencontre entre Mathématiques et Physique* 1972, Vol. 4, fasc. 1. Mathematics Departments, University of Lyons, 1972. Tome 9, pp. 38—114.

АБРАХАМ Р., РОББИН Дж. У. (R. Abraham, J. W. Robbin) *Transversal Mappings and Flows.* Benjamin, New York, 1967.

АЙЗЕНБАД Д., ЛЕВАЙН Х. (D. Eisenbud, H. Levine) The topological degree of a finite C^∞ map germ. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 90—98.

АНОНИМ. The magnificent seven. *Manifold* **14**, 6—13, 1973.

АНОНИМ. Catastrophes in action. *Manifold* **14**, 26—31, 1973.

АНОНИМ. Bibliography. *Manifold* **14**, 36—37, 1973.

АНОНИМ. How catastrophe may teach us all the wrong lessons. *Times Higher Educational Supplement*, 5th December 1975, p. 12.

АНТОНЕЛЛИ П. (P. Antonelli) Transporting a pure mathematician into theoretical biology. *Proceedings of the Conference on Mathematics, Statistics, and the Environment.* Ottawa, 1974.

АРНОЛЬД В. И. Особенности гладких отображений. *УМН*, 1968, **23**:1, 3—44.

✧ О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов. *УМН*, 1968, **23**:4, 247—248.

✧ О матрицах, зависящих от параметров. *УМН*, 1971, **26**:2, 101—114.

✧ Лекции о бифуркациях и версальных семействах. *УМН*, 1972, **27**:5, 119—184.

✧ Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**:3, 61—62.

✧ Нормальные формы для функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k и E_k и лангранжевы особенности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**:4, 3—25.

✧ Классификация унимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, **7**:3, 75—76.

✧ Замечания о методе стационарной фазы и числах Коксетра. *УМН*, 1973, **28**:5, 17—44.

✧ Нормальные формы функций в окрестностях вырожденных критических точек. *УМН*, 1974, **29**:2, 11—49.

✧ Critical points of smooth functions, *Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver*, 1974, pp. 19—39.

✧ Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *УМН*, 1975, **30**:5, 3—65.

◇ Классификация бимодальных критических точек функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9**:1, 49—50.

◇ Local normal forms of functions. *Invent. Math.*, 1976, **35**, 87—109.

◇ Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1976, **29**, 557—582.

АТКИНСОН Г. (G. Atkinson) Catastrophe theory in geography — a new look at some old problems, Mimeographed notes, 1976.

БАТТРО А. М. (A. M. Battro) Morphogénèse des Limnées, adaptation vitale et théorie des catastrophes. *Bull. de Psychologie, Hommage à Jean Piaget, Paris* 1977.

◇ Réflexions sur une psychologie écologique expérimentale. Le problème de l'échelle de l'environment. *L'Année Psychologique*, 1977.

◇ Stabilité structurelle et psychogénèse. To appear.

Le geometría de la inestabilidad y la teoría de las catástrofes, *Criterio (Buenos Airés)* no. 1722, 463—468, 1975.

БЕЛЛ Дж. М., ЛЕЙВИС Д. А. (G. M. Bell, D. A. Lavis) Thermodynamic phase changes and catastrophe theory. To appear.

БЕНГИГИ Л., ШУЛЬМАН Л. С. (L. Benguigui, L. S. Schulman) Topological classification of phase transitions. *Phys. Lett. A* **45**, 315—316, 1973.

БЕР М. (M. Beer) Endliche Bestimmtheit und universelle Entfaltungen von Keimen mit Gruppenoperation. Diplomarbeit, University of Regensburg, 1976.

БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) *The Diffraction of Light by Ultrasound*. Academic Press, New York and London, 1966.

◇ Cusped rainbows and incoherence effects in the rippling-mirror model for particle scattering from surfaces. *J. Phys. A* **8**, 566—584, 1975.

◇ Attenuation and focusing of electromagnetic surface waves rounding gentle bends. *J. Phys. A* **8**, 1952—1971, 1975.

◇ Catastrophes and semi-classical mechanics. In *Rencontre de Cargèse sur les Singulsrités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 133—136.

◇ Waves and Thom's theorem. *Adv. Phys.* **25**, 1—25, 1976.

Focusing and twinkling: critical exponents from catastrophes in non-Gaussian random short waves. Preprint, Univ. of Bristol, 1977.

◇ Semi-classical mechanics in phase space. *Phil. Trans. Roy. Soc.* To appear.

БЕРРИ М. В., МАУНТ К. Э. (M. V. Berry, K. E. Mount) Semiclassical approximations in wave mechanics. *Rep. Prog. Phys.* 35, 315—397, 1972.

БЕРРИ М. В., МЭКЛИ М. Р. (M. V. Berry, M. R. Mackley) The six-roll mill: unfolding an unstable persistently extensional flow. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, in press.

БЕРРИ М. В., НАЙ Дж. Ф. (M. V. Berry, J. E. Nye) Fine structure in caustic junctions. *Nature, Lond.* 267, 34—36, 1977.

БЕРРИ М. В., ХЭННЕЙ Дж. Х. (M. V. Berry, J. H. Hannay) Umbilic points on Gaussian random surfaces. Preprint. Univ. of Bristol, 1977.

БИРСТОУН Э. (E. Bierstone) Local properties of smooth maps equivariant with respect to finite group actions. *J. Diff. Geom.* **10**, 523—540, 1975.

БОРДМАН Дж. М. (J. M. Boardman) Singularities of differentiable mappings. *Publ. Math. IHES* **33**, 21—57, 1967. [Работа частично переведена в сборнике: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 102—152.]

БОС Н. А. (N. A. Baas) On the models of Thom in biology and morphogenesis. Preprint, University of Virginia, 1972.

БОХНАК Я., ГО Ц.-Ч. (J. Bochnak, T.-C. Kuo) Different realizations of a non-sufficient jet. *Indag. Math.* **34**, 24—31, 1972.

БРАУН Б. Л., ИНУИ Д., УИЛЬЯМС Р., БОРРУС К. (B. L. Brown, D. Inouye, R. Williams, K. Borrus) A catastrophe theory account of dichotic listening. Preprint. Dept. of Psychology, Stanford University, 1976.

БРЁКЕР Т. (Th. Bröcker) Differentierbäre Abbildungen. Lecture notes, University of Regensburg, 1973.

БРЁКЕР Т., ЛАНДЕР Л. (Th. Bröcker, L. Lander) *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Notes 17. Cambridge University Press, Cambridge, 1975. [Имеется перевод: Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977.]

БЭНКОФФ Т. Ф. (T. F. Banchoff) Polyhedral catastrophe theory I. Maps of the line to the line. In *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil*, 1971 (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, New York and London, 1973, pp. 7—22.

БЭНКОФФ Т. Ф., СТРАУСС К. (T. F. Banchoff, C. Strauss) A reinvestigation of the centro-

surface of the ellipsoid. To appear in Francis, G. K. (ed.). *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April 1977.

ВАРЧЕНКО А. Н. Многогранники Ньютона и оценки для осциллирующих интегралов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**:3, 13—38.

✧ Zeta-function of monodromy and Newton's diagram. *Invent. Math.* 1976, **37**, 253—262.

ВАССЕРМАН Г. (G. Wasserman) *Stability of Unfoldings*. Lecture Notes in Mathematics 393. Springer, Berlin and New York, 1974.

✧ *(r, s)*-stability of unfoldings, Preprint, University of Regensburg, 1974.

✧ Stability of caustics. In *Rencontre de Cargèse, sur les singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 128—132.

✧ *(r, s)*-stable unfoldings and catastrophe theory. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*. Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 253—262.

✧ Stability of unfoldings in space and time. *Acta math.* **135**, 57—128, 1975.

✧ Classification of singularities with compact abelian symmetry. *Regensburger Mathematische schriften* 1, Department of Mathematics, University of Regensburg, 1977.

ВУДКОК Э. Э. Р. (A. E. R. Woodcock) Discussion paper: cellular differentiation and catastrophe theory. *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **231**, 60—76, 1974.

✧ Embryology, differentiation, and catastrophe theory. *Manifold* **15**, 17—33, 1974.

✧ The development of biological form: toward an understanding? Preprint, Williams College, Mass., 1976.

ВУДКОК Э. Э. Р., ПОСТОН Т. (A. E. R. Woodcock, T. Poston) *A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes*. Lecture Notes in Mathematics 373. Springer, Berlin and New York, 1974.

✧ A higher catastrophe machine. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79**, 343—350, 1976.

ГИБСОН К. Дж. (C. G. Gibson) *Singular points of smooth mappings: a geometric introduction*. In preparation.

ГИБСОН К. Дж., ВИРТМЮЛЛЕР К. ДЮ ПЛЕССИ А. А., ЛОЭЙЕНГА Э. (C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessiss, E. Looijenga) *Topological Stability of Smooth Mappings*. Lecture Notes in Mathematics 552. Springer, Berlin and New York, 1977.

ГИЛМОР Р. (R. Gilmore) Structural stability of the phase transition in Dicke-like models. *J. Math. Phys. A* **18**, 17—22, 1977.

ГИЛЬБЕРТ Д. (D. Hilbert) Über die Singularitäten der Diskriminantenflache. *Math. Ann.* **30** (1887), 437—441, Gesammelte Abhandlungen, Vol. 2, 117—120, Springer, Berlin, 1933.

ГО Ц.-Ч. (T.-C. Kuo) On C^0-sufficiency of jets. *Topology* **8**, 167—171, 1969.

✧ A complete determination of C^0-sufficiency in $J^r(2, 1)$. *Invent. Math.* **8**, 225—235, 1969.

✧ The jet space $J^r(n, 1)$. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium*. Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 169—177.

✧ Characterizations of v-sufficiency of jets. *Topology* **11**, 115—131, 1972.

ГОДВИН Э. Н. (A. N. Godwin) Elementary catastrophes. Thesis, University of Warwick, 1971.

✧ Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic. *Publ. Math. IHES* **40**, 117—138, 1971.

✧ Methods for Maxwell sets of cuspoid catastrophes. Preprint, Lanchester Polytechnic, Rugby, 1974.

✧ Topological bifurcation for the double cusp polynomial. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77**, 293—312, 1975.

ГОЛУБИЦКИЙ М. (M. Golybitsky) Contact equivalence for Lagrangian submanifolds. In *Dynamical Systems-Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 71—73.

✧ Regularity and stability of shock waves for a single conservation law. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 84—88.

✧ An introduction to catastrophe theory and its applications. Lecture notes, Queens College, New York, 1976.

ГОЛУБИЦКИЙ М., ГИЙЕМИН В. (M. Golubitsky, V. Guillemin) *Stable Mappings and their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14. Springer, Berlin and New York, 1973. [Имеется перевод: Устойчивые отображения и их особенности.— М.: Мир, 1977.]

ГРЕЙ Э. (A. Gray) A proof of the polynomial division theorems via smoothing operators. Preprint, La Trobe University, 1976.

ГРЕЙЕМ Р. (R. Graham) Phase-transition-like phenomena in lasers and nonlinear optics. In *Synergetics* (H. Haken, ed.). Teubner, Stuttgart, 1973, pp. 71—86.

ГРОМОЛЛ Д., МАЙЕР В. (D. Gromoll, W. Meyer) On differentiable functions with isolated critical points. *Topology* **8**, 361—370, 1969.

ГРОССМЭН С. (S. Grossman) Fluctuations near phase transitions in restricted geometries. In *Synergetics* (H. Haken, ed.). Teubner, Stuttgart, 1973, pp. 54—70.

ГУДВИН Б. (B. Goodwin) Review of Thom R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Nature, Lond.* **242**, 207—208, 1973.

ГУКЕНХАЙМЕР Дж. (J. Guckenheimer) Caustics, In *Proceedings of the UNESCO Summer School, Trieste 1972.* International Atomic Energy Authority, Vienna, pp. 281—289.

◇ Review of Thom R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Bull. Amer. Math. Soc.* **79**, 878—890, 1973.

◇ Bifurcation and catastrophe. In *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil,* 1971 (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, New York and London, 1973, pp. 95—110.

◇ Catastrophes and partial differential equations. *Ann. Inst. Fourier* **23**, 31—59, 1973.

◇ Solving a single conservation law. In *Dynamical Systems — Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 108—134.

◇ Caustics and non-degenerate Hamiltonians. *Topology* **13**, 127—133, 1974.

◇ Constant velocity waves in oscillating chemical reactions. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 99—103.

◇ Shocks and rarefactions in two space dimensions. To appear in *Arch. Rat. Mech. Anal.*

◇ Isochrons and phaseless sets. To appear in *J. Math. Biol.*

◇ On the bifurcation of maps of the interval. To appear.

ГУСЕЙН-ЗАДЕ С. М. Матрицы пересечения некоторых особенностей функций двух переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**:1, 15—18.

◇ Диаграммы Дынкина для особенностей функций двух переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**:4, 23—30.

ГЭФФНИ Т. (T. Gaffney) Properties of finitely determined map germs. Thesis, Brandeis Univ., June, 1975.

◇ On the order of determination of a finitely determined germ. *Invent. Math.* **37**, 83—92, 1976.

ГЮТТИНГЕР В. (W. Güttinger) Catastrophe geometry in physics and biology. *Physics and Mathematics of the Nervous System,* Lecture Notes in Biomathematics 4, Springer, Berlin and New York, 1974, pp. 2—30.

ДАМОН Дж. (J. Damon) Comparing topological and C^∞ stability. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math, Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 137—142.

ДЕЛЕЙНИ С. Р. (S. R. Delany) *Triton.* Bantam Books, New York, 1975.

ДЕНДРИНОС Д. С. (D. S. Dendrinos) Mode choice, transport pricing and urban form. Mimeographed, 1975.

ДЕЙСТЕРМАТ Й. Й. (J. J. Duistermaat) Oscillatory integrals, Lagrange immersions, and unfolding of singularities. *Commun. Pure Appl. Math.* **27**, 207—281, 1974.

ДЖЕЙМС И. М. (I. M. James) Singularities and catastrophes: a sketch. Duplicated notes, Summer Research Institute, Australian Mathematical Society, Monash University, 1974.

ДИКИН М. Э. Б. (M. A. B. Deakin) The formal power series approach to elementary catastrophe theory. Preprint, Monash University, 1976.

ДИКСОН Д., ТОМ Р. (D. Dickson, R. Thom) Was Newton's apple a cusp or a swallowtail? *Times Higher Education Supplement,* 5th December 1975, p. 13.

ДОДСОН К. Т. Дж., ДОДСОН М. М. (C. T. J. Dodson, M. M. Dodson) Simple non-linear systems and the cusp catastrophe. Preprint, York University, 1974.

ДОДСОН М. М. (M. M. Dodson) Evolution and the fold catastrophe. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse. Publ. Math. Dept. Univ. Nice, 1975, pp. 126—127.

◇ Darwin's law of natural selection and Thom's theory of catastrophes. To appear in *Math. Biosci.*

◇ Quantum evolution and the fold catastrophe. To appear.

ДОДСОН М. М., ХЭЛЛАМ А. (M. M. Dodson, A. Hallam) Allopatric speciation and the fold catastrophe. To appear.

ДЮБУА Ж.-Г., ДЮФУР Ж.-П. (J.-G. Dubois, J.-P. Dufour) La théorie des catastrophes I. La machine á catastrophes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20**, 113—134, 1974.

✧ La théorie des catastrophes II. Dynamiques gradientes à une variable d'état. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20**, 135—151, 1974.

✧ La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique. Preprint, Dept. de Math., Univ. de Québec, Montréal, 1977.

ДЮБУА Ж.-Г., ДЮФУР Ж.-П., СТАНЕК О. (J.-G. Dubois, J.-P. Dufour, O. Stanek) La théorie des catastrophes III. Caustiques de l'optique géometrique. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **24**, 243—260, 1976.

✧ La théorie des catastrophes IV. Deploiements universels et leurs catastrophes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **24**, 261—300, 1976.

ЕНИХ К. (K. Jänich) Caustics and catastrophes. In *Dynamical Systems — Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 100—101.

✧ Caustics and catastrophes. *Math. Ann.* **209**, 161—180, 1974.

ЗАКАЛЮКИН В. М. Одна теорема о версальности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, 7:2, 28—31.

✧ О лангранжевых и лежандровых особенностях. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**:1, 26—36.

ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Breaking of waves. In *Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick* 1968—69. Lecture Notes in Mathematics 206 (D. R. J. Chillingworth, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 272—281.

✧ The geometry of catastrophe. *Times Literary Supplement* 10th December 1971, pp. 1556—1557.

✧ Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.), Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968—72, Vol. 4, pp. 8—67; also in *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil*, 1971 (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, New York and London, 1971, pp. 683—741.

✧ C^0-density of stable diffeomorphisms and flows. *Proceedings of the Symposium on Dynamical Systems, Southampton University*, 1972.

✧ An essay on dynamical systems. *Report to the SRC on the* 1968—1971 *Programme of Differential Equations at University of Warwick*, 1972.

✧ A catastrophe machine. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh University Press, Edinburgh, Vol. 4, 1972, pp. 276—282.

✧ Catastrophe theory in brain modelling. *Int. J. Neurosci.* **6**, 39—41, 1973.

✧ Applications of catastrophe theory. *Manifolds*, Tokyo, 1973.

✧ On the unstable behaviour of stock exchanges. *J. Math. Econ.* **1**, 39—49, 1974.

✧ Catastrophe theory: a reply to Thom. *Manifold* **15**, 4—15, 1974; also in *Dynamical Systems — Warwock 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 373—383.

✧ Research ancient and modern. *Bull. Inst. Math. Appl.* **10**, 272—281, 1974.

✧ Primary and secondary waves in developmental biology. AAAS 1974. Some mathematical questions in biology VIII. In *Lectures on Mathematics in the Life Sciences 7.* American Mathematical Society, Ptovidence, R. I., 1974, pp. 69—161.

✧ Levels of structure in catastrophe theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver*, 1974, pp. 533—546.

✧ Differentiation and pattern formation. Appendix to Cooke J. Some current theories of the emergence and regulation of spatial organisation in early animal development. *A. Rev. Biophys. Bioengng* **4**, 210—215, 1975.

✧ Catastrophe theory in biology. In *Dynamical Systems — Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 101—105.

✧ Catastrophe theory. Preprint, University of Warwick, 1975.

✧ Catastrophe theory. *Scient. Am.* **234**, 65—83, 1976.

✧ A mathematical model for conflicting judgements caused by stress, applied to possible misestimations of speed caused by alcohol. *Br. J. Math. Statist. Psych.* **29**, 19—31, 1976.

✧ The umbilic bracelet and the double cusp catastrophe. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 328—366.

◇ Prison disturbances. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 402—406.

◇ Gastrulation and formation of somites in amphibia and birds. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences,* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 396—401.

◇ Euler buckling. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 373—395.

◇ Brain modelling. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 367—372.

◇ Catastrophe theory. *Proc. Roy. Instn.* in press.

◇ Applications de la théorie des catastrophes a l'étude du comportement humain. To appear.

◇ Duffing's equation in brain modelling. To appear in *Bull. Inst. Math. Appl.*

◇ *Catastrophe Theory: Selected Papers (1972—1977). Addison-Wesley* Reading. Mass. 1977. [Готовится русский перевод.]

◇ A catastrophe model for the stability of ships. Preprint. University of Warwick 1977, to appear in *Proc. Esc. Lat.-Am. Math.* **3**, (1976), IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.

ЗИМАН Э. К., ХОЛЛ К., ХЭРРИСОН П. Дж., МЭРРИДЖ Х., ШЕПЛЭНД П. (E. C. Zeeman, C. Hall, P. J. Harrison, H. Marriage, P. Shapland) A model for institutional disturbances. *Br. J. Math. Statist. Psych.* **29**, 66—80, 1976.

ЗУССМАНН Х. (H. J. Sussmann) Catastrophe theory. *Synthèse* **31**, 229—270, 1975.

◇ Catastrophe theory — a preliminary critical study. To appear in *Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Chicago, October* 1976.

ЗУССМАНН Х., ЦАЛЕР Р. С. (H. J. Sussmann, R. S. Zahler) Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: a critique. To appear in *Synthèse.*

ИНОУЭ М. (M. Inoue) Catastrophes and fluctuations of polarization in anisotropic dielectrics. *J. Chem. Phys.* **68**, 3351—3354, 1976.

ИНУИ Д. (D. Inouye) The dynamic microstructure of evaluative processes: structural stability models of judgement and intentional action. To appear.

ИСНАРД К. А., ЗИМАН Э. К. (C. A. Isnard, E. C. Zeeman) Some models from catastrophe theory in the social sciences. In *Use of Models in the Social Sciences* (L. Collins, ed.). Tavistock, London, 1976, pp. 44—100.

КАРВАЛО М. С. Б., де (M. S. B. de Carvalho) Liapunov functions for diffeomorphisms. Thesis, University of Warwick, 1973.

КАРПЕНТЕР Дж. Э. (G. A. Carpenter) Travelling wave solutions of nerve impulse equations. Thesis, University of Wisconsin, 1974.

КЁЙПЕР Н. Х. (N. H. Kuiper) C^1-equivalence of functions near isolated critical points. *Symposium on infinite-dimensional topology* (R. D. Anderson, ed.). Annals of Mathematical Studies 69. Princeton University, 1972.

КИЛМИСТЕР К. У. (C. W. Kilmister) The concept of catastrophe (review of Thom, R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*). *Times Higher Educational Supplement,* 30th November 1973, p. 15.

◇ Population in cities. Math. Gazette 60, 11—24, 1976.

КИНГ Х. К. (H. King) Real analytic germs and their varieties at isolated singulazities. *Invent. Math.* **37**, 193—200, 1976.

КЛАР Д., УОЛЛЕС Дж. Г. (D. Klahr, J. G. Wallace) *Cognitive Development — an Information-processing View.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale N. J., 1976; Wiley, New York and London, 1976.

КОЗАК Дж. Дж., БЕНХЭМ К. Дж. (J. J. Kozak, C. J. Benham) Denaturation; an example of a catastrophe. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **71**, 1977—1981, 1974.

КОМОРОВСКИЙ Я. (J. Komorowski) On Thom's idea concerning Guggenheim's one-third law in phase transitions. Preprint, University of Warwick, 1977.

КОННОР Дж. Н. Л. (J. N. L. Connor) Multidimensional canonical integrals for the asymptotic evaluation of the S-matrix in semiclassical collision theory, *Faraday Discuss. Chem. Soc.* **55**, 51—58, 1973.

◇ Semiclassical theory of molecular collisions: three nearly coincident classical trajectories. *Molec. Phys.* **26**, 1217—1231. 1973.

✧ Evaluation of multidimensional canonical integrals in semiclassical collision theory. *Molec. Phys.* **26**, 1371—1377, 1973.

✧ Semiclassical theory of molecular collisions: real and complex valued classical trajectories for collinear atom Morse oscillator collisions. *Molec. Phys.* **28**, 1569—1578, 1974.

✧ Catastrophes and molecular collisions. *Molec. Phys.* **31**, 33—55, 1976.

КРОЛЛ Дж. (J. Croll) Is catastrophe theory dangerous? *New Scientist*, **17** June 1976, pp. 630—632.

КУК Дж., ЗИМАН Э. К. (J. Cooke, E. C. Zeeman) A clock and wavefront model for control of the number of repeated structures during animal morphogenesis. *J. Theoretical Biology* **58**, 455—476, 1976.

КУРАНТ Р. (R. Courant) Soap film experiments with minimal surfaces. *Amer. Math. Monthly* **47**, 168—174, 1940.

КЭЛЛАХАН Дж. Дж. (J. J. Callahan) Singularities of plane maps. *Amer. Math. Monthly* **81**, 211—240, 1974.

✧ Singularities of plane maps II. Sketching catastrophes. Preprint, University of Warwick, 1976; *Amer. Math. Monthly in press.*

✧ The geometry of $E_6=x^3+y^4$, *anorexia nervosa*, and the method of tableaus for visualizing five dimensional objects. To appear in Francis, G. K. (ed.), *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April, 1977.

КЭЛЛЬМАН К. Г. (C. G. Källman) Lee-Wick states as an example in Thom's catastrophe theory. *Phys. Lett. A* **56**, 70, 1976.

КЭСТИ Дж., СУЭЙН Х. (J. Casti, H. Swain) Catastrophe theory and urban processes. Research Memorandum RM-75-14 Laxenburg, 1975.

ЛАКС П. Д. (P. D. Lax) Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.* **24**, 627—646, 1957.

ЛАССАЛЬ М. Г. (M. G. Lassalle) Une demonstration du théorème de division pour les fonctions différéntiables. *Topology* **12**, 41—62, 1973.

✧ Déploiement universel d'une application de codimension finie. *Ann. Scient. École Norm. Super.* **7**, 219—234, 1974.

ЛАТУР Ф. (F. Latour) Stabilité des champs d'applications différentiables; généralisation d'un théorème de Mather. C. R. *Acad. Sci. Paris* **268**, 1331, 1969.

ЛЕВАЙН Х. И. (H. I. Levine) Singularities of differentiable mappings. Notes of lectures by R. Thom, Bonn, 1959; also in *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 1—89. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: 1968, с. 9—101.]

ЛОЭЙЕНГА Э. (E. Looijenga) Structural stability of families of C^∞-functions and the canonical stratification of $C^\infty(N)$. Preprint, IHES, 1974.

✧ On the semi-universal deformations of Arnol'd's unimodular singularities. Preprint, University of Liverpool, 1975.

✧ On the semi-universal deformation of a simple-elliptic singularity Part I. Unimodularity. Topology **16**, 257—262, 1977.

✧ On the semi-universal deformation of a simple-elliptic singularity Part II. Geometry of the discriminant locus. Preprint, University of Nijmegen, 1976.

ЛУДВИГ Д. (D. Ludwig) Uniform asymptotic expansion at a caustic. *Commun. Pure Appl. Math.* **19**, 215—250, 1966.

ЛЭКЕР Р. К., МАК-АРТУР Р., БУЗИНА Г. (R. C. Lacher, R. McArthur, G. Buzyna) Catastrophic changes in circulation flow patterns. Preprint. Florida State University, 1977.

ЛЮ Ю.-Ч. (Y.-C. Lu) Sufficiency of jets in $J^r(2,1)$ via decomposition, *Invent. Math.* **10**, 119—127, 1970.

✧ *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, Springer, Berlin and New York, 1976.

ЛЮ Ю.-Ч., ЧЖАН Ш. Х. (Y.-C. Lu, S. H. Chang) On C^0-sufficiency of complex jets. *Can J. Math.* **25**, 874—880, 1973.

ЛЯШКО О. В. Пространства разложения особенностей функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**:2, 49—56.

МАЛЬГРАНЖ Б. (B. Malgrange) The preparation theorem for differentiable functions. In *Differential Analysis, Bombay Colloquium.* Oxford University Press, Oxford and New York, 1964, pp. 203—208.

✧ *Ideals of Differentiable Functions.* Oxford University Press, Oxford and New York, 1966.
[Имеется перевод: Идеалы дифференцируемых функций.— М.: Мир, 1968.]

МАРСДЕН Дж. Э. (J. E. Marsden) *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics.* Lecture Notes 2. Publish or Perish, Boston, 1974.

МАРСДЕН Дж. Э., МАК-КРЭКЕН М. (J. E.

Marsden, M. McCracken) *The Hopf Bifurcation and its Applications.* Applied Mathematics Series 19. Springer, Berlin and New York, 1976.

МАРКУС Л. (L. Markus) *Lectures in Differentiable Dynamics.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 3. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1971.

◇ Dynamical systems — five years after. In *Dynamical Systems — Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 354—365.

МАРТИНЭ Ж. (J. Martinet) *Singularités des Fonctions et Applications Différentiables.* Lecture Notes. PUC, Rio de Janeiro, 1974.

◇ Deformations verselles des fonctions numériques. Catastrophes élémentaires de R. Thom. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 6—19.

◇ Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables. In Burlet, O. and Ronga, F. (eds.). *Singularités d'Applications Différentiables, Plans-sur-Bex 1975*, Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 1—44.

◇ Déploiements stables des germes de type fini, et détermination finie des applications différentiables. Preprint, Math. Dept. Univ. Strasbourg, 1976.

МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings I, The division theorem. *Ann. Math.* **87**, 89—104, 1968. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 198—215.]

◇ Stability of C^∞-mappings II. Infinitesimal stability implies stability. *Ann. Math.* **89**, 254—291. 1969. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 216—267.]

◇ Stability of C^∞-mappings III. Finitely determined map germs. *Publ. Math. IHES* **35**, 127—156, 1968. [Имеется перевод: Математика, 1970, **14**:1, 145—175.]

◇ Stability of C^∞-mappings IV. Classification of stable germs by R-algebras. *Publ. Math. IHES* **37**, 223—248, 1969. [Имеется перевод: *УМН*, 1973, **28** : 6,169—190.]

◇ Stability of C^∞-mappings V. Transversality. *Adv. Math.* **4**, 301—336, 1970. [Имеется перевод: *УМН*, 1974, **29** : 1,99—[28.]

◇ Stability of C^∞-mappings VI. The nice dimensions. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.).

◇ Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 207—253. [Имеется перевод: *УМН*, 1974, **29** : 1,129—158].

◇ Right equivalence. Preprint, University of Warwick, 1969.

◇ Notes on topological stability. Preprint, Harvard University, 1970.

◇ On Nirenberg's proof of Malgrange's preparation theorem. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 116—120.

◇ Stratifications and mappings. In *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil, 1971* (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, London and New York, 1973, pp. 195—232. [Имеется перевод: *УМН*, 1972, **27** : 5,85—118.]

◇ How to stratify mappings and jet spaces. In Burlet, O. and Ronga, F. (eds.). *Singularités d'Applications Différentiables, Plans-sur-Bex* 1975, Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 128—176.

МИЗ А. И. (A. I. Mees) The revival of cities in medieval Europe: an application of catastrophe theory. *Regional Sci. Urban Econ.* **5**, 403—425, 1975.

МИЛНОР Дж. (J. Milnor) *Morse Theory.* Annals of Mathematical Studies 51, Princeton University, 1963. [Имеется перевод: Теория Морса.— М., Мир, 1965.]

МИТЧИСОН Дж. (G. Mitchison) Topological models in biology: an art or a science? MRC Molecular Biology Unit, Cambridges 1973.

МИХОР П. (P. Michor) Classification of elementary catastrophes of codimension $\leqslant 6$. Universität Linz Institutsbericht 51, 1976.

◇ The preparation theorem on Banach spaces. To appear in Chillingworth D. R. J. (ed.). *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.*

МОНСОН С. Р. (S. R. Monson) An APL implementation of Kushnirenko's Theorem to find the Milnor number of a polynomial. Preprint, Math. Dept. Brigham Young University, 1977.

МОРС М. (M. Morse) The critical points of a function of n variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **33**, 72—91, 1931.

МОРЭН Б. (B. Morin) Calcul Jacobien, *Ann. Sci. École Norm. Super.* **8**, 1—98, 1975.

МЭГНУС Р. Дж. (R. J. Magnus) On universal unfoldings of certain real functions on a Banach space. *Mathematics Report* 100, Battelle, Geneva, 1976. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **81**, 91—95, 1977.

✧ Determinacy in a class of germs on a reflexive Banach space. *Mathematics Report* 103. Battelle, Geneva, 1976. To appear in *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*

✧ On the orbits of a Lie group action. *Mathematics Report* 105, Battelle, Geneva, 1976.

✧ Universal unfoldings in Banach spaces: reduction and stability. *Mathematics Report* 107, Battelle, Geneva, 1977. To appear in Chillingworth, D. R. J. (ed.). *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.*

МЭГНУС Р. Дж., ПОСТОН Т. (R. J. Magnus, T. Poston) On the full unfolding of the von Kármán equation at a double eigenvalue. *Mathematics Report* 109, Battelle, Geneva, 1977. To appear in Chillingworth, D. R. J. (ed.). *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.*

✧ A strictly infinite-dimensional 'fold catastrophe'. *Mathematics Report* 110, Battelle, Geneva, 1977.

МЭКС Н. (N. Max) New films of the butterfly catastrophe, and critical points of functions from the plane. To appear in Francis, G. K. (ed.). *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April 1977.

МЭННИНГ Э. (A. Manning) (peg.)) *Dynamical Systems-Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468. Springer, Berlin and New York, 1975.

НИКОЛИС Г., АУКМУТИ Дж. Ф. Г. (G. Nicolis, J. F. G. Auchmuty) Dissipative structures, catastrophes, and pattern formation: a bifurcation analysis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **71**, 2748—2751, 1974.

НИРЕНБЕРГ Л. (L. Nirenberg) A proof of the Malgrange preparation theorem. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.) Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 97—105.

НОГУТИ Х., ЗИМАН Э. К. (H. Noguchi, E. C. Zeeman) *Applied Catastrophe Theory.* Bluebacks, Kodansha, Tokyo, 1974. (In Japanese).

ОЛЕНИК Р., ЭРБЕР Т. (R. Olenick, T. Erber) A λ transition of two magnetic dopoles. *Amer. J. Phys.* **42**, 338—339, 1974.

ПАЛАМОДОВ В. П. О кратности голоморфного отображения. *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, **1**, 54—65.

ПАНАТИ К. (C. Panati) Catastrophe theory. *Newsweek*, 19th January 1976, pp. 46—47.

ПАТТИ Х. Х. (H. H. Pattee) Discrete and continuous processes in computers and brains. *Physics and Mathematics of the Nervous System*, Lecture Notes in Biomathematics 4, Springer, Berlin 1974, pp. 128—149.

ПЕЙКСОТО М. М. (M. M. Peixoto) (ред.)) *Dynamical systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil*, 1971. Academic Press, New York and London, 1973.

ПИРСИ Т. (T. Pearcey) The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic. *Philos. Mag.* **37**, 311—317, 1946.

ПИТТ Д. Х., ПОСТОН Т. (D. H. Pitt, T. Poston) Generic buoyancy and metacentric loci. To appear.

✧ Determinacy and unfoldings in the presence of a boundary. To appear.

ПОРТЬЮС И. Р. (I. R. Porteous) Geometric differentiation—a Thomist view of differential geometry. In *Proceedings of the Liverpool Singularitis Symposium II.* Lecture Notes in Mathematics 209 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 121—127.

✧ The normal singularities of a submanifold. *J. Diff. Geom.* **5**, 543—564, 1971.

✧ Nobel prizes for catastrophes. *Manifold* **15**, 34—36, 1974.

ПОСТОН Т. (T. Poston) Do-it-yourself catastrophe machine. *Manifold* **14**, 40, 1973.

✧ Various catastrophe machines. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 111—126.

✧ The computational rules of catastrophe theory. In *Overlaphing Tendencies in Operations Researchs, Systems Theory*, and *Cybernertics* (E. Billeter, M. Cuenod and S. Klaczko, eds.). Birkhäuser, 1976, pp. 461—469.

✧ The elements of catastrophe theory *or* the honing of Occam's razor. To appear in Cooke, K. L. and Renfrew, A. C. (eds.). *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*, Academic Press, 1978.

ПОСТОН Т., ВУДКОК Э. Э. Р. (T. Poston, A. E. R. Woodcock) On Zeeman's catastrophe machine. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74**, 217—226, 1973.

ПОСТОН Т., СТЮАРТ И. Н. (T. Poston, I. N. Stewart) *Taylor Expansions and Catastrophes.* Research Notes in Mathematics 7. Pitman Publishing, London, 1976.

◇ *The geometry of binary quartic forms* II. Foliation by cross-ratio. Preprint, University of Warwick, 1977.

ПОСТОН Т., СТЮАРТ И. Н., ВУДКОК Э. Э. Р. (T. Poston, I. N. Stewart, A. E. R. Woodcock) *The geometry of the higher catastrophes.* In preparation.

ПОСТОН Т., УИЛСОН Э. Дж. (T. Poston, A. G. Wilson) Facility size vs. distance travelled: urban services and the fold catastrophe. *Environ. Planning A* **9**, 681—686, 1977.

ПОЭНАРУ В. (V. Poénaru) *Analyse Différentielle.* Lecture Notes in Mathematics 371. Springer, Berlin and New York, 1974. The Maslov index for Lagrangian manifolds. In *Dynamical Systems—Warwick 1974*, Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 70—71.

◇ Zakalyukin's proof of the (uni)versal unfolding theorem. In *Dynamical Systems—Warwisk 1974*. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 85—86.

◇ Théorie des invariantes C^∞: stabilité structurelle équivariante I and II. Preprint, Orsay, 1975.

◇ *Singularités C^∞ en Présence de Symétrie.* Lecture Notes in Mathematics 510. Springer, Berlin and New York, 1976.

ПУТ М., ван дер (M. van der Put) Some properties of the ring of germs of C^∞ functions. *Compositio Math.* 34, 1977.

РЕНФРИ Э. К., ПОСТОН Т. (A. C. Renfrew, T. Poston) Discontinuities in the endogenous chançe of settlement pattern. To appear in Cooke, K. I. and Renfrew, A. C. (eds.). *Transformations. Mathematical Approaches to Culture Change*, Academic Press, 1978.

РЁССЛЕР О. Э. (O. E. Rössler) Adequate locomotion strategies for an abstract organism in an abstract environment—relational approach to brain function. *Physics and Mathematics of the Nervous Systems*, Lecture Notes in Biomathematics 4, Springer, Berlin and New York, 1974, pp. 342—369.

◇ A synthetic approach to enzyme kinetics. *Physics and Mathematics of the Nervous Systems*, Lecture Notes in Biomathematics 4, Springers Berlin and New York, pp. 546—582.

РОЗЕСТРАТЕН Р. Дж. А., БАТТРО А. М., ДОС САНТОС АНДРАДЕ А. (R. J. A. Rozestraten, A. M. Battro, A. Dos Santos Andrade) A visual catastrophe: the reversal of the Oppel—Kundt illusion in the open field. *Abstract guide of the XXIst International Congress of Psychology*, Paris, July 1976, p. 316.

РОКВУД Э. (A. Rockwood) The canonical strip. Preprint, Math. Dept. Brigham Young Univ. Provo, Utah, 1976.

РОКВУД Э., БЁРТОН Р. (A. Rockwood, R. Burton) An inexpensive technique for displaying algebraically defined surfaces. To appear in Francis, G. K., ed.). *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer, Math. Soc. Evanston, Illinois, April 1977.

РОНГА Ф. (F. Ronga) Stabilité locate des applications équivariantes. Preprint, Mathematics Department, University of Geneva, 1976.

РОНГА Ф., СЕРВО Д. (F. Ronga, D. Cerveau) Applications topologiquement stables, Séminaire de Topologie. Dijon 1975.

РЭНД Д. Э. (D. A. Rand) Arnold's classification of simple singularities of smooth functions. Duplicated notes. Math. Inst. Univ. Warwick, April 1977.

РЮЭЛЬ Д., ТАКЕНС Ф. (D. Ruelle, F. Takens) On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167—192, 1971. [Готовится перевод в изд-ве „Мир".]

СЕРЖЕРЭРТ Ф. (F. Sergeraert) La stratification naturelle de $C^\infty(M)$. Thesis, Orsay, 1971.

СЕТТЕРСТРОМ Р. Д. (R. D. Setterstrom) The double Zeeman catastrophe machine. Preprint, Math. Dept. Brigham Young Univ. Provo, Utah, 1976.

СИРСМА Д. (D. Siersma) Singularities of C^∞ functions of right-codimension smaller or equal than eight. *Indag. Math.* **25**, 31—37, 1973.

◇ Classification and deformation of singularities. Thesis, Amsterdam, 1974.

СМЕЙЛ С. (S. Smale) On gradient dynamical systems. *Ann. Math.* **74**, 199—206, 1961.

◇ Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747—817, 1967.

◇ Global analysis and economics I. Pareto optimum and a generalissation of Morse theory. In *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil, 1971* (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, New York and London, 1973, pp. 531—544.

◇ Global analysis and economics II. Extention of a theorem of Debreu. *J. Math. Econ.* **1**, 1—14, 1974.
◇ Pareto optima and price equilibria. To appear.
СМИТ Т. Р. (T. R. Smith) Continuous and discontinuous response to smoothly decreasing effective distance: an analysis with special reference to 'overbanking' in the 1920's. To appear in *Environ. Planning* A 9.
СТАРОБИН Л. (I. Starobin) Our changing evolution: strategies for 1980. *General Systems* **21**, 2—46, 1976.
СТЕФАН П. (P. Stefan) A remark on right k-det erminacy. Preprint, Bangor University, 1974.
СТЭНЛИ Х. Э. (H. E. Stanley) *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena.* Oxford Universicy Press, London and New York, 1971.
СТЮАРТ И. Н. (I. N. Stewart) *Concepts of Modern Mathematics.* Penguin, Harmondsworth, Middlesex, 1974.
◇ The seven elementary catastrophes. *New Scientist* **68**, 447—454, 1975.
◇ The geometry of binary quartic forms, part I. Preprint, University of Warwick, 1976.
◇ Catastrophe theory. *Math. Chronicle* **5**, 140—165, 1977.
◇ Catastrophe Theory. In *Encyclopaedia Britannica*, Special Supplement to the Yearbook 1977. To appear.
СЬЮЭЛЛ М. Дж. (M. J. Sewell) On the connexion between stability and the shape of the equilibrium surface. *J. Mech. Phys. Solids* **14**, 208—230, 1966.
◇ Kitchen catastrophe. *Math. Gazette* **59**, 246—249, 1975.
◇ Some mechanical examples of catastrophe theory. *Bull. Inst. Math. Applic.* **12**, 163—172, 1976.
◇ Elementary catastrophe theory. In *Proceedings of the International Conference on Problem Analysis in Science and Engineering, Waterloo University 1975*, to appear.
◇ Review of Thom, R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Math. Gazette in* press.
◇ On Legendre transformations and elementary catastrophes. *Technical Summary Report*, 1707, Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, 1976.
◇ Elastic and plastic bifurcation theory. Preprint, University of Reading, 1976.
◇ Some global equilibrium surfaces, *Technical Summary Report*, 1714, Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, 1977.
◇ A survey of plastic buckling. In *Study No.* 6 (*Stability*), Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1972, Chap. 5.
◇ Degenerate duality, catastrophes and saddle functionals. Preprint, Univ. of Redding, 1977.
ТАКЕНС Ф. (F. Takens) A note on sufficiency of jets. *Invent. Math.* **13**, 225—231, 1971.
◇ Singularities of functions and vector fields. *Nieuw. Arch. Wisk.* **20**, 107—130, 1972.
◇ *Introduction to global analysis.* Mathematics Institute, Utrecht University, 1973.
◇ Constrained differential equations. In *Dynamical Systems—Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Mannings, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 80—82.
◇ Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and the Application in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 143—234.
◇ Implicit differential equations: some open problems. In *Singularités d'Applications Differentiables, Plans-sur-Bex*, 1975. (Burlet O. and Ronga F, eds.). Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 237—253.
ТЕЙССЬЕ Б. (B. Teissier) Sur la version catastrophique de la règle des phases de Gibbs et l'invariant δ des singularités d'hypersurfaces. In *Rencontre de Cargése sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 105—103.
ТОЛЛ Д. О. (D. O. Tall) A long term learning schema for calculus and analysis. *Math. Educ. Teachers* **2**, No. 2, 1975.
◇ Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics, *Math. Educ. Teachers* **3**, No. 2, 1976.
ТОМ Р. (R. Thom) Une lemme sur les applications différentiables. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **1**, 59—71, 1956.
◇ Les singularités des applications différentiables. *Ann. Inst. Fourier* **6**, 43—87, 1956.
◇ La stabilité topologique des applications polynomiales. *L'Enseignement Math.* **8**, 24—33, 1962. [Работа частично переведена в сб.: Особенности дифференцируе-

мых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 179—182.]

◇ Sur la théorie des enveloppes. *J. Math. Pures Appl.* **41**, 177—192, 1962.

◇ Local properties of differentiable mappings. In *Differential Analysis, Bombay Colloquim.* Oxford University Press, Oxford and New York, 1964. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М., Мир, 1968, с. 164—178.]

◇ L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome. *Topology* **3**, 297—307, 1965.

◇ On some ideals of differentiable functions. *J. Math. Soc. Japan* **19**, 255—259, 1967.

◇ Topologie et signification. *J'Age Sci.* **4**, 219—242, 1968.

◇ Comments on C. H. Waddington: the basic ideas of biology. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh Universicy Press, Edinburgh, Vol. 1, 1968, pp. 32—41.

◇ Une théorie dynamique de la morphogénèse. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh University Press, Edinburgh, Vol. 1, 1968, pp. 152—179.

◇ A mathematical approach to morphogenesis: archetypal morphologies. In *Heterospecific Genome Interaction.* Wistar Institute Symposium Monograph 9. Wistar Institute Press, Tel. Aviv, 1969.

◇ Topological models in biology. *Topology* **8**, 313—335, 1969; also in *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh University Press, Edinburgh, Vol. 3, 1970, pp. 89—116.

◇ Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc.* **75**, 240—284, 1969.

◇ Sur les varietés d'ordre fini. In *Global Analysis (Papers in Honour of K. Kodaira).* Tokyo, 1969, pp. 397—401.

◇ The bifurcation subset of a space of maps. In *Manifolds, Amsterdam* 1970 (N. H. Kuiper, ed.). Lecture Notes in Mathematics 197. Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 202—208.

◇ Topologie et linguistique. In *Essays on Topology and Related Topics (Dedicated to G. de Rham)* (A. Haefliger and R. Narasimhan, eds.). Springer, Berlin and New York, 1970, pp. 226—248.

◇ Les symmetries brisées en physique macroscopique et la mécanique quantique. CNRS, RCP-25 10, 1970.

◇ Singularities of differentiable mappings. *См.* Levine, H. I.

◇ Stratified sets and morphisms: local models. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall. ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 153—164.

◇ Sur le cut-locus d'un varieté plongée. *J. Diff. Geom.* **6**, 577—586, 1972.

◇ Structuralism and biology. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edingburgh University Press, Edinburgh, Vol. 4, 1972, pp. 68—82.

◇ *Stabilité Structurelle et Morphogénèse.* Benjamin, New York, 1972. Translated as *Structural Stability and Morphogenesis* (см. ниже). [Готовится русский перевод.]

◇ A global dynamical scheme for vertebrate embryology. AAAS 1971, Some mathematical questions in biology **4**. In *Lectures on Mathematics in the Life Sciences 5.* American Mathematical Society, Providence R. I. 1973, pp. 3—45.

◇ Phase transitions as catastrophes. Conference on Statistical Mechanics, Chicago, 1971.

◇ On singularities of foliations. International Conference on Manifolds, Tokyo University, 1973.

◇ Language et catastrophes: élément pour une sémantique topologique. In *Dynamical Systems. Proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil,* 1971. (M. M. Peixoto, ed.). Academic Press, London and New York, 1973, pp. 619—654.

◇ De l'icône au symbole: esquisse d'une theorie du symbolisme. *Cahiers Internat. Symbolisme* **22—23**, 85—106, 1973.

◇ Sur la typologie des langues naturelle: essai d'interpretation psychologuistique. In *Formal Analysis of Natural Languages* Éditions Moutin, Paris, 1973.

◇ *Modèles mathèmatiques de la morphogénèse.* Editions 10—18, UGE, Paris, 1974.

◇ La théorie des catastrophes: état present et perspectives. *Manifold* **14**, 16—23, 1973, also in *Dynamical Systems—Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 366—372.

◇ La linguistique, discipline morphologique exemplaire. *Critique* No. 322, 235—245, 1974.

◇ *Structural Stability and Morphogenesis* (translated D. N. Fowler). Benjamon—Addison Wesley, New York, 1975. Translation of Thom, R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse* with additional material.

◇ Gradients in biology and mathematics and their competition. AAAS 1974, Some mathematical questions in biology VII. In *Lectures on Mathematics in the Life Sciences* 6, American Mathematical, Providence, R. I., 1975.

◇ D'un modèle de la science á une science des modèles. To appear.

◇ Answer to Christopher Zeeman's reply. In *Dynamical Systems—Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 384—389.

◇ Introduction à la dynamique qualitative. *Astérisque* **31**, 3—13, 1976.

◇ Catastrophes et équations quasi—linéaires. In *Rencontre de Carrgèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse. Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 89—90.

◇ The two-fold way of catastrophe theory. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences.* Lectute Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 235—252.

◇ Structural stability, catastrophe theory, and applied mathematics. *SIAM Review* **19**, 189—201, 1977.

ТОМ Р., ЗИМАН Э. К. (R. Thom, E. C. Zeeman) Catastrophe theory: its present state and future perspectives. In *Dynamical Systems—Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and London, 1975, pp. 366—389.

ТОМ Р., СЕБАСТЬАНИ М. (R. Thom, M. Sebastiani) Un résultat sur la monodromie. *Invent. Math.* **13**, 90—96, 1971.

ТОМПСОН Дж. М. Т. (J. M. T. Thompson) Instabilities, bifurcations, and catastrophes. *Phys. Lett. A* **51**, 201—203, 1975.

◇ Catastrophe theory in elasticity and cosmology. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularitès et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice. 1975, pp. 100—104.

◇ Designing against catastrophe. 3rd International Congress on Cybernetics and Systems Bucharest, 1975.

◇ Experiments in catastrophe. *Nature, Lond.* **254**, 392—395, 1975.

◇ Catastrophe theory and its role in applied mechanics. In *14th International Congress on Theoretical Applications of Mathematics. Delft. 1976.* North Holland, Amsterdam. To appear.

ТОМПСОН Дж. М. Т., ГАСПАР З. (J. M. T. Thompson, Z. Gaspar) A buckling model for the set of umbilic catastrophes, Preprint, Engineering Department, University College London, 1977.

ТОМПСОН Дж. М. Т., ТАЛК Дж. Д., УОЛКЕР Э. К. (J.M.T. Thompson, J. D. Tulk, A. C. Walker) An experimental study of imperfoctionsensitivity in the interactive buckling of stiffened plates. In *Buckling of Structures, IUTAM Symposium, Cambridge Mass., 1974* (B. Budiansky, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 149—159.

ТОМПСОН Дж. М. Т., ХАНТ Дж. У. (J. M. T. Thompson, G. W. Hunt) *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley, London and New York, 1973.

◇ Dangers of structural optimization. Engng Optimization, **1**, 99, 1974.

◇ Towards a unified bifurcation theory. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **26**, 581—604, 1975.

◇ A bifurcation theory for the instabilities of optimization and design. In *Mathematical Methods in the Social Sciences* (D. Berlinski, ed.). *Synthèse*, to appear.

ТОМПСОН Дж. М. Т., ШОРРОК П. Э. (J. M. T. Thompson, P. A. Shorrock) Bifurcational instability of an atomic lattice. *J. Mech. Phys. Solids* **23**, 21—37, 1975.

◇ Hyperbolic umbilic catastrophe in crystal fracture. *Nature, Lond* **260**, 598—599, 1976.

ТОМПСОН М. (M. Thompson) Class, caste, the curriculum cycle and the cusp catastrophe. In *Rubbish Theory*. Paladin, London, to appear.

◇ The geometry of confidence: an analysis of the Enga *te* and Hagen *moka;* a complex system of ceremonial pig-giving in the New Guinea highlands. Preprint, Portsmouth Polytechnic, 1973; also in *Rubbish Theory*. Paladin, London, to appear.

ТРИНКАУС Х., ПРЕППЕР Ф. (H. Trinkaus, F. Prepper) On the analysis of diffraction catastrophes, *J. Phys. A Math. Gen.* **10**, 1977.

ТРОТМЭН Д. Дж. Э., ЗИМАН Э. К. (D. J. A. Trotman, E. C. Zeeman) Classification of elementary catastrophes of codimension $\leqslant 5$. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*. Lecture Notes in Mathematics 525

(P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 263—327.

ТУЖРОН Ж.-К. (J.-C. Tougeron) *Idéaux de Fonctions Différentiables.* Springer, Berlin and New York, 1972.

УИЛСОН Ф. У. (F. W. Wilson) Smoothing derivatives of functions with applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* **139**, 413—428, 1969.

УИЛСОН Э. Дж. (A. G. Wilson) Catastrophe theory and urban modeling: an application to modal choice. *Environ. Planning A* **8**, 351—356, 1976.

◇ Nonlinear and dynamic models in geography: towards a research agenda. Working Paper 160, School of Geography, University of Leeds, 1976.

◇ Towards models of the evolution and genesis of urban structure. Working Paper 166, School of Geography, University of Leeds, 1976.

◇ Equilibrium and transport system dynamics. Working Paper 171, School of Geography, University of Leeds, 1976.

УИТНИ Х. (H. Whitney) The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables. *Duke Math. J.* **45**, 220—283, 1944.

◇ The singularities of smooth n-manifolds into $(2n-1)$-space *Ann. Math.* **62**, 247—293, 1955.

◇ Mappings of the plane into the plane. *Ann. Math.* **62**, 374—470, 1955.

◇ Elementary structure of real algebraic varieties. *Ann. Math.* **66**, 545—556, 1957.

УОДДИНГТОН К. Х. (C. H. Waddington) (ред.) *Towards a Theoretical Biology*, **4** vols. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968—1972.

◇ A catastrophe theory of evolution. *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **231**, 32—42, 1974.

УОЛГЕЙТ Р. (R. Walgate) René Thom clears up catastrophes. *New Scientist* **68**, 578, 1975.

УОЛКЕР У. (W. Walker) The analysis of sudden reversals of predator—prey data. Preprint, Auckland University, 1976.

УОЛЛ Ч. Т. К. (C. T. C. Wall) (ред.) *Proceeding of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192, Springer, Berlin and New York, 1971.

◇ (ред.) *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium II.* Lecture Notes in Mathematics 209. Springer, Berlin and New York, 1971.

◇ Introduction to the preparation theorem. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 90—96.

◇ Stratified sets: a survey. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 133—140.

◇ Lectures on C^∞-stability and classification. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall. ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 178—206.

◇ Regular stratifications. In *Dynamical Systems—Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.), Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 332—344.

УРСЕЛЛ Ф. (F. Ursell) Integrals with a large parameter: several nearly coincident saddle-points. *Proc. Cambridge Philos Soc.* **72**. 49—65, 1972.

ФАМ Ф. (F. Pham) *Introduction à l'Étude Topologique des Singularités de Landau.* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[Имеется перевод: Введение в топологическое изучение особенностей Ландау.— М.: Мир, 1970.]

◇ Remarque sur l'équisingularité universelle. Preprint, University of Nice, 1970.

◇ Classification des singularités. CNRS preprint Vol. 13, Strasbourg, 1971.

◇ *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications.* Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Matn. Dept. Univ. of Nice, Sept. 1975.

◇ Caustics and microfunctions. RCP-25, **23**, 91—104, 1976. IRMA, CNRS Strasbourg.

ФАНКХАУЗЕР Х. Р. (H. R. Fankhauser) Katastrophentheorie—Ergänzungen. *Acta Phys. Austriaca* **40**, 377—380, 1974.

◇ Phasenübergänge also Katastrophen—Ein Beispiel. *Helv. Phys. Acta* **47**, 486—490, 1974.

ФАУЛЕР Д. Х. (D. H. Fowler) The Riemann—Hugoniot catastrophe and van der Walls' equation. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh University Press, Edinburgh, Vol. 4, 1972, pp. 1—7.

◇ *См.* Том Р. [1].

ФЕРГУСОН Дж. Э. (J. A. Ferguson) Investment decisions and sudden changes in transport. *Surveyor* **9**, 10—11, 1976.

ФЕРГУСОН Х. Р. П. (H. R. P. Ferguson) Preliminary to catastrophe theory in the behavioural sciences: how to make cusp proverbs. *Proceedings, Symposium on the Behavioural*

Sciences, Brigham Young University 1976 (A. Bergin, ed.), BYU Press, Salt Lake City, to appear.

ФЁРСТЕР В. (W. Förster) Katastrophentheorie. *Acta Phys. Austriaca* **39**, 201—211, 1974.

ФИЛД М. (M. Field) Transversality in G-manifolds. Preprint, Univ. of Warwick, 1976.

ФОЖЕЛЬ Ж.-Ф., ГЮ Ж.-Л., ТОМ Р. (J.-F. Fogel, J.-L. Hue, R. Thom) La planète de l'oncle Thom, *Le Sauvage*, January 1977, pp. 74—80.

ФРЭНСИС Дж. К. (G. K. Francis) (ред.) *Graphic Techniques in Geometry and Topology.* Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April 1977.

◇ From Riemann surfaces to catastrophe machines. To appear in Francis, G. K. (ed.). *Graphic Techniques in Geometry and Topology.* Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April 1977.

ФУКУТОМЭ Х. (H. Fukutome) Theory of the unrestricted Hartree-Fock equation and its solutions IV. *Progr. Theor. Phys.* **53**, 1320—1336, 1975.

ФУРУТАНИ Н. (N. Furutani) A new approach to traffic behaviour. Preprint, University of Tokyo, 1974.

ХАКЕН Г. (H. Haken) (ред.) Synergetics. Teubner, Stuttgart, 1973. [Имеется перевод: Синергетика.—М.: Мир, 1980.]

ХАН Х. (H. Hahn) Geometrical aspects of the pseudo steady state hypothesis in enzyme reactions. *Physics and Mathematics of the Nervous System*, Lecture Notes in Biomathematics 4 Springer, Berlin and New York, 1974, pp. 528—545.

ХИЛТОН П. Дж. (P. J. Hilton) (ред.) *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525. Springer, Berlin and New York, 1976.

◇ Structural stability, catastrophe theory, and their applications to the sciences and engineering. *Research Futures 1.* Battelle Memorial Institute, Ohio, 1976.

◇ Unfolding of singularities. *Colloquium on functional analysis.* Campenas, Brazil, 1974.

ХИТЛИ Б. (B. Heatley) Local stability properties equivalent to catastrophe theory. Thesis, University of Warwick, 1974.

ХОЛМЗ П. Дж., РЭНД Д. Э. (P. J. Holmes, D. A. Rand) The bifurcations of Duffing's equation: an application of catastrophe theory. *J. Sound, Vib.* **4**, 237—253, 1976.

ХОЛФОРД Р. Л. (R. L. Holford) Modifications to ray theory near cusped caustics. Preprint, Bell Telephone Laboratories, 1972.

ХЬЮЗ А. (A. Hughes) An application of catastrophe theory. *Math. Gazette* **61**, 1—20, 1977.

ХЭРРИСОН П. Дж., ЗИМАН Э. К. (P. J. Harrison, E. C. Zeeman) Applications of catastrophe theory to macroeconomics. Symposium on Applied Global Analysis, Utrecht, 1973.

ЧАУДХУРИ Д. Рай, ДЖОУНЗ Р. Б. (D. Rai Chaudhuri, R. B. Jones) Unstable singularities in the σ model. *J. Phys. A* **9**, 1349—1357, 1976.

ЧЕППЛ Дж. (G. Chapple) Catastrophe theory. *New Zealand Listener* **82**, no. 1915, 16—17, 1976.

ЧЖОУ С.-Н., ХЕЙЛ Дж. К., МАЛЛЕ-ПАРЭ Ж. (S.-N. Chow, J. K. Hale, J. Mallet-Paret) Applications of generic bifurcation I. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **59**, 159—188, 1975.

◇ Applications of generic bifurcation. II. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **62**, 209—236, 1976.

ЧИЛВЕР Х. (H. Chilver) Wider implications of catastrophe theory. *Nature, Lond* **254**, 381, 1975.

ЧИЛЛИНГВОРТ Д. Р. Дж. (D. R. J. Chillingworth) Elementary catastrophe theory. *Bull. Inst. Math. Appl.* **11**, 155—159, 1975.

◇ The catastrophe of a buckling beam. In *Dynamical Systems—Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 86—91.

◇ *Differential Topology with a View to Applications.* Research notes in mathematics 9. Pitman Publishing, London 1976.

◇ (ред.). *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.* To appear.

ЧИЛЛИНГВОРТ Д. Р. Дж., ФУРНЕСС П. (D. R. J. Chillingworth, P. Furness) Reversals of the earth's magnetic field. In *Dynamical Systems—Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 91—98.

ШАЗАРЭН Ж. (J. Chazarain) Solutions asymptotiques et caustiques. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed)). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 43—78.

ШАНСИНЕР А. (A. Chenciner) Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique. *Sem. Bourbaki* no. 424, 1972—73.

◇ Singularités des applications différentiables et catastrophes élémentaires. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp, 1—5.

ШВАРЦ Г. (G. Schwarz) Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, *Topology* **14**, 63—68, 1975.

ШУЛЬМАН Л. С. (L. S. Schulman) Phase transitions as catastrophes. In *Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick 1968—69*. Lecture Notes in Mathematics 206 (D. R. J. Chillingworth, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 98—100.

◇ Tricritical points and type three phase transitions. *Phys. Rev. Ser, B* **7**, 1960—1967, 1973.

◇ Stable generation of simple forms. *J. Theor. Biol.* **57**, 453—468, 1976.

ШУЛЬМАН Л. С., РЕВЗЕН М. (L. S. Schulman, M. Revzen) Phase transitions as catastrophes. *Collect. Phenom.* **1**, 43—47, 1972.

ЭКЛАНД И. (I. Ekeland) Duality in nonconvex optimization and calculus of variations. Technical Summary Report 1675, Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison 1976.

ЭМСОН Дж. К. (J. C. Amson) Equilibrium and catastrophic modes of urban growth. In *London Papers in Regional Science* **4** (E. L. Cripps, ed.). Pion, London, 1973, pp. 108—128.

◇ Catastrophe theory: a contribution to the study of urban systems? *Environ. Planning* B **2**, 177—221, 1975.

ЭРБЕР Т., ЛАТАЛЬ Х. Г. (T. Erber, H. G. Latal) A state-area principle for (magnetic) condensation processes, Bull. Acad. Royale Belgique (Sci.) 9, 1019—1042, 1967.

ЭРБЕР Т., ЛАТАЛЬ Х. Г., ХАРМОН Б. Н. (T. Erber, H. G. Latal, B. N. Harmon) The origin of hysteresis in simple magnetic systems. Adv. Chem. Phys. 20, 71—133, 1971.

ЭРБЕР Т., СКЛАР Э. (T. Erber, A. Sklar) Macroscopic irreversibility as a manifestation of microinstability. In *Modern Developments in Thermodynamics* (B. Gal-Or, ed.). Israel University Press, Jerusalem: Wiley, New York, 1974, pp. 281—301.

ЭШЕР Э., ГЕЙ Д. Э., ПОСТОН Т. (E. Ascher, D. A. Gay, T. Poston) Equivariant bifurcation of thermodynamic potentials in crystalography. To appear.

ЭШЕР Э., ПОСТОН Т. (E. Ascher, T. Poston) Catastrophe theory in scientific research. *Research Futures* **2**, 15—18, 1976. Battelle Memorial Institute, Battelle, Ohio.

ЭШТОН К. (K. Ashton) Catastrophe theory: applications in biology. Duplicated seminar notes, University of Auckland, 1976.

Литература, добавленная при переводе

Алгебраические поверхности.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **75**.— М.: Наука, 1965.

АРНОЛЬД В. И. Замечание о подготовительной теореме Вейерштрасса.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1967, **1** : 3, 1—8.

◇ Критические точки функции и классификация каустик.— *УМН*, 1974, **29** : 3, 243—244.

◇ Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.

◇ Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов.— *УМН*, 1974, **29** : 4, 153—154.

◇ Спектральные последовательности для приведения функций к нормальным формам.— В сб.: Задачи механики и математической физике.— М.: Наука, 1976, с. 7—20.

◇ Спектральная последовательность для приведения функций к нормальным формам.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9** : 3, 81—82.

◇ Некоторые нерешенные задачи теории особенностей.— Труды семинара С. Л. Соболева, 1976, № 1, 5—15.

◇ О теории огибающих.— *УМН*, 1976, **31** : 3, 172—173.

◇ Wave front evolution and the equivariant Morse lemma.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, **29** : 6, 557—582.

◇ Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.

◇ Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k,

C_k, F_k и особенности эволют.— *УМН*, 1978, **33** : 5, 91—105.

◇ Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей.— *УМН*, 1979, **34** : 2, 3—38.

БЕЛИЦКИЙ Г. Р. О стабильной эквивалентности ростков функций.— *УМН*, 1978, **33** : 5, 164.

◇ Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений.— *УМН*, 1978, **33** : 1, 95—155.

БЕРНШТЕЙН Д. Н., КУШНИРЕНКО А. Г., ХОВАНСКИЙ А. Г. Многогранники Ньютона.— *УМН*, 1976, **31** : 3, 201—202.

БРЫЗГАЛОВА Л. Н. Особенности максимума функции, зависящей от параметров.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11** : 1, 59—60.

◇ О функциях максимума семейства функций, зависящих от параметров.— *Функ. анализ и его прилож.*, 1978, **12** : 1, 66—67.

ВАРЧЕНКО А. Н., МОЛЧАНОВ С. А. Применение метода стационарной фазы в предельных теоремах для цепей Маркова.— *ДАН СССР*, 1977, **233** : 1, 11—14.

ВАСИЛЬЕВ В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11** : 3, 1—11.

◇ Об аффинности нормальных форм стратов μ=const гладких функций.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1978, **12** : 3, 72—73.

◇ Асимптотика экспоненциальных интегралов в комплексной области.— *Функц. анализ и его прилож*, 1979, **13**:4, 1—12.

ГАБРИЭЛОВ А. М. О формальных соотношениях между аналитическими функциями.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5** : 4, 64—65.

◇ Матрицы пересечений для некоторых особенностей.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1973, **7** : 3, 18—32.

◇ Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8** : 3, 1—6.

◇ Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8** : 2, 7—12.

ГАБРИЭЛОВ А. М., КУШНИРЕНКО А. Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9** : 4, 67—68.

ГОМОЗОВ Е. Т. Версальные деформации ростков диффеоморфизмов конечного класса гладкости.— *ДАН УССР*, А, 1975, № 8, 679—681.

◇ Конечная определенность ростков диффеоморфизмов относительно сопряженности.— *ДАН УССР*, А, 1976, № 9, 773—775.

ДОЛГАЧЕВ И. В. Факторконические особенности комплексных гиперповерхностей.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8** : 2, 75—76.

◇ Автоморфные формы и квазиоднородные особенности.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1975 **9** : 2, 67—68.

ДОЛГАЧЕВ И. В., НИКУЛИН В. В. Исключительные особенности В. И. Арнольда и КЗ-поверхности.— Всесоюзная топологическая конференция в Минске (тезисы).— Минск: Минский гос. ун-т, 1977.

ДРОНОВ И. Ф., ИПАТОВ Е. Б., ЛУКИН Д. С., ПАЛКИН Е. А. Табулирование дифракционных интегралов.— В сб.: Распространение радиоволн в атмосфере.— Изд-во ИЗМИРАН, 1978, с. 57—63.

ЗАКАЛЮКИН В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10** : 2, 69—70.

◇ Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11** : 3, 76—77.

КУЛИКОВ В. С. О некоторых двумерных особенностях.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9** : 1, 72—73.

КУШНИРЕНКО А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9** : 1, 74—75.

◇ Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor.— *Invent. Math.*, 1976, **32**, 1—31.

◇ О кратности решения системы голоморфных уравнений.— В сб.: Оптимальное управление, сер. «Математические вопросы управления производством», вып. 7.— Изд-во МГУ, 1977, с. 62—65.

ЛУКИН С. Д., ПАЛКИН Е. А. Применение канонического оператора Маслова для численного решения задач дифракции и распространения волн в неоднородных средах.— В сб.: Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн.— Изд-во ИЗМИРАН, 1976, с. 149—167.

◇ Решение задач дифракции и радиоволн в неоднородной среде на основе асимптотики канонического оператора Маслова.— В сб.: Дифракционные эффекты декамет-

ровых радиоволн в иносфере.— М.: Наука, 1977, с. 12—21.

◇ Экспериментальное и численное иследование дифракционных структур волнового поля в областях фокусировки.— В сб.: Распространение декаметровых радиоволн.— Изд-во ИЗМИРАН, 1980, с. 37—46.

ЛЫЧАГИН В. В. О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов.— *Мат. сборник*, 1977, **104** : 2, 248—270.

ЛЯШКО О. В. Геометрия бифуркационных диаграмм.— *УМН*, 1979, **34**:3, 205—206.

САМОЙЛЕНКО А. М. Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1968, **2** : 4, 63—69.

СЕДЫХ В. Д. Особенности выпуклой оболочки кривой в R^3.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11** : 1, 81—82.

ТЮРИНА Г. Н. О топологических свойствах изолированных особенностей комплексных пространств коразмерности один.— *ИАН СССР*, сер. матем., 1968, **32**, 605—620.

◇ Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств.— *ИАН СССР*, сер. матем., 1969, **33**, 1026—1058.

◇ Разрешение особенностей плоских деформаций двойных рациональных точек.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**:1, 77—83.

ХОВАНСКИЙ А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11** : 4, 56—67.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ТОМ Р. (R. Thom) *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*. Benjamin, New York, 1972. [Готовится перевод.]

[1a] ЗУССМАНН Х. ЦАЛЕР Р. С. (H. J. Sussmann, R. S. Zahler) Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: a critique. To appear in *Synthèse*.

[2] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) A catastrophe machine. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburg University Press, Edinburgh, 1968—72. Vol. 4, pp. 276—282.

[3] ПОСТОН Т., ВУДКОК Э. Э. Р. (T. Poston, A. E. R. Woodcock). On Zeeman's catastrophe machine. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74**, 217—226, 1973.

[4] ДЮБУА Ж.-Г., ДЮФУР Ж.-П. (J.-G. Dubois, J.-P. Dufour) La théorie des catastrophes I. La machine à catastrophes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20**, 135—151, 1974.

[5] ДОДСОН К. Т. Дж., ПОСТОН Т. (C. T. J. Dodson, T. Poston) *Tensor Geometry*. Pitman Publishing, London, 1977.

[6] СТЮАРТ И. Н., ТОЛЛ Д. О. (I. N. Stewart, D. O. Tall) *The Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, London and New York, 1977.

[7] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) The umbilic bracelet and the double cusp catastrophe. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*, Lecture Notes in Mathematics 525. (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 328—366.

[8] СПИВАК М. (M. Spivak) *Calculus on Manifolds*. Benjamin, New York, 1965.

[9] БРЁКЕР Т., ЛАНДЕР Л. (Th. Bröcker, L. Lander) *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Notes 17. Cambridge University Press, London, 1975.

[10] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings I. The division theorem. *Ann. Math.* **87**, 89—104, 1968. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 198—215.]

[11] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings II. Infinitesimal stability implies stability. *Ann. Math.* **89**, 254—291, 1969. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 216—267.]

[12] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings III. Finitely determined map germs. *Publ. Math. IHES* **35**, 127—156, 1968. [Имеется перевод: *Математика*, 1970, **14** : 1, 145—175.]

[13] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings IV. Classification of stable germs by R-algebras. *Publ. Math. IHES* **37**, 223—248, 1969. [Имеется перевод: *УМН*, 1973, **28** : 6, 165—190.]

[14] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings V. Transversality. *Adv. Math.* **4**, 301—336, 1970. [Имеется перевод: *УМН*, 1974, **29** : 1, 99—128.]

[15] МЕЗЕР Дж. (J. Mather) Stability of C^∞-mappings VI. The nice dimensions. In *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium*. Lecture Notes in Mathematics 192 (C. T. C. Wall. ed.) Springer, Berlin and New York, 1971, pp. 207—253. [Имеется перевод: *УМН*, 1974, **29** : 1, 129—158.]

[16] МИЛНОР Дж. (J. Milnor) Morse theory. Annals of Mathematics Studies 51. Princeton University, 1963. [Имеется перевод: Теория Морса.— М.: Мир, 1965.]

[17] АБРАХАМ Р., РОББИН Дж. У. (R. Abraham, J. W. Robbin) *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin, New York, 1967.

[18] ГОЛУБИЦКИЙ М., ГИЙЕМИН В. (M. Golubitsky, V. Guillemin) *Stable Mappings and their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14. Springer, Berlin and New York, 1973. [Имеется перевод: Устойчивые отображения и их особенности —М.: Мир, 1977.]

[19] СЭЛМОН Г. (G. Salmon) *Lessons Introduc-*

tory to the Modern Higher Algebra. Hodges, Figgis and Co., Dublin, 1885.

[20] ВУДКОК А. Э. Р., ПОСТОН Т. (A. E. R. Woodcock, T. A. Poston) *Geometrical Study of the Elementary Catastrophes.* Lecture Notes in Mathematics 373. Springer, Berlin and New York, 1974.

[21] ПОСТОН Т. (T. A. Poston) Various catastrophe machines. In *Structural Stability the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 111—126.

[22] ТРОТМЭН Д. Дж. Э., ЗИМАН Э. К. (D. J. A. Trotman, E. C. Zeeman) Classification of elementary catastrophes of codimension $\leqslant 5$. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976.

[23] ТОМПСОН Дж. М. Т., ХАНТ Дж. У. (J. M. T. Thompson, G. W. Hunt) A bifurcation theory for the instabilities of optimization and design. In *Mathematical Methods in the Social Sciences* (D. Berlinski, ed.). *Synthèse*, to appear.

[24] ФИШЕР А. Э., МАРСДЕН Дж. Э. (A. E. Fischer, J. E. Marsden) Three lectures on the dynamics of general relativity. Duplicated notes. University of Paris VI, 1975.

[25] ПОСТОН Т., СТЮАРТ И. Н. (T. Poston, I. N. Stewart) *Taylor Expansions and Catastrophes.* Research Notes in Mathematics 7. Pitman Publisching, London, 1976.

[26] АРНОЛЬД В. И. Нормальные формы для функций вблизи вырожденных критических точек, группа Вейля для A_k, D_k и E_k и лагранжевы особенности.— *Функц. анализ и прилож.*, 1972, **6**, 254—272.

[26a] РЭНД Д. Э. (D. A. Rand) Arnol'd's classification of simple singularities of smooth functions. Duplicated notes, Math. Inst., Univ. Warwick, April 1977.

[27] ГИБСОН К. Дж., ВИРТМЮЛЛЕР К., ДЮ ПЛЕССИ А. А., ЛОЭЙЕНГА Э. (C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis, E. Looijenga) *Topological Stability of Smooth Mappings.* Lecture Notes in Mathematics 552. Springer, Berlin and New York, 1977.

[28] ЛЮ Ю.-Ч. (Y.-C. Lu) *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory.* Springer, Berlin and New York, 1976.

[29] ЛЕВАЙН Х. И. (H. I. Levine) Singularities of differentiable mappings. Notes of lectures by R. Thom. Bonn, 1959. Also in *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium.* Lecture Notes in Mathematics 192. (C. T. C. Wall, ed.). Springer, Berlin and New York, 1971. [Имеется перевод в сб.: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968, с. 9—101.]

[30] ГИБСОН К. Дж. (C. G. Gibson) *Singular points of smooth mappings: a geometric introduction.* In preparation.

[30a] МЭГНУС Р. Дж. (R. J. Magnus) On the orbits of a Lie group action. *Mathematics Report* 105, Battelle, Geneva, 1976.

[31] МАРТИНЭ Ж. (J. Martinet) *Singularités des Fonctions et Applications Différentiables.* Lecture Notes. PUC, Rio de Janeiro, 1974.

[32] СИРСМА Д. (D. Siersma) Singularities of C^∞ functions of right codimension smaller or equal than eight. *Indag. Math.* **25**, 31—37, 1973.

[33] СИРСМА Д. (D. Siersma) Classification and deformation of singularities. Thesis, Amsterdam, 1974.

[34] МАРТИНЭ Ж. (J. Martinet) Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables. In Burlet O. and Ronga F. (eds.), *Singularités d'Applications Différentiables, Plans—sur—Bex* 1975, Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 1—44.

[35] МАРТИНЭ Ж. (J. Martinet) Déploiements stables des germes de type fini, et determination finie des applications différentiables. Preprint, Math. Dept. Univ. Strasbourg, 1976.

[36] ВАССЕРМАН Г. (G. Wassermann) *Stability of Unfoldings.* Lecture Notes in Mathematics 393. Springer, Berlin and New York, 1974.

[37] СТЕФАН П. (P. Stefan) A remark on right k-determinacy. Preprint, Bangor University, 1974.

[38] ПАЛАМОДОВ В. П. Кратность голоморфного отображения.— *Функц. анализ и прилож.*, 1967, **1**:3, 218—226.

[39] ПОСТОН Т., СТЮАРТ И. Н., ВУДКОК А. Е. Р. (T. Poston, I. N. Stewart and A. E. R. Woodcock) *The Geometry of the Higher Catastrophes.* In preparation.

[40] АРНОЛЬД В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы.— *УМН*, 1975, **30**:5, 3—665.

[41] ДЕЙСТЕРМАТ Й. Й. (J. J. Duistermaat) Oscillatory integrals, Lagrange immersions,

and unfolding of singularities. *Commun. Pure Appl. Math.* 27, 207—281, 1974.

[42] ТОМ Р. (R. Thom) *Structural Stability and Morphogenesis.* Benjamin—Addison Wesley, New York, 1975. Translation of ref. 1 with additional material; translated by D. H. Fowler.

[43] КЭЛЛАХАН Дж. Дж. (J. J. Callahan) Singularities of plane maps II. Sketching catastrophes. Preprint, University of Warwick, 1976; *Amer. Math. Monthly*, in press.

[43a] КЭЛЛАХАН Дж. Дж. (J. J. Callahan) The geometry of $E_6=x^3+y^4$ and *anorexia nervosa.* To appear in Francis, G. K. (ed.) *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April, 1977.

[44] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Catastrophe theory. Preprint, University of Warwick, 1975. (Preprint version of: Catastrophe theory. *Scient. Am.* **234**, 65—83, 1976).

[45] ШАНСИНЕР А. (A. Chenciner) Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique. *Sem. Bourbaki*, No. 424, 1972—3.

[46] ГОДВИН Э. Н. (A. N. Godwin) Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic. *Publ. Math. IHES* **40**, 117—138, 1971.

[47] ГОДВИН Э. Н. (A. N. Godwin) Elementary catastrophes. Thesis, University of Warwick, 1971.

[47a] ПОСТОН Т., ВУДКОК Э. Э. Р. (T. Poston, A. E. R. Woodcock) On Zeeman's catastrophe machine. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74**, 217—226, 1973.

[47b] РОКВУД Э., БЁРТОН Р. (A. Rockwood, R. Burton) An inexpensive technique for displaying algebraically defined surfaces. To appear in Francis, G. K. (ed.). *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinnois, April 1977.

[48] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) *Catastrophe Theory: Selected Papers* (1972—1977). Addison—Wesley, Reading, Mass., 1977.

[49] ПИТТ Д. Х., ПОСТОН Т. (D. H. Pitt, T. Poston) Generic buoyancy and metacentric loci. To appear.

[50] РОББ А. М. (A. M. Robb) *Theory of Naval Architecture.* Griffin, London, 1952.

[51] КЭЛИ А. (A. Cayley) On the centro-surface of an ellipsoid. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **12**, 319—365, 1873; Collected works **520**. 316—365.

[51a] БЭНКОФФ Т. Ф., СТРАУСС К. (T. F. Banchoff, C. Strauss) A reinvestigation of the centro-surface of the ellipsoid. To appear in Francis, G. K. (ed.) *Graphic Techniques in Geometry and Topology*, Proc. of Special Session, Amer. Math. Soc. Evanston, Illinois, April, 1977.

[52] ЧИЛИНГВОРТ Д. Р. Дж. (D. R. J. Chilingworth) *Differential Topology with a View to Applications.* Research Notes in Mathematics 9. Pitman Publishing, London, 1976.

[53] БЕРРИ М. В., МЭКЛИ М. Р. (M. V. Berry, M. R. Mackley) The sixroll mill: unfolding an unstable persistently extensional flow. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, in press.

[54] ФЕЙНМАН Р. П., ЛЕЙТОН Р. Б., СЭНДС М. (R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands) *The Feynman Lectures in Physics*, 3 Volumes. Addison Wesley, Reading, Mass., 1963. [Имеется перевод: Фейнмановские лекции по физике, вып. 7.— 2-е изд.— М., Мир, 1977.]

[55] КРОУЛИ Д. Г., ФРЭНК Ф. К., МЭКЛИ М. Р., СТЕФЕНСОН Р. Г. (D. G. Crowley, F. C. Frank, M. R. Mackley, R. G. Stephenson) Localized flow birefringence of polyethylene oxide solutions in a four roll mill. *G. Polymer Sci., Polymer Phys.* **14**. 1111—1119, 1976.

[56] ФРЭНК Ф. К., МЭКЛИ М. Р. (F. C. Frank, M. R. Mackley) Localized flow birefringence of polyethylene oxide solutions in a two roll mill. *J. Polymer Sci., Polymer Phys.* **14**, 1121—1131, 1976.

[57] ТРУСДЕЛЛ К., НОЛЛ В. (C. Truesdel, W. Noll) The nonlinear field theories of mechanics. *In Handbuch der Physik*, 111/3 1—579 (S. Flugge, ed.). Springer, Berlin, 1965.

[58] МЭКЛИ М. Р., КЕЛЛЕР А. (M. R. Mackley, A. Keller) Flow induced polymer chain extension and its relation to fibrous crystallization. *Phill. Trans. Roy. Soc.* **278**, 29, 1975.

[59] АРНОЛЬД В. И. Critical points of smooth functions. Proc. Internat. Congr. Math, Vancouver 1974, pp. 19—39.

[60] КЭЛИ А. (A. Cayley) A memoir upon caustics. *Phil Trans. Roy. Soc.* **147**, 273—312, 1857; Collected works **145**, 336—380.

[61] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) Cusped rainbows and incoherence effects in the rippling-mirror model for particle scattering from surfaces. *J. Phys.* A. **8**, 566—584, 1975.

[62] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) Catastrophes and semiclassical mechanics. *In Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Ap-*

plications (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 133—136.

[63] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) Altenuation and focussing of electromagnetic surface waves rounding gentle bends. *J. Phys.* A 8, 1952—1971, 1975.

[64] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) Waves and Thom's theorem. *Adv. Phys.* **25**, 1—25, 1976.

[65] БЕРРИ М. В., НАЙ Дж. (M. V. Berry, J. F. Nye) Fine structure in caustic junctions. *Nature, Lond.* **267**, 34—36, 1977.

[66] МАСЛОВ В. П. *Теория возмущений и асимптотические методы*, изд. МГУ, 1965.

[67] ШАЗАРЭН Ж. (J. Chazarain) Solutions asymptotiques et caustiques. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 43—78.

[68] ЭЙРИ Г. Б. (G. B. Airy) On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **6**, 379—403, 1838.

[69] АБРАМОВИЦ М., СТИГАН И. Э. (M. Abramowitz, I. A. Stegun) *Handbook of Mathematical Functions.*, Washington, 1964. [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.]

[70] ХОЛФОРД Р. Л. (R. L. Holford) Modifications to ray theory near cusped caustics. Preprint, Bell Telephone Laboratories, 1972.

[71] ЛУДВИГ Д. (D. Ludwig) Uniform asymptotic expansion at a caustic. *Commun. Pure Appl. Math.* **19**, 215—250, 1966.

[72] ПИРСИ Т. (T. Pearcey) The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of the cusp of a caustic. *Philos. Mag.* **37**, 311—317, 1946.

[73] КОННОР Дж. Н. Л. (J. N. L. Connor) Semiclassical theory of molecular collisions: three nearly concident classical trajectories. *Molec. Phys.* **26**, 1217—1231, 1973.

[74] АРНОЛЬД В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Коксетера. *УМН*, 1973, **28**, 17—44.

[75] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) *The Diffraction of Light by Ultrasound.* Academic Press, London and New York, 1966.

[76] БРИАН А. К., ЖАРМИ Н. (H. C. Bryant, N. Jarmie) The glory. *Scient. Am.* **231**, 60—71, 1974.

[77] БЕРРИ М. В., МАУНТ К. Э. (M. V. Berry, K. E. Mount) Semiclassical approximations in wave mechanics. *Rep. Progr. Phys.* **35**, 315—397, 1972.

[77a] КХАРЕ В., НУССЕНЦВЕЙГ Х. М. (V. Khare, H. M. Nussenzveig) Theor. of the Glory. *Phys. Rev. Lett.* 38, 1279—1282, 1977.

[78] ФИЛД М. (M. Field) Transversality in G-manifolds. Preprint. University of Warwick, 1976.

[79] ПОЭНАРУ В. (V. Poènaru) *Analyse Différentielle.* Lecture Notes in Mathematics 371. Springer, Berlin and New York, 1974.

[80] ПОЭНАРУ В. (V. Poènaru) Théorie des invariantes C^∞: stabilité structurelle équivariante I and II. Preprints, Orsay, 1975.

[81] ПОЭНАРУ В. (V. Poènaru) *Singularités C^∞ en Présence de Symétrie.* Lecture Notes in Mathematics 510. Springer, Berlin and New York, 1976.

[81a] ВАССЕРМАН Г. (G. Wassermann) Classification of singularities with compact abelian symmetry. *Regensburger Mathematische Schriften* 1, Department of Mathematics, University of Regensburg 1977.

[82] КОННОР Дж. Н. Л. (J. N. L. Connor) Catastrophes and moleculas collisions. *Molec. Phys.* **31**, 33—55, 1976.

[83] ФРЕЙЗЕР Э. Б., МАХ В. Х. (A. B. Fraser, W. H. Mach) Mirages. *Scient. Am.* **234**, 102—111, 1976.

[84] ТОМ Р. (R. Thom) The two-fold way of catastrophe theory In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 235—252.

[85] ГУКЕНХАЙМЕР Дж. (J. Guckenheimer) Solving a single conservation law. In *Dynamical Systems-Warwick* 1974. Lecture Notes in Mathematics 468. (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 108—134.

[86] ГОЛУБИЦКИЙ М. (M. Golubitsky) Regularity and stability of shock waves for a single conservation law. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham, ed.). Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Dept., Univ. Nice, 1975, pp. 84—88.

[87] ДЕЙВИС С. С. (S. S. Davis) A preliminary inverstigation of sonic boom waveforms near focusing ray systems. In *Third Conference on Sonic Boom Research, NASA SP*—**255**, 1971, pp. 133—146.

[88] ОБЕРМАЙЕР Ф. (F. Obermeier) Das Verhalten eines Überschallknalles in der Umgeburg einer Kaustik. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung (Gottingen), Bericht 28/1976.

[89] СТЁРТЕВАНТ Б., КАЛКАРНИ В. А. (B. Sturtevant, V. A. Kulkarny) The focusing of weak shock waves. *J. Fluid Mech.* **73**, 651—671, 1976.

[90] ВАННЕР Ж.-К. Л., ВАЛЛЕ Ж., ВИВЬЕ К., ТЕРИ К. (J.-C. L. Wanner, J.Vallée, C. Vivier, C. Théry) Theoretical and experimental studies of the focus of sonic Booms. *J. Acoust. Soc. Am.* **52**, 13—32, 1972.

[90a] БЕРРИ М. В. (M. V. Berry) Focusing and twinkling: critical exponents from catastrophes in non-Gaussian random short waves. Preprint, Univ. Bristol, 1977.

[91] АРНОЛЬД В. И. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Commun. Pure. Appl. Math.* **29**, 557—582, 1976.

[92] ЛАМЛИ Дж. Л., ПАНОФСКИ Х. Э. (J. L. Lumley, H. A. Panofsky) *The Structure of Atmospheric Turbulence.* Interscience, New York, 1964.

[92a] БЕРРИ М. В., ХЭННЕЙ Дж. Х. (M. V. Berry, J. H. Hannay) Umbilic points on Gaussian random surfaces. Pseprint, Univ. Bristol, 1977.

[93] МЭЛЛОРИ Дж. К. (J. K. Mallory) Abnormal waves on the South-East coast of S. Africa. *Internat. Hydrographic Rev.* **51**, 99—129, 1974.

[94] СМИТ Р. (R. Smith) Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417—432, 1976.

[95] ЭЙЛЕР Л. (L. Euler) *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes (Appendix, De Curvis Elasticis).* Marcum Michaelum Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744.

[96] СЬЮЭЛЛ М. Дж. (M. J. Sewell) Elastic and plastic bifurcation theory. Preprint, University of Reading, 1976.

[97] СЬЮЭЛЛ М. Дж. (M. J. Sewell) A survey of plastic buckling. In *Study No.* **6** *(Stability).* Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1972. Chapter 5.

[98] БАТТЕРВОРТ Дж. У. (J. W. Butterworth) Frame instability. In *Structural Instability* (W. J. Supple, ed.). IPC Science and Technology Press, Guildford, 1973, pp. 54—63.

[99] Епископ БЕРКЛИ (Bishop Berkeley) The analyst: a discourse addressed to an infidel mathematician, 1734. Excerpted in Newman, J. R., *The World of Mathematics.* Simon and Schuster, New York, 1956. [Имеется перевод: Аналитик или Рассуждение, адресованное неверующему математику.— В кн. Джордж Беркли. Сочинения.— М., Мысль, 1978, с. 395—442.]

[100] ГРОМОЛЛ Д., МАЙЕР В. (D. Gromoll, W. Meyer) On differentiable functions with isolated critical points. *Topology* **8**, 361—370, 1969.

[101] МЭГНУС Р. Дж. (R. J. Magnus) Universal unfoldings in Banach spaces: reduction and stability. *Matchematics Report* 107, Battelle, Geneva, 1977. To appear in Chilling-worth, D. R. J. (ed.). *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.*

[102] МЭГНУС Р. Дж. (R. J. Magnus) On universal unfoldings of certain real functions of a Banach space. *Matchematics Report* 100, Battelle, Geneva, 1976. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **81**, 91—95, 1977.

[103] МЭГНУС Р. Дж. (R. J. Magnus) Determinacy in a class of germs on a reflexive Banach space. *Mathematics Report* 103, Battelle, Geneva, 1976. To appear *in Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*

[104] МЭГНУС Р. Дж., ПОСТОН Т. (R. J. Magnus, T. Poston) A strictly infinite-dimensional 'fold catastrophe'. *Matchematics Report* 110, Battelle, Geneva, 1977.

[105] ТОМПСОН Дж. М. Т., ХАНТ Дж. У. (J. M. T. Thompson, G. W. Hunt) A *General Theory of Elastic Stability.* Wiley, New York and London, 1973.

[106] ДЬЁДОННЕ Ж. (J. Dieudonné) *Treatise on Analysis,* Volume 1, Academic Press, New York and London, 1970. Also *Foundations of Modern Analysis* Academic Press, New York and London, 1960. [Имеется перевод: Основы современного анализа.— М.: Мир, 1964.]

[107] ЧИЛЛИНГВОРТ Д. Р. Дж. (D. R. J. Chillingworth) The catastrophe of a buckling beam. In *Dynamical Systems-Warwick 1974.* Lecture Notes in Mathematics 468 (A. Manning, ed.). Springer, Berlin and New York, 1975, pp. 86—91.

[108] БОЛЛ Дж. М. (J. M. Ball) Initial boundary value problems for an extensible beam. *J. Math. Anal. Appl.* **42**, 61—90, 1973.

[109] КЕЛЛЕР Дж. Б., ЭНТМЭН С. (J. B. Keller, S. Antman) (eds) *Bifurcation Theory and Non-linear Eigenvalue Problems.* Benjamin, New York, 1969.

[110] ТОМПСОН Дж. М. Т., ХАНТ Дж. У. (J. M. T. Thompson, G. W. Hunt) Towards

a unified bifurcation theory. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **26**, 581—604, 1975.

[111] ВАССЕРМАН Г. (G. Wassermann) (*r*, *s*)-stability of unfold ings and catastrophe theory, In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 253—262.

[112] ВАССЕРМАН Г. (G. Wassermann) Stability of unfoldings in space and time. *Acta Math.* **135**, 57—128, 1975.

[113] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Euler buckling. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 373—395.

[114] КОЙТЕР В. Т. (W. T. Koiter) On the stability of elastic equilibrium. Dissertation, Delft, 1945; NASA Technical Translation F10 (1967), 833.

[115] СЬЮЭЛЛ М. Дж. (M. J. Sewell) On the connexion between stability and the shape of the equilibrium surface. *J. Mech. Phys. Solids*, **14**, 203—230, 1966.

[116] КРОЛЛ Дж. (J. Croll) Is catastrophe theory dangerous? *New Scientist* 17 June 1976, 630—632.

[117] РООРДА Дж. (J. Roorda) Stability of structures with small imperfections. *J. Enging Mech. Div. Am. Soc. Civ. Engrs* **91**, 87—106, 1965.

[118] ВАССЕРМАН Г. (G. Wassermann) (*r*, *s*)-stability of unfoldings. Preprint, University of Regensburg, 1974.

[119] ТОМПСОН Дж.М.Т., ГАСПАР З. (J.M.T. Thompson, Z. Gaspar) A buckling model for the set of umbilic catastrophes. Preprint Engineering Department, University College London, 1977.

[120] ТОМПСОН Дж. М. Т., ХАНТ Дж. У.(J. M. T. Thompson, G. W. Hunt) Dangers of structural optimization. *Engng Optimization* **1**, 99—110, 1974.

[121] БАУЭР Л., РАЙСС Э. (L. Bauer, E. Reiss) Nonlinear buckling of rectangular plates. *SIAM J.* **13**, 603—626, 1965.

[122] САППЛ У. Дж. (W. J. Supple) Post-buckling behaviour fo thin plates. In *Structural Instability* (W. J. Supple, ed.), IPC Science and Technology Press, Guildford, 1973.

[123] ЧЖОУ С.-Н., ХЕЙЛ Дж. К., МАЛЛЕ-ПАРЭ Ж. (S. N. Chow, J. K. Hale, J. Mallet-Paret) Applications of generic bifurcation I. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **59**, 159—188, 1975.

[124] ЧЖОУ С.-Н., ХЕЙЛ Дж. К., МАЛЛЕ-ПАРЭ Ж. (S.-N. Chow, J. K. Hale, J. Mallet-Paret) Applications of generic bifurcation II. *Arch. Rat. Mech Anal.* **62**, 209—236, 1976.

[125] МЭГНУС Р. Дж., ПОСТОН Т. (R. J. Magnus, T. Poston) On the full unfolding of the von Karman equation at a double eigenvalue. *Mathematics Report* 109, Battelle, Geneva, 1977. To appear in Chillingworth D. R. J. (ed.) *Catastrophe Theory in Infinite Dimensions.*

[126] ТРУСДЕЛЛ К. (C. Truesdell) *Rational Thermodynamics.* McGraw-Hill, New York 1969.

[127] КЭЛЛЕН Х. Б. (H. B. Callen) *Thermodynamics*, Wiley, New York London, 1960.

[128] ФАУЛЕР Д. Х. (D. H. Fowler) The Riemann—Hugoniot catastrophe and van der Waals' equation. In *Towards a Theoretical Biology* (C. H. Waddington, ed.). Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968—1972. Vol. 4, pp. 1—7.

[129] ХАУГ А. (A. Haug) *Theoretical Solid State Physics. Vol.* 1. Pergamon. Oxford and New York, 1972.

[130] ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. *Статистическая физика.*— М.: Наука, 1976.

[131] ЯУХ Дж.-М. (J.-M. Jauch) Thermodynamics and differential forms. Preprint MS-R-7217, Mathematics Department, University of Denver.

[132] СПИВАК М. А. (M. A. Spivak) *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 5, Vols. Publish or Perish, Boston, 1970 and 1975.

[132a] ДЮБУА Ж.-Г., ДЮФУР Ж.-П. (J.-G. Dubois, J.-P. Dufour) La théorie des catastrophes V: transformées de Legendre et tehrmodynamique. Preprint, Dept. de Math. Univ. de Québec, Montréal, 1977.

[132b] ЭКЛАНД И. (I. Ekeland) Duality in nonconvex optimization and calculus of variations. *Technical Summary Report* 1675, Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, 1976.

[133] БЕЛЛ Г. М., ЛЕЙВИС Д. А. (G. M. Bell, D. A. Lavis) Thermodynamic phase changes and catastrophe theory. To appear.

[134] НЬЮМЭН М. Х. А. (M. H. A. Newman) *Elements of the Topology of Plane Sets of Points.* Cambridge University Psess, Cambridge, 1961.

[135] ШУЛЬМАН Л. С. (L. S. Schulman) Tricritical points and type three phase transitions. *Phys. Rev. Ser. B* 7, 1960—1967, 1973.

[135a] СТЭНЛИ Х. Э. (H. E. Stanley) *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena.* Oxford University Press, London and New York, 1971.

[136] ТУЛУЗ Г., ПФЁТИ П. (G. Toulouse, P. Pfeuty) *Introduction au Groupe de Renormalization et à ses Applications.* Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1975.

[137] БЕРТЭН Г., РАДИКАТИ Л. А. (G. Bertin, L. A. Radicati) The bifurcation from the MacLaurin to the Jacobi sequence as a second-order phase transition. *Astrophys. J.* **206**, 815—821, 1976.

[137a] ТОМПСОН Дж. М. Т. (J. M. T. Thompson) Instabilities bifurcations, and catastrophes. *Phys. Lett.* **51**, 201—203, 1975.

[138] БИРСТОУН Э. (E. Bierstone) Local properties of smooth maps equivariant with respect to finite group actions. *J. Diff. Geom.* **10**, 523—540, 1975.

[139] РОНГА Ф. (F. Ronga) Stabilité locale des applications équivariantes. Preprint, Mathematics Department, University of Geneva, 1976.

[140] ЭШЕР Э., ГЕЙ Д. Э., ПОСТОН Т. (E. Ascher, D. A. Gay, T. Poston) Equivariant bifurcation of thermodynamic potentials in crystallography. To appear.

[141] ПОСТОН Т., БАДГОР А. Б. (T. Poston, A. B. Budgor) A geometrical approach to calculating the energy and frequency spectra of crystals. *J. Comp. Phys.* **19**, 1—28, 1975.

[142] ДИККЕ Р. Х. (R. H. Dicke) Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.* **93**, 99—110, 1954.

[143] ХАКЕН Х. (H. Haken) Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. *Revs Mod. Phys.* **47**, 67—121, 1975.

[144] ЯУХ Дж.-М. (J.-M. Jauch) *Foundations of Modern Quantum Mechanics.* Addison Wesley, Reading, Mass., 1968.

[145] ВАРАДАРАДЖАН В. С. (V. S. Varadarajan) *Geometry of Quantum Theory*, 2 Volumes. Van Nostrand, New York, 1968.

[146] ДИККЕ Р. Х., ВИТТКЕ Дж. П. (R. H. Dicke, J. P. Wittke) *Introduction to Quantum Mechanics.* Addison Wesley, Reading, Mass. 1960.

[147] ГИЛМОР Р., НАРДУЧЧИ Л. М. (R. Gilmore, L. M. Narducci) Relation between equilibrium and nonequilibrium critical properties of the Dicke model. To appear.

[147a] ГИЛМОР Р. (R. Gilmore) Baker—Campbell—Hausdroff formulas. *J. Math. Phys.* **15**, 2090—2092, 1974.

[148] ХЕПП К., ЛИБ Э. Х. (K. Hepp, E. H. Lieb) On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model. *Ann. Phys. N. Y.* **76**, 360—404, 1973.

[149] ГИЛМОР Р., БОУДЕН К. М. (R. Gilmore, C. M. Bowden) Coupled order parameter treatment of the Dicke model. *Phys. Rev. Ser.* A, **13**, 1898—1907, 1976.

[150] ГИББС Х. М., МАК-КОЛЛ С. Л., ВЕНКАТЕСАН Т. Н. К. (H. M. Gibbs, S. L. McCall, T. N. C. Venkatesan) Differential gain and bistability using a sodium filled Fabry—Perot interferometer. *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1135—1138, 1976.

[151] БОНИФАЦИО Р., ЛУДЖАТО Л. (R. Bonifacio, L. A. Lugiato) Cooperative effects and bistability for resonance fluorescence. *Optics Commun.* in press.

[152] ГЛАУБЕР Р. Дж. (R. J. Glauber) (ред.) *Quantum Optics, Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi' Rendiconti 42.* Academic Press, New York and London, 1969.

[153] ГЛАУБЕР Р. Дж. (R. J. Glauber) Coherence and quantum detection. In *Quantum Optics. Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi' Rendiconti 42.* (R. J. Hauber, ed)). Academic Press, New York and London, 1969, pp. 15—56.

[154] АРЕЧЧИ Ф. Т. (F. T. Arecchi) Photocount distributions and field statistics. In *Quantum Optics. Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi' Rendiconti 42* (R. J. Glauber, ed.). Academic Press, New York and London, 1969, pp. 57—110).

[155] ФРИД К., ХАУС Х. А. (C. Freed, H. A. Haus) Photoelectron statistics produced by a laser operating below and above the threshold of oscillation. *IEEE J. Quantum Electron.* **2**, 190—195, 1966.

[156] ГИЛМОР Р., БОУДЕН К. М. (R. Gilmore, C. M. Bowden) Bifurcation properties of Dicke Hamiltonians. *J. Math. Phys.* **17**, 1617—1625, 1976.

[157] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Primary and secondary waves in developmental biology-AAAS 1974, *Some Mathematical questions in biology* VIII. In *Lectures on Mathematics in the Life Sciences* **7**. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, pp. 69—161.

[157a] ХАЙНРИХ Б. (B. Heinrich) Bumblebee

foraging and the economics of sociality. *American Scientist* **64**, 384—395, 1977.

[158] ПИТТ Д. Х., ПОСТОН Т. (D. H. Pitt, T. Poston) Determinacy and unfoldings in the presence of a boundary. To appear.

[159] РЕНФРИ Э. К., ПОСТОН Т. (A. C. Renfrew, T. Poston) Discontinuities in the endogenous change of settlement pattern. To appear in Cooke, K. L. and Renfrew, C. A. (eds.) *Transformations: Matchematical Approaches to Culture Change*, Academic Press, New York and London, 1978.

[160] ПОСТОН Т., УИЛСОН Э. Дж. (T. Poston, A. G. Wilson) Facility size vs. distance travelled: urban services and the fold catastrophe. *Environ. Planning* A, **9**, 681—686, 1977.

[161] ТОМПСОН Б. В. (B. V. Thompson) The phase transition in a modified Dicke model. *J. Phys. A.* **8**, 126—132, 1975.

[162] ХОПФ Э. (E. Hopf) Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung einer Differentialsystems. *Ber. Verh. Sachs, Akad. Wiss. Leipzig. Math. Phys.* **95**, 3—22, 1943.

[163] ХИРШ М. В., СМЕЙЛ С. (M. W. Hirsch, S. Smale) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, New York and London, 1974.

[164] МАРСДЕН Дж. Э., МАК-КРЭКЕН М. (J. E. Marsden, M. McCracken) *The Hopf Bifurcation and its Applications.* Applied Mathematics Series 19. Springer, Berlin and New York, 1976.

[165] КОННЕЛЛ Дж. Х., МЕРЦ Д. Б., МЁРДОК У. М. (J. H. Connell, D. B. Mertz, W. M. Murdoch) *Readings in Ecology and Ecological Genetics.* Harper and Row, New York, 1970.

[166] КОННЕЛЛ Дж. Х. (J. H. Connell) The influence of interspecific competition and other factors on the distribution of the barnacle *Chthamalus stellatus. Ecology* **42**, 710—723, 1961.

[167] ДОБЕНМАЙР Р. (R. Daubenmire) *Plant Communities.* Harper and Row, New York, 1968.

[168] ФОРД Э. Б. (E. B. Ford) Evolution studied by observation and experiment. In *Readings in Genetics and Evolution.* Oxford University Press, Oxford and New York, 1973.

[169] УЭЛЛИНГТОН У. Дж. (W. G. Wellington) Qualitative changes in population in unstable environments. *Can. Entomol.* **96**, 436—451, 1964.

[170] ЭШТОН К. (K. Ashton) Private communication. Data available from Department of Mathematics, University of Auckland, New Zealand.

[171] ПОСТОН Т. (T. Poston) Various catastrophe machines. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 111—126.

[172] ТЬЮРИНГ А. М. (A. M. Turing) The chemical theory of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc.* B **237**, 32, 1952.

[173] ХАДЕЛЕР К. П., АН ДЕР ХЕЙДЕН У., РОТЕ Ф. (K. P. Hadeler, an der U. Heiden, F. Rothe) Nonhomogeneous spatial distributions, of populations. *J. Math. Biol.* **1**, 165—176, 1974.

[174] СМЕЙЛ С. (S. Smale) On gradient dynamical systems. *Ann, Math.* **74**, 199—206, 1961.

[175] СМЕЙЛ С. (S. Smale) Differentiable dynamical systems. *Bull, Amer. Math. Soc.* **73**, 747—817, 1976.

[176] УИНФРИ А. Т. (A. T. Winfree) Spatial and temporal organization in the Zhabotinsky reaction. Aahron Katchalsky Memorial Symposium, Berkeley, 1973.

[177] УИНФРИ А. Т. (A. T. Winfree) Rotating chemical reactions. *Scient. Am.* **230**, 82—95, 1974.

[178] ХОВАРД Л. Н. (L. H. Howard) Bifurcations in reaction-diffusion problems. *Adv. Math.* **16**, 246—258, 1975.

[179] КОПЕЛЛ Н., ХОВАРД Л. Н. (N. Kopell, L. N. Howard) Slowly varying waves. *Studies in Appl. Math. LVI* no. 2, 95—146, 1977.

[180] ГУКЕНХАЙМЕР Дж. (J. Guckenheimer) Constant velocity waves in oscillating chemical reactions. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 99—103.

[181] ПРИГОЖИН И. (I. Prigogine) *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes.* Wiley, New York and London, 1967. [Имеется перевод: Введение в термодинамику необратимых процессов.— М.: ИЛ, 1960.]

[182] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Differentiation and pattern formation. Appendix to Cooke, J. Some current theories of the emergence and regulation of spatial organization in early animal development. *Ann.*

Rev. Biophys. Bioengng, **4**, 210—215, 1975.

[183] КУК Дж., ЗИМАН Э. К. (J. Cooke, E. C. Zeeman) A clock and wavefront model for control of the number of repeated structures during animal morphogenesis. *J. Theoretical Biology* **58**, 455—476, 1976.

[184] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Research ancient and modern. *Bull. Inst. Math. Appl.* **10**, 272—281, 1974.

[185] ИСНАРД К. А., ЗИМАН Э. К. (C. A. Isnard, E. C. Zeeman) Some models from catastrophe theory in the social sciences. In *Use of Models in the Social Sciences* (I. Collins, ed.). Tavistock, London, 1976, pp. 44—100.

[186] АНОНИМ. Dirty Comics, a History of the Eight Pagers. Uitgeverij Tong-Dorarecht.

[187] КОУВЕР Т. М. (T. M. Cover) Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition. *IEEE Trans Electron. Compon.* **14**, 326—334, 1965.

[188] БРЕМЕРМАН Х. (H. Bremermann) Pattern recognition by deformable prototypes. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525 (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 15—57.

[188a] ВАЙДЛИХ В. (W. Weidlich) Dynamics of interacting social groups. In *Cooperative Effects* (H. Haken, ed.), pp. 269—282.

[189] ЗИМАН Э. К., ХОЛЛ К., ХЭРРИСОН П. Дж., МЭРРИДЖ Х., ШЕПЛЭНД П. (E. C. Zeeman, C. Hall, P. J. Harrison, H. Marriage, P. Shapland) A model for institutional disturbances. *Br. J. Math. Statist. Psych.* **29**, 66—80, 1976.

[190] ТАКЕНС Ф. (F. Takens) Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions. In P. J. Hilton (ed.) *Structural Stability, the theory of Catastrophes, and their Applications in the Sciences*, Lecture Notes in Mathematics 525, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 143—234.

[190a] ТАКЕНС Ф. (F. Takens) Implicit differential equations: some open problems. In Burlet, O. and Ronga, F. (eds.) *Singularités d'Applications Différentiables, Plans-sur-Bex 1975*, Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 237—253.

[191] ПАНАТИ К. (G. Panati) Catastrophe theory. *Newsweek* 19 January 1976, 46—47.

[192] ФИШЕР Г. Х. (G. H. Fischer) Preparation of ambiguous stimulus materials. *Percept Psychophys.* **2**, 421—422, 1967.

[193] ФИШЕР Г. Х. (G. H. Fischer) Ambiguity of form: old and new. *Percept Psychophys.* **4**, 189—192, 1968.

[194] ЭТТНИВ Ф. (F. Attneave) Multistability in perception. *Scient. Am.* **225**, 62—71, 1971.

[195] КУРАНТ Р. (R. Courant) Soap film experiments with minimal surfaces. *Amer. Math. Monthly* **47**, 168—174, 1940.

[196] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Catastrophe theory in brain modelling. *Int. J. Neurosci.* **6**, 39—41, 1973.

[197] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Brain modelling. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences.* Lecture Notes in Mathematics 525. (P. J. Hilton, ed.). Springer, Berlin and New York, 1976, pp. 367—372.

[198] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Duffing's equation in brain modelling. To appear in *Bull. Inst. Math. Appl.*

[199] ЭШБИ У. Р. (W. R. Ashby) *Design for a Brain.* Chapman and Hall, London, 1952. [Имеется перевод: Конструкция мозга.— М.: ИЛ, 1962.

[199a] ИНУИ Д. (D. Inouye) The dynamic microstructure of evaluative processes: structural stability models of judgement and intentional action. To appear.

[199b] БРАУН Б. Л., ИНУИ Д., УИЛЬЯМС Р., БОРРУС К. (B. L. Brown, D. Inouye, R. Williams, K. Borrus) A catastrophe theory account of dichotic listening. Preprint. Dept. of Psychology, Stanford University, 1976.

[200] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) A mathematical model for conflicting judgements caused by stress, applied to possible misestimations of speed caused by alcohol. *Br. J. Math. Statist. Psych.* **29**, 19—31, 1976.

[201] ДРЮ Г. К., КОЛКЬЮХАУН У. П., ЛОНГ Х. А. (G. C. Drew, W. P. Colquhoun, H. A. Long) Effect of small doses of alcohol on a skill resembling driving. Medical Research Council Memorandum 38, 1959.

[202] ХОЛМЗ П. Дж., РЭНД Д. А. (P. J. Holmes, D. A. Rand) The bifurcations of Duffing's equation: an application of catastrophe theory. *J. Sound Vibr.* **44**, 237—253, 1976.

[203] КУРНО А. (A. Cournot) Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités, 1843. Translated by D. Irwin, Homewood, Illinois as *The Mathematical Principles of the Theory of Wealth.*

[204] ВАЛЬД А. (A. Wald) On some systems of equations of mathematical economics. *Econometrica* **19**, 368—408, 1957.

[205] ТОМ Р. (R. Thom) Théorie des jeux dans les variétés. In *Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs Applications* (F. Pham. ed.). Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Publ. Math. Inst. Univ. Nice, 1975, pp. 20—26.

[206] ЛИ Т.-Ю., ЙОРК Дж. А. (T.-Y. Li, J. A. Yorke) Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* **82**, 985—992, 1975.

[207] ГУКЕНХАЙМЕР Дж. (J. Guckenheimer) On the bifurcation of maps of the interval. To appear.

[208] ГУКЕНХАЙМЕР Дж., ОСТЕР Г., ИПАКЧИ А. (J. Guckenheimer, G. Oster, A. Ipaktchi) The dynamics of density-dependent population modes. To appear.

[209] РЭНД Д. Э. (D. A. Rand) Exotic phenomena in simple games. Preprint, University of Warwick, 1977.

[210] СМЕЙЛ С. (S. Smale). On the differential equations of species in competition. *J. Math. Biol.* **3**, 5—7, 1976.

[211] ЭКТОН Ф. С. (F. S. Acton) *Numerical Methods that Work*, Harper and Row, New York, 1970.

[212] УИЛКИНСОН Дж. Х. (J. H. Wilkinson) The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials, part 1. *Numerische Math.* **1**, 150—166, 1959.

[213] ЗИМАН Э. К. (E. C. Zeeman) Catastrophe theory. *Scient. Am.* **234**, 65—83, 1976.

[214] ЧИЛЛИНГВОРТ Д. Р. Дж. (D. R. J. Chillingworth) Elementary catastrophe theory. *Bull. Inst. Math. Applic.* **11**, 155—159, 1975.

[215] СТЮАРТ И. Н. (I. N. Stewart) The seven elementary catastrophe. *New Scientist* **68**, 447—454, 1975.

[216] СТЮАРТ И. Н. (I. N. Stewart) Catastrophe theory. *Math. Chronicle*, in press.

[217] АРНОЛЬД В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах.— *УМН*, 1972, 27:5, 119—184.

[218] ДИКИН М. Э. Б. (M. A. B. Deakin) The formal power series approach to elementary catastrophe theory. Preprint, Monash University, 1976.

[219] ГУКЕНХАЙМЕР Дж. (J. Guckenheimer) Shocks and rarefactions in two space dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* in press.

[220] ТОМ Р. (R. Thom) *Modèles mathématiques de la morphogénèse*. Editions 10—18. UGE Paris, 1974.

[221] УОДДИНГТОН К. Х. (C. H. Waddington) (ped.) *Towards a Theoretical Biology*, 4 Vols. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968—1972.

[222] ПОСТОН Т. (T. Poston) The elements of catastrophe theory or the honing of Occam's razor. To appear in Cooke, K. L. and Renfrew A. C. (eds.), *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*, Academic Press, 1978.

[223] ФОЖЕЛЬ Ж.-Ф., ГЮ Ж.-Л., ТОМ Р. (J.-F. Fogel, J.-L. Hue, R. Thom) La planète de l'oncle Thom. *Le Sauvage*, January 1977, pp. 74—80.

[224] УОЛГЕЙТ Р. (R. Walgate) René Thom clears up catastrophes. *New Scientist* **68**, 578, 1975.

[225] ДИКСОН Д., ТОМ Р. (D. Dickson, R. Thom) Was Newton's apple a cusp or a swallowtail? *Times Higher Education Supplement*, 5th December 1975, p. 13.

[226] ФЕРРЕЛЛ Р. А. (R. A. Ferrell) Fluctuations and Superconductor (W. S. Govee and F. Chilton, eds.). Sianior Research Inst., 1968.

[227] ХАКЕН Г. (H. Haken) (ред.) *Synergetics*, Teubner, Stutgart, 1973. [Имеется перевод: Синергетика.— М.: Мир, 1980.]

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

Абрамовиц ⟨= Абрамович⟩ М. (Milton Abramowitz) 336, 475, 582
Абрахам Р. (R. Abraham) 98, 561, 579
Авербух В. И. 8
Айзенбад Д. (D. Eisenbud) 561
ан дер Хейден У. (U. an der Heiden) 506, 586
Андронов А. А. 6, 9, 126, 444
Антонелли П. (P. Antonelli) 561
Ареччи Ф. Т. (F. T. Arecchi) 475, 476, 585
Арнольд В. И. 6, 7, 9, 10, 120, 150, 157, 160, 203, 213, 290, 306, 314, 329, 332, 338, 354, 358, 457, 558, 559, 561, 576, 580—583, 588
Архимед (Ἀρχιμήδης, Archimedes of Syracuse) 272
Аткинсон Г. (G. Atkinson) 562
Аукмути Дж. Ф. Г. (J. F. G. Auchmuty) 569

Бадгор А. Б. (A. B. Budgor) 453, 585
Баркер Дж. (John Barker) 343
Баттерворт Дж. У. (J. W. Butterworth) 360, 583
Баттро А. М. (A. M. Battro) 562, 570
Бауэр Л. (L. Bauer) 405, 584
Белан Ф. Н. 257
Белицкий Г. Р. 577
Белл Дж. М. (G. M. Bell) 427, 428, 436, 562, 584
Беллэрз Р. (Ruth Bellairs) 17
Бенгиги Л. (L. Benguigui) 562
Бенхэм К. Дж. (C. J. Benham) 566
Бер М. (M. Beer) 562
Беркли Дж., епископ (Bishop G. Berkeley) 363, 583
Бернштейн Д. Н. 577
Берри М. В. (Michael V. Berry) 17, 278, 291, 298, 301, 302, 308, 311, 312, 314, 320, 321, 326, 328, 336, 337, 338, 339, 343—345, 353, 355, 559, 562, 581—583
Бертэн Г. (G. Bertin) 447, 585
Бёртон Р. (R. Burton) 250, 570, 581
Бирстоун Э. (E. Bierstone) 452, 562, 585
Блейк У. (William Blake) 515
Болл Дж. М. (J. M. Ball) 380, 382, 583
Бонифацио Р. (R. Bonifacio) 470, 585
Бордман Дж. М. (J. M. Boardman) 562
Боррус К. (K. Borrus) 528, 562, 587
Бос Н. А. (N. A. Baas) 562
Боуден К. М. (C. M. Bowden) 467, 478, 479, 585
Бохнак Я. (J. Bochnak) 562
Браун Б. Л. (B. L. Brown) 528, 562, 587
Бремерман Х. (H. Bremermann) 523, 587
Брёкер Т. (Th. Bröcker) 69, 132, 147, 164, 225, 234, 247, 559, 562, 579
Бриан А. К. (H. C. Bryant) 345, 582
Брызгалова Л. Н. 577
Брюс Л. (Lenny Bruce) 383
Бузина Г. (G. Buzyna) 567
Бэнкофф Т. Ф. (Thomas F. Banchoff) 270, 562, 581

Вайдлих В. (W. Weidlich) 524, 587
Валле Ж. (J. Vallée) 351, 352, 583
Вальд А. (A. Wald) 534, 588
ван дер Ваальс Я. Д. (Jan Diderick van der Waals) 417
Ваннер Ж.-К. Л. (J.-C. L. Wanner) 351, 352, 583
Варадараджан В. С. (V. S. Varadarajan) 462, 585
Варченко А. Н. 563, 577
Васильев В. А. 577
Вассерман Г. (Gordon Wasserman) 164, 178, 346, 388, 396—398, 452, 497, 502, 537, 559, 563, 580, 582, 584
Венкатесан Т. Н. К. (T. N. C. Venkatesan) 470, 471, 585
Вивье К. (C. Vivier) 351, 352, 583
Виртмюллер К. (K. Wirthmüller) 161, 559, 563, 580
Витт А. А. 9
Виттке Дж. П. (J. P. Wittke) 463, 585
Вудкок Э. Э. Р. (A. Edward ⟨*уменьш.* Ted⟩ R. Woodcock) 18, 21, 105, 111, 204, 205, 225, 233, 234, 243, 248—250, 556, 559, 560, 563, 569, 570, 579—581

[1] В отдельных случаях в ломаных скобках указаны (после знака равенства) другие имеющие (или имевшие) хождение транскрипции.— *Прим. ред.*

Габриэлов А. М. 577
Гамильтон У. Р. (William Rowan Hamilton) 315
Гаспар З. (Z. Gaspar) 400, 573, 584
Гей Д. Э. (D. A. Gay) 452, 576, 585
Гиббс Х. М. (H. M. Gibbs) 470, 471, 585
Гибсон К. Дж. (C. G. Gibson) 161, 164, 171, 559, 563, 580
Гийемин В. (V. Guillemin) 100, 563, 579
Гилмор Р. (Robert ⟨*уменьш.* Bob⟩ Gilmore) 15, 18, 454, 464, 467, 470, 471, 473, 474, 478, 479, 563, 585
Гильберт Д. (D. Hilbert) 563
Глаубер Р. Дж. (R. J. Glauber) 472, 475, 585
Го Ц.-Ч. (Tsee-Chan Kuo) 562, 563
Годвин Э. Н. (A. N. Godwin) 243, 248, 563, 581
Голубицкий М. (M. Golubitsky) 10, 100, 348, 399, 559, 563, 579, 582
Гомозов Е. Т. 577
Грей Э. (A. Gray) 564
Грейем Р. (R. Graham) 469, 564
Громолл ⟨= Громол⟩ Д. (D. Gromoll) 366, 383, 564, 583
Гроссмэн С. (S. Grossman) 469, 564
Гротендик А. (Alexander Grothendieck) 6
Гудвин Б. (B. Goodwin) 564
Гукенхаймер Дж. (J. Guckenheimer) 348, 506, 534, 535, 559, 564, 582, 586, 588
Гусейн-Заде С. М. 564
Гэффни Т. (T. Gaffney) 564
Гю Ж. Л. (J.-L. Hue) 560, 575, 588
Гюттингер В. (W. Güttinger) 564

Дамон Дж. (J. Damon) 564
Дейвис С. С. (S. S. Davis) 348, 582
Делейни С. Р. (S. R. Delany) 564
Дендринос Д. С. (D. S. Dendrinos) 564
Дёйстермат Й. Й. (J. J. Duistermaat) 222, 329, 332, 559, 564, 580
Джеймс И. М. (I. M. James) 564
Джоунз Р. Б. (R. B. Jones) 575
Дикин М. Э. Б. (M. A. B. Deakin) 559, 564, 588
Дикке Р. Х. (R. H. Dicke) 460, 463, 585
Диксон Д. (D. Dickson) 560, 564, 588
Дирак П. М. А. (Paul M. A. Dirac) 440, 462
Добенмайр Р. (R. Daubenmire) 496, 499, 586
Додсон К. Т. Дж. (C. T. J. Dodson) 28, 42, 57, 58, 281, 324, 459, 559, 564, 579
Додсон М. М. (M. M. Dodson) 564, 565
Долгачёв И. В. 577
Дос Сантос Андраде А. (A. Dos Santos Andrade) 570
Дронов И. Ф. 578
Дрю Г. К. (G. C. Drew) 529, 587
Дьёдонне Ж. (J. Dieudonné) 379, 583
дю Плесси А. А. (A. A. du Plessis) 161, 559, 563, 580
Дюбуа Ж.-Г. (J.-G. Dubois) 21, 427, 565, 579, 584
Дюфур Ж.-П. (J.-P. Dufour) 21, 427, 565, 579, 584

Ених К. (K. Jänich) 234, 247, 565

Жарми Н. (N. Jarmie) 345, 582

Закалюкин В. М. 565, 577
Зельдович Я. Б. 354
Зиман Э. К. (Eric Christopher Zeeman) 5, 7, 12, 17, 21, 52, 69, 106, 115, 132, 147, 164, 191, 222, 223, 225, 233, 234, 243, 246, 251, 277, 299, 390, 398, 411, 428, 482, 495, 498, 501—505, 508, 509, 513, 514, 516, 525, 526—532, 542, 558—560, 565—567, 569, 573, 575, 579—581, 584—588
Зуссманн Х. (H. Sussmann) 21, 560, 566, 579

Иноуэ М. (M. Inoue) 566
Инуи Д. (D. Inouye) 528, 562, 566, 587
Ипакчи А. (A. Ipaktchi) 534, 535, 588
Ипатов Е. Б. 578
Иснард К. А. (C. A. Isnard) 516, 560, 566, 587

Йорк Дж. А. (J. A. Yorke) 534, 588

Калкарни В. А. (V. A. Kulkarny) 350, 352, 583
Карвало М. С. Б., де (M. S. B. de Carvalho) 566
Карно Н. Л. С. (Nicolas Léonard Sadi Carnot) 423
Карпентер Дж. Э. (G. A. Carpenter) 566
Картер С. Р. (Stephan R. Carter) 165, 543, 544
Келлер А. (A. Keller) 297, 581
Келлер Дж. Б. (J. B. Keller) 380, 583
Кёйпер Н. Х. (Nicolaas H. Kuiper) 365, 566
Килмистер К. У. (C. W. Kilmister) 566
Кинг Х. К. (H. C. King) 566
Клар Д. (D. Klahr) 566
Клаузиус Р. Ю. Э. (Rudolf Julius Emanuel Clausius) 423
Кнут Д. Э. (Donald E. Knuth) 509
Козак Дж. Дж. (J. J. Kozak) 566
Койтер В. Т. (W. T. Koiter) 392, 584
Колкьюхаун У. П. (W. P. Colquhoun) 529, 587
Колмогоров А. Н. 290
Коморовский Я. (J. Komorowski) 566
Комсток Дж. П. (John P. Comstock) 256
Коннелл Дж. Х. (J. H. Connell) 495, 586
Коннор Дж. Н. Л. (J. N. L. Connor) 337, 346, 566, 582
Корсунский А. А. 8
Коувер Т. М. (T. M. Cover) 523, 587
Коупелл Н. (N. Kopell) 506, 586
Кролл Дж. (J. Croll) 393, 401, 539, 560, 567, 584
Кроули Д. Г. (D. G. Crowley) 293, 297, 298, 581
Кук Дж. (Jonathan Cooke) 508, 509, 542, 567, 587
Куликов В. С. 577

Курант Р. (R. Courant) 528, 567, 587
Курно А. (A. Cournot) 534, 587
Курош А. Г. 107
Кушниренко А. Г. 577
Кхаре В. (V. Khare) 345, 582
Кэли А. (Arthur Cayley) 270, 315, 317, 581
Кэллахан Дж. Дж. (J. J. Callahan) 225, 567, 581
Кэллен Х. Б. (H. B. Callen) 417, 418, 425, 584
Кэлльман К. Г. (C. G. Källman) 567
Кэсти Дж. (J. Casti) 567

Лакс П. Д. (P. D. Lax) 567
Ламли Дж. Л. (J. L. Lumley) 354, 583
Ландау Л. Д. 423, 431, 434, 584
Ландер Л. (L. Lander) 69, 132, 147, 164, 225, 234, 246, 247, 559, 562, 579
Лассаль М. Г. (M. G. Lassalle) 567
Латаль Х. Г. (H. G. Latal) 576
Латур Ф. (F. Latour) 567
Левайн ⟨= Левин⟩ Х. И. (H. I. Levine) 164, 561, 567, 580
Лейбниц Г. В. (Gottfried Wilhelm freiherr von Leibniz) 538
Лейвис Д. А. (D. A. Lavis) 427, 428, 436, 562, 584
Лейтон Р. Б. (R. B. Leighton) 286, 581
Ли Т.-Ю. (T.-Y. Li) 534, 588
Либ Э. Х. (E. H. Lieb) 467, 479, 585
Лифшиц Е. М. 423, 431, 434, 584
Лонг Х. А. (H. A. Long) 529, 587
Лопатухин Л. И. 357
Лоэйенга Э. (E. Looijenga) 161, 559, 563, 567, 580
Лудвиг Д. (D. Ludwig) 337, 567, 582
Луджато Л. А. (L. A. Lugiato) 470, 585
Лукин Д. С. 358, 577, 578
Лычагин В. В. 578
Лэкер Р. К. (R. C. Lacher) 567
Лю Ю.-Ч. (Lu Yung-Chen) 132, 136, 164, 559, 567, 580
Ляпунов А. М. 9
Ляшко О. В. 567, 578

Майер ⟨= Мейер⟩ В. (W. Meyer) 366, 383, 564, 583
Майкельсон А. А. (Albert Abraham Michelson) 515
Мак-Артур Р. (R. McArthur) 567
Мак-Колл С. Л. (S. L. McCall) 470, 471, 585
Мак-Крэкен М. (M. McCracken) 494, 567, 586
Максвелл Дж. К. (James Clerk Maxwell) 418
Малле-Парэ Ж. (J. Mallet-Paret) 407, 575, 584
Мальгранж Б. (Bernard Malgrange) 6, 10, 189, 567
Мао Цзэдун (Mao Tse-Tung) 516
Маркус Л. (L. Markus) 568
Марсден Дж. Э. (Jerrold E. Marsden) 10, 144, 494, 567, 580, 586
Мартинэ Ж. (J. Martinet) 164, 165, 182, 187, 189, 568, 580
Маслов В. П. 314, 329, 331, 358, 582
Маунт К. Э. (K. E. Mount) 345, 562, 582
Мах В. Х. (W. H. Mach) 346, 347, 582
Мезер Дж. (John Mather) 6, 10, 87, 164, 174, 559, 568, 579
Мерц Д. Б. (D. B. Mertz) 495, 586
Мёрдок У. М. (W. M. Murdoch) 495, 586
Миз А. И. (A. I. Mees) 568
Милнор Дж. У. (John W. Milnor) 91, 568, 579
Митчисон Дж. (G. Mitchison) 568
Михор П. (P. Michor) 568
Мозер Ю. К. (Jurgen K. Moser) 290
Молчанов С. А. 577
Монсон С. Р. (S. R. Monson) 568
Морс М. (Marston Morse) 568
Морэн Б. (Bernard Morin) 348, 568
Мэгнус Р. Дж. (Robert J. Magnus) 18, 174, 184, 203, 206, 211, 366, 367, 374, 383, 407, 412, 569, 580, 583, 584
Мэкли М. Р. (Malcolm R. Mackley) 17, 278, 291, 293—295, 297, 300—302, 304, 308, 309, 311, 312, 559, 562, 581
Мэкс Н. (Nelson Max) 560, 569
Мэллори Дж. К. (J. K. Mallory) 356, 357, 583
Мэннинг Э. (A. Manning) 569
Мэрридж Х. (H. Marriage) 525, 560, 566, 587

Най Дж. Ф. (J. F. Nye) 10, 321, 562, 582
Нардуччи Л. М. (Lorenzo M. Narducci) 15, 454, 464, 470, 471, 473, 479, 585
Николис Г. (G. Nicolis) 569
Никулин В. В. 577
Ниренберг Л. (L. Nirenberg) 569
Ногути Х. (H. Noguchi) 569
Нолл В. (W. Noll) 295, 581
Нуссенцвейг Х. М. (H. M. Nussenvzeig) 345, 582
Ньюмэн М. Х. А. (M. H. A. Newman) 432, 584
Ньютон И. (Isaac Newton) 19, 323, 520, 538

Обермайер Ф. (F. Obermeier) 350, 583
Оленик Р. (R. Olenick) 569
Олсен Д. Р. (Dan R. Olsen jr.) 165, 543, 544
Остер Г. (G. Oster) 534, 535, 588

Паламодов В. П. 192, 569, 580
Палкин Е. А. 358, 577, 578
Панати К. (C. Panati) 527, 569, 587
Панофски Х. Э. (H. A. Panofsky) 354, 583
Патти Х. Х. (H. H. Pattee) 569
Пейксото М. М. (M. M. Peixoto) 569
Пирси Т. (T. Pearcey) 337, 569, 582
Питт Д. Х. (David H. Pitt) 18, 255, 489, 491, 513, 569, 581, 586
Понтрягин Л. С. 126, 444

Портьюс И. Р. (I. R. Porteous) 397, 569
Постон Т. (Tim Poston) 11, 18, 21, 28, 57, 58, 105, 111, 114, 155, 161, 205, 225, 232—234, 243, 248—250, 255, 281, 324, 333, 367, 407, 412, 452, 453, 459, 489, 491—493, 504, 513, 518, 528, 556, 559, 560, 563, 569, 570, 576, 579—581, 583—586, 588
Поэнару В. (V. Poénaru) 346, 452, 570, 582
Преппер Ф. (F. Prepper) 573
Пригожин И. (Ilya Prigogine) 507, 586
Пуанкаре А. (Henri Poincaré) 12, 426
Пут М., ван дер (M. van der Put) 570
Пфёти П. (P. Pfeuty) 439, 444, 445, 585

Радикати Л. А. (L. A. Radicati) 447, 585
Райсс Э. (E. Reiss) 405, 584
Ревзен М. (M. Revzen) 576
Резерфорд Э. (1st Baron Ernest Rutherford) 272
Ренфри Э. К. (A. Colin Renfrew) 18, 492, 518, 560, 570, 586
Рёсслер О. Э. (O. E. Rössler) 570
Робб А. М. (A. M. Robb) 266, 581
Роббин Дж. У. (J. W. Robbin) 98, 561, 579
Розестратен Р. (P. J. A. Rozestraten) 570
Роквуд Э. (Alyn Rockwood) 165, 250, 543, 544, 570, 581
Ронга Ф. (F. Ronga) 452, 570, 585
Роорда Дж. (J. Roorda) 394, 584
Роте Ф. (F. Rothe) 506, 586
Рэнд Д. Э. (D. A. Rand) 157, 172, 532, 535, 559, 570, 575, 580, 587, 588
Рюэль Д. (D. Ruelle) 570

Самойленко А. М. 578
Саппл У. Дж. (William ⟨*уменьш.* Bill⟩ J. Supple) 17, 406, 412, 584
Себастьяни М. (M. Sebastiani) 573
Седых В. Д. 578
Серво Д. (D. Cerveau) 570
Сержерэрт Ф. (F. Sergeraert) 570
Сеттерстром Р. Д. (R. D. Setterstrom) 570
Сирсма Д. (D. Siersma) 164, 165, 178, 222, 570, 580
Склар Э. (A. Sklar) 576
Смейл С. (Stephen Smale) 494, 506, 535, 558, 559, 570, 586, 588
Смит А. (Adam Smith) 484
Смит Р. (R. Smith) 357, 583
Смит Т. Р. (T. R. Smith) 571
Спивак М. А. (M. A. Spivak) 42, 57, 63, 424, 559, 579, 584
Станек О. (O. Stanek) 565
Старобин Л. (L. Starobin) 571
Стефан П. (P. Stefan) 182, 571, 580
Стефенсон Р. Г. (R. G. Stephenson) 293, 297, 298, 581
Стёртевант Б. (B. Sturtevant) 350, 352, 583
Стиган И. Э. (Irene A. Stegun) 336, 475, 582
Страусс К. (C. Strauss) 270, 562, 581
Стэнли Х. Э. (H. E. Stanley) 438, 571, 585
Стюарт И. Н. (Ian N. Stewart) 11, 18, 30, 32, 155, 161, 205, 232, 333, 558, 570, 571, 579, 580, 588
Суэйн Х. (H. Swain) 567
Сьюэлл М. Дж. (Michael J. Sewell) 17, 360, 377, 393, 394, 559, 571, 583, 584
Сэлмон Г. (G. Salmon) 107, 579
Сэндс М. (M. Sands) 286, 581

Такенс Ф. (F. Takens) 7, 525, 570, 571, 587
Талк Дж. Д. (J. D. Tulk) 573
Тейлор Дж. И. (Geoffrey Ingram Taylor) 293
Тейссье Б. (B. Teissier) 571
Тери К. (C. Théry) 351, 352, 583
Толл Д. О. (D. O. Tall) 30, 32, 571, 579
Том Р. (René Thom) 6, 7, 9, 10, 12, 17, 20, 21, 27, 96, 114, 115, 118, 120, 189, 191, 192, 197, 223, 225, 235, 240, 243, 248, 276, 306, 348, 427, 428, 482, 509, 534, 535, 558—560, 564, 571, 573, 575, 579, 581, 582, 588
Томпсон Б. В. (B. V. Thompson) 493, 586
Томпсон Дж. М. Т. (J. Michael T. Thompson) 17, 144, 210, 224, 365, 377, 381, 386, 393, 394, 396, 400, 401, 403, 449, 559, 560, 573, 580, 583, 584, 585
Томпсон М. (M. Thompson) 573
Тринкаус Х. (H. Trinkaus) 573
Тротмэн Д. Дж. Э. (D. J. A. Trotman) 132, 147, 164, 559, 573, 580
Труселл К. Э. (Clifford A. Truesdell) 295, 389, 416, 581, 584
Тужрон Ж.-К. (J.-C. Tougeron) 574
Тулуз Г. (G. Toulouse) 439, 444, 445, 585
Тьюринг А. М. (Allan M. Turing) 13, 506, 509, 586
Тюрина Г. Н. 578

Уилкинсон Дж. Х. (J. H. Wilkinson) 555, 588
Уилсон Ф. У. (F. W. Wilson) 574
Уилсон Э. Дж. (Alan G. Wilson) 18, 493, 518, 570, 574, 586
Уильямс Р. (R. Williams) 528, 562, 587
Уинфри А. Т. (A. T. Winfree) 506, 586
Уитни Х. (Hassler Whitney) 6, 10, 574
Уоддингтон К. Х. (C. H. Waddington) 560, 574, 588
Уолгейт Р. (R. Walgate) 560, 574, 588
Уолкер У. (W. Walker) 574
Уолкер Э. К. (A. C. Walker) 573
Уолл Ч. Т. К. (C. T. C. Wall) 397, 574
Уоллес Дж. Г. (J. G. Wallace) 566
Урселл Ф. (F. Ursell) 574
Уэллингтон У. Дж. (W. G. Wellington) 497, 586

Фам Ф. (F. Pham) 574
Фанкхаузер Х. Р. (H. R. Fankhauser) 574
Фаулер Д. Х. (D. H. Fowler) 418, 435, 574, 584
Фейнман Р. П. (R. P. Feynman) 286, 324, 458, 581
Фергусон Дж. Э. (J. A. Ferguson) 574
Фергусон Х. Р. П. (Helaman R. P. Ferguson) 68, 544, 574
Ферма П. (Pierre Fermat) 315
Феррелл Р. А. (R. A. Ferrell) 438, 588
Фёрстер В. (W. Förster) 575
Филд М. (M. Field) 346, 452, 575, 582
Фишер А. Э. (A. E. Fischer) 144, 580
Фишер Г. Х. (G. H. Fisher) 527, 587
Фожель Ж.-Ф. (J.-F. Fogel) 560, 575, 588
фон Нейман Дж. (John von Neumann) 286
Форд Э. Б. (E. B. Ford) 496, 586
Фрейзер Э. Б. (Alistair B. Fraser) 346, 347, 582
Фрид К. (C. Freed) 476, 477, 585
Фрэнк Ф. К. (F. C. Frank) 293—295, 297, 298, 581
Фрэнсис Дж. К. (G. K. Francis) 575
Фукутомэ Х. (H. Fukutome) 575
Фурнесс П. (P. Furness) 575
Фурутани Н. (N. Furutani) 575

Хаделер К. П. (K. P. Hadeler) 506, 586
Хайкин С. Э. 9
Хайнрих Б. (B. Heinrich) 485, 585
Хакен Г. (Hermann Haken) 460, 464, 467, 469, 575, 585, 588
Хан Х. (H. Hahn) 575
Хант Дж. У. (Giles W. Hunt) 17, 144, 210, 224, 365, 377, 381, 386, 394, 396, 400, 401, 403, 559, 573, 580, 583, 584
Хармон Б. Н. (B. N. Harmon) 576
Хауг А. (A. Haug) 420, 584
Хаус Х. А. (H. A. Haus) 476, 477, 585
Хейл Дж. К. (J. K. Hale) 407, 575, 584
Хепп К. (K. Hepp) 467, 479, 585
Хилтон П. Дж. (P. J. Hilton) 575
Хирш М. Б. (M. B. Hirsch) 494, 559, 586
Хитли Б. (B. Heatley) 575
Хованский А. Г. 577, 578
Ховард Л. Н. (L. N. Howard) 506, 586
Холдич Х. (Rev. Hamnet Holditch) 315
Холл К. (C. Hall) 560, 566, 587
Холмз П. Дж. (P. J. Holmes) 532, 559, 575, 587
Холфорд Р. Л. (R. L. Holford) 337, 344, 575, 582
Хопф Э. (E. Hopf) 494, 586
Хьюз А. (A. Hughes) 575

Хэллам А. (A. Hallam) 565
Хэнней Дж. Х. (J. H. Hannay) 355, 562, 583
Хэррисон П. Дж. (P. J. Harrison) 525, 560, 566, 575, 587

Цалер Р. С. (R. S. Zahler) 21, 560, 566, 579

Чаудхури Д. Р. (D. Rai Chaudhuri) 575
Чеппл Дж. (G. Chapple) 575
Чернавский А. В. 8
Чжан Ш.-Х. (Shih-Hung Chang) 567
Чжоу С.-Н. (S.-N. Chow) 406, 575, 584
Чилвер Х. (H. Chilver) 575
Чиллингворт Д. Р. Дж. (David R. J. Chillingworth) 276, 306, 365, 380, 382, 558, 559, 575, 581, 583, 588
Чудновский А. М. 257

Шазарэн Ж. (J. Chazarain) 329, 559, 575, 582
Шансинер А. (A. Chenciner) 243, 575, 581
Шапиро Г. С. 8
Шварц Г. (G. Schwartz) 576
Шеплэнд П. (P. Shapland) 525, 560, 566, 587
Шеффер Д. (D. Schaeffer) 10, 399
Шоррок П. Э. (P. A. Shorrock) 573
Шульман Л. С. (L. S. Schulman) 436, 562, 576, 584

Эвдокс ⟨= Евдокс⟩ Книдский (Εὔδοξος, Éudoxos Knidios) 514
Эддингтон А. С. (Arthur Stanley Eddington) 453
Эйлер Л. (L. Euler) 359, 366, 389, 426, 583
Эйнштейн А. (Albert Einstein) 515
Эйри Дж. Б. (George Biddell Airy) 336, 582
Экланд И. (I. Ekeland) 427, 576, 584
Эктон Ф. С. (F. S. Acton) 555, 557, 588
Эмсон Дж. К. (J. C. Amson) 576
Энтмэн С. (S. Antman) 380, 583
Эрбер Т. (T. Erber) 569, 576
Эттнив Ф. (F. Attneave) 527, 528, 587
Эшби У. Р. (W. R. Ashby) 528, 587
Эшер Э. (Edgar Ascher) 18, 452, 576, 585
Эштон К. (Ken Ashton) 17, 499, 500—502, 511, 576, 586

Яух Дж.-М. (Josef-M. Jauch) 423, 462, 584, 585

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

активная переменная 224
алгебра Ли 456
алгебраическое множество 53
алгоритм приведения к расщепленному виду 210
аналитическая функция 68
аналитическое соответствие 479
Арнольда классификация 160
асимметричная точка бифуркации 396
асимптотическое разложение 331
— решение 330
Аугусти модель 400, 401
аффинное подпространство 94

бабочка 152, 162
— двойственная 152
базис 34
— стандартный 36
банахово многообразие 364, 376
— пространство 272, 376
бассейн притяжения 408
безвихревое течение 286
Бернрейтера шкала 529
Бертело жидкость 428
бесконечномерное пространство 35
бистабильность восприятия 527
— лазера 471
бифуркации точка асимметричная 396
бифуркационное множество 112, 226
— — локальное 306
— — нелокальное 306
бифуркация 112, 130
— вторичная 394
близкодействие 441
Больцмана постоянная 417
Бореля теорема 69
браслет омбилик 52
Бриллюэна функция 422
быстро осциллирующий интеграл 331
— убывает 330

в общем положении 95
вандерваальсова жидкость 428
вблизи 59

Вейсса модель 420
— уравнение 420
вектор 33
— дуальный 460
векторное пространство 33
вектор-столбец 42
вектор-строка 42
версальная деформация 194, 209
версальность 209
ветвление решений 408
вещественно-аналитическое соответствие 480
вигвам 152, 162
внешняя переменная 223
внутренняя переменная 193, 223
возмущение 192
восстанавливающий момент 252
вторая производная 66
выпучивание 361
— пластическое 360, 361
— упругое 361
вырожденная квадратичная форма 46
— критическая точка 78, 79
— матрица 41
вырожденность 37
— двойная 152
вырожденный многочлен 555

г. о. 246
Галёркина — Ритца метод 383
гамильтониан 459
— Дикке 461
гармоническая функция 287
гармонический осциллятор 414
гауссова неподвижная точка 445
Гельмгольца потенциал 425
гессиан 67
Гиббса свободная энергия 427
— функция 425
гильбертово пространство 298, 458
Гинзбурга критерий 444
гиперболическая омбилика 154
— — вторая 156
гипоциклоида 239
гистерезис 115

главная диагональ 39
гладкая функция 67
горизонталь 63
градиент 99
— среды 487
градиентное отображение 99
градиентно-подобный 507
граничные условия неравновесные 467
— — равновесные 467
грубая система 126
группа 171
— Ли 171, 456
— перенормировок 443
губы 247, 353

д. в. г. 499
дважды дифференцируемая функция 66
двойная вырожденность 152
— сборка 53, 400
двойное лучепреломление 297
— отношение 158
двойственная катастрофа 163
— сборка 117
двояковогнутость 491
двулучепреломление 297
действие 323, 326
декартово произведение 29
дельтоида 239
дефект 37
деформация 121, 192, 193, 208, 360
— версальная 194, 209
— индуцированная 193, 209
— универсальная 194
динамическая система 276
диполия Курно 534
дираковские обозначения 458
дискриминант квадратичной формы 46
— кубического уравнения 107
дискриминантный конус 46, 137
Дитеричи жидкость 428
диффеоморфизм 73
— локальный 74
дифференцируемая функция 61, 62
дифференцируемость кусочная 67
— n-кратная 67
Долгачёва число 203
достаточная струя 87
дуальный вектор 460

единичная матрица 39
— сфера 53

желоба скрещенные 78
жёлоб 78

жёсткая замена 267
жёсткие науки 540
жидкость Бертело 428
— ван дер Ваальса 428
— Дитеричи 428
— ньютонова 294

завихренность 284
задача об арке 390
закон инерции Сильвестра 44
замена гладкая 73
— жёсткая 267
— инфинитезимальная 172
— координат 38
— линейная 48
— малая 168
защемленный конец 382
зиманов закон параболической остановки 501, 511
зиманова машина катастроф 21

идеальная система 192
Изинга модель 437
изолированная точка 78
индекс особенности 338
индуцированная деформация 193, 209
инфинитезимальная замена 172
информация 539

карман 234, 556
карта 93
касательное пространство 183
каспоидная катастрофа 161
каспоиды 150
катастрофа 20
— второй гиперболической омбилики 156
— гиперболической омбилики 154
— двойственная 163
— двойственной сборки 148
— каспоидная 161
— нерасщепляемая 367
— обобщенная 21
— параболической омбилики 156
— переключения 513
— Римана — Гюгонио 348, 428
— с ограничениями 15, 398, 449, 482, 489
— сборки 106, 107, 148, 161
— складки 142, 161
— условная 388
— эквивариантная 346, 537
— элементарная 12, 21, 163
— эллиптической омбилики 154
катастрофический прыжок 115
— скачок 115

каустика 315
качалка 24
квадратичная форма 42
— — вырожденная 46
квадривий 350
квадрика 42
квазиклассика 339
квазистатика 113
квартика 155
класс C^r 67
классификация Арнольда 160, 161
клюв 247, 257, 264
клюв-к-клюву 247, 353
кобазис 35
Коксетера число 203
кома 328
коммутационные соотношения 457
композиция 31
компонента 32
конечно-определенная функция 87, 166
консервативность 413
конус Маха 348
координата 32, 93
коразмерность 35, 102, 187, 223, 543
— право-левая 203
— функции в нуле 189, 208
коранг 46, 89
корневое множество 47
корреляция 439
кривая метацентров 257
— сборок 153, 231
— складок 112
— сосуществования 434
— статической остойчивости 272
— центров величины 254
криволинейные координаты 93
критическая нагрузка 392
— область 444
— опалесценция 437
— точка 76, 77, 416
— — вырожденная 78, 79
— — невырожденная 78
критический показатель 422, 435, 439
критическое значение 77
кубика 47
кубическая форма 47
Курно диполия 534
кусочная дифференцируемость 67
Куэтта эксперимент 291
Кюри точка 421

лагранжев множитель 424
лагранжево многообразие 332
лазер 455
— Томпсона 493
Ландау теория 430
Ланжевена функция 422
лапласиан 285
ласточкин хвост 150, 161, 353
Лежандра преобразование 426
лемма Морса 76, 80
— — для семейств 129
— Накаямы 178
— расщепления 14, 76, 87
— — для семейств 128
линейная зависимость 34
— замена 48
— комбинация 34
— независимость 34
линейное преобразование (отображение) 35
— приближение 57
— — наилучшее 60
линия тока 280
лишний параметр 224
локальная система координат 93
— k-определенность 181
локально 59

макросостояние 423
Максвелла правило 418
— принцип 427—428
— страт 306
максимум 78
малая функция 89
Мальгранжа подготовительная теорема 189
матрица 38
— вырожденная 41
— Гессе 67, 78
— единичная 39
— квадратичной формы 43
— невырожденная 41
— нулевая 39
— обратная 41
— размера $m \times n$ 38
— симметричная 43
— транспонированная 42
Маха конус 348
машина катастроф 21
мельница двухвалковая 294
— четырехвалковая 293
— шестивалковая 299
— $2n$-валковая 312
метастабильное состояние 433
метацентр 256
метацентрическая высота 257
метацентров кривая 257
метод ВКБ 333
— сечений 53
— статического возмущения 377
— стационарной фазы 333
микросостояние 423
минимум 78

многообразие 92
— катастрофы 109, 226
— равновесия 365
многочлен 53
— вырожденный 555
множество 28
— Максвелла 306
— соединения сёдел 307
мода выпучивания 367, 373
— колебаний 413
модель Аугусти 400, 401
— генетического переключения 506
— Изинга 437
модуль 161
Морса лемма 76, 80, 129
морсовская критическая точка 76
— особенность 161
— функция 90
морсовское l-седло 81
мультистабильность 527
мягкая мода 414, 437

наблюдаемая 461
накачка 467
Накаямы лемма 178
начало 33
невырожденная критическая точка 78
— — форма семейства 161
— матрица 41
невырожденное отображение 37
некритическая область 451
— форма семейства 161
нелокальное бифуркационное множество 306
немая переменная 195
немой параметр 162, 224
неопределенная форма 197
непрерывная функция 58
непрерывно дифференцируемая функция 66
нерасщепляемая катастрофа 367
несжимаемое течение 282
несовершенство 192, 395
несущественная переменная 130, 224
нефроида 317
неявное дифференцирование 75
норма 57, 379
нормализационная группа 443
нормализованная форма струи 211
нормальный фактор 529
ньютонова жидкость 294

обезьянье седло 78
область значений 30
— определения 30
обобщенная катастрофа 21
— производная 380
обобщенные координаты 93
образ 30
обратимое отображение 37
обратная матрица 41
— функция 32
обратное отображение 37
общее положение 95
объединение 29
ограничение 32
одновременные моды 403
однопараметрическое семейство 134
одночлен 53
ожидаемое значение 461
окрестность 58—59
омбилика 154, 162
— высшая 157
— гиперболическая 154, 353
— коническая 157
— параболическая 156
— символическая 157
— эллиптическая 154, 353
омега-взрыв 535
Онсагера соотношения 416
оператор Лапласа 285
— плотности 462
— — приведенный 466
— рождения 458
— уничтожения 458
— числа фотонов 458
определённость конечная 166
определитель 42
орбита 171
— погруженная 174
особая точка 226
особенность 226
особое множество 226
— отображение 93
остойчивость 252, 259
острое ребро 238
открытый шар 58
отображение 30
— катастрофы 109, 110, 226

п. о. 246
параболическая омбилика 156
— остановка 501, 511
параметр 93
— деформации 223
— конструкции 388
— лишний 224
— нагрузки 388
— немой 162, 224
— несовершенства 392
— порядка 468
— управляющий 115
параметризация 93, 102

параметризованная кривая 100
пассивная переменная 224
переводит 30
переменная 31
— активная 224
— внешняя 223
— внутренняя 193, 223
— деформации 193
— немая 195
— несущественная 130, 224
— пассивная 224
— поведения 115
— состояния 115
— существенная 130
— управления 115
перенормировка 443
пересечение 29
— трансверсальное 94
Пирси функция 337
плечо восстанавливающего момента 252
— статической остойчивости 252
поведение 223
поведенческая переменная 115, 223
поверхность равновесия 109, 365
подготовительная теорема Мальгранжа 189
подкатастрофа 247
подкрепленная пластина 399
подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ 92
подмножество 29
подпространство 33
— аффинное 94
показатель чувствительности к несовершенству 392
полиномиальная функция 48
полиномиальное выражение 48
полуалгебраическое множество 53
порождает 34
порядок каустики 334
— функции в нуле 61, 70
поток обратной связи 525
— — — быстрый 525
— — — медленный 525
почти все 441
правая эквивалентность 84—85
правило параллелограмма 33
— равных площадей 418
предельный показатель 393
приведение по строкам 40
принцип Максвелла 427—428
— максимального промедления 114, 413
— максимума энтропии 425
— наименьшего времени 315
— — действия 323
— одновременных мод 399
— Ферма — Гамильтона 315
произведение декартово 29
— скалярное 378
— тензорное 459
производная 61, 62
— вторая 66
— обобщенная 380
— частная 64
— сдвиг 284
пространство бесконечномерное 35
— векторное 33
— гильбертово 298, 458
— деформации 193, 223
— касательное 183
— поведения 223
— состояний 223, 226
— струи 167
— управления 223, 226
— Фока 458
— Фреше 379
— эвклидово 32
процесс приведения Ляпунова — Шмидта 366
прощёлкивание 387, 392
прыжок 115
пустое множество 29

равновесная кривая 364
— поверхность 365
равновесный путь 364
радиус кривизны 264
размерность 35
— внешняя 223
— деформации 193, 223, 226
— многообразия 93
— управления 223
ранг квадратичной формы 44
— отображения 37
расстояние 57
расходящийся ряд 58
расхождение 116
расчесывание 296
расщепляющий фактор 529
рестабилизация 387
росток 140, 174, 379
ротор 99
ряд расходящийся 58
— сходящийся 58
— Тейлора 67, 70

самодвойственность 154, 157
— самопересечения кривая 232
сборка 106, 107, 148, 150, 161, 229, 479
— двойная 53, 400
— двойственная 117, 148
— Уитни 107
сборки точка 109
сборок кривая (линия) 153, 231, 232
свободная опёртость 368, 405

— энтальпия 425
связь 434
сдвиг простой 284
— чистый 284
сдвигающий член 84, 118, 121
седло 78
— обезьянье 78
— одностороннее 489
семейство однопараметрическое 134
серия А 150
сечение 53
сигнатура 44
Сильвестра закон инерции 44
сильная эквивалентность деформаций 202
— k-определенность 166
символ Кронекера 473
симметричная матрица 43
сингулярное отображение 93
Сирсмы прием 213
— диаграмма 218
система координат локальная 93
— со связями 75
скалярное произведение 378
скачок 115, 435
складка 142, 161, 229
складки точка 228
складок кривая (линия) 109, 112
— поверхность 231, 232
скорость постоянного растяжения 298
скрещенные желоба 78
собственное состояние 461
содержит(ся) 29
соотношения Онсагера 416
составная точка выпучивания 412
состояние 223
сосуществования кривая 434
сохранение 281
спонтанное нарушение симметрии 449
стандартная деформация 226
стандартный базис 36
статистическая сумма 440
статическое возмущение 377
стационарное действие 323
— решение 329
— течение 281
степень асимптотического разложения 331
— многочлена 53
— негрубости 6
— упорядоченности 431
стержень 368
— заделанный 371
столбец 38
странный аттрактор 306, 535
страт Максвелла 306
стратификация 191
строгие источники 164
строка 38
структурная устойчивость 12, 126, 127
— — семейств 124
— — функции 90
струя 70, 71
— достаточная 87
ступенчатая форма 40
сужение 32
суперпозиция состояний 456
существенная переменная 130, 224
схлопывание 389
сходящийся ряд 58

тейл 71
тейлоровская аппроксимация 394
тензорное произведение 459
теорема деления 189
— о неявной функции 74, 75
— об обратной функции 74
теория катастроф 12, 20, 25
— особенностей 10
термодинамический потенциал 425
течение безвихревое 286
— несжимаемое 282
— постоянно растягивающее 297
— растягивающее 296
— стационарное 281
типичность 91, 95, 133
тождественное преобразование 39
Тома программа 397
— теорема 13, 161
— — о трансверсальности 96, 99
— — об изотопии 98
Томпсона лазер 493
точка 29
— перегиба 78
— торможения 278, 283
точный дифференциал 99
трансверсальность 93, 94, 100
трансекта 500
транспонированная матрица 42
тривий 350
трикритическая точка 386, 444
тройное вырождение 150

угловая фокусировка 326
ударная волна 349
Уитни сборка 107
ультрасильная определенность 451
умножение на скаляр 32
универсальная деформация 194, 209
универсальность 143
упорядоченная пара 29
упорядоченный набор 30
управление 223
управляющая переменная 115, 223

управляющий параметр 115
упругая энергия 362
упругость 361
уравнение ван дер Ваальса 417
— — — — приведенное 418
— Гейзенберга 463
— Дуффинга 532
— Шрёдингера 459
уравнения Кармана 404—405
— реакции-диффузии 506
ус 232
усечение 72, 183
условная катастрофа 388
устойчивость 98, 182

фаза 330
фазовое пространство 326
фазовый переход второго рода 431
— — первого рода 429, 431
Ферма принцип 315
флаг 230
флюктуация 438
фокальная поверхность 270
фокус 327
форма квадратичная 42
— кубическая 47
— неопределенная 197
формальный степенной ряд 70
Фреше пространство 379
функционал 363, 364
функциональный анализ 363
функция 30, 364
— аналитическая 68
— гармоническая 287
— гладкая 67
— дважды дифференцируемая 66
— дифференцируемая 61, 62
— конечно-определенная 87
— морсовская 90
— непрерывная 58
— непрерывно дифференцируемая 66
— нескольких переменных 31
— обратная 32
— порядка k 70
— тока 281
функция-градиент 99

хаос 534
хвост 69, 71

центр величины 252
— кривизны 264
центроид 251
цепное правило 63

частная производная 64
численные инварианты особенностей 203
число Долгачёва 203
— Кокстера 203
— определенности 166, 203, 204
— сильной определенности 204
чистое вращение 284
— состояние 463
чистый сдвиг 284, 286
член, нарушающий симметрию 449
чувствительность к несовершенству 392
чудесный принцип фаэтона 399

шар открытый 58
шевеление 97

щелчок 399

э. о. 246
эвклидово пространство 32
эволюта 117
Эйри дифракционные полосы 336
— функция 336
эквивалентность асимптотических решений 330
— гладких функций вблизи нуля 84
— деформаций сильная 202, 209
— правая 84—85
— семейств 123
— универсальных семейств 140
эквивариантная катастрофа 346, 537
элемент множества 29
элементарная катастрофа 12, 21, 163
— теория катастроф 10, 21
эллиптическая омбилика 154, 156
— — вторая 156
энтальпия 425
энтропия 423
эпициклоида 317
эргодичность 344, 413

ядро 37
якобиан 74
якобиев идеал 183
j-инвариант 160
k-определённость 166, 207
— локальная 181, 207
— сильная 166, 207
k-струя 70, 71
n-ка 30
r-деформация 193
r-параметрическое семейство 133
(r, s)-устойчивость 395, 398
(r, s)-эквивалентность 396

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА 5
ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ 9
ПРЕДИСЛОВИЕ 12

1 ИЗМЕНЕНИЯ ПОСТЕПЕННЫЕ И ВНЕЗАПНЫЕ 19
1 Катастрофы 19
2 Зиманова машина катастроф 21
3 Качалки 24
4 Теория катастроф 25

2 МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ 28
1 Теоретико-множественные обозначения 29
2 Эвклидовы пространства 32
3 Линейные преобразования 35
4 Матрицы 38
5 Квадратичные формы 42
6 Кубические формы от двух переменных 46
7 Геометрия многочленов 53

3 МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ 57
1 Расстояние в эвклидовом пространстве 57
2 Производная как касательная 59
3 Горизонтали 63
4 Частные производные 64
5 Высшие производные 66
6 Ряд Тейлора 67
7 Усеченная алгебра 72
8 Теорема об обратной функции 73
9 Теорема о неявной функции 74

4 КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ 76
1 Критические точки 77
2 Лемма Морса 79
3 Функции одной переменной 82
4 Функции нескольких переменных 85
5 Лемма расщепления 87

6 Структурная устойчивость 89
7 Многообразия 92
8 Трансверсальность 93
9 Трансверсальность и устойчивость 97
10 Понятие трансверсальности для отображений 100
11 Коразмерность 101

5 СНОВА МАШИНЫ 103
1 Машина Зимана 103
2 Каноническая катастрофа сборки 107
3 Динамика машины Зимана 113
4 Качалки 117
5 Постановка общей проблемы 120

6 СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ 121
1 Эквивалентность семейств 121
2 Структурная устойчивость семейств 124
3 Физическая интерпретация структурной устойчивости 126
4 Лемма Морса и лемма расщепления для семейств 128
5 Геометрия катастроф 130

7 КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТОМА 132
1 Функции и семейства функций 133
2 Однопараметрические семейства 134
3 Нетрансверсальность и симметрия 142
4 Двухпараметрические семейства 145
5 Трех-, четырех- и пятипараметрические семейства 150
6 Высшие катастрофы 157
7 Теорема Тома 161

8 КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ 164
1 Конечная определенность и сильная конечная определенность 165
2 Пространства струй от одной переменной 167
3 Инфинитезимальные замены переменных 172
4 Более слабые условия конечной определенности 179
5 Преобразования, сдвигающие начало 182
6 Касание и трансверсальность 184
7 Коразмерность и деформации 189
8 Трансверсальность и универсальность 198
9 Сильная эквивалентность деформаций 201
10 Числа, ассоциированные с особенностями 203
11 Некоторые неравенства 205
12 Сводка результатов и вычислительных приемов 207
13 Примеры и вычисления 216
14 Необходимые замечания о терминологии 222

9 ГЕОМЕТРИЯ СЕМИ ПЕРВЫХ КАТАСТРОФ 225
1 Объекты изучения 225
2 Катастрофа складки 227
3 Катастрофа сборки 228
4 Катастрофа ласточкина хвоста 230
5 Катастрофа бабочки 232
6 Эллиптическая омбилика 235
7 Гиперболическая омбилика 240
8 Параболическая омбилика 243
9 Линейчатые поверхности 248

10 ОСТОЙЧИВОСТЬ СУДОВ 251
СТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ 251
1 Плавучесть 251
2 Равновесие 252
3 Остойчивость 252
4 Судно с вертикальными бортами 253
5 Геометрия кривой центров величины 255
6 Метацентры 256
ФОРМЫ СУДОВ 258
7 Эллиптическое судно 258
8 Прямоугольное судно 261
9 Трехмерный случай 266
10 Плавучие буровые платформы 270
11 Сравнение с общепринятым подходом 272

11 ГЕОМЕТРИЯ ЖИДКОСТИ 278
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ 278
1 Что мы описываем 278
2 Функции тока 280
3 Примеры течений 284
4 Завихренность 284
5 Методы комплексной переменной 286
УСТОЙЧИВОСТЬ И ЭКСПЕРИМЕНТ 288
6 Замены переменных 288
7 Эвристическая программа 290
8 Экспериментальное воплощение 291
РАСЧЕСЫВАНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ МОЛЕКУЛ 294
9 Неньютоново поведение 294
10 Растягивающие течения 296
ВЫРОЖДЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ 299
11 Шестивалковая мельница 299

12 Нелокальное бифуркационное множество для эллиптической омбилики 305
13 Шестивалковая мельница в растворе полимера 308
14 $2n$-валковая мельница 312

12 ОПТИКА И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ 314

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА 315
1 Каустики 315
2 Радуга 321
3 Вариационные принципы 323
4 Рассеяние 325
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА 329
5 Асимптотические решения волновых уравнений 329
6 Быстро осциллирующие интегралы 331
7 Универсальные деформации 334
8 Порядки каустик 336
ПРИЛОЖЕНИЯ 339
9 Рассеяние на кристаллической решетке 339
10 Другие каустики 344
11 Миражи 346
12 Звуковые удары 348
13 Гигантские океанские волны 355

13 УПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ 359

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ 361
1 Тела под нагрузкой 361
2 Состояния упругого равновесия 364
3 Новые моменты, связанные с бесконечномерностью 366
ЭЙЛЕРОВЫ СТЕРЖНИ 368
4 Конечно-элементный подход 368
5 Классический (1744 г.) вариационный подход 370
6 Анализ возмущений 376
7 Современный функциональный анализ 378
8 Выпучивание пружины 383
9 Предварительно выпученный стержень 389
ГЕОМЕТРИЯ ПРОЩЕЛКИВАНИЯ 391
10 Чувствительность к несовершенству 391
11 (r, s)-устойчивость 395
12 Оптимизация 399
13 Симметрия; стержни и оболочки 400
ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИН 404
14 Уравнения Кармана 404
15 Деформация двойного собственного значения 408
ДИНАМИКА 413
16 Мягкие моды 413
17 Жесткость 414

14 ТЕРМОДИНАМИКА И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ 416
УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ 417
1 Уравнение ван дер Ваальса 417
2 Ферромагнетизм 420
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ 422
3 Энтропия 422
4 Трансформации принципа максимума энтропии 424
5 Преобразование Лежандра 425
6 Явные потенциалы 427
7 Теория Ландау 430
ФЛЮКТУАЦИИ И КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ 433
8 Классические показатели 433
9 Топологические попытки починить теорию 435
10 Роль флюктуаций 436
11 Пространственные вариации 439
12 Статистические суммы 440
13 Группа перенормировок 443
14 Структурная устойчивость ренормализации 444
РОЛЬ СИММЕТРИИ 446
15 Четные функции 446
16 Формы вращающихся звезд 447
17 Нарушения симметрии 448
18 Трикритические точки 450
19 Симметрии кристаллов 452
20 Особенности спектров 453

15 ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА 454
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ 455
1 Атомы 455
2 Поле 458
3 Взаимодействие 459
4 Измерения 460
КАТАСТРОФЫ ЛАЗЕРА 462
5 Деформация гамильтониана 462
6 Уравнения движения 463
7 Приближение среднего поля 465
8 Граничные условия 467
9 Многообразие неравновесных стационарных состояний 468
ЭКСПЕРИМЕНТЫ 469
10 Лазерный переход 470
11 Оптическая бистабильность 470
12 Распределение фотоответов 472
АНАЛИТИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ 476
13 Равновесные граничные условия 477
14 Многообразие равновесия 478

ДОПОЛНЕНИЕ 2
КАТАСТРОФЫ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ 555

ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ЛИТЕРАТУРЕ 558
ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ КАТАСТРОФ 561
ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ 576
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА 579
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ 589
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 594