

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

Монография содержит систематическое изложение теории нелинейных звуковых волн и эффектов, связанных с их распространением. Рассмотрение большинства проблем проводится на основе единого методического подхода — приближения медленно меняющейся формы волны. Широко используются нелинейные уравнения типа Бюргерса. Даны точные и приближенные решения, их физический анализ. Наряду с подробным изложением основ в книге отражены последние достижения теории нелинейной акустики.

Книга рассчитана на физиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, а также на лиц, интересующихся теорией нелинейных волн в слабодиспергирующих средах. Она может быть использована в качестве учебного пособия.

Содержание

Введение	5
§ 1. Линейная акустика. Уравнения и границы применимости (9). § 2. Сведения из теории ударных волн (16).	
Глава I. Плоские волны конечной амплитуды в средах без дисперсии .	19
§ 1. Спектральный подход к нелинейным волнам (19) § 2. Простые волны в нелинейной акустике (22). §3. Графический анализ деформации профиля простой волны (26). § 4. Образование разрывов в простой волне (30). § 5. Распространение волн Римана (в рамках второго приближения) (33)	
Глава II. Плоские волны конечной амплитуды в средах без дисперсии (вязкая теплопроводящая среда) .	42
§ 1. Вывод уравнения Бюргерса (42). § 2. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения (46). § 3. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения (строгое решение) (50). § 4. Решения уравнения Бюргерса для непериодических возмущений (57).	
Глава III. Сферические и цилиндрические волны конечной амплитуды	65
§ 1. Вывод уравнений (65). § 2. Среда без диссипации (67). § 3. Диссипативная среда. Квазистационарные решения (71). § 4. Структура цилиндрической ударной волны. Автомодельный подход (73). § 5. Общая структура пространственно-симметричных волн с учетом нелинейности и диссипации (76). § 6. Особенности распространения сходящихся и расходящихся волн (78).	
Глава IV. Звуковые волны в диспергирующих средах	82
§ 1. О дисперсионных свойствах среды. Среда с релаксацией (82). § 2. Слабая и сильная дисперсия (88). § 3. Распространение конечных возмущений в релаксирующей среде (92).	
Глава V. Взаимодействие звуковых волн	101

§ 1. Коллинеарное взаимодействие плоских волн (101). § 2. Рассеяние звука на звуке (113). § 3. Стоячие волны конечной амплитуды (127). § 4. О взаимодействии звука с волнами иного вида (138)

Глава VI. Параметрические явления в звуковых волнах **145**

§ 1. О трехчастотном параметрическом взаимодействии (145). § 2. Параметрическое усиление звука в средах без дисперсии (153). § 3. Параметрическое усиление звука в искусственных системах с дисперсией (168).

Глава VII. Нелинейное самовоздействие волн. Эффекты высших порядков **177**

§ 1. Газодинамический подход к теории распространения волн конечной амплитуды (177). § 2. Расчет отраженных от разрывов волн (180). § 3. Постоянная составляющая как следствие нелинейного самовоздействия волн (186). § 4. Модифицированный нелинейно-акустический подход. Простые волны с учетом отражения (189).

Глава VIII. Акустические течения . **197**

§ 1. Вывод системы уравнений для акустических течений (197). § 2. Эккартовские течения (202). § 3. Неоднородные течения (208). § 4. Другие типы течений (217). § 5. Законы подобия и классификация акустических течений (222).

Глава IX. Распространение ограниченных звуковых пучков **224**

§ 1. Уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков (224). § 2. Параболическое уравнение. Некоторые задачи линейной теории дифракции (227). § 3. Нелинейные эффекты в звуковых пучках (232). § 4. Приближенные решения при больших и малых числах N (235). § 5. Нелинейная геометрическая акустика. Искажение однополярных возмущений (240).

Глава X. О статистических явлениях в нелинейной акустике **251**

§ 1. Случайно-модулированные звуковые волны (251). § 2. Общая теория нелинейной эволюции спектров случайных звуковых полей при отсутствии диссипации (261). § 3. Взаимодействие модулированных волн (267). § 4. О квазигармонических сигналах при наличии только фазовых флуктуации (270). § 5. О взаимодействии регулярных волн со случайными (273).

Цитированная литература **283**

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная акустика сформировалась на стыке нескольких наук; именно поэтому довольно трудно дать строгое определение как предмета, изучаемого ею, так и момента ее возникновения и выделения в относительно самостоятельную ветвь. Вместе с тем в рамках монографии введение таких разграничений принципиально необходимо; надо лишь всегда иметь в виду их условность.

Итак, будем называть нелинейной акустикой раздел физики, изучающий поведение настолько мощных звуковых и ультразвуковых возмущений (а также различных эффектов, связанных с их распространением), что описание процессов с помощью линейных дифференциальных уравнений становится непригодным.

Поскольку здесь приходится иметь дело с нелинейными уравнениями, принцип суперпозиции решений нарушается. Иными словами, волны начинают влиять друг на друга, т. е. взаимодействовать между собой. Это приводит к появлению ряда новых физических явлений, порой настолько существенных, что их нельзя считать малыми поправками к линейной теории. Так, всем знакомы неприятные ощущения, вызванные ударной волной от летящего сверхзвукового самолета. К счастью, волна затухает по нелинейному закону — тем сильнее, чем больше ее амплитуда; в противном случае звуковой импульс у поверхности земли был бы гораздо более интенсивным.

Центральное место в задачах нелинейной акустики занимают вопросы распространения механических колебаний и их взаимодействий друг с другом. Естественно поэтому считать нелинейную акустику — точно так же, как и линейную — одним из разделов механики сплошных сред [1—5].

Нужно заметить, однако, что акустика к тому же является частью радиофизической науки. Она тесно связана с проблемой передачи информации, и поэтому здесь большую роль играют вопросы спектрального анализа. В этом состоит известное отличие акустики от чистых гидродинамических задач, в которых преимущественно употребляется пространственно-временное рассмотрение.

Но даже без спектральной трактовки явлений нелинейная акустика в ее теперешнем виде [6—9] выходит далеко за рамки традиционной гидродинамики. Это связано прежде всего с бурным прогрессом, произошедшим в смежных областях — нелинейной оптике [10, 11], радиофизике [12], физике плазмы [13, 14] и т. д. Интерес к нелинейным волнам различной природы вызвал естественное стремление обобщить многочисленные результаты в целях создания общих математических методов исследования нелинейных волновых процессов [15—17]—так, как это было сделано когда-то в теории нелинейных колебаний [18, 19]. С общей точки зрения акустические среды представляют собой важный частный случай нелинейных распределенных систем, так как в них почти полностью отсутствует дисперсия. Специфика таких задач подчеркивает роль нелинейной акустики в теории нелинейных волн в целом тем более, что полученные здесь физические результаты могут быть использованы в ряде других областей физики.

Нелинейная акустика, понимаемая в широком смысле, занимается также изучением взаимодействия звуковых волн с волнами иной природы — светом, потоком электронов и т. д. Круг таких явлений очень широк. Они обусловлены наличием нелинейностей смешанного (например, акусто-оптического) типа и могут быть в равной мере отнесены как к акустике, так и к соответствующему смежному разделу физики.

Прохождение звука через нелинейную среду может вызывать в ней вторичные явления неволнового характера — кавитацию, акустические течения, химические реакции, фазовые переходы и др. Если добавить сюда нелинейные явления, связанные с генерацией звука, а также чисто микроскопические нелинейные эффекты, то станет ясно, что круг интересов нелинейной акустики чрезвычайно широк.

Изложение всех этих вопросов привело бы к созданию энциклопедического труда (который под силу только большой группе авторов) и, кроме того, явилось бы весьма неблагодарной задачей, поскольку жизнь быстро идет вперед и такое издание неминуемо устареет к моменту своего выхода в свет. Авторы ограничились выборочным, но детальным изложением лишь тех вопросов, которые составляют основу нелинейной акустики. Формирование единой точки зрения на простейшие явления может послужить, на наш взгляд, платформой для исследования более сложных проблем.

Нелинейная акустика в ее теперешнем понимании может быть отнесена к числу молодых, быстро развивающихся физических наук; наиболее полные и интересные результаты здесь получены в течение последних десяти — пятнадцати лет. Несмотря на то, что нелинейная акустика выделилась в относительно самостоятельную ветвь сравнительно недавно, ряд работ, лежащих в ее основе, был выполнен еще в прошлом веке. Эти работы, принадлежащие Пуассону [20], Стоксу [21], Эйри [22], Иришоу [23], Риману [24], посвящены теории простых волн и образуют мостик между двумя традиционными разделами гидродинамики — линейной акустикой и теорией ударных волн.

Ограниченность и несовершенство этих двух несвязанных точек зрения на один и тот же предмет изучения особенно четко проявились в 1860 г., когда Риман отыскал точное решение одномерной системы гидродинамических уравнений для идеальной среды в виде простых волн [24]. Оказалось, что профиль сколь угодно малого, но конечно-го возмущения ведет себя не так, как предсказывают уравнения линейной акустики. Области сжатия движутся быстрее областей разрежения. Происходит необратимое накопление нелинейное искажение профиля волны вплоть до появления неоднозначности, после чего решение становится физически бессмысленным.

Именно накапливающийся характер искажений приводит к тому, что стационарные волны возможны лишь как исключение при наличии конкурирующих факторов — диссипации, дисперсии или геометрической расходимости (в случае, если волны не плоские). Присутствие же неоднозначности соответствует образованию ударной волны —

разрыву в первоначально гладком профиле, и дальнейшее изучение его эволюции должно, вообще говоря, проводиться в соответствии с теорией ударных волн [1—5].

Однако в силу математических трудностей, связанных с решением нелинейных уравнений в частных производных, дальнейшее сближение двух указанных областей протекало крайне медленно. Бурный прогресс произошел недавно в связи с появлением источников мощного ультразвука и когерентных электромагнитных волн [6, 10], что вызвало всеобщий интерес к нелинейным волновым процессам и стимулировало появление большого числа теоретических и экспериментальных работ. В этот период и сформировалась, в частности, промежуточная область механических волновых процессов — нелинейная акустика. Большой вклад в ее развитие внесен советскими учеными.

В настоящее время уже имеется несколько монографий [6—8], включающих в себя обзор работ [25—46], посвященных так называемому второму приближению теории волн конечной амплитуды. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Решение Римана, как уже говорилось, есть точное решение системы уравнений Эйлера. Но гидродинамические уравнения без учета вязкости и теплопроводности — и это известно давно — плохо отражают свойства реальных сред (достаточно вспомнить парадокс Эйлера — Даламбера о равенстве нулю суммарной силы, действующей на обтекаемое тело). Точно так же римановское решение унаследовало все недостатки исходных уравнений. Оно несправедливо в области неоднозначности, и, кроме того, реальную ценность представляет не само решение, а его разложение в ряд по числу Маха. Это связано с необходимостью учета диссипативных процессов в соответствующих членах разложения.

Такой учет был сделан в работах, посвященных второму приближению, что позволило установить ряд интересных эффектов, как-то: законы нарастания и спада гармоник, зависящие от величины акустического числа Рейнольдса Re , существование области стабилизации волн и др. Неоднозначность в профиле уже не возникает благодаря наличию диссипации, которая приводит к образованию ква-

звукового фронта конечной ширины и в дальнейшем — к его рассасыванию. Все эти результаты могут быть получены на основе единой точки зрения — всестороннего анализа нелинейного уравнения Бюргерса [47], которое допускает преобразование к линейному уравнению типа диффузии и, следовательно, решается точно [48, 49].

Идею применить уравнение Бюргерса для объяснения поведения волн умеренной амплитуды можно встретить в работах [50, 51], однако впервые оно было строго получено в радиофизике при изучении волн в нелинейных линиях передачи [52]. Суть асимптотического метода работы [52] заключается в предположении медленности изменения формы профиля в сопровождающей системе координат на расстояниях порядка длины волны. Этот метод был вскоре применен к проблемам нелинейной акустики; уравнение Бюргерса удалось получить из системы гидродинамических уравнений, учитывающих вязкость и теплопроводность среды [53]. Дальнейшие успехи теории связаны с обобщением уравнения Бюргерса на цилиндрически- [54] и сферически-симметричные волны [55], на случай среды с релаксацией [56], на слабо-неоднородные задачи нелинейной дифракции ограниченных пучков [57] и, наконец, на задачи более высоких приближений [58]*).

Достаточно мощный математический аппарат, разрабатывавшийся в течение ряда лет академиком Р. В. Хохловым и учениками [52—58], все еще, к сожалению, слабо отражен в имеющейся монографической литературе и, следовательно, мало известен широкому кругу научных работников. Авторы в своей книге попытаются хотя бы частично восполнить этот пробел.

§ 1. Линейная акустика.

Уравнения и границы применимости

При изучении произвольных, в том числе и волновых, движений сплошных сред исходной системой уравнений

*) Классификация этих и других работ указанного направления проведена в обзоре [132].

являются уравнения Эйлера:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p, \quad (\text{B.1.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.1.2})$$

$$p = p(\rho), \quad (\text{B.1.3})$$

справедливые для идеальной среды. Система является полной и состоит из уравнения движения (B.1.1) в форме Эйлера, уравнения непрерывности (B.1.2) и уравнения состояния (B.1.3), которое будем записывать в виде

$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ для газов и эмпирическая константа $\gamma = 1 + \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right) \frac{\rho_0}{c^2}$ для конденсированных сред.

В тех случаях, когда требуется дать математическое описание вязкой теплопроводящей среды, функций $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$, характеризующих распределение скорости, плотности и давления, уже недостаточно. Необходимо ввести дополнительные параметры $s(\mathbf{r}, t)$ — энтропию и $T(\mathbf{r}, t)$ — температуру и описывать среду системой уравнений Навье — Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (\text{B.1.4})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.1.5})$$

$$p = p(\rho, s), \quad (\text{B.1.6})$$

$$\begin{aligned} \rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s \right] = \\ = \kappa \Delta T + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

Здесь η , ζ — сдвиговая и объемная вязкости, κ — коэффициент теплопроводности.

Для получения волновых уравнений следует предположить, что относительные возмущения исходного состояния являются малыми величинами порядка μ (где

μ — некоторый малый параметр):

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \sim \mu, \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{p - p_0}{p_0} \sim \mu. \quad (\text{B.1.8})$$

При этих условиях скорость v , с которой колеблются гидродинамические частицы, есть малая величина порядка μ по сравнению со скоростью звука.

Рассмотрим вначале среду без диссипации. Подставляя выражения $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$ в систему (B.1.1) — (B.1.3), получим

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p', \quad (\text{B.1.9})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0, \quad (\text{B.1.10})$$

$$p' = \frac{dp}{d\rho} \rho' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho'. \quad (\text{B.1.11})$$

При переходе к уравнениям (B.1.9) — (B.1.11) мы всюду пренебрегаем малыми членами $\sim \mu^n$, где $n > 1$, т. е. нелинейными членами, содержащими произведения и степени величин p' , ρ' , v . Тем самым мы ограничились рамками линейной акустики. Для сведения этой системы к одному уравнению удобно ввести скалярную функцию φ — потенциал скоростей:

$$v = \nabla \varphi. \quad (\text{B.1.12})$$

Уравнения (B.1.9) и (B.1.10) дадут при этом

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0. \quad (\text{B.1.13})$$

Исключая из (B.1.11), (B.1.13) переменные p' , ρ' , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = 0. \quad (\text{B.1.14})$$

Здесь через c_0^2 обозначено выражение $\gamma p_0 / \rho_0$. Общим решением уравнения (B.1.14) в одномерном случае является функция вида $\varphi = \Phi_1(t - x/c_0) + \Phi_2(t + x/c_0)$, описывающая произвольные возмущения Φ_1 , Φ_2 , первое из которых есть волна, распространяющаяся без изменения

своей формы в положительном направлении оси x , второе — в отрицательном направлении. Таким образом, константа c_0 имеет смысл скорости звука.

В линейной акустике выполняется принцип суперпозиции: волны, бегущие по среде, никак не влияют друг на друга. Из (В.1.12)—(В.1.14) вытекает также, что волновому уравнению удовлетворяет любая из величин v , ρ' , p' , ϕ и между ними существует простая линейная связь:

$$\frac{v}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0}. \quad (\text{В.1.15})$$

Если необходимо проследить за поведением возмущения, бегущего только в одном направлении (например, вправо), то следует рассматривать уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (\text{В.1.16})$$

получающееся из (В.1.14) выделением дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}$. Наблюдать за возмущением удобно, двигаясь вместе с волной со скоростью c_0 , т. е. переходя к сопровождающей системе координат

$$\tau = t - \frac{x}{c_0}, \quad x = x. \quad (\text{В.1.17})$$

Выполняя замену переменных, получим простое уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (\text{В.1.18})$$

решением которого является стационарная (не изменяющая своей формы при распространении) волна: $\phi = \Phi(\tau)$. В силу простоты уравнений и наглядности сопровождающих координат, их удобно использовать и в дальнейшем при рассмотрении однонаправленных волн в нелинейных, диссипативных и других средах.

Для вязкой теплопроводящей среды можно получить аналогичное уравнение. Предполагая возмущения малыми и отбрасывая нелинейные члены, преобразуем систему

(В.1.4)–(В.1.7) к виду

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (\text{В.1.19})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{В.1.20})$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s' = c_0^2 \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s', \quad (\text{В.1.21})$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \kappa \Delta T'. \quad (\text{В.1.22})$$

Положив в последнем уравнении $T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s p'$ и воспользовавшись (В.1.13), (В.1.12), выразим

$$s' = -\frac{\kappa}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \text{div } \mathbf{v}. \quad (\text{В.1.23})$$

Подставляя это выражение в формулу (В.1.21) и используя уравнение состояния идеального газа для вычисления коэффициента $\frac{1}{T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$, получим модифицированное уравнение состояния:

$$p' = c_0^2 \rho' - \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \text{div } \mathbf{v}. \quad (\text{В.1.24})$$

Как нетрудно заметить, в процессе вывода (В.1.24) были использованы соотношения, справедливые для волн в идеальной среде. Такой приближенный подход возможен только в случае, когда вязкость среды слабо влияет на распространение волны; иными словами, когда затухание волны мало на расстояниях порядка длины волны ($\sim \lambda$). Предполагая движение безвихревым ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), с помощью (В.1.24) приведем (В.1.19) к виду

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c_0^2 \nabla \rho' + b \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{В.1.25})$$

где

$$b = \zeta + \frac{4}{3} \eta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right). \quad (\text{В.1.26})$$

Из уравнений (В.1.25), (В.1.20) можно исключить, например, переменную ρ' и получить волновое уравнение для v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta v - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta v = 0. \quad (\text{В.1.27})$$

Если искать решение этого уравнения в виде бегущей плоской волны: $v = v_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}$, то между волновым вектором и частотой получим связь:

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left(1 - i \frac{b\omega}{2c_0^2 \rho_0} \right), \quad (\text{В.1.28})$$

где мнимая добавка, характеризующая затухание звука, является малой величиной. Для волны, бегущей вправо, в дисперсионном уравнении (В.1.28) следует взять знак плюс и тогда

$$v = v_0 \exp \left[- \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x \right] \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right]. \quad (\text{В.1.29})$$

Выражение (В.1.29) описывает монохроматическую волну, амплитуда которой уменьшается по закону

Величина
$$v = v_0 \exp \left(- \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x \right).$$

$$\alpha = \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} \quad (\text{В.1.30})$$

называется коэффициентом затухания звука. Поскольку все выводы получены при условии малости поглощения на длине волны (это предположение физически вполне оправдано), отношение $\frac{\alpha c_0}{\omega} = \frac{b\omega}{2c_0^2 \rho_0} \ll 1$.

Одномерное уравнение первого порядка, описывающее только правую волну (в частности, (В.1.29)), имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{b}{2c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{В.1.31})$$

Переходя к сопровождающим координатам (В.1.17), найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (\text{В.1.32})$$

Это — параболическое уравнение теплопроводности. Наличие затухания приводит к тому, что его периодическое решение (В.1.29) не является стационарной волной. Общее решение уравнения (В.1.32) при заданном начальном условии $v(0, \tau) = v_0(\tau)$ имеет вид

$$v(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x b / 2c_0^3 \rho_0}} \int \exp \left[-\frac{(\tau' - \tau)^2}{4xb / 2c_0^3 \rho_0} \right] \cdot v_0(\tau') d\tau'. \quad (\text{В.1.33})$$

Если начальное возмущение представляет собой уединенный импульс, то на больших расстояниях его поведение определяется асимптотическим выражением

$$v(x, \tau) = \frac{\exp \left[-\frac{\tau^2}{4xb / 2c_0^3 \rho_0} \right]}{\sqrt{4\pi x b / 2c_0^3 \rho_0}} \int v_0(\tau') d\tau', \quad (\text{В.1.34})$$

которое показывает, что профиль импульса является гауссовой кривой. Преимущественное поглощение высокочастотных составляющих (поскольку $\alpha \sim \omega^2$; см. (В.1.30)) спектра Фурье начального возмущения приводит к тому, что ширина кривой растет, как $\sqrt{x}$, а энергия и амплитуда уменьшаются пропорционально $1/\sqrt{x}$.

При переходе от системы уравнений (В.1.4) — (В.1.7) к линейному уравнению (В.1.31) мы пренебрегли рядом нелинейных членов. Необходимо исследовать, всегда ли допустима такая операция. Рассмотрим, например, типичный нелинейный член $\frac{v}{c_0} \frac{\partial v}{\partial t}$. Оценим порядок этого выражения по сравнению с другими членами уравнения (В.1.31).

Принимая $v = v_0 \Phi [\omega (t - (x/c_0))]$, получим

$$\frac{\frac{v}{c_0} \frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{v}{c_0} \frac{\partial v}{\partial x}} \sim \frac{v_0^2 \frac{\omega}{c_0}}{v_0 \omega} = \frac{v_0}{c_0} \equiv M \quad (\text{В.1.35})$$

и

$$\frac{\frac{v}{c_0} \frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{b}{2c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}} \sim \frac{v_0^2 \frac{\omega}{c_0}}{\frac{b v_0}{c_0^2 \rho_0} \omega^2} = \frac{v_0 c_0 \rho_0}{b \omega} \equiv \text{Re}. \quad (\text{В.1.36})$$

Таким образом, уравнение линейной акустики правомерно применять только в тех случаях, когда безразмерные числа M , $Re \ll 1$ (M называется числом Маха). Во всех задачах как линейной, так и нелинейной акустики требование $M \ll 1$ выполняется. Зато второе условие — малости акустического числа Рейнольдса $Re \ll 1$ — часто нарушается, и линейная акустика становится неприменимой.

Эти оценки являются весьма грубыми. Для более корректного определения границ применимости необходимо наряду с линейным решением знать (хотя бы приближенно) решение соответствующей нелинейной задачи.

§ 2. Сведения из теории ударных волн

В нелинейной акустике часто приходится иметь дело с такими распределениями скорости, плотности, давления и т. д., которые включают в себя резкие скачки этих параметров между двумя постоянными (или медленно изменяющимися) значениями. Абстрагируясь от конечности «толщины» этих скачков, т. е. считая их математическими разрывами, можно существенно упростить рассмотрение ряда вопросов, связанных с их распространением и взаимодействием. Дело в том, что сложные дифференциальные соотношения, описывающие гладкое изменение параметров в тонком фронте ударной волны, при таком подходе заменяются более простыми интегральными законами, связывающими значения параметров по обе стороны от разрыва.

Теория ударных волн представляет собой большой раздел механики сплошных сред. Она рассматривает существенно нелинейные явления и смыкается с акустикой только там, где нелинейность мала (слабые ударные волны).

Выберем такую систему координат, в которой рассматриваемая поверхность разрыва покоится. Потребуем, чтобы при переходе через эту поверхность скачки всех величин были связаны фундаментальными законами сохранения потока массы вещества

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (B.2.1)$$

потока импульса

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (\text{В.2.2})$$

и потока энергии

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = w_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (\text{В.2.3})$$

Здесь индексом 1 отмечены параметры, относящиеся к точке среды, находящейся непосредственно перед ударным фронтом, индексом 2 — к точке непосредственно за фронтом. Величина w представляет собой свободную энергию единицы объема. Исключая из (В.2.3) с помощью (В.2.1), (В.2.2) скорости v_1 , v_2 , получим уравнение

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1) = 0, \quad (\text{В.2.4})$$

определяющее связь между термодинамическими величинами по обе стороны поверхности разрыва. Если задано состояние среды ρ_1 , p_1 , то уравнение (В.2.4) устанавливает зависимость между ρ_2 и p_2 , т. е. определяет то состояние, в которое переходит среда после прохождения ударной волны. Эту зависимость называют ударной адиабатой или адиабатой Ранкина — Гюгонио.

Из сравнения ударной адиабаты (ГГ') и адиабаты Пуассона (изоэнтропы ПП') на рис. В.1 легко видеть, что при фиксированных p_1 , ρ_1 заданному сжатию соответствует большее давление, чем по изоэнтропе. Это означает, что при переходе через разрыв энтропия также изменяется скачком, причем в силу необратимости процесса $s_2 > s_1$.

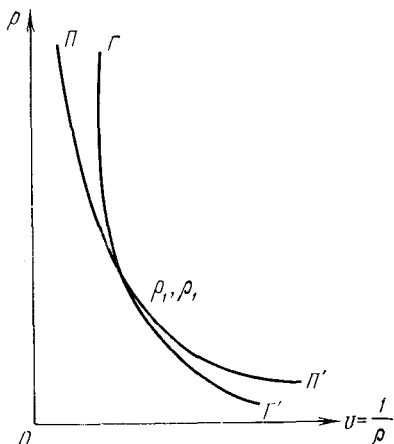


Рис. В.1. Относительное расположение ударной адиабаты (ГГ') и адиабаты Пуассона (ПП').

Вычислим изменение энтропии для ударной волны слабой интенсивности, в которой $p_2 - p_1 \sim \mu$. Для этого выражение $w_2(s_2, p_2) - w_1(s_1, p_1)$ разложим в ряд до линейных членов по скачку энтропии и до кубичных — по скачку давления:

$$w_2 - w_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial s_1} \right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2} \right) (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3} \right) (p_2 - p_1)^3. \quad (\text{B.2.5})$$

Согласно термодинамическому тождеству $dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$ имеем следующие формулы для производных:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho}. \quad (\text{B.2.6})$$

Выпишем аналогичное разложение в ряд для выражения $\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}$:

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p_1} \right]_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p_1^2} \right]_s (p_2 - p_1)^2. \quad (\text{B.2.7})$$

Подставляя (B.2.5) и (B.2.7) в уравнение для ударной адиабаты (B.2.4), получим формулу

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left[\frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial p_1^2} \right]_s (p_2 - p_1)^3, \quad (\text{B.2.8})$$

согласно которой скачок энтропии в слабой ударной волне является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Таким образом, образование в среде разрывов приводит к диссипации энергии уже в рамках модели идеальной среды. Разумеется, имеют место необратимые процессы, происходящие в тонком слое порядка длины свободного пробега молекул. Однако существенно, что эти процессы описываются одними только законами сохранения (B.2.1) — (B.2.3).

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

§ 1. Спектральный подход к нелинейным волнам

Как было показано во введении, решением обычного волнового уравнения (В.1.14) является стационарная волна, т. е. такая волна, которая может быть описана функцией вида $\Phi(t - x/c_0)$. В реальных условиях в силу ряда обстоятельств график функции Φ не остается неизменным и деформируется по мере распространения волны. Это означает, что Φ зависит не только от «бегущей» координаты $t - x/c_0$, но и еще от пройденного расстояния x .

Причиной, вызывающей деформацию профиля волны, может быть обычное затухание. Если источник звука испускает не строго монохроматическую волну, а сигнал, состоящий из многих волн различной частоты ω , то профиль может деформироваться вследствие дисперсии, т. е. из-за того, что волны с различными ω распространяются с разными фазовыми скоростями. Такой случай в этой главе мы рассматривать не будем. И наконец, важнейшим механизмом, приводящим к искажению исходного профиля, является нелинейность. Сейчас мы покажем качественно, с помощью простых рассуждений, к какого рода влиянию приводит наличие нелинейных членов в исходных уравнениях.

Будем по-прежнему исходить из системы уравнений Эйлера (В.1.1) — (В.1.3). Как и во введении, предположим, что возмущения ρ' , p' основного состояния малы и скорость v много меньше скорости звука. Однако нелинейными членами теперь пренебрегать не будем. Исключая из трех уравнений переменные ρ' , p' , можно получить

одно уравнение для v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_2(v^2) + L_3(v^3) + L_4(v^4) + \dots, \quad (\text{I.1.1})$$

где через $L_2(v^2)$ обозначено выражение, содержащее квадратичные по v члены, через $L_3(v^3)$ — кубичные и т. д. Приведем, в частности, явный вид (см., например, [115]) выражения для $L_2(v^2)$:

$$L_2(v^2) = - \left[v^2 + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \left(\int \frac{\partial v}{\partial t} dx \right)^2 \right]_{xt}. \quad (\text{I.1.2})$$

Считаем, что нелинейные члены малы по сравнению с линейными. Тогда уравнение (I.1.1) можно решать методом последовательных приближений:

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + \dots$$

Предполагая, что граничное условие имеет вид:

$$\text{при } x = 0 \quad v = v_0 \sin \omega t, \quad (\text{I.1.3})$$

получим решение уравнения первого приближения:

$$v^{(1)} = v_0 \sin \omega (t - x/c_0). \quad (\text{I.1.4})$$

Уравнение второго приближения получается подстановкой (I.1.4) в правую часть (I.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} = \\ = L_2 \left[v_0^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right] + L_3 \left[v_0^3 \sin^3 \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

Отсюда видно, что во втором приближении квадратичная нелинейность L_2 может привести к появлению волны с частотой $\omega + \omega = 2\omega$ (генерация второй гармоники) и волны $\omega - \omega = 0$, т. е. появлению постоянной составляющей (акустическое детектирование). Эти процессы будем называть двухфононными.

Кубичная нелинейность L_3 обуславливает следующие процессы: $\omega + \omega + \omega = 3\omega$ — генерация третьей гар-

моники, $\omega + \omega - \omega = \omega$ — нелинейная добавка к волне основной частоты. Эти процессы назовем трехфононными процессами. Аналогично членам высших нелинейностей мы обязаны появлением четвертой, пятой и т. д. гармоники уже во втором порядке теории возмущений.

Следующие порядки теории возмущений еще более усложняют картину, приводя к появлению новых вкладов в постоянную составляющую, основную частоту и гармоники.

Теперь предположим, что $L_3 = L_4 = \dots = 0$. Ограничимся только квадратичной нелинейностью и исследуем, к чему сводится ее влияние, если учесть все порядки теории возмущений. Во втором порядке мы имеем волны $2\omega = \omega + \omega$, $0 = \omega - \omega$. В третьем порядке получим $2\omega + \omega = 3\omega$, $2\omega - \omega = \omega$, т. е. третью гармонику и нелинейную добавку к волне основной частоты (в точности то же самое получалось в результате взаимодействия трех фононов, обусловленного кубической нелинейностью), а также процессы $2\omega + 2\omega = 4\omega$, $2\omega - 2\omega = 0$, $0 + 2\omega = 2\omega$.

Рассуждая дальше таким же образом, мы придем к выводу, что в результате действия одной лишь квадратичной нелинейности, вызывающей последовательность двухфононных процессов, также вносится вклад в волну основной частоты и появляются волны с частотами $0, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$

Для того чтобы эта и без того необычайно сложная картина стала полной, надо еще учесть «перекрестные» процессы от нелинейностей всех степеней во всех порядках теории возмущений.

Совершенно очевидно, что в такой постановке задача не может быть решена. Более того, представляется невозможным определить явный вид выражений для всех L_n .

Таким образом, подход к нелинейным акустическим волнам с точки зрения спектрального анализа удобен не всегда. Он весьма плодотворен в тех случаях, когда можно ограничить число взаимодействующих гармоник за счет выбора специальных свойств среды, в которой распространяется волна. Это часто имеет место в случае нелинейных электромагнитных волн [10].

§ 2. Простые волны в нелинейной акустике

Точное решение уравнений Эйлера, описывающее бегущие плоские волны, было найдено Риманом еще в 1860 г. При отыскании этого решения можно не предполагать нелинейность малой. Поэтому в смысле учета нелинейности Риман разрешил проблему даже более сложную, чем та, которую мы рассматривали в § 1.

Простой волной обычно называют такой волновой процесс, в котором все описывающие этот процесс параметры могут быть выражены в функции одного из них:

$$\rho = \rho(v), p = p(v). \quad (I.2.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (B.1.1), (B.1.2), получим (индексом обозначено дифференцирование по соответствующей переменной)

$$\begin{aligned} v_t + \left(v + \frac{1}{\rho} p_v \right) \cdot v_x &= 0, \\ \rho_t + (\rho v)_\rho \cdot \rho_x &= 0. \end{aligned} \quad (I.2.2)$$

Заметим, что систему (I.2.2) удастся проинтегрировать в том случае, если выражения (I.2.1) будут явно определены. Поступим следующим образом: из (I.2.2) следует, что

$$-\frac{v_t}{v_x} = v + \frac{p_v}{\rho}, \quad -\frac{\rho_t}{\rho_x} = v + \rho v_\rho. \quad (I.2.3)$$

По правилу дифференцирования неявной функции левые части выражений (I.2.3) представляют собой производную $\partial x / \partial t$, в первом случае взятую при постоянном v , во втором — при постоянном ρ . Но в силу (I.2.1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = c(v), \quad (I.2.4)$$

поскольку фиксированное значение v однозначно определяет ρ . Следовательно, равны и правые части уравнений (I.2.3):

$$v + \frac{p_v}{\rho} = v + \rho v_\rho. \quad (I.2.5)$$

Используя формулу $c^2 = \partial p / \partial \rho$, приведем (I.2.5) к виду

$$c^2 \rho_v = \rho^2 v_\rho, \quad (\text{I.2.6})$$

откуда получается уравнение

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho}, \quad (\text{I.2.7})$$

позволяющее явно определить выражения, связывающие v , ρ , p :

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}. \quad (\text{I.2.8})$$

Подставляя (I.2.8) в уравнения (I.2.3), получим решение

$$x = f(v) + [v \pm c(v)] t, \quad (\text{I.2.9})$$

где $f(v)$ — произвольная функция скорости, а выражение $c(v)$ определяется уравнением состояния и формулой (I.2.8).

В случае адиабатического уравнения состояния

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}, \quad (\text{I.2.10})$$

$$v = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \pm \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0).$$

Отсюда следует, что

$$c(v) = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} v. \quad (\text{I.2.11})$$

Приведем также формулы (I.2.4), полученные с помощью (I.2.8) для адиабатического уравнения состояния:

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 \pm \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{c_0} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 \pm \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (\text{I.2.12})$$

Все эти выражения справедливы для двух типов волн — бегущих как в положительном, так и в отрицательном направлении оси x . Рассмотрим волну, бегущую вправо. В формулах (I.2.7) — (I.2.12) ей соответствует знак плюс. Выражения (I.2.9), (I.2.11) показывают, что относительно

неподвижной системы координат возмущение среды движется со скоростью

$$U = c(v) + v = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v, \quad (I.2.13)$$

т. е. скорость перемещения точек профиля волны неодинакова. Те точки, у которых $v > 0$, движутся со

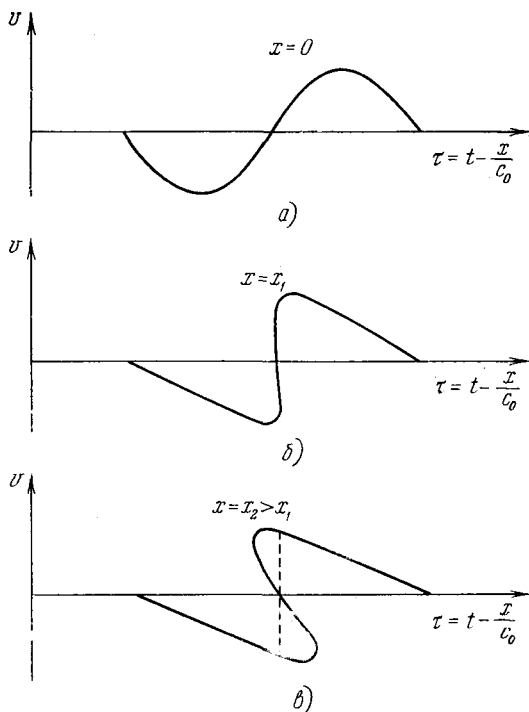


Рис. I.1. Трансформация профиля синусоидального возмущения в нелинейной среде: τ — сопровождающая координата, x — пройденное волной расстояние.

скоростями $U > c_0$ и соответствуют областям сжатия. Наоборот, в области разрежения $v < 0$ и поэтому эти области движутся со скоростью $U < c_0$.

Исходный профиль волны по мере его распространения деформируется. Эту деформацию удобнее всего наблюдать,

двигаясь вместе с волной со скоростью c_0 . Тогда те точки профиля, у которых $v = 0$, будут неподвижны относительно наблюдателя, а все прочие точки будут иметь относительную скорость $U_{\text{отн}} = \frac{\gamma + 1}{2} v$. На рис. I.1 показано, какие изменения будет претерпевать профиль

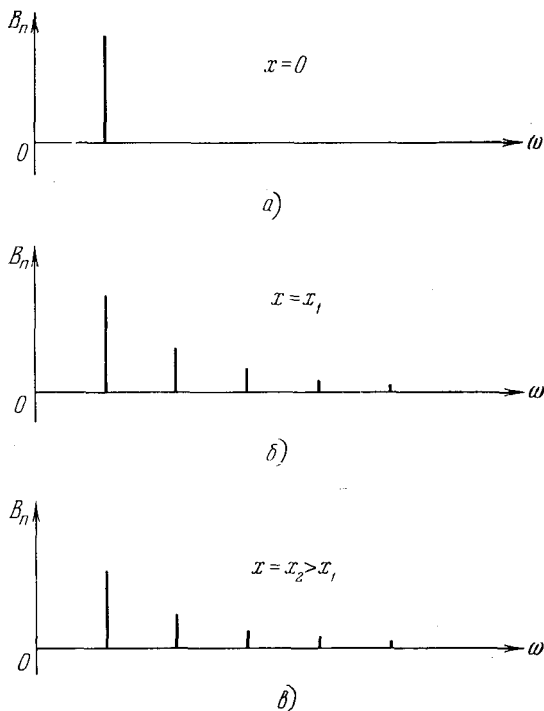


Рис. I.2. Изменение спектрального состава волны за счет нелинейного искажения профиля.

волны, заданный на входе в систему (при $x = 0$) в виде $v = v_0 \sin \omega t$.

Поскольку мы знаем, что пренебрежение нелинейными членами в уравнениях Эйлера приводит нас к линейному волновому уравнению и в конечном итоге — к стационарным волнам, следует сделать вывод, что искажение

исходного профиля вызвано учетом именно этих нелинейных членов.

На спектральном языке это означает прогрессивное накапливающееся обогащение спектра волны высшими гармониками: волна, заданная при $x = 0$ в виде $v = v_0 \sin \omega t$, при $x > 0$ будет описываться выражением вида $v = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t$. Этот процесс изображен на рис. I.2, представляющем собой спектральный аналог предыдущего рисунка. |

§ 3. Графический анализ деформации профиля простой волны

Существует несколько удобных способов описать поведение простой волны с помощью графических построений. В отличие от тех качественных соображений, которые послужили основой для рис. I.1, здесь будут использованы точные формулы.

Рассмотрим выражение

$$v = \Phi \left[x - \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \right) t \right], \quad (\text{I.3.1})$$

представляющее собой формулу (I.2.9), в которой сделан переход от произвольной функции f к обратной ей функции Φ .

Несмотря на то, что все последующие рассуждения пригодны для функции Φ любого вида, нам придется строить график для вполне определенного начального возмущения. Поэтому рассмотрим конкретный пример: при $x = 0$ $v = v_0 \sin \omega t$. Гармонический вид возмущения выбран ввиду его особой важности. Согласно (I.3.1) деформация этого профиля описывается выражением

$$v = v_0 \sin \omega \left[t - \frac{x}{c_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)} \right]. \quad (\text{I.3.2})$$

Выделяя здесь сопровождающую координату $\tau = t - x/c_0$, т. е. переходя к системе координат, движущейся

вместе с волной со скоростью c_0 , получим

$$v = v_0 \sin \omega \left(\tau + \frac{x}{c_0} \frac{\varepsilon M}{1 + \varepsilon M} \right), \quad (I.3.3)$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, $M = v/c_0$ — число Маха. Заметим, что выражение (I.3.3), неявно определяющее v , может быть явно разрешено относительно $\omega\tau$:

$$\omega\tau = \arcsin \frac{v}{v_0} - \frac{\omega}{c_0} x \frac{\varepsilon M_0 (v/v_0)}{1 + \varepsilon M_0 (v/v_0)}. \quad (I.3.4)$$

Здесь $M_0 = (v_0/c_0)$ — амплитудное число Маха. Это выражение проанализируем графически.

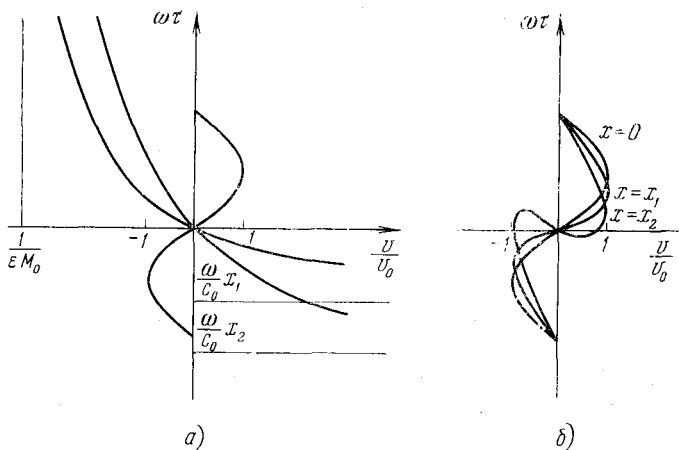


Рис. I.3. Графический анализ формулы (I.3.4): а) отдельно построены оба слагаемых формулы (I.3.4); б) выполнено графическое сложение.

На рис. I.3, а построены графики функции $\omega\tau = \arcsin (v/v_0)$, а также второго члена правой части выражения (I.3.4) для двух различных значений x_1, x_2 параметра x . Интересующие нас деформированные профили получены на рис. I.3, б с помощью простого сложения графиков начального возмущения $\omega\tau = \arcsin (v/v_0)$ и соответствующей гиперболы.

Как видно из рисунка, области сжатия и разрежения искажаются по-разному, и область разрежения оказыва-

ется деформированной сильнее. Нелинейные искажения носят накапливающийся характер, т. е. растут с увеличением пройденного волной расстояния. В случае гармонического начального возмущения они пропорциональны $x \frac{\omega}{c_0} = 2\pi \frac{x}{\lambda}$ — числу длин волн, укладывающихся на расстоянии x . Искажения тем сильнее, чем больше число Маха M_0 . Поэтому M_0 может служить мерой нелинейности акустического волнового процесса. В том случае, когда

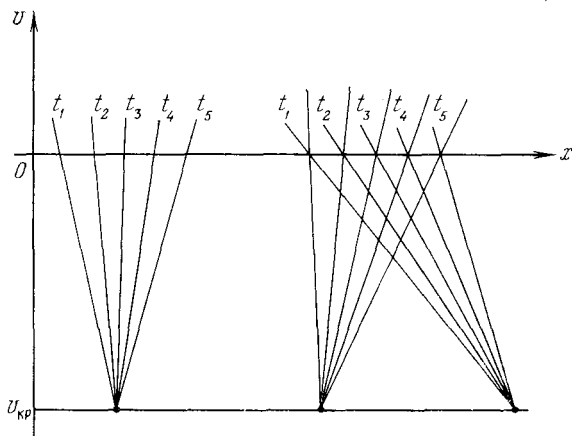


Рис. I.4. Графический анализ, основанный на факте существования критической скорости; поворот прямых с течением времени.

среда недиссипативная, число Маха является критерием подобия: изменение формы профиля при распространении волн в различных средах будет одним и тем же при условии равенства чисел ϵM_0 .

Второй способ графического анализа основан на факте существования так называемой критической скорости акустического возмущения. Поскольку скорость распространения равна $U = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}v$, при $v = v_{кр} = -\frac{2c_0}{\gamma+1}$ это возмущение распространяться не будет.

Линейный характер зависимости $U(v)$ приводит к тому, что любая прямая, представленная на рис. I.4, с течением времени будет оставаться прямой, повернутой на

некоторый угол вокруг пересечения с «линией приведения» $v = v_{кр}$. Это дает нам возможность на рис. I.5 проследить за изменением формы волны.

Выберем на исходном профиле нужное нам число точек и проведем касательные к ним до пересечения с линией приведения. Можно, вообще говоря, воспользоваться любыми прямыми, проходящими через эти точки, однако, очевидно, что касательные значительно удобнее

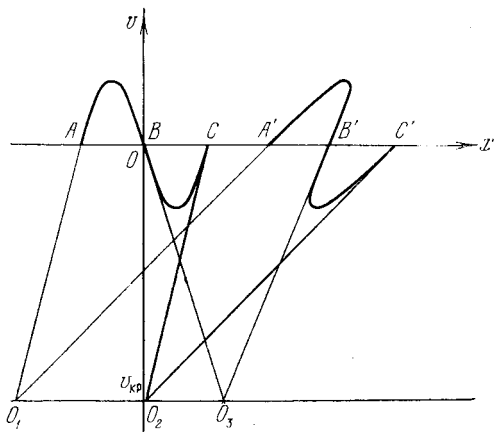


Рис. I.5. Изменение формы волны, прослеженное с помощью рис. I.4.

для построения профиля, поскольку определяют не только положение выбранных точек, но и локальную форму кривой.

На рис. I.5 изображен профиль волны для момента времени $t = 0$ и на нем выбраны точки A, B, C . Форму профиля для момента $t = t_1$ определяют новые касательные O_1A', O_3B', O_2C' , построенные с помощью точек пересечения O_1, O_2, O_3 касательных O_1A, O_3B, O_2C , положение которых однозначно определяется моментом времени t_1 : $AA_1 = BB_1 = CC_1 = c_0 t_1$.

В заключение рассмотрим метод характеристик, находящий широкое применение в гидродинамике. Будем исходить из формулы (I.3.3). Вычисляя производную $\partial \tau / \partial x$,

взятую при фиксированном значении v , получим

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_v = -\frac{1}{c_0} \frac{\varepsilon M}{1 + \varepsilon M}, \quad (\text{I.3.5})$$

или-

$$\tau = \tau_0 - \frac{x}{c_0} \frac{\varepsilon M}{1 + \varepsilon M}. \quad (\text{I.3.6})$$

Формула (I.3.6) определяет семейство прямых в плоскости x, τ , наклон которых зависит от заданной начальной

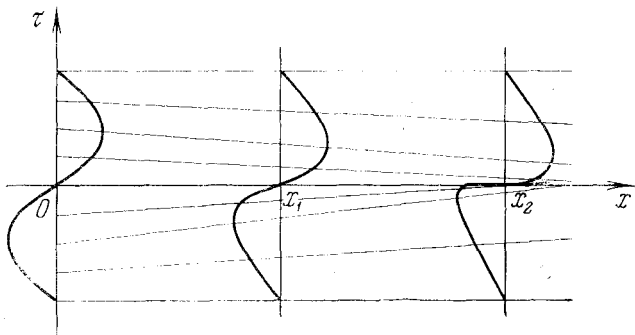


Рис. I.6. Графический анализ нелинейных искажений по методу характеристик.

скорости. Прямые эти называются характеристиками. Они представляют собой траектории движения возмущений скорости v в плоскости x, τ .

На рис. I.6 для начального профиля $v = v_0 \sin \omega t$ построено семейство характеристик, позволяющее проследить за его искажением, а также деформированные профили в точках x_1 и x_2 . Отметим, что в линейном приближении ($\varepsilon \rightarrow 0$ в выражении (I.3.6)) все характеристики являются прямыми, параллельными друг другу и оси x . Следствием этой картины является тот факт, что профиль при распространении не изменяет своей формы.

§ 4. Образование разрывов в простой волне

Необратимый процесс накопления нелинейных искажений приводит к тому, что на достаточно большом расстоянии профиль простой волны становится неоднозначной функцией τ . Это показано на рис. I.3, б, I.5 и I.6,

где неоднозначность соответствует той области, в которой пересекаются характеристики.

С математической точки зрения неоднозначные решения вполне приемлемы, так как представляют собой следствия исходных уравнений Эйлера. Однако совершенно очевидно, что эти решения неверно описывают поведение продольной волны, поскольку заданные момент времени и точка пространства должны единственным образом определять параметры v , ρ , p . Дело в том, что уравнения Эйлера не учитывают наличия вязкости и теплопроводности и поэтому плохо описывают поведение реальной среды.

Когда профиль волны сильно искажается и становится крутым, эти неучтенные процессы начинают играть значительную роль. Их влияние сводится к тому, что вместо неоднозначного «захлеста» в профиле скоростей появится разрыв (отмеченный на рис. I.1, в штриховой линией) и профиль станет однозначной функцией τ . Для того чтобы последовательно и строго описать нарастание крутизны волны, формирование ударного фронта и его структуру, надо решить систему уравнений Навье — Стокса (B.1.4) — (B.1.7). Это сделано в главе II. А пока что мы ограничимся тем, что определим положение разрыва простой волны и поведение волны после образования разрыва.

Рассмотрим эту задачу во втором приближении по числу Маха. Предварительно условимся относительно терминологии. Во всех задачах нелинейной акустики число Маха $M = v/c_0$ является малым параметром. Значения чисел Маха, достигаемые в эксперименте, порядка $10^{-4} - 10^{-2} \ll 1$, т. е. нелинейность является слабой. Поэтому мы часто будем пользоваться разложениями точных формул в ряд по числу Маха. В тех случаях, когда влиянием конечности числа Маха при решении задачи пренебрегают, мы будем говорить о решении в первом приближении.

Обращаясь к (I.3.3), мы видим, что оно соответствует линейному случаю: $v = v_0 \sin \omega \tau$. Аналогично, если сохранить линейные по числу Маха члены, мы получим второе приближение. Формула (I.3.3), например, примет вид

$$v = v_0 \sin \omega \left(\tau + \frac{x}{c_0} \varepsilon M \right). \quad (I.4.1)$$

Местонахождение фронта в профиле простой волны однозначно определяется с помощью первого условия на разрыве (В.2.1), т. е. условия сохранения плотности потока массы вещества через разрыв:

$$\rho_1 (v_1 - U_\Phi) = \rho_2 (v_2 - U_\Phi). \quad (I.4.2)$$

Здесь U_Φ — скорость распространения фронта. Условие (I.4.2) записано относительно неподвижной системы координат. Разрешая (I.4.2) относительно U_Φ , получим выражение

$$U_\Phi = \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (I.4.3)$$

которое позволяет вычислить скорость распространения скачка по заданному перепаду скоростей. Пусть в общем случае скорость в точке, находящейся непосредственно перед фронтом, равна v_1 , а скорость в точке, находящейся непосредственно за фронтом, равна v_2 . Зная v_1 , v_2 , по формулам (I.2.12) находим ρ_1 и ρ_2 во втором приближении:

$$\frac{\rho_{1,2}}{\rho_0} = 1 + \frac{v_{1,2}}{c_0} - \frac{\gamma-3}{4} \frac{v_{1,2}^2}{c_0^2}. \quad (I.4.4)$$

Подставляя (I.4.4) в (I.4.3), получим с той же точностью

$$\begin{aligned} U_\Phi &= c_0 \frac{(1 + M_2) M_2 - (1 + M_1) M_1}{\left(1 + M_2 - \frac{\gamma-3}{4} M_2^2\right) - \left(1 + M_1 - \frac{\gamma-3}{4} M_1^2\right)} = \\ &= c_0 \left(1 + \varepsilon \frac{M_1 + M_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (I.4.5)$$

Этот результат позволяет сформулировать наглядное геометрическое правило, определяющее положение фронта. Обратимся к рис. I.7.

Пусть в данный момент разрыв занимает положение $\tau = \tau_0$. Площадь, заштрихованная на графике, равна $\int_{v_1}^{v_2} [\tau(v) - \tau_0] dv$. Дифференцируя это выражение по x

и учитывая, что согласно (I.3.5) $\frac{d\tau}{dx} = -\frac{\varepsilon v}{c_0^2}$ и согласно (I.4.5)

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{c_0 - U_\Phi}{c_0^2} = -\varepsilon \frac{v_1 + v_2}{2c_0^2},$$

получим

$$\frac{d}{dx} \int_{v_1}^{v_2} [\tau - \tau_0] dv = -\frac{\varepsilon v^2}{2c_0^2} \Big|_{v_1}^{v_2} + \varepsilon \frac{v_1 + v_2}{2c_0^2} v \Big|_{v_1}^{v_2} = 0. \quad (\text{I.4.6})$$

Итак, заштрихованная площадь равна нулю при любом значении x , т. е. от обеих частей неоднозначного «захлеста» отсекаются равные площади.

Правило «равенства площадей» мы будем использовать для того, чтобы проследить за поведением волны в той области, где решение Римана становится непригодным.

§ 5. Распространение волн Римана (в рамках второго приближения)

На основе ранее описанных методов проследим за поведением некоторых конкретных волн при распространении их в нелинейной среде.

Начнем с гармонической волны: при $x = 0$ $v = v_0 \sin \omega \tau$. Как мы уже отмечали (I.4.1), точное римановское решение во втором приближении принимает вид $v = v_0 \sin \omega \left(\tau + \frac{x}{c_0} \varepsilon M \right)$. Записав это выражение в форме

$$\omega \tau = \arcsin \frac{v}{v_0} - \sigma \frac{v}{v_0}, \quad (\text{I.5.1})$$

где $\sigma = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x$, применим способ графического анализа, проиллюстрированный на рис. I.3. Как показано на

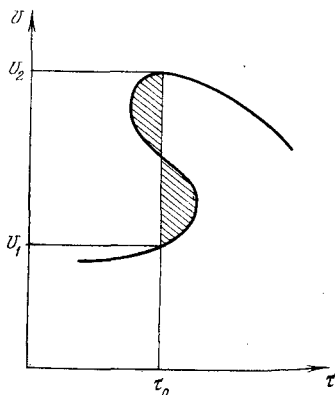


Рис. I.7. Определение положения фронта по правилу «равенства площадей».

рис. 1.8 гипербола во втором приближении вырождается в прямую, тангенс угла наклона которой увеличивается пропорционально x . Когда $\beta = \arctg \sigma$ станет равным $\pi/4$, в профиле появится неоднозначность, соответствующая образованию разрыва.

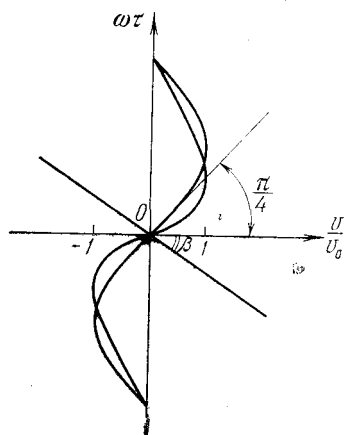


Рис. 1.8. Графический анализ выражения (I.5.1).

Поэтому условие $\sigma = 1$ определяет то расстояние, на котором волна из гладкой синусоиды трансформируется в разрывную волну почти пилообразной формы. Безразмерное расстояние $\sigma=1$ отвечает длине пути формирования разрыва x_p , равной

$$x_p = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon M}. \quad (\text{I.5.2})$$

На длине x_p укладывается $\frac{1}{2\pi \varepsilon M}$ длин волн.

Проследим за изменением спектра исходного возмущения на первом этапе, от $\sigma=0$ до $\sigma=1$. Для этого выражение (I.4.1), записанное в форме

$$\frac{v}{v_0} = \sin \left(\omega \tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right), \quad (\text{I.5.3})$$

надо разложить в ряд Фурье, т. е. представить его в виде

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\sigma) \sin n\omega\tau, \quad (\text{I.5.4})$$

где

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \left(\omega \tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right) \sin n\omega\tau d(\omega\tau). \quad (\text{I.5.5})$$

Обозначим $\xi = \omega \tau + \sigma (v/v_0)$, тогда согласно (I.5.3) $v/v_0 = \sin \xi$ и

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \xi \cdot \sin (n\xi - n\sigma \sin \xi) \cdot (1 - \sigma \cos \xi) d\xi. \quad (\text{I.5.6})$$

Это выражение сводится к вычисляемым интегралам вида

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(v\xi - n\sigma \sin \xi) d\xi = J_n(n\sigma). \quad (I.5.7)$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями для функции Бесселя, получим результат

$$B_n = \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma}. \quad (I.5.8)$$

Окончательная формула (так называемое решение Бесселя — Фубини)

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin n\omega t \quad (I.5.9)$$

позволяет проследить за процессом нарастания гармоник (см. рис. I.9), генерируемых квадратичной нелинейностью.

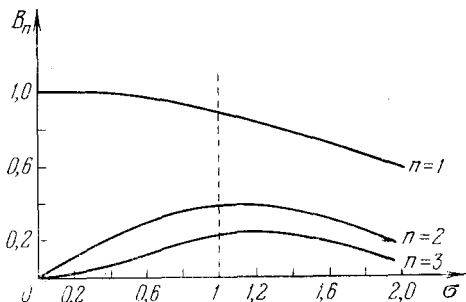


Рис. I.9. Амплитуда гармоник (n — номер гармоники) на различных расстояниях от входа системы (σ — безразмерная координата).

Это решение справедливо только в области $0 < \sigma < 1$, как и исходное выражение (I.5.3).

При $\sigma = 1$ начинается формирование разрыва. Во втором приближении фазы сжатия и разрежения искажаются одинаковым образом, поэтому в силу правила равенства площадей фронт все время проходит в точке $\omega t = 0$, двигаясь вместе с волной со скоростью c_0 .

В области $\sigma > 1$ мы имеем дело с почти пилообразной волной, которая, как видно из рис. I.10, быстро затухает

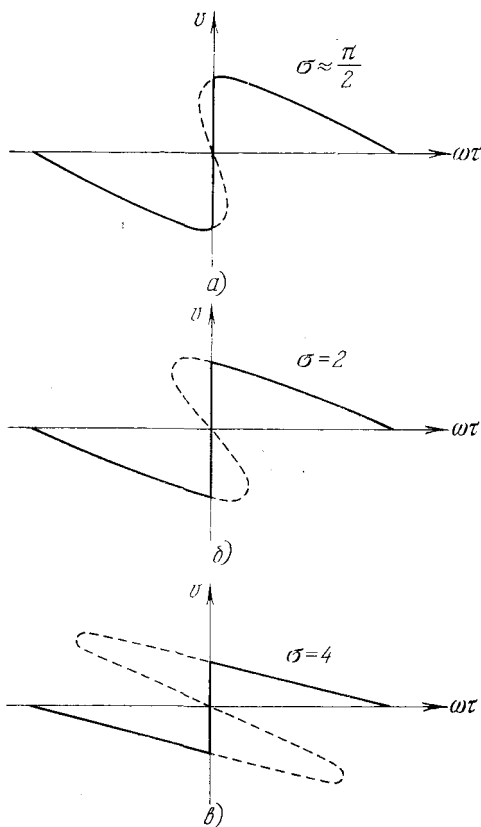


Рис. I.10. Динамика обращения синусоидальной волны в пилообразную на больших удалениях от источника возмущения.

по амплитуде. Полагая в формуле (I.5.1) $\omega\tau = 0$, получим трансцендентное уравнение

$$\arcsin \frac{v_p}{v_0} = \sigma \frac{v_p}{v_0}, \quad (\text{I.5.10})$$

позволяющее определить амплитуду разрыва $v_p(\sigma)$. С помощью рис. I.8 это уравнение можно решить графически. Как показано на рис. I.11, в области $1 < \sigma < \pi/2$ амплитуда разрыва нарастает, и затем при $\sigma > \pi/2$ начинается

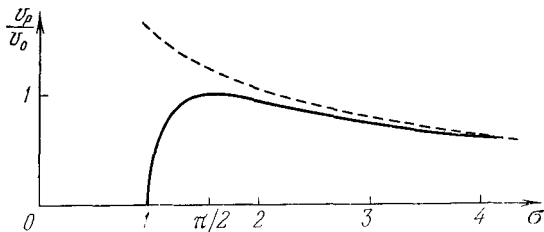


Рис. I.11. Зависимость амплитуды разрыва v_p/v_0 от безразмерной координаты σ .

ее монотонное убывание, которое удобно описать асимптотической формулой

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\pi}{1 + \sigma}. \quad (\text{I.5.11})$$

Выражение (I.5.11) следует из уравнения (I.5.10). Учитывая, что при больших σ прямая $\sigma v_p/v_0$ пересекается с функцией $\arcsin(v_p/v_0)$ на ее пологом участке, мы можем записать: $\arcsin(v_p/v_0) \approx \pi - (v_p/v_0) = \sigma(v_p/v_0)$, откуда сразу получается (I.5.11).

Разложение арксинуса в ряд в окрестности $v_p/v_0 = \pi$ до линейного по аргументу члена, по существу, означает, что мы полностью пренебрегли кривизной профиля и считаем, что он состоит из фронта и прямолинейных участков. Выражение (I.5.11), следовательно, является точной формулой, описывающей уменьшение разрыва пилообразной волны. Его удобно использовать как приближенное при таких σ , когда в исходной гармонической волне разрыв сформируется полностью, т. е. при $\sigma > \pi/2$.

В этой области профиль может быть описан выражением

$$v = \begin{cases} \frac{v_p}{\pi}(-\omega\tau - \pi), & -\pi < \omega\tau < 0, \\ \frac{v_p}{\pi}(-\omega\tau + \pi), & 0 < \omega\tau < \pi, \end{cases} \quad (\text{I.5.12})$$

периодически продолженным по $\omega\tau$ (рис. I.12). Используя формулу (I.5.11), получим

$$v = \begin{cases} \frac{v_0}{1+\sigma}(-\omega\tau - \pi), & -\pi < \omega\tau < 0, \\ \frac{v_0}{1+\sigma}(-\omega\tau + \pi), & 0 < \omega\tau < \pi. \end{cases} \quad (\text{I.5.13})$$

После разложения в ряд Фурье выражение (I.5.13) примет вид

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1+\sigma)} \sin n\omega\tau. \quad (\text{I.5.14})$$

Совокупность решений (I.5.9), (I.5.14) дает представление об изменении спектрального состава волны почти

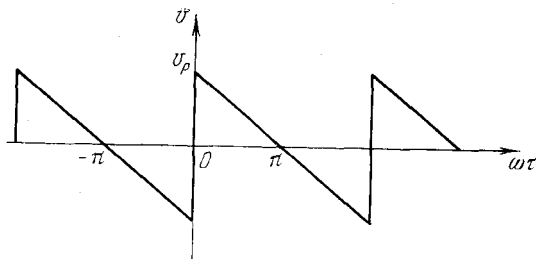


Рис. I.12. Периодическая волна пилообразного профиля в сопровождающей системе координат. Построение проведено в соответствии с формулой (I.5.12).

во всей области $0 < \sigma < \infty$, за исключением небольшого участка $1 < \sigma < \pi/2$, где аналитическая форма описания менее удобна *).

Теперь рассмотрим, как изменяется средняя по времени энергия единицы объема среды, связанная с наличием звуковой волны:

$$\overline{E} = \rho_0 \overline{v^2}. \quad (\text{I.5.15})$$

*) Выражение (I.5.9) для амплитуд гармоник удастся обобщить на область $\sigma > 1$, используя неполные функции Бесселя [133].

Для того чтобы вычислить $\overline{v^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(\omega\tau) d(\omega\tau)$,

надо воспользоваться найденными решениями либо в форме (I.5.3), (I.5.13), либо разложениями в спектр (I.5.9), (I.5.14). Мы используем оба этих приема. При вычислении энергии на первом этапе распространения волны, при $0 < \sigma < 1$, удобнее взять выражение (I.5.3). Тогда

$$\overline{v^2} = \frac{v_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \xi (1 - \sigma \cos \xi) d\xi = \frac{v_0^2}{2}. \quad (\text{I.5.16})$$

Таким образом, до образования разрыва энергия при распространении не изменяется и равна своему начальному значению. Несмотря на возникновение гармоник, энергия в простой волне остается такой же, как и энергия монохроматической волны. Это означает, что происходит процесс перекачки энергии из основной частоты в высшие гармоники (см. рис. I.9), причем так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{n\omega} = \rho_0 \overline{v_\omega^2} + \rho_0 \overline{v_{2\omega}^2} + \rho_0 \overline{v_{3\omega}^2} + \dots = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{I.5.17})$$

Соотношение (I.5.17) выражает закон сохранения энергии. Он, естественно, в нашем случае имеет место, поскольку мы исходили из системы уравнений Эйлера для идеальной среды.

На втором этапе, там, где волна становится разрывной, воспользуемся решением в форме (I.5.14). Вычисляя $\overline{v^2}$, получим

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= \frac{4v_0^2}{(1+\sigma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \overline{\sin n\omega\tau \sin m\omega\tau} = \\ &= \frac{2v_0^2}{(1+\sigma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \frac{v_0^2}{(1+\sigma)^2}, \quad (\text{I.5.18}) \end{aligned}$$

или

$$\bar{E} = \frac{E_0}{(1+\sigma)^2}. \quad (\text{I.5.19})$$

Уменьшение энергии волны на этапе $\sigma > 1$, описываемое формулой (I.5.19), связано с возникновением ударного фронта. Отметим, что принятие нами условия на разрыве (I.4.2), дополняющего уравнения Эйлера, по существу, означает учет неидеальности среды.

Аналогичным образом можно исследовать, как изменяется средний импульс единицы объема:

$$\bar{j} = \overline{(\rho_0 + \rho')v} = \rho_0 \bar{v} + \frac{\rho_0}{c_0} \bar{v}^2. \quad (\text{I.5.20})$$

Величину $2\pi\bar{v} = \int_0^{2\pi} v(\omega\tau) d(\omega\tau)$ удобно интерпретировать как площадь, заключенную между кривой $v(\omega\tau)$

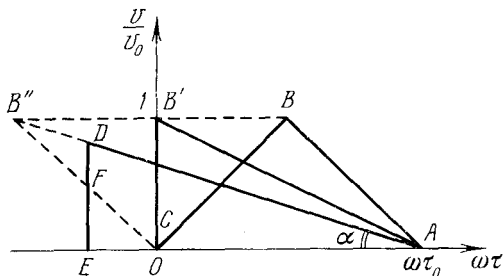


Рис. I.13. Изменение формы одиночного треугольного импульса.

и осью $\omega\tau$. Поскольку во втором приближении положительный и отрицательный полупериоды волны искажаются одинаковым образом, а фронт проводится по равенству площадей, $\bar{v} = 0$ и в области $0 < \sigma < 1$ (см. рис. I.8), и в области $\sigma > 1$ (см. рис. I.10), $\bar{j} = (\bar{E}/c_0)$.

Все сказанное в этом параграфе относилось к поведению периодического сигнала в нелинейной среде, гармонического на входе в систему. В заключение рассмотрим процесс распространения одиночного возмущения.

Пусть профиль начального возмущения имеет вид равнобедренного треугольника ABC , изображенного на рис. I.13. Разрыв в нем сформируется в точке $\sigma = \omega\tau_0/2$. Легко видеть, что в области $0 < \sigma < \omega\tau_0/2$ площадь профиля не изменяется и равна $\omega\tau_0/2$. Когда импульс

пройдет путь $\sigma = \omega\tau_0/2$, его передний фронт CB займет положение CB' , а затем при некотором $\sigma > \omega\tau_0/2$ — положение CB'' .

Как мы уже знаем, вместо CB'' реализуется разрыв ED , проведенный так, чтобы площади треугольников CEF и FDB'' были равны. Но это означает, что равны и площади треугольников ABC и ADE , т. е. в низшем приближении имеет место закон сохранения импульса. Образование разрыва, следовательно, приводит к расплыванию возмущения и «размазыванию» его импульса по всей среде.

Из условия равенства площадей ABC и ADE : $\frac{\omega\tau_0}{2} = \frac{1}{2} AE^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{AE^2}{\sigma + \omega\tau_0/2}$ можно установить формулы, описывающие расплывание при $\sigma > \omega\tau_0/2$:

$$AE = \omega\tau_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{\omega\tau_0}} \quad (1.5.21)$$

и уменьшение амплитуды разрыва $ED = AE \operatorname{tg} \alpha$:

$$ED = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{\omega\tau_0}}} . \quad (1.5.22)$$

Наконец, найдем выражение для энергии возмущения, приходящейся на единицу площади его фронта:

$$E = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dx = \frac{\rho_0 c_0 v_0^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 d(\omega\tau). \quad (1.5.23)$$

Поскольку $(v/v_0)^2 \neq 0$ только на отрезке AE , интеграл берется в пределах от $-\omega\tau_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \sigma/\omega\tau_0} + \omega\tau_0$ до $\omega\tau_0$. После несложных выкладок придем к выражению

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{\omega\tau_0}}} , \quad (1.5.24)$$

которое показывает, что закон убывания энергии более медленный, чем для периодической волны (см. (1.5.19)), и существенно зависит от длительности начального возмущения.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ (ВЯЗКАЯ ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ СРЕДА)

§ 1. Вывод уравнения Бюргерса

Теория распространения волн конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде является более сложной по сравнению с теорией распространения волн в идеальной среде. При наличии диссипации энергии уравнение состояния среды, вообще говоря, нельзя считать адиабатическим. Вместе с тем известно, что даже при переходе через ударный фронт волны энтропия претерпевает скачок третьего порядка малости (В.2.8). Это дает возможность линеаризовать уравнение переноса тепла (В.1.7) и привести его к виду (В.1.22). Иными словами, мы считаем, что диссипативные процессы линейны или, что более строго, диссипативные коэффициенты ζ , η , κ являются (наряду с числом Маха) величинами первого порядка малости ($\sim \mu$). В этой главе рассматриваются вопросы второго приближения. Поэтому при упрощении исходной системы уравнений следует сохранять члены до второго порядка малости ($\sim \mu^2$) включительно.

Приближенное уравнение состояния примет вид

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s'. \quad (\text{II.1.1})$$

Используя несложные преобразования, которые во введении привели к формуле (В.1.24), найдем

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s \rho'^2 - \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \text{div } v. \quad (\text{II.1.2})$$

Первые два члена в правой части этого уравнения описывают адиабатическое изменение давления и могут быть вычислены при помощи уравнения изоэнтропы:

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s = \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2\rho_0}. \quad (\text{II.1.3})$$

Третий член учитывает неадиабатичность процесса. Поскольку он содержит только коэффициент κ , изменение энтропии будет происходить лишь за счет теплопроводности.

Предполагая движение потенциальным, после подстановки выражения (II.1.2) в уравнение движения (B.1.4) приведем последнее к виду

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right] = - c_0^2 \nabla \rho' - \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2\rho_0} \nabla \rho'^2 + b \Delta v. \quad (\text{II.1.4})$$

Совокупность (II.1.4) и (B.1.2) образует полную систему уравнений для решения проблемы во втором приближении. Эта система записана в удобной форме, однако содержит лишние члены, порядок малости которых выше чем μ^2 . Отбрасывая их и переходя к одномерной записи (так как мы интересуемся плоскими волнами), получим

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} = - c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{\rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (\text{II.1.5})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.1.6})$$

Поскольку в этой главе рассматриваются волны, бегущие в положительном направлении оси x , следует перейти к сопровождающей системе координат (B.1.17). При этом необходимо учесть, что искажения профиля волны, вызванные как диссипацией, так и нелинейностью, малы на расстояниях порядка длины волны и процесс должен описываться функцией вида $\Phi(\mu x, \tau)$. Это разумное предположение вполне согласуется с анализом распространения волн в идеальной нелинейной среде (см. гл. I) и в неидеальной линейной среде (см. введение, § 1).

В соответствии с заменой (В.1.17) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{II.1.7})$$

Поскольку координата x — медленная, мы считаем, что каждая производная $\partial/\partial x$ увеличивает порядок малости на единицу (если производная $\partial v/\partial \tau \sim \mu$ — малая величина первого порядка малости, то $\partial v/\partial x$ является величиной второго порядка малости ($\sim \mu^2$)). Выполняя замену переменных, находим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial v}{\partial \tau} = \\ = \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{c_0}{\rho_0} \left(1 + (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.8})$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{1}{c_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.1.9})$$

Эта система может быть сведена к одному уравнению. Для этого достаточно уравнение (II.1.9) умножить на c_0 , сложить с уравнением (II.1.8) и заменить во всех членах второго порядка малости ρ'/ρ_0 на v/c_0 . Члены первого порядка малости при этом взаимно уничтожаются. Таким образом, приходим к уравнению, называемому уравнением Бюргерса [47, 52]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (\text{II.1.10})$$

Обратная подстановка $v/c_0 = \rho'/\rho_0$ приводит к тому же уравнению для приращения плотности ρ' .

Уравнение Бюргерса (II.1.10) позволяет детально исследовать различные эффекты, возникающие при распространении волн в диссипативных средах с квадратичной нелинейностью. Теория второго приближения, которой посвящены работы [25—46], с помощью уравнения Бюргерса может быть изложена в рамках единой точки зрения.

Предлагаемый подход свободен от ограничений на величину акустического числа Рейнольдса. Упрощая исходную систему гидродинамических уравнений, мы сохраняем как нелинейные, так и диссипативные члены,

соотношение между которыми в рамках получающегося одного укороченного уравнения может быть произвольным. Как было показано во введении (В.1.36), их относительное влияние на процесс искажения волны можно охарактеризовать числом Re , которое не отличается от общепринятого гидродинамического числа $R = vd/\nu$, где v — скорость потока, d — характерный размер и $\nu = \eta/\rho_0$ — кинематическая вязкость; только в качестве скорости берется амплитуда скорости смещения, в качестве характерного размера — длина волны и, помимо сдвиговой вязкости, учитываются теплопроводность и объемная вязкость, т. е. берется диссипативный коэффициент b .

Итак, акустическое число Рейнольдса имеет вид

$$Re = \frac{v_0 \lambda}{2\pi b / \rho_0} = \frac{p'_0}{b \omega} = \frac{v_0 c_0 \rho_0}{b \omega}. \quad (\text{II.1.11})$$

При значениях $Re \ll 1$ «вязкие» члены преобладают над нелинейными: большая диссипация приводит к поглощению волны раньше, чем успеют накопиться нелинейные эффекты. Напротив, при значениях $Re \gg 1$ преобладают нелинейные эффекты и распространение волн по своему характеру близко к распространению волн в идеальной среде.

Важно отметить, что в диссипативной среде не существует связей типа $v(\rho)$ или $\rho(v)$, характерных для простой волны.

В работе [53] были предложены приближенные «самосогласованные выражения», дополняющие разложения римановских решений (I.4.4) членами второго порядка малости, учитывающими наличие диссипации:

$$\frac{v}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \frac{b}{2c_0^2 \rho_0^2} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau}, \quad (\text{II.1.12})$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v}{c_0} - \frac{\gamma - 3}{4} \left(\frac{v}{c_0} \right)^2 - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (\text{II.1.13})$$

Как показывают формулы (II.1.12), (II.1.13), связь между параметрами определяется не только их мгновенными значениями, но и первыми производными, т. е. является нелокальной. Если профиль достаточно пологий,

то $\partial/\partial\tau$ мала и связь параметров почти такая же, как в простой волне. Напротив, при наличии крутых скачков $\partial/\partial\tau$ велика, диссипация сказывается сильно и волна существенно отличается от простой.

Таким образом, выражения (II.1.12), (II.1.13) представляют собой обобщение понятия простой волны на диссипативные среды (иногда говорят о «квазипростых» волнах). Легко убедиться, что при подстановке любого из этих выражений в любое из уравнений (II.1.8), (II.1.9) получается уравнение Бюргерса.

§ 2. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения

Уравнение (II.1.10) замечательно тем, что оно может быть линеаризовано и приведено к виду обычного уравнения теплопроводности. Тем самым имеется возможность проследить за распространением начального возмущения произвольной формы. Однако анализ общего решения уравнения Бюргерса сравнительно сложен. Этим мы займемся в следующем параграфе, а здесь рассмотрим, как ведет себя возмущение, заданное на входе в виде гармонической волны, при различных значениях числа Рейнольдса. Будем пользоваться приближенными методами.

При малых $Re \ll 1$, когда влияние нелинейного члена мало, уравнение Бюргерса можно решать методом последовательных приближений. Решение уравнения первого приближения, учитывающее затухание основной частоты, нами уже рассматривалось (В.1.29). Уравнение второго приближения имеет вид

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \tau^2} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau}, \quad (\text{II.2.1})$$

где $v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\omega v_0^2}{2} e^{-2\alpha x} \sin 2\omega\tau$. Ищем решение (II.2.1) в виде $v^{(2)} = A(x) \sin 2\omega\tau$. Для амплитуды $A(x)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A' + 4\alpha A = \frac{\varepsilon \omega v_0^2}{2c_0^2} e^{-2\alpha x}. \quad (\text{II.2.2})$$

Граничное условие $A(x=0) = 0$ соответствует отсутствию второй гармоники на входе в систему. Решая (II.2.2), найдем

$$v^{(2)} = \frac{\varepsilon v_0 \text{Re}}{2} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) \sin 2\omega\tau. \quad (\text{II.2.3})$$

На рис. II.4 изображена кривая, иллюстрирующая ход отношения A_2/A_{10} с координатой x . Амплитуда второй гармоники вначале нарастает по линейному закону вследствие нелинейной перекачки энергии из волны основной

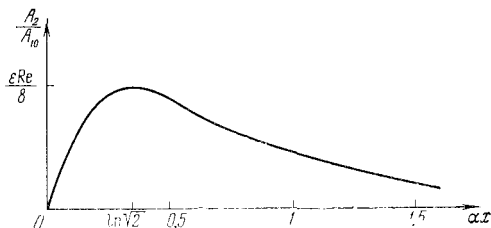


Рис. II.4. Динамика генерации второй гармоники при малых числах Рейнольдса.

частоты, а затем начинает убывать за счет преобладающего влияния диссипативных процессов.

Случай больших чисел Рейнольдса ($\text{Re} \gg 1$) представляется наиболее интересным. Однако здесь пользоваться методом возмущений нельзя, поскольку малый параметр — диссипативный коэффициент b — стоит при старшей производной. Здесь плодотворным оказывается путь поэтапного рассмотрения процесса, который будет строго обоснован в следующем параграфе.

На первом этапе, когда поглощение мало, можно считать волну слабо отличающейся от простой и пренебречь правой частью уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{II.2.4})$$

Составляя уравнение характеристик, получим следующие интегралы:

$$v = C_1, \quad \tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} vx = C_2. \quad (\text{II.2.5})$$

Определяя связь между константами C_1, C_2 по граничному условию $v(x=0) = v_0 \sin \omega \tau$, найдем искомое выражение

$$v = v_0 \sin \left(\omega \tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right), \quad (\text{II.2.6})$$

которое уже рассматривалось в гл. I, § 5.

На втором этапе, когда решение становится разрывным, его получают с помощью «сшивания» формул, описывающих структуру фронта и пологих участков профиля. Фронт стационарной ударной волны можно определить как решение «стационарной» (не содержащей производных по x) части уравнения (II.1.10). Последнее принимает вид

$$-\varepsilon v \frac{dv}{d\tau} = \frac{b}{2c_0 \rho_0} \frac{d^2 v}{d\tau^2}. \quad (\text{II.2.7})$$

Во втором приближении фронт звуковой волны проводится по равенству площадей и движется со скоростью c_0 . Согласно (I.4.5) в этом случае $M_1 = -M_2$, т. е. для уравнения (II.2.7) надо поставить симметричные краевые условия на бесконечности:

$$v(\omega \tau = +\infty) = v_p, \quad v(\omega \tau = -\infty) = -v_p. \quad (\text{II.2.8})$$

Соответствующее решение уравнения (II.2.7):

$$\frac{v}{v_p} = \text{th}(\varepsilon \text{Re} \cdot \omega \tau) \quad (\text{II.2.9})$$

«расшифровывает» структуру того самого скачка, который в гл. I трактовался просто как математический разрыв. На рис. II.2* сплошными линиями изображено решение (II.2.9) и прямая $v/v_p = -\omega \tau$. Складывая эти две функции (штриховая линия на рис. II.2), можно получить кривую, которая очень похожа на профиль одного периода искаженной волны. Для того чтобы еще больше усовершенствовать эту качественную модель истинного решения уравнения Бюргерса, учтем «затухание» амплитуды разрыва v_p согласно формуле (I.5.11):

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1+\sigma} \left[-\omega \tau + \pi \text{th} \left(\frac{\omega \tau}{\delta} \right) \right], \quad -\pi \leq \omega \tau \leq \pi, \quad (\text{II.2.10})$$

где $\delta = \frac{1+\sigma}{\pi \varepsilon \operatorname{Re}}$ — безразмерная ширина фронта ударной волны. Замечательно, что сконструированное выражение

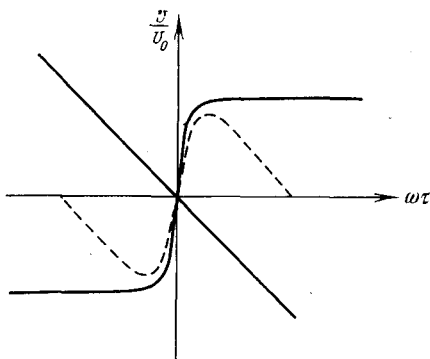


Рис. 11.2. Результирующий профиль одного периода искаженной синусоиды (штриховая кривая) как результат сшивания стационарного решения (11.2.9), определяющего структуру фронта, с пологими участками профиля пилообразной волны.

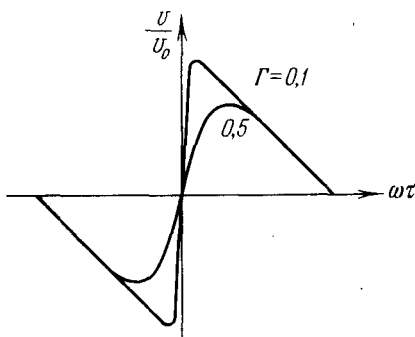


Рис. 11.3. Волновые профили, описываемые точным решением (11.2.10) при различных значениях $\Gamma = (2\varepsilon \operatorname{Re})^{-1}$.

(11.2.10) есть точное решение уравнения (11.1.10), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

На рис. 11.3 изображены два профиля при различных Re , построенные с помощью (11.2.10). В силу простоты этой

формулы ее легко разложить в ряд Фурье:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega\tau}{\operatorname{sh} \frac{n(1+\sigma)}{2\varepsilon \operatorname{Re}}}. \quad (\text{II.2.11})$$

Выражение (II.2.11), известное как решение Фея [60], позволяет проследить поведение гармоник в области стабилизации волны, т. е. там, где нелинейное «укручение» профиля и его диссипативное сглаживание относительно уравнивают друг друга. Решение Фея описывает медленное затухание гармоник, амплитуда которых при $\sigma \gg 1$ уменьшается приблизительно по закону $e^{-n\alpha x}$ (n — номер гармоники), а не $e^{-n^2\alpha x}$, как это следует из линейной теории, что связано с «подкачкой» энергии от низших гармоник к высшим.

Решение (II.2.10) (а следовательно, и (II.2.11)) теряет смысл, когда толщина δ ударной волны занимает фазовый интервал $\sim \pi$. Эта формула описывает процесс именно при малом δ (большие Re). В предельном случае $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ выражение (II.2.10) приводит к пилообразной волне (I.5.13), подробно рассмотренной в гл. I.

На третьем этапе, когда энергия волны уменьшилась настолько, что стали преобладать диссипативные эффекты, волна снова превращается в синусоидальную — главным становится первый член ряда (II.2.11):

$$\cancel{v} \sim \frac{2b\omega}{\varepsilon\gamma_0 c_0} e^{-\alpha x} \sin \omega\tau. \quad (\text{II.2.12})$$

Интересно, что амплитуда этой волны от v_0 не зависит.

§ 3. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения (строгое решение) [53] *)

Найдем периодическое по τ при любом значении x решение уравнения (II.1.10) с граничным условием

$$\text{при } x = 0 \quad v = v_0 \sin \omega\tau. \quad (\text{II.3.1})$$

*) См. также [134].

Посредством замены

$$v = \frac{b}{\varepsilon c_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln U) \quad (\text{II.3.2})$$

уравнение (II.1.10) и граничное условие (II.3.1) приводят-ся соответственно к следующему виду:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (\text{II.3.3})$$

При $x = 0$

$$U = \exp \left[\frac{\varepsilon c_0 \rho_0}{b} \int v(0, \tau) d\tau \right] = \exp(-\varepsilon \text{Re} \cos \omega \tau). \quad (\text{II.3.4})$$

Периодическое по $\omega \tau$ решение уравнения (II.3.3) с гранич-ным условием (II.3.4) может быть представлено в двух формах: в виде интеграла и в виде ряда Фурье, т. е.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{4\pi x b / 2c_0^3 \rho_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\varepsilon \text{Re} \cos \omega \tau') \exp \left[-\frac{(\tau' - \tau)^2}{4x b / 2c_0^3 \rho_0} \right] d\tau' = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (-1)^n I_n(\varepsilon \text{Re}) \exp(-\omega^2 n^2 b x / 2c_0^3 \rho_0) \cos n\omega \tau, \end{aligned} \quad (\text{II.3.5})$$

$\beta_0 = 1$, $\beta_n = 2$ для $n > 0$.

Второе представление решения в точности совпадает с решением Мендоусса [50], а при $e^{-\alpha x} \ll 1$ переходит в ре-шение Фея [60]. Однако представление в виде ряда имеет практическую ценность лишь при $x \gg 1/\alpha$. Действитель-но, если принять $x > x_0$, где $x_0 = 2/\alpha$, то можно ограни-читься двумя первыми членами ряда (II.3.5) и получить для скорости $v(x, \tau)$ приближенное выражение

$$v = \frac{2v_0}{\varepsilon \text{Re}} e^{-\alpha x} \sin \omega \tau. \quad (\text{II.3.6})$$

Экспоненциально-затухающая волна (II.3.6) удовлетво-рительно описывает процесс лишь при небольших числах Рейнольдса. Исключая из рассмотрения область $x < x_0$, мы, по существу, исключаем из рассмотрения процесс формирования ударной волны. При малых числах Рей-нольдса граница $x = x_0$, хоть и находится вблизи источ-ника гармонических пульсаций (II.3.1), но соотношение

между нелинейными и диссипативными членами уравнения Бюргерса таково, что проявление нелинейных эффектов в области $0 < x < x_0$ несущественно. При больших числах Рейнольдса граница $x = x_0$ отодвигается далеко вправо от входа системы. Действительно, расстояние x_0 , измеренное числом длин волн, укладывающихся в интервале $[0, x_0]$, равно

$$kx_0 = 4 \frac{\text{Re}}{M}, \quad (\text{II.3.7})$$

где $k = \omega/c_0$ — волновое число.

Из соотношений (II.3.6) и (II.3.7) следует весьма существенный вывод, характерный для распространения

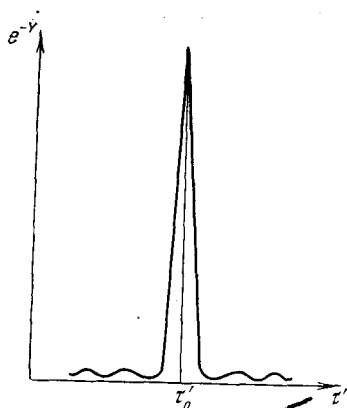


Рис. II.4. Подынтегральное выражение формулы (II.3.5) как функция τ' на таких расстояниях от источника, когда разрыв в волновом профиле еще не наступил.

волн конечной амплитуды с образованием разрывов. На расстояниях (II.3.7) амплитуда затухающей волны (II.3.6) не зависит от амплитуды колебаний v_0 источника звука, поскольку число Рейнольдса само пропорционально v_0 (см. (II.1.11)). Иначе говоря, нелинейные искажения в среде ограничивают сверху максимальные интенсивности, которые могут быть переданы на заданное расстояние. Когда расстояние образования разрыва меньше, чем расстояние между источником и приемником звука, поглощение пилообразной волны столь велико, что дальнейшее повышение излучаемой звуковой энергии не повышает

звуковую энергию в точке приема. К этому следует добавить, что и само расстояние kx_0 (II.3.7) не зависит от амплитуды на входе системы. При фиксированной частоте это расстояние, как следует из формулы (II.3.7), определяется исключительно значением скорости звука c_0 , плотности ρ_0 и диссипативным коэффициентом b .

Обратимся теперь к интегральной форме решения (II.3.5). Предыдущее исследование, во-первых, практически исключало область $0 < x < x_0$ и, во-вторых, удовлетворительно описывало процесс при значениях числа Рейнольдса $Re \ll 1$. Положим $Re \gg 1$ и ограничимся пока что значениями $x < x_0/2$. Интеграл (II.3.5) может быть взят методом перевала. Действительно, подынтегральное выражение как функция τ' имеет вид, представленный на рис. II.4. Главной частью интеграла является интеграл по малому участку вблизи экстремальной точки τ'_0 , в которой должно выполняться соотношение

$$\frac{d}{d\tau'} [Y] = 0, \quad (\text{II.3.8})$$

где

$$Y = \varepsilon Re \cos \omega \tau' + \frac{(\tau' - \tau)^2 c_0^3 v_0}{2bx}. \quad (\text{II.3.9})$$

Из условия (II.3.8) следует соотношение

$$v_0 \sin \omega \tau'_0 = c_0^2 \frac{\tau'_0 - \tau}{\varepsilon x}. \quad (\text{II.3.10})$$

Подставляя разложение Y в ряд Тейлора в точке τ'_0 под знак интеграла (II.3.5), легко найдем следующее значение U :

$$U = \frac{e^{-Y_0}}{\sqrt{1 - \sigma \cos \omega \tau'_0}}. \quad (\text{II.3.11})$$

Здесь $\sigma = \varepsilon \omega x v_0 / c_0^2$, а Y_0 определяется соотношением (II.3.9), в котором τ' следует заменить значением τ'_0 . Согласно формуле (II.3.2) искомая функция $v(x, \tau)$ по данному значению x и (II.3.11) может быть представлена в виде

$$v = c_0^2 \frac{\tau'_0 - \tau}{\varepsilon x}. \quad (\text{II.3.12})$$

Выражая τ как функцию v и x из соотношений (II.3.12) (II.3.10), найдем

$$\omega \tau = \arcsin \Phi - \sigma \Phi, \quad (\text{II.3.13})$$

где $\Phi = \sin \omega \tau'_0 = v/v_0$.

Формула (II.3.13) представляет искомое решение поставленной задачи. Анализ соотношения (II.3.13) уже проводился нами графически в первой главе, где подобное же соотношение было получено для распространения гармонического сигнала в недиссипативной идеальной среде. Совпадение результатов на данном этапе исследования свидетельствует о том, что в области $x < x_0/2$ существует некий интервал, где еще не сказываются диссипативные эффекты, тогда как

нелинейные искажения волнового профиля проявляются в полной мере. Этот интервал как расстояние от входа системы до точки образования разрывов в профиле звуковой волны можно определить, исходя из значения углового коэффициента прямой в решении (II.3.13), равного единице, т. е. $\sigma = 1$, что в длинах волн дает

$$kx_p = \frac{1}{\varepsilon M}. \quad (\text{II.3.14})$$

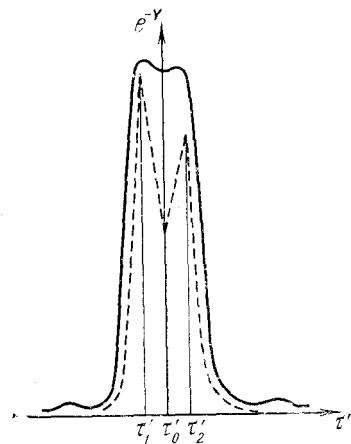


Рис. II.5. Вид подынтегрального выражения формулы (II.3.5) в окрестности координаты разрыва $\sigma > 1$.

При значениях $\sigma > 1$ подынтегральное выражение как функция τ' имеет вид, представленный на рис. II.5. Теперь главное значение интеграла не может быть взято

по малому участку в окрестности экстремальной точки τ'_0 , так как точка τ'_0 не является экстремальной. Однако уже при значениях σ таких, что $\sigma - 1 \sim 1/\varepsilon \text{Re}$, значение подынтегрального выражения в точке τ'_0 мало по сравнению со значениями подынтегрального выражения в точках τ'_1 и τ'_2 . Следовательно, главное значение интеграла может быть вычислено как сумма его значений по малым участкам вблизи точек τ'_1 и τ'_2 , т. е.

$$U = \frac{e^{-Y_1}}{\sqrt{1 - \sigma \cos \omega \tau'_1}} + \frac{e^{-Y_2}}{\sqrt{1 - \sigma \cos \omega \tau'_2}} \quad (\text{II.3.15})$$

и

$$v = v_0 \frac{e^{-Y_1} \sin \omega \tau'_1 + e^{-Y_2} \sin \omega \tau'_2}{e^{-Y_1} + e^{-Y_2}}. \quad (\text{II.3.16})$$

Найденное выражение уже может быть непосредственно использовано для анализа формы волны после образования «разрывов». Однако наиболее просто этот анализ может быть произведен, если положить $\sigma \geq \pi/2$. В этом случае, как мы уже показывали на примере аналогичной задачи для идеальной среды, форма волны становится почти пилообразной и допускает аналитическое представление

$$\omega \tau = \pi - \Phi_1 - \sigma \Phi_1 \quad \text{при} \quad 0 < \omega \tau < \pi, \quad (\text{II.3.17})$$

$$\omega \tau = \pi - \Phi_2 - \sigma \Phi_2 \quad \text{при} \quad -\pi < \omega \tau < 0. \quad (\text{II.3.18})$$

Разделив в выражении (II.3.16) числитель и знаменатель на e^{-Y_1} , после оценки при помощи формул (II.3.17) и (II.3.18) соотношения

$$|Y_1 - Y_2| = \left| \varepsilon \operatorname{Re}(\cos \omega \tau'_1 - \cos \omega \tau'_2) + \frac{(\tau'_1 - \tau)^2 - (\tau'_2 - \tau)^2}{2bx} c_0^3 \rho_0 \right| \quad (\text{II.3.19})$$

нетрудно получить

$$|Y_1 - Y_2| \simeq \left(\frac{\pi \varepsilon c_0^3 \rho_0}{b} \right) \tau / (1 + \sigma) \quad (\text{II.3.20})$$

и

$$v = \frac{v_0}{1 + \sigma} \left[-\omega \tau + \pi \operatorname{th} \left(\frac{\omega \tau}{\delta} \right) \right] \quad \text{при} \quad -\pi \leq \omega \tau \leq \pi, \quad (\text{II.3.21})$$

где δ имеет смысл безразмерной ширины фронта ударной волны и определяется следующим соотношением (ср. с формулой (II.2.10)):

$$\delta = \frac{1 + \sigma}{\pi \varepsilon \operatorname{Re}}. \quad (\text{II.3.22})$$

Как следует из формулы (II.3.22), ширина фронта, являющаяся обратно пропорциональной числу Рейнольдса, может быть весьма узкой, стремясь в пределе по поряд-

ку величины к длине свободного пробега молекул. Вместе с тем она не остается постоянной, а растет пропорционально расстоянию от входа системы. Фронт размывается и при некоторых значениях x может занимать фазовый интервал порядка π . Естественно, что при такой ширине фронта само понятие фронта становится бессмысленным и это означает, что волна вновь становится почти синусоидальной. Пренебрегая в формуле (II.3.22) единицей

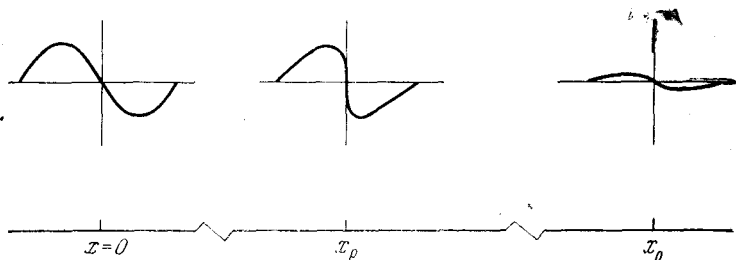


Рис. II.6. Три характерных этапа процесса распространения волны конечной амплитуды в диссипативной среде.

по сравнению с величиной безразмерного параметра σ , что вполне законно при больших числах Рейнольдса, мы получим оценку, с точностью до коэффициента совпадающую с формулой (II.3.7). Решение (II.3.21) при этом также переходит в решение (II.3.6).

Проведенный анализ позволяет строго выделить три этапа в распространении волны конечной амплитуды в диссипативной среде (рис. II.6). Первый этап — от входа системы до координаты x_p , удовлетворяющей соотношению (II.3.14), — это этап, на котором накапливаются нелинейные искажения, но фронты еще недостаточно круты, а потому диссипативные эффекты несущественны. Второй этап — от координаты x_p до координаты x_0 , удовлетворяющей соотношению (II.3.7), — это этап, на котором одновременно проявляются и нелинейные, и диссипативные эффекты. Здесь происходят необратимые потери энергии, все время поддерживаемые за счет нелинейных искажений волны. К концу второго этапа волна приходит уже как волна бесконечно малой амплитуды, так что на третьем этапе при $x > x_0$ справедливо описание

процесса по линейным законам акустики. Полезно отметить, что решение (II.3.21) является точным, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (II.3.21) в уравнение (II.1.10).

§ 4. Решения уравнения Бюргерса для неперидических возмущений

Пусть на входе системы задано возмущение скорости в виде

$$\text{при } x = 0 \quad v = v_0 \operatorname{th} (\tau/\tau_0), \quad (\text{II.4.1})$$

где τ изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а значение τ_0 принимается таким, чтобы область фронта была достаточно пологой, т. е. $\tau_0 \gg (\varepsilon v_0 c_0 \rho_0 / b)^{-1} \equiv \tau'$. Тогда функция U , для которой имеет место уравнение теплопроводности (II.3.3), может быть записана в виде

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi x b / 2c_0^3 \rho_0}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{\tau_0}{\tau'} \int_0^{y/\tau_0} \operatorname{th} z \, dz - \frac{(\tau - y)^2 c_0^3 \rho_0}{2bx} \right\} dy. \quad (\text{II.4.2})$$

При $(\tau_0/\tau') \gg 1$, т. е. при больших акустических числах Рейнольдса, интеграл (II.4.2), как и в предыдущем параграфе, вычисляется методом перевала, так что из соотношения, определяющего седловую точку y_0 и значения v (II.3.2) в ней, можно найти решение в виде

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \operatorname{Arcth} \Phi - \frac{\varepsilon v_0 x}{c_0^2 \tau_0} \Phi. \quad (\text{II.4.3})$$

Графический анализ полученного решения, приведенный на рис. II.7, наглядно демонстрирует искажение профиля начального возмущения по мере распространения волны. При этом степень искажения определяется значением углового коэффициента $Z = \varepsilon v_0 x / c_0^2 \tau_0$, растущего прямо пропорционально пройденному волной расстоянию от входа системы. Точка «разрыва» соответствует расстоянию $x_1 = \tau_0 c_0^2 / \varepsilon v_0$, и при $x > x_1$ функция становится много-

значной, что свидетельствует о неправомерности решения (II.4.3). Главное значение интеграла теперь следует вычислить как сумму его значений по малым участкам вблизи экстремальных точек y_1 и y_2 . Следуя схеме, изложенной в предыдущем параграфе, найдем значения U_1 и U_2 ,

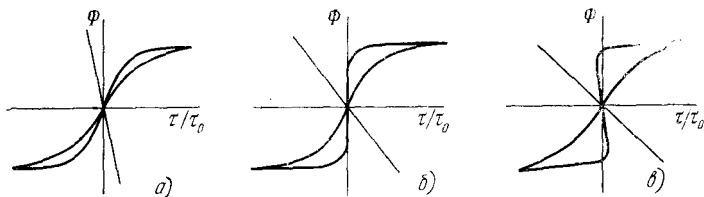


Рис. II.7. Графический анализ решения (II.4.3).

подставим их в формулу (II.3.2) и определим значение v после образования «разрыва»:

$$v = v_0 \frac{\text{th}(y_1/\tau_0) + \text{th}(y_2/\tau_0) e^{-Y}}{1 + e^{-Y}}, \quad (\text{II.4.4})$$

где

$$|Y| = \left| \frac{\tau_0}{\tau'} \left[\int_0^{y_2/\tau_0} \text{th} z \, dz - \int_0^{y_1/\tau_0} \text{th} z \, dz \right] + \frac{(\tau - y_2)^2 - (\tau - y_1)^2}{2bx} c_0^3 \rho_0 \right|. \quad (\text{II.4.5})$$

Значение $|Y|$ нетрудно подсчитать, если учесть, что в перевальных точках $(\tau - y_{1,2}) = \pm \varepsilon v_0 x / c_0^2$, и разложить интегралы от гиперболических тангенсов по степеням τ , ограничившись первым приближением. Тогда $v = v_0 \text{th}(\tau/\tau')$, где параметр τ' имеет смысл длительности фронта ударной волны и после приведения к безразмерному виду дает значение $1/\varepsilon \text{Re}$.

Таким образом, ширина фронта ударной волны $L_\Phi = c_0 \tau_\Phi$, установление которой осуществляется вблизи точки x_1 , остается затем (в отличие от синусоиды) стационарной и определяется формулой

$$L_\Phi = c_0 \tau_\Phi = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}}. \quad (\text{II.4.6})$$

Особый интерес представляет рассмотрение следующей граничной задачи [61]:

$$v = \begin{cases} -v_0, & -\infty < \tau \leq 0, \\ v_0, & 0 \leq \tau < \infty, \end{cases} \quad (\text{II.4.7})$$

т. е. когда в начальной точке скорость задана в виде разрывной функции с шириной фронта $L_\Phi = c_0 \tau_\Phi = 0$. Естественно ожидать, что здесь с самого начала скажется преобладание диссипативных процессов, так что пространственный масштаб установления стационарной ширины фронта будет теперь иным по сравнению с предыдущей задачей.

Итак, пусть в начальной точке скорость v определена соотношением (II.4.7). Тогда

$$U = \sqrt{\frac{c_0^3 \rho_0}{2\pi b x}} \left[\int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{y}{\tau'} - \frac{(\tau - y)^2}{2bx/c_0^3 \rho_0} \right\} dy + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{y}{\tau'} - \frac{(\tau - y)^2}{2bx/c_0^3 \rho_0} \right\} dy \right] \quad (\text{II.4.8})$$

или после приведения выражений, стоящих в экспонентах, к квадратичной форме получим

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ \frac{\varepsilon^2 v_0^2 x \rho_0}{4c_0 b} \right\} \left[e^{-\tau/\tau'} \int_{Z_-}^{\infty} e^{-z^2} dz - e^{-\tau/\tau'} \int_{Z_+}^{\infty} e^{-z^2} dz \right], \quad (\text{II.4.9})$$

где

$$Z_{\pm} = \frac{\tau \pm \varepsilon v_0 x / c_0^2}{\sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}}. \quad (\text{II.4.10})$$

Теперь анализ пространственного изменения v , проводимый в соответствии с (II.3.2), не представляет труда. Прежде всего, для достаточно больших x , так чтобы в области $\tau \geq \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}$ выполнялось условие $x \geq c_0 \tau / \varepsilon v_0$, скорость просто определяется формулой

$$v = v_0 \text{th} (\tau/\tau'). \quad (\text{II.4.11})$$

Величина τ' , как и выше, определяет длительность фронта ударной волны и после приведения к безразмерному виду равна $1/\epsilon Re$. Следовательно, и для этой задачи ширина фронта ударной волны не обнаруживает зависимости от x и остается стационарной.

Зная стационарную длительность фронта ударной волны $\tau = \tau_{\text{стац}}$, можно указать то значение x' , начиная с которого $\tau = \tau_{\text{стац}}$, а именно

$$x' = bc_0/\epsilon^2 \rho_0 v_0^2. \quad (\text{II.4.12})$$

Тем самым определен интервал установления стационарной ширины фронта ударной волны $[0, x']$, существенно отличающийся от интервала установления в предыдущей задаче $[0, x_1]$, где $x_1 = \tau c_0^2/\epsilon v_0$.

Остается лишь определить закон, описывающий изменение τ_Φ на интервале $[0, x']$. Этот закон легко усмотреть исходя из следующих простых рассуждений. Для $x < \tau c_0^2/\epsilon v_0$ и для достаточно больших $|\tau|$ одним из интегралов в выражении (II.4.9) можно пренебречь как интегралом с равными пределами и получить $v = |v_0|$. Считая такое пренебрежение возможным, когда нижние пределы у интегралов в выражении (II.4.9) по абсолютной величине больше единицы, можно выразить τ как функцию x :

$$\tau = \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0} + \epsilon v_0 x/c_0^2. \quad (\text{II.4.13})$$

Однако даже в предельной точке (II.4.12) второе слагаемое в формуле (II.4.13) в $\sqrt{2}$ раз меньше первого, так что закон установления стационарной ширины фронта ударной волны можно просто определить как

$$L_\Phi = c_0 \tau_\Phi = c_0 \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}, \quad (\text{II.4.14})$$

т. е. нарастание ширины фронта ударной волны пропорционально квадратному корню из пройденного волной расстояния от входа системы, пока L_Φ не достигнет стационарной величины.

В заключение рассмотрим распространение произвольного одиночного импульса, затухающего при $\tau = \pm \infty$, с различных точек зрения, допустимых при решении уравнения Бюргерса.

Пусть на некотором интервале $[0, \beta]$ задан импульс треугольного профиля, как это показано на рис. II.8, а [62]:

$$v = \begin{cases} 2P_0\beta^{-1}(1 - \tau/\beta), & 0 \leq \tau \leq \beta, \\ 0, & \tau < 0, \tau > \beta, \end{cases} \quad (II.4.15)$$

$$P_0 = \int_0^\beta v_0(1 - \tau/\beta) d\tau.$$

Импульс выбран так, чтобы при сохранении площади треугольника P_0 возмущение скорости оставалось малой величиной.

Точное аналитическое выражение v , получаемое в соответствии с (II.3.2) после вычисления функции U и логарифмической производной, однако весьма громоздко, поэтому целесообразно, не выписывая последнего, ограничиться графическим представлением зависимости v от τ для различных расстояний от входа системы, полученных на основе точного решения.

Прежде всего, для достаточно малых расстояний $x \leq x' = bc_0\beta^2/4\rho_0\varepsilon^2P_0^2$ искажение импульса таково, что его профиль может быть разбит на четыре характерные области (рис. II.8, б), так что с одновременным смещением максимума амплитуды импульса вправо от точки $\tau = 0$ у его краев образуются пологие участки (области I и IV), на которых профиль импульса описывается следующими соотношениями:

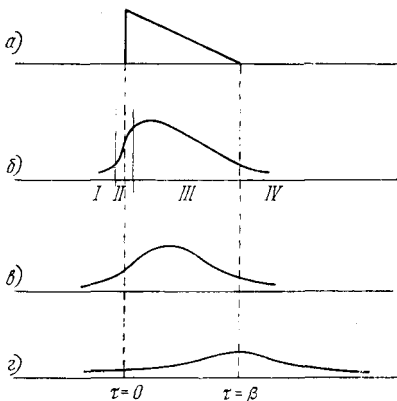


Рис. II.8. Трансформация профиля импульса треугольной формы при распространении в нелинейной поглощающей среде.

$$v = \frac{4P_0}{V\sqrt{2\pi}\beta^2} \sqrt{\frac{bx}{2c_0^3\rho_0}} \exp\left\{-\frac{\tau^2\rho_0\varepsilon_0^3}{2bx}\right\} \quad \text{при } \tau < -\sqrt{\frac{2bx}{c_0^3\rho_0}}, \quad (II.4.16)$$

$$v = \frac{4P_0}{\sqrt{2\pi} \beta^2} \sqrt{\frac{bx}{2c_0^3 \rho_0}} \exp \left\{ -\frac{(\beta - \tau)^2 \rho_0 c_0^3}{2bx} \right\} \quad \text{при } \tau > \beta. \quad (\text{II.4.17})$$

При этом границы первой и четвертой областей соответственно определяются как $\tau_I = -2\sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}$ и $\tau_{IV} = \beta + \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}$. Вторая область, соответствующая значениям τ в пределах $\pm \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}$, отсчитываемых от точки $\tau = 0$, является областью переднего фронта импульса. При $x = x'$ она достигает величины $1/\varepsilon \text{Re}$ (в безразмерных единицах). В третьей области при $x \leq x'$ отклонение импульса от первоначальной конфигурации еще незначительно.

Дальнейшее распространение импульса приводит к смещению максимума v в направлении $\tau \rightarrow \beta$, к расширению областей I и IV, а также области переднего фронта за счет уменьшения третьей области (рис. II, 8, в). Импульс, затухая, стремится к симметричной форме, так что длительность фронта не остается стационарной, а нарастает по закону $\tau_\phi = \sqrt{2bx/c_0^3 \rho_0}$, пока вообще рассмотрение τ_ϕ физически оправдано. При достаточно больших x , а именно при $x \geq x_2 \cong \text{Re } c_0^2 \beta^2 / 2P_0$ для всех четырех областей (рис. II.8, г) справедливо соотношение

$$v = \frac{2P_0}{\beta} \exp \left\{ -\frac{(\beta - \tau)^2}{2bx/c_0^3 \rho_0} \right\} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}} \sqrt{\varepsilon P_0 x / \beta^2 c_0^2}}. \quad (\text{II.4.18})$$

Здесь параметр x_2 совершенно аналогичен соответствующему параметру x_0 (II.3.7) в граничной задаче $v = v_0 \sin \omega t$, а параметр x' — соответствующему параметру граничной задачи (II.4.7).

Отметим, что площадь P одиночного возмущения, затухающего на $\pm \infty$, при распространении не изменяется (см. гл. I, § 5). Чтобы это показать, достаточно записать уравнение Бюргерса в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\varepsilon}{2c_0^2} v^2 + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \quad (\text{II.4.19})$$

и проинтегрировать по $d\tau$ от $-\infty$ до $+\infty$. Учитывая, что $v^2(\pm\infty) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \tau}(\pm\infty) = 0$, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad P = P_0 = \text{const.} \quad (\text{II.4.20})$$

Наконец, укажем на то обстоятельство, что преобразование переменных вида $v \rightarrow \lambda^a v$, $x \rightarrow \lambda^b x$, $\tau \rightarrow \lambda^c \tau$ оставит уравнение (II.1.10) без изменения, если $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$. Исходя из инвариантности уравнения Бюргерса по отношению к указанному преобразованию, сконструируем инвариантную автомодельную подстановку:

$$v = \frac{1}{V \overline{x + x_0}} \varphi \left(\frac{\tau + \tau_0}{V \overline{x + x_0}} \right). \quad (\text{II.4.21})$$

Введение констант x_0 , τ_0 выражает собой тот факт, что в уравнение Бюргерса не входят явно переменные x , τ , т. е. оно переходит в себя при преобразовании сдвига. С помощью этой замены уравнение (II.1.10) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\varphi(\xi)$. Интегрируя его один раз, получим уравнение типа Риккати:

$$\frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \varphi' + \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \xi \varphi = C_0. \quad (\text{II.4.22})$$

Константу C_0 можно положить равной нулю, если потребовать, чтобы функция φ обращалась в нуль на бесконечности. Второе интегрирование дает результат [63]:

$$v = \frac{v_0}{V \overline{1 + x/x_0}} \exp \left\{ - \frac{(\tau + \tau_0)^2}{2b(x + x_0)/c_0^3 \rho_0} \right\} \times \\ \times \left[\Phi \left(\frac{\tau + \tau_0}{V \overline{2b(x + x_0)/c_0^3 \rho_0}} \right) + c \right]^{-1}. \quad (\text{II.4.23})$$

где Φ — интеграл ошибок. Формула (II.4.23) описывает несимметричное колоколообразное возмущение, причем при $c > 1$ это импульс сжатия, при $c < 1$ — импульс разрежения.

Величина константы $|c|$ характеризует степень асимметрии. При $|c| \gtrsim 1$ импульс имеет крутой фронт, а при $|c| \gg 1$ его форма близка к гауссовой кривой. При распространении (x растет) импульс расплывается. Однако поскольку решение автомодельное, существует система

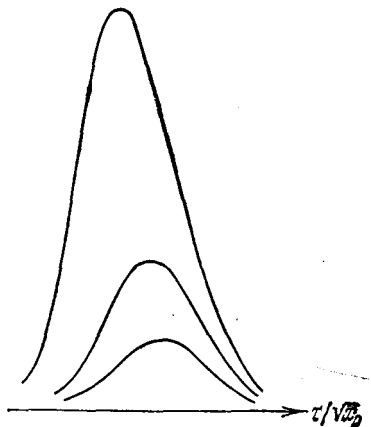


Рис. II.9. Профили возмущений, отвечающих автомодельному решению уравнения Бюргерса.

координат, в которой импульс имеет «застывшую» форму (см. рис. II.9).

Формула (II.4.23), разумеется, может быть получена и из общего решения уравнения Бюргерса. Из нее следует, что асимптотическая форма профиля (при достаточно больших x) является универсальной для довольно широкого класса начальных возмущений.

СФЕРИЧЕСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

§ 1. Вывод уравнений

Процесс распространения сферических и цилиндрических волн конечной амплитуды, излучаемых пульсирующей сферой и цилиндром, с качественной точки зрения во многом подобен процессу распространения плоских волн. Накапливающиеся нелинейные искажения приводят, как и в случае плоских волн, к образованию разрывов, сопровождаемому интенсивным поглощением звука.

Различия количественного характера обусловлены тем, что амплитуды сферических и цилиндрических волн не остаются постоянными вследствие их расхождения (или схождения). Это приводит к тому, что нарастание нелинейных искажений происходит в ином темпе по сравнению с плоскими волнами. Помимо количественного отличия характерных параметров — координат — в сходящихся цилиндрических и сферических волнах возможно двукратное формирование ударной волны, чего никогда не может быть при распространении плоских и расходящихся сферических и цилиндрических волн.

Следуя схеме изложения, принятой при описании распространения плоских волн в диссипативной среде, запишем уравнение движения, которое теперь имеет вид:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{n}{r^2} v \right), \quad (\text{III.1.1})$$

и уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v) + \frac{n}{r} \rho v = 0, \quad (\text{III.1.2})$$

где $n = 2$ для сферических и $n = 1$ для цилиндрических волн. В силу пространственной симметрии в уравнения (III.1.1) и (III.1.2) вошла только радиальная компонента скорости v_r , которая нами просто обозначена через v . Диссипативный коэффициент b совпадает с соответствующим коэффициентом, введенным в предыдущей главе. Уравнения (III.1.1) и (III.1.2) следует дополнить приближенным адиабатическим уравнением состояния вида

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho'^2. \quad (\text{III.1.3})$$

Следуя схеме, изложенной во второй главе, нетрудно получить в сопровождающей системе координат r и τ (где $\tau = t - (r - r_0)/c_0$ для расходящихся волн и $\tau = t + (r - r_0)/c_0$ для сходящихся волн) следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{n}{2r} v - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (\text{III.1.4})$$

При $n = 2$ это уравнение, полученное с точностью до малых членов второго порядка малости, описывает распространение сферически-симметричных волн, при $n = 1$ — цилиндрически-симметричных волн. При выводе уравнения (III.1.4) наряду с разложением по малому параметру (числу Маха) учитывалось, что аналогичный порядок малости имеет величина $1/kr$, где k — волновое число, т. е. уравнение (III.1.4) справедливо всюду в области $kr \gg 1$.

Производя замену в уравнении (III.1.4) $U = v(r/r_0)$ и $z = \ln(r/r_0)$ при $n = 2$ и замену $U = v\sqrt{r/r_0}$ и $z = 2\sqrt{rr_0}$ при $n = 1$, получим следующие уравнения [54, 55, 62]:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\varepsilon r_0}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{b r_0}{2c_0^3 \rho_0} e^z \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (\text{III.1.5})$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{b z}{4c_0^3 \rho_0 r_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (\text{III.1.6})$$

Любопытно отметить, что в приведенных выше обозначениях расходящиеся сферические волны адекватны пло-

ским волнам в среде с экспоненциально нарастающей вязкостью, сходящиеся — с экспоненциально убывающей вязкостью. Для цилиндрических волн вязкость изменяется по линейному закону. Приведенная аналогия не является вполне точной, поскольку в процессе вывода уравнений (III.1.5) и (III.1.6) произведены нелинейные преобразования координат $z = \ln(r/r_0)$ и $z = 2\sqrt{rr_0}$, что существенным образом сказывается в определении действительных масштабов пространственных искажений волнового профиля.

Переходя к анализу процесса распространения пространственно-симметричных волн на основе уравнений (III.1.5) и (III.1.6), подчеркнем с самого начала, что в силу отсутствия точных решений этот анализ будет носить преимущественно качественный характер. При этом мы будем постоянно опираться на результаты аналогичного анализа, выполненного на основе точных решений в теории плоских волн.

§ 2. Среда без диссипации

Рассмотрим распространение расходящейся или сходящейся бегущей сферической (или цилиндрической) волны конечной амплитуды, гармонической в точке $r = r_0$:

$$v = v_0 \sin \omega t. \quad (\text{III.2.1})$$

На первом этапе распространения звуковой волны конечной амплитуды диссипативные процессы не играют существенной роли, если интенсивность волны достаточно велика, а вязкость и теплопроводность малы. То есть при больших числах Рейнольдса можно пренебречь правыми частями уравнений (III.1.5) и (III.1.6), а решения полученных укороченных уравнений с граничным условием (III.2.1) записать в виде

$$\omega t = \arcsin \left[\frac{vr}{v_0 r_0} \right] - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \ln \frac{r}{r_0} \left[\frac{vr}{v_0 r_0} \right], \quad (\text{III.2.2})$$

$$\omega t = \arcsin \left[\frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right] - \frac{2\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \left[1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right] \left[\frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right]. \quad (\text{III.2.3})$$

Графический анализ полученных решений ничем не отличается от аналогичного анализа в теории плоских волн. Поэтому мы остановимся только на отличительных особенностях в «темпах» накопления нелинейных искажений в расходящихся и сходящихся сферических и цилиндрических волнах по сравнению с плоскими волнами конечной амплитуды.

Как известно, решения принимают разрывный характер при обращении безразмерных угловых коэффициентов

$$Z_1 = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \ln \frac{r}{r_0}$$

и

$$Z_2 = \frac{2\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right|$$

в единицу. Сравнивая значения коэффициентов Z_1 и Z_2 с соответствующим значением коэффициента для плоских волн, видим, что нелинейные эффекты в расходящихся сферических и цилиндрических волнах выражены существенно слабее. Нелинейные искажения в сферической волне накапливаются как натуральный логарифм отношения расстояния, пройденного волной от излучателя r к радиусу излучателя r_0 . Для цилиндрической волны накопление нелинейных эффектов с расстоянием пропорционально $|1 - \sqrt{r/r_0}|$. Несмотря на то, что одновременно с накоплением нелинейных эффектов происходит уменьшение амплитуды волн из-за сферической или цилиндрической расходимости, ударная или разрывная волна все же теоретически обязана сформироваться, поскольку мы пренебрегли диссипацией энергии.

Итак, с точки зрения накапливающихся нелинейных эффектов сферические и цилиндрические расходящиеся волны конечной амплитуды являются «ухудшенными» аналогами плоских волн. В сходящихся волнах картина обратная. Здесь накопление нелинейных эффектов протекает весьма бурно, но не только в силу схождения. В формулах (III.2.2) и (III.2.3) схождение и расхождение волн учтено в соотношениях, стоящих в квадратных скобках, когда пропорциональное уменьшение отношения, например r к r_0 , компенсируется соответствующим увеличением

отношения v к v_0 , т. е. выбранный масштаб позволяет нам рассматривать амплитуды сходящихся и расходящихся волн как неизменные. В то же время сами нелинейные параметры $|\ln(r/r_0)|$ и $|1 - \sqrt{r/r_0}|$ при значениях $r < r_0$ уже не являются столь медленными, как это имеет место для расходящихся волн.

Остановимся еще на одной особенности, присущей только сходящимся цилиндрическим волнам: при определенных значениях исходных параметров в сходящейся цилиндрической волне ударная волна не возникает вообще. В самом деле, разрыв возникает при значении углового коэффициента

$$Z_2 = 2 \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| = 1. \quad (\text{III.2.4})$$

Поэтому если параметры излучающей цилиндрической поверхности выбраны так, что $(\varepsilon/c_0^2) \omega v_0 r_0 < 1/2$, то ни при каких значениях $r < r_0$ условие образования ударных волн (III.2.4) не может быть реализовано. Отсюда следует, что для существенного накопления нелинейных эффектов в сходящейся цилиндрической волне необходимо, чтобы радиус, частота и начальная амплитуда пульсирующего цилиндра были достаточно велики, чтобы выполнялось условие $(\varepsilon/c_0^2) \omega v_0 r_0 \gg 1$.

Процесс изменения спектрального состава сферических и цилиндрических волн, обусловленный нелинейными искажениями их формы при распространении, может быть описан аналогично тому, как это делалось ранее применительно к плоским волнам. Гармоническая в точке $r = r_0$ волна изменяет свой профиль согласно формулам (III.2.2) и (III.2.3). Переписывая эти формулы в виде

$$\frac{vr}{v_0 r_0} = \sin \left[\omega \tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \ln \frac{r}{r_0} \left\{ \frac{vr}{v_0 r_0} \right\} \right], \quad (\text{III.2.5})$$

$$\frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} = \sin \left[\omega \tau + \frac{2\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 r_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \left\{ \frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right\} \right], \quad (\text{III.2.6})$$

мы найдем решения этих трансцендентных уравнений в

виде рядов Фурье:

$$\frac{vr}{v_0 r_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \sin n\omega\tau, \quad (\text{III.2.7})$$

$$\frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \sin n\omega\tau. \quad (\text{III.2.8})$$

Входящие сюда коэффициенты $B_n^{(1)}$ и $B_n^{(2)}$ представляют собой совокупность двух членов, первый из которых доминирует в области значений угловых коэффициентов $0 \lesssim Z_1, Z_2 \lesssim 1$ и соответствует амплитуде n -й гармоники в решении Бесселя — Фубини в случае плоской волны, а второй дает основной вклад в области $Z_1, Z_2 > 1$ и при значении $Z_1, Z_2 \gg 1$ принимает особенно простой вид. Таким образом,

$$B_n^{(1), (2)} = \begin{cases} \frac{2}{nZ_{1,2}} J_n(nZ_{1,2}), & 0 \lesssim Z_{1,2} \lesssim 1, \\ \frac{2}{n(1+Z_{1,2})}, & Z_{1,2} \gg 1, \end{cases} \quad (\text{III.2.9})$$

где J_n — функция Бесселя n -го порядка.

Последние соотношения позволяют рассмотреть изменения гармонического состава волны. На начальном участке распространения волны $Z_{1,2} \ll 1$ после разложения в ряд функций Бесселя в области малых значений аргумента получим для сферической и цилиндрической волн следующие соотношения:

$$\frac{vr}{v_0 r_0} = \sin \omega\tau + \frac{\varepsilon\omega v_0 r_0}{2c_0^2} \left| \ln \frac{r}{r_0} \right| \sin 2\omega\tau + \dots, \quad (\text{III.2.10})$$

$$\frac{v}{v_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}} = \sin \omega\tau + \frac{\varepsilon\omega v_0 r_0}{c_0^2} \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \sin 2\omega\tau + \dots \quad (\text{III.2.11})$$

Из приведенных формул видно, что нарастание гармоник в сферических и цилиндрических волнах происходит

по-разному. Этот изложенный на спектральном языке факт находится в полном соответствии с результатами гидродинамического рассмотрения проблемы, проводившегося в первой половине этого параграфа.¹

§ 3. Диссипативная среда. Квазистационарные решения

Выше показано, что, за исключением специально выбранной сходящейся цилиндрической волны, во всех случаях распространение сферических и цилиндрических волн сопровождается образованием разрывов, т. е. приводит к возникновению ударных волн, когда неправомерно пренебрежение диссипативными эффектами.

Не имея возможности дать точные аналитические решения уравнений (III.1.5) и (III.1.6), мы пойдем по пути поэтапного упрощения задачи. На первом этапе, когда были отброшены правые части уравнений (III.1.5) и (III.1.6), мы получили решения, справедливые вплоть до образования разрывов, покуда гидродинамические параметры волны еще однозначны. На следующем, втором этапе мы решим вспомогательную задачу о распространении одиночного скачка уплотнения в среде. Такое решение позволит нам найти структуру фронтов сферической и цилиндрической волн.

Граничные условия для задачи о распространении одиночного скачка уплотнения в переменных U , z , t для уравнений (III.1.5) и (III.1.6) можно сформулировать следующим образом:

$$U(z, +\infty) = U_0, \quad U(z, -\infty) = -U_0. \quad (\text{III.3.1})$$

Мы ограничимся получением приближенного квазистационарного аналитического решения сформулированной задачи, которое находится в хорошем согласии с результатами численного интегрирования.

Полагая, что производная $\partial U/\partial z$ в уравнениях (III.1.5) и (III.1.6) много меньше остальных членов уравнений, мы получим укороченные уравнения, которые являются уже обыкновенными дифференциальными уравнениями и легко интегрируются. В теории плоских волн такая операция вполне правомерна. Она позволяет найти профиль

стационарной волны, распространяющейся в среде без искажения формы. Для сферических и цилиндрических волн это не так, поскольку изменение амплитуды при схождении и расхождении волн препятствует формированию стационарных волн.

Стационарная плоская волна возникает вследствие уравнивания диссипативных и нелинейных эффектов, когда нелинейное «захлестывание» компенсируется диссипативным «рассасыванием» фронтов. В сферических и цилиндрических волнах к этим факторам добавляется еще явление схождения и расхождения. И все же можно выделить некоторый интервал на пути следования волны, когда решения, которые, в отличие от точного стационарного решения в теории плоских волн, мы называем квазистационарными, справедливы с достаточной степенью точности.

Эти решения для сферических и цилиндрических волн имеют соответственно вид

$$U = U_0 \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon U_0 c_0 \rho_0}{b \exp z} \tau \right), \quad (\text{III.3.2})$$

$$U = U_0 \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon U_0 c_0 \rho_0}{bz/2r_0} \tau \right). \quad (\text{III.3.3})$$

А условия применимости их могут быть представлены в виде

$$\frac{r_0 (\varepsilon U_0 / c_0^2)^2}{(b \exp z) / c_0^3 \rho_0} \gg 1, \quad \frac{2r_0 (\varepsilon U_0 / c^2)^2}{b / c_0^3 \rho_0} \gg 1. \quad (\text{III.3.4})$$

Эти условия применимости квазистационарных решений несколько различны для цилиндрических и сферических волн. Квазистационарное решение для цилиндрических волн справедливо всегда при условии

$$\frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega r_0 v_0 \gg \frac{1}{2} \operatorname{Re}, \quad (\text{III.3.5})$$

которое получено из формулы (III.3.4) домножением числителя и знаменателя на частоту ω независимо от того, является волна сходящейся или расходящейся. Для сферических волн соотношение (III.3.4) преобразуется

в безразмерных координатах к виду

$$Z_0 \text{Re} \gg z/Z_0, \quad Z_0 = \varepsilon \omega v_0 r_0 / c_0^2 \quad (\text{III.3.6})$$

и, если только оно справедливо в точке r_0 , то для сходящейся сферической волны оно справедливо всегда. Для расходящейся сферической волны на некоторых расстояниях $Z_{\text{пр}}$ соотношение (III.3.6) перестает быть справедливым. Определяя предельное значение $Z_{\text{пр}}$ из условия $Z_{\text{пр}} = Z_0^2 \text{Re}$, легко видеть, что в практически наиболее интересном случае больших чисел Рейнольдса и не малых значений Z_0 пределы применимости квазистационарного решения достаточно широки и для расходящихся сферических волн.

Найденные квазистационарные решения вместе с решениями укороченных уравнений, полученными в § 2, позволят нам сконструировать общие приближенные решения, справедливые во всей области распространения волны от момента формирования ударных фронтов. Прежде, однако, мы найдем одно точное решение уравнения (III.1.6), имеющее характер стационарного скачка возмущения и свободное от ограничений, свойственных квазистационарным решениям.

§ 4. Структура цилиндрической ударной волны.

Автомодельный подход

Уравнение (III.1.6) с помощью замены $U = \varphi(\xi)$, где $\xi = \tau/z$, приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению [63]:

$$\frac{b}{4c_0^3 \rho_0 r_0} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \varphi \frac{d\varphi}{d\xi} + \xi \frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \quad (\text{III.4.1})$$

Решая это уравнение и возвращаясь к исходным переменным U , τ , z , получим

$$U = c \frac{c_0^2}{\varepsilon} \sqrt{\frac{b}{r_0 c_0^3 \rho_0}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{e^{-2\eta} d\eta}{\sqrt{\eta - c e^{-2\eta}}}, \quad (\text{III.4.2})$$

$$\frac{\tau}{z} = \sqrt{\frac{b}{4c_0^3 \rho_0 r_0}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - c e^{-2\eta}}}. \quad (\text{III.4.3})$$

Приведенная параметрическая форма решения наиболее удобна для анализа. На рис. III.1 построена подкоренная функция $f(\eta) = \eta - ce^{-2\eta}$ и ее асимптотика при $c = 0$.

Заметим, что при значении константы $c = 0$ формулы (III.4.2) и (III.4.3) дают решение линейного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{bz}{4c_0^3 \rho_0 r_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0, \text{ справедливого для систем, характерных}$$

бесконечно малым числом Рейнольдса. Задавая определенным значением постоянной c , можно рас-

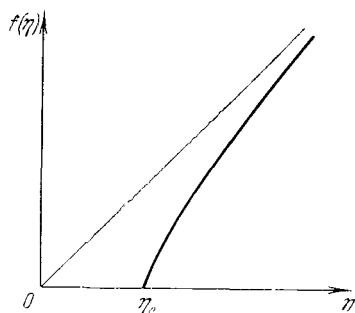


Рис. III.1. Вид функции $f(\eta) = \eta - C \exp(-2\eta)$ и ее асимптотики (прямая линия) при $C = 0$.

сматривать системы с произвольным соотношением между нелинейными и диссипативными свойствами среды, т. е. при произвольных значениях числа Рейнольдса, за исключением бесконечно больших, когда в исходном уравнении (III.1.6) можно положить $b = 0$.

Значение параметра η_0 соответствует обращению в нуль функции $f(\eta)$. Именно в окрестности точки η_0 наиболее сильно проявляются нелинейные свойства. При уменьшении числа Рейнольдса точка $\eta_0 \rightarrow 0$ и функция $f(\eta)$

слабо отклоняется от линейного закона. Поэтому наибольший интерес представляет исследование поведения найденных решений (III.4.2) и (III.4.3) в окрестности точки η_0 , где подкоренная функция $f(\eta)$ с помощью разложения по малому параметру $\mu = \eta - \eta_0$ может быть представлена в виде

$$f(\eta) = \eta - ce^{-2\eta} \approx \mu(1 + 2\eta_0). \quad (\text{III.4.4})$$

После замены с помощью соотношения (III.4.4) подкоренного выражения в формулах (III.4.2), (III.4.3), интегрирования и исключения малого параметра μ найдем

$$U = \frac{\sqrt{\pi b/2c_0^3 \rho_0}}{\varepsilon \sqrt{r_0/c_0^2}} \frac{\eta_0}{\sqrt{1+2\eta_0}} \Phi \left[\frac{\sqrt{1+2\eta_0}}{\sqrt{b/2c_0^3 \rho_0}} \frac{\tau}{z} \right]. \quad (\text{III.4.5})$$

Автомодельное решение (III.4.2), (III.4.3) и справедливое при малых значениях параметра μ выражение (III.4.5) одинаково применимы как к расходящимся, так и к сходящимся цилиндрически-симметричным возмущениям в среде. При росте z (расходящаяся волна) крутизна фронта уменьшается. Когда z уменьшается (сходящаяся волна), крутизна фронта растет. Последнее явление имеет место при фокусировке сигнала, и решения в этом случае справедливы в пределах ограничений, принятых при выводе приближенного уравнения (III.1.6).

Несмотря на то, что автомодельный подход позволил рассмотреть лишь частную задачу о распространении одиночного скачка уплотнения, следует подчеркнуть, что решение (III.4.2) — (III.4.3) — это единственное точное решение уравнения (III.1.6), полученное аналитически. К тому же это решение свободно от ограничений на величину числа Рейнольдса за счет произвола в выборе константы c .

На рис. III.2 приведены три кривые, из которых кривая 1 соответствует значениям числа Рейнольдса $Re \gg 1$, кривая 2 — случаю $Re \sim 1$ и кривая 3 — значениям $Re \ll 1$. Зависимость решения от значения числа Рейнольдса учтена неявно также и в выражении (III.4.5) с помощью параметра η_0 — корня трансцендентного уравнения $\eta - ce^{-2\eta} = 0$. Подобно тому, как формулы (III.4.2) и (III.4.3) при $c = 0$ давали решение линейного уравнения, выражение (III.4.5) при значении параметра $\eta_0 \rightarrow 0$ также переходит в решение линейного уравнения.

Точное решение (III.4.2) и (III.4.3), равно как и приближенная формула (III.4.5), в силу своей структуры

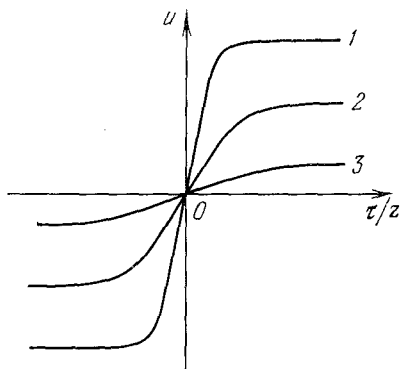


Рис. III.2. Автомодельное решение аналога уравнения Бюргерса для цилиндрически-симметричных волн, отвечающее различным значениям числа Рейнольдса.

представляет особый интерес и при изучении распространения синусоидальных возмущений в цилиндрически-симметричных системах.

В предыдущем параграфе мы нашли приближенные квазистационарные решения, на основе которых с учетом законов нелинейного искажения сконструируем профиль сферической и цилиндрической волн по аналогии с плоскими волнами. Для этого необходимо ударный фронт бесконечной крутизны в волне пилообразной формы заменить узкой областью конечных размеров и определенной структуры в соответствии с квазистационарными решениями. Строго говоря, в цилиндрически-симметричной волне следовало бы область фронта построить на основе решений (III.4.2) и (III.4.3) или хотя бы на основе формулы (III.4.5). И то, что мы этого не будем делать, продиктовано исключительно соображениями физической наглядности и укоренившимся в литературе единым подходом, несомненно, весьма полезным с методической точки зрения.

§ 5. Общая структура пространственно-симметричных волн с учетом нелинейности и диссипации

Возвращаясь к задаче о распространении первоначально гармонической волны конечной амплитуды, заданной в точке $r = r_0$ соотношением (III.2.1), напомним, что в соответствии с решениями (III.2.2) и (III.2.3) при достижении угловыми коэффициентами Z_1 и Z_2 значений, равных единице, в волне возникают разрывы. При значении тех же угловых коэффициентов, равных $\pi/2$, профили волн становятся почти пилообразными и пиковые значения приведенных переменных для сферической и цилиндрической волн, как это можно установить из формул (III.2.2) и (III.2.3), изменяются в соответствии с формулами

$$U = U_0 \left/ \left(1 + Z_0 \left| \ln \frac{r}{r_0} \right| \right) \right., \quad (\text{III.5.1})$$

$$U = U_0 \left/ \left(1 + 2Z_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) \right.. \quad (\text{III.5.2})$$

Если в следующей, второй области распространения волн выполняются условия применимости квазистационарных решений, то структура разрывов в сферической и цилиндрической волнах пилообразного профиля может быть описана с помощью квазистационарных решений (III.3.2) и (III.3.3) с учетом того, что амплитуда разрывов изменяется в соответствии с выражениями (III.5.1) и (III.5.2).

Тогда в пределах одного периода $\pi \leq \omega\tau \leq \pi$ конфигурация сферически-симметричной волны приближенно описывается соотношением

$$vr = \frac{v_0 r_0}{1 + Z_0 |\ln(r/r_0)|} \left(-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \frac{\omega\tau}{\delta} \right), \quad (\text{III.5.3})$$

где величина

$$\delta = \frac{1 + Z_0 |\ln(r/r_0)|}{\pi \operatorname{Re}} \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad (\text{III.5.4})$$

есть безразмерная ширина фронта волны.

Совершенно аналогично для цилиндрической волны имеем

$$v \sqrt{r} = \frac{v_0 \sqrt{r_0}}{1 + 2Z_0 |1 - \sqrt{r/r_0}|} \left(-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \frac{\omega\tau}{\delta} \right), \quad (\text{III.5.5})$$

где

$$\delta = \frac{1 + 2Z_0 |1 - \sqrt{r/r_0}|}{2\pi \operatorname{Re}} \sqrt{\frac{r}{r_0}}. \quad (\text{III.5.6})$$

Сопоставляя формулы (III.5.3) — (III.5.6) с формулами (II.3.21) и (II.3.22), нетрудно установить, что в решениях (III.5.3) — (III.5.6) сохранены все те особенности, которые были отмечены еще при выводе приближенных уравнений, описывающих распространение пространственно-симметричных волн. Подобно решениям (II.3.21), (II.3.22) они передают динамику процесса формирования и рассасывания ударных фронтов, определяют изменения амплитуды волны с учетом схождения (расхождения) и нелинейного захлестывания. В этом, а также в единообразии и компактности записи их несомненные достоинства. Вместе с тем, в отличие от точных решений (II.3.21), (II.3.22), решения (III.5.3) — (III.5.6) лишь приближенно удовлетворяют уравнениям (III.1.5) и (III.1.6) и это

приближение в точности совпадает с условиями применимости квазистационарных решений (III.3.6) и (III.3.5).

Разлагая в ряд Фурье решения (III.5.3) и (III.5.5), можно получить решения, аналогичные решениям Фей для плоских волн. Эти решения имеют вид

$$v = \frac{v_0}{\text{Re}} \left(\frac{r}{r_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega\tau}{\text{sh} \left[n \frac{1 + Z_0 |\ln(r/r_0)|}{2 \text{Re}} \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]} \quad (\text{III.5.7})$$

для сферических волн и

$$v = \frac{v_0}{\text{Re}} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega\tau}{\text{sh} \left[n \frac{1 + 2Z_0 |1 - \sqrt{r/r_0}|}{2 \text{Re}} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right]} \quad (\text{III.5.8})$$

для цилиндрических волн.

§ 6. Особенности распространения сходящихся и расходящихся волн

Проанализируем соотношения (III.5.4) и (III.5.6), определяющие ширину фронта сферической и цилиндрической ударных волн. Ширина фронта не остается постоянной по двум причинам.

Во-первых, происходит «рассасывание» фронта ударной волны, обусловленное уменьшением ее амплитуды из-за поглощения. Так что безразмерная ширина фронта δ растет, как $|\ln(r/r_0)|$ для сферических волн и как $|1 - \sqrt{r/r_0}|$ для цилиндрических волн. Этот диссипативный механизм рассасывания полностью аналогичен соответствующему механизму, действующему в случае плоских волн. Он одинаков как для сходящихся, так и для расходящихся пространственно-симметричных волн.

Во-вторых, и главным образом, ширина фронта δ не остается постоянной из-за наличия в формулах (III.5.4) и (III.5.6) множителей (r/r_0) и $\sqrt{r/r_0}$ соответственно. Обусловленное этими множителями изменение ширины фронта ударной волны проявляется по-разному для расходящихся волн $(r/r_0) > 1$, $\sqrt{r/r_0} > 1$ и для сходящихся волн $(r/r_0) < 1$, $\sqrt{r/r_0} < 1$.

Определив, таким образом, общую структуру пространственно-симметричных волн на втором этапе их распространения при одновременном учете нелинейных и диссипативных эффектов, можно дать полное описание распространения сферических и цилиндрических волн, которое будет проведено отдельно для расходящихся и сходящихся волн.

Расходящиеся сферическая и цилиндрическая волны при определенных условиях образуют ударную волну, а именно, при надлежащем подборе радиусов пульсирующих сферы и цилиндра, амплитуды и частоты гармонических пульсаций. Так как обе тенденции изменения ширины фронта ударной волны в расходящихся волнах однонаправленны, то образовавшиеся ударные фронты весьма быстро «рассасываются» и при достижении безразмерной ширины фронта δ величины порядка π волны вновь становятся синусоидальными. Амплитуды волн при этом уменьшаются, как v_0/Re , так что за координатой «рассасывания» ударного фронта (в третьей области распространения волны) вполне правомерно описание распространения расходящихся волн законами линейной акустики.

Однако легко может быть реализован и такой случай, когда начальные условия таковы, что координата формирования ударного фронта находится дальше от источника гармонических пульсаций, чем координата рассасывания разрыва. Это абсурдное, на первый взгляд, положение означает лишь то, что за счет расходимости волна конечной амплитуды раньше превращается в волну бесконечно малой амплитуды, чем в ней успеют сколь-нибудь заметно проявиться накапливающиеся нелинейные эффекты.

В сходящихся волнах нелинейные параметры и факторы схождения влияют противоположно. Нелинейные параметры по-прежнему вызывают увеличение ширины фронта, тогда как факторы схождения сужают ударный фронт. На рис. III.3 приведены три кривые, дающие зависимость ширины ударного фронта от безразмерного расстояния, пройденного волной от источника возмущения к фокусу системы. Все три кривые имеют максимумы, хотя построены для различных излучающих систем. В точном соответствии с решением (III.5.6) цилиндрическая волна образует фронт максимальной крутизны

порядка $\sim 1/\pi \operatorname{Re}$ при достижении параметром нелинейных искажений величины $\approx \pi/2$. В то же время безразмерная ширина фронта как функция пройденного волной расстояния имеет максимум, равный $(1 + 2Z_0)^2/16\pi \operatorname{Re} Z_0$, который достигается в точке $r_{\max} = (1 + 2Z_0)^2 r_0/16Z_0^2$. Затем ширина фронта убывает и стремится к нулю в фокусе системы.

Если не рассматривать тот специальный случай, о котором упоминалось в § 3, когда цилиндрическая сходящаяся волна не успевает образовать ударный фронт, то

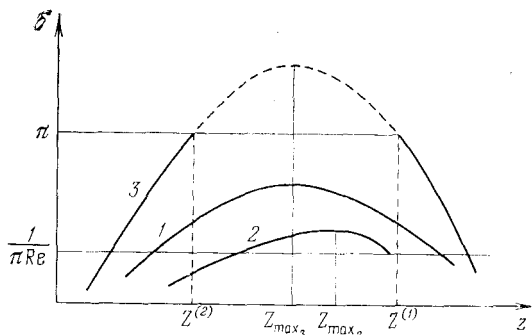


Рис. III.3. Ширина фронта сходящейся ударной волны как функция безразмерного расстояния; точки $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ соответствуют значениям $\delta = \pi$.

наше описание вполне справедливо. Напомним, что за вычетом упомянутого специального случая, для сходящейся цилиндрической волны условия применимости квазистационарного решения выполняются всегда. А это означает, что сходящаяся цилиндрическая волна формирует ударный фронт дважды и процесс фокусировки разбивается на три этапа: первичное формирование ударного фронта, его частичное или полное «рассасывание» и вторичное и окончательное формирование ударного фронта при приближении к фокусу системы.

Кривые 1 и 2 на рис. III.3 как раз иллюстрируют частичное рассасывание ударного фронта. Величина и положение их максимумов различны в зависимости от начальных параметров фокусирующей системы. Кривая 3

относится к случаю полного рассасывания ударного фронта, а ее пунктирная часть к той области распространения волны, когда ширина ударного фронта δ формально занимает фазовый интервал больше π . При достижении же фронтом волны фазового интервала в π , волна перестает быть волной конечной амплитуды и превращается в бесконечно малую звуковую волну.

Следовательно, кривая 3 не только иллюстрирует двукратное формирование ударного фронта, но и отмечает весьма любопытный факт: при определенных условиях сходящаяся волна конечной амплитуды может за счет диссипации превратиться в волну бесконечно малой амплитуды, а затем за счет схождения к фокусу системы вновь стать волной конечной амплитуды вплоть до превращения в ударную волну. Не следует полагать, что этот процесс может быть повторен многократно. Ширина фронта ударной волны имеет единственный максимум.

На рис. III.4 приведена зависимость амплитуды скорости в сходящейся цилиндрической волне от расстояния от излучателя — амплитудная часть решения (III.5.5). Для сравнения там же пунктиром приведена кривая, соответствующая линейной теории. Область $(Z^{(1)} - Z^{(2)})$ как раз соответствует области диссипативного расширения ударного фронта.

Все изложенное на примере цилиндрической сходящейся волны в равной степени относится и к сходящимся сферическим волнам, для которых без труда можно воспроизвести все выполненные выше оценки, исходя из формул (III.5.4) и (III.5.3).

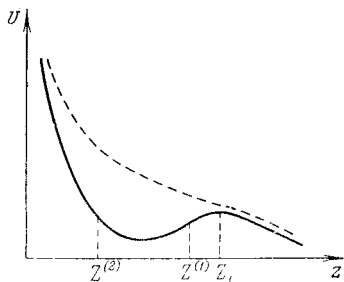


Рис. III.4. Зависимость амплитуды скорости в сходящейся цилиндрической волне от расстояния (сплошная линия). Штриховая кривая соответствует линейной теории.

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

§ 1. О дисперсионных свойствах среды.

Среда с релаксацией

В главе I при рассмотрении римановых волн было показано, что между переменными ρ , p , v существует связь

$$\rho = \rho(v), \quad p = p(v), \quad (\text{IV.1.1})$$

т. е. значение скорости v в некоторый момент времени и в фиксированной точке пространства однозначно определяет соответствующие давление и плотность. Локальный характер связи (IV.1.1) приводит к отсутствию дисперсии в акустике идеальной и безграничной среды: волны бесконечно малой амплитуды, имеющие различную частоту ω , распространяются с одной и той же скоростью c_0 . Зависимость волнового числа k от ω при этом линейна:

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0}. \quad (\text{IV.1.2})$$

Однако уже при учете слабого поглощения получается выражение (см. (B.1.28))

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left(1 - i \frac{b\omega}{2c_0^2\rho_0} \right), \quad (\text{IV.1.3})$$

в котором мнимая добавка ответственна за диссипацию волны (иногда поглощение, зависящее от ω , называют мнимой дисперсией). Соответствующие связи волновых параметров становятся нелокальными (II.1.12), (II.1.13). Вообще говоря, соотношение (IV.1.3) является неточным,

и следует писать

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} [1 + \beta'(\omega) + i\beta''(\omega)], \quad (\text{IV.1.4})$$

где действительный $\beta'(\omega)$ и мнимый $i\beta''(\omega)$ члены, определяющие дисперсию и поглощение, связаны фундаментальными соотношениями, вытекающими из принципа причинности (аналогичными формулам Крамерса — Кронига в электродинамике). Отсюда следует, что диспергирующая среда принципиально является средой поглощающей и для определения $\beta''(\omega)$ достаточно знать частотную зависимость $\beta'(\omega)$.

Из физических соображений также ясно, что воспользовавшись законом дисперсии (IV.1.3), где учтено только поглощение, мы совершили некоторую ошибку. Действительно, одним из эффектов, вызванных затуханием звука, будет возникновение акустических течений (см. гл. VIII). В результате поглощения волны среде передается определенный импульс, и она приходит в движение. Скорость распространения волны в движущейся среде уже отличается от c_0 , что эквивалентно появлению дисперсии.

В общем случае, для линейной среды, связь между параметрами волны, например p' и ρ' , выражается функционалом

$$p' = \int_{-\infty}^t dt' \int \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \rho'(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \quad (\text{IV.1.5})$$

Если среда однородна и не изменяет со временем своих свойств, то ядро $\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ зависит только от разности пространственных и временных переменных $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $t - t'$. В тех случаях, когда поле в данной точке не определяется полем в других точках, ядро

$$\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \kappa(t - t'), \quad (\text{IV.1.6})$$

т. е. процесс обладает свойством локальности в пространстве.

Это условие выполнено при длинах волн λ , которые много больше характерного внутреннего размера — длины свободного пробега молекул в жидкостях и газах, или размеров кристаллической решетки в твердых телах.

Условие локальности в пространстве выполняется для волн ультразвукового диапазона, но может нарушаться для гиперзвука либо в случае среды с искусственной неоднородностью.

С помощью (IV.1.6) функционал (IV.1.5) приводится к виду

$$p' = \int_{-\infty}^t \kappa(t-t') \rho'(t') dt'. \quad (\text{IV.1.7})$$

По аналогии с (IV.1.7) можно записать нелинейные члены, получающиеся при разложении p' по степеням ρ' :

$$p' = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \dots,$$

где

$$p^{(2)} = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} \chi(t-t'-t'') \rho'(t') \rho'(t'') dt'' \quad (\text{IV.1.8})$$

описывает квадратичные нелинейные эффекты, а

$$p^{(3)} = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{t''} \theta(t-t'-t''-t''') \rho'(t') \rho'(t'') \times \\ \times \rho'(t''') dt''' \quad (\text{IV.1.9})$$

— кубичные. В нелинейной акустике обычно ограничиваются рассмотрением квадратичных нелинейных членов, поскольку в силу малости числа Маха выполнены неравенства

$$p^{(1)} \gg p^{(2)} \gg p^{(3)} \gg \dots \quad (\text{IV.1.10})$$

Для нахождения явного вида выражений κ , χ , θ необходимо, вообще говоря, учитывать внутреннюю структуру среды и применять методы микроскопической теории. Однако ряд важных результатов может быть получен с помощью феноменологического подхода, предложенного Мандельштамом и Леонтовичем (см., например, [1]).

Рассмотрим среду, в которой распространение звуковых волн нарушает состояние термодинамического равновесия. В силу второго начала термодинамики среда стремится вернуться к равновесному состоянию при но-

вых, измененных волной значениях параметров. Если характерное время τ релаксации к равновесному состоянию много меньше, чем период осцилляций T , среда успевает полностью «приспособиться» к изменениям, вносимым волной, и распространение звука в этом предельном случае происходит так же, как и в среде без релаксации — со скоростью c_0 . Если же $\tau \gg T$, релаксационные процессы «заморожены» и звук распространяется со скоростью c_∞ , причем $c_\infty > c_0$.

В качестве релаксационных процессов, вносящих запаздывание, могут выступать химические реакции, диссоциация, фазовые переходы, обмен энергией между различными степенями свободы молекул и т. д. При феноменологическом подходе можно отвлечься от конкретной природы внутренних процессов. Будем считать, что в среде имеется один механизм релаксации (обобщение на случай нескольких механизмов не представляет труда), наличие которого может быть учтено введением «внутренней координаты» ξ . Если в обычных средах $p = p(\rho, s)$, то теперь необходимо писать

$$p = p(\rho, s, \xi). \quad (\text{IV.1.11})$$

Закон приближения ξ к равновесному значению ξ_0 при начальном условии $\xi(t=0) = \xi(0)$ примем в простейшей экспоненциальной форме

$$\xi = \xi_0 + [\xi(0) - \xi_0]e^{-t/\tau}. \quad (\text{IV.1.12})$$

Нетрудно видеть, что это выражение является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi - \xi_0}{\tau}, \quad (\text{IV.1.13})$$

которое называют уравнением реакции. Ограничиваясь рассмотрением небольших отклонений от состояния равновесия, будем считать величины

$$\frac{v}{c_0}, \quad \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \sim \mu. \quad (\text{IV.1.14})$$

Ограничимся также рассмотрением таких сред, в которых величина $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2$ является малой. Точное

уравнение состояния (IV.1.11) удобно представить в виде разложения по степеням ρ' , $\xi - \xi_0$, $s - s_0$. Пренебрегая при этом малыми членами $\sim \mu^3$ и выше, в том числе и членами, обусловленными приращением энтропии, получим

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi_0} \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho_0} (\xi - \xi_0). \quad (\text{IV.1.15})$$

Здесь необходимо учесть, что само равновесное состояние является функцией плотности: $\xi_0 = \xi_0(\rho)$, поэтому

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi_{00}} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}; \quad (\text{IV.1.16})$$

ξ_{00} — это невозмущенное волной значение внутреннего параметра ξ . По смыслу ясно, что $(\partial p / \partial \rho)_{\xi_{00}} = c_\infty^2$, а $(\partial p / \partial \rho)_{\xi_0} = c_0^2$. Дифференцируя (IV.1.15) по времени, придем к соотношению

$$\frac{dp'}{dt} = c_\infty^2 \frac{d\rho'}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho_0} \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho' \frac{d\rho'}{dt}. \quad (\text{IV.1.17})$$

Если теперь в формуле (IV.1.15) заменить выражение $(\xi - \xi_0)$ на $-\tau d\xi/dt$ (с помощью уравнения реакции) и исключить из полученного соотношения и (IV.1.17) член, содержащий производную $d\xi/dt$, можно получить следующую взаимосвязь давления и плотности в релаксирующей среде во втором приближении:

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} + \frac{p'}{\tau} = \frac{d}{dt} \left[c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho'^2 \right] + \\ + \frac{1}{\tau} \left[c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho'^2 \right] + mc_0^2 \frac{d\rho'}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.18})$$

Это выражение удобно представить в интегральной форме

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho'^2 + mc_0^2 \int_{-\infty}^t \frac{d\rho'}{dt'} e^{-(t-t')/\tau} dt', \quad (\text{IV.1.19})$$

или, преобразуя интеграл по частям, в виде [64]

$$p' = c_\infty^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \rho'^2 - \frac{mc_0^2}{\tau} \int_{-\infty}^t \rho'(t') e^{-(t-t')/\tau} dt'. \quad (\text{IV.1.20})$$

Таким образом, сравнивая полученный результат с функционалами (IV.1.7), (IV.1.8), можно установить явный вид выражений для κ , χ :

$$\begin{aligned}\kappa &= c_\infty^2 \delta(t - t') - \frac{mc_0^2}{\tau} e^{-(t-t')/\tau}, \\ \chi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial \rho^2} \right)_{\xi_0} \delta(t - t') \delta(t - t'').\end{aligned}\quad (\text{IV.1.21})$$

Прежде чем переходить к рассмотрению нелинейных задач, покажем, как релаксационные процессы влияют на распространение волны в линейном приближении. Воспользуемся линейными уравнениями гидродинамики (B.1.9), (B.1.10) и уравнением состояния (IV.1.19), в котором отбросим нелинейный член. Исключая переменные v и p , получим волновое уравнение для ρ' :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' - mc_0^2 \Delta \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho'}{\partial t'} e^{-(t-t')/\tau} dt' = 0. \quad (\text{IV.1.22})$$

Если умножить (IV.1.22) на τ и продифференцировать по t , а затем сложить результат с (IV.1.22), придем к уравнению в дифференциальной форме

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' \right] + \left[\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' \right] - mc_0^2 \tau \Delta \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0. \quad (\text{IV.1.23})$$

Для получения дисперсионного уравнения ищем решение в виде $\rho' = \rho'_0 e^{i(\omega t - kx)}$. Подстановка этого выражения в любое из уравнений (IV.1.22), (IV.1.23) дает

$$\omega = \pm c_0 k \sqrt{1 + m \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}}. \quad (\text{IV.1.24})$$

Воспользовавшись тем фактом, что константа m является малой величиной, преобразуем это выражение к виду

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left[1 - \frac{m}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{m}{2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right]. \quad (\text{IV.1.25})$$

Результат (IV.1.25) показывает, что релаксационные процессы в среде приводят к появлению дисперсии скорости

звука и связанному с ней поглощению:

$$c = c_0 \left[1 + \frac{m}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right], \quad \alpha = \frac{m}{2c_0 \tau} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (\text{IV.1.26})$$

Кривые для фазовой скорости c ($\omega\tau$) и коэффициента

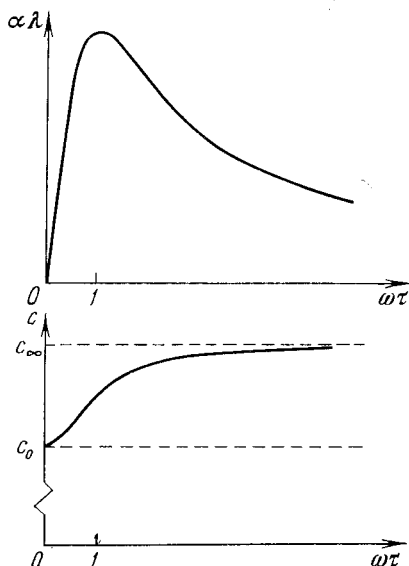


Рис. IV. 1. Коэффициент затухания и фазовая скорость в среде с релаксацией.

затухания α ($\omega\tau$) изображены на рис. IV.1 в соответствии с выражениями (IV.1.26).

§ 2. Слабая и сильная дисперсия

В нелинейной акустике обычно имеют дело со слабой дисперсией, т. е. с такими средами, в которых искажение профиля начального возмущения за счет различия фазовых скоростей у разных гармоник значительно слабее, чем искажения из-за других причин: нелинейности, поглощения, дифракции и т. д.

Покажем на примере простейшей задачи теории нелинейных волн — генерации второй гармоники, — к каким физическим явлениям приводит наличие дисперсии.

Уравнение, описывающее поведение второй гармоники, аналогично (I.1.5):

$$\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} = L_2 \left[v_0^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right]. \quad (\text{IV.2.1})$$

Здесь c_1, c_2 — фазовые скорости волн с частотой ω и 2ω соответственно. Правая часть уравнения (IV.2.1) имеет смысл «вынуждающей силы», наличие которой может привести к появлению не только второй гармоники ($\omega + \omega = 2\omega$), но и постоянной составляющей ($\omega - \omega = 0$). Поскольку акустическое детектирование здесь не рассматривается, надо оставить лишь фурье-компоненту правой части на частоте 2ω , и уравнение (IV.2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} = -A \sin \left[2\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + \varphi \right], \quad (\text{IV.2.2})$$

где A, φ — константы, определяемые явным выражением для L_2 . Общим решением уравнения (IV.2.2) будет сумма решений однородного уравнения ($A = 0$) и частного решения неоднородного уравнения ($A \neq 0$). Соответствующие волны, описываемые этими решениями, могут быть названы собственной и вынужденной волнами:

$$v^{(2)} = v_{\text{соб}}^{(2)} + v_{\text{вын}}^{(2)}; \quad (\text{IV.2.3})$$

здесь

$$v_{\text{соб}}^{(2)} = v_{\text{соб}}^{(2)}(x=0) \cdot \sin(2\omega t - k_2 x + \varphi_1), \quad k_2 = \frac{2\omega}{c_2}, \quad (\text{IV.2.4})$$

$$v_{\text{вын}}^{(2)} = \frac{A}{c_2^2 (k_2^2 - 4k_1^2)} \sin(2\omega t - 2k_1 x + \varphi), \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (\text{IV.2.5})$$

Чтобы удовлетворить граничному условию — отсутствию второй гармоники в начале координат (при $x = 0$), положим произвольные константы равными

$$\varphi_1 = \varphi, \quad v_{\text{соб}}^{(2)}(x=0) = -\frac{A}{c_2^2 (k_2^2 - 4k_1^2)}. \quad (\text{IV.2.6})$$

После несложных преобразований уравнений (IV.2.3) —

(IV.2.6) придем к выражению

$$v^{(2)} = \frac{2A}{c_2^2(k_2^2 - 4k_1^2)} \sin\left(\frac{k_2 - 2k_1}{2}x\right) \cos\left[2\omega t - \frac{2k_1 + k_2}{2}x + \varphi\right], \quad (\text{IV.2.7})$$

согласно которому амплитуда волны частоты 2ω не остается постоянной, а испытывает биения в пространстве. Амплитуда и пространственный период этих биений определяются величиной расстройки $\Delta = |k_2 - 2k_1|$.

Как показано на рис. IV.2, с уменьшением Δ период и амплитуда биений возрастают. Предельный случай

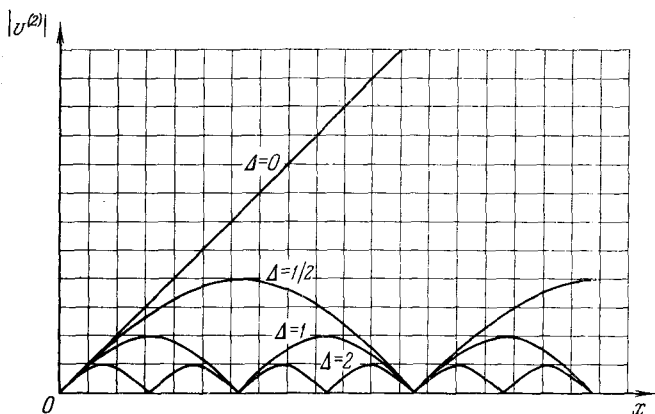


Рис. IV.2. Процесс генерации второй гармоники в зависимости от дисперсионных свойств системы.

$\Delta \rightarrow 0$ соответствует синхронному, накапливающемуся взаимодействию: при этом раскрытие неопределенности вида $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) / \frac{\Delta}{2}$ в формуле (IV.2.7) приводит к линейному закону нарастания амплитуды второй гармоники. В общем же случае, при $\Delta \neq 0$, монотонное возрастание амплитуды происходит только на отрезке $0 \leq x \leq l_{\text{ког}2}$, где

$$l_{\text{ког}2} = \frac{\pi}{|k_2 - 2k_1|} = \frac{\pi c_1 c_2}{2\omega |c_1 - c_2|} \quad (\text{IV.2.8})$$

— так называемая «длина когерентного взаимодействия» (см. [10]) между волнами ω , 2ω . По аналогии можно ввести когерентные длины $l_{\text{ког } 3}$, $l_{\text{ког } 4}$, ..., $l_{\text{ког } n}$, ...

С помощью выражения (IV.2.8) мы сформулируем, следуя [10], условие разделения сред на сильно- и слабо-диспергирующие.

О сильной дисперсии говорят, когда расстояние x_p (см. (I.5.2)), на котором в недиспергирующей среде (обладающей теми же нелинейными свойствами, что и рассматриваемая реальная диспергирующая среда) образуется разрыв, много больше, чем все $l_{\text{ког } n}$ (за исключением, быть может, небольшого числа когерентных длин для низших гармоник, т. е. $n \geq 2-3$). Случай сильной дисперсии реализуется в подавляющем большинстве практически интересных задач: в нелинейной оптике [10], волнах в плазме [13], в теории поверхностных волн [65, 66] и т. д. Волнам в сильнодиспергирующих средах посвящена обширная литература, в которой отражены как физические результаты, так и математические методы их получения (см., например, обзоры [15, 16]). На этих методах мы коротко остановимся в гл. VI, где будет рассматриваться случай сильной дисперсии применительно к проблемам нелинейной акустики.

В тех случаях, когда выполнено обратное неравенство

$$x_p \leq l_{\text{ког } n}, \quad (\text{IV.2.9})$$

о среде говорят как о слабодиспергирующей. Поскольку для формирования пилообразной волны можно взять конечное число гармоник $N \sim 10$, достаточно потребовать выполнения неравенства (IV.2.9) только для первых $\sim N$ когерентных длин.

Покажем, что условие (IV.2.9) выполняется для среды с релаксацией. Для этого заметим, что

$$\min \{l_{\text{ког } n}\} \geq \frac{\pi c_0^2}{2\omega (c_\infty - c_0)} = \frac{\pi c_0}{\omega m} \quad (\text{IV.2.10})$$

и неравенство (IV.2.9) накладывает следующее ограничение на величину чисел M , m , т. е. на соотношение между нелинейными и дисперсионными свойствами среды:

$$m \leq \pi \varepsilon M. \quad (\text{IV.2.11})$$

Это ограничение является сильным в том смысле, что выполнение его гарантирует условие (IV.2.9) для любого номера n независимо от конкретной формы дисперсионной характеристики (IV.1.26) и выбранной частоты ω первой гармоники. В дальнейшем при рассмотрении волн в релаксирующих средах будет всюду предполагаться, что неравенство (IV.2.11) выполнено. Это предположение позволит использовать при анализе тот же асимптотический метод (основанный на факте медленности искажения профиля волны в сопровождающей системе координат), который применялся ранее в гл. II, III.

§ 3. Распространение конечных возмущений в релаксирующей среде

Схема получения основных уравнений теории нелинейных волн в среде с релаксацией стандартна и уже использовалась в других разделах (см., например, гл. II, § 1).

С помощью нового уравнения состояния (IV.1.19) из уравнения движения (B.1.4) можно исключить переменную p' . Затем, переходя в одномерном случае к сопровождающей системе координат, отбрасывая малые члены выше чем второго порядка малости, придем к двум уравнениям вида (II.1.8), (II.1.9). После освобождения от членов первого порядка малости и замены во всех членах второго порядка величины ρ'/ρ_0 на v/c_0 получим одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для переменной v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^y \frac{\partial v}{\partial y'} e^{-(y-y')/\tau} dy'. \quad (\text{IV.3.1})$$

Поскольку буква τ обозначает характерное время релаксации, всюду в этой главе бегущая координата будет обозначаться через y : $y = t - (x/c_0)$. Полезно также иметь в виду уравнение в дифференциальной форме, которое следует из (IV.3.1) [56, 67]:

$$\tau \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{m\tau}{2c_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (\text{IV.3.2})$$

К сожалению, уравнения (IV.3.1) и (IV.3.2) пока не удалось решить аналитически. Поэтому анализ процессов искажения формы волны будет носить преимущественно асимптотический и качественный характер.

Прежде всего заметим, что в релаксирующей среде может существовать стационарная волна типа симметричного скачка. Пренебрегая в (IV.3.2) производными по x , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dy} \left[v \frac{dv}{dy} + \frac{v^2}{2\tau} + \frac{mc_0}{2\varepsilon} \frac{dv}{dy} \right] = 0. \quad (\text{IV.3.3})$$

Интегрируя его и определяя константу из условий: $dv/dy \rightarrow 0$; $v \rightarrow v_0$ при $y \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\tau} \frac{v_0^2 - v^2}{mc_0/2\varepsilon + v}. \quad (\text{IV.3.4})$$

Решение уравнения (IV.3.4) имеет вид

$$\frac{y + y_0}{\tau} = \ln \frac{(1 + v/v_0)^{D-1}}{(1 - v/v_0)^{D+1}}, \quad (\text{IV.3.5})$$

где y_0 — постоянная интегрирования, а

$$D = \frac{m}{2\varepsilon M} \quad (\text{IV.3.6})$$

— параметр, учитывающий относительный вклад дисперсии и нелинейности.

Форма функции $v(y)$ имеет качественно различный вид для случаев $D > 1$ и $D < 1$. При $D \gg 1$, что соответствует слабым проявлениям нелинейных эффектов (при этом условие (IV.2.11), вообще говоря, нарушается), выражение (IV.3.5) сводится к выражению $v = v_0 \tanh(y/2D\tau)$, характерному для структуры скачка в обычной вязкой среде (рис. IV.3, а). При уменьшении D (при $D > 1$) форма скачка уплотнения становится несимметричной относительно среднего уровня (рис. IV.3, б), а при $D < 1$ функция $v(y)$ вообще становится неоднозначной (рис. IV.3, в). Ввиду физической абсурдности такого положения нужно ожидать, что решение приобретает в этом случае разрывный характер.

Разрывные решения дифференциальных уравнений можно рассматривать как пределы непрерывных решений более точных уравнений высшего порядка при стремлении к нулю значений «паразитных» параметров, являющихся коэффициентами при высших производных. В случае релаксирующей среды в качестве «паразитных»

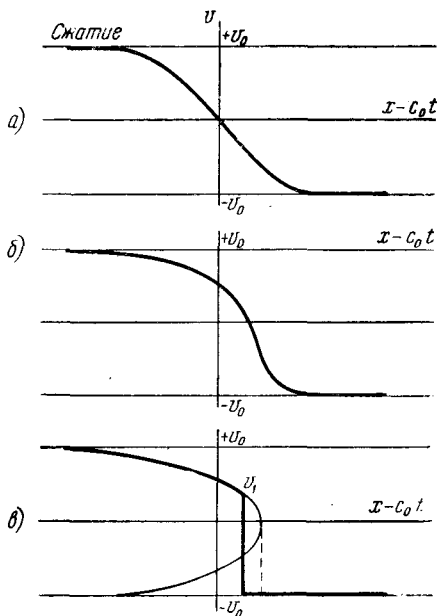


Рис. IV.3. Одиночный стационарный скачок в релаксирующей среде при различных значениях числа D .

процессов естественно учесть влияние сдвиговой вязкости и теплопроводности, как это делалось при выводе уравнения Бюргерса. Тогда вместо (IV.3.2) получим

$$\tau \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = \frac{m\tau}{2c_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (\text{IV.3.7})$$

Пренебрегая производными $\partial v/\partial x$, приходим к уравнению, описывающему стационарную волну

$$\delta \frac{d^2 v}{dy^2} + \left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{\tau} \right) \frac{dv}{dy} + \frac{v^2 - v_0^2}{2\tau} = 0, \quad (\text{IV.3.8})$$

где $\delta = b/2\varepsilon c_0 \rho_0$. Легко видеть, что при стремлении δ к нулю уравнение (IV.3.8) переходит в (IV.3.4). Наиболее просто проанализировать поведение решения уравнения (IV.3.8) на фазовой плоскости $(v; dv/dy)$ с помощью метода изоклин [56].

Обозначая через $w = dv/dy$, можно получить уравнение траекторий на фазовой плоскости:

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{1}{\delta w} \left[\left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{\tau} \right) w + \frac{v^2 - v_0^2}{2\tau} \right]. \quad (\text{IV.3.9})$$

На рис. IV.4 представлена интегральная кривая, описывающая структуру скачка уплотнения в случае малого значения δ , — жирная кривая, а тонкой линией изображена изоклина горизонтальных касательных. При больших значениях производной dv/dy уравнение (IV.3.8) переходит в уравнение

$$\delta \frac{d^2 v}{dy^2} + \left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} \right) \frac{dv}{dy} = 0. \quad (\text{IV.3.10})$$

Первый интеграл этого уравнения имеет вид $dv/dy = - \left[\left(v + \frac{mc_0}{2\varepsilon} \right)^2 - A^2 \right] / 2\delta$, где $A = -v_0 + (mc_0/2\varepsilon)$ — константа интегрирования. Из этого соотношения видно, что интегральная кривая, описывающая разрывное решение, при $\delta = 0$ должна возвращаться из бесконечности в точку v_1 , расположенную симметрично v_0 относительно

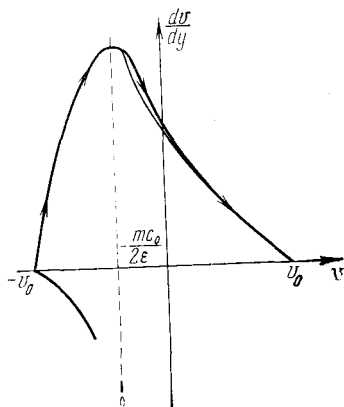


Рис. IV.4. Анализ структуры скачка уплотнения на фазовой плоскости.

$v = -mc_0/2\varepsilon$. Это значение v_1 будет значением скорости сразу за точкой разрыва. Оно равно $v_1 = v_0 - mc_0/\varepsilon$.

Полученные уравнения (IV.3.1), (IV.3.2) позволяют также рассмотреть задачу о распространении периодических возмущений.

Пусть на входе в систему при $x = 0$ волна задана в виде

$$v = v_0 \sin \omega y. \quad (\text{IV.3.11})$$

При рассмотрении процесса искажения синусоидального возмущения удобно в исходных уравнениях перейти к безразмерным переменным

$$\theta = \omega y, \quad \varsigma = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x, \quad V = \frac{v}{v_0}. \quad (\text{IV.3.12})$$

Уравнение (IV.3.1), более удобное для анализа, в этих переменных приводится к виду

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = D \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta'} e^{-\frac{\theta - \theta'}{\omega \tau}} d\theta'. \quad (\text{IV.3.13})$$

Рассмотрим сначала периодическое возмущение скорости с такой частотой ω , чтобы выполнялось условие $\omega \tau \ll 1$.

В этом случае уравнение (IV.3.13) может быть упрощено. В основу упрощения следует положить тот факт, что экспонента $e^{-\frac{\theta - \theta'}{\omega \tau}}$, стоящая под знаком интеграла в правой части (IV.3.13), при малых $\omega \tau$ изменяется гораздо быстрее, чем $\partial V / \partial \theta'$. Поэтому $\partial V / \partial \theta'$ можно разложить в ряд по малому запаздыванию $\theta' - \theta$ в окрестности точки θ :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta'} = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} (\theta' - \theta) + \dots \quad (\text{IV.3.14})$$

Подставляя первые два члена разложения (IV.3.14) в уравнение (IV.3.13) и выполняя интегрирование, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = D \left[\omega \tau \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - (\omega \tau)^2 \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} \right] \quad (\text{IV.3.15})$$

— это так называемое уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргера [17]. Первый член его правой части связан с наличием диссипации, второй — дисперсии.

Как известно (см., например, [17]), при отсутствии диссипативного члена уравнение (IV.3.15) описывало бы процесс распада начального возмущения произвольной

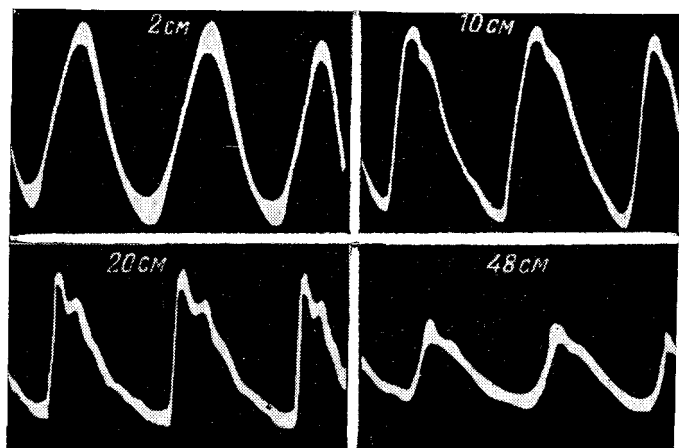


Рис. IV.5. Пульсации у вершины пилообразной волны.

формы на ряд слабо взаимодействующих между собой одиночных импульсов — солитонов. Наличие достаточно сильной диссипации приводит к «сглаживанию» процесса распада, и солитоны могут не образоваться. Именно этот случай реализуется для волн в релаксирующей среде, поскольку $\omega\tau \ll 1$ и первый член в правой части уравнения (IV.3.15), как правило, много больше второго.

Тем не менее при не слишком малых $\omega\tau$ ($\omega\tau \lesssim 1$ — этот случай наиболее труден для аналитического рассмотрения) и при наличии достаточно крутых перепадов в профиле волны, на которых $\partial^3 V / \partial \theta^3 > \partial^2 V / \partial \theta^2$, диссипативный и дисперсионный члены могут быть сравнимы по величине. Именно влияние дисперсии, по-видимому, ответственно за образование слабых пульсаций около

вершины пилообразной волны (рис. IV.5), наблюдаемых в эксперименте [35].

Для качественного описания искажения волны в предельном случае $\omega t \ll 1$ заметим, что на первом этапе распространения волны (до момента образования разрыва) правой частью уравнения (IV.3.15) можно пренебречь. При этом деформация профиля происходит точно так же, как и в обычной недиссипативной среде. В окрестности точки $\sigma = 1$ пренебрежение релаксационными процессами уже неправомерно, и форму профиля можно получить

с помощью «сшивания» стационарного скачка ((IV.3.5), рис. IV.3), описывающего структуру фронта, и прямолинейного участка пилообразной волны [68]:

$$V = \frac{1}{1 + \sigma} \left[-\omega y + \pi f \left(\frac{\omega y}{\delta} \right) \right]. \quad (\text{IV.3.16})$$

где $\delta = (1 + \sigma)/(\pi/2 \omega t D)$ — безразмерная ширина фронта ударной волны. Выражение (IV.3.16) отличается от решения (II.2.10) для нерелаксирующей среды только вторым членом в квадратной скобке, где вместо гиперболического тангенса, описывающего структуру слабого разрыва в среде с обычной вязкостью, стоит выражение $f(\omega y)$, взя-

Рис. IV.6. Профили одного периода волны в случае преобладания дисперсионных (а) и нелинейных (б) свойств среды.

тое из формулы (IV.3.5). Полученные на основе такого сшивания профили одного периода волны изображены на рис. IV.6, а, б для $D > 1$, $D < 1$.

Заметим, что влияние релаксационных процессов при $\omega t \ll 1$ приводит лишь к появлению асимметрии волны. Однако эта асимметрия по мере распространения волны уменьшается, и на больших расстояниях ударная волна превращается в синусоидальную.

В другом предельном случае, когда $\omega\tau \gg 1$, для упрощения уравнения (IV.3.13) нужно заметить, что экспонента $e^{-(\theta-\theta')/\omega\tau}$ в пределах одного периода волны меняется незначительно по сравнению с $\partial V/\partial\theta'$ и ее можно разложить в ряд: $1 + (\theta' - \theta)/\omega\tau + \dots$. Тогда вместо (IV.3.13) получим уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma} - V \frac{\partial V}{\partial\theta} = D \left(\frac{\partial V}{\partial\theta} - \frac{V}{\omega\tau} \right), \quad (\text{IV.3.17})$$

которое еще более упростится, если перейти к новой сопровождающей системе координат: $\sigma' = \sigma$, $\theta' = \omega(t - (x/c_\infty))$, бегущей со скоростью c_∞ :

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma'} - V \frac{\partial V}{\partial\theta'} = - \frac{DV}{\omega\tau}. \quad (\text{IV.3.18})$$

Решение этого уравнения при начальном возмущении $V = \sin \theta'$ (при $\sigma' = 0$) имеет вид [69]

$$\theta' = \arcsin \left(V e^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau}} \right) - \frac{\omega\tau}{D} \left(1 - e^{-\frac{D\sigma'}{\omega\tau}} \right) \left(V e^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau}} \right). \quad (\text{IV.3.19})$$

Соотношение (IV.3.19) записано в форме, удобной для графического анализа. Действительно, отложив по оси абсцисс $V e^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau}}$, а по оси ординат θ' (так, как это делалось на рис. I.8 при анализе выражения (I.5.1)), можно проследить искажение полного профиля в зависимости от расстояния, пройденного волной, так как θ' находится сложением двух функций — арксинуса и линейной функции, описывающей прямую с угловым коэффициентом $Z = \frac{\omega\tau}{D} \left(1 - e^{-\frac{D\sigma'}{\omega\tau}} \right)$. Угловым коэффициентом Z имеет смысл приведенного расстояния. На расстояниях, соответствующих $Z \simeq 1$, начинается процесс формирования разрыва, который заканчивается при $Z = \pi/2$. Приведенное расстояние зависит от σ нелинейно, имея характерную область насыщения, где $Z_\infty = \omega\tau/D$.

Если начальная амплитуда v_0 достаточно мала, так что на любых расстояниях значение $Z < 1$, то разрыв не формируется вовсе. Если же начальная амплитуда столь

велика, что $Z_\infty \gg 1$, нелинейные эффекты вначале преобладают над эффектами диссипации энергии, и формируется ударная волна. Сформированная пилообразная волна уменьшается с расстоянием по амплитуде. Следует подчеркнуть, что хотя волна может иметь разрыв и при очень больших σ , на расстояниях, удовлетворяющих соотношению $e^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau}} \gg Z_\infty$, процесс распространения описывается уже линеаризованными уравнениями. В этой области (в отличие от случая $\omega\tau \ll 1$) в рассматриваемом приближении нет никаких сил, приводящих к расплыванию сформировавшегося разрыва, и он сохраняется вплоть до очень больших значений σ' .

Наконец, исходя из условия существования разрывных решений $Z_\infty \geq 1$, можно определить критическое значение входной амплитуды $v_{кр}$. При начальных возмущениях $v_0 < v_{кр}$ разрыв не может сформироваться ни на каких расстояниях даже в пренебрежении диссипацией энергии.

Критическая величина амплитуды возмущения скорости на входе системы, таким образом, определяется из значения $Z_\infty = 1$ и равна $v_{кр} = 2 \epsilon m c_0 / \omega \tau$.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

§ 1. Коллинеарное взаимодействие плоских волн

Нарушение принципа суперпозиции возмущений в нелинейной акустике приводит к тому, что исходные волны могут взаимодействовать друг с другом. Так, например, если источник звука излучает в среду две волны с частотами ω_1 и ω_2 , то на некотором расстоянии от него в среде появятся, помимо кратных гармоник волн ω_1 , ω_2 , еще и комбинационные частоты $n\omega_1 \pm m\omega_2$ (где n , m — натуральные числа). В общем случае, при произвольных ω_1 и ω_2 , картина движения оказывается весьма сложной. Однако большинство физически интересных задач может быть решено до конца.

Этот параграф посвящен рассмотрению процесса взаимодействия плоских волн, бегущих строго в одном направлении. В гл. I, II уже говорилось об общих методах решения такого рода задач. Поскольку уравнение Бюргерса (II.1.10) описывает искажение начальных возмущений произвольной формы и может быть решено точно в общем виде, никаких принципиальных трудностей при рассмотрении волновых взаимодействий такого типа не существует. Достаточно найти решение уравнения (II.1.10). при заданном условии на границе, а затем произвести его гармонический анализ. Однако в силу сложного вида получаемого решения реализация этой схемы часто бывает сопряжена со значительными математическими трудностями. Поэтому целесообразно получать физические результаты более простыми путями, используя специфику каждой конкретной задачи.

Рассмотрим вначале процесс взаимодействия двух близких по частоте плоских волн ($\omega_1 \approx \omega_2$), т. е. проследим

за деформацией возмущения, заданного в точке $x = 0$ в виде

$$v = v_{01} \cos \omega_1 \tau + v_{02} \cos \omega_2 \tau. \quad (\text{V.1.1})$$

При таком взаимодействии комбинационный тон, соответствующий разностной частоте $\Omega \approx \omega_1 - \omega_2$, в среде со стоковыми вязкостью и теплопроводностью затухает гораздо медленнее взаимодействующих волн (так как $\Omega \ll \omega_2, \omega_1$). Это может привести к тому, что на некотором расстоянии от излучателя интенсивность комбинационного тона превысит интенсивности исходных волн, т. е. произойдет смещение спектрального максимума процесса в область низких частот. Совершенно аналогичное явление должно иметь место и при распространении амплитудно-модулированного сигнала:

$$v = v_0 (1 + m \sin \Omega \tau) \sin \omega \tau. \quad (\text{V.1.2})$$

Возникающая вследствие нелинейных эффектов волна частоты модуляции Ω , слабо затухая, может постепенно превысить по интенсивности волну несущей частоты.

Поскольку уравнение Бюргерса свободно от ограничений на величину числа Рейнольдса, мы рассмотрим здесь два предельных случая: когда число Рейнольдса много меньше или, напротив, много больше единицы [70].

Если $Re \ll 1$ (это физически означает, что интенсивность волн не слишком велика), то, представляя скорость v в виде ряда $v = v^{(1)} + v^{(2)} + \dots$, можно разбить уравнение Бюргерса на линейное уравнение первого приближения (В.1.32) (для переменной $v^{(1)}$) и уравнение второго приближения (II.2.1). Тогда решение уравнения (В.1.32), описывающее в первом приближении распространение волны, излучаемой колеблющейся по закону (V.1.1) плоскостью, можно записать в виде

$$v^{(1)} = v_{01} \exp\left(-\frac{b\omega_1^2 x}{2c_0^3 \rho_0}\right) \cos \omega_1 \tau + v_{02} \exp\left(-\frac{b\omega_2^2 x}{2c_0^3 \rho_0}\right) \cos \omega_2 \tau. \quad (\text{V.1.3})$$

Подставляя выражение (V.1.3) в правую часть уравнения (II.2.1) и удерживая в полученном выражении

только интересующий нас член, содержащий разностную частоту $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, получаем

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \tau^2} = - \frac{\varepsilon \Omega v_{01} v_{02}}{2c_0^2} \exp \left[- \frac{b (\omega_1^2 + \omega_2^2) x}{2c_0^3 \rho_0} \right] \sin \Omega \tau. \quad (\text{V.1.4})$$

Решение уравнения (V.1.4), состоящее из суммы частного решения и общего решения однородного уравнения, может быть легко найдено (на границе $x = 0$ требуем $v^{(2)} = 0$):

$$v^{(2)} = \left[\exp \left(- \frac{b (\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2c_0^3 \rho_0} x \right) - \exp \left(- \frac{b \Omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x \right) \right] \times \\ \times \frac{\rho_0 c_0 \varepsilon \Omega v_{01} v_{02}}{b (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)} \sin \Omega \tau. \quad (\text{V.1.5})$$

Как показывает выражение (V.1.5), амплитуда волны Ω вначале нарастает от нуля (при $x = 0$), достигает максимума в точке

$$x_{\max} = \ln \left[\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{\Omega^2} \right] \frac{2c_0^3 \rho_0}{b (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)},$$

а затем убывает; затухание волны определяется коэффициентом поглощения $b \Omega^2 / 2c_0^3 \rho_0$, соответствующим разностной частоте Ω .

Отношение амплитуды волны разностной частоты к корню квадратному из амплитуд исходных волн пропорционально выражению

$$\exp \left[b \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\Omega^2) x}{4c_0^3 \rho_0} \right] - \exp \left[\frac{b (\omega_1^2 + \omega_2^2) x}{4c_0^3 \rho_0} \right],$$

оно растет с увеличением x . Это означает, что максимум спектра смещается в область низких частот. При этом амплитуда волны (V.1.5), являющаяся величиной второго приближения, может превысить амплитуду $v^{(1)}$. Это обстоятельство, однако, не означает здесь неприменимость

метода последовательных приближений, так как величины более высоких приближений, как показывает соответствующий расчет, остаются малыми. Простая количественная оценка отношения амплитуды волны Ω , взятой в области ее максимального значения, к корню квадратному из произведения амплитуд исходных волн, приводит к выражению $\frac{v^{(2)}_{\max}}{\sqrt{v_{01}v_{02}}} = \frac{\Omega}{\omega} \text{Re} \ll 1$, т. е. при малых числах Рейнольдса эффект незначителен.

В случае амплитудно-модулированного сигнала (V.1.2) вычисления, аналогичные тем, которые проводились выше для граничной задачи (V.1.1), позволяют получить во втором приближении решение

$$v_{\Omega} = v^{(2)} = \frac{\varepsilon m c_0 \Omega v_0^2 \rho_0}{2b\omega^2} \times \\ \times \left[\exp\left(-\frac{b\Omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x\right) - \exp\left(-\frac{b\omega^2}{c_0^3 \rho_0} x\right) \right] \cos \Omega \tau. \quad (\text{V.1.6})$$

В соответствии с решением (V.1.6) при распространении амплитудно-модулированной волны в нелинейной среде выделяется волна с частотой модуляции, амплитуда которой сначала нарастает, проходит через максимум, а затем затухает медленнее, чем поглощается волна несущей частоты. Количественная оценка отношения $v^{(2)}_{\max}$ к амплитуде одной из волн боковой частоты, взятой у излучателя, здесь та же, что и в задаче о взаимодействии двух волн.

Если числа Рейнольдса велики, $\text{Re} \gg 1$, то в уравнениях первого и второго приближений следует опустить вязкостные члены. Решения второго приближения, описывающие волну разностной частоты (граничная задача (V.1.1)) и волну частоты модуляции (граничная задача (V.1.2)), имеют соответственно вид

$$v^{(2)} = -\frac{\varepsilon \Omega v_{01} v_{02}}{2c_0^2} x \sin \Omega \tau, \quad (\text{V.1.7})$$

$$v_{\Omega} = v^{(2)} = \frac{\varepsilon m \Omega v_0^2}{2c_0^2} x \cos \Omega \tau. \quad (\text{V.1.8})$$

Решения (V.1.7) и (V.1.8) применимы, однако, лишь вблизи излучателя на расстояниях, не превышающих по величине отрезка $L = c_0^2/\epsilon\omega\sqrt{v_{01}v_{02}}$ для граничной задачи (V.1.1) и $L = c_0^2/\epsilon\omega v_0$ для граничной задачи (V.1.2). На расстояниях $x = L$ формируется ударная волна. Таким образом, при $\text{Re} \gg 1$ и амплитуда разностной

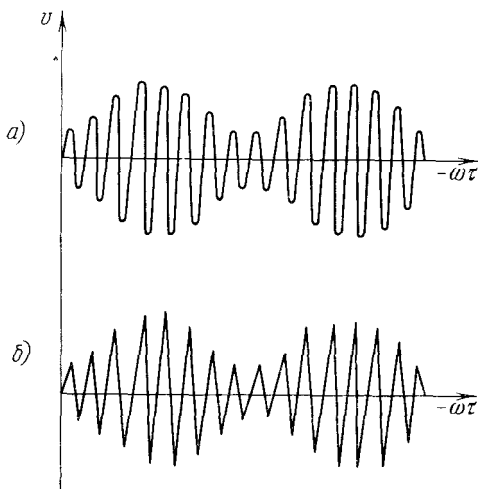


Рис. V.1. Амплитудно-модулированная волна на входе системы (a) и ее аналог треугольного профиля (б).

частоты и амплитуда частоты модуляции на участке $x < L$ растут линейно с расстоянием, пройденным волной от излучателя.

Рассмотрим гармоническую компоненту частоты модуляции на больших расстояниях от излучателя, $x > L$. Такое рассмотрение невозможно на основе закона, описывающего пространственное искажение волн. Следуя гл. I, запишем решение задачи о распространении амплитудно-модулированных колебаний в виде

$$\omega\tau = -(\epsilon\omega x/c_0^2)\Phi + \Phi^{-1}, \quad (\text{V.1.9})$$

где Φ — функция, заданная в форме (V.1.2) (рис. V.1, a), а Φ^{-1} — функция, обратная Φ .

Решение (V.1.9), описывающее пространственное искажение волны Φ , справедливо лишь до тех пор, пока функция $\Phi = \Phi(\omega\tau)$ однозначно зависит от $\omega\tau$. На таких расстояниях от излучателя, где однозначность $\Phi(\omega\tau)$ нарушается, следует вводить линии разрыва, геометрическое условие определения которых сводится, как известно, к правилу равенства площадей.

На рис. V.2, а (тонкая линия) представлен один период высокочастотной волны, которая вследствие

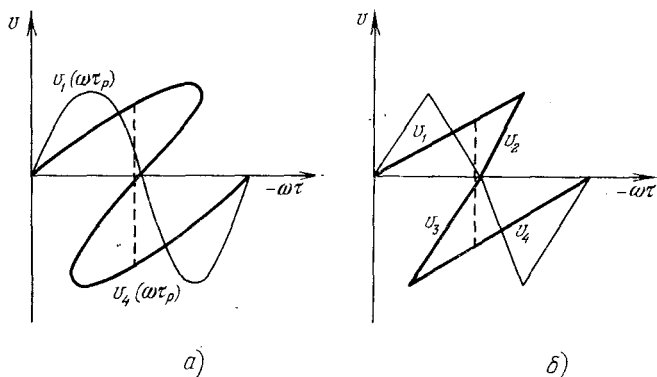


Рис. V.2. Один период амплитудно-модулированной волны в области существования разрыва (а) и его аналог треугольного профиля (б).

модуляции несимметрична относительно точки $v = 0$. Естественно, что и пространственное искажение обоих полупериодов такой волны в соответствии с формулой (V.1.9) различно: искажения пропорциональны амплитуде. Жирной линией на рис. V.2, а отмечен профиль волны на некотором расстоянии x от излучателя, а пунктиром отмечена линия разрыва, определяемая из условия равенства площадей. Скорость фронта несимметричной слабой ударной волны может быть вычислена как полусумма скоростей, обозначенных на рис. V.2, а через $v_1(\omega\tau_p)$ и $v_4(\omega\tau_p)$. Тогда

$$v_\Phi = \frac{1}{2} [v_1(\omega\tau_p) + v_4(\omega\tau_p)]. \quad (\text{V.1.10})$$

Рассматривая аналогично второй, третий и так далее периоды высокочастотной волны, можно найти последовательность значений, определяющих, по существу, закон смещения нулевых уровней, относительно которых высокочастотная компонента расположена симметрично. Переходя к следующему периоду волны модуляции, нетрудно получить ту же последовательность значений v_{ϕ} , которая тем самым является периодической функцией Ωt . Таким образом, определяя значения v_{ϕ} как функцию расстояния, пройденного волной от излучателя, мы фактически найдем закон, описывающий распространение волны с частотой модуляции $\nu_{\Omega} = \nu_{\phi}$ в области существования периодических ударных волн.

Количественная оценка эффекта наиболее простым способом может быть произведена путем замены синусоидальной волны высокой частоты волной треугольного профиля, как показано на рис. V.1, б. Пространственное искажение одного периода такой волны изображено на рис. V.2 б, где, как и в случае синусоиды, тонкой линией отмечен первоначальный профиль волны, жирной линией — профиль волны на расстоянии x от излучателя, пунктиром — линия разрыва.

Обозначив через $v_1(\omega t)$, $v_2(\omega t)$ и $v_{3,4}(\omega t)$ каждый из линейных отрезков, на которые разбивается в соответствии с рис. V.2, б конфигурация волн, найдем скорость движения фронта по формуле (V.1.10), определяя $\omega \tau_p$ из условия равенства площадей:

$$\begin{aligned} v_4(\omega \tau_p) - v_3(\omega \tau_p) \cdot \left(\omega \tau_p - \frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_3 x \right) = \\ = v_1(\pi) \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_1 x \right) + \\ + [v_1(\pi) - v_1(\omega \tau_p) + |v_3(\omega \tau_p)|] (\pi - \omega \tau_p). \end{aligned} \quad (V.1.11)$$

Линейные функции $v(\omega t)$ в соответствии с принятыми на рис. V.2, б обозначениями могут быть представлены в виде

$$v_1 = \frac{v_0(1 + m_1)}{\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x (1 + m_1)} \omega \tau,$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{v_0(1+m_1)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x (1+m_1)} (\pi - \omega \tau), \\
 v_3 &= \frac{v_0(1+m_2)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x (1+m_2)} (\pi - \omega \tau), \\
 v_4 &= \frac{v_0(1+m_2)}{\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x (1+m_2)} (\omega \tau - 2\pi), \quad (V.1.12)
 \end{aligned}$$

где $m_1 = m \sin(\pi\Omega/2\omega)$ и $m_2 = m \sin(3\pi\Omega/2\omega)$. Подставляя соотношения (V.1.12) в уравнение (V.1.11), имеем с точностью до малых членов порядка $m_{1,2}^2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x} (\omega \tau_p - 2\pi)^2 - 4(\omega \tau_p - \pi) - \\
 - (m_2 - m_1) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x \right) = 0. \quad (V.1.13)
 \end{aligned}$$

В том же приближении формула (V.1.10) дает

$$v_\Phi = \frac{v_0}{\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x} \left[1 + \frac{\pi}{4} \frac{m_1 + m_2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x} \right] (\omega \tau_p - \pi). \quad (V.1.14)$$

После подстановки решения уравнения (V.1.13) в (V.1.14) с точностью до малых членов порядка $m_{1,2}^2$ получим

$$v_\Phi = - \frac{v_0(m_2 - m_1)}{4} \left[1 - \frac{\pi^2}{2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x \right)^2} \right]. \quad (V.1.15)$$

Проведенные вычисления справедливы для любого n -го периода высокой частоты, т. е. при любых $m_n - m_{n-1}$. Раскрывая разность $m_n - m_{n-1}$ и заменяя при $(\Omega/\omega) \ll 1$

значение $\sin(\pi\Omega/2\omega)$ значением аргумента, найдем $v_\Omega = v_\Phi$:

$$v_\Omega = -\frac{\pi}{4} m \frac{\Omega}{\omega} v_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega v_0 x \right)^2} \right] \cos \Omega \tau. \quad (\text{V.1.16})$$

Значение амплитуды скорости волны с частотой модуляции, определяемой формулой (V.1.16), совпадает в точке $x = L$ со значением амплитуды скорости волны модуляции, вычисляемой на основе соотношения (V.1.8)

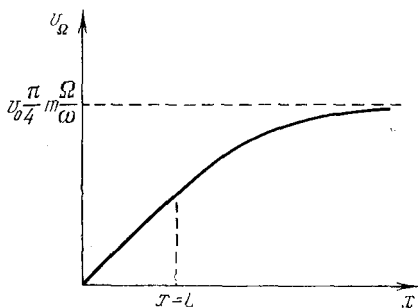


Рис. V.3. Динамика роста волны частоты модуляции.

(с точностью до постоянного коэффициента, что обусловлено заменой синусоиды высокой частоты волной треугольного профиля). При дальнейшем распространении сигнала ($x > L$) амплитуда волны модуляции, как видно из формулы (V.1.16), растет, превышая на бесконечности вдвое значение амплитуды в точке разрыва, в которой $(\varepsilon \omega v_0 x / c_0^2) = \pi/2$. На рис. V.3 приведена зависимость амплитуды волны с частотой модуляции от расстояния, пройденного сигналом от излучателя.

Таким образом, в нелинейной гидродинамической среде осуществляется детектирование сигнала. При больших числах Рейнольдса низкочастотная гармоническая составляющая, нарастая линейно до точки формирования разрыва, обнаруживает также рост и в области существования периодических ударных волн. Сравнение амплитуды

волны модуляции на больших удалениях от излучателя ($x \gg L$) с амплитудой одной из боковых частот у источника излучения приводит к количественной оценке $v_{\Omega}/v_{\omega-\Omega} = \pi\Omega/2\omega$, т. е. при больших Re эффект детектирования выражен гораздо сильнее.

Значительный интерес представляет также и другая группа задач, относящаяся к таким возмущениям на границе нелинейной среды, которые могут быть представлены в виде совокупности бесконечного числа монохроматических волн (сплошной спектр Фурье). Заранее очевидно, что в результате нелинейного взаимодействия между гармониками заданный спектр может расширяться в

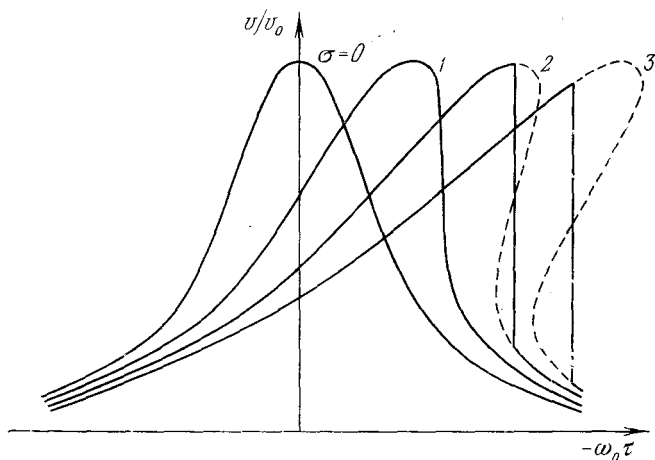


Рис. V.4. Искажение гауссова импульса в нелинейной среде.

обе стороны: как в сторону более низких, так и в сторону более высоких частот. Этот процесс имеет довольно сложный характер, и применять спектральный подход с самого начала, по-видимому, нецелесообразно.

Вместе с тем, как нетрудно заметить, сплошной спектр может отвечать некоторому регулярному возмущению $\Phi(\omega\tau)$, заданному на границе среды. Поэтому удобно производить анализ нелинейных искажений следующим образом: вначале отыскать каким-либо способом решение $\Phi(\omega\tau, \sigma)$, описывающее деформацию начального воз-

мущения, а затем разложить полученное решение в спектр. Как было показано в гл. I, II, искажение импульса во всей области значений σ ($0 < \sigma < \infty$) можно описать либо графическим способом (при $\text{Re} \gg 1$), либо с помощью уравнения Бюргерса (при произвольных Re).

В качестве примера рассмотрим здесь, как изменяется сплошной спектр, отвечающий импульсу гауссовой формы на границе среды [71]. Искажение формы импульса проиллюстрировано на рис. V.4. Кривые с параметром $\sigma = 1, 2, 3$ на этом рисунке получены с помощью кривой при $\sigma = 0$ графическим методом, описанным в гл. I (см. рис. I.8); образовавшийся разрыв проводился в соответствии с правилом «равенства площадей». Результаты гармонического анализа кривых рис. V.4 представлены на рис. V.5.

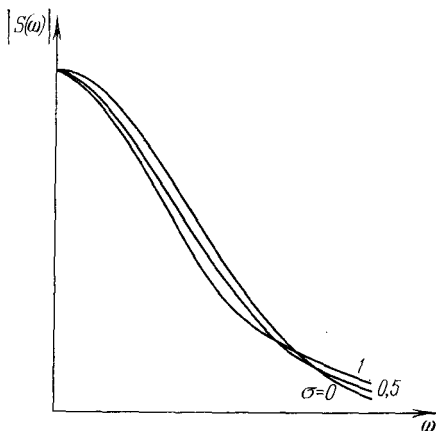


Рис. V.5. Трансформация спектра гауссова импульса.

Как нетрудно видеть, для $\sigma < \sigma_p$ преимущественно происходит перекачка энергии из низкочастотной части спектра в высокочастотную. Аналогичные построения проведены на рис. V.6 для начального возмущения треугольного профиля в области как до, так и после образования разрыва.

Анализ искажения треугольного импульса в области $\sigma > 1$ имеет более общее значение, выходящее за рамки

данного конкретного примера. Дело в том, что треугольный импульс с крутым передним фронтом является асимптотически универсальной формой одиночного импульса для довольно широкого класса начальных возмущений. Как можно заметить на рис. V.4, профиль гауссова

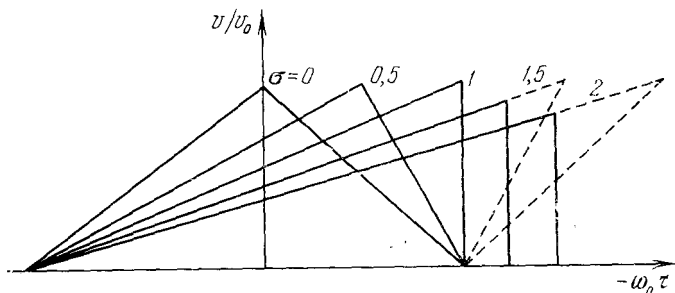


Рис. V.6. Искажение треугольного импульса в нелинейной среде.

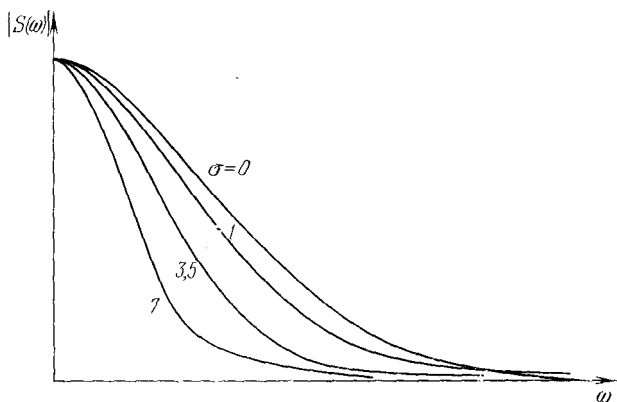


Рис. V.7. Трансформация спектра треугольного импульса.

импульса при $\sigma = 3$ близок к треугольному; в дальнейшем эта разница еще больше сглаживается. Поэтому и для него имеет место тенденция сжатия спектра (вызванного более быстрым затуханием гармоник высокой частоты), отмеченная на рис. V.7 (этот рисунок представляет собой спектральный аналог рис. V.6).

§ 2. Рассеяние звука на звуке

Следуя традиции, установившейся в литературе по нелинейной акустике, мы будем говорить о рассеянии звука на звуке в тех случаях, когда колебания комбинационных частот $n\omega_1 \pm m\omega_2$ существуют не только внутри области пересечения пучков исходных волн с частотами ω_1 , ω_2 , но и вне этой области.

Мы покажем, что такое понимание процесса рассеяния несколько отличается от других определений, принятых в смежных областях теории волн (например, в нелинейной оптике). Это отличие в терминологии явилось одной из причин того, что вопрос о существовании эффекта рассеяния звука на звуке долго дискутировался в литературе. Имеется большое количество работ, содержащих прямо противоположные решения этого вопроса. Обзор этих работ (среди которых немало ошибочных) не входит в нашу задачу, но интересующиеся могут без труда восстановить предысторию проблемы по имеющимся в данном параграфе ссылкам.

Необходимо также подчеркнуть, что здесь будет идти речь только о трехфононном (трехволновом) рассеянии звука на звуке, при котором рассеянная волна комбинационной частоты ω_3 возникает в результате взаимодействия двух волн с частотами ω_1 , ω_2 . Процессы, в которых участвует большее число волн (например, четыре), здесь не рассматриваются.

В предыдущем параграфе уже рассказывалось о взаимодействии двух плоских волн с частотами ω_1 , ω_2 , бегущих в одном направлении. В условиях же эксперимента, разумеется, невозможно получить идеальные плоские волны, поскольку реальные излучатели формируют волну в виде пучка с конечными поперечными размерами. Поэтому та область, в которой пересекаются волны ω_1 , ω_2 , всегда является ограниченной. Величина рассеянного звука, т. е. амплитуда волн комбинационных частот, обнаруживаемых вне области взаимодействия, может по-разному зависеть от размеров этой области. Такое различие позволяет говорить о возможности существования двух типов рассеяния звука на звуке, которые мы будем называть синхронным и дифракционным рассеяниями.

Для более строгого разграничения этих двух типов рассмотрим отношения L/λ_i ($i = 1, 2, 3$), где L — характерный размер области пересечения; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — длины волн с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Если считать, что пучки волн ω_1 и ω_2 идеально коллимированы и имеют резкие границы, то $L/\lambda_1 \gg 1$ и $L/\lambda_2 \gg 1$ — иначе начнет сказываться дифракционная расходимость пучков (см. гл. IX).

Однако при этом величина отношения L/λ_3 может быть как больше, так и меньше единицы. Если $L/\lambda_3 \lesssim 1$, т. е. размеры области пересечения пучков сравнимы с длиной волны λ_3 , начинает играть роль дифракция комбинационной волны. Явление дифракции в этом случае и приводит к появлению волны с частотой ω_3 вне области взаимодействия. Естественно поэтому такое «рассеяние» назвать дифракционным. Очевидно, что увеличение размеров L области взаимодействия при прочих неизменных условиях приведет к возрастанию отношения L/λ_3 , дифракция волны ω_3 будет при этом сказываться мало и явление должно исчезать.

Определение второго типа рассеяния — синхронного — соответствует термину «рассеяние» в его обычном понимании. Поскольку в результате взаимодействия волн ω_1, ω_2 внутри области их пересечения возбуждаются вынужденные волны комбинационных частот, в принципе возможно излучение из этой области. Необходимо только, чтобы существовало такое направление, вдоль которого «вынужденные» распределенные источники могли синхронно возбуждать вторичную комбинационную волну. Однако в обычных акустических средах без дисперсии такого направления не существует и синхронного рассеяния звука на звуке нет.

Для того чтобы это показать, предположим, что пучки волн ω_1, ω_2 пересекаются под произвольным углом θ , как это изображено на рис. V.8. Ось x направим вдоль первого из пучков. Тогда в линейном приближении для возмущения плотности среды ρ' имеем

$$\begin{aligned} \rho' = & \rho'_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \\ & + \rho'_2 \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_0} \cos \theta - \frac{y}{c_0} \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{V.2.1})$$

В результате наличия квадратичной нелинейности $L_2 [\rho']^2$ в правой части волнового уравнения для рассеянной волны, наблюдаемой под некоторым углом φ к оси x , появится «вынужденная сила» на частоте $\omega_1 - \omega_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \eta^2} = \\ = -A \sin \left[(\omega_1 - \omega_2) t - \frac{x}{c_0} (\omega_1 - \omega_2 \cos \theta) + \frac{y}{c_0} \omega_2 \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.2.2})$$

Здесь η — пространственная координата, отсчитываемая вдоль направления угла φ . Уравнение типа (V.2.2) уже обсуждалось в гл. IV, § 2; было показано, что линейный рост ρ' с координатой η возможен только в том случае, если фазовые скорости «вынуждающей» и «собственной» волн равны между собой (т. е. выполнено условие синхронизма). В данном случае нужно потребовать, чтобы $k_{\text{вын}}^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2 / c_0^2$, или

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega_2 \cos \theta)^2 + \\ + (\omega_2 \sin \theta)^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2. \end{aligned} \quad (\text{V.2.3})$$

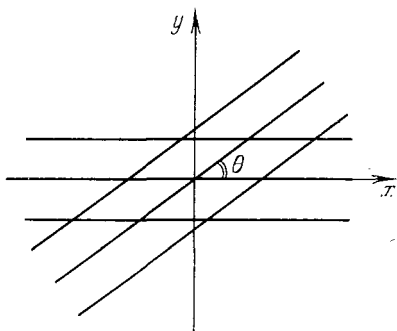


Рис. V.8. Пучки волн, пересекающиеся в плоскости x, y под углом θ .

Нетрудно видеть, что условие (V.2.3) выполняется лишь при $\theta = 0$, когда имеет место коллинеарное распространение всех трех волн: ω_1 , ω_2 , $\omega_1 - \omega_2$ (т. е. это взаимодействие волн, а не рассеяние). В противном случае, $\theta \neq 0$, условие синхронизма не выполнено, появляются пространственные биения (см. рис. IV.2), и амплитуда ρ' рассеянной волны не может стать значительной по величине.

Отсутствие синхронного рассеяния в недиспергирующей среде можно показать еще проще, если прибегнуть к помощи фоновых представлений. Процесс образования

фонона комбинационной (например, суммарной) частоты должен удовлетворять законам сохранения энергии и квазиимпульса:

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3, \quad \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k}_3. \quad (\text{V.2.4})$$

Поскольку дисперсии нет, $|\mathbf{k}_i| = \omega_i/c_0$ ($i = 1, 2, 3$), и вместо (V.2.4) получаются простые соотношения

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad e_1\omega_1 + e_2\omega_2 = e_3\omega_3, \quad (\text{V.2.5})$$

где e_1, e_2, e_3 — единичные векторы в направлении распространения волн $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Очевидно, что система (V.2.5) совместна только тогда, когда $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$; в противном случае фононы не могут эффективно взаимодействовать между собой.

Выяснив, что в недиспергирующей среде синхронного рассеяния нет, рассмотрим некоторые особенности дифракционного рассеяния звука на звуке, следуя в основном работам [72, 73].

В качестве исходной системы уравнений воспользуемся уравнениями Эйлера (B.1.1) — (B.1.3), которые выпишем с точностью до членов второго порядка малости включительно:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = -\operatorname{div}(\rho' \mathbf{v}), \quad (\text{V.2.6})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' = -\rho' \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{(\gamma - 1)}{2} \nabla \rho'^2. \quad (\text{V.2.7})$$

Из уравнения (V.2.7) переменная ρ' , как обычно, исключена с помощью приближенного уравнения состояния $\rho' = c_0^2 \rho' + c_0^2 (\gamma - 1) \rho'^2 / 2\rho_0$. Систему (V.2.6), (V.2.7) удобно свести к одному уравнению; для этого надо взять div от обеих частей уравнения (V.2.7) и вычесть из этого уравнения (V.2.6), предварительно продифференцированное по времени:

$$\begin{aligned} \Delta \rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \\ = -\frac{(\gamma - 1)}{2\rho_0} \Delta \rho'^2 + \frac{1}{c_0^2} \operatorname{div} \left[\mathbf{v} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.2.8})$$

Если не учитывать нелинейные члены второго порядка малости, стоящие в правой части (V.2.8), придем к обычному волновому уравнению, описывающему распространение невзаимодействующих друг с другом волн ω_1 , ω_2 :

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \\ &\quad + v_2 \cos \theta \cdot \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_0} \cos \theta - \frac{y}{c_0} \sin \theta \right) \\ v_y &= v_2 \sin \theta \cdot \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_0} \cos \theta - \frac{y}{c_0} \sin \theta \right), \quad (\text{V.2.9}) \\ \rho' &= \frac{\rho_0}{c_0} v_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \\ &\quad + \frac{\rho_0}{c_0} v_2 \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_0} \cos \theta - \frac{y}{c_0} \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Используя выражения (V.2.9) в качестве решения первого приближения и подставляя их в правую часть уравнения (V.2.8), можно получить уравнение второго приближения следующего вида:

$$\Delta \rho'^{(2)} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'^{(2)}}{\partial t^2} = -4\pi q. \quad (\text{V.2.10})$$

Правая часть этого уравнения

$$\begin{aligned} -4\pi q &= \frac{v_1 v_2}{2c_0^4} \rho_0 \{ (\omega_1 - \omega_2)^2 \cos \theta - \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta)^2 + \\ &\quad + \frac{\gamma - 1}{2} (\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \theta + \omega_2^2) \} \times \\ &\times \cos \left[(\omega_1 - \omega_2) t - \frac{x}{c_0} (\omega_1 - \omega_2 \cos \theta) + \frac{y}{c_0} \omega_2 \sin \theta \right] \quad (\text{V.2.11}) \end{aligned}$$

играет роль источника вторичных волн с плотностью q , появляющихся в результате взаимодействия. В выражении (V.2.11) сохранена компонента «вынуждающей силы» только на разностной частоте $\Omega = \omega_1 - \omega_2$.

Рассмотрим вначале более простой случай $\theta = 0$, когда исходные пучки распространяются в одном направлении. Длину области взаимодействия вдоль продольной оси x можно ограничить специальным акустическим

фильтром, непрозрачным для частот ω_1 , ω_2 и прозрачным для рассеянных сигналов. При $\theta = 0$ выражение (V.2.11) примет более простой вид

$$-4\pi q = \frac{\varepsilon}{2c_0^4} \rho_0 v_1 v_2 \Omega^2 \cos \Omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right). \quad (\text{V.2.12})$$

После несложных преобразований формула (V.2.12), естественно, может быть сведена к правой части уравнения (V.1.4).

Как известно, решение уравнения (V.2.10), определяющее вторичное поле вдали от области взаимодействия — в некоторой точке $M(x, y, z)$ в момент времени t — представляется в виде запаздывающего потенциала

$$\rho^{(2)} = \int_V \frac{q(x', y', z', t - r/c_0)}{r} dx' dy' dz', \quad (\text{V.2.13})$$

где r — расстояние между точкой M' в области пересечения и точкой M наблюдения:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \approx r_0 - x' \frac{x}{r_0} - y' \frac{y}{r_0} - z' \frac{z}{r_0}. \quad (\text{V.2.14})$$

Здесь $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат до точки наблюдения (см. рис. V.9). Введем для удобства вспомогательную сферическую систему координат, полярная ось которой совмещена в ось x ; сферические и декартовы координаты точки M связаны между собой следующими соотношениями:

$$x = r_0 \cos \varphi, \quad y = r_0 \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r_0 \sin \varphi \sin \psi. \quad (\text{V.2.15})$$

Подставляя в формулу (V.2.13) выражение (V.2.12) для плотности источников и полагая в амплитуде подынтегрального выражения $r = r_0$ (для фазовых членов необходимо использовать более точное разложение (V.2.14) и (V.2.15)),

придем к следующему интегралу:

$$\frac{\rho'^{(2)}}{\rho_0}(\varphi, \psi) = \frac{\pi \varepsilon}{2} \frac{v_1}{c_0} \frac{v_2}{c_0} \frac{1}{\Lambda^2 r_0} \int_0^l dx' \int_{-a/2}^{a/2} dy' \int_{-b/2}^{b/2} dz' \cdot \cos \left[\Omega \left(t - \frac{r_0}{c_0} \right) + \right. \\ \left. + x' \frac{\Omega}{c_0} (\cos \varphi - 1) + y' \frac{\Omega}{c_0} \sin \varphi \cdot \cos \psi + z' \frac{\Omega}{c_0} \sin \varphi \sin \psi \right]. \quad (\text{V.2.16})$$

Здесь $\Lambda = 2\pi c_0 / \Omega$ — длина волны рассеянного звука; интегрирование ведется по области пересечения пучков

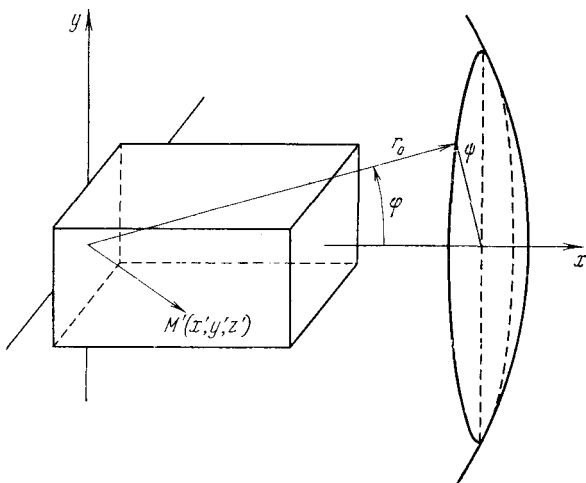


Рис. V.9. Вспомогательная сферическая система координат с полярной осью, совмещенной с осью x .

волн с частотами ω_1, ω_2 : $0 \leq x \leq l$, $-a/2 \leq y \leq a/2$, $-b/2 \leq z \leq b/2$. Вычисляя интеграл (V.2.16), получим следующий результат:

$$\frac{\rho'^{(2)}}{\rho_0} = \frac{\pi \varepsilon}{2} \frac{v_1 v_2}{c_0^2} \frac{a b l}{\Lambda^2 r_0} \left\{ \frac{\sin \left[\pi \frac{b}{\Lambda} \sin \varphi \cdot \sin \psi \right]}{\pi \frac{b}{\Lambda} \sin \varphi \sin \psi} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \left[\pi \frac{a}{\Lambda} \sin \varphi \cos \psi \right]}{\pi \frac{a}{\Lambda} \sin \varphi \cos \psi} \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{l}{\Lambda} (1 - \cos \varphi) \right]}{\pi \frac{l}{\Lambda} (1 - \cos \varphi)} \right\}. \quad (\text{V.2.17})$$

Как и следовало ожидать, для $\Lambda \ll a, b, l$ рассеяния на достаточно большие углы не происходит, так как в этом случае решение (V.2.17) стремится к нулю при $\Lambda \rightarrow 0$. Эффект носит дифракционный характер и заметен при длинах волн Λ , сравнимых с размерами области взаимодействия. Рассеянное излучение имеет направленность; зависимость $\rho^{(2)}$ от углов φ, ψ описывается множителями типа $(\sin \xi)/\xi$, заключенными в решении (V.2.17) в фигурные скобки. Главный максимум рассеянного звука соответствует $\varphi = 0$, т. е. приходится на направление оси x .

Теперь перейдем к рассмотрению более сложной ситуации, когда угол θ между осями двух скрещивающихся пучков не равен нулю (см. рис. V.8). В том случае, если взаимодействуют волны с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, наглядное представление о распределении источников рассеянных волн можно получить с помощью картины муара, которая возникает при наложении под некоторым углом двух дифракционных решеток с близкими периодами, каждый из которых соответствует плоской волне.

Как показано на рис. V.10, в области пересечения появляются черные и белые муаровые полосы, определяющие положение источников равной фазы. Поскольку решетки находятся в движении, движутся и муаровые полосы со скоростью $c = c_0(\lambda_2 - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta} < c_0$. (Если бы имела место противоположная ситуация: $c > c_0$, вторичные источники двигались бы со сверхзвуковой скоростью. Вследствие этого могло бы наблюдаться явление, аналогичное черенковскому излучению, когда источники синхронно возбуждают волну под некоторым углом к направлению своего движения *).)

С помощью рис. V.10 можно дать качественное описание зависимости уровня рассеянного излучения от угла пересечения пучков, имеющих поперечные размеры a . Если угол θ мал, $\theta < \lambda_{1,2}/2a$, в области взаимодействия укладывается только одна «зона Френеля», т. е. фазы вторичных источников изменяются мало. В этом случае должно наблюдаться максимальное рассеяние примерно такого же уровня, как и при $\theta = 0$. С увеличением θ

*) Такая ситуация встречается в нелинейной оптике [135].

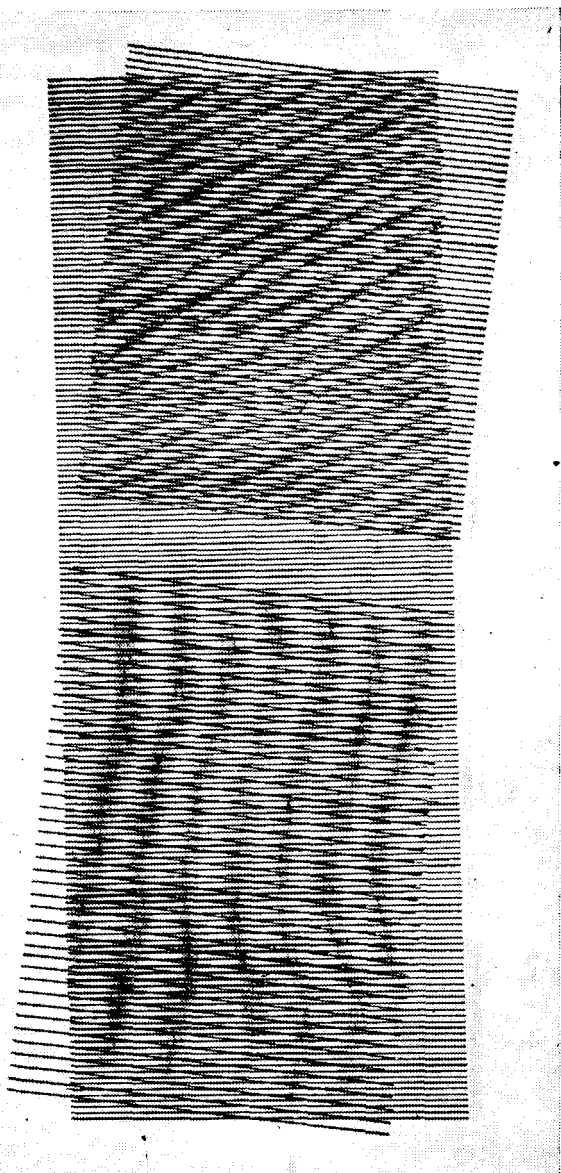


Рис. V.10. Муаровые полосы в области пересечения двух пучков.

увеличивается число зон внутри области взаимодействия и уменьшаются размеры каждой из зон; вследствие этого падает и уровень рассеянного звука.

Для количественного рассмотрения явления необходимо вычислить интеграл (V.2.13) при тех же самых предположениях, что и в случае $\theta = 0$; нужно только вместо (V.2.12) воспользоваться более общим выражением (V.2.11). В результате расчета можно получить следующее решение:

$$\frac{\rho'^{(2)}}{\rho_0}(\varphi, 0) = \frac{\pi \varepsilon}{2} \frac{v_1 v_2}{c_0^2} \frac{abl}{\Lambda^2 r_0} \left\{ \frac{\sin \delta}{\delta} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \right\} \cos \left[\Omega \left(t - \frac{r_0}{c_0} \right) + \delta \right]. \quad (\text{V.2.18})$$

Здесь для простоты положено $\psi = 0$, т. е. рассеянное поле рассматривается лишь в плоскости (x, y) . Через δ , β обозначены выражения

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{l}{2} [(k_1 - k_2) \cos \varphi - (k_1 - k_2 \cos \theta)], \\ \beta &= \frac{a}{2} [(k_1 - k_2) \sin \varphi + k_2 \sin \theta]. \end{aligned} \quad (\text{V.2.19})$$

Решение (V.2.18) справедливо для произвольных углов θ , в том числе и для случая $\theta = 0$, когда взаимодействуют параллельные звуковые пучки. Результат (V.2.18) при этом согласуется с (V.2.17). Из выражения (V.2.18) видно, что значение амплитуды рассеянного сигнала для $\theta = 0$ в максимуме ($\varphi = 0$) будет максимальным по сравнению со случаями других углов θ . Анализ этого выражения показывает также, что для высоких и близких частот ω_1 , ω_2 , когда на поперечных размерах области пересечения укладывается много длин волн исходных колебаний λ_1 и λ_2 , $\rho'^{(2)}$ резко убывает с ростом угла θ . В то же время при малых $\theta < \lambda_{1,2}/2a$ амплитуда $\rho'^{(2)}$ будет близка к величине, которая достигается при $\theta = 0$. Это полностью согласуется с выводами, следующими из рассмотрения физики явления.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о возможности существования в акустических средах синхронного рассеяния звука на звуке. Поскольку дисперсия скорости звуковых волн, как правило, мала, на пер-

вый взгляд кажется, что и синхронное рассеяние будет наблюдаться под малыми углами, т. е. эффект практически не отличается от коллинеарного взаимодействия. Можно показать, однако, что для случая пересечения двух волн с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$ угол φ , под которым будет наблюдаться рассеянная волна разностной частоты, может иметь заметную величину.

В качестве одного из конкретных физических механизмов, ответственных за наличие слабой дисперсии, рассмотрим релаксационные процессы [64]. Пусть в релаксирующей нелинейной среде под углом θ пересекаются два интенсивных звуковых пучка с частотами ω_1, ω_2 , как это показано на рис. V.8. Будем считать, что для исходных частот выполнено неравенство $\omega_1, \omega_2 \gg 1/\tau$, т. е. внутренний параметр ξ «заморожен», и скорость волн ω_1, ω_2 равна c_∞ (подробнее об этом см. в гл. IV). Для разностной же частоты мы потребуем $\Omega\tau \lesssim 1$, т. е. для частот порядка Ω дисперсией скорости звука пренебрегать нельзя; фазовая скорость волны Ω равна c ($\Omega\tau$) $< c_\infty$.

Для того чтобы взаимодействие трех волн $\omega_1, \omega_2, \Omega = \omega_1 - \omega_2$ было эффективным, необходимо потребовать выполнения условия синхронизма (V.2.4), которое в данном случае нужно записать в виде

$$k_1 - k_2 = K, \text{ или } e_1 \frac{\omega_1}{c_\infty} - e_2 \frac{\omega_2}{c_\infty} = e_3 \frac{\Omega}{c}. \quad (\text{V.2.20})$$

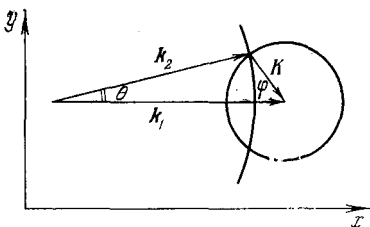


Рис. V.11. Схема определения угла φ при синхронном взаимодействии.

Как следует из (V.2.20), три волновых вектора k_1, k_2, K при синхронном взаимодействии должны образовать замкнутый треугольник, изображенный на рис. V.11. Поскольку $|k_1| \approx |k_2|$, элементарные геометрические построения рис. V.11 показывают, что угол φ может быть не мал даже при малой дисперсии $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2$.

Более точные оценки для величины угла ϕ будут получены ниже в результате вычислений.

Вывод основного уравнения для случая среды с релаксацией аналогичен выводу уравнения (V.2.8) с той лишь разницей, что переменную ρ' здесь нужно исключить с помощью уравнения состояния (IV.1.20). Полученное уравнение имеет вид

$$\Delta \rho'^{(2)} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \rho'^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{m}{\tau} \Delta \int_{-\infty}^t \rho'^{(2)}(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = -4\pi q, \quad (\text{V.2.21})$$

где $-4\pi q$ дается формулой (V.2.11); в последней надо лишь заменить всюду c_0 на c_∞ . Осциллирующий множитель

$$\cos \left[(\omega_1 - \omega_2) t - \frac{x}{c_\infty} (\omega_1 - \omega_2 \cos \theta) + \frac{y}{c_\infty} \omega_2 \sin \theta \right]$$

выражения (V.2.11) показывает, что рассеянная волна с частотой $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ в принципе может наблюдаться в направлении, определяемом вектором

$$\mathbf{K} = i \frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \theta}{c_\infty} - j \frac{\omega_2 \sin \theta}{c_\infty}. \quad (\text{V.2.22})$$

Для того чтобы получить информацию о поведении амплитуды рассеянной волны по направлению $\mathbf{K}$, ориентируем вдоль вектора $\mathbf{K}$ новую ось η . В результате этого вместо (V.2.11) в правой части уравнения (V.2.21) появится следующее выражение:

$$-4\pi q = \frac{v_1 v_2}{2c_0^4} \rho_0 A(\theta, \omega_1, \omega_2) \cos \Omega \left(t - \gamma \frac{\eta}{c_\infty} \right); \quad (\text{V.2.23})$$

где $\gamma = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \theta} / (\omega_1 - \omega_2)$; для краткости через $A(\theta, \omega_1, \omega_2)$ обозначено то выражение, которое в формуле (V.2.11) заключено в фигурные скобки.

Ищем решение уравнения (V.2.21) с правой частью (V.2.23) в виде $\rho'^{(2)} = c(\eta) \exp(i\Omega t)$. Используя факт малости константы m , получим приближенно следующее

выражение:

$$\frac{\rho'(2)}{\rho_0} = \frac{v_1 v_2}{2c_0^2} \frac{A(\theta, \omega_1, \omega_2)}{\Omega^2 (a^2 \gamma^2 - 1)} \left\{ \exp \left[-i \frac{\Omega}{c_\infty} \left(1 + \frac{m}{2(1 + \Omega^2 \tau^2)} \right) \eta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m \Omega^2 \tau}{2(1 + \Omega^2 \tau^2)} \frac{\eta}{c_\infty} \right] - \exp \left(-i \frac{\Omega}{c_\infty} \gamma \eta \right) \right\}, \quad (\text{V.2.24})$$

где

$$a^2 = 1 - \frac{m}{1 + \Omega^2 \tau^2} + i \frac{m \Omega \tau}{1 + \Omega^2 \tau^2}, \quad (\text{V.2.25})$$

которое позволяет проанализировать поведение рассеянной волны как при выполнении условия синхронизма, так и при наличии расстройки. Синхронизм выполняется при условии

$$1 + \frac{m}{2(1 + \Omega^2 \tau^2)} = \gamma, \quad (\text{V.2.26})$$

что возможно при вполне определенном, малом значении угла $\theta = \theta_c$, где

$$\theta_c^2 = \frac{m \Omega^2}{\omega_1 \omega_2 (1 + \Omega^2 \tau^2)}. \quad (\text{V.2.27})$$

Формула (V.2.27), в частности, показывает, что дисперсия, создаваемая в среде процессами релаксации, в случае $\omega_1 \tau \gg 1$, $\omega_2 \tau \gg 1$ не может привести к рассеянию волны суммарной частоты. Действительно, заменяя в формуле (V.2.27) всюду ω_2 на $-\omega_2$, получим $\theta_c^2 < 0$, что невозможно. Рассеянная волна разностной частоты должна наблюдаться под углом φ , для которого

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_y}{K_x} \approx -\frac{\omega_2 \theta_c}{\Omega} \quad (\text{V.2.28})$$

и, с учетом формулы (V.2.27),

$$\operatorname{tg} \varphi = -\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{m}{1 + \Omega^2 \tau^2} \right)^{1/2}. \quad (\text{V.2.29})$$

Как следует из выражения (V.2.29) и векторной диаграммы, изображенной на рис. V.11, угол рассеяния волны Ω может быть не малым по величине, что удобно для наблюдения эффекта.

При выполнении условия синхронизма решение (V.2.24) принимает вид

$$\frac{\rho'^{(2)}}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \cdot v_1 v_2 K \eta \sin \Omega \left(t - \frac{\eta}{c_0} \right), \quad (\text{V.2.30})$$

что совпадает с (V.1.7). Если же условие синхронизма не выполняется, то, как видно из решения (V.2.24), появляются характерные биения, пространственный период которых зависит от величины расстройки.

В предельном случае $m \rightarrow 0$ или $\tau \rightarrow \infty$ мы имеем недиспергирующую среду. Тогда $\theta_c = 0$, т. е. взаимодействие возможно только в параллельных пучках, и $\varphi = 0$, т. е. рассеянная волна будет наблюдаться в направлении оси x .

Помимо процесса релаксации к появлению эффекта синхронного рассеяния звука могут привести и другие причины. Если, например, распространение интенсивных волн сопровождается значительной передачей их импульса среде, возникают акустические течения (см. гл. VIII). Конфигурация и величина скорости акустического потока сильно зависят от геометрии системы, однако для простоты мы будем считать, что течение возникает лишь внутри области, занятой пучком ω_1 со скоростью u_1 , и внутри области, занятой вторым пучком — со скоростью u_2 . Выкладки, аналогичные проделанным выше, приводят здесь к следующему волновому уравнению:

$$\Delta \rho'^{(2)} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{v_1 v_2 \rho_0}{2c_0^4} A(\theta, \omega_1, \omega_2) \cos \left[\Omega t - \frac{x}{c_0} (\zeta_1 \omega_1 - \zeta_2 \omega_2 \cos \theta) + \frac{\eta}{c_0} \zeta_2 \omega_2 \sin \theta \right], \quad (\text{V.2.31})$$

где $\zeta_1 = 1 - u_1/c_0$, $\zeta_2 = 1 - u_2/c_0$ — слабо отличающиеся от единицы числа, учитывающие влияние движения среды на скорость распространения звука. Для того чтобы имело место излучение волны разностной частоты, необходимо потребовать $\Omega = c_0 |K|$, откуда следует

$$\theta_c^2 = \frac{2\Omega}{\omega_1 \omega_2 c_0} (u_1 \omega_1 - u_2 \omega_2), \quad (\text{V.2.32})$$

$$\text{tg } \varphi = - \left[\frac{2\omega_2}{\omega_1 \Omega c_0} (u_1 \omega_1 - u_2 \omega_2) \right]^{1/2}. \quad (\text{V.2.33})$$

Как и в предыдущем случае среды с релаксацией, здесь невозможно рассеяние волны суммарной частоты. Эффект рассеяния будет осуществляться и в том случае, если течение наложено извне, т. е. носит неакустический характер.

В заключение следует отметить, что в настоящем параграфе для вычисления рассеянного поля всюду применялся метод последовательных приближений. Как мы подчеркивали ранее, этот метод несвободен от существенных недостатков. Прежде всего, он не учитывает нелинейных искажений и истощений волн ω_1 , ω_2 , которые могут быть существенны при больших числах Рейнольдса. Но именно в этом случае должен быть максимальным и эффект рассеяния, поскольку и искажение, и рассеяние своим происхождением обязаны одной и той же нелинейности.

Было бы интересно получить аналогичные результаты для $Re \gg 1$ с помощью метода, находящего применение при описании искажения ограниченных звуковых пучков (см. гл. IX). По-видимому, из-за значительных математических трудностей эта задача может быть решена только численно.

§ 3. Стоячие волны конечной амплитуды

До сих пор при описании движения сплошной среды использовался способ Эйлера, в котором все величины считаются функциями координат x , y , z неподвижного пространства и времени t . Таким образом, эйлерово описание позволяет следить за движением различных частиц жидкости в определенных точках пространства.

Возможен принципиально иной (лагранжев) способ слежения за средой, индивидуализирующий частицы среды посредством выбора начальных (при $t = t_0$) координат частицы $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ в качестве независимых переменных. При этом текущие координаты частицы x , y , z будут являться функциями от своих начальных значений a , b , c и времени t .

Как ясно уже из определения, лагранжевы координаты a , b , c , t удобны для задания граничных условий; именно поэтому в нелинейной акустике они преимущественно употребляются при описании стоячих волн.

Уравнения гидродинамики в форме Лагранжа отличаются от уравнений в форме Эйлера. Для того чтобы проиллюстрировать технику перехода от одних координат к другим, рассмотрим вывод уравнений неразрывности и движения.

Пусть при $t = t_0$ плотность некоторой частицы среды есть ρ_0 , тогда масса среды, находящаяся в объеме $dV = da db dc$, будет равна $dm = \rho_0 da db dc$. В последующий момент времени t эта масса будет выражаться соотношением $dm = \rho dx dy dz$. Отсюда

$$\rho_0 da db dc = \rho dx dy dz. \quad (V.3.1)$$

Поскольку x, y, z являются функциями a, b, c, t , можно написать

$$dx = x_a da + x_b db + x_c dc + x_t dt; \quad (V.3.2)$$

аналогично выразятся dy и dz . Заменяя в соотношении (V.3.1) dx, dy, dz через их выражения (V.3.2), получим уравнение неразрывности в форме Лагранжа:

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}. \quad (V.3.3)$$

Уравнение движения при отсутствии внешних сил имеет простой вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (V.3.4)$$

Здесь $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор лагранжевой частицы; операция ∇ производится по координатам x, y, z . Однако это уравнение значительно усложняется при замене производных по x, y, z производными по a, b, c . Поскольку, например, для $\partial p / \partial x$ имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_a \frac{\partial a}{\partial x} + p_b \frac{\partial b}{\partial x} + p_c \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{p_a}{x_a} + \frac{p_b}{x_b} + \frac{p_c}{x_c} \quad (V.3.5)$$

(аналогичные выражения получаются и для $\partial p / \partial y, \partial p / \partial z$), уравнение (V.3.4) становится нелинейным. С помощью (V.3.5) и (V.3.3) оно может быть сведено к следующей

системе:

$$\begin{aligned}x_{tt}x_a + y_{tt}y_a + z_{tt}z_a + \frac{p_a}{\rho} &= 0, \\x_{tt}x_b + y_{tt}y_b + z_{tt}z_b + \frac{p_b}{\rho} &= 0, \\x_{tt}x_c + y_{tt}y_c + z_{tt}z_c + \frac{p_c}{\rho} &= 0.\end{aligned}\tag{V.3.6}$$

В акустике часто используется такая форма лагранжевых уравнений, где в качестве зависимых переменных берутся смещения ξ , η , ζ из начального положения a , b , c . Тогда

$$\begin{aligned}x &= a + \xi(a, b, c, t), \quad y = b + \eta(a, b, c, t), \\z &= c + \zeta(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{V.3.7}$$

С помощью замены (V.3.7) уравнения (V.3.3) и (V.3.6) могут быть преобразованы к более удобному виду. Однако в многомерном случае они все еще остаются достаточно сложными и поэтому используются редко. Простой вид эти уравнения приобретают для плоского движения:

$$\rho(1 + \xi_a) = \rho_0,\tag{V.3.8}$$

$$\rho_0 \cdot \xi_{tt} + p_a = 0.\tag{V.3.9}$$

С помощью адиабатического уравнения состояния можно получить $p_a = c_0^2 \rho_a (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$ и исключить в последнем уравнении переменную ρ :

$$\xi_{tt} = -c_0^2 \frac{\rho_a \rho_0}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma+1}.\tag{V.3.10}$$

Дифференцируя теперь (V.3.8) по a , придем к соотношению $\xi_{aa} = -\rho_a \rho_0 / \rho^2$, которое вместе с (V.3.8) позволяет избавиться в (V.3.10) от переменной ρ и получить одно нелинейное уравнение

$$\xi_{tt} = \frac{c_0^2}{(1 + \xi_a)^{\gamma+1}} \xi_{aa},\tag{V.3.11}$$

описывающее волны, бегущие в обе стороны — как вправо, так и влево, — и их взаимодействие между собой.

В том случае, если жидкость является вязкой, то волновое уравнение приобретает сложный вид. Однако на основе качественных соображений часто дополняют уравнение (V.3.11) диссипативным членом, содержащим старшую производную:

$$\xi_{tt} = \frac{c_0^2}{(1 + \xi_a)^{\gamma+1}} \xi_{aa} + \frac{b}{\rho_0} \xi_{aat}. \quad (\text{V.3.12})$$

При малых $\xi_a \ll 1$ пользуются уравнениями, полученными из (V.3.11) разложением члена $(1 + \xi_a)^{-(\gamma+1)}$ в степенной ряд:

$$\xi_{tt} = c_0^2 \left[1 - (\gamma + 1) \xi_a + \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}{2} \xi_a^2 - \dots \right] \xi_{aa}. \quad (\text{V.3.13})$$

Для точного перехода от лагранжевых координат к эйлеровым необходимо располагать явными решениями уравнений. В нелинейной акустике, однако, часто пользуются приближенным переходом. Так, если задана некоторая функция $L(x, t)$ в лагранжевых координатах, а смещение равно ξ , то

$$L(x, t) = E(x + \xi, t) = E(x, t) + \xi E_x + \frac{\xi^2}{2} E_{xx} + \dots, \quad (\text{V.3.14})$$

где $E(x, t)$ — значение этой же функции в координатах Эйлера. Обратное преобразование имеет вид

$$E(x, t) = L(x - \xi, t) = L(a, t) - \xi L_a + \frac{\xi^2}{2} L_{aa} + \dots \quad (\text{V.3.15})$$

Займемся теперь непосредственно рассмотрением стоячих волн. Поскольку это явление стоит ближе скорее к колебательным, нежели к волновым процессам, естественно предположить, что асимптотические методы, применяемые в теории колебаний нелинейных систем с сосредоточенными параметрами, могут быть эффективны и здесь. Вопрос о сведении колебаний акустических систем, являющихся всегда системами с распределенными параметрами, к колебаниям системы с сосредоточенными параметрами, по-видимому, может быть разрешен, но он до сих пор не рассматривался [74]. Основным и, пожалуй,

единственным методом решения уравнений (V.3.11) — (V.3.13), который до сих пор применялся при изучении стоячих волн конечной амплитуды, был метод последовательных приближений. Представляя смещение ξ в виде $\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots$, можно получить уравнения первого

$$\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.3.16})$$

и второго

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial t^2} = 2\varepsilon \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} \quad (\text{V.3.17})$$

приближений (для случая среды без диссипации). При задании начальных и граничных условий нужно учесть специфику задачи, допускающей несколько различных постановок.

Рассмотрим вначале собственные колебания. Пусть между двумя неподвижными жесткими стенками, расположенными при $a = 0$ и $a = l$, задано звуковое поле в начальный момент $t = 0$. Требуется определить возмущение во все последующие времена [75]. При наличии жестких стенок граничные условия имеют вид

$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = 0 \text{ при } a = 0 \text{ и } a = l. \quad (\text{V.3.18})$$

В качестве начального условия выберем стоячую волну обычного синусоидального вида между этими границами. Таким условиям удовлетворяет решение первого приближения

$$\xi^{(1)} = A \sin ka \cdot \sin \omega t, \quad (\text{V.3.19})$$

где $k = \omega/c_0$, а ω определяется из условия $l = \lambda/2 = \pi c_0/\omega$. Вычисляя через $\xi^{(1)}$ правую часть в уравнении (V.3.17), получим

$$2\varepsilon \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} = -\frac{\varepsilon}{2} k^3 A^2 \sin 2ka (1 - \cos 2\omega t). \quad (\text{V.3.20})$$

Общее решение уравнения второго приближения с правой частью (V.3.20) находится просто и имеет вид

$$\xi^{(2)} = \frac{\varepsilon}{8} k A^2 \sin 2ka (1 - \omega t \sin 2\omega t + D_1 \sin 2\omega t + D_2 \cos 2\omega t). \quad (\text{V.3.21})$$

Здесь D_1 и D_2 — произвольные константы. Переходя от смещения ξ к колебательной скорости $v = \partial \xi / \partial t$ и выбирая D_1, D_2 таким образом, чтобы при $t = 0$ $v^{(2)}$ равнялось нулю и отсутствовали бы ненарастающие члены, осциллирующие с частотой 2ω , получим

$$\frac{v}{c_0} = \frac{v_0}{c_0} \sin ka \cdot \cos \omega t - \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \sin 2ka \cdot \omega t \cdot \cos 2\omega t. \quad (\text{V.3.22})$$

Как нетрудно видеть, происходит нарастание амплитуды второй гармоники. Это явление имеет ясный физический смысл [75]. В самом деле, уравнения гидродинамики могут быть выведены из статистической теории как некоторое ее приближение и должны обладать существенными ее свойствами. Как видно из граничных условий, рассматривается замкнутая система; рано или поздно она должна прийти к равновесному состоянию, и полученное решение есть первый шаг к его установлению. Это осуществляется как раз вследствие того, что система нелинейна. Однако решение (V.3.22) справедливо в пределах лишь очень малого отрезка времени.

Для получения более физического результата предположим, что в резонаторе могут взаимодействовать только две основные моды, и будем искать решение уравнения (V.3.12) в следующем виде:

$$\xi = A_1(t) \sin ka + A_2(t) \sin 2ka. \quad (\text{V.3.23})$$

Собирая выражения, стоящие при $\sin ka$ и $\sin 2ka$, придем к двум уравнениям

$$A_1'' + \frac{b}{\rho_0} k^2 A_1' + \omega^2 A_1 = \varepsilon \omega^2 k 2 A_1 A_2, \quad (\text{V.3.24})$$

$$A_2'' + \frac{b}{\rho_0} 4k^2 A_2' + 4\omega^2 A_2 = \varepsilon \omega^2 k A_1^2.$$

Если считать далее, что нелинейные и диссипативные члены в уравнениях (V.3.24) малы ($\sim \mu$), то решение можно приближенно искать в форме

$$\begin{aligned} A_1(t) &= B_1(\mu t) e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \\ A_2(t) &= B_2(\mu t) e^{i2\omega t} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (\text{V.3.25})$$

Здесь B_1 и B_2 — медленно изменяющиеся комплексные амплитуды первой и второй гармоник. Сохраняя всюду члены не выше первого порядка малости, получим

$$\frac{dB_1}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} k^2 B_1 = -i\varepsilon\omega k B_1^* B_2, \quad (V.3.26)$$

$$\frac{dB_2}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 4k^2 B_2 = -i\varepsilon\omega k \frac{B_1^2}{4}.$$

В уравнениях (V.3.26) удобно перейти к действительным амплитудам и фазам. Полагая для этого $B_1 = C_1 \exp(iS_1)$, $B_2 = C_2 \exp(iS_2)$ вместо (V.3.26) имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} k^2 C_1 &= -\varepsilon\omega k C_1 C_2 \sin \Delta, \\ \frac{dC_2}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 4k^2 C_2 &= \varepsilon\omega k \frac{C_1^2}{4} \sin \Delta, \\ \frac{d\Delta}{dt} &= \varepsilon\omega k \left(\frac{C_1^2}{4C_2} - 2C_2 \right) \cos \Delta. \end{aligned} \quad (V.3.27)$$

Здесь $\Delta = 2S_1 - S_2$. Уравнения (V.3.27) образуют систему укороченных уравнений, широко применяемую в нелинейной оптике [10]. Как известно, получить аналитическое решение уравнений (V.3.27) при $b \neq 0$ не удастся. Поэтому пренебрежем затуханием гармоник — положим $b = 0$. Из первых двух уравнений (V.3.27) при этом получается интеграл энергии:

$$C_1^2(t) + 4C_2^2(t) = \text{const}, \quad (V.3.28)$$

что естественно, так как рассматривается взаимодействие только двух мод. Для нахождения решения удобно подставить первые два уравнения системы (V.3.27) в третье:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{\cos \Delta}{\sin \Delta} \frac{d}{dt} \ln C_1^2 C_2. \quad (V.3.29)$$

Уравнение (V.3.29) легко интегрируется, что позволяет получить следующее выражение:

$$C_1^2 C_2 \cos \Delta = C_1^2(0) C_2(0) \cos \Delta(0). \quad (V.3.30)$$

Если положить $C_2(0) = 0$ при $t = 0$, то из (V.3.30) сразу следует: $\cos \Delta = 0$, $\Delta = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Третье уравнение (V.3.27) показывает, что для таких Δ производная $d\Delta/dt$ равна нулю, т. е. это значение Δ сохраняется. Вся же система (V.3.27) для случая $\Delta = \pi/2$ (когда нарастание идет наиболее эффективно) приводится к виду

$$\frac{dC_1}{dt} = -\varepsilon\omega k C_1 C_2, \quad \frac{dC_2}{dt} = \varepsilon\omega k \frac{C_1^2}{4}. \quad (\text{V.3.31})$$

При наличии интеграла (V.3.28) можно воспользоваться лишь одним из уравнений (V.3.31) (например, вторым) и получить

$$\frac{dC_2}{dt} = \varepsilon\omega k \left[\frac{C_1^2(0)}{4} - C_2^2 \right]. \quad (\text{V.3.32})$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \frac{C_1(0)}{2} \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \varepsilon k C_1(0) \omega t \right], \\ C_1(t) &= C_1(0) \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{1}{2} \varepsilon k C_1(0) \omega t \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.3.33})$$

Решение (V.3.33) изображено на рис. V.12. Как видно из рисунка, при $t \rightarrow \infty$ происходит полная перекачка энергии во вторую гармонику. Этот результат есть следствие нашего предположения о том, что взаимодействуют только две моды. На самом же деле, если не принять специально мер для подавления высших гармоник, закон нарастания $C_2(t)$ будет иметь более сложный вид, чем в (V.3.33). Полученное решение также справедливо для небольших отрезков времени, пока $C_2 \ll C_1$.

Тем не менее решение (V.3.33) позволяет оценить характерное время изменения $C_2(t)$, которое оказывается равным $(\varepsilon k C_1(0) \omega)^{-1}$. Это большая величина, поскольку $k C_1(0) = 2\pi C_1(0)/\lambda \ll 1$ (смещение во много раз меньше длины волны), и нарастание $C_2(t)$ оказывается медленным по сравнению с периодом осцилляций. Интересно отметить, что полученное характерное время совпадает со временем образования разрыва.

Переходя от ξ к колебательной скорости v , имеем

$$\frac{v}{c_0} = \frac{v_0}{c_0} \sin ka \cdot \text{ch}^{-1} \left[\frac{1}{2} \varepsilon k C_1(0) \omega t \right] \cos \omega t - \\ - \frac{v_0}{c_0} \sin 2ka \cdot \text{th} \left[\frac{1}{2} \varepsilon k C_1(0) \omega t \right] \cos 2\omega t. \quad (\text{V.3.34})$$

Если в этом выражении ограничиться очень малыми временами и разложить th , ch^{-1} в ряд по малым значениям

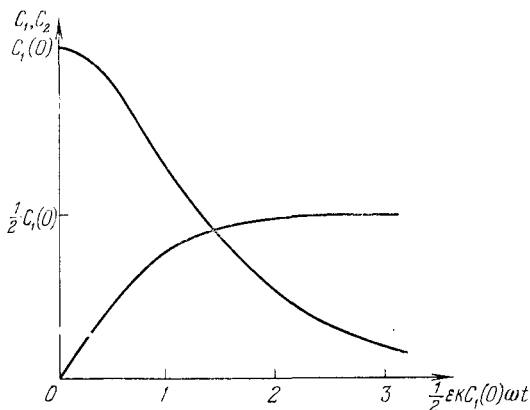


Рис. V.12. Процесс перекачки энергии из одной моды в другую в соответствии с решением (V.3.33).

аргумента, то в первом приближении можно получить в точности результат (V.3.22).

Более интересными представляются задачи о вынужденных колебаниях резонаторов, поскольку именно со случаем вынужденных колебаний часто приходится иметь дело на практике.

Для того чтобы выяснить физические особенности такого типа движений, ограничимся рассмотрением одной задачи о конечных колебаниях столба воздуха в открытой трубе [76]. Пусть источник звука в виде поршня, колеблющегося по закону $\xi(0, t) = A \cos \omega t$, расположен при $a = 0$. Другой же конец трубы $a = l$ открыт, и граничное условие на этом конце имеет вид

$$\partial \xi(l, t) / \partial a = 0.$$

В качестве решения уравнения первого приближения (V.3.16), удовлетворяющего данным граничным условиям, можно взять выражение

$$\xi^{(1)} = A \frac{\cos k(l-a)}{\cos kl} \cos \omega t. \quad (\text{V.3.35})$$

Резонансные частоты определяются из условия $\cos kl = 0$, или

$$kl = \frac{\pi}{2} (2n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{V.3.36})$$

Для случая, когда резонатор возбуждается на частоте, близкой к резонансной, решение (V.3.35) непригодно. В противном же случае, располагая выражением (V.3.35), можно вычислить правую часть уравнения (V.3.17):

$$2\varepsilon \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} = -\frac{\varepsilon}{2} k^3 A^2 \frac{\sin 2k(l-a)}{\cos^2 kl} [1 + \cos 2\omega t] \quad (\text{V.3.37})$$

и найти частное решение для $\xi^{(2)}$, удовлетворяющее граничным условиям $\xi^{(2)}(0, t) = 0$, $\partial \xi^{(2)}(l, t)/\partial a = 0$:

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} = \frac{\varepsilon}{8} \frac{kA^2}{\cos^2 kl} \left\{ \sin 2k(l-a) - \sin 2kl + 2ka + \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin 2ka}{2 \cos 2kl} - ka \cos 2k(l-a) \right] \cos 2\omega t \right\}. \quad (\text{V.3.38}) \end{aligned}$$

Переходя, наконец, к колебательной скорости, имеем

$$\begin{aligned} \frac{v}{c_0} = -\frac{v_0}{c_0} \frac{\cos k(l-a)}{\cos kl} \sin \omega t - \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{\sin 2ka}{2 \cos 2kl} - ka \cos 2k(l-a) \right] \frac{\sin 2\omega t}{\cos^2 kl}. \quad (\text{V.3.39}) \end{aligned}$$

Как показывает полученное решение, в нелинейном резонаторе возникают колебания удвоенной частоты. Применение метода последовательных приближений возможно при условии $\xi^{(2)} \ll \xi^{(1)}$. Из формулы (V.3.39) видно, что по мере приближения к одному из резонансов (V.3.36) это условие не выполняется, так как величина второго порядка малости $\xi^{(2)}$ и, следовательно, колебания удвоенной частоты при этом нарастают быстрее, чем $\xi^{(1)}$.

Решение перестает быть пригодным тем дальше от резонанса, чем больше $kA = v_0/c_0$.

Помимо нелинейных резонансов первого порядка, как видно из выражения (V.3.39), есть еще резонансы, удовлетворяющие условию

$$kl = \frac{\pi}{4} (2n - 1), \quad (\text{V.3.40})$$

при которых также не выполняются условия применимости метода последовательных приближений. В этих точках $\xi^{(2)} \rightarrow \infty$, в то время как $\xi^{(1)}$ конечно. Эти резонансы,

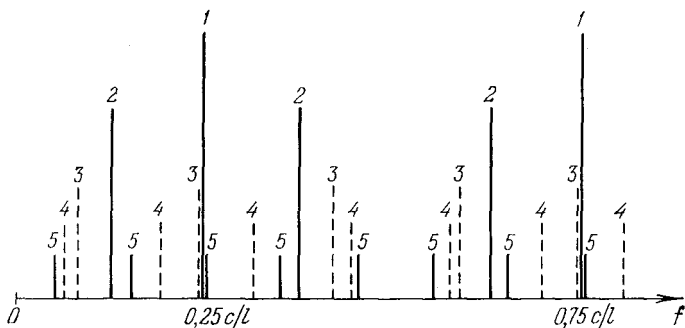


Рис. V.13. Резонансы различных порядков, возникающие при колебательном движении поршня в открытой трубе; f — частота.

в отличие от резонансов по (V.3.36), могут быть названы нелинейными резонансами второго порядка [74]. Физический смысл их довольно прост: несмотря на то, что частота возбуждения не совпадает ни с одной из собственных частот резонатора, возникающие из-за нелинейности гармоники попадают на одну или несколько собственных частот резонатора и из-за его высокой добротности вызывают колебания на этих частотах.

Решение задачи в более высоком приближении, чем второе, должно привести к появлению резонансов третьего, четвертого, пятого и более высоких порядков. Эти резонансы с соответствующими цифрами показаны на рис. V.13.

Следует заметить, что возбуждение унтертоном резонансов высших порядков представляет значительный практический интерес, поскольку при наличии высокодобротных акустических резонаторов в них можно накопить значительную энергию гармоник и реализовать таким образом эффективные умножители частоты. Кроме того, в резонаторах, по-видимому, гораздо легче осуществить избранный тип взаимодействия между ограниченным числом мод, чем в условиях бегущих волн. Наконец, возбуждая систему на частотах, близких к резонансным, можно даже при слабом источнике получить амплитуду колебаний настолько большой, что различные нелинейные эффекты будут проявляться достаточно четко.

Подводя итог сказанному выше, можно утверждать, что исследования стоячих волн конечной амплитуды являются одним из наиболее перспективных направлений в нелинейной акустике. К сожалению, в настоящее время эти исследования тормозятся из-за отсутствия достаточно мощного математического аппарата, сравнимого с методом уравнения Бюргерса для бегущих волн.

§ 4. О взаимодействии звука с волнами иного вида

Круг явлений, рассматриваемых нелинейной акустикой, в основном ограничивается взаимодействиями звуковых волн. С точки зрения исследования различных свойств вещества большой интерес представляют также нелинейные взаимодействия акустических волн с волнами другой природы. Изучение таких явлений составляет, по существу, самостоятельный раздел нелинейной акустики, тесно связанный с рядом других областей физики: твердым телом, оптикой, физикой плазмы и т. д. В качестве примера можно указать на вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) [77], которое может быть предметом изучения как нелинейной оптики, так и акустики, или на акустоэлектрические явления [78], изучением которых занимаются физики самых различных специальностей. Ясно, что даже краткий обзор всех таких вопросов выходит за рамки основ нелинейной акустики. Поэтому мы остановимся лишь на

анализе взаимодействий, описываемых системой гидродинамических уравнений (В.1.4) — (В.1.7).

В нелинейном приближении, как известно, уравнения гидродинамики допускают существование трех независимых типов колебаний; это обычные звуковые волны, энтропийные (температурные) волны и волны завихренности [79, 6]. Если интенсивность какого-либо из этих возмущений перестает быть малой, в уравнениях необходимо учитывать нелинейные члены, что приводит к появлению различных взаимодействий между указанными тремя типами возмущений. Взаимодействия звуковых колебаний со звуковыми же составляют традиционный круг вопросов, рассматриваемых нелинейной акустикой. Взаимодействие «звук — энтропия» — это, по существу, рассеяние звука на температурных неоднородностях [80, 81]. Наконец, к взаимодействиям типа «звук — завихренность» можно отнести такие важные явления, как акустический ветер (см. гл. VIII), аэродинамическая генерация звука [82, 83], спонтанное рассеяние звука турбулентностью [84] и т. д.

Заметим, что спонтанное рассеяние звука происходит на заранее созданных в среде турбулентных потоках и, следовательно, может быть учтено в линейном приближении. Принципиально рассеяние на вихревых волнах возможно и в покоящихся газах и жидкостях. Если в качестве возбуждающего звука взять очень мощную волну, то при рассеянии на флуктуационных вихрях покоящейся среды рассеянная волна может достичь заметной величины. Если при этом ее интенсивность окажется достаточной для того, чтобы совместно с падающей волной оказать заметное обратное воздействие на ту вихревую волну, на которой она рассеялась, то это приведет к усилению данной вихревой волны, что в свою очередь повлечет за собой дальнейшее усиление рассеяния и т. д. Мы приходим, таким образом, к вынужденному рассеянию звука на вихревых волнах [85].

Рассмотрим эту задачу более подробно, поскольку она носит принципиально нелинейный характер и интересна с методической точки зрения.

Считая процесс распространения звука близким к адиабатическому, запишем систему уравнений гидродинамики

в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p - \frac{2}{3} \nabla(\eta \nabla \mathbf{v}) + \nabla[\eta \operatorname{def} \mathbf{v}], \quad (\text{V.4.1}) \\ p &= p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.\end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\operatorname{def} \mathbf{v} = (\partial v_i / \partial x_j) + (\partial v_j / \partial x_i)$; сдвиговая вязкость η предполагается зависящей от температуры: $d\eta = (d\eta/dT)_{T_0} dt$. В системе (V.4.1) удобно исключить одну из неизвестных, например плотность ρ , а для давления p ввести безразмерную переменную $P = (p - p_0)/\gamma p_0$. Введем далее две новые независимые переменные

$$q = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (\text{V.4.2})$$

Как известно, любое векторное поле, в том числе и поле скоростей $\mathbf{v}$, можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей: $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (где φ — скалярный и $\mathbf{A}$ — векторный потенциалы). Поэтому легко видеть, что величина Ω будет характеризовать волны завихренности, q же относится к потенциальному движению и связана со звуковой волной. С помощью этих переменных система (V.4.1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta P - \frac{4}{3} v_0 \frac{\partial}{\partial t} \Delta P &= \\ &= -\nabla f + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4}{3} v_0 \Delta \right) \frac{m}{\rho_0}, \quad (\text{V.4.3})\end{aligned}$$

$$q = -\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{m}{\rho_0}, \quad (\text{V.4.4})$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - v_0 \Delta \Omega = [\nabla f]. \quad (\text{V.4.5})$$

Здесь $v_0 = \eta/\rho_0$ — кинематическая вязкость,

$$\begin{aligned}f &= -P \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla v^2 - \frac{2}{3} \nabla \left[\frac{d\eta}{\rho_0} (\nabla \mathbf{v}) \right] + \nabla \left[\frac{d\eta}{\rho_0} \operatorname{def} \mathbf{v} \right], \\ \frac{m}{\rho_0} &= -\nabla(P \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} P^2 (\gamma - 1).\end{aligned} \quad (\text{V.4.6})$$

Уравнение (V.4.3) представляет собой нелинейное звуковое уравнение, (V.4.5) — нелинейное уравнение для вихревой компоненты. Линеаризуя последнее, т. е. отбрасывая правую часть $[\nabla f]$, можно получить следующее решение:

$$\Omega = \Omega_0 e^{-v_0 k_\Omega^2 t + i k_\Omega r}, \quad (\text{V.4.7})$$

где $(\Omega_0 k_\Omega) = 0$, Ω_0 — комплексная амплитуда, k_Ω — волновой вектор вихревой волны. Это выражение показывает, что возникающие в среде неоднородности непотенциальной части скорости затухают со временем экспоненциально, т. е. вихревые волны являются релаксационными колебаниями, время релаксации которых зависит от сдвиговой вязкости.

Следует заметить, что в исходных уравнениях (V.4.1) не учитывалась объемная вязкость. Нетрудно видеть, что в этой задаче она несущественна, поскольку вихревые волны не связаны с изменением объема среды, а связаны только со сдвигами.

Совместное решение уравнений (V.4.3) — (V.4.5) должно описывать процесс вынужденного рассеяния звука на вихревых волнах. Предполагая, что сильная звуковая волна при $x = 0$ падает на плоскую границу среды вдоль оси x , ищем решение системы уравнений в виде

$$P = P_0 \cdot e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + P_1 e^{i(k_1 r - \omega_1 t)} + P_2 e^{i(k_2 r - \omega_2 t)} + \text{к. с.} \quad (\text{V.4.8})$$

Здесь P_0 — амплитуда возбуждающей волны, $P_{1,2}$ — амплитуды так называемых стоксовой и антистоксовой рассеянных звуковых волн. При этом предполагаем, что выполняются следующие соотношения: $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2 \approx \omega_2 - \omega_\Omega$, $\omega_\Omega \ll \omega_0$.

Используя (V.4.8), из уравнения (V.4.5) для вихревой моды в стационарном режиме получим выражение

$$\Omega = \Omega_{01} e^{i[(k_0 - k_1)r - \omega_\Omega t]} + \Omega_{02} e^{i[(k_2 - k_0)r - \omega_\Omega t]} + \text{к. с.}, \quad (\text{V.4.9})$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{01} &= - \frac{2i A_1 c_0 P_0 P_1^*}{\rho_0 [-i\omega_\Omega + v_0 (k_0 - k_1)^2]} [k_0 k_1] (k_0 + k_1), \\ \Omega_{02} &= \frac{2i A_2 c_0 P_0^* P_2}{\rho_0 [-i\omega_\Omega + v_0 (k_2 - k_0)^2]} [k_0 k_2] (k_0 + k_2). \end{aligned} \quad (\text{V.4.10})$$

Здесь $A_{1,2} = A (1 - \cos \theta_{1,2}) - {}^{2/3} \eta$, $\theta_{1,2}$ — углы рассеяния (углы между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}_{1,2}$), $A = (d\eta/dT)_{T_0} \frac{T_0 \alpha \gamma P_0}{c_p P_0}$.

Ограничимся таким приближением, когда стоксова и антистоксова компоненты не взаимодействуют между собой. Это условие хорошо выполняется при не слишком малых углах рассеяния. В этом случае, подставляя выражение (V.4.8) в уравнение (V.4.3) и пренебрегая, где возможно, членами, содержащими малый параметр $v_0 k_i / c_0$ ($i = 0, 1, 2$), получим следующую систему укороченных уравнений для медленно изменяющихся с координатой x амплитуд звуковых волн:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dx} + \sigma_0 P_0 &= \\ &= - \left\{ [\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1] \Omega_{01} P_1 \frac{\cos \theta_1}{c_0 k_{1\Omega}^2} + [\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2] \Omega_{02}^* P_2 \frac{\cos \theta_2}{c_0 k_{2\Omega}^2} \right\}, \\ \frac{dP_1}{dx} \cos \theta_1 + \sigma_1 P_1 &= [\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1] \Omega_{01}^* P_0 \frac{\cos \theta_1}{c_0 k_{1\Omega}^2}, \quad (\text{V.4.11}) \\ \frac{dP_2}{dx} \cos \theta_2 + \sigma_2 P_2 &= [\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2] \Omega_{02} P_0 \frac{\cos \theta_2}{c_0 k_{2\Omega}^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_i = {}^{2/3} v_0 k_i^2 / c_0$, $\mathbf{k}_{1\Omega} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_{2\Omega} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0$. Из двух последних уравнений системы (V.4.11) совместно с (V.4.9) следует, что усиление в стоксовой области возможно при $A_1 \cos \theta_1 < 0$, в антистоксовой — при $A_2 \cos \theta_2 > 0$. Считая $P_0 \approx \text{const}$ (что вполне оправдано в самом начале развития процесса), из формул (V.4.9), (V.4.11) получаем следующее выражение для пороговой интенсивности вынужденного рассеяния, т. е. интенсивности возбуждающего звука, при которой начинается экспоненциальный рост рассеянных волн:

$$I_0 = \frac{\frac{2}{3} v_0^2 k_i^2 k_{i\Omega}^4 (\gamma P_0)^2 \frac{1 + (\omega_\Omega \tau_i)^2}{\omega_\Omega \tau_i}}{[\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_i]^2 (k_0 + k_i) c_0^2 |A_i \cos \theta_i|}, \quad (\text{V.4.12})$$

где $\tau_i = (v_0 k_{i\Omega}^2)^{-1}$, $i = 1$ или 2 соответственно для стоксовой и антистоксовой компонент.

Из выражения (V.4.12) видно, что порог имеет минимум на частоте $\omega_\Omega = \tau_i^{-1}$. Это значит, что рассеянный

звук смещен по частоте относительно падающего на величину $\Delta\omega \approx \tau_0^{-1}$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$).

Численные оценки по формуле (V.4.12) показывают, что, как правило, пороговая интенсивность газа (десятые и даже сотые доли Bm/cm^2 в ряде газов при $\omega_0 \approx \approx 2\pi 10^4$ *гц*) существенно ниже порога в жидкостях.

Из уравнений (V.4.11) видно, что не может быть рассеяния назад и под углом $\pi/2$ к направлению распространения возбуждающего звука. Этот факт хорошо известен из теории спонтанного рассеяния звука турбулентной атмосферой. Отсутствие рассеяния на угол π связано с несжимаемостью турбулентного движения, отсутствие же на угол $\pi/2$ может быть интерпретировано на основании формул Френеля [84].

Выражение (V.4.12) для порога получено в предположении $P_0 = \text{const}$. Систему уравнений (V.4.11) можно решить в более общем случае, когда P_0 нельзя считать постоянной. Подставляя в систему (V.4.11) значение Ω_{01} из (V.4.10) (рассматриваем только стоксову волну) и пренебрегая затуханием, получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dx} &= \frac{D}{2} \left(-1 + i \frac{v_0 k_{1\Omega}^2}{\omega_\Omega} \right) P_0 |P_1|^2, \\ \frac{dP_1}{dx} &= \frac{D}{2 \cos \theta_1} \left(1 + i \frac{v_0 k_{1\Omega}^2}{\omega_\Omega} \right) P_1 |P_0|^2, \end{aligned} \quad (\text{V.4.13})$$

где

$$\frac{D}{2} = \frac{2 [k_0 k_1]^2 \cos \theta_1 A_1 (k_0 + k_1)}{\rho_0 k_{1\Omega}^2} \tau_1 \frac{\tau_1 \omega_\Omega}{1 + (\tau_1 \cdot \omega_\Omega)^2}. \quad (\text{V.4.14})$$

Умножая первое из уравнений (V.4.13) на P_0^* , а второе — на P_1^* , после элементарных преобразований будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{Y}}_0}{\partial x} = -D \tilde{\mathcal{Y}}_0 \tilde{\mathcal{Y}}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{Y}}_1}{\partial x} = \frac{D}{\cos \theta_1} \tilde{\mathcal{Y}}_1 \tilde{\mathcal{Y}}_0. \quad (\text{V.4.15})$$

Здесь $\mathcal{Y}_{0,1} = |P_{0,1}|^2$. Поскольку система (V.4.15) имеет интеграл $\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_1 \cos \theta_1 = \text{const}$, интегрирование ее не представляет труда. Учитывая, что $\tilde{\mathcal{Y}}_0(0) \gg \tilde{\mathcal{Y}}_1(0)$,

можно записать решение в следующем виде:

$$\frac{\tilde{\mathcal{F}}_1(x)}{\tilde{\mathcal{F}}_0(x)} \approx \left\{ \cos \theta_1 + \frac{\tilde{\mathcal{F}}_0(0)}{\tilde{\mathcal{F}}_1(0)} \exp \left[- \frac{D\tilde{\mathcal{F}}_0(0)}{\cos \theta_1} x \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{V.4.16})$$

Этот результат позволяет определить расстояние $x = x_0$, на котором рассеянная волна по порядку величины станет равной $\tilde{\mathcal{F}}_0(0)$:

$$x_0 = \ln \frac{\tilde{\mathcal{F}}_0(0)}{\tilde{\mathcal{F}}_1(0)} \left[\frac{D\tilde{\mathcal{F}}_0(0)}{\cos \theta_1} \right]^{-1}. \quad (\text{V.4.17})$$

Для обычных жидкостей величина x_0 оказывается слишком большой, чтобы эффект можно было наблюдать экспериментально при практически достижимых интенсивностях звука. В газах же x_0 может быть существенно меньше [85].

Интересной особенностью рассмотренного процесса является то, что рассеяние имеет место как в стоксовой области, так и в антистоксовой, в приближении, когда стоксова и антистоксова компоненты не взаимодействуют между собой. Аналогичная ситуация известна в нелинейной оптике [86] в случае вынужденного рассеяния света, связанного с поглощением.

ГЛАВА VI

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ

§ 1. О трехчастотном параметрическом взаимодействии

Понятие о параметрических процессах, как известно, возникло в радиотехнике. Суть этих явлений состоит в том, что при достаточно сильном периодическом изменении энергоемких параметров, например индуктивности или емкости в колебательном контуре, можно добиться возбуждения или усиления слабых электрических колебаний.

При переходе к распределенным системам параметрические процессы приобретают волновой характер и вместе с ним ряд особенностей, однако их физическая трактовка остается прежней. Для того чтобы параметрическое взаимодействие имело место, необходимо присутствие в среде по крайней мере двух неравноправных волн: мощной волны накачки и слабой сигнальной волны. Свойства (параметры) среды оказываются промодулированными полем бегущей интенсивной накачки, и если выполнены условия фазового синхронизма, энергия может эффективно перекачиваться в слабую волну.

К числу параметрических эффектов в широком смысле слова можно отнести и взаимодействия акустических волн с волнами иной природы, о которых коротко рассказывалось в гл. V, § 4. Например, дифракция света на ультразвуке есть, по существу, рассеяние света в среде, плотность которой изменена под действием ультразвуковой волны. Однако таких эффектов мы здесь рассматривать не будем, а ограничимся случаем чисто акустической

«параметрики», когда все взаимодействующие волны являются звуковыми.

При рассмотрении параметрических явлений применяется исключительно спектральный подход. Он очень удобен в радиотехнике или в нелинейной оптике, где наличие сильной дисперсии позволяет реализовать взаимодействие только между несколькими волнами; в акустике же спектральные методы используются гораздо реже. Вместе с тем проблема реализации параметрических усилителей и генераторов ультразвука остро поставила вопрос о создании искусственных систем с дисперсией, поскольку только в таких системах усиление может быть значительным (см. §§ 2, 3). Поэтому необходимо начать изложение именно со спектрального подхода к задаче.

Рассмотрим трехчастотное невырожденное параметрическое взаимодействие. Пусть в среде с квадратичной нелинейностью могут существовать волны только трех частот: накачки ω_3 , сигнала ω_1 и волны разностной частоты ω_2 , причем между ними имеется связь:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (\text{VI.1.1})$$

Предположим также, что эти волны распространяются по среде в одном направлении и с одинаковыми фазовыми скоростями, т. е. они находятся в синхронизме: $k_3 = k_1 + k_2$. Заметим сразу же, что создать такие условия, при которых было бы возможно указанное взаимодействие в чистом виде, — довольно сложная проблема для нелинейной акустики (обычно наряду с параметрическим процессом происходит эффективная генерация гармоник и волн комбинационных частот). Мы не будем здесь обсуждать конкретные способы, позволяющие практически осуществить эти условия, а перейдем сразу к анализу свойств самого трехчастотного параметрического процесса.

Если искать решение уравнения Бюргерса (II.1.10) в виде суммы трех волн:

$$v(x, \tau) = A_1(x) e^{i\omega_1\tau} + A_2(x) e^{i\omega_2\tau} + A_3(x) e^{i\omega_3\tau} + \text{к. с.}, \quad (\text{VI.1.2})$$

где A_1, A_2, A_3 — комплексные амплитуды, изменяющиеся по мере распространения волн по среде как в результате

взаимодействия между ними на квадратичной нелинейности, так и вследствие диссипации, можно получить следующую систему из трех укороченных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dx} + \delta_1 A_1 &= i \frac{\varepsilon \omega_1}{c_0^2} A_2^* A_3, \\ \frac{dA_2}{dx} + \delta_2 A_2 &= i \frac{\varepsilon \omega_2}{c_0^2} A_1^* A_3, \\ \frac{dA_3}{dx} + \delta_3 A_3 &= i \frac{\varepsilon \omega_3}{c_0^2} A_1 A_2.\end{aligned}\quad (\text{VI.1.3})$$

Здесь для краткости принято: $\delta_j = b\omega_j^2/2c_0^3\theta_0$ ($j = 1, 2, 3$).

В тех случаях, когда влияние диссипации пренебрежимо мало, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, система (VI.1.3) имеет интеграл энергии. Для того чтобы показать это, нужно умножить уравнения соответственно на A_1^*/ω_1 , A_2^*/ω_2 , A_3^*/ω_3 и сложить их с комплексно-сопряженными выражениями. После интегрирования получаются следующие соотношения, справедливые при любом значении x :

$$\begin{aligned}\frac{|A_1|^2}{\omega_1} - \frac{|A_2|^2}{\omega_2} &= \text{const}, \\ \frac{|A_1|^2}{\omega_1} + \frac{|A_3|^2}{\omega_3} &= \text{const}, \\ \frac{|A_2|^2}{\omega_2} + \frac{|A_3|^2}{\omega_3} &= \text{const}.\end{aligned}\quad (\text{VI.1.4})$$

Умножая второе из соотношений (VI.1.4) на ω_1 , третье — на ω_2 и складывая полученные выражения, приходим к закону сохранения энергии:

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 = \text{const}. \quad (\text{VI.1.5})$$

Нужно отметить, что параметрические явления могут быть наглядным образом интерпретированы на квантовом языке как процессы расщепления высокочастотных фононов волны накачки $\hbar\omega_3$ на два фонона $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ более низкой частоты. Если умножить соотношение (VI.1.1) и условие синхронизма на постоянную Планка $\hbar$, их можно трактовать как законы сохранения энергии и квазиимпульса при элементарном трехфононном взаимодействии.

Наконец, энергетические соотношения (VI.1.4) (по аналогии с теорией нелинейных реактивных систем с сосредоточенными параметрами их называют соотношениями Мэнли — Роу [10]), которые удобно также представить и в дифференциальной форме

$$\frac{d|A_1|^2}{\omega_1} = \frac{d|A_2|^2}{\omega_2}, \quad \frac{d|A_1|^2}{\omega_1} = -\frac{d|A_3|^2}{\omega_3},$$

$$\frac{d|A_2|^2}{\omega_2} = -\frac{d|A_3|^2}{\omega_3}, \quad (\text{VI.1.6})$$

на квантовом языке могут быть переписаны так:

$$dN_1 = dN_2, \quad dN_1 = -dN_3, \quad dN_2 = -dN_3. \quad (\text{VI.1.7})$$

При наличии граничных условий выражения (VI.1.6), (VI.1.7) позволяют оценить эффективность нелинейного взаимодействия. Если, например, на входе в нелинейную среду задана мощная волна ω_3 , то процесс распада $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ будет преобладать над процессом слияния: $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$. Это означает, что знаки у приращений dN_1 , dN_2 будут положительные, а знак у dN_3 — отрицательный. При этом энергия, теряемая высокочастотной волной накачки, будет распределяться между волнами ω_1 , ω_2 в отношении

$$\frac{d|A_1|^2}{d|A_2|^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (\text{VI.1.8})$$

Как показывает формула (VI.1.8), преобразование частоты «вверх» происходит значительно эффективнее преобразования частоты «вниз», и при $\omega_1/\omega_2 \ll 1$ приращение энергии низкочастотной волны мало.

Проанализируем вначале решение уравнений (VI.1.3) в приближении постоянного поля накачки. Полагая в (VI.1.3) $A_3 = A_H = \text{const}$ и переходя к действительным амплитудам и фазам $A_1 = B_1 \exp(iS_1)$, $A_2 = B_2 \exp(iS_2)$, получим следующую систему:

$$\frac{dB_1}{dx} + \delta_1 B_1 + \frac{\varepsilon \omega_1}{c_0^2} A_H B_2 \sin \Delta = 0,$$

$$\frac{dB_2}{dx} + \delta_2 B_2 + \frac{\varepsilon \omega_2}{c_0^2} A_H B_1 \sin \Delta = 0, \quad (\text{VI.1.9})$$

$$\frac{d\Delta}{dx} + \frac{\varepsilon A_H}{c_0^2} \left(\omega_1 \frac{B_2}{B_1} + \omega_2 \frac{B_1}{B_2} \right) \cos \Delta = 0.$$

Здесь $\Delta = -S_1 - S_2$. Из первых двух уравнений можно выразить

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\omega_1}{c_0^2} A_H \frac{B_2}{B_1} &= -\frac{1}{\sin \Delta} \frac{d}{dx} \ln (B_1 e^{\delta_1 x}), \\ \frac{\varepsilon\omega_2}{c_0^2} A_H \frac{B_1}{B_2} &= -\frac{1}{\sin \Delta} \frac{d}{dx} \ln (B_2 e^{\delta_2 x}). \end{aligned} \quad (\text{VI.1.10})$$

Подставляя эти соотношения в третье уравнение системы (VI.1.9), приходим к интегралу следующего вида:

$$\begin{aligned} B_1(x) B_2(x) \cos \Delta(x) e^{(\delta_1 + \delta_2)x} &= \text{const} = \\ &= B_1(0) B_2(0) \cos \Delta(0). \end{aligned} \quad (\text{VI.1.11})$$

В задачах о параметрическом усилении наиболее типичны такие условия на границе, при которых в среду вводится слабый сигнал и мощная волна накачки, а необходимая для усиления волна разностной частоты возникает внутри самой среды. Полагая в (VI.1.11) амплитуду $B_2(0)$ равной нулю, можно получить $\cos \Delta(x) = \text{const} = 0$; при этом система (VI.1.9) должна быть переписана в форме

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{dx} + \delta_1 B_1 + \frac{\varepsilon\omega_1}{c_0^2} A_H B_2 &= 0, \\ \frac{dB_2}{dx} + \delta_2 B_2 + \frac{\varepsilon\omega_2}{c_0^2} A_H B_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.1.12})$$

Поскольку уравнения (VI.1.12) линейны, будем искать их решения в виде $B_1 = C_1 \exp(gx)$, $B_2 = C_2 \exp(gx)$. В результате получим систему из двух однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин C_1 , C_2 . Для нахождения нетривиальных решений нужно потребовать, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$(g + \delta_1)(g + \delta_2) - \left(\frac{\varepsilon A_H}{c_0^2} \right)^2 \omega_1 \omega_2 = 0. \quad (\text{VI.1.13})$$

Соотношение (VI.1.13) позволяет определить два значения g_1 , g_2 и записать решение системы (VI.1.12):

$$B_1 = C_{11} e^{g_1 x} + C_{12} e^{g_2 x}, \quad B_2 = C_{21} e^{g_1 x} + C_{22} e^{g_2 x}. \quad (\text{VI.1.14})$$

Явный вид констант C_{ij} можно установить из граничных условий: $B_1(x=0) = B_1(0)$, $B_2(x=0) = 0$ (эти выражения несколько громоздки и поэтому здесь не приводятся). Для того чтобы решения были нарастающими, действие нелинейных эффектов должно проявляться сильнее, чем нежелательное влияние диссипации. Это возможно только при достаточно интенсивной накачке, амплитуда которой превышает некоторое пороговое значение $A_{\text{пор}}$. Как нетрудно установить с помощью формулы (VI.1.13), выражение для $A_{\text{пор}}$ имеет вид $A_{\text{пор}} = c_0^2 \sqrt{\delta_1 \delta_2} / \varepsilon \sqrt{\omega_1 \omega_2}$. Вводя число Рейнольдса волны накачки, равное $\text{Re}_H = c_0 \rho_0 A_H / b \omega_3$, можно записать условие параметрического усиления в следующей форме:

$$2\varepsilon \text{Re}_H > \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_3}. \quad (\text{VI.1.15})$$

Поскольку правая часть неравенства (VI.1.15) в силу соотношения $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ изменяется в пределах от 0 до 0,5, при больших числах Re_H усиление всегда имеет место. В этом случае можно положить $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и получить из (VI.1.14) простые выражения для нарастающих амплитуд:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_1(0) \operatorname{ch} \left(\frac{\varepsilon A_H}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_2} x \right), \\ B_2(x) &= \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} B_1(0) \operatorname{sh} \left(\frac{\varepsilon A_H}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_2} x \right). \end{aligned} \quad (\text{VI.1.16})$$

Решение (VI.1.16) показывает, что процесс идет наиболее эффективно при совпадении частот усиливаемых волн: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$. Такой режим называется вырожденным; он обратен по отношению к генерации второй гармоники, поскольку представляет собой процесс распада высокочастотного фонона $\hbar\omega$ на два одинаковых фонона частоты $\omega/2$.

Приближение заданного поля накачки удовлетворительно описывает только начало параметрического усиления. Экспоненциальный рост амплитуд слабых волн должен вскоре привести к тому, что начнет сказываться реакция —

их обратное воздействие на накачку — и A_n уже нельзя будет считать константой.

Для исследования эффектов насыщения нужно учитывать, помимо уравнений (VI.1.12), также и уравнения, описывающие изменения амплитуды и фазы волны накачки [10]. Эти уравнения нетрудно вывести из системы (VI.1.3), перейдя к действительным амплитудам и фазам для всех трех взаимодействующих волн. Выполняя указанную процедуру, получим

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{dx} + \delta_1 B_1 + \frac{\varepsilon \omega_1}{c_0^2} B_2 B_3 \sin \Delta' &= 0, \\ \frac{dB_2}{dx} + \delta_2 B_2 + \frac{\varepsilon \omega_2}{c_0^2} B_1 B_3 \sin \Delta' &= 0, \\ \frac{dB_3}{dx} + \delta_3 B_3 - \frac{\varepsilon \omega_3}{c_0^2} B_1 B_2 \sin \Delta' &= 0, \\ \frac{d\Delta'}{dx} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \left(\omega_1 \frac{B_2 B_3}{B_1} + \omega_2 \frac{B_1 B_3}{B_2} - \omega_3 \frac{B_1 B_2}{B_3} \right) \cos \Delta' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.1.17})$$

Здесь $\Delta' = S_3 - S_1 - S_2$. В общем случае система (VI.1.17) может быть решена только численным способом. Для нахождения аналитических результатов рассмотрим простейший вариант, когда $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Будем считать, что при $x = 0$

$$B_1(x=0) = B_1(0), \quad B_2(x=0) = 0, \quad B_3(x=0) = B_3(0), \\ \Delta' = -\pi/2 = \text{const.} \quad (\text{VI.1.18})$$

Из первых двух уравнений (VI.1.17) в рассматриваемом случае имеем $dB_1/dB_2 = \omega_1 B_2/\omega_2 B_1$. Интегрируя это соотношение с использованием на границе (VI.1.18), придем к выражению

$$B_1^2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} B_2^2 + B_1^2(0). \quad (\text{VI.1.19})$$

Комбинируя другие пары уравнений (VI.1.17), можно аналогичным путем получить следующие результаты:

$$\begin{aligned} B_3^2 &= -\frac{\omega_3}{\omega_2} B_2^2 + B_3^2(0), \\ B_1^2 &= -\frac{\omega_1}{\omega_3} [B_3^2 - B_3^2(0)] + B_1^2(0). \end{aligned} \quad (\text{VI.1.20})$$

Если подставить выражения (VI.1.19), (VI.1.20) во второе уравнение системы (VI.1.17), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dB_2}{dx} = -\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3} \sqrt{(w^2 - B_2^2)(v^2 - B_2^2)}. \quad (\text{VI.1.21})$$

Здесь введены обозначения для констант: $w^2 = \omega_2 B_3^2(0)/\omega_3$, $v^2 = \omega_2 B_1^2(0)/\omega_1$. Проинтегрируем (VI.1.21) и введем новую переменную $w^2 - B_2^2 = w^2 y^2$, в итоге имеем

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 + v^2}} \int_0^{\sqrt{1 - B_2^2/w^2}} \frac{dy}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3} x. \quad (\text{VI.1.22})$$

Левая часть этого равенства содержит эллиптический интеграл первого рода, через k^2 обозначено выражение $w^2/(v^2 + w^2)$. Обращая эллиптический интеграл, можно прийти, как известно, к эллиптическим функциям Якоби. Это позволяет записать решение в следующей форме:

$$B_2(x) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_3}} B_3(0) \operatorname{cn} \left(K + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3} \frac{B_3(0)}{k} x \right), \quad (\text{VI.1.23})$$

где $K = \int_0^1 [(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)]^{-1/2} dy$. Пользуясь найден-

ным решением и выражениями (VI.1.19), (VI.1.20), можно получить формулы, описывающие изменение в пространстве амплитуд B_1 , B_3 :

$$B_1(x) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_3}} \frac{B_3(0)}{k} \operatorname{dn} \left(K + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3} \frac{B_3(0)}{k} x \right), \quad (\text{VI.1.24})$$

$$B_3(x) = B_3(0) \operatorname{sn} \left(K + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3} \frac{B_3(0)}{k} x \right).$$

Как показано на рис. VI.1, взаимодействие волн в рассматриваемом случае носит характер пространственных биений. Когда B_1 , B_2 становятся сравнимыми по величине с B_3 , экспоненциальный рост замедляется. Амплитуды волн сигнала и разностной частоты достигают своего максимального значения, после чего начинается обратная

перекачка энергии в волну накачки. Если же $\delta_s \neq 0$, то наряду с биениями начнется монотонное убывание

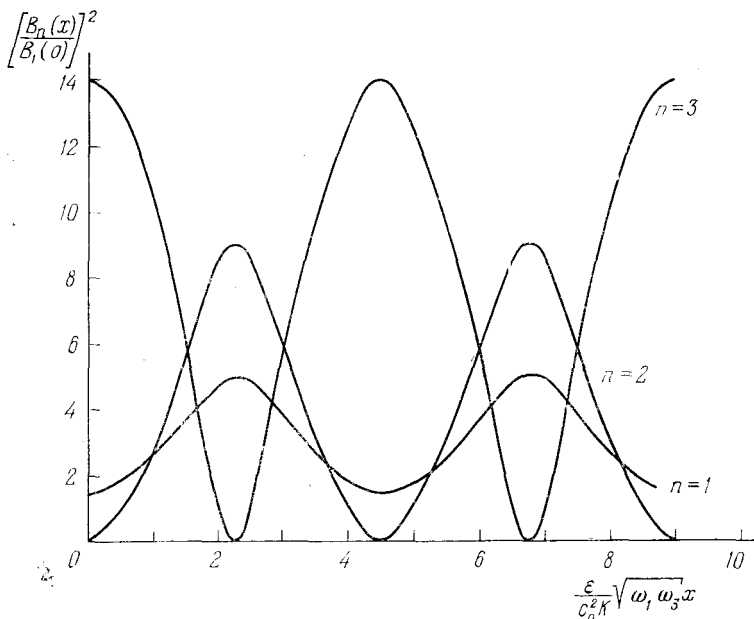


Рис. VI.1. Параметрическое взаимодействие при учете обратного воздействия на накачку.

амплитуд взаимодействующих волн и при достаточно больших потерях амплитуды B_1 , B_2 будут иметь только по одному максимуму.

§ 2. Параметрическое усиление звука в средах без дисперсии

Идеализированный случай чистого трехчастотного взаимодействия, рассмотренный в предыдущем параграфе, в нелинейной акустике обычно не реализуется.

Специфика акустики состоит в отсутствии частотной дисперсии скорости звука, откуда следует линейность зависимости волнового числа от частоты: $k = \omega/c_0$.

Совокупность условий $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $k_3 = k_1 + k_2$ приводит в этом случае к тому, что в жидкостях и газах эффективно взаимодействуют лишь волны, распространяющиеся в одном направлении. Поскольку при этом условие синхронизма $k_3 = k_1 + k_2$ становится тривиальным следствием соотношения $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, нетрудно сделать вывод о возможности усиления сигнала любой частоты ω_1 , лежащей в промежутке от 0 до ω_3 . Таким образом, параметрические процессы в акустике характеризуются отсутствием узкой полосы пропускания, которая существенна для сред с дисперсией [40].

Широкополосность эффектов взаимодействия звуковых волн является главной трудностью на пути реализации параметрических усилителей, поскольку наряду с когерентным процессом распада фононов $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ происходит процесс слияния фононов (или генерация гармоник), особенно интенсивный для волны накачки. Это приводит к большим энергетическим потерям волны ω_3 и в конечном счете к ослаблению параметрического процесса.

Как отмечалось еще в монографии [40], характерное расстояние образования разрыва в волне накачки определяет инкремент нарастания усиливаемой звуковой волны, и поэтому коэффициент усиления не может быть значительным. Необходимо заметить, однако, что, поскольку образование разрыва еще не означает полного затухания волны накачки, этот вывод не следует распространять на усиление очень слабых сигналов.

Указанные трудности стимулировали исследования параметрического усиления в акустике в основном на пути отыскания специальных способов создания дисперсии с целью подавления паразитных процессов истощения накачки (об этих работах будет идти речь в следующем параграфе). Вместе с тем представляет интерес рассмотрение этого явления при естественных условиях, когда интересующий нас трехчастотный параметрический процесс «замазан» на фоне множества других паразитных эффектов [87].

Распространение звука конечной амплитуды с учетом трехфононных процессов (квадратичной нелинейности) и поглощения описывается, как известно, уравнением

Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (\text{VI.2.1})$$

Здесь использованы безразмерные переменные $V = v/v_0$, $\theta = \omega(t - x/c_0)$, $\sigma = \varepsilon \omega v_0 x/c_0^2$. Величина Γ равна $(2\varepsilon \text{Re})^{-1}$, где $\text{Re} = c_0 \rho_0 v_0 / b \omega$ — акустическое число Рейнольдса.

Поскольку уравнение (VI.2.1) может быть решено точно в общем виде, принципиальных трудностей при рассмотрении любых (в том числе параметрических) трехволновых взаимодействий не существует. Достаточно задать граничные условия: при $\sigma = 0$ $V = B_3(0) \sin \frac{\omega_3}{\omega} \theta + B_1(0) \sin \left(\frac{\omega_1}{\omega} \theta + S \right)$, где $B_3(0) \gg B_1(0)$, найти соответствующее решение уравнения (VI.2.1), а затем с помощью гармонического анализа вычислить фурье-компоненты волн $B_3(\sigma)$, $B_1(\sigma)$, заданных на границе, и компоненту волны разностной частоты $B_2(\sigma)$, возникающей в среде. Однако в силу сложного вида получаемого решения реализовать эту схему затруднительно.

Прямой спектральный подход (столь плодотворный в нелинейной оптике [10]), когда решение уравнения (VI.2.1) ищется в виде заранее заданного спектра, в акустике не приводит к успеху, так как при этом требуется решать систему из бесконечного числа связанных нелинейных уравнений. Тем не менее этот способ позволяет описать начальную стадию процесса, на которой можно пренебречь истощением накачки. Рассматривая для простоты вырожденный случай: $\omega_3 = \omega$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega/2$, ищем решение (VI.2.1) в виде

$$V = \sin \theta + B_1(\sigma) \sin \left[\frac{\theta}{2} + S(\sigma) \right]. \quad (\text{VI.2.2})$$

После несложных выкладок получим два укороченных уравнения

$$\frac{dB_1}{d\sigma} + \frac{\Gamma}{4} B_1 = -\frac{B_1}{4} \cos 2S, \quad (\text{VI.2.3})$$

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{1}{4} \sin 2S, \quad (\text{VI.2.4})$$

которые позволяют сделать ряд важных выводов.

Прежде всего заметим, что наибольшее усиление достигается при начальном сдвиге фаз $S(0) = \pi/2$. Из уравнения (VI.2.4) получается при этом $S(\sigma) = \text{const} = \pi/2$, а уравнение (VI.2.3) дает следующий закон изменения амплитуды сигнала: $B_1(\sigma) = B_1(0)\exp[(1 - \Gamma) \times \sigma/4]$. Нетрудно видеть, что усиление имеет место для $\Gamma < 1$, т. е. при больших числах Re . Если же начальный сдвиг фаз $S(0)$ равен нулю, то усиление вообще невозможно и амплитуда заданной на входе волны быстро уменьшается. При произвольном $S(0)$ пороговое условие может быть записано в виде $\Gamma < -\cos 2S(0)$.

Итак, самым интересным является случай больших чисел Рейнольдса, когда сильно выражены нелинейные эффекты, и вполне определенного начального сдвига фаз $S(0) = \pi/2$, при котором энергия накачки перекачивается в субгармонику наиболее эффективно.

Для изучения процесса во всей области значений σ целесообразно воспользоваться графическими методами, наиболее удобными при больших числах Re .

Рассмотрим два случая: $S(0) = \pi/2$ и $S(0) = 0$, положив $B_1(0) = 0,2$. Как показывают графические построения, поведение исходных профилей волн оказывается в этих случаях принципиально различным.

При $S(0) = \pi/2$ начальное возмущение, заданное в виде $V = \sin \theta + 0,2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, имеет два несимметричных полупериода (рис. VI.2). После образования разрыва этот факт приводит к асимметрии фронтов относительно нулевого уровня, и скорость движения фронтов становится отличной от c_0 . Поскольку два соседних фронта движутся с различными скоростями (причем скорость одного $U_{\phi_1} > c_0$, а второго $U_{\phi_2} < c_0$), начальная асимметрия усиливается.

Как показано на рис. VI.2, один из полупериодов полностью вырождается при $\sigma \sim 26$ и исходная волна трансформируется в пилообразную с основной частотой $\omega/2$.

Напротив, при $S(0) = 0$, когда возмущение задается в виде $V = \sin \theta + 0,2\sin(\theta/2)$, образуются симметричные фронты и влияние субгармоники на поведение профиля сказывается мало (рис. VI.3).

Результаты гармонического анализа графиков рис. VI.2,3 изображены на рис. VI.4. Кривая $B_3 \{ \pi/2 \}$ иллюстрирует поведение амплитуды волны накачки в случае наиболее эффективного взаимодействия. Как видно из

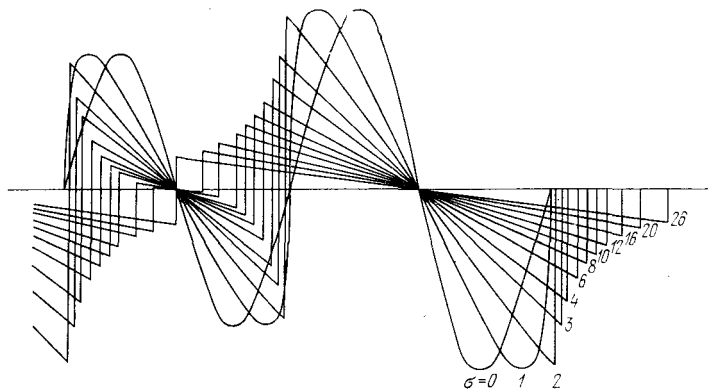


Рис. VI.2. Вырожденный параметрический процесс на пространственно-временном языке при оптимальном сдвиге фаз $S(0) = \pi/2$.

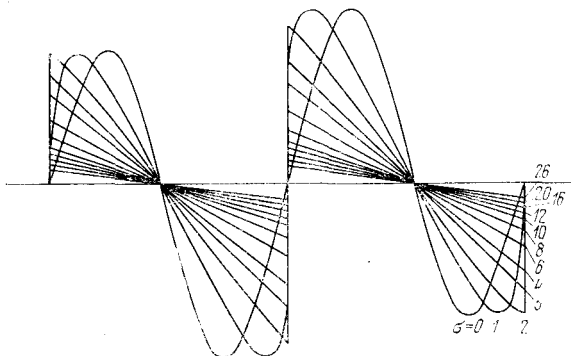


Рис. VI.3. Вырожденный параметрический процесс при $S(0) = 0$.

графика, амплитуда $B_3 \{ \pi/2 \}$ уменьшается до нуля, а затем становится отрицательной, т. е. волна ω начинает генерироваться в противофазе — уже как вторая гармоника усиленного сигнала $\omega/2$. Амплитуда же волны

сигнала $B_1 \{\pi/2\}$ вначале несколько нарастает, но затем ее рост тормозится истощением энергии накачки. В результате $B_1 \{\pi/2\}$ уменьшается из-за действия затухания. Однако это уменьшение достаточно медленное, что позволяет $B_1 \{\pi/2\}$ превысить $B_3 \{\pi/2\}$. Эффект усиления сказывается вплоть до очень больших σ , как это видно из

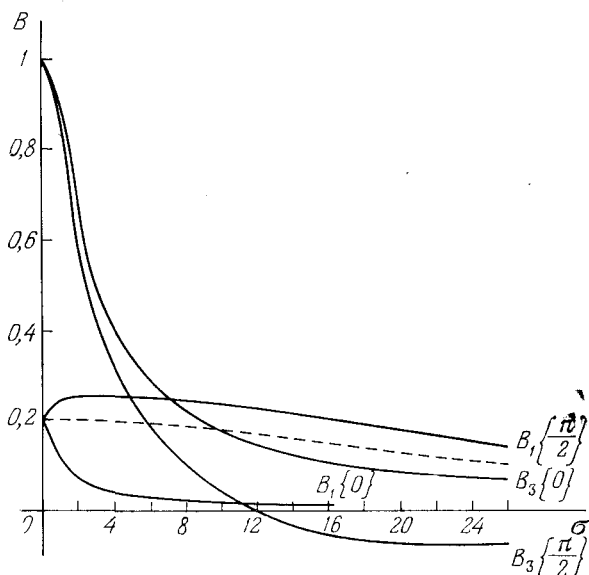


Рис. VI.4. Результаты гармонического анализа кривых рис. VI.3 и VI.4.

сравнения кривой $B_1 \{\pi/2\}$ и кривой, описывающей изменение амплитуды волны $\omega/2$ при отсутствии нелинейного взаимодействия (штриховая линия на рис. VI.4).

В случае $S(0) = 0$ перекачка энергии идет в обратном направлении — из субгармоники в волну ω , поэтому амплитуда субгармоники быстро уменьшается (кривая $B_1\{0\}$ на рис. VI.4). Однако вследствие малости начальной амплитуды субгармоники ее энергия дает малый вклад в энергию накачки, и на кривой $B_3\{0\}$ это нелинейное взаимодействие практически не сказывается.

Как показывает рис. VI.4, при сравнимых по величине амплитудах входного сигнала и накачки коэффициент усиления невелик; он едва превышает единицу даже в наиболее благоприятном случае. Однако ситуация может существенно измениться, если амплитуда сигнала v_{co} во много раз меньше амплитуды v_0 волны накачки. Это предположение позволяет получить ряд аналитических результатов и оценить величину коэффициента усиления [88].

Итак, будем считать, что в рассматриваемой области значений σ выполнено неравенство $V_n(\sigma, \theta) \gg V_c(\sigma, \theta)$ и наличие субгармоники V_c никак не сказывается на поведении волны V_n . Поэтому волна накачки теряет свою энергию только на генерацию собственных гармоник, но не на усиление сигнала. Справедливость этого предположения мы обсудим позднее. Учитывая, что функции V_n и $V = V_n + V_c$ каждая по отдельности должны удовлетворять уравнению (VI.2.1), нетрудно получить уравнение для V_c :

$$\frac{\partial V_c}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \theta} (V_c V_n) + \Gamma \frac{\partial^2 V_c}{\partial \theta^2}. \quad (\text{VI.2.5})$$

В силу малости величины V_c в уравнении (VI.2.5) отброшен нелинейный член $V_c \partial V_c / \partial \theta$, ответственный за нелинейные искажения субгармоники. В качестве V_n здесь можно использовать известные решения уравнения Бюргерса: решение Бесселя — Фубини (I.5.9) (в области до образования разрыва, на первом этапе) и решение Фейя (II.2.11) (в области после образования разрыва). Представим эти выражения в виде

$$V_n = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(\sigma)]_n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}). \quad (\text{VI.2.6})$$

Здесь

$$[A_n(\sigma)]_n = \begin{cases} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} & \text{при } 0 < \sigma < 1, \\ 2\Gamma \text{sh}^{-1} n \Gamma(1 + \sigma) & \text{при } \sigma > 1. \end{cases} \quad (\text{VI.2.7})$$

Если искать решение уравнения (VI.2.5) в виде $V_c = \frac{1}{2i} \left[A \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) - A^* \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) \right]$, для комплексной

амплитуды сигнала можно получить следующее уравнение:

$$\frac{dA}{d\sigma} = -\frac{A_n A^*}{4} - \frac{\Gamma}{4} A. \quad (\text{VI.2.8})$$

Через A_n обозначена амплитуда первой гармоники волны накачки, выражение для которой дает формула (VI.2.7) при $n = 1$. Подставляя в уравнение (VI.2.8) $A = B \exp(iS)$, т. е. переходя к действительной амплитуде B и фазе S , придем к двум уравнениям

$$\frac{dB}{d\sigma} = -\frac{BA_n}{4} \cos 2S - \frac{\Gamma}{4} B, \quad (\text{VI.2.9})$$

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{A_n}{4} \sin 2S. \quad (\text{VI.2.10})$$

Уравнение (VI.2.10) удобно интегрировать, вводя новую переменную $\psi = -\cos 2S$. Его решение имеет вид

$$\psi = \text{th} \frac{1}{2} \left[\ln \text{tg}^2 S(0) + \int_0^\sigma A_n(\sigma') d\sigma' \right]. \quad (\text{VI.2.11})$$

Здесь $S(0)$ — начальное (при $\sigma = 0$) значение сдвига фаз между волнами субгармоники и накачки. С помощью решения (VI.2.11) уравнение (VI.2.9) легко проинтегрировать и получить следующий результат:

$$\ln B = -\frac{\Gamma}{4} \sigma + \frac{1}{4} \int_0^\sigma A_n(\sigma') \text{th} \frac{1}{2} \left[\ln \text{tg}^2 S(0) + \int_0^{\sigma'} A_n(\sigma'') d\sigma'' \right] d\sigma'. \quad (\text{VI.2.12})$$

Чтобы найти окончательный вид решения, необходимо вычислить интегралы, входящие в формулу (VI.2.12), используя при этом явное выражение (VI.2.7) для A_n (при $n = 1$). Заметим, что в области $0 < \sigma < 1$ функция $2J_1(\sigma)/\sigma \approx 1$, поэтому заменим ее единицей; это сделает результат менее громоздким, не изменяя его физического смысла.

Выполняя интегрирование, придем к искомому выражению для коэффициента усиления волны $\omega/2$:

$$B = e^{-1/4(\Gamma\sigma + \sigma)} \left[\frac{e^{\sigma} \operatorname{tg}^2 S(0) + 1}{\operatorname{tg}^2 S(0) + 1} \right]^{1/2} \quad (\text{VI.2.13})$$

при $0 < \sigma < 1$ и

$$B = e^{-1/4(\Gamma\sigma + 1)} \left[\frac{e \operatorname{tg}^2 S(0) \operatorname{th}^2 \frac{\Gamma}{2} (1 + \sigma) + \operatorname{th}^2 \Gamma}{(\operatorname{tg}^2 S(0) + 1) \operatorname{th} \Gamma \operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} (1 + \sigma)} \right]^{1/2}. \quad (\text{VI.2.14})$$

Решения (VI.2.13), (VI.2.14) изображены соответственно на рис. VI.5, VI.6 для различных значений $S(0)$. Как нетрудно заметить, величина начального сдвига фаз $S(0)$ играет существенную роль в поведении субгармоники. При $S(0) = \pi/2$ волна $\omega/2$ усиливается наиболее эффективно, напротив, при $S(0) = 0$ имеет место наибольшее ослабление.

Другой важный вывод, который можно сделать при рассмотрении рис. VI.6, заключается в том, что при больших числах Рейнольдса главный вклад в процесс усиления дает область $\sigma > 1$ (это именно та область, где волна накачки сильно затухает из-за образования в ней разрывов). Так, при построении графиков рис. VI.6 полагалось $\varepsilon \operatorname{Re}$ равным 50, что для максимального коэффициента усиления дало $B_{\max} = 7$. В общем же случае, как можно установить из анализа решения (VI.2.14), наибольшее усиление достигается в точке $\sigma_{\max}$, определяемой из уравнения $\operatorname{sh} \Gamma (1 + \sigma_{\max}) = \Gamma$, или $\sigma_{\max} \approx \approx 1,4/\Gamma$; при этом $B_{\max} \approx 0,7/\sqrt{\Gamma}$.

Располагая выражениями (VI.2.13), (VI.2.14), обсудим правомерность сделанных предположений и область применимости полученных решений.

Требование отсутствия реакции на накачку, очевидно, эквивалентно требованию $B(\sigma) \ll A_H(\sigma)$; все решения справедливы только для таких значений σ , при которых выполняется это неравенство. Поскольку в области $0 < \sigma < \sigma_{\max}$ функция $B(\sigma)$ является монотонно возрастающей, а $A_H(\sigma)$ — убывающая функция, выполнение указанного неравенства при $\sigma = \sigma_{\max}$ влечет за собой его справедливость и во всей области $(0, \sigma_{\max})$. Но при

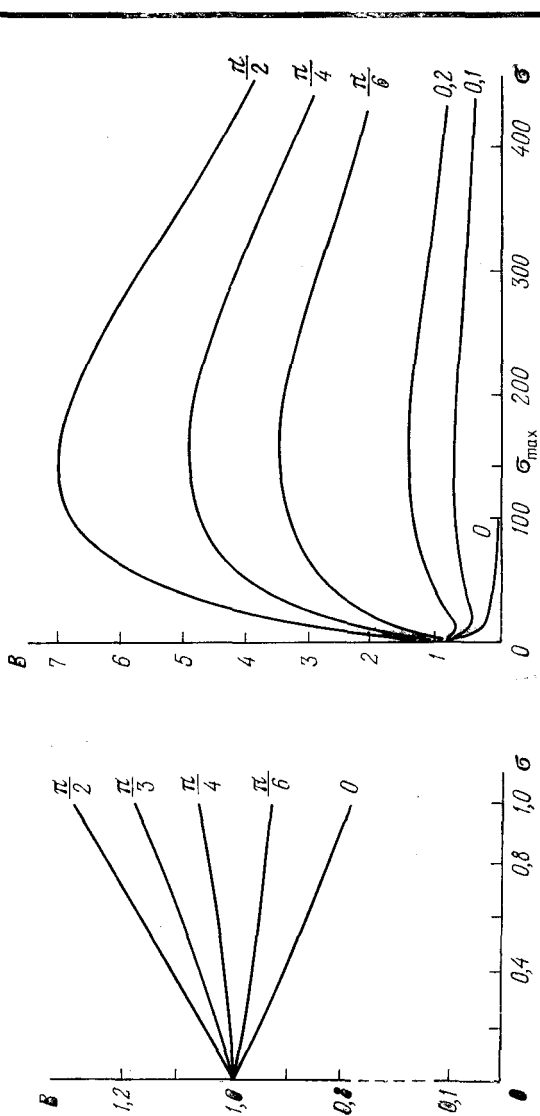


Рис. VI.5. Зависимость коэффициента усиления слабого сигнала от величины $\sigma < 1$ при различных значениях $S(0)$.

Рис. VI.6. Зависимость коэффициента усиления от безразмерной координаты при $\sigma > 1$.

$\sigma = \sigma_{\max}$ с помощью выражений (VI.2.7), (VI.2.14) можно получить

$$\frac{v_{c0}}{v_0} \ll \Gamma^{3/2}. \quad (\text{VI.2.15})$$

В тех случаях, когда условие (VI.2.15) не выполнено, но все же $v_{c0} \ll v_0$, начинает сказываться реакция на накачку. При этом решение (VI.2.14) перестает выполняться при некотором $\sigma_{\max} < \sigma_{\max}$, и коэффициент усиления $B_{\max}$ оказывается меньшим, чем $B_{\max}$. Так как истощение волны накачки за счет усиления субгармоники наступит быстрее при больших начальных значениях v_{c0} , здесь должна иметь место следующая зависимость $B_{\max}$ от v_{c0} : чем больше v_{c0} , тем меньше $B_{\max}$.

Второе наше допущение, благодаря которому в уравнении (VI.2.5) был отброшен нелинейный член, будет справедливо, если $\sigma_{\max}$ меньше расстояния образования разрыва в волне субгармоники: $1,4\Gamma \ll v_0/v_{c0}$. Нетрудно видеть, что при больших Re это неравенство слабее, чем (VI.2.15).

До сих пор мы обсуждали формальную сторону дела, не касаясь вопроса о том, какие конкретно физические механизмы ответственны за наличие начального возмущения v_{c0} .

Если в среду (при $x = 0$) специально вводится слабый регулярный сигнал, изменение его амплитуды $B(\sigma)$, как было показано выше, описывается решением (VI.2.13), (VI.2.14).

Кроме того, начальным возмущением на частоте субгармоники может служить шум источника, расположенного на границе среды. Накачку, естественно, и в этом случае следует считать регулярным процессом, амплитуда которого зависит только от координаты σ . Субгармоника же на границе считается теперь стационарным случайным сигналом [89]. Для определенности предположим, что спектр «шума» источника имеет гауссовскую форму с шириной Δ и максимумом на частоте субгармоники:

$$q(\Omega) = \frac{A_0^2}{\sqrt{2\pi} \Delta} e^{-\Omega^2/2\Delta^2}. \quad (\text{VI.2.16})$$

Здесь $\Omega = \Delta\omega/\omega$ — относительная отстройка от центральной частоты $\omega/2$. Полагая амплитуду субгармоники в уравнении (VI.2.5) зависящей медленно и от θ :

$$V_c = \frac{1}{2i} [A(\sigma, \theta) e^{i\theta/2} - A^*(\sigma, \theta) e^{-i\theta/2}], \quad (\text{VI.2.17})$$

с помощью обычной процедуры укорочения получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = \frac{i}{2} A_n \frac{\partial A^*}{\partial \theta} - \frac{1}{4} A_n A^* - \frac{\Gamma}{4} A. \quad (\text{VI.2.18})$$

Одновременной заменой переменной и функции

$$\xi = \int_0^\sigma A_n(\sigma') d\sigma', \quad A = B e^{-\frac{\Gamma}{4} \sigma} \quad (\text{VI.2.19})$$

оно преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \frac{\partial B^*}{\partial \theta} - \frac{1}{4} B^*. \quad (\text{VI.2.20})$$

Наконец, используя уравнение, комплексно-сопряженное к (VI.2.20), приходим к гиперболическому уравнению для амплитуды B :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{B}{16}. \quad (\text{VI.2.21})$$

Для нахождения интересующей нас средней интенсивности субгармоники в различных сечениях среды можно воспользоваться теперь аппаратом метода огибающих или спектральным методом [89]. В первом случае мы должны получить точное решение задачи Коши для уравнения (VI.2.21) с помощью метода Римана. Это нетрудно сделать, однако полученный результат имеет достаточно громоздкую форму и, кроме того, несет избыточную для нас информацию. Поэтому разложим комплексную амплитуду субгармоники в фурье-спектр:

$$B(\xi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \Omega) e^{i\Omega\theta} d\Omega \quad (\text{VI.2.22})$$

и получим уравнение для фурье-амплитуды уже в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \left(\frac{1}{16} - \frac{\Omega^2}{4} \right) \Phi. \quad (\text{VI.2.23})$$

Полоса усиления достаточно широка, $|\Omega| < 1/2$, что в размерных переменных соответствует полосе $(0, \omega)$, однако реально ее существенно обрезает, во-первых, спадание инкремента нарастания $\alpha = (1/4 - \Omega^2)^{1/2}/2$ при отходе от центральной частоты и, во-вторых, конечная ширина «спектра» источника на границе среды.

Сохраняя в решении уравнения (VI.2.23) только нарастающие фурье-компоненты, можно записать выражение для амплитуды сигнала с помощью обратного фурье-преобразования:

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} C(\Omega) e^{\alpha(\Omega)\xi + i\Omega\theta} d\Omega. \quad (\text{VI.2.24})$$

Используя теперь стационарность сигнала на границе: $\overline{C(\Omega)C^*(\Omega')} = g(\Omega)\delta(\Omega - \Omega')$, находим среднюю интенсивность субгармоники

$$|A|^2 = \frac{A_0^2 e^{-\frac{\Gamma}{2}\sigma(\xi)}}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Omega^2}{2\Delta^2} + 2\alpha(\Omega)\xi} d\Omega. \quad (\text{VI.2.25})$$

Если спектр на границе уже, чем полоса усиления $(0, \omega)$, в показателе экспоненты можно положить $\alpha(\Omega) \approx (1 - 2\Omega^2)/4$, тогда

$$|A|^2 = A_0^2 (1 + 2\Delta^2\xi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Gamma}{2}\sigma(\xi) + \frac{\xi}{2}}. \quad (\text{VI.2.26})$$

Решение (VI.2.26) показывает, что шумовой сигнал с конечной шириной спектра Δ нарастает по закону, несколько более медленному, чем регулярный сигнал при $S(0) = \pi/2$.

Необходимо заметить, что усреднение в формуле (VI.2.26) проводится по достаточно большому (по сравнению со временем корреляции) промежутку времени. В экспериментальных же условиях может получиться

так, что временная разрешающая способность приемника звука позволяет следить за флуктуациями интенсивности (обусловленными конечными временами корреляции фазы) от ее среднего значения (VI.2.26). В силу того, что спектр шума предполагается узкополосным, сигнал на входе можно представить в виде $V_c = A(\theta) \sin [\theta + \varphi(\theta)]$, где A , φ — медленно изменяющиеся случайные амплитуда и фаза. Теперь очевидно, что незначительные изменения фазы $\varphi(\theta)$ вызовут сильные флуктуации амплитуды усиленного (или ослабленного) сигнала и приемник будет в этом случае регистрировать субгармонику крайне нерегулярным образом.

Большой интерес представляет проблема возникновения субгармоники в толще среды при отсутствии возмущения на границе. Аналогичное явление (так называемая «параметрическая люминесценция») хорошо изучено в нелинейной оптике [90]; здесь затравочными возмущениями служат квантовые шумы, равномерно распределенные по объему среды. В ультразвуковом же диапазоне шумы носят тепловой характер, и для объемной плотности энергии шума в интервале частот Δf справедливо выражение

$$\Delta W = \frac{4\pi}{c_0^3} k T f^2 \Delta f. \quad (\text{VI.2.27})$$

Здесь $k = 1,37 \cdot 10^{-23}$ Вт·сек/град — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Прежде чем решать эту задачу, необходимо более подробно обсудить ее постановку. Для простоты мы рассматриваем вырожденный случай, когда в формуле (VI.2.27) $2\pi f = \omega/2$ (где ω — частота волны накачки). В отличие от других задач, рассмотренных в настоящем разделе, начальное возмущение считается заданным не при $\sigma = 0$, а при $\sigma = \sigma_0$. Для этого случая решение (VI.2.13), (VI.2.14) с помощью переменной ξ удобно записать одной формулой

$$A^2 = A_0^2 e^{-\frac{\Gamma}{2} \sigma(\xi - \xi_0) - \frac{\xi - \xi_0}{2} \left(\frac{1 + e^{\xi - \xi_0} \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0} \right)}. \quad (\text{VI.2.28})$$

Здесь A_0 , φ_0 — амплитуда и фаза в точке $\sigma = \sigma_0$. Поскольку φ_0 для теплового шума является случайной

величиной, равномерно распределенной в промежутке $[0, 2\pi]$, решение (VI.2.28) необходимо усреднить по фазам. В результате такого усреднения получается выражение

$$A^2 = A_0^2 e^{-\frac{\Gamma}{2} \sigma(\xi - \xi_0)} \operatorname{ch} \frac{\xi - \xi_0}{2}. \quad (\text{VI.2.29})$$

Поскольку среда предполагается нагретой равномерно, интенсивность шума A_0^2 не зависит от координаты ξ_0 . Для вычисления наблюдаемой интенсивности в некотором сечении ξ нужно просуммировать все «сигналы», вышедшие из точек ξ_0 ($0 < \xi_0 < \xi$), т. е. взять интеграл

$$A_{\text{полн}}^2 = A_0^2 \int_0^{\xi} e^{-\frac{\Gamma}{2} \sigma(\xi')} \operatorname{ch} \frac{\xi'}{2} d\xi'. \quad (\text{VI.2.30})$$

Здесь интегрирование является сложной задачей, так как выразить явно σ через ξ затруднительно. Однако нас интересуют только приближенные оценки, которые помогут ответить на вопрос о возможности экспериментального обнаружения этого эффекта, и потому точное вычисление интеграла (VI.2.30) необязательно. Если пренебречь затуханием, то интеграл легко берется

$$A_{\text{полн}}^2 = 2A_0^2 \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} = 2A_0^2 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} + \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} (1 + \sigma)}{\operatorname{th} \Gamma} \right]. \quad (\text{VI.2.31})$$

Как показывает выражение (VI.2.31), максимальное усиление достигается при $\sigma \rightarrow \infty$. При этом коэффициент усиления по порядку величины равен $2\epsilon \operatorname{Re}$ — точно такой же результат получается, как мы видели, и в том случае, когда источник сигнала локализован на границе. Таким образом, распределенный источник не дает почти никакого выигрыша, за исключением небольшого, быть может, изменения численного коэффициента, стоящего перед $2\epsilon \operatorname{Re}$. Итак, интенсивность усиленного шума можно определить по формуле

$$\mathcal{J} = \frac{4\pi}{c_0^2} kT f^2 (2\epsilon \operatorname{Re}) \Delta f. \quad (\text{VI.2.32})$$

Следует отметить, что ширина полосы приемника Δf ограничивается лишь требованием узкополосности сигнала, и поэтому при больших числах Рейнольдса эффект может быть доступен наблюдению.

В заключение укажем, что все результаты этого параграфа получены без учета ограниченности звуковых пучков. Влияние дифракции — в тех случаях, когда оно существенно (см. гл. IX), — приведет к уменьшению амплитуд волн на оси пучков и, следовательно, к ослаблению нелинейного взаимодействия.

§ 3. Параметрическое усиление звука в искусственных системах с дисперсией

Процесс параметрического усиления является одним из наиболее интересных нелинейных эффектов в системах с распределенными параметрами, пригодным для использования в различных практических устройствах. Так, применяемые в акустике приемники ультразвука в большинстве случаев состоят из акустической антенны, электромеханического преобразователя и усилителя электрических колебаний. Пределы чувствительности такого приемника в значительной мере определяются собственными шумами преобразователя. Непосредственное усиление акустического сигнала до преобразования повысит чувствительность приемного устройства. Поэтому проблема прямого усиления ультразвука представляет особый интерес.

Сравнивая результаты § 1 и § 2, нетрудно видеть, что «широкополосность» свойств акустических сред является вредным фактором, уменьшающим эффективность параметрического процесса. Это обстоятельство привело к появлению большого количества работ, посвященных отысканию специальных способов создания дисперсии. В качестве примеров можно указать на предложенный в работе [91] усилитель на твердом теле, в котором синхронизм осуществляется между продольными и сдвиговыми волнами, скрещенными под углом друг к другу. Был построен параметрический усилитель на кристаллах MgO с примесями парамагнитных ионов [92]; здесь необходимая дисперсия создавалась за счет магнитно-акустического

резонанса. Среди недавних находок следует отметить схему [93], в которой среда является недиспергирующей, а нужные сдвиги фаз вносятся при отражениях на границах из-за частотно-зависимых импедансов. Наконец, в работах [94, 95] были теоретически предложены и практически осуществлены параметрические усилитель и генератор ультразвука, использующие факт различия фазовых скоростей для различных мод акустического волновода. Этот перечень можно было бы продолжить.

С методической точки зрения нам представляется целесообразным рассмотреть лишь одной такой задачи [96] — о расчете усилителя в воде с распределенными пузырьками воздуха.

Ультразвуковая волна, проходя через жидкость, содержащую пузырьки воздуха, вызывает пульсации пузырьков. Проблема пульсации воздушной полости находится в центре внимания одного из важнейших разделов акустики, изучающего явления кавитации. Наша задача отличается от традиционных в теории кавитации задач тем, что мы не рассматриваем схлопывание пузырька и сопутствующих этому схлопыванию явлений. В этом смысле среда находится в докавитационном режиме. Предполагается, что жидкость насыщена воздухом так, что во всем объеме жидкости постоянно поддерживается определенная концентрация воздушных пузырей. Под воздействием ультразвуковой волны, проходящей через эту среду, стенки воздушных полостей совершают вынужденные колебания. Подобно тому как это принято в теории кавитации, мы пренебрегаем взаимодействием пузырьков и ограничиваемся рассмотрением одиночного воздушного пузырька.

Для изучения нелинейных волновых процессов в рассматриваемой среде уравнения гидродинамики должны быть дополнены уравнением малых колебаний пузырька воздуха в воде. Считая жидкость идеальной, в одномерном случае имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w) = 0, \quad (\text{VI.3.1})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{VI.3.2})$$

где ρ — плотность смеси вода + воздух, p — давление и w — скорость среды. Движение стенки пузырька в приближении несжимаемой жидкости описывается уравнением Рэлея [8]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_0}(p_r - p). \quad (\text{VI.3.3})$$

Здесь R — радиус пузырька, ρ_0 — плотность жидкости, p_r — давление газа в пузырьке, p — давление в среде, окружающей пузырек. Точками обозначены производные по времени. Запишем уравнение (VI.3.3) для объема пузырька $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$aV^{-1/3}\ddot{V} - \frac{a}{6}V^{-4/3}\dot{V}^2 = p_r - p, \quad (\text{VI.3.4})$$

где $a = \rho_0/3^{1/3}(4\pi)^{2/3}$.

Изменение давления в окружающей среде вызывает пульсацию пузырька. Предположим, что отклонение давления от равновесного значения, а также колебания пузырька малы, т. е.

$$p = p_0 + p', \quad V = V_0 + V', \quad (\text{VI.3.5})$$

$$\frac{p}{p_0} \ll 1, \quad \frac{V'}{V_0} \ll 1. \quad (\text{VI.3.6})$$

Если пренебречь теплообменом между воздушной полостью и окружающей средой, то процесс можно считать адиабатическим и записать уравнение состояния для воздушной полости в следующем виде:

$$p_r = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma. \quad (\text{VI.3.7})$$

Подставляя выражения (VI.3.5) и (VI.3.7) в уравнение (VI.3.4) и сохраняя малые члены порядка $(V'/V_0)^2$, получим уравнение для малых колебаний идеального пузырька:

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V - \alpha V^2 - \beta (2\dot{V}V + \dot{V}^2) = -\varepsilon p. \quad (\text{VI.3.8})$$

Здесь введены обозначения: $\alpha = \frac{9}{8\pi} \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)p}{\rho_0 R_0^5}$, $\omega_0^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0^2}$,

$\beta = 1/8\pi R_0^3$, $\varepsilon = 4\pi R_0/\rho_0$, где R_0 — равновесное значение

радиуса пузырька. Переменные V и p , штрихи над которыми опущены, здесь и в дальнейшем характеризуют возмущение объема и давления.

Как следует из уравнения (VI.3.8), нелинейный характер малых колебаний воздушной полости обусловлен двумя причинами: нелинейностью уравнения состояния газа в пузырьке αV^2 и динамической нелинейностью $\beta [2\ddot{V}V + \dot{V}^2]$. В наиболее общем случае необходимо также учесть диссипацию энергии в процессе колебания воздушного пузырька. Для этого дополним уравнение (VI.3.8) членом, пропорциональным скорости изменения объема пузырька:

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V - \alpha V^2 - \beta (2\ddot{V}V + \dot{V}^2) + f\dot{V} = -\varepsilon p. \quad (\text{VI.3.9})$$

Расчет показал, что нелинейность, обусловленная наличием пузырьков воздуха, в 10^3 — 10^4 раз превышает нелинейность гидродинамического характера. Поэтому уравнения (VI.3.1) и (VI.3.2) могут быть линеаризованы. При этом плотность смеси ρ в нелинейном члене уравнения (VI.3.1) и справа в уравнении (VI.3.2) может быть отождествлена с равновесной плотностью воды ρ_0 . Здесь учет отклонения значения плотности смеси ρ от значения ρ_0 приведет лишь только к нелинейным поправкам, не существенным при линеаризации уравнений. Однако при вычислении производной $\partial\rho/\partial t$ необходимо иметь связь плотности смеси с другими макроскопическими характеристиками среды.

Плотность смеси при концентрации пузырьков n может быть в равновесном случае представлена так:

$$\frac{m}{U} = \rho_{\text{ж}} (1 - nV_0) + \rho_{\text{воз}} nV_0. \quad (\text{VI.3.10})$$

Изменение объема смеси под воздействием поля ультразвуковой волны или при пульсации пузырьков определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{m}{\rho} &= V_{\text{ж}} + V_{\text{воз}} = U - nV_0 U - \kappa (U - nV_0 U) p + nVU = \\ &= (U - nV_0 U) (1 - \kappa p) + nVU. \quad (\text{VI.3.11}) \end{aligned}$$

Здесь, как и в формуле (VI.3.10), m — полная масса смеси, U — полный объем. Коэффициент κ характеризует сжимаемость воды $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$. В расчете на единицу объема выражение (VI.3.11) дает

$$\frac{1}{\rho} \frac{m}{U} = (1 - nV_0)(1 - \kappa p) + nV. \quad (\text{VI.3.12})$$

Подставляя в формулу (VI.3.12) значение m/U в соответствии с выражением (VI.3.10), найдем при условии $nV_0 \ll 1$ и $\rho_{\text{ж}}(1 - nV_0) + \rho_{\text{воз}}nV_0 \approx \rho_{\text{ж}} \approx \rho_0$:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \kappa p + nV}. \quad (\text{VI.3.13})$$

Теперь из линеаризованных уравнений (VI.3.1) и (VI.3.2) с учетом (VI.3.13) следует

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho_0 n \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (\text{VI.3.14})$$

где c_0 — скорость распространения звука в жидкости.

Покажем, что среда, описываемая уравнениями (VI.3.9) и (VI.3.14), обладает дисперсионными свойствами. Для этого опустим временно в уравнении (VI.3.9) нелинейные члены и член, ответственный за диссипацию энергии, т. е. ограничимся уравнением

$$p = -\frac{\omega_0^2}{\varepsilon} V - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 V}{dt^2} \quad (\text{VI.3.15})$$

и примем возмущения давления и объема в виде гармонических функций с частотой ω , т. е. $p \sim e^{i\omega t}$ и $V \sim e^{i\omega t}$. Из формул (VI.3.14) и (VI.3.15) следует дисперсионное соотношение

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + \frac{\rho_0 n \varepsilon}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)}. \quad (\text{VI.3.16})$$

Откладывая по оси абсцисс значения ω , а по оси ординат $1/c^2$, мы получим дисперсионную кривую, представленную на рис. VI.7.

Таким образом, полученные уравнения и проведенный предварительный анализ их свидетельствует о том, что

жидкость с пузырьками воздуха обладает нелинейными, дисперсионными и диссипативными свойствами.

Как известно, для осуществления параметрического усиления необходимо добиться эффективного взаимодействия только двух волн: волны сигнала и волны накачки. Если воздушные пузырьки, распределенные в воде, имеют

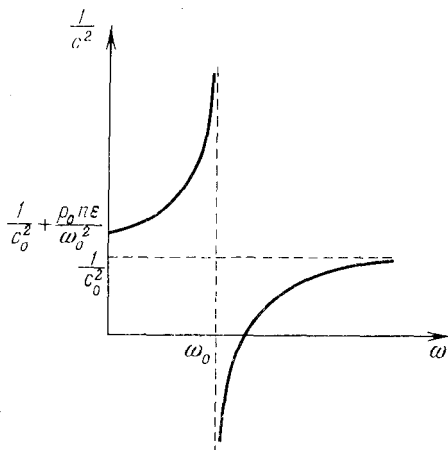


Рис. VI.7. Дисперсионная кривая жидкости, содержащей пузырьки воздуха с собственными частотами ω_0 .

собственную частоту колебаний ω_0 , то необходимое условие эффективного взаимодействия волны сигнала и волны накачки может быть реализовано, если частота волны накачки $\omega_n = 2\omega$, где ω — частота сигнала, и $\omega_n + \omega \approx \omega_0$. Тогда волна частоты 3ω будет в силу дисперсионных свойств среды (см. рис. VI.7) сильно отличаться по скорости от взаимодействующих волн.

Однако наряду с резонансными пузырьками ($\omega_0 \approx \approx 3\omega$) в среде будут присутствовать пузырьки меньших размеров с более высокой частотой [96]. Вносимые этими нерезонансными пузырьками расстройки по скоростям малы, однако наличие их в воде существенно влияет на нелинейные свойства среды. Если учесть наличие резонансных и нерезонансных пузырьков непосредственно

в уравнении (VI.3.14), то мы получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho_0 \left(n_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + n_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} \right). \quad (\text{VI.3.17})$$

Индекс 1 относится к нерезонансным пузырькам, 2 — к резонансным, причем $\omega_{20} \approx 3\omega$ и $\omega_{10} \gg \omega_{20}$. Вместо уравнения (VI.3.9) мы получим два уравнения, связывающих давление в среде, окружающей пузырек, с движением воздушной полости:

$$p = -\frac{\omega_{10}^2}{\varepsilon_1} V_1 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} V_1^2, \quad (\text{VI.3.18})$$

$$p = -\frac{\omega_{20}^2}{\varepsilon_2} V_2 - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{d^2 V_2}{dt^2}. \quad (\text{VI.3.19})$$

Первое уравнение устанавливает нелинейную связь между возмущением давления в среде и изменением объема нерезонансной полости. Второе уравнение (VI.3.19) не содержит нелинейный член, поскольку проведенные оценки нелинейных и дисперсионных свойств резонансных пузырьков показали, что дисперсионные эффекты выражены сильнее.

Решение уравнений (VI.3.17) — (VI.3.19) будем искать в виде трех волн: волны сигнала, волны накачки и волны суммарной частоты. Комплексные амплитуды этих волн являются медленно меняющимися функциями x . Напишем укороченные уравнения

$$\frac{dp_1}{dx} = -i\Delta_1 p_1 + i\nu(p_1^* p_2 + p_3 p_2^*), \quad (\text{VI.3.20})$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -i\Delta_2 p_2, \quad (\text{VI.3.21})$$

$$\frac{dp_3}{dx} = -i\Delta_3 p_3 + 3i\nu p_1 p_2, \quad (\text{VI.3.22})$$

где p_1 , p_2 , p_3 — комплексные амплитуды волны сигнала, накачки и суммарной волны соответственно, p_1^* и p_2^* — комплексно-сопряженные амплитуды соответствующих

ВОЛН

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\rho_0 n_2 c^0 \omega \varepsilon_2}{2\omega_{20}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}\right)}, & \Delta_2 &= \frac{\rho_0 n_2 c^0 \omega \varepsilon_2}{\omega_{20}^2 \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}\right)}, \\ \Delta_3 &= \frac{3\rho_0 n_2 c^0 \omega \varepsilon_2}{2\omega_{20}^2 \left(1 - 9 \frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}\right)}, & v &= \rho_0 n_1 c^0 \omega \varepsilon_1^2 / 2\omega_{10}, \\ \frac{1}{c^0} &= \frac{1}{c_0} + \frac{\rho_0 n_2 c^0 \varepsilon_2}{2\omega_{20}^2}.\end{aligned}\quad (\text{VI.3.23})$$

Написав решение уравнений (VI.3.20) — (VI.3.22) в виде

$$p_1 = B_1(x) e^{-\frac{i}{2} \Delta_2 x}, \quad p_2 = A e^{-i \Delta_2 x}, \quad p_3 = B_3(x) e^{-i \frac{3}{2} \Delta_2 x}, \quad (\text{VI.3.24})$$

мы получим уравнения для B_1 и B_3 :

$$\frac{dB_1}{dx} = -i\Delta_1' B_1 + ivA(B_1^* + B_3), \quad \frac{dB_3}{dx} = -i\Delta_3' B_3 + 3ivAB_1, \quad (\text{VI.3.25})$$

где

$$\Delta_1' = \Delta_1 - 1/2 \Delta_2, \quad \Delta_3' = \Delta_3 - 3/2 \Delta_2. \quad (\text{VI.3.26})$$

Представляя решение уравнений (VI.3.25) в виде

$$B_1 = C e^{\lambda x} + D e^{\lambda^* x}, \quad B_3 = G e^{\lambda x} + H e^{\lambda^* x}, \quad (\text{VI.3.27})$$

мы приходим к характеристическому уравнению

$$y^4 + (r^2 + 1 + 5x^2) y^2 + 9x^4 - 6rx^2 - x^2 + r^2 = 0, \quad (\text{VI.3.28})$$

где $y = \lambda/\Delta_3'$, $x = vA/\Delta_3'$, $r = \Delta_1'/\Delta_3'$.

Пусть 3ω отличается от ω_{20} на 10%, тогда $(\Delta_3'/\Delta_1') = 30$, и при $0,03 < x < 0,365$ величина y является действительной. Следовательно, существует нарастающее решение для волны сигнала B_1 . Волна суммарной частоты B_3 также увеличивается по амплитуде, но в этой области $B_3/B_1 \sim 0,1$.

Определим теперь функцию распределения резонансных воздушных полостей, которая обеспечила бы усиление волны сигнала.

Пусть имеется некоторое распределение пузырьков по частотам; $n(\omega_0) d\omega_0$ — концентрация пузырьков, собственные частоты которых изменяются в пределах от ω_0 до $\omega_0 + d\omega_0$. Тогда удельный объем, занимаемый пузырьками, является функцией частоты:

$$V_0 n(\omega_0) d\omega_0 = f(\omega_0) d\omega_0. \quad (\text{VI.3.29})$$

Введем расстройку по скоростям между волнами аналогично формулам (VI.3.23), считая $\omega_0 \approx 3\omega$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{9\rho_0 c^0 \omega \xi \Phi}{16}, \quad \Delta_2 = \frac{9\rho_0 c^0 \omega \xi \Phi}{5}, \\ \Delta_3 &= \frac{3\rho_0 c^0 \omega \xi \Phi}{4} \left(1 - 3 \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{VI.3.30})$$

Здесь ξ — сжимаемость воздуха, $\Phi = \int f(\omega_0) d\omega_0$ — полный объем, занимаемый пузырьками; черта означает, что берется величина средняя по распределению $f(\omega_0)$. Из выражения (VI.3.30) можно найти Δ'_1 и Δ'_3 согласно формулам (VI.3.26). При $\Delta'_3/\Delta'_1 = 30$ имеет место усиление волны сигнала.

Чтобы обеспечить $\Delta'_3/\Delta'_1 = 30$, распределение пузырьков по частотам (по размерам) должно быть таким, чтобы $\Delta\omega/\omega_0 \approx 0,1$.

Как известно, основной вклад в затухание волны вносят резонансные полости. Поглощение звука пузырьками нерезонансных размеров составляет обычно менее 5% от поглощения при резонансе [96]. В нашем случае ($\omega_{20} \approx 3\omega$) это приведет к интенсивному поглощению волны частоты 3ω .

Приведем численные оценки возможного усиления волны, распространяющейся в такой гипотетической среде. Допустим, что концентрация нерезонансных пузырьков обеспечивает следующее содержание воздуха: 10^{-5} частей воздуха на одну часть воды и амплитуда волны накачки равна 0,1 атм (мощность 10^{-3} Вт/см²). Тогда можно ожидать увеличения амплитуды сигнала в e раз на расстояниях, равных примерно 10 длинам волн.

НЕЛИНЕЙНОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН. ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Газодинамический подход к теории распространения волн конечной амплитуды

В основе исследований разнообразных физических явлений, относящихся к нелинейной акустике, которые были проведены в предыдущих главах, лежит единый методический подход, характерный для нелинейной акустики вообще. Во всех случаях мы имеем дело с так называемым вторым приближением теории волн конечной амплитуды. Об эффективности этого приближения свидетельствует в первую очередь хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов исследований.

Кроме того, второе приближение явилось как бы связующим звеном для двух самостоятельных разделов механики сплошных сред: физики ударных волн, использующей нелинейный аппарат конечно-разностных соотношений, и акустики, имеющей на вооружении математический аппарат нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Следует заметить, что при решении ряда проблем нелинейно-акустический и газодинамический подходы одинаково эффективны. В частности, правило «равенства площадей» может быть получено как с помощью интегральных соотношений на разрыве (см. гл. I, § 4), так и предельным переходом $Re \rightarrow \infty$ в решениях уравнения Бюргерса (но не в самом уравнении!).

Однако в рамках второго приближения ценность газодинамической точки зрения еще невелика, поскольку

соотношения, связывающие параметры в простой и в ударной волнах, оказываются одинаковыми с точностью до членов второго порядка малости включительно.

В членах же третьего порядка малости появляется различие, и это коренным образом меняет дело. Разрыв перестает органически вписываться в профиль простой волны. Для гладких областей профиля, наплывающих на разрыв вследствие нелинейного искажения, связь параметров изменяется скачком, что приводит к появлению отраженных от разрыва волн. Картина движения сильно усложняется, так как волна перестает быть бегущей в одном направлении. Если гладкие участки профиля могут быть описаны соотношениями Римана, то разрывы уже необходимо считать ударными волнами и описывать их с помощью разностных газодинамических соотношений.

Эти и другие явления, присущие всем высшим приближениям, начиная с третьего, требуют для своего рассмотрения одновременного использования методов нелинейной акустики и теории ударных волн [58, 97]. Поэтому если второе приближение иногда называют приближением квазипростых волн [47], то все более высокие уместно было бы называть газодинамическими приближениями.

Итак, при распространении достаточно сильных звуковых волн конечной амплитуды в профиле образуются разрывные участки, которые можно рассматривать как слабые ударные волны. С ними взаимодействует падающая на разрыв простая волна (гладкие участки профиля) в области сжатия и в области разрежения. Взаимодействие оказывается возможным, поскольку все волны распространяются с различными скоростями: в первом случае простая волна догоняет поверхность разрыва, а во втором — поверхность разрыва настигает простую волну.

Представим падающую волну произвольной формы в виде совокупности ступенеобразных простых волн меньшей амплитуды, как это изображено на рис. VII.1. Тогда весь процесс можно рассматривать как сумму «элементарных» взаимодействий, в каждом из которых элементарная простая волна должна считаться малой величиной следующего порядка малости по сравнению с «амплитудой»

разрыва. Единичный акт такого взаимодействия представлен на рис. VII.2, иллюстрирующем очевидные соотношения между параметрами падающих на разрыв простых и

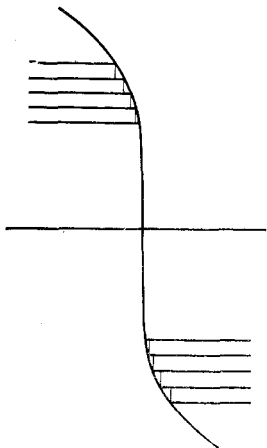


Рис. VII.1. Качественная картина формирования ударного фронта.

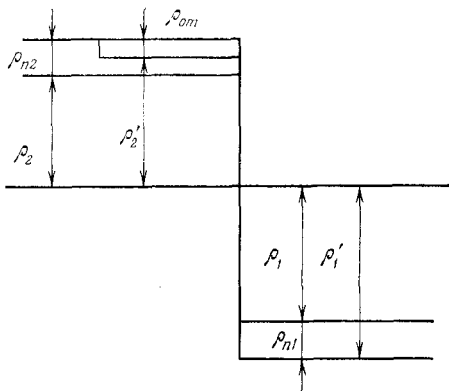


Рис. VII.2. Схема одиночного (элементарного) взаимодействия.

отраженной волн и параметрами самого разрыва:

$$\rho_2' = \rho_2 + \rho_{n2} + \rho_{от}, \quad (\text{VII.1.1})$$

$$\rho_1' = \rho_1 + \rho_{н1}, \quad (\text{VII.1.2})$$

$$v_2' = v_2 + v_{n2} + v_{от}, \quad (\text{VII.1.3})$$

$$v_1' = v_1 + v_{н1}. \quad (\text{VII.1.4})$$

Здесь v и ρ — соответственно скорость и возмущение плотности среды. Индексом 1 помечены величины, которые относятся к точке, находящейся непосредственно перед фронтом ударной волны, а индексом 2 — к точке непосредственно за фронтом. Нештрихованные величины характеризуют амплитуду скачка до взаимодействия, штрихованные — после взаимодействия.

Для того чтобы рассчитать элементарный акт взаимодействия, т. е. получить выражение для отраженной

волны в виде функции от параметров скачка и падающих на него простых волн:

$$\rho_{от} = \rho_{от}(\rho_1, \rho_2, \rho_{п1}, \rho_{п2}), \quad (\text{VII.1.5})$$

соотношений (VII.1.1) — (VII.1.4) недостаточно. Нужно воспользоваться также и выражениями, связывающими параметры v и ρ на разрыве ($v(\rho)$, $v'(\rho')$), в падающих ($v_{п1}(\rho_{п1})$, $v_{п2}(\rho_{п2})$) и отраженной ($v_{от}(\rho_{от})$) волнах.

§ 2. Расчет отраженных от разрывов волн

Прежде чем приступить к вычислениям, необходимо условиться относительно порядков малости всех встречающихся переменных. Поскольку величины, характеризующие взаимодействия, являются малыми величинами первого порядка малости, т. е.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}, \frac{\rho_2}{\rho_0}, \frac{\rho'_1}{\rho_0}, \frac{\rho'_2}{\rho_0}, \frac{v_1}{c_0}, \frac{v_2}{c_0}, \frac{v'_1}{c_0}, \frac{v'_2}{c_0} \sim \mu, \quad (\text{VII.2.1})$$

надо все параметры, характеризующие простые падающие волны, считать малыми величинами второго порядка:

$$\frac{\rho_{п1}}{\rho_0}, \frac{\rho_{п2}}{\rho_0}, \frac{v_{п1}}{c_0}, \frac{v_{п2}}{c_0} \sim \mu^2. \quad (\text{VII.2.2})$$

В целях упрощения последующих выкладок в настоящей задаче параметры, характеризующие отраженную волну, приняты малыми величинами четвертого порядка малости ($\sim \mu^4$), как это и есть на самом деле в соответствии с оценками (VII.1.1), (VII.1.2).

Займемся теперь выводом связей между параметрами v и ρ , недостающих для решения поставленной задачи.

Поскольку падающая волна является простой, для нее справедливо соотношение (I.2.12), которое понадобится нам в приближенной форме:

$$\frac{v_{п}}{c_0} = \frac{\rho_{п}}{\rho_0} \left[1 + \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\rho_{п}}{\rho_0} \right]. \quad (\text{VII.2.3})$$

Здесь необходимо учесть, что простая волна движется по среде, предварительно сжатой (или разреженной)

ударной волной, и поэтому последнюю формулу следует переписать в виде

$$\frac{v_{\Pi}}{c_0^*} = \frac{\rho_{\Pi}}{\rho_0^*} \left[1 + \frac{\gamma-3}{4} \frac{\rho_{\Pi}}{\rho_0^*} \right], \quad (\text{VII.2.4})$$

где (для определенности берем волну, догоняющую разрыв сзади — в области сжатия):

$$\begin{aligned} \rho_0^* &= \rho_0 + \rho_2, \quad c_0^* = \sqrt{\gamma \frac{p(\rho_0^*)}{\rho_0^*}} \approx \\ &\approx c_0 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{(\gamma-1)(\gamma-3)}{8} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.5})$$

Подставляя (VII.2.5) в выражение (VII.2.4) и совершая ряд преобразований, отбрасывая при этом члены $\sim \mu^5$ и более высоких порядков малости, придем к одной из искомых связей:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\Pi 2}}{c_0} &= \frac{\rho_{\Pi 2}}{\rho_0} \left[1 + \frac{\gamma-3}{2} \frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{\gamma-3}{4} \frac{\rho_{\Pi 2}}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{8} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.6})$$

Выражение, связывающее $v_{\Pi 1}$ и $\rho_{\Pi 1}$, имеет в точности такой же вид и получается из (VII.2.6) заменой индекса 2 при всех параметрах на индекс 1:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\Pi 1}}{c_0} &= \frac{\rho_{\Pi 1}}{\rho_0} \left[1 + \frac{\gamma-3}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\gamma-3}{4} \frac{\rho_{\Pi 1}}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{8} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.7})$$

Несколько более сложным путем можно прийти к соотношению между параметрами ρ и v на разрыве. Будем исходить из двух механических условий (B.2.1), (B.2.2), связывающих скачки величин ρ , v , p при переходе через фронт ударной волны. Эти условия запишем в неподвижной системе координат, учитывая скорость движения поверхности разрыва U_{Φ} :

$$(\rho_0 + \rho_1)(v_1 - U_{\Phi}) = (\rho_0 + \rho_2)(v_2 - U_{\Phi}), \quad (\text{VII.2.8})$$

$$p_1 + (\rho_0 + \rho_1)(v_1 - U_{\Phi})^2 = p_2 + (\rho_0 + \rho_2)(v_2 - U_{\Phi})^2. \quad (\text{VII.2.9})$$

Первое из этих выражений позволяет исключить скорость U_Φ в выражении (VII.2.9), а затем избавиться в нем и от переменной p с помощью адиабатического уравнения состояния, разложенного в ряд до членов порядка $\sim \mu^3$ включительно:

$$p = p_0 + c_0^2 \rho + \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2\rho_0} \rho^2 + \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2) c_0^2}{6\rho_0^2} \rho^3. \quad (\text{VII.2.10})$$

После нескольких, простых по своей схеме, но довольно громоздких преобразований получим искомый результат

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_1}{c_0} - \frac{v_2}{c_0} \right) = & \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right) + \frac{(\gamma - 3)}{4} \cdot \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{5\gamma^2 - 30\gamma + 61}{96} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^3 \right] - \\ & - \frac{(\gamma + 1)^2}{32} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right). \quad (\text{VII.2.11}) \end{aligned}$$

Это выражение связывает параметры разрыва до элементарного взаимодействия, т. е. до того момента, когда на разрыв наплывут две ступенеобразные простые волны. После взаимодействия значения параметров, разумеется, изменятся, однако связь между ними останется той же самой:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v'_1}{c_0} - \frac{v'_2}{c_0} \right) = & \left(\frac{\rho'_1}{\rho_0} - \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right) + \frac{\gamma - 3}{4} \left[\left(\frac{\rho'_1}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho'_2}{\rho_0} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{5\gamma^2 - 30\gamma + 61}{96} \left[\left(\frac{\rho'_1}{\rho_0} \right)^3 - \left(\frac{\rho'_2}{\rho_0} \right)^3 \right] - \\ & - \frac{(\gamma + 1)^2}{32} \cdot \frac{\rho'_1 \rho'_2}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho'_1}{\rho_0} - \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right). \quad (\text{VII.2.12}) \end{aligned}$$

В качестве пояснения заметим также, что хотя на первый взгляд формально в соотношениях (VII.2.11), (VII.2.12) удержаны только малые члены третьего порядка малости, но структура этих соотношений такова, что при последующих преобразованиях учтенные в них порядки малости повышаются, так что удержание последующих членов разложения оказывается излишним.

Напишем, наконец, связь плотности и скорости для отраженной волны:

$$\frac{\rho_{\text{от}}}{\rho_0} = - \frac{v_{\text{от}}}{c_0}. \quad (\text{VII.2.13})$$

Знак минус здесь принят, поскольку отраженная волна распространяется в сторону, противоположную направлению распространения взаимодействующих простых и ударной волн. Соотношение (VII.2.13) принято линейным в силу малости величины отраженной волны по сравнению с величинами других возмущений. Отраженные волны, вообще говоря, должны нелинейным образом взаимодействовать с гладкими участками профиля, однако такая постановка задачи выходит за рамки принятых в настоящей работе приближений. Мы будем рассматривать отраженные волны как невзаимодействующие друг с другом и с бегущей волной.

Таким образом, полная система уравнений для решения задачи об элементарном взаимодействии состоит из девяти соотношений (VII.1.1) — (VII.1.4), (VII.2.6), (VII.2.7), (VII.2.11) — (VII.2.13). Обратимся непосредственно к решению этой системы, считая заданными следующие величины, характеризующие единичное элементарное взаимодействие: $\rho_{\text{п1}}$, $\rho_{\text{п2}}$, ρ_1 и ρ_2 . Чтобы определить $\rho_{\text{от}}$, вычтем выражение (VII.1.3) из выражения (VII.1.4) и с помощью уравнений (VII.2.11) — (VII.2.13), (VII.2.6), (VII.2.7) получим соотношение, в которое не входят гидродинамические скорости взаимодействующих волн. Затем с помощью уравнений (VII.1.1), (VII.1.2) исключим параметры ρ'_1 и ρ'_2 . При всех преобразованиях опускаются малые члены, порядок которых μ^5 и выше. Окончательно для отраженной волны получается выражение

$$\frac{\rho_{\text{от}}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_{\text{п2}}}{\rho_0} - \frac{\rho_{\text{п1}}}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2, \quad (\text{VII.2.14})$$

из которого нетрудно видеть, что последняя действительно является малой величиной четвертого порядка малости по сравнению с ударной волной.

Выражение (VII.2.14) полностью описывает задачу об элементарном взаимодействии в принятых предположениях о порядках малости величин. Обращаясь теперь

к более сложной задаче о взаимодействии простых волн произвольной формы с ударной волной, когда параметры, описывающие эти волны, являются малыми величинами одинакового порядка малости ($\sim \mu$), следует вернуться к рис. VII.1. Взаимодействие волн одинакового порядка малости сводится к предыдущей задаче, если простую волну первого порядка малости разбить на ряд «ступенек» второго порядка ($\sim \mu^2$). Математически это означает, что соотношению (VII.2.14) ставится в соответствие следующее дифференциальное уравнение:

$$d\left(\frac{\rho_{\text{от}}}{\rho_0}\right) = -\frac{(\gamma+1)^2}{64} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 \left[d\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) - d\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\right]. \quad (\text{VII.2.15})$$

Интегрируя его, получим формулу

$$\frac{\rho_{\text{от}}}{\rho_0} = -\frac{(\gamma+1)^2}{192} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^3, \quad (\text{VII.2.16})$$

позволяющую вычислить отраженную волну по известной величине «амплитуды» разрыва *).

Таким образом, образующиеся в профиле волны разрывы можно рассматривать как «генераторы» отраженных волн разрежения, распространяющихся в обратном (по сравнению с исходной волной) направлении — к источнику звука. При этом амплитуда суммарной отраженной от одного разрыва волны является величиной третьего порядка малости. Но точно такой же порядок μ^3 имеет величина скачка энтропии, как это показано во введении, § 2. Поэтому для строгого решения настоящей задачи принципиально необходимо использовать неизэнтропическое уравнение состояния и третье условие (B.2.3) на разрыве [98].

Более корректный расчет основан на применении уравнения политропы:

$$p = (\gamma - 1) \rho^{\gamma e} \frac{s - s_0}{R(\gamma - 1)}, \quad (\text{VII.2.17})$$

которое, будучи разложенным в ряд до членов $\sim \mu^3$,

*) Отраженная волна непосредственно наблюдалась на модели линии передачи типа фильтра низких частот [136].

имеет вид

$$p = c_0^2 \rho + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0} \rho^2 + \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{6} \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \rho^3 + \\ + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{c_0^2 \rho_0}{R} (s - s_0). \quad (\text{VII.2.18})$$

Все дальнейшие преобразования вполне аналогичны тем, которые привели к выражению (VII.2.11), с той лишь разницей, что приходится исключать лишнюю переменную $(s_2 - s_1)$ — величину скачка, который претерпевает энтропия при переходе через фронт ударной волны. Это можно сделать, вычислив $s_2 - s_1$ по формуле (B.2.8) (существенно использующей третье условие на разрыве) с помощью уравнения состояния (VII.2.17):

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{12} \gamma (\gamma + 1) \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3. \quad (\text{VII.2.19})$$

Аналог выражения (VII.2.11) имеет вид

$$\left(\frac{v_1}{c_0} - \frac{v_2}{c_0} \right) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right) + \frac{\gamma - 3}{4} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right] + \\ + \frac{9\gamma^2 - 30\gamma + 57}{96} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^3 \right] - \\ - \frac{5\gamma^2 + 2\gamma - 3}{32} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right), \quad (\text{VII.2.20})$$

а для суммарной отраженной волны получается следующая формула:

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma + 1)(5\gamma - 3)}{192} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3. \quad (\text{VII.2.21})$$

Сравнивая этот результат с результатом (VII.2.16) менее корректного расчета, легко заметить, что структура самого выражения не изменилась. Изменился лишь численный коэффициент, что никак не должно сказаться на качественной стороне явления.

В дальнейшем (см. § 4 этой главы) нам придется сопоставить ряд результатов, полученных как с помощью газодинамического подхода, так и обычными методами

нелинейной акустики. Поскольку при втором подходе затруднительно учесть неизэнтропичность, мы будем всюду ниже пользоваться адиабатическим уравнением состояния. Там, где оба метода приводят к одинаковым количественным результатам, нужно говорить только об эквивалентности этих методов, не забывая, однако, что сами результаты справедливы лишь качественно.

§ 3. Постоянная составляющая как следствие нелинейного самовоздействия волн

Формула (VII.2.16) может быть использована при решении задач о распространении волн конечной амплитуды различных профилей при условии, что волны достаточно интенсивны и пренебрежение эффектами высших порядков неправомерно.

Поскольку нам понадобится выразить величину разрыва как функцию пройденного волной расстояния, для

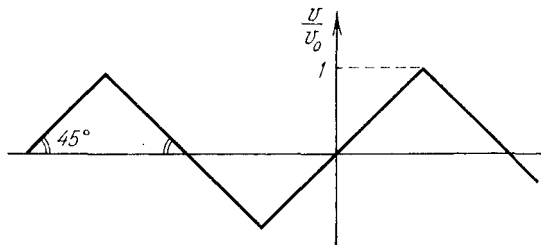


Рис. VII.3. Профиль пилообразной волны на входе системы.

качественного рассмотрения проблемы удобно взять волну симметричной пилообразной формы. (В волне, гармонической на границе среды, амплитуда разрыва есть более сложная функция координаты; см. рис. I.11.)

Итак, пусть на входе системы $x = 0$ задается волна в виде симметричной пилы, как это показано на рис. VII.3. Разрыв в такой волне формируется при значении безразмерной координаты $\sigma = (\varepsilon/c_0^2) \omega v_0 x = 1$, а при $\sigma > 1$ он уменьшается по закону $\rho_2(\sigma)/\rho_0 = -\rho_1(\sigma)/\rho_0 = 2(v_0/c_0)/(1 + \sigma)$. С помощью формулы (VII.2.16), в которой перейдем от параметра ρ к параметру v , с учетом

убывания пикового значения волны при распространении в среде, найдем волну, отраженную от одной поверхности разрыва:

$$\frac{v_{от}}{c_0} = \frac{(\gamma + 1)^2}{3(1 + \sigma)^3} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^3. \quad (\text{VII.3.1})$$

Координата σ характеризует положение разрыва, формирующего отраженную волну.

При расчете полной отраженной волны необходимо просуммировать волны, отраженные от всех поверхностей разрыва. Поскольку ударные фронты возникают только при значении параметра $\sigma = 1$ и образующиеся отраженные волны разрежения распространяются к излучателю (последний следует считать полностью проникаемым), передние фронты отраженных волн для каждого периода возмущений имеют место только в области $0 < \sigma < 1$.

В области значения параметра $\sigma > 1$ отраженная волна асимптотически стремится к нулю. Для наглядности эти рассуждения проиллюстрированы на рис. VII.4, где отраженные волны $\rho_{от}/\rho_0$ представлены в зависимости от координаты σ для следующих друг за другом периодических возмущений. Стрелкой указано направление распространения отраженных волн, так что первая из представленных на рис. VII.4 отраженных «ступенек» соответствует тому периоду возмущений, который раньше достиг значения $\sigma = 1$.

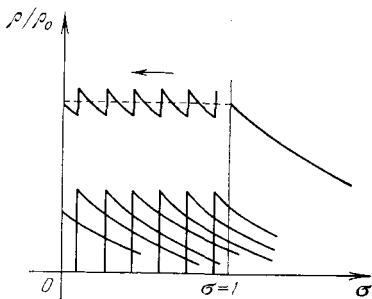


Рис. VII.4. Суммирование волн, отраженных от различных разрывов, приводящее к возникновению постоянной составляющей.

Участок распространения волны от $\sigma = 0$ до $\sigma = 1$, таким образом, все время «питается» новыми и новыми отражениями от поверхностей разрыва, что создает область разрежения вблизи излучателя, которая остается постоянной до координаты x , соответствующей значению параметра $\sigma = 1$, и асимптотически слагает на бес-

конечности. Отраженная волна на участке $\sigma < 1$ периодична с тем же периодом, что и исходная пилообразная волна. Это позволяет просуммировать отраженные волны, так что полное течение может быть представлено в виде ряда:

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = -\frac{(\gamma+1)^2}{3} \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \sigma + \frac{(\gamma+1)v_0}{c_0} \pi n\right]^{-3}. \quad (\text{VII.3.2})$$

Заменяя выражение (VII.3.2) интегралом, поскольку при n стоит малый параметр v_0/c_0 , получим

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = -\frac{\gamma+1}{6\pi} \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \frac{1}{(1+\sigma)^2}. \quad (\text{VII.3.3})$$

Учитывая, что формула (VII.3.3) остается справедливой в области асимптотического спада отраженных волн (область значения параметра $\sigma > 1$), покажем, что при значении параметра $\sigma < 1$ суммирование элементарных отраженных волн приводит к выводу о наличии постоянной составляющей (обязанной своим происхождением тому факту, что отраженная волна суть однополярный импульс). Для этого возьмем интеграл по σ от выражения (VII.3.3) в пределах одного периода элементарной отраженной волны, т. е. от единицы до $1 + \pi(\gamma+1)(v_0/c_0)$. Такое интегрирование дает значение постоянной составляющей на участке $\sigma < 1$. Постоянная составляющая, как легко видеть, будет равна

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = -\frac{\gamma+1}{24\pi} \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2, \quad (\text{VII.3.4})$$

что совпадает с выражением (VII.3.3) при значении $\sigma = 1$.

Распространение волн конечной амплитуды, таким образом, сопровождается постоянным течением, известным в акустике как акустический ветер. Следует отметить, что рассмотренное в этом параграфе течение, в отличие от классических акустических потоков (см. гл. VIII), не связано с диссипацией волны и представляет собой чисто нелинейный эффект.

Поскольку решалась одномерная задача, то сам факт возникновения отраженных от поверхностей разрыва

волн разрежения, распространяющихся по направлению к источнику излучения, потребовал введения в целях математической строгости предположения об абсолютной проницаемости источника и условия излучения на отрицательной бесконечности. Разумеется, область разрежения, возникающая в звуковом луче, заполняется окружающими частицами среды, что может вызвать определенные циркуляционные эффекты, однако подобная постановка проблемы выходит за рамки рассмотренной задачи.

Отметим еще раз, что в области от излучателя до координаты $\sigma = 1$ течение постоянно, а при значении $\sigma > 1$ асимптотически стремится к нулю, сохраняя свое направление от излучателя к приемнику.

§ 4. Модифицированный нелинейно-акустический подход. Простые волны с учетом отражения

Воспользуемся полной системой уравнений, описывающих распространение волн конечной амплитуды в вязкой, теплопроводящей среде (В.1.4), (В.1.5), (II.1.2) (последнее уравнение дополним членом $\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{6} \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \rho'^3 \sim \sim \mu^3$). Примем, как обычно, диссипативный коэффициент b , а также возмущение скорости, плотности и давления за малые величины первого порядка малости. Ограничимся рассмотрением эффектов, имеющих место при больших числах Рейнольдса. В предположении медленного изменения профиля волны при ее распространении в системе, введем сопровождающую систему координат μx и $\tau = t - (x/c_0)$, где μ — малый параметр первого порядка малости, учитывающий факт медленного искажения. Переходя к координатам τ , μx после исключения p из уравнения (В.1.4) с помощью уравнения (II.1.2), получим с точностью до членов порядка μ^3 :

$$\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{v}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial v}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (\text{VII.4.1})$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \left(1 - \frac{v}{c_0}\right) \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \\
& = \frac{c_0}{\rho_0} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right] \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \\
& - \frac{c_0^2}{\rho_0} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}\right] \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{2b}{c_0 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \tau}.
\end{aligned}
\tag{VII.4.2}$$

Умножим уравнение (VII.4.1) на $c_0 (1 - v/c_0)$. После сложения полученного уравнения с уравнением (VII.4.2) и замены в малых членах второго порядка малости v на ρ' на основе самосогласованных выражений, полученных во второй главе (см. (II.1.12), (II.1.13)), найдем

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{3\gamma - 1}{4} \frac{\rho'}{\rho_0}\right] \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \\
& + \left[-\frac{\gamma + 1}{2c_0} \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 3)}{4c_0} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right] \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = \\
& = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \left[1 + \frac{\gamma - 3}{2} \frac{\rho'}{\rho_0}\right] \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - \frac{5b}{4c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial \tau} + \\
& + \frac{(\gamma - 1)b}{4c_0^3 \rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{VII.4.3}$$

Аналогичные преобразования приводят ко второму уравнению для переменной v :

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{\gamma + 5}{4} \frac{v}{c_0}\right] \frac{\partial v}{\partial x} + \left[-\frac{\gamma + 1}{2c_0} \frac{v}{c_0} + \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 3)}{8c_0} \left(\frac{v}{c_0}\right)^2\right] \frac{\partial v}{\partial \tau} = \\
& = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \left[1 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v}{c_0}\right] \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{3b}{4c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \tau} - \\
& - \frac{b(\gamma - 1)}{4c_0^4 \rho_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{VII.4.4}$$

Полезно провести сравнение уравнений (VII.4.3) и (VII.4.4) с уравнением (II.1.10). Отличие в уравнениях, описывающих медленные изменения профилей скорости и плотности звуковой волны, сказывается только в третьем приближении, когда волны перестают быть простыми после образования разрывов. Сведение уравнений (VII.4.3) и

(VII.4.4) к одинаковому виду на основе самосогласованных выражений типа (II.1.12) следующего приближения невозможно. Это связано с тем, что в третьем приближении формы волн скорости и плотности уже различаются.

Точное решение уравнения (VII.4.3), точно так же как и уравнения (VII.4.4), не может быть получено аналитически, поэтому проведем поэтапное рассмотрение процесса, предполагая, что на входе системы задано краевое условие: при $x=0$ $\rho' = \rho'_0 \sin \omega t$. Тогда, как это принято в случае больших чисел Рейнольдса $Re \gg 1$, на первом этапе распространения волны конечной амплитуды можно пренебречь диссипативными эффектами, опустив члены, стоящие справа в уравнении (VII.4.3). Получающиеся таким способом уравнения в методе поэтапного упрощения принято называть упрощенными. Решение упрощенного уравнения с точностью до малых величин третьего порядка малости имеет вид

$$\omega t = \arcsin \left(\frac{\rho'}{\rho'_0} \right) - \frac{\gamma + 1}{2c_0 \rho_0} \omega x \rho'_0 \left(\frac{\rho'}{\rho'_0} \right) + \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 5)}{8c_0 \rho_0^2} \omega x \rho_0'^2 \left(\frac{\rho'}{\rho'_0} \right)^2. \quad (\text{VII.4.5})$$

Решение уравнения (VII.4.5), анализ которого удобнее всего провести графически, уже указывает на несимметричный характер искажения профиля волны. Отложим, как показано на рис. VII.5, а, по оси абсцисс значение ρ'/ρ'_0 , а по оси ординат — значение ωt . Как видим, волновой профиль в соответствии с формулой (VII.4.5) представляет собой сумму трех функций: арксинуса, прямой и параболы. При этом тангенс угла наклона прямой увеличивается по мере распространения волны от источника, и это возрастание пропорционально x и амплитудному значению плотности волны на входе системы.

Аналогичную зависимость по x обнаруживает и параболa, с той лишь разницей, что здесь эффекты сказываются в следующем порядке малости — пропорциональны квадрату амплитуды волны на входе системы. На рис. VII.5, б представлена сумма всех трех функций, дающих профиль волны на некотором расстоянии x от входа системы. Этот профиль сформирован из первоначально синусоидальной

волны и может быть построен на любом удалении от источника вплоть до точки формирования разрыва, когда функция становится многозначной.

На основе метода поэтапного упрощения эта вторая область распространения волны может быть исследована с

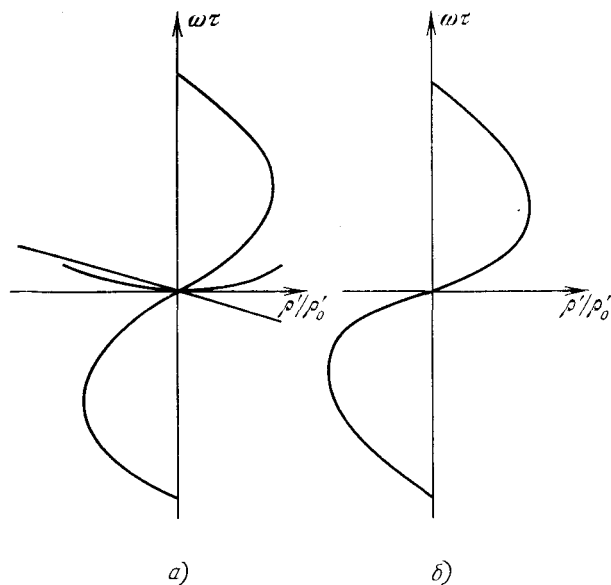


Рис. VII.5. Несимметричный профиль волны в соответствии с решением (VII.4.5): а) все три слагаемые формулы (VII.4.5); б) результирующий профиль.

помощью вспомогательной задачи о распространении одиночного стационарного скачка плотности в среде, т. е. мы ограничиваемся исследованием стационарного решения уравнения (VII.4.3), когда производной по x можно пренебречь.

Упрощенное уравнение имеет вид

$$-\frac{(\gamma+1)}{2c_0} \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{d\rho'}{d\tau} - \frac{b}{2c_0^3\rho_0} \frac{d^2\rho'}{d\tau^2} = \frac{\gamma-1}{4} \frac{b}{c_0^3\rho_0^2} \left(\frac{d\rho'}{d\tau} \right)^2. \quad (\text{VII.4.6})$$

В отличие от аналогичного уравнения второго приближения (II.2.7), правая часть уравнения (VII.4.6) не равна нулю. Решение последнего существует лишь при условии несимметричного скачка, и эта несимметрия сказывается в следующем порядке малости, т. е.

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho'_0 && \text{при } \tau \rightarrow \infty, \\ \rho' &= -\rho'_0 - \Delta && \text{при } \tau \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

где

$$\Delta \approx \frac{\gamma-1}{3} \rho_0 \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} \right)^2. \quad (\text{VII.4.7})$$

На рис. VII.6 построен профиль одиночного скачка плотности на основе аналитического решения уравнения

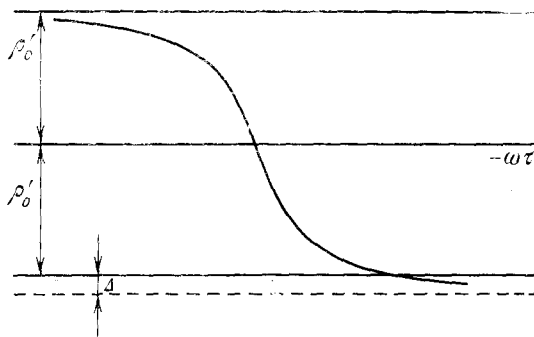


Рис. VII.6. Несимметричный стационарный скачок плотности, движущийся со скоростью c_0 .

(VII.4.6). Приведенный скачок плотности — квазистационарный фронт волны — распространяется без искажения со скоростью c_0 , что при наличии несимметрии эквивалентно появлению постоянного течения в направлении распространения волны.

Действительно, вводя вместо $\tau = t - (x/c_0)$ новую сопровождающую координату $\tau' = t - [x/c_0 (1 + \delta)]$, где коэффициент δ характеризует приращение скорости распространения волны, можно получить вместо (VII.4.6)

уравнение следующего вида:

$$-\frac{(\gamma+1)}{2c_0} \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{d\rho'}{d\tau'} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{d^2 \rho'}{d\tau'^2} = \frac{(\gamma-1)b}{4c_0^2 \rho_0} \left(\frac{d\rho'}{d\tau'} \right)^2 - \frac{\delta}{c_0} \frac{d\rho'}{d\tau'}. \quad (\text{VII.4.8})$$

Уравнение (VII.4.8) по сравнению с уравнением (VII.4.6) содержит дополнительный член, позволяющий найти решение, описывающее симметричный профиль волны. Такое решение возможно при значении коэффициента

$$\delta = \frac{\gamma^2 - 1}{12} \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} \right)^2. \quad (\text{VII.4.9})$$

Следовательно, достаточно интенсивный симметричный одиночный стационарный скачок распространяется со скоростью, большей скорости звука; это приращение скорости пропорционально квадрату акустического числа Маха.

Качественная оценка изменения скорости распространения фронта волны проводилась в монографии [7], формула (I.5.7). Однако при вычислении скорости фронта в [7] использовались соотношения, справедливые для простых волн. Квадратичные поправки в формуле (I.5.7) определены благодаря учету малых членов третьего порядка малости по числу Маха. Естественно, формула (VII.4.9) не согласуется с формулой (I.5.7), поскольку в последней не учтены отраженные от поверхностей разрыва волны, сказывающиеся именно в третьем порядке малости.

Используя ранее найденное значение амплитуды отраженной волны (VII.2.16), дополним в третьем приближении римановские соотношения для простой волны:

$$\begin{aligned} \frac{\rho'_2}{\rho_0} &= M_0 - \frac{(\gamma+1)^2}{24} M_0^3, \\ \frac{v_2}{c_0} &= M_0 \left[1 + \frac{\gamma-3}{4} M_0 + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{24} M_0^2 \right] + \frac{(\gamma+1)^2}{24} M_0^3, \end{aligned} \quad (\text{VII.4.10})$$

$$\frac{\rho'_1}{\rho_0} = -M_0, \quad \frac{v_1}{c_0} = -M_0 \left[1 - \frac{\gamma-3}{4} M_0 + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{24} M_0^2 \right].$$

Здесь $M_0 = \rho'_0/\rho_0$, индексом 1 помечены величины, отно-

сящиеся к точке, находящейся непосредственно перед фронтом волны, а индексом 2 — к точке непосредственно за фронтом. Поэтому отраженная от поверхности разрыва волна включена в первые два из приведенных выше соотношений. Определяя скорость фронта с помощью выражений (VII.4.10), найдем

$$U_{\Phi} = \frac{\rho_0(v_2 - v_1) + \rho_2'v_2 - \rho_1'v_1}{\rho_2' - \rho_1'} = c_0 \left[1 + \frac{\gamma^2 - 1}{12} \left(\frac{\rho_0'}{\rho_0} \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.4.11})$$

Таким образом, приращение скорости фронта оказалось численно равным значению δ (формула (VII.4.9)), несмотря на принципиально различный подход. Следует отметить, что квазистационарное решение, дающее структуру фронта, остается справедливым и для предельного перехода $b \rightarrow 0$, однако такой предельный переход в исходных уравнениях (VII.4.3) и (VII.4.4) неправомерен, поскольку приводит к неоднозначным результатам. Действительно, полагая, например, $b \sim \mu^2$, при переходе к упрощенному уравнению можно все члены уравнений (VII.4.3), (VII.4.4) умножить на выражение вида $1 + (Av/c_0)$, где A — константа. При этом изменится нелинейная часть упрощенного уравнения, тогда как диссипативная часть остается без изменений. Эта неоднозначность устраняется как раз благодаря удержанию малых членов третьего порядка малости по диссипации.

Во втором параграфе были найдены соотношения, связывающие значения гидродинамической скорости v и возмущения плотности ρ' в ступенькообразной симметричной ударной волне (VII.2.11), (VII.2.12). Эти соотношения неявным образом учитывают наличие отраженной волны. Подставляя соотношение (VII.2.11) в выражение для скорости фронта, после несложных преобразований приходим к результату, точно совпадающему с формулой (VII.4.11).

Итак, при вычислении постоянной составляющей скорости оба метода дают совпадающие результаты. Приращение скорости представляет собой акустическое течение, имеющее место при распространении одиночного стационарного скачка и являющееся следствием нелинейного самовоздействия волны.

Возвращаясь к волне синусоидального профиля, можно было бы все разрывные участки волны заменить гладкой функцией, представленной на рис. VII.6. Однако, в отличие от задачи второго приближения, когда положение фронта однозначно определяется по равенству площадей,

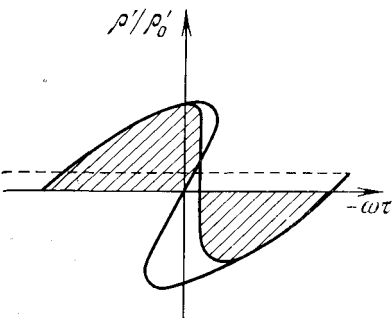


Рис. VII.7. Один период достаточно интенсивной волны, гармонической на входе в систему.

в настоящей задаче такое построение неправомерно. Равенство площадей не выполняется, и в соответствии с квазистационарным решением фронт волны оказывается смещенным.

Синусоидальная волна во второй области распространения может быть качественно представлена так, как это показано на рис. VII. 7. Такое построение проведено на основе «сшивания» решений для первой и второй областей

распространения волны. Пунктирной линией отмечена постоянная составляющая плотности. Это постоянное течение, существующее в области распространения волны, естественно, затухает по мере ослабления звуковых возмущений, когда эффекты третьего порядка малости пренебрежимо малы. Волновые профили становятся симметричными, и при последующем рассасывании фронтов волна вновь превращается в синусоидальную на расстоянии, не зависящем от амплитуды сигнала на входе системы $kx = 4 \operatorname{Re}/M$.

Постоянное течение, найденное во вспомогательной задаче для одиночного стационарного скачка и не зависящее от σ , при переходе к периодическим возмущениям обращается в нуль на конечном расстоянии от излучателя. Это расстояние определяется диссипативными свойствами среды. Число фронтов, участвующих в формировании отраженных волн, $n \sim \operatorname{Re}/M$ (процесс формирования течения рассматривался в § 2). Если учесть диссипативные свойства среды, то интеграл в формуле (VII.3.2) нужно брать в конечных пределах, и скорость постоянного течения обратится в нуль при значении безразмерной координаты $\sigma \sim \operatorname{Re}$.

ГЛАВА VIII

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Вывод системы уравнений для акустических течений

Распространение мощных звуковых волн в жидких и газообразных средах часто приводит к появлению неперiodических движений среды типа потоков. Точнее, в каждой точке пространства полное возмущение становится суммой

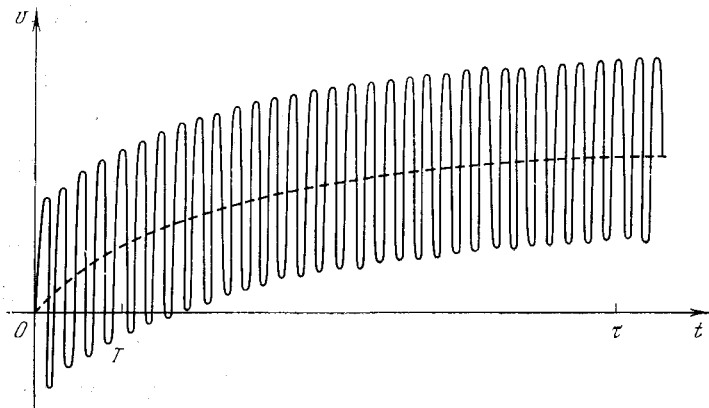


Рис. VIII.1. Возникновение медленного течения на фоне осцилляций.

осциллирующего (с периодом звука) и некоторого квазипостоянного движения, показанного на рис. VIII.1 штриховой линией в несколько преувеличенном виде.

Это полное движение можно усреднить по промежутку времени T , кратному $2\pi/\omega$; T должно быть много больше

периода осцилляций $2\pi/\omega$, но, с другой стороны, много меньше, чем характерное время изменения скорости потока τ . «Огрубляя» таким образом истинный процесс, мы придем к гидродинамической задаче о течении вязкой среды в поле внешних сил. Однако появление поля сил, а следовательно, и течение, вызывается распространяющейся звуковой волной и определяется акустическими характеристиками волны. Итак, при рассмотрении явления «звукового ветра» акустические и гидродинамические параметры тесно переплетаются между собой.

Исходная система уравнений состоит из уравнения движения в форме Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v} \quad (\text{VIII.1.1})$$

и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (\text{VIII.1.2})$$

Эта система может описывать произвольные движения сплошной среды. Для изучения же медленных (по сравнению со скоростью звука) течений применимо приближение несжимаемой жидкости. Как известно из гидродинамики [1], считать жидкость несжимаемой ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) можно при условии $U/c_0 \ll 1$, где U — скорость потока. При этом уравнение (VIII.1.2) примет простой вид

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad (\text{VIII.1.3})$$

а уравнение (VIII.1.1) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} - \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{U} = - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \mathbf{F}, \quad (\text{VIII.1.4})$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу массы. Отметим, что в случае нестационарных течений для перехода к системе (VIII.1.3), (VIII.1.4) необходимо выполнение еще одного условия: характерное время τ изменения скорости $\mathbf{U}$ должно быть много больше того времени, за которое звук успевает пробежать рассматриваемую область (условие квазистационарности).

Итак, пусть выполнены все указанные ограничения. Покажем, как из исходных уравнений (VIII.1.1), (VIII.1.2) получить систему (VIII.1.3), (VIII.1.4) в явном виде. Представим параметры ρ , $\mathbf{v}$, p в форме [99]:

$$\rho = \rho_0 + \rho_a, \quad p = p_0 + p_a, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_a, \quad (\text{VIII.1.5})$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_a &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho_a dt = 0, \\ \bar{p}_a &= \frac{1}{T} \int_0^T p_a dt = 0, \\ \bar{\mathbf{v}}_a &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}_a dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.6})$$

Иными словами, усредненные значения параметров $\bar{\rho} = \rho_0$, $\bar{p} = p_0$, $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0$ должны характеризовать акустические потоки. Однако нелинейный характер исходных уравнений несколько усложняет картину, и линейная суперпозиция волны и потока, предположенная при записи (VIII.1.5), на самом деле не имеет места. В этом легко убедиться, подставляя выражения (VIII.1.5) в уравнение (VIII.1.2) и усредняя его по времени. Получим

$$\text{div} \left(\mathbf{v}_0 + \frac{\overline{\rho_a \mathbf{v}_a}}{\rho_0} \right) = 0. \quad (\text{VIII.1.7})$$

Сравнивая выражение (VIII.1.7) с уравнением (VIII.1.3), можно заметить, что смысл скорости течения имеет величина $\mathbf{U} = \mathbf{v}_0 + \overline{\rho_a \mathbf{v}_a} / \rho_0$, а не $\mathbf{v}_0$. Именно $\mathbf{U}$ характеризует средний перенос массы среды. Действительно, поток массы через некоторую поверхность S определяется интегралом

$$\int_S \overline{\rho \mathbf{v}} d\mathbf{s} = \int_S \rho_0 \left(\mathbf{v}_0 + \frac{\overline{\rho_a \mathbf{v}_a}}{\rho_0} \right) d\mathbf{s} = \rho_0 \int_S \mathbf{U} d\mathbf{s}.$$

Таким образом, вместо (VIII.1.5) надо писать

$$\rho = \rho_0 + \rho_a(r, t), \quad p = p_0(r, \mu t) + p_a(r, t),$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}(r, \mu t) + \mathbf{v}_a(r, t) - \frac{\rho_a \mathbf{v}_a}{\rho_0}. \quad (\text{VIII.1.8})$$

Теперь сложим уравнения (VIII.1.1) и (VIII.1.2), умножив их на ρ и $\mathbf{v}$ соответственно. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \Delta) \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \\ = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.9})$$

Подставляя в это уравнение выражения (VIII.1.8), усредним его по времени и сохраним члены до второго порядка малости включительно, считая $\mathbf{U}/c_0$, $\mathbf{v}_a/c_0$, $\rho_a/\rho_0 \sim \mu$. В результате придем к уравнению (VIII.1.4), в котором

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = -\overline{(\mathbf{v}_a \nabla) \mathbf{v}_a} - \overline{\mathbf{v}_a \operatorname{div} \mathbf{v}_a} - \frac{\eta}{\rho_0^2} \Delta \overline{(\rho_a \mathbf{v}_a)} - \\ - \frac{1}{\rho_0^2} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{(\rho_a \mathbf{v}_a)}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.10})$$

Итак, задача об определении акустических течений действительно сводится к системе уравнений (VIII.1.3), (VIII.1.4) для течения вязкой несжимаемой жидкости.

Найдем явный вид выражения $\mathbf{F}$ для некоторых частных случаев. Если течение вызвано плоской бегущей волной, то $v_a/c_0 = \rho_a/\rho_0$; в выражении (VIII.1.10) не равны нулю только производные $\partial/\partial x$ и оно принимает вид

$$\mathbf{F} = -\frac{\overline{\partial v_a^2}}{\partial x} - \frac{\left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right)}{\rho_0 c_0} \frac{\overline{\partial^2 v_a^2}}{\partial x^2}. \quad (\text{VIII.1.11})$$

Для $\operatorname{Re} \ll 1$ бегущая волна описывается выражением (B.1.29). Вычисляя $\overline{v_a^2}$, найдем

$$\overline{v_a^2} = \frac{v_0^2}{2} e^{-2\alpha x}. \quad (\text{VIII.1.12})$$

Если $(M/\operatorname{Re})^2 \ll 1$, то в выражении для $\mathbf{F}$ можно ограничиться первым членом и

$$\mathbf{F} = \alpha v_0^2 e^{-2\alpha x}. \quad (\text{VIII.1.13})$$

Обычно предполагают, что размеры рассматриваемой области много меньше $1/2\alpha$ и изменением амплитуды волны можно пренебречь. Тогда $e^{-2\alpha x} \approx 1$ и [100]

$$F = \alpha v_0^2. \quad (\text{VIII.1.14})$$

Естественно, что в этом случае (когда $\text{Re} \ll 1$) при стремлении коэффициента поглощения волны α к нулю сила F обращается в нуль и акустические течения не возникают.

Для $\text{Re} \gg 1$ можно воспользоваться формулами (I.5.3) или (I.5.9), описывающими волну на этапе $0 < \sigma < 1$, либо формулами (II.2.10), (II.2.11) на этапе $\sigma > \pi/2$.

Как было показано ранее (см. (I.5.16)), при $\sigma < 1$ $\bar{v}^2 = v_0^2/2$ и, следовательно, $F = 0$. В области же $\sigma > \pi/2$ образуется крутой ударный фронт, и характер затухания волны становится существенно иным; мы вправе ожидать поэтому сильного отличия от выражений (VIII.1.12) — (VIII.1.14). Решения (II.2.10), (II.2.11) в предельном случае $\text{Re} \rightarrow \infty$ переходят в (I.5.13), (I.5.14).

Вычислим F в этом важном частном случае, когда течение вызывается распространяющейся идеальной пилообразной волной. Для «пилы» со сглаженным фронтом (II.2.10), (II.2.11) выкладки вполне аналогичны и проделываются без труда. (Лишь окончательный результат оказывается несколько более громоздким.) Используя выражение (I.5.18) для $\bar{v}_a^2$, на основе (VIII.1.11) получим

$$F = \frac{2\pi^2}{3} \frac{\varepsilon \omega v_0^3}{(1 + \sigma)^3 c_0^2}. \quad (\text{VIII.1.15})$$

В формуле (VIII.1.11) мы ограничились первым членом, предположив, что $M^2/\text{Re} \ll 1$. Если к тому же рассматривать достаточно короткую область, в которой $\frac{1}{(1 + \sigma)^3} \approx \approx \text{const}$, то F примет вид [101, 102]

$$F = G \frac{\varepsilon \omega v_0^3}{c_0^2}. \quad (\text{VIII.1.16})$$

Величина константы G , как нетрудно видеть, зависит от местонахождения рассматриваемой области. Очень существенно, что в этом случае ($Re \gg 1$) выражение (VIII.1.16) для F не зависит от коэффициента поглощения α . Это связано с особым характером затухания пилообразной волны, что уже многократно подчеркивалось ранее. Итак, при $Re \gg 1$ силы, вызывающие акустические течения, формально существуют и в предельном случае среды с нулевой вязкостью.

§ 2. Эккартовские течения

Рассмотрим, следуя Эккарту [400], акустические потоки в области со следующей геометрией: звуковой пучок радиуса r_1 распространяется в цилиндрической трубе радиуса r_0 с жесткими стенками. В начале координат (при

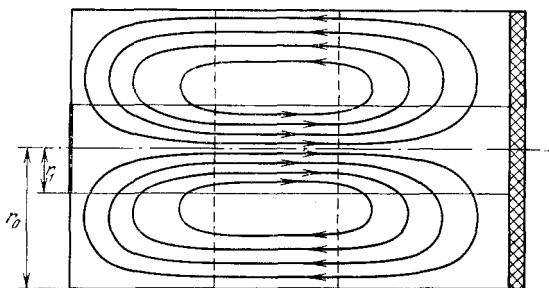


Рис. VIII.2. Потоки в замкнутом объеме. Параллельными штриховыми линиями отмечена область эккартовского течения.

$x = 0$) находится непроницаемый торец, на котором расположен источник звука. Труба является полубесконечной, т. е. отраженной волны в ней не возникает. Этот режим можно осуществить, например, расположив идеальный поглотитель звука на некотором расстоянии от источника (см. рис. VIII.2).

В такой постановке задачу целесообразно решать в цилиндрической системе координат. Исходная система

уравнений (VIII.1.3), (VIII.1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} = \\ = F - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right], \quad (\text{VIII.2.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_x \frac{\partial U_r}{\partial x} = \\ = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) \right], \quad (\text{VIII.2.2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0. \quad (\text{VIII.2.3})$$

Этот параграф целиком посвящен так называемым эккартовским (одномерным) течениям, при рассмотрении которых пренебрегают зависимостью скорости потока от координаты x .

Итак, предположим, что имеется некоторая область, заключенная между двумя поперечными сечениями трубы, в которой производная $\partial U_x / \partial x$ пренебрежимо мала (см. рис. VIII.2). Из уравнения (VIII.2.3) следует, что при этом $U_r = 0$, а уравнение (VIII.2.2) приводит к соотношению $\partial p_0 / \partial r = 0$. Таким образом, p_0 есть функция только от x , t . Обозначая U_x просто через U и принимая во внимание все замечания, вместо уравнения (VIII.2.1) придем к следующему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = F - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}. \quad (\text{VIII.2.4})$$

Сила F , вызывающая поток, обусловлена поглощением звуковой волны и в зависимости от характера поглощения может быть записана по-разному (VIII.1.14), (VIII.1.16). Звуковой пучок считается коллимированным; при выбранной геометрии пучка для силы F справедливо следующее представление:

$$F(r) = A \vartheta(r_1 - r), \quad (\text{VIII.2.5})$$

где

$$\vartheta(r_1 - r) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < r < r_1, \\ 0 & \text{при } r_1 < r < r_0. \end{cases}$$

В качестве константы A здесь можно взять любое из выражений (VIII.1.14), (VIII.1.16). Будем считать, что F от времени не зависит, т. е. сила устанавливается мгновенно

с приходом звука в точку наблюдения. Пусть этому моменту соответствует время $t = 0$.

Поскольку все члены в уравнении (VIII.2.4) зависят только от r , t , следовательно, градиент давления $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}$ также есть функция r , t . Но было показано, что p_0 от r не зависит. Поэтому $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} = K(t)$ и уравнение для одномерных акустических течений принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = F(r) - K(t). \quad (\text{VIII.2.6})$$

Уравнение (VIII.2.6) вместе с граничными условиями

$$U(r_0, t) = 0, \quad |U(0, t)| < \infty \quad (\text{VIII.2.7})$$

и нулевым начальным условием $U(r, 0) = 0$, а также с дополнительным требованием равенства нулю полного потока массы через поперечное сечение трубы:

$$\int_0^{r_0} r U dr = 0 \quad (\text{VIII.2.8})$$

позволяет определить искомую скорость течения $U(r, t)$ и неизвестную функцию $K(t)$.

Рассмотрим вначале установившееся течение, когда $\partial U / \partial t = 0$, $K(t) = K(\infty) = \text{const}$. Уравнение (VIII.2.6) превращается при этом в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = A\vartheta(r_1 - r) - K(\infty). \quad (\text{VIII.2.9})$$

Интегрируя (VIII.2.9) и используя условия (VIII.2.7), (VIII.2.8) для определения двух произвольных констант и величины $K(\infty)$, получим решение

$$\frac{U}{U_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) - \\ \quad - \ln \frac{r_1}{r_0} \quad \text{при } 0 < r < r_1, \\ - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) - \ln \frac{r}{r_0} \quad \text{при } r_1 < r < r_0. \end{cases} \quad (\text{VIII.2.10})$$

Здесь

$$U_0 = \frac{Ar_1^2 \rho_0}{2\eta}. \quad (\text{VIII.2.11})$$

Профиль радиального распределения стационарной скорости потока изображен на рис. VIII.3, кривая t_3 . Скорость течения достигает максимального значения на оси системы. При увеличении r скорость уменьшается до нуля (на расстоянии, вообще говоря, не равном r_1) и затем меняет знак. Когда звуковой пучок полностью заполняет трубу, т. е. $r_1 = r_0$, скорость потока тождественно обращается в нуль.

Теперь перейдем к рассмотрению процесса установления акустического ветра [103]. Здесь удобно произвести следующее разбиение искомых функций:

$$U(r, t) = U(r, \infty) + U_n(r, t), \quad K(t) = K(\infty) + K_n(t), \quad (\text{VIII.2.12})$$

$U(r, \infty)$, $K(\infty)$ — это уже известное стационарное решение, а U_n , K_n — искомые нестационарные добавки. Вычитая (VIII.2.9) из (VIII.2.6), получим уравнение для U_n , K_n :

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_n}{\partial r} \right) = -K_n(t). \quad (\text{VIII.2.13})$$

Граничное условие на стенке трубы и дополнительное условие равенства нулю полного потока массы через поперечное сечение имеют место по-прежнему, зато начальное условие становится неоднородным:

$$U_n(r, 0) = -U(r, \infty). \quad (\text{VIII.2.14})$$

Функцию $K_n(t)$ удобно определить до того как будет найдено явное решение уравнения (VIII.2.13). Для этого

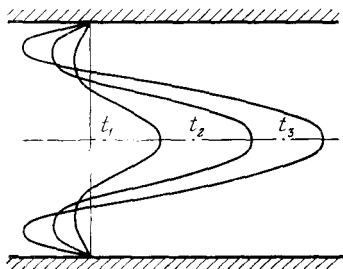


Рис. VIII.3. Процесс установления экартовского течения.

следует умножить обе части уравнения (VIII.2.13) последовательно на r и r^3 и проинтегрировать в пределах от 0 до r_0 . Используя затем дополнительное и граничное условия, можно получить два простых соотношения, из которых и находится величина K_H :

$$K_H(t) = \frac{4}{r_0^4} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} r^3 U_H(r, t) dr. \quad (\text{VIII.2.15})$$

Подставляя (VIII.2.15) в уравнение (VIII.2.13) и решая его методом разделения переменных, найдем

$$U_H = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}\right)^2 \frac{\tau_1}{\rho_0} t} \left[J_0\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r\right) - J_0(\mu_n^{(2)}) \right]. \quad (\text{VIII.2.16})$$

Здесь $\mu_n^{(2)}$ — корни функции Бесселя второго порядка. Коэффициенты C_n нужно определить из начального условия (VIII.2.14), разложив для этого стационарное решение (VIII.2.10) в ряд по системе функций

$$J_0\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r\right) - J_0(\mu_n^{(2)}). \quad (\text{VIII.2.17})$$

Непосредственное разложение по функциям (VIII.2.17) производить неудобно, поэтому вместо решения (VIII.2.10) введем $\varphi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{U(r, \infty)}{U_0} \right)$ и разложим φ в ряд по полной и ортогональной с весом r^3 на отрезке $[0, r_0]$ системе собственных функций

$$y_n = J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r\right) \bigg/ \frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r, \quad y_0 = 1 \quad (\text{VIII.2.18})$$

краевой задачи

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dy}{dr} \right) + \lambda r^3 y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(r_0) = 0. \quad (\text{VIII.2.19})$$

Возвращаясь затем от φ к стационарной скорости $U(r, \infty)$ и сравнивая полученное разложение с формулой

(VIII.2.16), взятой при $t = 0$, найдем

$$C_n = 4 \frac{r_0}{r_1} \frac{\left[J_1 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r_1 \right) - \frac{\mu_n^{(2)}}{2} \frac{r_1}{r_0} J_0 \left(\mu_n^{(2)} \right) \right]}{\mu_n^{(2)3} J_1^2 \left(\mu_n^{(2)} \right)}. \quad (\text{VIII.2.20})$$

Окончательное выражение для скорости акустического потока имеет вид

$$\frac{U(r, t)}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[1 - e^{-\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} \right)^2 \frac{\eta}{\epsilon_0} t} \right] \times \\ \times \left[J_0 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r \right) - J_0 \left(\mu_n^{(2)} \right) \right]. \quad (\text{VIII.2.21})$$

Заметим, что в полученном выражении легко обнаруживаются известные предельные переходы. Скорость потока обращается в нуль при $r_1 = r_0$ за счет выражения, стоящего в квадратных скобках в формуле (VIII.2.20). Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться рекуррентными соотношениями для функций Бесселя. Скорость потока обращается в нуль и при $r = r_0$. Это сразу видно из второй квадратной скобки выражения (VIII.2.21). Наконец, почленным интегрированием ряда (VIII.2.21) легко проверить, что условие равенства нулю полного потока массы (VIII.2.8) также выполняется.

В соответствии с выражением (VIII.2.21) на рис. VIII.3 построены профили скорости течения для трех моментов времени $t_3 > t_2 > t_1$. Характерное время установления акустического ветра, как следует из решения, оценивается формулой

$$\tau \sim \frac{r_0^2}{\mu_1^{(2)2}} \frac{\rho_0}{\eta}. \quad (\text{VIII.2.22})$$

Для трубы радиусом 3 см, заполненной водой, $\tau \sim 40$ сек (в той области трубы, где справедливо приближение одномерной задачи). Согласно (VIII.2.21) процесс установления течения носит монотонный характер. Для качественного рассмотрения проблемы в решении (VIII.2.21) можно ограничиться первым членом ряда.

§ 3. Неоднородные течения

В реальных условиях эйлеровское течение осуществить трудно. Дифракция и затухание звука приводят к появлению зависимости силы F от координаты x . Зависимость от поперечной координаты r также оказывается более сложной, чем в формуле (VIII.2.5). Кроме того, на конфигурацию потока оказывает сильное воздействие геометрическая форма области, занятой течением. В результате реальные акустические течения становятся неоднородными, и их следует описывать общими уравнениями (VIII.1.3), (VIII.1.4). Но решить эти уравнения не представляется возможным (даже для простейших областей) главным образом из-за их нелинейного характера. В § 2 такой трудности не возникало, так как для одномерной задачи нелинейный член $(U \nabla) U$ тождественно исчезал.

Аналогичное упрощение может быть сделано и по другим соображениям. Дело в том, что член $(U \nabla) U$ в уравнении (VIII.1.4) имеет порядок величины U_0^2/r_0 (где U_0 — характерная скорость потока, r_0 — его характерный размер), а член $\frac{\eta}{\rho_0} \Delta U$ порядка величины $\frac{\eta}{\rho_0} \frac{U_0}{r_0^2}$. Отношение первой из этих величин ко второй равно

$$R = \frac{U_0 r_0}{\nu} \quad (\text{VIII.3.1})$$

и представляет собой гидродинамическое число Рейнольдса. Оно будет в дальнейшем обозначаться через R (в отличие от акустического числа Рейнольдса Re).

В тех случаях, когда R мало, нелинейным членом в уравнении движения можно пренебречь и система уравнений для потока **линеаризуется**:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U = - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + F, \quad (\text{VIII.3.2})$$

$$\text{div } U = 0. \quad (\text{VIII.3.3})$$

Для того чтобы исключить переменную p_0 , нужно применить операцию rot к обеим частям (VIII.3.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } U - \nu \text{rot } (\Delta U) = \text{rot } F. \quad (\text{VIII.3.4})$$

Особенно простой вид система (VIII.3.3), (VIII.3.4) принимает в случае плоского течения, когда вектор U лежит в плоскости переменных x, y и все величины являются функциями только x, y и времени. В декартовых координатах операции rot и Δ коммутируют, поэтому в уравнение (VIII.3.4) входит только одна переменная

$$\text{rot } U = e_z \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right).$$

Уравнение (VIII.3.4) имеет только одну проекцию — на ось z , т. е. является скалярным. Введем для скорости течения функцию тока ψ такую, что

$$U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{VIII.3.5})$$

При этом

$$\text{rot } U = e_z \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = e_z \Delta \psi, \quad (\text{VIII.3.6})$$

уравнение (VIII.3.3) удовлетворяется тождественно, а (VIII.3.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \nu \Delta \Delta \psi = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \quad (\text{VIII.3.7})$$

Решая это уравнение с конкретными начальными и граничными условиями, можно определить функцию тока ψ .

Заметим, что ψ имеет простой геометрический смысл. Приравнявая $\psi(x, y)$ произвольной постоянной, получим семейство уравнений линий тока для стационарного течения: $\psi(x, y) = C$. Действительно, дифференцируя это уравнение: $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$ и используя свойство (VIII.3.5), придем к соотношению

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y}, \quad (\text{VIII.3.8})$$

представляющему собой дифференциальное уравнение для линий тока.

При больших значениях гидродинамического числа Рейнольдса ($R \gg 1$) нужно искать точные решения нелинейных уравнений (VIII.1.3), (VIII.1.4) либо делать иные упрощения, отличные от линеаризации.

Как известно, точные решения уравнений движения вязкой жидкости получены только в очень небольшом числе случаев. Математический аппарат, использованный при отыскании одного из таких решений — стационарной задачи Ландау о «затопленной струе» [1] — может быть интерпретирован в теории акустических течений. Поэтому необходимо остановиться на этом частном, но очень важном (в силу своей исключительности) примере.

Источник звука помещен в начале сферической системы координат; полярная ось направлена вдоль оси звукового пучка. В силу аксиальной симметрии $U_\varphi = 0$, а U_r , U_θ являются функциями только от r и θ . Исходная система уравнений (VIII.1.3), (VIII.1.4) должна быть при этом записана в сферических координатах:

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} - v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r U_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 U_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} U_\theta \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + F_r, \quad (\text{VIII.3.9})$$

$$U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta}{r} - v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r U_\theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + F_\theta, \quad (\text{VIII.3.10})$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 U_r}{r} + \frac{U_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0. \quad (\text{VIII.3.11})$$

Ищем автомодельное решение этой системы в следующей форме:

$$U_r = \frac{v}{r} \varphi(\theta), \quad U_\theta = \frac{v}{r} f(\theta), \quad - \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{v^2}{r^2} \chi(\theta). \quad (\text{VIII.3.12})$$

Уравнение (VIII.3.11) приводится при этом к виду

$$f' + \varphi + f \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (\text{VIII.3.13})$$

a (VIII.3.9), (VIII.3.10) с учетом соотношения (VIII.3.13) дадут соответственно

$$\varphi'' + \varphi' (\operatorname{ctg} \theta - f) + \varphi^2 + f^2 - 2\chi = -\frac{r^3}{v^2} F_r, \quad (\text{VIII.3.14})$$

$$ff' - \varphi' - \chi' = \frac{r^3}{v^2} F_\theta. \quad (\text{VIII.3.15})$$

Поскольку левые части этих уравнений есть функции только от θ , необходимо, чтобы сила F зависела от r вполне определенным образом, а именно

$$F(r, \theta) = \frac{\Phi(\theta)}{r^3}. \quad (\text{VIII.3.16})$$

Только в этом случае исходная система уравнений в частных производных может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Покажем, что требованию (VIII.3.16) удовлетворяет сила F , вызванная поглощением сферической волны пилообразного профиля. Используя в качестве исходных выражения (III.2.7), (III.2.9), получим аналог формулы (I.5.18) для $\bar{v}^2$, а затем (с помощью выражения (VIII.4.10)) для F , записанного в сферической системе координат: $F_r = -\frac{\partial v^2}{\partial r} - \frac{2v^2}{r}$ — аналог формулы (VIII.4.16)

$$F_r = G \frac{r_0^3}{r^3} \frac{\varepsilon \omega v_0^3}{c_0^2}, \quad F_\theta = 0. \quad (\text{VIII.3.17})$$

Заметим, что при вычислении (VIII.3.17) были использованы выражения для сферически-симметричных волн. Вообще говоря, такая волна вызывает появление поля сил, симметрично растягивающих среду, и поэтому не сопровождается возникновением течений. В нашем же случае следует предположить, что волна слабо зависит от θ (имеет вид конического звукового пучка).

Кроме того, требование (VIII.3.16) может быть выполнено для любого типа затуханий, если только волна вызывает силу F , отличную от нуля лишь в малой окрестности начала координат. В этом случае можно считать, что волна передает свой импульс среде в одной точке (при $r = 0$), и движение рассматривать в области, где $F = 0$.

В обоих случаях (VIII.3.15) интегрируется сразу и позволяет исключить функцию $\chi + \frac{r^3}{2v^2} F_r$ из (VIII.3.14). Решением полученного уравнения

$$\varphi'' + \varphi' (\operatorname{ctg} \theta - f) + \varphi^2 + 2\varphi = 0 \quad (\text{VIII.3.18})$$

и уравнения (VIII.3.13) являются, как нетрудно проверить, следующие выражения:

$$f = -\frac{2 \sin \theta}{B - \cos \theta}, \quad \varphi = 2 \left[\frac{B^2 - 1}{(B - \cos \theta)^2} - 1 \right]. \quad (\text{VIII.3.19})$$

Постоянная B связана с импульсом, выделяемым в среду за единицу времени. Вычисляя с помощью полученного решения поток импульса через сферическую поверхность, охватывающую источник звука, получим

$$\mathcal{P} = 16\pi v^2 \rho_0 B \left[1 + \frac{4}{3(B^2 - 1)} - \frac{B}{2} \ln \frac{B+1}{B-1} \right]. \quad (\text{VIII.3.20})$$

Величина $\mathcal{P}$ находится по известной силе F и выражается через интеграл от $\rho_0 F$ по области, в которой $F \neq 0$. Например, для силы F (VIII.1.13), вызванной цилиндрическим пучком плоских волн с площадью поперечного сечения S

$$\mathcal{P} = \rho_0 \iint_S dz dy \int_0^\infty \alpha v_0^2 e^{-2zx} dx = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S. \quad (\text{VIII.3.21})$$

При $\mathcal{P} \rightarrow 0$ (импульс мал) постоянная B стремится к бесконечности, и для скорости потока получаются выражения

$$U_\theta = -\frac{\mathcal{P}}{8\pi v \rho_0} \frac{\sin \theta}{r}, \quad U_r = \frac{\mathcal{P}}{4\pi v \rho_0} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (\text{VIII.3.22})$$

В противоположном случае $\mathcal{P} \rightarrow \infty$, B стремится к единице: $B = 1 + \delta^2/2$, где $\delta^2 = 64 \pi v^2 \rho_0 / 3 \mathcal{P}$. Выражения U_r , U_θ принимают вид

$$U_\theta = -\frac{4v\theta}{\delta^2 + \theta^2}, \quad U_r = \frac{8v\delta^2}{(\delta^2 + \theta^2)^2} \quad (\text{VIII.3.23})$$

при малых значениях углов θ ($\theta \sim \delta$) и

$$U_\theta = -\frac{2v}{r} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad U_r = -\frac{2v}{r} \quad (\text{VIII.3.24})$$

при больших значениях θ ($\theta \sim 1$). Для нахождения линий тока необходимо проинтегрировать уравнение (VIII.3.8), записанное в сферических координатах: $dr/U_r = r d\theta/U_\theta$. Интегрирование дает следующий результат:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{B - \cos \theta} = \text{const}, \quad B > 1. \quad (\text{VIII.3.25})$$

Линии тока, построенные при помощи (VIII.3.25), изображены на рис. VIII.4. Несмотря на то, что полученное решение является точным, оно не дает исчерпывающего объяснения особенностям акустических течений при $R \gg 1$. Это связано прежде всего с весьма жестким ограничением на вид силы F (VIII.3.16) и со стационарным характером этого решения, не позволяющим рассматривать процессы установления.

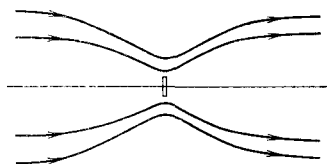


Рис. VIII.4. Линии тока для модели затопленной струи.

При изучении нестационарных акустических течений можно воспользоваться упрощенной моделью, справедливой для описания потоков вблизи оси звукового пучка [104] *). Пусть движение в системе обладает аксиальной симметрией. В отличие от эккартовской задачи, наличие стенок (трубы) здесь не является обязательным. Полная система уравнений для течения должна быть записана в цилиндрических координатах (VIII.2.1)—(VIII.2.3). Рассматривая течение вблизи оси ($r \rightarrow 0$), потребуем, чтобы при $r = 0$ выполнялись следующие условия (по существу, соотношения симметрии):

$$U_r|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_x}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (\text{VIII.3.26})$$

При этом уравнения (VIII.2.2), (VIII.2.3) приводят к очевидному соотношению $(\partial p / \partial r)_{r=0} = 0$, а уравнение (VIII.2.1) после раскрытия неопределенности $\partial U_x / r \partial r$

*) Нелинейные двумерные течения рассматривались также в работе [137].

принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = F(x) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}. \quad (\text{VIII.3.27})$$

Здесь и ниже U_x обозначается просто через U .

В случае малости радиуса звукового пучка по сравнению с поперечными размерами системы член $\partial p_0 / \partial x$ пренебрежимо мал и может быть положен равным нулю. Ограничиваясь, по существу, качественным рассмотрением проблемы, предположим, что решение исходной системы уравнений можно с достаточной степенью точности записать в виде $U(r, x, t) = f(r) U(x, t)$.

Будем нормировать функцию $f(r)$ так, чтобы выполнялось условие $f(0) = 1$. Заметив, что скорость потока на оси имеет максимум и обозначая $b^2 = -2f''(0)$, приведем (VIII.3.27) к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = F(x) + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - vb^2 U. \quad (\text{VIII.3.28})$$

Уравнение (VIII.3.28) является асимптотическим и справедливо только на оси звукового пучка. При отсутствии нелинейного члена $U \partial U / \partial x$ оно представляло бы собой обычное уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня с неравномерно распределенными источниками тепла, на боковой поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой.

Пусть значение гидродинамического числа Рейнольдса $R \ll 1$. Тогда нелинейным членом в уравнении (VIII.3.28) можно пренебречь. Примем силу, вызывающую поток, в виде

$$F(x) = Ae^{-\beta x}. \quad (\text{VIII.3.29})$$

Если она вызвана поглощением звука малой интенсивности, то константа $\beta = 2\chi$ (см. (VIII.1.13)). Для силы, вызванной звуком конечной амплитуды, значение β целесообразно подбирать на основе экспериментальных данных. Решение линеаризованного уравнения с учетом выражения

(VIII.3.29) имеет вид

$$U = \frac{A}{2} \int_0^t e^{-\nu(b^2 - \beta^2)\xi} \left\{ e^{-\beta x} \left[1 - \Phi \left(\beta \sqrt{\nu \xi} - \frac{x}{2 \sqrt{\nu \xi}} \right) \right] - \right. \\ \left. - e^{\beta x} \left[1 - \Phi \left(\beta \sqrt{\nu \xi} + \frac{x}{2 \sqrt{\nu \xi}} \right) \right] \right\} d\xi. \quad (\text{VIII.3.30})$$

Здесь $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$. Выражение (VIII.3.30) удовлетворяет нулевым граничным условиям $U(0, t) = U(\infty, t) = 0$ и начальному условию $U(x, 0) = 0$.

Процесс нарастания скорости акустического ветра, определяемый решением (VIII.3.30), носит сложный характер. Время установления стационарного течения определяется несколькими факторами и не сводится к простой формуле (VIII.2.22), справедливой для экартовской задачи. Так, при слабом поглощении звука ($\beta \rightarrow 0$) характерное время установления можно оценивать выражением $\tau_1 \sim 1/\nu b^2$ (напомним, что $1/b$ — размер поперечной неоднородности потока), а при сильном поглощении ($\beta \rightarrow \infty$) — выражением $\tau_2 \sim 1/\nu \beta^2$. Однако следует заметить, что оба механизма в решении (VIII.3.30) действуют одновременно и, кроме того, τ зависит от координаты x (поскольку в решение входит величина $\tau_3 \sim x^2/\nu$). Поэтому более точные оценки можно дать лишь с помощью численного расчета в каждом конкретном случае [105].

Покажем, что процесс установления скорости потока, определяемый выражением (VIII.3.30), является монотонным, т. е. $\partial U / \partial t > 0$ для любых значений x, t . Действительно, функция, стоящая под знаком интеграла в фигурных скобках, положительна при любых значениях ξ , поскольку производная по ξ от этой функции всегда отрицательна, тогда как сама функция положительна при $\xi = 0$ и стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Это и доказывает сделанное выше утверждение.

Переходя в формуле (VIII.3.30) к пределу при $t \rightarrow \infty$ или решая соответствующее стационарное уравнение

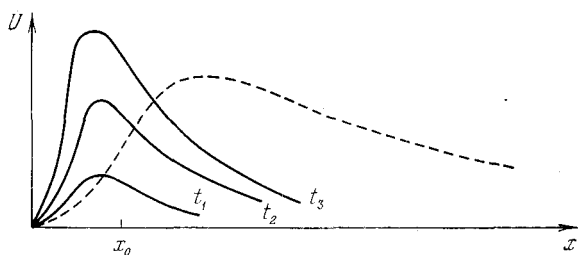
$$\nu \frac{d^2 U}{dx^2} - \nu b^2 U + A e^{-\beta x} = 0 \quad (\text{VIII.3.31})$$

с краевыми условиями $U(0) = 0$, $U(\infty) = 0$, получим выражение

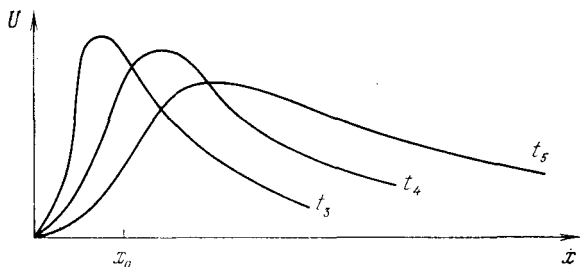
$$U = \frac{A}{v(b^2 - \beta^2)} (e^{-\beta x} - e^{-bx}), \quad (\text{VIII.3.32})$$

которое описывает распределение скорости установившегося течения вдоль оси x .

Как видно из формулы (VIII.3.32), при $\beta \gg b$ (случай сильно поглощающей среды) характер нарастания решения



a)



б)

Рис. VIII.5. Два этапа процесса установления скорости течения на оси звукового пучка.

при малых x определяется законом затухания звука, тогда как при больших значениях x экспоненциальный спад определяется характерным параметром b оттока импульса от оси системы. (Этот случай аналогичен модели «затопленной струи».) При обратном соотношении $\beta \ll b$, т. е. в случае слабо поглощающей среды, когда силы действуют на

всем протяжении звукового луча, мы имеем противоположную картину.

Пусть теперь гидродинамические числа Рейнольдса велики: $R \gg 1$. При больших R пренебрегать нелинейным членом нельзя и нужно рассматривать уравнение самого общего вида (VIII.3.28). Подчеркнем аналогию между уравнением (VIII.3.28) и уравнением Бюргерса (II.1.10).

Оно также описывает два конкурирующих процесса: во-первых, нарастание скорости потока и укрупнение профиля скорости (члены $F(x)$ и $U \partial U / \partial x$) и, во-вторых, процесс «диссипации», сглаживания профиля как за счет диффузии импульса от оси системы, так и за счет перераспределения импульса вдоль

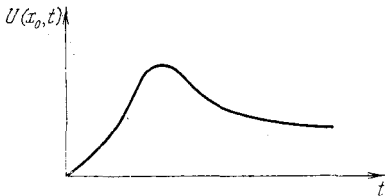


Рис. VIII.6. Кривая немонотонной зависимости скорости течения от времени.

оси (описываются соответственно членами $- \nu b^2 U$, $\nu \partial^2 U / \partial x^2$ в уравнении (VIII.3.28)).

Две вышеуказанные тенденции проиллюстрированы на рис. VIII.5, а, б. Если проследить за изменением скорости потока в некоторой фиксированной точке x_0 для различных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$, исходя из графиков VIII.5, а, б, то окажется, что процесс установления носит явно немонотонный характер. Кривая зависимости $U(x_0, t)$ (см. рис. VIII.6) содержит значительный выброс, и это качественно согласуется с результатами экспериментов [106, 107].

§ 4. Другие типы течений

Характерные размеры неоднородности потоков, рассматривавшихся в § 2, 3, определялись размерами L той области, в которой они возникали. Поскольку обычно L много больше длины звуковой волны λ , такие потоки называются крупномасштабными [6]. Существуют и другие типы течений, в которых размер неоднородностей определяется длиной волны λ (среднемасштабные) или толщиной

акустического пограничного слоя $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ (мелкомасштабные течения).

Характерный масштаб L , λ или δ входит в гидродинамическое число Рейнольдса R для соответствующего течения. Обычно $L \gg \lambda \gg \delta$ и при всех прочих фиксированных параметрах ν , U_0 для чисел R справедливо аналогичное неравенство $R_L \gg R_\lambda \gg R_\delta$. Это означает, что с уменьшением размеров неоднородности потока постепенно исчезает возможность появления нелинейных гидродинамических эффектов и все более правомерным становится применение линеаризованных уравнений.

Рассмотрим акустические течения в пограничном слое. В теории пограничного слоя предполагается, что вдали от стенки имеется основной поток жидкости, которую можно считать идеальной. На стенке же должны выполняться граничные условия прилипания ($U = 0$), и в тонком пограничном слое жидкость следует рассматривать как вязкую. Эти два потока непрерывным образом сшиваются.

Чтобы получить уравнения движения для акустических течений в пограничном слое, надо сделать ряд упрощений в общих уравнениях (VIII.1.3), (VIII.1.4). Предположим, что плоская граница обтекаемого тела совпадает с плоскостью x , z декартовой системы координат, причем ось x направлена параллельно основному обтекающему потоку; U_x , U_y от координаты z не зависят, т. е. движение является двумерным. Общие уравнения, записанные в компонентах, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + F_x, \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + F_y, \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.2})$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{VIII.4.3})$$

Вдоль направления y скорость заметно изменяется на расстояниях порядка δ . В направлении же оси x изменения более медленные — на расстояниях порядка l , где l — некоторая характерная длина. Если считать δ/l малым параметром ($\sim \mu$), то из (VIII.4.3) следует $U_y/U_x \sim \mu$.

Оставляя в уравнениях (VIII.4.1), (VIII.4.2) члены низших порядков малости по параметру μ , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + F_x, \quad -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} = F_y \end{aligned}$$

или, исключая отсюда переменную p_0 , к одному уравнению

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \int F_y dy + F_x, \quad (\text{VIII.4.4})$$

которое вместе с (VIII.4.3) позволяет определить компоненты скорости U_x, U_y при заданных F , начальном и граничных условиях. Сила F должна быть вычислена с помощью общей формулы (VIII.1.10) на основе решения для звуковой волны, которая касается стенки (т. е. колебательная скорость на границе обращается в нуль).

Однако предложенная схема является чересчур сложной (даже если пренебречь нелинейными членами в уравнении (VIII.4.4)), и поэтому при изучении течений в пограничном слое обычно используется метод последовательных приближений.

В качестве исходной системы уравнений здесь берут уравнения Навье — Стокса (VIII.1.1), (VIII.1.2), записав их для случая несжимаемой жидкости. С помощью простых оценок, уже сделанных выше, переходят к уравнениям для пограничного слоя:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{VIII.4.5})$$

$$p = p(x, t), \quad (\text{VIII.4.6})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{VIII.4.7})$$

Поскольку вдали от стенки жидкость считается идеальной и несжимаемой, а поток U является одномерным, для него имеет место интеграл движения $\partial\varphi/\partial t + U^2/2 + p/\rho_0 = \text{const}$ (см. [1]), где φ — потенциал скорости U . Дифференцируя это выражение по x , получим

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (\text{VIII.4.8})$$

Подставляя результат (VIII.4.8) в уравнение (VIII.4.5), приведем его к виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (\text{VIII.4.9})$$

Ищем решение уравнений (VIII.4.9), (VIII.4.7) методом последовательных приближений:

$$v_x = v_x^{(1)} + v_x^{(2)} + \dots, \quad v_y = v_y^{(1)} + v_y^{(2)} + \dots \quad (\text{VIII.4.10})$$

Величины первого порядка малости $v_x^{(1)}$, $v_y^{(1)}$ изменяются во времени периодически и представляют собой акустическое поле в линейном приближении. Постоянная составляющая — собственно акустическое течение — появляется лишь в членах второго порядка малости.

Поскольку представление (VIII.4.10) справедливо при $(v^{(2)}/v^{(1)}) \ll 1$, метод последовательных приближений пригоден только для очень медленных течений, скорость которых много меньше колебательной скорости в звуковой волне. Решение линейной задачи, описывающее стоячую волну, которая касается стенки, можно найти из уравнений первого приближения

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (\text{VIII.4.11})$$

$$\frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} = 0. \quad (\text{VIII.4.12})$$

Здесь $U = -v_0 \cos kx \cos \omega t$ — стоячая волна вдали от стенки.

Граничные условия: $v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0$, $v_x \rightarrow U$ при $y \rightarrow \infty$. Искомое решение при $\kappa = y/\delta$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_x^{(1)} &= -v_0 \cos kx [\cos \omega t - e^{-\kappa} \cos(\omega t - \kappa)], \\ v_y^{(1)} &= -v_0 k \delta \sin kx \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{e^{-\kappa}}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \kappa + \frac{\pi}{4}) \right], \quad (\text{VIII.4.13}) \end{aligned}$$

Укажем на недостаток метода: несмотря на то, что при описании волновых акустических движений среда принципиально должна быть сжимаемой, решение $v_x^{(1)}$, $v_y^{(1)}$ находится из уравнений (VIII.4.11), (VIII.4.12), пригодных

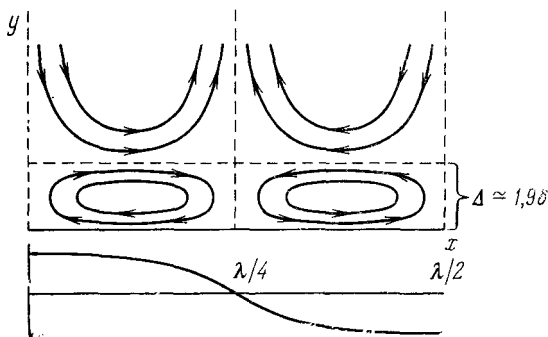


Рис. VIII.7. Линии тока течения в пограничном слое.

для описания течений вязкой несжимаемой жидкости. С помощью (VIII.4.13) вычисляется правая часть в стационарных $\partial v_x^{(2)}/\partial t = 0$ уравнениях второго приближения:

$$-\nu \frac{\partial^2 v_x^{(2)}}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - v_x^{(1)} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} - v_y^{(1)} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y}, \quad (\text{VIII.4.14})$$

$$\frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (\text{VIII.4.15})$$

которые позволяют определить искомую скорость течения

$$\begin{aligned} v_x^{(2)} &= -\frac{v_0^2}{4c_0} \sin 2kx \left[\frac{e^{-2\kappa}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \kappa) e^{-\kappa} \cos \kappa + (4 + \kappa) e^{-\kappa} \sin \kappa - \frac{3}{2} \right], \quad (\text{VIII.4.16}) \end{aligned}$$

$$\nu_y^{(2)} = -\frac{v_0^2}{2c_0} k\delta \cos 2kx \left[\frac{e^{-2\kappa}}{4} + \right. \\ \left. + 3e^{-\kappa} \cos \kappa + e^{-\kappa} (2 + \kappa) \sin \kappa + \frac{3}{2} \kappa - \frac{13}{4} \right].$$

Линии тока этого течения изображены на рис. VIII.7.

В настоящее время имеется много решенных задач, посвященных акустическим потокам в пограничном слое. Несмотря на большое число практических применений, теоретическое рассмотрение этих проблем в основном проводится методом последовательных приближений, о достоинствах и недостатках которого упоминалось выше. Поскольку задачи эти уже нашли отражение в прекрасных обзорах Зарембо [8] и Ниборга [9], их более подробное рассмотрение здесь не представляется целесообразным.

§ 5. Законы подобия и классификация акустических течений

Как известно из гидродинамики, два течения вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в поле внешних сил, являются геометрически подобными, если они обладают одинаковыми числами Рейнольдса (R) и Фруда (Fr). В силу полной математической аналогии указанный вывод должен быть распространен и на акустические течения.

Действительно, выполняя в уравнении (VIII.1.4) следующее преобразование переменных:

$$x = lx_1, \quad y = ly_1, \quad U = U_0 U_1, \quad (VIII.5.1)$$

$$t = \frac{l}{U_0} t_1, \quad \frac{p_0}{\rho_0} = U_0^2 \frac{p_1}{\rho_1}, \quad F = AF_1, \quad z = lz_1,$$

где l , U_0 , A — некоторые характерные для данной задачи постоянные, получим

$$\frac{\partial U_1}{\partial t_1} + (U_1 \nabla_1) U_1 - \frac{1}{R} \Delta_1 U_1 = -\frac{\nabla_1 p_1}{\rho_1} + \frac{1}{Fr} F_1. \quad (VIII.5.2)$$

Числа Рейнольдса и Фруда определяются выражениями

$$R = \frac{U_0 l}{\nu}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{Al}. \quad (VIII.5.3)$$

В отличие от классических задач гидродинамики, где обычно F имеет смысл константы g — ускорения силы тяжести, в акустических течениях F вызывается звуковой волной и в зависимости от геометрической формы области, размеров и формы звукового пучка, нелинейных эффектов, поглощения, дифракции и т. д. может принимать самые разнообразные значения.

Итак, поскольку F в общем случае является сложной функцией координат, весьма чувствительной к изменению условий эксперимента, числа Fr для различных типов акустических течений могут сильно различаться и это необходимо учитывать при воспроизведении адекватных экспериментальных моделей. Число Fr связано как с акустическими, так и с гидродинамическими параметрами. Используя, например, выражения (VIII.1.14), (VIII.1.16), можно представить соответствующие числа в виде [108]

$$Fr_1 = \frac{b}{\eta} \frac{2 (Re)^2}{R} \left(\frac{U_0}{v_0} \right)^3 \frac{1}{M}, \quad Fr_2 = \frac{b}{\eta} \frac{Re}{R} \left(\frac{U_0}{v_0} \right)^3 \frac{1}{M}. \quad (VIII.5.4)$$

Здесь $M = v_0/c_0$ — акустическое число Маха.

Законы подобия дают основание классифицировать акустические течения. Как уже неоднократно подчеркивалось, число R характеризует вклад нелинейных членов уравнений в поведение потоков. При малых R течения можно считать медленными и решать линейные уравнения. При больших R существенны нелинейные гидродинамические эффекты. Этот вывод не относится к эйлеровским (одномерным) течениям, так как там член $(U \nabla)U$ исчезает в силу выбора геометрии задачи (в гидродинамике эйлеровскому ветру отвечает известное течение Пуазейля).

При желании можно различать звуковой ветер по акустическим числам Рейнольдса, отношению скорости потока U_0 к колебательной скорости v_0 , по интенсивности звука, вводимого в среду, и т. д. Однако все эти параметры входят в число Fr , и поэтому полезно иметь в виду более общие соображения (VIII.5.2), (VIII.5.3).

Наконец, широко принята классификация акустических течений по их масштабам (см. § 4) и геометрической форме области, в которой они возникают.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

§ 1. Уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков

Во всех предыдущих главах рассматривались лишь одномерные — плоские, сферические и цилиндрические волны. Что же касается многомерных звуковых волн в нелинейных средах, то их изучение началось сравнительно недавно и число имеющихся публикаций на эту тему невелико [57, 109—112].

Дело не столько в неактуальности проблемы, напротив, в акустике длина волны намного больше длины электромагнитной волны той же частоты и, как правило, не слишком мала по сравнению с размерами источника звука. Учет дифракционных эффектов, следовательно, здесь принципиально необходим. Главной причиной отсутствия значительных результатов в этой области являются чрезвычайные математические трудности, с которыми приходится сталкиваться исследователям.

Настоящая глава является, по-видимому, первым обобщением результатов, посвященных ограниченному звуковым пучкам, и поэтому включает в себя довольно много оригинального материала.

Полная система уравнений, описывающих распространение возмущений конечной амплитуды в газе или жидкости без затухания, состоит из уравнений (В.1.1)—(В.1.3). Пусть ограниченный двумерный пучок распространяется вдоль оси x . Вектор скорости имеет две компоненты: v_x и

v_y ; поперечная компонента v_y связана с расхождением пучка. Представляя плотность ρ как $\rho_0 + \rho'$, приведем уравнения непрерывности и движения к следующей форме:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \rho' \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0, \quad (\text{IX.1.1})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (\text{IX.1.2})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}. \quad (\text{IX.1.3})$$

При рассмотрении различных задач будем задавать начальное возмущение при $x = 0$ в виде $\rho' = \psi(t, y)$. Считая среду полубесконечной в направлении x , ограничимся отысканием решений уравнений (IX.1.1)–(IX.1.3) (совместно с уравнением состояния) в виде бегущих вправо волн.

Как показано в гл. II, в случае плоских волн конечной амплитуды система гидродинамических уравнений имеет решения вида

$$v, p', \rho' = F\left(\mu x, t - \frac{x}{c_0}\right). \quad (\text{IX.1.4})$$

Ограниченность пучка совместно с нелинейностью приводят к медленным изменениям формы волны не только вдоль направления распространения, но и поперек. Поскольку переход в область тени происходит довольно резко, естественно предположить, что изменения всех величин поперек пучка происходят быстрее, чем вдоль, и искать решение уравнений (IX.1.1)–(IX.1.3) (предварительно исключив, как обычно, p' с помощью приближенного уравнения состояния $p' = c_0^2 \rho' + (\gamma - 1) c_0^2 \rho'^2 / 2\rho_0$) в виде

$$v, \rho' = F\left(\mu x, \sqrt{\mu} y, \tau = t - \frac{x}{c_0}\right). \quad (\text{IX.1.5})$$

В результате несложных преобразований получим с точностью до членов порядка μ^2 :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{v_x}{c_0} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\rho'}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (\text{IX.1.6})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{\rho'}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0^2} v_x \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad (\text{XI.1.7})$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0. \quad (\text{XI.1.8})$$

При выводе уравнений (IX.1.6)–(IX.1.8) предполагается, что поперечная компонента скорости v_y имеет порядок $\mu \sqrt{\mu}$, так как она связана с расходимостью пучка.

Уравнения (IX.1.6) и (IX.1.7), как нетрудно видеть, содержат малые члены первого порядка малости, стоящие слева, и малые члены второго порядка малости. Ограничиваясь малыми членами только первого порядка, можно получить известные линейные соотношения, выражающие возмущения скорости и плотности в виде функций друг от друга: $\rho' = \rho_0 v_x / c_0$, $v_x = c_0 \rho' / \rho_0$.

При распространении волн конечной амплитуды между v_x и ρ' должна существовать более сложная связь, и в эти простейшие соотношения войдут дополнительные члены второго порядка малости. Существование дополнительных членов первого порядка малости исключается, ибо в первом приближении задача в точности соответствует задаче распространения плоских волн бесконечно малой амплитуды.

Заметим, что левые части уравнений (IX.1.6), (IX.1.7) одинаковы, поэтому приравняем правые части уравнений, содержащие члены только второго порядка малости, и исключим v_x при помощи соотношения $v_x = c_0 \rho' / \rho_0$:

$$\frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\rho_0}{2c_0} \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{IX.1.9})$$

Из двух уравнений (IX.1.8), (IX.1.9) можно исключить переменную v_y и получить искомое уравнение для

переменной ρ' [57]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2}. \quad (\text{IX.1.10})$$

Как будет показано ниже, это уравнение учитывает одновременно и нелинейные искажения, и поперечные изменения возмущения, обусловленные дифракционной расходимостью. Поэтому можно утверждать, что оно описывает во втором приближении распространение ограниченных двумерных пучков в нелинейных средах без потерь.

В том случае, когда пучок является трехмерным, т. е. все три компоненты скорости — продольная v_x и две поперечные v_y и v_z (связанные с расходимостью пучка) — отличны от нуля, аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} \right). \quad (\text{IX.1.11})$$

Легко видеть, что правая часть содержит оператор Лапласа по поперечным координатам и ее можно символически представить в виде $\frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho'$. Если пучок обладает аксиальной симметрией, то удобно ввести одну поперечную координату $r = \sqrt{z^2 + y^2}$ и записать уравнение (IX.1.11) в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right). \quad (\text{IX.1.12})$$

К сожалению, в настоящее время не найдено сколь угодно интересных физически точных решений уравнений (IX.1.10) — (IX.1.12). Поэтому все дальнейшие разделы этой главы посвящены рассмотрению различных приближенных решений и предельных случаев.

§ 2. Параболическое уравнение. Некоторые задачи линейной теории дифракции

Если нелинейность среды проявляется гораздо слабее, чем дифракция, можно пренебречь нелинейными членами в уравнениях (IX.1.10), (IX.1.12) и рассматривать

соответствующие линейные уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau \partial x} = \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2}, \quad (\text{IX.2.1})$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau \partial x} = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right). \quad (\text{IX.2.2})$$

Покажем более строго, в каких случаях такой переход правомерен. Для этого введем безразмерные переменные $R = \rho'/\rho'_0$, $\sigma = \varepsilon \omega \rho'_0 x / c_0 \rho_0$, $\theta = \omega \tau$, $\xi = y/a$ (для плоского пучка) или $\xi = r/a$ (для аксиально-симметричного пучка). Здесь ρ'_0 , ω , a — некоторые характерные константы. Так, например, если начальное возмущение на границе (при $x = 0$) задано в виде $\rho' = \rho'_0 \exp(-r^2/a^2) \sin \omega \tau$, то ρ'_0 имеет смысл начальной амплитуды волны; ω — частоты и a — характерной ширины пучка гауссовой формы. В новых переменных уравнения (IX.1.10), (IX.1.12) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] = \frac{N}{4} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2}, \quad (\text{IX.2.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] = \frac{N}{4} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right). \quad (\text{IX.2.4})$$

Здесь

$$N = \frac{1}{2\pi^2 \varepsilon M} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \quad (\text{IX.2.5})$$

— число, характеризующее относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажение профиля волны [110]. Оно определяется в основном двумя величинами: отношением длины волны λ к ширине пучка a и числом Маха M . По смыслу число N аналогично акустическому числу Re^{-1} , учитывающему относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов.

При $N \rightarrow \infty$ преобладают дифракционные эффекты, и в полученных уравнениях можно пренебречь нелинейным членом $R \partial R / \partial \theta$.

Рассмотрим вначале задачу о распространении двумерного пучка, заданного на границе среды в виде плоской неоднородной волны:

$$R = e^{-\tau^2} \sin \theta. \quad (\text{IX.2.6})$$

Если искать решение соответствующего линейного уравнения в форме $R = \text{Im } A(\sigma, \xi) e^{i\theta}$, то для комплексной амплитуды A получим параболическое уравнение с мнимым коэффициентом диффузии [113]:

$$i \frac{\partial A}{\partial \sigma} = \frac{N}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}, \quad (\text{IX.2.7})$$

которое просто решается с помощью метода разделения переменных. Записав частное решение уравнения (IX.2.7) в виде $A(\sigma, \xi) = \Sigma(\sigma) \cdot \Xi(\xi)$, подставим это выражение в (IX.2.7) и после разделения переменных придем к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Xi'' + n^2 \Xi = 0, \quad i \Sigma' + \frac{N}{4} n^2 \Sigma = 0. \quad (\text{IX.2.8})$$

Они имеют следующие решения:

$$\Xi = A(n) \cos n\xi + B(n) \sin n\xi, \quad \Sigma = e^{in^2 \frac{N}{4} \sigma}. \quad (\text{IX.2.9})$$

Поскольку уравнение (IX.2.7) линейно, а n — произвольный параметр, для удовлетворения начальному условию: при $\sigma = 0$ $A = e^{-\xi^2}$ сконструируем решение этого уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений:

$$A = \int_0^\infty [A(n) \cos n\xi + B(n) \sin n\xi] e^{in^2 \frac{N}{4} \sigma} dn. \quad (\text{IX.2.10})$$

Коэффициенты $A(n)$, $B(n)$ однозначно определяются из условия на границе:

$$e^{-\xi^2} = \int_0^\infty [A(n) \cos n\xi + B(n) \sin n\xi] dn. \quad (\text{IX.2.11})$$

Поскольку левая часть (IX.2.11) есть функция четная, $B(n) = 0$. Коэффициент $A(n)$ можно найти, воспользовавшись обратным косинус-преобразованием Фурье от начального условия для амплитуды $A(0, \xi)$:

$$e^{-\xi^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-n^2/4}}{\sqrt{\pi}} \cos n\xi dn. \quad (\text{IX.2.12})$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (IX.2.11), найдем

$$A(n) = \frac{e^{-n^2/4}}{\sqrt{\pi}}. \quad (\text{IX.2.13})$$

Теперь достаточно взять интеграл (IX.2.10) и вернуться к действительным переменным, чтобы получить искомое решение

$$R = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{1+N^2\sigma^2}}}{\sqrt[4]{1+N^2\sigma^2}} \sin \left[\theta - \xi^2 \frac{N\sigma}{1+N^2\sigma^2} + \frac{1}{2} \arctg N\sigma \right]. \quad (\text{IX.2.14})$$

Формула (IX.2.14) описывает постепенный переход от плоской (при $N\sigma = 0$) к цилиндрической расходящейся волне (при $N\sigma \rightarrow \infty$).

Как легко видеть, дифракция приводит к увеличению ширины пучка: $a(\sigma) = a \sqrt{1 + N^2\sigma^2}$, уменьшению амплитуды волны: $\rho_0(\sigma) = \rho_0 / \sqrt[4]{1 + N^2\sigma^2}$ и искривлению поверхностей равной фазы.

Аналогичная задача для аксиально-симметричного трехмерного пучка может быть решена точно таким же образом. Отличие состоит лишь в том, что решение, удовлетворяющее начальному условию (IX.2.6), вместо (IX.2.10) ищется в следующем виде:

$$A = \int_0^\infty c(n) J_0(n\xi) e^{in^2 \frac{N}{4} \sigma} dn, \quad (\text{IX.2.15})$$

а константа $c(n)$ определяется из сравнения этой формулы взятой при $\sigma = 0$, с обратным преобразованием Ханкеля от функции e^{-z^2} :

$$e^{-\xi^2} = \int_0^\infty \frac{n}{2} e^{-n^2/4} J_0(n\xi) dn. \quad (\text{IX.2.16})$$

В результате всех вычислений придем к выражению

$$R = \frac{\exp[-\xi^2/(1+N^2\sigma^2)]}{\sqrt{1+N^2\sigma^2}} \sin \left(\theta - \xi^2 \frac{N\sigma}{1+N^2\sigma^2} + \arctg N\sigma \right), \quad (\text{IX.2.17})$$

описывающему превращение плоской волны в сферическую расходящуюся. Этот процесс изображен на рис. IX.1. Штриховыми линиями отмечены поверхности равной фазы, сплошными — равной амплитуды (по отношению к максимальной в данном сечении).

Сопоставляя полученные решения (IX.2.14), (IX.2.17), можно заметить, что степень дифракционного искажения

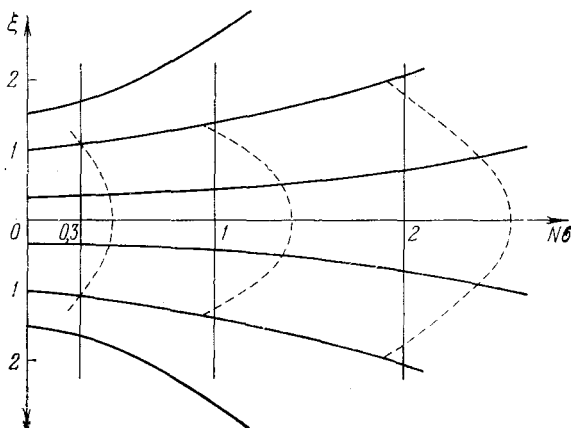


Рис. IX.1. Дифракционное превращение плоской волны в сферическую расходящуюся.

волн зависит только от одной переменной — безразмерного расстояния $N\sigma$. Поэтому удобно обозначить

$$\delta = N\sigma = \frac{\lambda x}{\pi a^2}. \quad (\text{IX.2.18})$$

Расстояние $\delta = \delta_{\text{расх}} = 1$ условно будем считать длиной пути, на котором исходная плоская волна превращается в расходящуюся. Поскольку для другой безразмерной координаты σ значение $\sigma_p = 1$ соответствует длине пути формирования разрыва, числу N можно придать следующий смысл:

$$N = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{x_p}{x_{\text{расх}}}. \quad (\text{IX.2.19})$$

Таким образом, если $x_p \gg x_{\text{расх}}$ (т. е. расстояние, на котором в волне мог бы сформироваться разрыв, гораздо больше, чем длина пути, на котором волна становится расходящейся), то $N \gg 1$ и справедливо линейное приближение. Напротив, если выполнено обратное неравенство $x_p \ll x_{\text{расх}}$, то $N \ll 1$, дифракция волны сказывается мало и преобладают нелинейные эффекты.

§ 3. Нелинейные эффекты в звуковых пучках

Этот параграф посвящен анализу решений, полученных с помощью уравнений (IX.2.3), (IX.2.4) в предельном случае $N \rightarrow 0$ [111]. Как уже отмечалось, при $N = 0$ доминируют нелинейные эффекты. В уравнениях можно пренебречь правой частью и получить решение (с начальным условием (IX.2.6)) в виде римановской волны второго (по числу Маха) приближения:

$$R = e^{-\xi^2} \sin(\theta + \sigma R). \quad (\text{IX.3.1})$$

Последнее выражение удобно разложить в ряд Фурье по $\sin n\theta$, как это делалось при выводе решения в форме Бесселя — Фубини (гл. I, § 5):

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma e^{-\xi^2})}{n\sigma} \sin n\theta. \quad (\text{IX.3.2})$$

Разложение (IX.3.2) позволяет проследить за эволюцией профилей радиального распределения амплитуд всех гармоник при различных значениях σ . Результаты для первой и второй гармоник изображены на рис. IX.2, а, б. Ширина пучка a_n n -й гармоники (по уровню e^{-1} от максимального значения) определяется из трансцендентного уравнения $J_n(n\sigma e^{-\xi^2}) = e^{-1} J_n(n\sigma)$ и при малых σ равна

$$a_n = a/\sqrt{n}, \quad (\text{IX.3.3})$$

т. е. чем выше номер гармоники, тем в более узкой приосевой области она локализована. Заметим, что a_n , вообще говоря, зависят от σ . Зато ширина пучка средней по времени энергии единицы объема среды $\bar{E} = \rho_0 \bar{v}^2 = \rho_0 v_0^2 \bar{R}$ не изменяется. Это можно показать, воспользовавшись

выражением (IX.3.1):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\rho_0 v_0^2}{2\pi} e^{-2\xi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta + \sigma R) d\theta = \\ &= \frac{\rho_0 v_0^2}{2\pi} e^{-2\xi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \eta (1 - \sigma e^{-\xi^2} \cos \eta) d\eta = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} e^{-2\xi^2}. \quad (\text{IX.3.4}) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при любых σ вплоть до образования разрыва (в области применимости решения (IX.3.1)) ширина

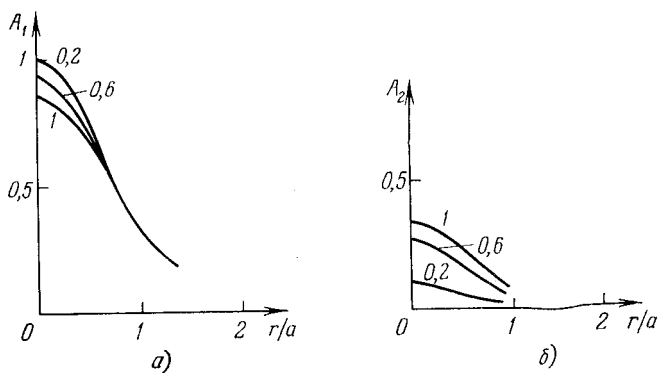


Рис. IX.2. Эволюция профилей радиального распределения амплитуд первой и второй гармоник при различных значениях σ .

пучка энергии остается постоянной. Это связано, во-первых, с тем, что среды в акустике являются недиспергирующими и скорость звука зависит от мгновенных значений величины возмущения. Во-вторых, основной в акустике является квадратичная нелинейность (как известно из нелинейной оптики [114], самофокусировка или дефокусировка пучков возможны в средах с кубичной нелинейностью). Вывод о невозможности самовоздействия за счет обычного нелинейного механизма справедлив только для периодического сигнала. В то же время однополярные импульсы, локализованные в пространстве в виде пучков, могут расплываться или сужаться (это будет показано в

§ 5 настоящей главы) при распространении в нелинейной среде.

Рассмотрим теперь, как изменяется ширина пучка энергии после того, как в волне образуется разрыв. Расстояние σ_p образования разрыва можно определить с помощью решения (IX.3.1). Поскольку волна искажается симметричным образом, фронт проходит в точке $\theta = 0$ и амплитуда разрыва R_p определяется из условия $R_p = e^{-\xi^2} \sin \sigma R_p$.

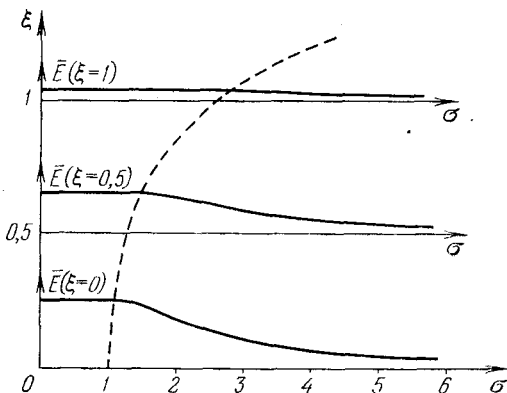


Рис. IX.3. Зависимость от σ энергии единицы объема среды при различных ξ . Штриховой кривой изображена функция $\sigma_p = \exp(\xi^2)$.

Таким образом, разрыв начинает образовываться при $R_p \approx \approx 0$, т. е. на расстоянии

$$\sigma_p = e^{\xi^2}. \quad (\text{IX.3.5})$$

Длина σ_p существенно зависит от ξ , а именно чем дальше от оси, тем позже формируется разрыв. На рис. IX.3 штриховой линией построена кривая $\sigma = \exp(\xi^2)$, а сплошными кривыми показана зависимость от σ энергии единицы объема среды (при различных ξ). Поскольку вблизи оси ударная волна формируется раньше (при $\sigma = 1$), начинается ее интенсивное затухание, приводящее к уменьшению средней энергии $\bar{E}$. В то же время в более удаленных от оси областях разрыв еще не образовался, и $\bar{E} = \text{const}$. Таким

образом, происходит деформация профиля радиального распределения $\bar{E}(\xi)$. Как показано на рис. IX.4, более сильное затухание в приосевой области приводит к увеличению ширины пучка энергии, и волна постепенно превращается в плоскую волну малой амплитуды — радиальное распределение становится более однородным *).

§ 4. Приближенные решения при больших и малых числах N

В том случае, когда N велико, нелинейность учесть довольно просто. Для этого нужно отыскать второе приближение по малому параметру $1/N$ в решении уравнения (IX.2.4), используя в качестве первого приближения выражение (IX.2.17). Вводя новую безразмерную координату $\delta = N\sigma$, запишем уравнение второго приближения в виде

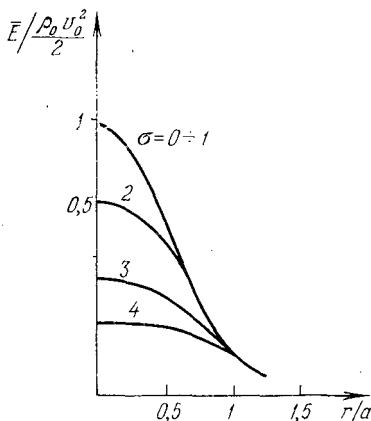


Рис. IX.4. Деформация профиля радиального распределения в области после образования разрыва.

$$\frac{\partial^2 R^{(2)}}{\partial \theta \partial \delta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 R^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R^{(2)}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 R^{(1)^2}}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-\frac{2\xi^2}{1+\delta^2}}}{1+\delta^2} \cos 2 \left(\theta - \xi^2 \frac{\delta}{1+\delta^2} + \arctg \delta \right). \quad (\text{IX.4.1})$$

Для отыскания решения уравнения (IX.4.1) удобно представить его правую часть в комплексной форме. Затем аналогично тому, как это делалось при отыскании первого приближения с подстановкой $R^{(2)} = (1/N) A^{(2)} e^{i2\theta}$, надо перейти к уравнению для комплексной амплитуды — теперь уже второй гармоники. В результате получим

*) Это явление наблюдалось экспериментально [138].

неоднородное уравнение диффузии

$$2i \frac{\partial A^{(2)}}{\partial \delta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 A^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial A^{(2)}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{1 + \delta^2} \exp \left[-2\xi^2 \frac{1 + i\delta}{1 + \delta^2} + i2\arctg \delta \right]. \quad (\text{IX.4.2})$$

Решая уравнение (IX.4.2) с условием на границе: при $\delta = 0$ $A^{(2)} = 0$ и возвращаясь к $R^{(2)}$, найдем [111]

$$R^{(2)} = \frac{\exp [-2\xi^2/(1 + \delta^2)]}{4N} \frac{\sqrt{\ln^2(1 + \delta^2) + 4\arctg^2 \delta}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \times \quad (\text{IX.4.3})$$

$$\times \cos 2 \left[\theta - \xi^2 \frac{\delta}{1 + \delta^2} + \frac{1}{2} \arctg \delta - \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\arctg \delta}{\ln(1 + \delta^2)} \right) \right].$$

Таким образом, при больших значениях N решение уравнения (IX.2.4) находится с помощью метода последовательных приближений. С точностью до членов порядка

$1/N^2$ оно имеет вид $R = R^{(1)} + R^{(2)}$, где $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ даются соответственно выражениями (IX.2.17) и (IX.4.3).

Перейдем к физическому анализу полученного результата. Как видно из формулы (IX.4.3), генерация второй гармоники в ограниченном пучке происходит существенно иначе, чем в плоской волне. На рис. IX.5 изображена

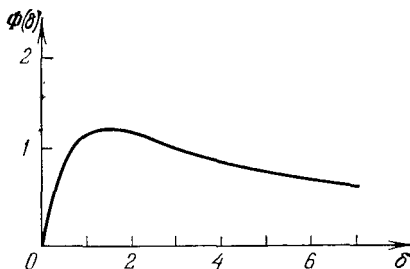


Рис. IX.5. Изменение амплитуды второй гармоники на оси пучка.

функция $\Phi(\delta) = \{\ln^2(1 + \delta^2) + 4\arctg^2 \delta\}/(1 + \delta^2)^{1/2}$, определяющая изменение амплитуды второй гармоники на оси звукового пучка. Вначале (при малых δ) амплитуда нарастает по линейному закону, как и в плоской волне. Однако в дальнейшем дифракция приводит к стабилизации, а затем и к уменьшению амплитуды. Следует отметить, что имеется некоторое сходство между кривой на рис. IX.5 и кривой, иллюстрирующей поведение амплитуды второй гармоники в нелинейной среде с диссипацией (см. рис. II.1). Эта аналогия, однако, является чисто внеш-

ней, поскольку дифракция, в отличие от процессов диссипации, не может составить конкуренции нелинейному искажению профиля волны и при достаточно больших σ решение становится разрывным. Как известно, в методе последовательных приближений расстояние образования разрыва определяется из условия $|A^{(2)}|/|A^{(1)}| = 1/2$ или, в нашем случае,

$$\frac{1}{4N} e^{-\frac{\xi^2}{1+\delta^2}} \sqrt{\ln^2(1+\delta^2) + \arctg^2 \delta} = \frac{1}{2}. \quad (\text{IX.4.4})$$

Поскольку $N \gg 1$, то и $\delta_p = N\sigma_p \gg 1$ и формула (IX.4.4) приводит к простому соотношению $\sigma_p = e^N/N$. Сравнивая выражения (IX.2.17) и (IX.4.3), можно заметить, что ширина пучка второй гармоники:

$$a_2(\delta) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\delta^2} \quad (\text{IX.4.5})$$

увеличивается пропорционально ширине пучка основной частоты, оставаясь при всех δ в $\sqrt{2}$ раз меньше по величине. Отсюда видно, что генерация гармоники интенсивнее всего идет вблизи оси звукового пучка.

В другом, наиболее интересном предельном случае малых чисел N , нелинейность сказывается сильно и решение должно, по-видимому, слабо отличаться от римановского (IX.3.1).

Будем искать это асимптотическое (при $N \rightarrow 0$) решение уравнения (IX.2.4). Предварительно преобразуем последнее, перейдя к новым независимым переменным

$$\sigma = \sigma, \quad \xi = \xi, \quad T = \theta + \sigma R. \quad (\text{IX.4.6})$$

Уравнение примет вид

$$\begin{aligned} R_{\sigma T} + \sigma(R_{\sigma} R_{TT} - R_T R_{\sigma T}) = \\ = \frac{N}{4} \left(R_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} R_{\xi} \right) + \frac{\sigma N}{2} \left(R_{\xi} R_{\xi T} - R_T R_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi} R_T R_{\xi} \right) + \\ + \frac{\sigma^2 N}{4} \left(R_{TT} R_{\xi}^2 + R_T^2 R_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} R_T^2 R_{\xi} - 2R_T R_{\xi} R_{\xi T} \right). \end{aligned} \quad (\text{IX.4.7})$$

При $N = 0$ приходим к порождающему уравнению

$$R_{\sigma T} + \sigma(R_{\sigma} R_{TT} - R_T R_{\sigma T}) = 0 \quad (\text{IX.4.8})$$

которое в переменных (IX.4.6) имеет простое решение

$$R = A(\xi) \sin [T + S(\xi)]. \quad (\text{IX.4.9})$$

Отправляясь от (IX.4.8), (IX.4.9), будем искать решение уравнения (IX.4.7) в виде

$$R = A \sin \psi + \frac{N\sigma^2}{2} [D \sin 2\psi + E \cos 2\psi] + \frac{N\sigma^3}{3} C \cos \psi. \quad (\text{IX.4.10})$$

Здесь $\psi = T + S$; A, D, S, E, C — искомые функции двух переменных $\delta = N\sigma, \xi$.

Сохраняя при всех преобразованиях члены, содержащие множитель N не выше чем в первой степени; подставим значения производных, вычисленных на основе (IX.4.10), в уравнение (IX.4.7). В силу выбранного специального вида решения (IX.4.10) члены при N^0 отсутствуют, и все сохранные в уравнении члены имеют порядок малости N . Собирая выражения, стоящие при множителях $\sigma^0 \sin \psi$, $\sigma^0 \cos \psi$, $\sigma \sin 2\psi$, $\sigma \cos 2\psi$, постоянной составляющей, $\sigma^2 \sin \psi$, $\sigma^2 \cos \psi$, $\sigma^2 \sin 3\psi$, $\sigma^2 \cos 3\psi$, получим девять уравнений, из которых независимыми оказываются только пять. Заметим, что члены при σ^3 также сокращаются в силу специального вида решения (IX.4.10).

Итак, имеем пять независимых уравнений для пяти переменных A, S, D, E, C :

$$A_\delta = \frac{A}{4} \left(S_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} S_\xi \right) + \frac{1}{2} A_\xi S_\xi, \quad (\text{IX.4.11})$$

$$S_\delta - \frac{S_\xi^2}{4} = -\frac{1}{4A} \left(A_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} A_\xi \right), \quad (\text{IX.4.12})$$

$$E = \frac{A}{8} \left(A_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} A_\xi \right) - \frac{1}{8} A_\xi^2, \quad (\text{IX.4.13})$$

$$D = -\frac{A^2}{8} \left(S_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} S_\xi \right), \quad (\text{IX.4.14})$$

$$C = \frac{A^2}{8} \left(A_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} A_\xi \right) + \frac{1}{8} A A_\xi^2. \quad (\text{IX.4.15})$$

Уравнения (IX.4.11), (IX.4.12) связаны и имеют в точности такой же вид, как и для линеаризованного уравнения (IX.2.4), если решение последнего искать в виде

$R = A \sin(\theta + S)$. Поэтому их решениями, как легко проверить, являются выражения для амплитуды и фазы, взятые из формулы (IX.2.17):

$$A = \frac{\exp[-\xi^2/(1+\delta^2)]}{\sqrt{1+\delta^2}}, \quad S = -\xi^2 \frac{\delta}{1+\delta^2} + \arctg \delta. \quad (\text{IX.4.16})$$

Уравнения (IX.4.13)–(IX.4.15) позволяют вычислить E , D , C по известным значениям A , S :

$$E = -\frac{\exp[-2\xi^2/(1+\delta^2)]}{2(1+\delta^2)^2}, \quad D = \frac{\delta \exp[-2\xi^2/(1+\delta^2)]}{2(1+\delta^2)^2},$$

$$C = -\left(1 - \frac{2\xi^2}{1+\delta^2}\right) \frac{\exp[-3\xi^2/(1+\delta^2)]}{2(1+\delta^2)^{3/2}}. \quad (\text{IX.4.17})$$

Таким образом, задача решена с точностью до членов, содержащих множитель N^2 . Выражение для R при небольших N действительно слабо отличается от формулы (IX.3.1).

Проанализируем теперь более точное решение (IX.4.10), (IX.4.16), (IX.4.17). Вычисление величины $\bar{R}^2$ вполне аналогично по схеме тем операциям, которые привели к выражению (IX.3.4). Опуская выкладки, запишем окончательную формулу для $\bar{E}$:

$$\bar{E} = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \frac{\exp[-2\xi^2/(1+N^2\sigma^2)]}{1+N^2\sigma^2} + O(N^2). \quad (\text{IX.4.18})$$

Существенно, что это выражение не содержит членов порядка N . Изменение ширины пучка энергии происходит только вследствие дифракции — ширина пучка растет. Несмотря на наличие нелинейных членов в выражении для R , формула (IX.4.18) имеет в точности такой же вид, как и в линейном приближении.

Аналогичным образом можно показать, что величина $\bar{R}$ равна нулю также с точностью до членов порядка N^2 . Это означает, что, несмотря на деформацию профиля первоначально гармонической волны, площади ее положительного и отрицательного полупериодов равны, т. е. профиль постоянной составляющей не содержит.

В заключение отметим, что все полученные в настоящей главе результаты справедливы только для бесконечно больших акустических чисел Рейнольдса Re . Удержание диссипативных членов в уравнениях (IX.2.3), (IX.2.4), как известно, при $N = 0$ позволяет учесть конечность ширины фронта ударной волны и описать процесс его рассасывания. Одновременный учет диссипативных процессов и дифракции, возможный на основе решения более общего уравнения [115]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho', \quad (\text{IX.4.19})$$

может дать дополнительные сведения об особенностях формирования и рассасывания фронтов в квазиплоских ограниченных пучках звуковых волн конечной амплитуды.

§ 5. Нелинейная геометрическая акустика.

Искажение однополярных возмущений

Вопросы, сформулированные в названии этого параграфа, наиболее подробно рассматривались в работе [112]. Соответствующие материалы можно отыскать также и в статьях [57, 109]. В своем изложении мы будем главным образом следовать работе [112], но дадим несколько менее громоздкий вывод основных уравнений.

Для перехода к приближению нелинейной геометрической акустики удобно в исходном уравнении (IX.1.12) совершить замену переменных. Считая τ новой независимой переменной:

$$\tau = S(x, r, \rho') \quad (\text{IX.5.1})$$

и дифференцируя выражение $\tau = S(x, r, \rho')(x, r, \tau)$ для вычисления производных, входящих в (IX.1.12), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\frac{\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho'}{\frac{\partial S}{\partial \rho'}} \right] = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right).$$

$$(\text{IX.5.2})$$

Как нетрудно убедиться, выражения

$$S_1 = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} x \rho', \quad (\text{IX.5.3})$$

$$S_2 = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} x \ln \frac{x}{x_0} \rho' + \frac{r^2}{2 c_0 x} \quad (\text{IX.5.4})$$

являются точными решениями уравнения (IX.5.2), а следовательно, и исходного уравнения (IX.1.12). Ценность этих решений состоит в том, что они представляют собой фазы плоской и сферической волн, распространяющихся в нелинейной среде. Однако сами по себе точные формулы (IX.5.3), (IX.5.4) мало интересны. Для отыскания более интересных решений, описывающих поведение различных начальных возмущений, целесообразно, отправляясь от (IX.5.3), (IX.5.4), искать приближенные решения в виде

$$S_1 = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} x \rho' + \frac{1}{\omega} F_1(x, r, \rho'), \quad (\text{IX.5.5})$$

$$S_2 = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} x \ln \frac{x}{x_0} \rho' + \frac{r^2}{2 c_0 x} + \frac{1}{\omega} F_2(x, r, \rho'). \quad (\text{IX.5.6})$$

Подставляя эти выражения в уравнение (IX.5.2) и пренебрегая членами, нелинейными по F , получим

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial \rho'} + \frac{\varepsilon x}{2 \rho_0} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (\text{IX.5.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial \rho'} + \frac{r}{x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \rho'} - \frac{\rho'}{x} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial F_2}{\partial \rho'} \right) + \\ + \frac{\varepsilon x \ln \frac{x}{x_0}}{2 \rho_0} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{IX.5.8}) \end{aligned}$$

Совершив переход к линейным уравнениям, мы тем самым ограничились рамками геометрической акустики, что справедливо для достаточно больших радиусов пучка по сравнению с длиной волны. Дифракционные эффекты при этом выпадают, так как они описываются членами, квадратичными и кубичными по F . Таким образом, предполагается, что поперечные изменения, обусловленные нелинейными свойствами среды, превосходят дифракционные эффекты. Несмотря на проведенные упрощения, урав-

нения (IX.5.7), (IX.5.8) остаются достаточно сложными, но они уже могут быть решены в ряде представляющих интерес случаев.

Рассмотрим вначале решение уравнения (IX.5.7) для квазиплоской волны. С помощью замены переменных

$$p = \rho' + \beta x^2, \quad q = \rho' - \beta x^2, \quad \xi = 2 \sqrt{\frac{\beta \rho_0}{\varepsilon}} r, \quad (\text{IX.5.9})$$

где β — коэффициент, имеющий размерность $[\rho/l^2]$, (IX.5.7) приводится к гиперболическому уравнению вида

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^2} = 0. \quad (\text{IX.5.10})$$

Однако решить общую задачу для линейного гиперболического уравнения (IX.5.10) с произвольными граничными условиями не удастся, так как в результате замены (IX.5.1) граничные условия для функции F становятся неоднозначными. Поэтому построим частное решение уравнения (IX.5.10). Вводя новую переменную $Q = \sqrt{p^2 + \xi^2}$, представим (IX.5.10) в виде

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q^2} + \frac{2}{Q} \frac{\partial F_1}{\partial Q} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^2} = 0. \quad (\text{IX.5.11})$$

Выбор переменной Q в виде определенной комбинации переменных p и ξ существенно сужает класс решений уравнения (IX.5.10).

Решение уравнения (IX.5.11) может быть представлено в виде

$$F_1 = \frac{1}{Q} \Phi_1(Q + q). \quad (\text{IX.5.12})$$

Здесь Φ_1 — произвольная функция аргумента $Q + q$. Полагая Φ_1 равной $1/2 (Q + q) \Phi(Q + q)$, где Φ — другая произвольная функция, и возвращаясь к прежним переменным, получим

$$F_1 = \frac{\sqrt{(\rho' + \beta x^2)^2 + \frac{4\beta\rho_0}{\varepsilon} r^2 + (\rho' - \beta x^2)}}{2 \sqrt{(\rho' + \beta x^2)^2 + \frac{4\beta\rho_0}{\varepsilon} r^2}} \times \\ \times \Phi \left[\sqrt{(\rho' + \beta x^2)^2 + \frac{4\beta\rho_0}{\varepsilon} r^2} + (\rho' - \beta x^2) \right]. \quad (\text{IX.5.13})$$

Для анализа выражения (IX.5.13) выберем функцию Φ в виде, представленном на рис. IX.6. По оси абсцисс отложен весь аргумент функции Φ :

$$\eta = \sqrt{(\rho' + \beta x^2)^2 + \frac{4\beta\rho_0}{\varepsilon} r^2} + (\rho' - \beta x^2).$$

Функция Φ определена до значений η , равных A . С ростом x и r значения ρ' , при которых Φ отлична от

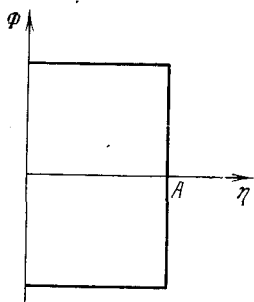


Рис. IX.6. График функции $\Phi(\eta)$.

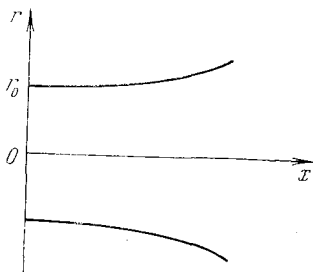


Рис. IX.7. Нелинейная рефракция импульса сжатия.

нуля, уменьшаются от $\rho'_{\max} = A/2$ (при $x = 0$ и $r = 0$) до нуля при x и r , связанных соотношением

$$r = \rho'_{\max} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta\rho_0} \left(1 + \frac{\beta x^2}{\rho'_{\max}}\right)}. \quad (\text{IX.5.14})$$

Определяя коэффициент β через полуширину пучка r_0 на границе нелинейной среды:

$$\beta = \frac{\varepsilon \rho'^2_{\max}}{\rho_0 r_0^2}, \quad (\text{IX.5.15})$$

получим выражение для ширины пучка:

$$r = \pm r_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon \rho'_{\max}}{\rho_0 r_0^2} x^2}. \quad (\text{IX.5.16})$$

Выражение (IX.5.16) показывает, что импульс сжатия, локализованный в пространстве в виде пучка, по мере распространения расплывается. Этот факт известен в геометрической акустике как нелинейная рефракция лучей. Зависимость ширины пучка от пройденного расстояния представлена на рис. IX.7.

При $r_0 \rightarrow \infty$ величина β стремится к нулю, и выражение (IX.5.13) переходит в решение Римана для плоской волны: $F_1 = \Phi(\rho')$.

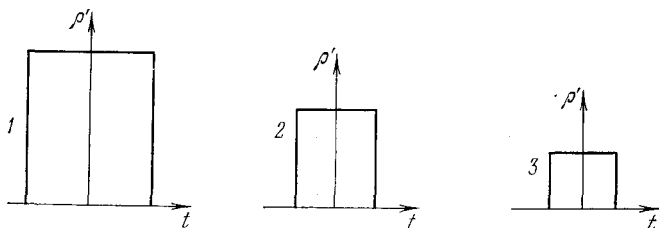


Рис. IX.8. Форма импульса $\rho'(t)$ на границе нелинейной среды при различных значениях r .

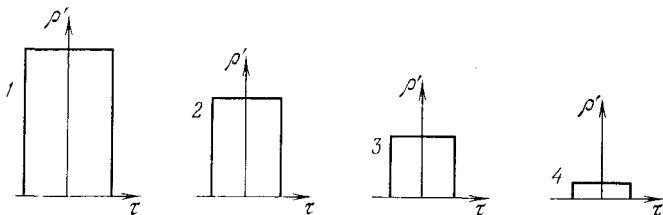


Рис. IX.9. Зависимость $\rho'(\tau)$ на некотором расстоянии $x_1 > 0$ от границы среды в разных точках поперечного сечения.

На рис. IX.8, IX.9, IX.10 представлены зависимости $\rho'(\tau)$ при различных значениях x в разных точках поперечного сечения r . Рис. IX.8 изображает форму импульса $\rho'(t)$ на границе нелинейной среды ($x=0$) при различных значениях r : $r=0$ — кривая 1, $r=r_1 > 0$ — кривая 2 и $r=r_2 > r_1$ — кривая 3. С увеличением поперечной координаты «амплитуда» импульса уменьшается по параболическому закону:

$$\rho' = \rho'_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (\text{IX.5.17})$$

Кроме того, к краям пучка несколько сокращается длительность импульса.

На рис. IX.9 показана зависимость $\rho'(\tau)$ на некотором расстоянии $x_1 > 0$ от границы нелинейной среды в различных точках поперечного сечения: кривая 1 соответствует значению $r = 0$, кривая 2 — $r = r_1$, кривая 3 — $r = r_2$, кривая 4 — $r = r_3$; $r_3 > r_2$ (значения r_1 и r_2 те же самые, что и на рис. IX.8).

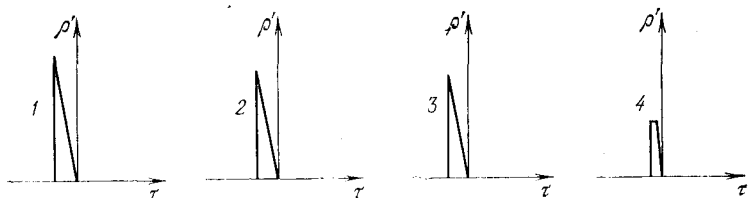


Рис. IX.10. Форма импульса на расстояниях $x_2 \gg x_1$.

Форма импульса на расстояниях $x_2 \gg x_1$ представлена на рис. IX.10. Поперечная координата принимает здесь следующие значения $r = 0$ (кривая 1), $r = r_1$ (кривая 2), $r = r_3$ (кривая 3) и $r = r_4$ (кривая 4).

Проведенное построение показывает, что квази плоский импульс сжатия с «амплитудой», спадающей к краям пучка, при распространении становится расходящимся: центральные точки уходят вперед, а периферийные отстают. Кроме того,

имеет место сокращение длительности импульса, так как передний его фронт движется с меньшей скоростью, чем задний.

Причиной этому является пространственная расхожимость импульса; зависимость ρ' от x качественно изображена на рис. IX.11. Сжатие импульса во времени определяется множителем, стоящим перед произвольной функцией в выражении (IX.5.13). На оси пучка, т. е. при $r = 0$, выражение (IX.5.13)

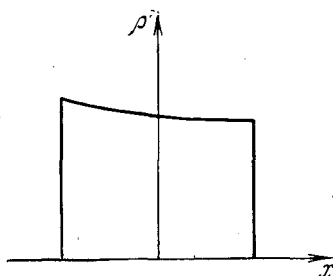


Рис. IX.11. Качественная зависимость ρ' от x .

принимает вид

$$F_1 = \frac{\rho'}{\rho' + \frac{\varepsilon \rho_{\max}'^2 x^2}{\rho_0 r_0^2}} \Phi(\rho'). \quad (\text{IX.5.18})$$

При $x \neq 0$ множитель перед функцией Φ меньше единицы. С ростом x этот множитель уменьшается, что и означает сокращение длительности импульса по мере распространения.

Аналогичным построением можно показать, что импульс разрежения, локализованный в виде пучка, распространяясь в нелинейной среде, сужается в пространстве. Ширина пучка определяется выражением

$$r = \pm r_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon |\rho_{\max}'| x^2}{\rho_0 r_0^2}}. \quad (\text{IX.5.19})$$

Решение (IX.5.13) описывает распространение импульса разрежения до координаты $x = r_0 / \sqrt{\varepsilon \rho_{\max}' / \rho_0}$.

Наряду с пространственным сужением происходит и процесс увеличения длительности импульса.

В тех случаях, когда мы имеем дело с квазисферической волной, функция S явным образом зависит от координаты r (см. выражение (IX.5.6)) и вместо (IX.5.7) необходимо рассматривать более сложное уравнение (IX.5.8). С помощью замены переменных

$$\kappa = \rho' x, \quad k = \frac{1}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0} \right), \quad \eta = \frac{r}{x}. \quad (\text{IX.5.20})$$

последнее приводится к следующей форме:

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial \kappa \partial k} - \frac{\varepsilon}{2\rho_0} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (\text{IX.5.21})$$

Уравнение (IX.5.21) приводится к стандартному гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial p^2} = 0, \quad (\text{IX.5.22})$$

если воспользоваться новыми переменными q, p, ξ , связанными со старыми соотношениями

$$q = \kappa - \beta k, \quad p = \kappa + \beta k, \quad \xi = \sqrt{\frac{23\rho_0}{\varepsilon}} \eta. \quad (\text{IX.5.23})$$

Здесь β — параметр, имеющий размерность $[\rho l^2]$. Вводя новую переменную $Q = \sqrt{q^2 + \xi^2}$, представим уравнение (IX.5.22) в виде

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial Q^2} + \frac{2}{Q} \frac{\partial F_2}{\partial Q} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial p^2} = 0. \quad (\text{IX.5.24})$$

Решение этого уравнения, аналогичное (IX.5.13), может быть получено таким же способом. Окончательное выражение имеет вид

$$F_2 = \frac{\sqrt{\left[\rho'x - \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right)\right]^2 + \frac{23\rho_0}{\varepsilon x^2} r^2} + \rho'x + \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right)}{2 \sqrt{\left[\rho'x - \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right)\right]^2 + \frac{23\rho_0}{\varepsilon x^2} r^2}} \times \\ \times \Phi \left\{ \sqrt{\left[\rho'x - \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right)\right]^2 + \frac{23\rho_0}{\varepsilon x^2} r^2} + \right. \\ \left. + \rho'x + \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right) \right\}. \quad (\text{IX.5.25})$$

Это решение описывает в акусто-геометрическом приближении распространение почти сферической волны конечной амплитуды, ограниченной в пространстве в виде параксиального конического пучка, и позволяет рассмотреть сходящиеся и расходящиеся звуковые волны.

Для анализа выражения (IX.5.25) в случае расходящегося пучка выберем произвольную функцию Φ в виде, представленном на рис. IX.6, только теперь по оси абсцисс следует отложить другую величину

$$\sqrt{\left[\rho'x - \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right)\right]^2 + \frac{23\rho_0}{\varepsilon x^2} r^2} + \rho'x + \frac{\beta}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right).$$

Рассуждая так же, как и при рассмотрении квазиплоской волны, можно определить угловую ширину пучка:

$$\varphi^2 = \frac{r^2}{x^2} = \frac{\varepsilon A^2}{2\rho_0\beta} - \frac{\varepsilon A}{\rho_0 x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0}\right). \quad (\text{IX.5.26})$$

Величина A выражается через $(\rho'x)_{\max}$, т. е. через значение $\rho'x$ на оси пучка. Определяя величину размерного параметра β через угловую полуширину пучка φ_0 (при $x = x_0$):

$$\beta = \frac{\varepsilon A^2}{2\rho_0 \left(\varphi_0^2 + \frac{\varepsilon A}{\rho_0 x_0} \right)}, \quad (\text{IX.5.27})$$

получим окончательное выражение для угловой полуширины пучка:

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + \frac{\varepsilon A}{\rho_0 x_0} \left[1 - \frac{x_0}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0} \right) \right]. \quad (\text{IX.5.28})$$

Зависимость $\varphi^2(x/x_0)$ представлена на рис. IX.12. Аргумент произвольной функции Φ позволяет определить распределение «амплитуды» импульса по сечению пучка.

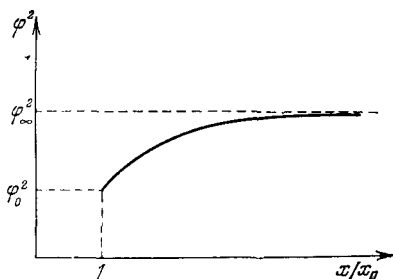


Рис. IX.12. Изменение угловой полуширины расходящегося пучка.

При $x = x_0$ амплитуда прямоугольного импульса сжатия уменьшается к краям пучка:

$$\rho' = \rho'_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{2x_0^2 \varphi_0^2} \right); \quad (\text{IX.5.29})$$

здесь $\rho'_{\max}$ — амплитуда импульса на оси. Таким образом, сферический импульс сжатия, расходящийся из точки $x=0$, ограниченный в пространстве в виде пучка с угловой шириной $2\varphi_0$ (при $x = x_0$), с амплитудой, уменьшающейся к краям пучка, при распространении в нелинейной среде становится более расходящимся. Угло-

вая ширина пучка увеличивается, стремясь асимптотически при $x \rightarrow \infty$ к постоянной величине φ_∞ , равной

$$\varphi_\infty^2 = \varphi_0^2 + \frac{\varepsilon A}{\rho_0 x_0}. \quad (\text{IX.5.30})$$

Так как на оси пучка величина возмущения больше, то центральные точки уходят вперед, а периферийные отстают, и пучок расходится сильнее. Однако на достаточно больших расстояниях амплитуда волны уменьшается, нелинейность уже не играет существенной роли, и это приводит к стабилизации угловой ширины пучка.

Длительность сферического импульса сжатия при этом уменьшается и при $x \rightarrow \infty$ становится постоянной. Здесь так же, как и в случае квазиплоской волны, дополнительная расходимость обуславливает более медленное движение переднего фронта импульса по сравнению с задним. Множитель перед произвольной функцией, определяющий изменение длительности импульса, при $x \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине, равной 1. На достаточно больших расстояниях от x_0 выражение (IX.5.25) принимает вид $F_2 = \Phi(\rho'x)$ или

$$\rho' = \frac{1}{x} \Phi^{-1} \left[\omega \left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} x \ln \frac{x}{x_0} \cdot \rho' - \frac{r^2}{2c_0 x} \right) \right]. \quad (\text{IX.5.31})$$

При этом распространение сферической волны происходит по прямым линиям $(r/x) = \text{const}$, на каждой из которых F_2 является функцией $\rho'x$. Таким образом, при больших x ограниченность пучка не сказывается.

Для x , изменяющихся от значений $x = -\infty$ до нуля, выражение (IX.5.25) с произвольной функцией Φ , изображенной на рис. IX.6, описывает распространение сходящегося сферического импульса сжатия. Этот импульс имеет прямоугольную форму при $x = -x_0$ и ограничен в пространстве в виде пучка. Амплитуда импульса уменьшается к краям пучка по закону (IX.5.29). Задавая ширину пучка φ_0 при $x = -x_0$, можно определить его ширину в любой точке x :

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 - \frac{\varepsilon A}{\rho_0 |x_0|} \left[1 - \frac{x_0}{x} \left(1 + \ln \frac{x}{x_0} \right) \right]. \quad (\text{IX.5.32})$$

Эта зависимость изображена на рис. IX.13. Как видно из рис. IX.13, пучок сходится быстрее, чем в линейной среде. При выпуклом распределении амплитуды импульса по сечению пучка центральные точки отстают, а краевые выдвигаются вперед, и волна становится более расходящейся. При этом длительность сходящегося импульса сжатия увеличивается.

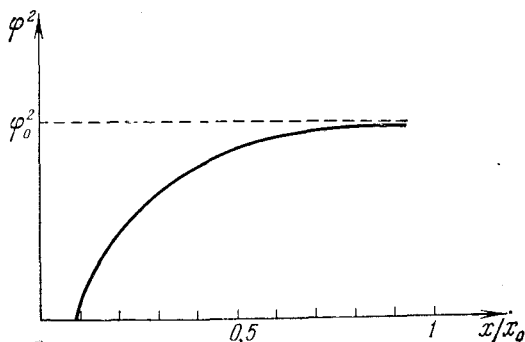


Рис. IX.13. Изменение угловой полуширины сходящегося пучка.

В заключение отметим, что в точках x , близких к фокусу, решение (IX.5.25) перестает быть справедливым. При ширине пучка, сравнимой с длиной волны, существенную роль начинают играть дифракционные эффекты.

ГЛАВА X

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ

§ 1. Случайно-модулированные звуковые волны

Предыдущие главы были посвящены рассмотрению нелинейных волновых процессов, протекающих в регулярных звуковых полях. Когда речь шла об одном или нескольких гармонических возмущениях на границе среды, то подразумевалось, что исходный спектр представляет собой совокупность дельта-функций. Точно так же бесконечно узкими считались спектральные линии возникающих в среде гармоник и комбинационных частот. Случай широкого исходного спектра соответствовал импульсному возмущению, форма которого тоже вполне детерминирована.

Вместе с тем естественно применить аппарат нелинейной акустики к анализу распространения случайных звуковых возмущений. Рассмотрение деформации формы начального спектрального распределения, динамики различных нелинейных взаимодействий представляет и здесь несомненный интерес. Важность этих исследований обусловлена в первую очередь наличием реальных источников, являющихся, по существу, источниками шумовых волн. В качестве примеров можно указать на такие явления, как кавитация [8], электрические разряды в воде [116], взрывы, мощные струйные течения и т. д., сопровождающиеся излучением интенсивных шумов. Более того, обычные источники ультразвука, с которыми приходится иметь дело в повседневной лабораторной практике, также не вполне монохроматичны. Несмотря на высокую добротность линий, они имеют все же конечную ширину, что

обусловлено наличием амплитудных и фазовых флуктуаций. Случайный характер входного возмущения может существенно повлиять на протекание нелинейных процессов, так что с этим обстоятельством часто нельзя не считаться.

Нужно заметить, что в смежной с нелинейной акустикой области волновых процессов — в нелинейной оптике — статистические явления изучены весьма полно [117]. Математический аппарат здесь во многом более прост, так как из-за сильной дисперсии в оптике возможно оперировать медленно изменяющимися комплексными амплитудами нескольких квазимонохроматических волн. Относительная простота, а также наличие важных практических приложений стимулировали исследования вопросов статистики мощного лазерного излучения. В настоящее время статистическая нелинейная оптика [117] представляет собой довольно развитую область, результаты которой многократно подвергались экспериментальной проверке. Поэтому всюду, где это возможно (а именно в задачах о модулированных звуковых волнах в области до образования разрывов), мы будем сопоставлять результаты этой главы с выводами монографии [117].

Обратимся сперва к наиболее простой задаче о распространении случайно-модулированной квазимонохроматической звуковой волны [118]. Пусть на входе в нелинейную среду при $x = 0$ задан узкополосный случайный процесс:

$$v(t) = v_0(\Omega t) \sin[\omega_0 t + \varphi(\Omega t)]. \quad (\text{X.1.1})$$

Здесь v — колебательная скорость, v_0 и φ — медленно изменяющиеся амплитуда и фаза; $\Omega/\omega_0 \sim \mu \ll 1$. В соответствии с уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{X.1.2})$$

(где $y = t - x/c_0$, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$), описывающим деформацию волны произвольного профиля, решение $v(x, t)$ получается из условия на границе (X.1.1) с помощью замены аргумента t на $y + \varepsilon v x / c_0^2$. Поскольку характерное время Ω^{-1} изменения функций v_0 , φ велико (по сравнению с ω_0^{-1}), искажением амплитуды v_0 и фазы φ можно

пренебречь и решение представить в виде

$$v(y, x) = v_0(\Omega y) \sin \left[\omega_0 y + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega_0 v(y, x) x + \varphi(\Omega y) \right]. \quad (\text{X.1.3})$$

Для упрощения записи последующих выкладок удобно ввести безразмерные переменные $\theta = \omega_0 y$, $z = \varepsilon \omega_0 x / c_0^2$, $V = v / \sigma$, $A = v_0 / \sigma$ (где $\sigma = \sqrt{v^2}$), тогда

$$V(\theta, z) = A(\theta) \sin [\theta + zV + \varphi(\theta)]. \quad (\text{X.1.4})$$

Неявная функция типа $f = \sin [\theta + zf]$ может быть представлена в виде ряда Бесселя — Фубини (I.5.9), поэтому вместо (X.1.4) можно написать

$$V(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n[nzA(\theta)]}{nz} \sin n[\theta + \varphi(\theta)]. \quad (\text{X.1.5})$$

Воспользуемся разложением (X.1.5) прежде всего для вычисления корреляционной функции $B(\tau, z)$ сигнала $V(\theta, z)$ в произвольном сечении нелинейной среды:

$$\begin{aligned} B(\tau, z) &= \overline{V(\theta, z) V(\theta', z)} = \\ &= \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{4}{nmz^2} \iint_0^{\infty} dA dA' \iint_0^{2\pi} J_n(nzA) J_m(mzA') \times \\ &\times \sin n[\theta + \varphi] \sin m[\theta' + \varphi'] W_4(A, A', \varphi, \varphi') d\varphi d\varphi', \end{aligned} \quad (\text{X.1.6})$$

где $\theta' = \theta + \omega_0 \tau$, $A = A(\theta)$, $\varphi = \varphi(\theta)$ и $A' = A(\theta')$, $\varphi' = \varphi(\theta')$. Расчет выполним для стационарного нормального процесса (X.1.1), у которого четырехмерная функция распределения $W_4(A, A', \varphi, \varphi')$ равна [89]

$$\begin{aligned} W_4 &= \frac{AA'}{4\pi^2(1-b^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-b^2)} [A^2 + A'^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2AA'b \cos(\varphi' - \varphi - \omega_0 \tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{X.1.7})$$

Здесь $b = b(\tau)$ — огибающая корреляционной функции сигнала на входе:

$$B(\tau, z=0) = b(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (\text{X.1.8})$$

При вычислении внутреннего интеграла по $d\varphi d\varphi'$ нужно воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{AA'b}{1-b^2} \cos(\varphi' - \varphi - \omega_0\tau) \right\} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j I_j \left(\frac{AA'b}{1-b^2} \right) \cos j(\varphi' - \varphi - \omega_0\tau); \end{aligned} \quad (\text{X.1.9})$$

здесь $\varepsilon_j = 1$ для $j = 0$ и $\varepsilon_j = 2$ для $j > 0$. При этом получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int \sin n\varphi \sin m\varphi' \exp \left\{ \frac{AA'b}{1-b^2} \cos(\varphi' - \varphi - \omega_0\tau) \right\} d\varphi d\varphi' = \\ = \pi^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \delta_{nj} \delta_{mj} I_j \left(\frac{AA'b}{1-b^2} \right) \cos j\omega_0\tau. \end{aligned} \quad (\text{X.1.10})$$

Наконец, интегрируя по $dA dA'$, придем к искомому выражению [119]

$$B(\tau, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-(nz)^2}}{(nz)^2} I_n[(nz)^2 b(\tau)] \cos n\omega_0\tau. \quad (\text{X.1.11})$$

Совершая предельный переход $z \rightarrow 0$ в формуле (X.1.11), мы, естественно, получим входную корреляционную функцию $b(\tau) \cos \omega_0\tau = B(\tau, 0)$.

Выражение (X.1.11) позволяет выявить различие в процессах генерации гармоник случайной и детерминированной исходными волнами. Наибольший интерес, очевидно, представляет сравнение темпа нарастания гармоник при одинаковых интенсивностях E исходных волн; для детерминированного сигнала $E^{(S)} = v_0^2/2$ (где v_0 — амплитуда сигнала), а для случайного сигнала $E^{(N)} = \overline{v^2} = \sigma^2$. Для интенсивностей гармоник имеем

$$E_n^{(S)} = \frac{4}{(nz_1)^2} J_n^2(nz_1) \quad (\text{X.1.12})$$

в случае чисто гармонического возмущения на границе и

$$E_n^{(N)} = \frac{4}{(nz_1)^2} e^{-(nz_1)^2/2} I_n \left[\frac{1}{2} (nz_1)^2 \right] \quad (\text{X.1.13})$$

для случайного сигнала; (X.1.13) следует (X.1.11) при $\tau \rightarrow 0$. В формулах (X.1.12), (X.1.13) $z_1 = \varepsilon \omega_0 x \sqrt{2E/c_0^2}$, $E = E^{(S)} = E^{(N)}$.

Графики функций (X.1.12) и (X.1.13) для $n = 1, 2, 3$ изображены на рис. X.1 соответственно штриховыми и сплошными линиями. Видно, что поведение гармоник случайного сигнала существенно отличается от того, что имеет место при чисто гармоническом возмущении на границе среды. Как истощение основной, так и нарастание высших гармоник в первом случае происходит более быстрыми темпами.

Здесь уместно провести аналогию с нелинейной оптикой [117] и отметить, что при малых расстояниях z_1 ($n z_1 < 1$) генерация акустических гармоник шумовым сигналом эффективнее, нежели детерминированным сигналом, точно во столько же раз, как и при возбуждении световых гармоник квазимонохроматическим излучением в так называемом приближении заданного поля. Другими словами, на малых расстояниях z_1 отношение *)

$$\frac{E_n^{(N)}}{E_n^{(S)}} \approx n! \quad (\text{X.1.14})$$

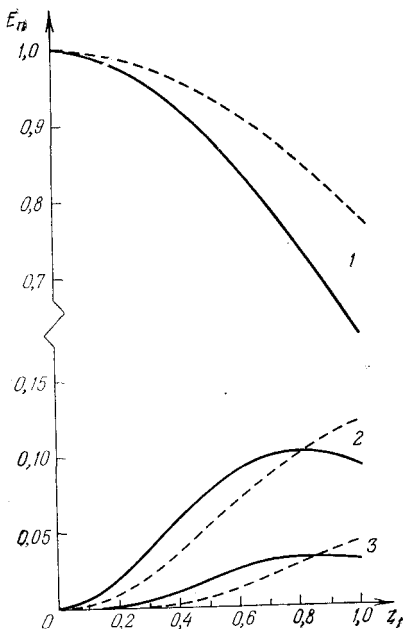


Рис. X.1. Зависимость интенсивности первой (1), второй (2) и третьей (3) гармоник в нелинейной среде от приведенного расстояния $z_1 = \varepsilon \omega_0 x \sqrt{2E/c_0^2} \doteq \sqrt{2} z$ при одинаковых интенсивностях исходных сигналов. Узкополосному шумовому сигналу соответствуют сплошные кривые, гармоническому сигналу — штриховые кривые.

*) Это соотношение было установлено экспериментально в работе [139].

Теперь остановимся на анализе ширины спектральной линии гармоник шума. Предположим, что форма линии исходного шумового сигнала лоренцева, т. е. на границе нелинейной среды

$$b(\tau) = \exp\{-|\tau|/\tau_0\}; \quad (\text{X.1.15})$$

τ_0 — время корреляции сигнала. В этом случае время корреляции τ_n n -й гармоники подчиняется трансцендентному уравнению

$$I_n \left[\frac{1}{2} (nz_1)^2 e^{-\tau_n/\tau_0} \right] = e^{-1} I_n \left[\frac{1}{2} (nz_1)^2 \right]. \quad (\text{X.1.16})$$

Аналитический результат удастся получить лишь при малых $nz_1 < 1$; в этом случае имеем $\tau_n = \tau_0/n$. Таким образом, при $nz_1 < 1$ ширина спектральной линии гармоники $\Delta\omega_n \approx 1/\tau_n$ растет с увеличением n (см. также [117]). С ростом z ширины линий гармоник увеличиваются, причем это уширение также растет с увеличением n . Так, например, при $n = 1$ время корреляции уменьшается с $\tau_1 = \tau_1(z_1 = 0) = \tau_0$ до $\tau'_1 = \tau_1(z_1 = 1) \approx 0,97\tau_0$, при $n = 2$ — с $\tau_2 = 0,5\tau_0$ до $\tau'_2 \approx 0,41\tau_0$ и, наконец, при $n = 3$ — с $\tau_3 = 0,33\tau_0$ до $\tau'_3 \approx 0,21\tau_0$.

Подобным образом ведут себя и ширины линий гармоник в случае, когда исходный сигнал имеет гауссову форму линии; здесь, однако, при $nz_1 < 1$ время корреляции $\tau_n = \tau_0/\sqrt{n}$.

Тенденция к «расплыванию» спектральных линий является важным эффектом, который не может быть установлен в рамках приближения заданного поля. Он является следствием сложных (в том числе и реактивных) взаимодействий между полями основного излучения и высших гармоник и представляет собой — в соответствии с законами статистической физики — первый шаг к установлению состояния термодинамического равновесия.

Рассмотрим законы распределения огибающей шумовых гармоник. Согласно формуле (X.1.5) амплитуда A_n n -й гармоники равна

$$A_n = \frac{2}{nz} J_n[nz A(\theta)], \quad (\text{X.1.17})$$

где $A(\theta)$ в соответствии с (X.1.7) имеет релеевский закон распределения

$$W(A) = A \exp \{-A^2/2\}. \quad (\text{X.1.18})$$

В общем случае произвольных nz получить аналитическое выражение для распределения $W(A_n)$ не удастся. Для

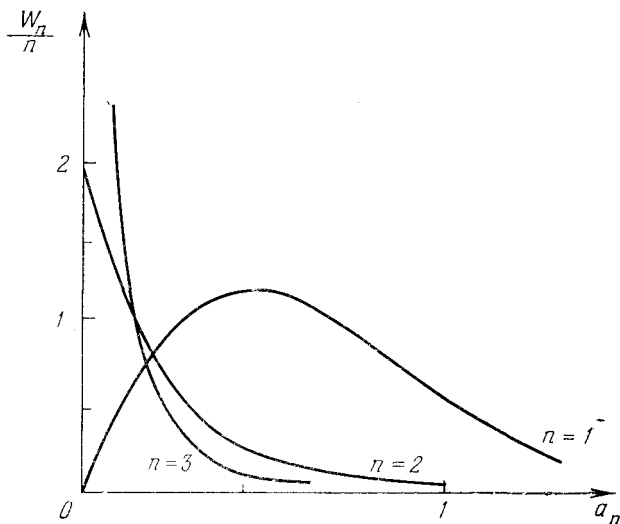


Рис. X.2. Функции распределения огибающей исходного сигнала (1), второй (2) и третьей (3) гармоник: (1) — распределение Релея, (2) — экспоненциальное распределение.

значений $nz < 1$ при $n \geq 2$ получаем, что закон распределения $W(A_n)$ сильно отличается от релеевского (X.1.18)

$$W(a_n) = \frac{(a_n \cdot n!)^{(2-n)/n}}{\sigma_1^2} (n-1)! e^{-\frac{(a_n \cdot n!)^{2/n}}{2\sigma_1^2}}, \quad (\text{X.1.19})$$

причем амплитуда a_2 второй гармоники имеет экспоненциальное распределение: $W(a_2) = \sigma_1^{-2} \exp \{-a_2/\sigma_1^2\}$. В формуле (X.1.19) $a_n = nzA_n/2$, $a = nzA/2 = a_1$, $\sigma_1 = = nz/2$. Графики распределений $W(a_n)$ для входного

сигнала, второй и третьей гармоник представлены на рис. X.2.

Из рис. X.2 следует, что в области малых и больших значений амплитуд a_n (относительно среднего $\bar{a}_n$) плотность вероятности значений a_n больше, чем для возбуждающего сигнала. Вероятности превышения среднего значения в $\alpha_n = a_n/\bar{a}_n$ раз, например, в исходном сигнале и второй гармонике равны соответственно

$$P(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\infty} W(\alpha) d\alpha = e^{-\pi\alpha_1^2/4}, \quad P(\alpha_2) = e^{-\alpha_2}. \quad (\text{X.4.20})$$

Таким образом, флуктуации исходного сигнала в гармониках подчеркиваются; подобная ситуация имеет место и при генерации оптических гармоник [117].

Обсудим теперь границы применимости формулы (X.4.11) и вытекающих из нее результатов. Строго говоря, одновременное использование динамического уравнения для простых волн (X.4.2) (описывающего волны только в области до образования разрывов) и функции распределения (X.4.7) нормального шума приводит к противоречию. Дело в том, что в соответствии с релеевским распределением (X.4.18) амплитуда некоторых «периодов», входящих в состав полной реализации $V(\theta, z = 0)$, может принимать сколь угодно большие значения. Поэтому уже в непосредственной близости от источника волна содержит разрывные участки. Вместе с тем вероятность выбросов с большими амплитудами мала, что позволяет на больших расстояниях использовать полученные результаты в качестве приближенных.

Простым, но довольно грубым критерием применимости может служить расстояние $z_1 = 1$ образования ударного фронта в регулярной волне равной интенсивности. Более корректный путь состоит в «обрезании» крыла релеевского распределения при некоторой $A = A_{\text{гр}}$ (в соответствии с наперед заданной допустимой величиной ошибки) и оценке длины образования разрыва для волны с $A = A_{\text{гр}}$ по формуле $x_p = \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega z A_{\text{гр}} \right)^{-1}$.

Эти затруднения не возникают, если в качестве динамического уравнения вместо (X.4.2) использовать урав-

нение Бюргерса. Пусть имеется решение этого уравнения, соответствующее регулярному возмущению на границе ($A = v_0/\sigma$ и φ фиксированны):

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A F_n(Az) \sin n(\theta + \varphi). \quad (\text{X.1.21})$$

Здесь $A F_n$ — амплитуда n -й гармоники, явные выражения для которой на различных этапах даются, например, формулами Бесселя — Фубини (I.5.9) и Фейя (II.2.11). Наличие решения (X.1.21) позволяет в принципе рассчитать корреляционные функции гармоник для произвольного сечения нелинейной среды:

$$B_n(\tau, z) = \iint_0^{\infty} dA dA' \iint_0^{2\pi} AA' F_n(Az) F_m(A'z) \sin n(\theta + \varphi) \times \\ \times \sin m(\theta' + \varphi') W_4(A, A', \varphi, \varphi') d\varphi d\varphi'. \quad (\text{X.1.22})$$

Однако наглядный аналитический расчет в общем виде невозможен из-за отсутствия удобных выражений для $F_n(Az)$, допускающих точное вычисление интеграла (X.1.22). Тем не менее такая задача может быть решена численно для любых значений числа Рейнольдса.

На рис. X.3 штриховыми кривыми представлены результаты расчета [118] средних интенсивностей $E_n^{(N)}(z) = B(0, z)$ гармоник узкополосного шума для значений $\text{Re} \rightarrow \infty$.

При вычислении интеграла (X.1.22) использовались численные данные для F_n , полученные с помощью фурье-анализа искаженных профилей волны, построенных графическим способом. Соответствующие интенсивности $E_n^{(S)}$ регулярного возмущения изображены на рис. X.3 сплошными линиями. Расчеты $E_n^{(N)}$ выполнены для стационарного нормального процесса.

Относительное расположение штриховых и сплошных кривых рис. X.3 можно объяснить следующим образом. Поскольку амплитуда A исходного процесса флуктуирует, наличие больших выбросов (относительно среднего $\bar{A}$) приводит к более быстрому убыванию интенсивности основной частоты и эффективному росту гармоник шума

по сравнению с регулярным возмущением такой же интенсивности. Деформация выбросов с большими амплитудами приводит в дальнейшем к уменьшению их величины из-за образования разрывов; в то же время малоамплитудные флуктуации практически не деформируются. Это

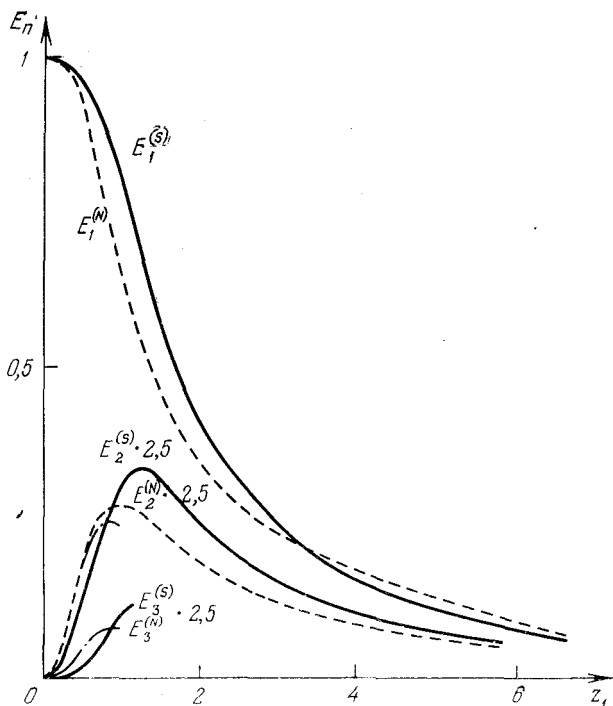


Рис. X.3. Результаты численного расчета интенсивностей гармоник случайно-модулированного сигнала: $z_1 = 1$ соответствует расстоянию образования разрыва в детерминированной волне той же интенсивности.

обстоятельство «затягивает» уменьшение интенсивности $E_1^{(N)}(z)$, которая может превысить значение $E_1^{(S)}(z)$. Рассмотренная физическая картина явления объясняет также тот факт, что максимальные интенсивности шумовых гармоник оказываются меньше регулярных.

Обсуждавшиеся выше границы применимости формулы (X.1.11) наглядно проясняются на рис. X.3, на котором кривые интенсивностей гармоник шума (X.1.13) изображены штрих-пунктирной линией. Видно, что выражением (X.1.11) можно пользоваться на приведенных длинах $z_1 = z\sqrt{2} \leq 0,7$.

Полученные в этом параграфе результаты относятся к плоским волнам, однако их легко перенести на случай шумов с цилиндрической или сферической симметрией. Хотя здесь рассмотрен процесс распространения лишь нормального случайного процесса, такой подход позволяет, вообще говоря, исследовать поведение узкополосной волны с любым видом случайной модуляции.

§ 2. Общая теория нелинейной эволюции спектров случайных звуковых полей при отсутствии диссипации [120]

То счастливое обстоятельство, что в нелинейной акустике имеются простые решения типа (X.1.21), позволило в § 1 сделать ряд важных выводов о процессе распространения случайного узкополосного возмущения. Однако уже для задачи о взаимодействии двух квазимонохроматических волн операция усреднения оказывается существенно более громоздкой. В случае сложных спектров на границе прямой расчет не удастся провести вообще.

Проблема аналитического описания трансформации спектра немонохроматического входного возмущения привлекает к себе внимание давно [121]. Имеются интересные результаты, полученные либо для недиссипативной среды методом последовательных приближений [121], либо при учете слабой нелинейности, что справедливо для $Re \ll 1$ [122].

Нужно указать на принципиальное отличие в самой постановке задачи об изменении формы шумового спектра от аналогичных задач для детерминированных возмущений. Дело в том, что задание исходного спектрального распределения и статистики излучения на входе однозначно определяет процесс эволюции спектра случайной волны. Для детерминированных возмущений такая постановка вопроса некорректна, поскольку между его

пространственно-временной формой и спектральным распределением нет взаимно однозначного соответствия; спектр возмущения деформируется по-разному в зависимости от фазовых соотношений между фурье-компонентами. Это тривиальное, казалось бы, замечание необходимо иметь в виду потому, что во многих оригинальных работах эти два типа задач не разделяются.

Для рассмотрения динамики изменения спектра произвольной ширины и формы запишем решение уравнения (X.1.2) в общем виде

$$v(y, x) = \xi \left(y + \frac{\varepsilon}{c_0^2} vx \right). \quad (\text{X.2.1})$$

Здесь $\xi(\eta)$ — произвольная функция, заданная на входе среды при $x = 0$.

В соответствии со свойствами δ -функции можно написать

$$v(y, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(y', x) e^{i\omega(y-y')} d\omega dy'. \quad (\text{X.2.2})$$

Подставим (X.2.1) в (X.2.2), при помощи замены $y' = \eta - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \xi(\eta)$ и интегрирования по частям $v(y, x)$ удастся представить как явную функцию от $\xi(\eta)$:

$$v(y, x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\eta) \times \\ \times \exp \left\{ -i\omega \left[\eta - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \xi(\eta) - y \right] \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\eta. \quad (\text{X.2.3})$$

Для расчета корреляционной функции

$$B(y_1, y_2; x) = \overline{v(y_1, x) v(y_2, x)} \quad (\text{X.2.4})$$

на основе решения (X.2.3) нужно воспользоваться четырехмерной функцией распределения $W_4[\xi(\eta_1), \xi(\eta_2), \xi(\eta_1), \xi(\eta_2)]$; это связано с чрезвычайно громоздкими вычислениями. Вместе с тем структура выражения (X.2.3) позволяет ввести оператор

$$L(\omega_1, \eta_1; \omega_2, \eta_2) = \frac{d^2}{d\eta_1 d\eta_2} + i\omega_1 \frac{d}{d\eta_2} - i\omega_2 \frac{d}{d\eta_1} + \omega_1 \omega_2 \quad (\text{X.2.5})$$

и с его помощью проделать операцию усреднения, пользуясь только двумерным распределением $W_2 [\xi(\eta_1), \xi(\eta_2)]$. Эта значительно облегченная схема расчета приводит к следующему выражению для корреляционной функции:

$$B(y_1, y_2, x) = \frac{c_0^4}{4\pi^2 \varepsilon^2 x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 y_1 - i\omega_2 y_2} \frac{d\omega_1}{\omega_1^2} \frac{d\omega_2}{\omega_2^2} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} L(\omega_1, \eta_1; \omega_2, \eta_2) \left\langle \exp \left[i\omega_1 \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \xi(\eta_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - i\omega_2 \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \xi(\eta_2) \right] \right\rangle e^{-i\omega_1 \eta_1 + i\omega_2 \eta_2} d\eta_1 d\eta_2. \quad (\text{X.2.6})$$

Таким образом, операция усреднения сводится к нахождению двумерной характеристической функции

$$C(\omega_1, -\omega_2) = \left\langle \exp \left\{ \frac{\varepsilon}{c_0^2} x [\omega_1 \xi(\eta_1) - \omega_2 \xi(\eta_2)] \right\} \right\rangle. \quad (\text{X.2.7})$$

Пусть $\xi(t)$ есть стационарный гауссов случайный процесс со средним значением $\bar{\xi} = 0$, тогда

$$C(\omega_1, -\omega_2) = \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 R(\eta_1 - \eta_2)] \right\}, \quad (\text{X.2.8})$$

где $z = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma x$; σ^2 — интенсивность и $R(\eta)$ — коэффициент корреляции процесса $\xi(y)$.

Для корреляционной функции (X.2.4) в произвольном сечении нелинейной среды таким образом получается выражение

$$B(\tau, x) = -\frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 R}{d\eta^2} + \right. \\ \left. + (z\omega)^2 \left(\frac{dR}{d\eta} \right)^2 \right\} C(\omega, -\omega, R(\eta)) e^{-i\omega\eta} d\omega d\eta. \quad (\text{X.2.9})$$

Производя замену $Q(\eta) = \exp [(z\omega)^2 R(\eta)]$ и интегрируя, можно привести (X.2.9) к виду

$$B(\tau, x) = -\sigma^2 \int_0^{\infty} \dot{R}(\eta) \Phi \left[\frac{\eta - \tau}{2z \sqrt{1 - R(\eta)}} \right] d\eta, \quad (\text{X.2.10})$$

где $\Phi(\eta)$ — функция ошибок. Согласно теореме Винера — Хинчина для спектральной плотности процесса из (X.2.10) получим

$$S(\omega, z) = -\frac{\sigma^2}{\pi\omega} e^{-(z\omega)^2} \int_0^\infty \dot{R}(\eta) e^{(z\omega)^2 R(\eta)} \sin \omega\eta d\eta \quad (\text{X.2.11})$$

или, в другой форме,

$$S(\omega, z) = -\frac{\sigma^2}{\pi} \frac{e^{-(z\omega)^2}}{(z\omega)^2} \int_0^\infty [e^{(z\omega)^2 R(\eta)} - 1] \cos \omega\eta d\eta. \quad (\text{X.2.12})$$

Выражения (X.2.9) — (X.2.12) позволяют проследить за искажением спектра начального возмущения с произвольной шириной и видом спектрального распределения. Удобство пользования (X.2.11) или (X.2.12) зависит от конкретного выражения для функции $R(\eta)$. Разлагая экспоненту под интегралом (X.2.12) в ряд, получим

$$S(\omega, z) = \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-(z\omega)^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(z\omega)^{2(n-1)}}{n!} \int_{-\infty}^\infty R^n(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta. \quad (\text{X.2.13})$$

Отсюда следует, что по мере распространения исходной волны (ей соответствует $n = 1$) ее спектральная плотность уменьшается. Спектральная же плотность возбуждаемых гармоник с ростом z сначала нарастает. Для широкого исходного спектра спектры всех гармоник перекрываются, и характер его трансформации в целом существенно зависит от формы исходного распределения.

Если, например, спектр $S(\omega, 0)$ сосредоточен вблизи нулевой частоты $\omega = 0$, то в нелинейной среде он деформируется таким образом, что спектральная плотность на низких частотах уменьшается, а на высоких возрастает. Другими словами, идет процесс перекачки энергии из интенсивных длинноволновых компонент в коротковолновые. Если же максимум спектральной плотности приходится на частоту $\omega = \omega_0 \neq 0$, то происходит как процесс преобразования в более коротковолновый (относительно $k_0 = \omega_0/c$) спектр, так и параметрическая подкачка его длинноволновой части.

Сказанное иллюстрируется кривыми рис. X.4, построенными *) для $R(\eta) = (1 - 2\gamma^2\eta^2) \exp(-\gamma^2\eta^2)$.

Задачи описания трансформации широких исходных спектров в литературе получили название проблемы акустической турбулентности (см. [123, 124]). Особый интерес здесь представляет нахождение равновесной формы

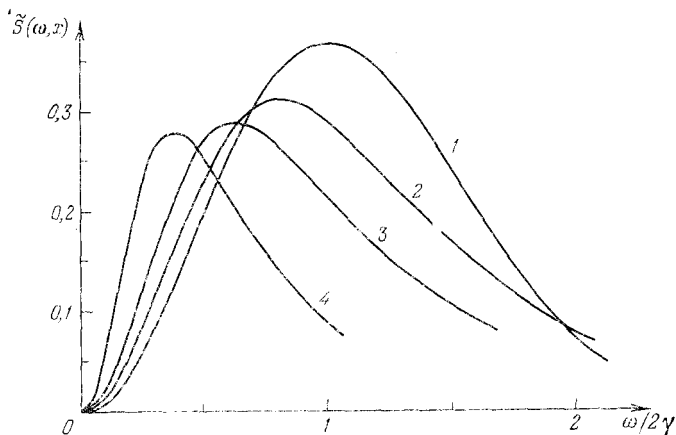


Рис. X.4. Изменение формы широкополосного исходного спектра (кривая 1) $\tilde{S}(\omega, 0) = S(\omega, 0) \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{\sigma^2} = \left(\frac{\omega}{2\gamma}\right)^2 \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{2\gamma}\right)^2\right\}$ в нелинейной среде для различных значений приведенного расстояния γz : кривая 2—1/6, 3—1/2 $\sqrt{3}$, 4—1/ $\sqrt{3}$.

спектрального распределения или универсального закона спада $S(\omega, z)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Пользуясь выражениями (X.2.11), (X.2.12), нетрудно показать, что спектральная плотность при $\omega \rightarrow \infty$ изменяется по закону ω^{-3} [125]. Этот результат формально следует из полученных выражений при $\beta = z\sqrt{|\ddot{R}(0)|} > 1$ (где $-\ddot{R}(0) \simeq \Delta\omega^2$, $\Delta\omega$ — ширина исходного спектра). Однако при $\beta > 1$ эти выражения неправильно описывают форму спектра, поскольку при этом интенсивность $E(z) = B(0, z)$ не остается постоянной. Непосредственно же

*) Похожая картина наблюдалась в эксперименте [140].

из (X.1.2) следует, что в недиссипативном случае значение $E(z) = \overline{v^2}$ должно сохраняться.

Указанное расхождение обусловлено тем, что вследствие флуктуационного характера возмущений в некоторых выбросах образуются разрывы, не описываемые, однако, принятой моделью. Решение (X.2.1) становится неоднозначной функцией переменной y и, строго говоря, не может быть разложено в спектр. Вместе с тем такая процедура при $\beta < 1$ приближенно верна. Отклонение же $B(0, z)$ от своего первоначального значения σ^2 растет с увеличением β , и критерием применимости формулы (X.2.12) может служить заданное отклонение $B(0, z)$ от σ^2 .

Более корректный анализ явления при $\beta > 1$ должен основываться на решении уравнения Бюргерса, содержащего старшую производную. Учет же низкочастотных потерь может быть проведен введением члена $-\delta v$ в правую часть уравнения (X.1.2). Этот случай сводится к рассмотренному выше с помощью замены переменных

$$U = ve^{-\delta x}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta}. \quad (\text{X.2.14})$$

Как нетрудно видеть, при $\delta x \gg 1$ здесь достигается стационарное по форме спектральное распределение.

Когда постановка задачи является более ограниченной и требуется определить равновесную форму спектра, не интересуясь его динамикой, возможен принципиально иной подход [16, 123] к проблеме акустической турбулентности. Предполагая, что фазы различных фурье-компонент спектра слабо коррелированы, можно от динамических дифференциальных уравнений перейти к кинетическому уравнению для средних значений квадратов амплитуд. Такой подход позволяет наряду с процессами самовоздействия, приводящими к возникновению коррелированных гармоник и переходу гармонической волны в пилообразную, учесть еще и процессы перемешивания волн, бегущих в различных направлениях. Это перемешивание, связанное с неоднородным характером явления, может привести к размытию фронта пилообразной волны и в этом смысле действует подобно турбулентной вязкости. Как показано в работе [126], стационарный спектр в

общем случае разбивается на два участка, первый из которых, ω^{-2} [124], определяется спектром пилообразной волны, а второй, $\omega^{-3/2}$ [123], соответствует турбулентному перемешиванию.

§ 3. Взаимодействие модулированных волн [127]

Общие выражения, полученные в предыдущем параграфе, позволяют рассмотреть широкий класс задач, соответствующих различным спектральным распределениям на границе нелинейной среды. В частности, полагая в формуле (X.2.12) $R(\eta) = b(\eta) \cos \omega_0 \eta$ (где $b(\eta)$ — медленно изменяющаяся за время $2\pi/\omega_0$ функция), можно другим способом вывести результат (X.4.11) для корреляционной функции узкополосного шума.

Интересно рассмотреть также невырожденное трехволновое взаимодействие, когда на входе в нелинейную среду задан спектр, состоящий из трех спектральных линий с центрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, причем $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Нужно предположить, что ширины этих линий $\Delta\omega_j$ малы по сравнению с расстояниями $|\omega_i - \omega_j|$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) между ними. Тогда корреляционная функция исходного шумового возмущения должна иметь вид

$$R(\eta) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} b_1(\eta) \cos \omega_1 \eta + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} b_2(\eta) \cos \omega_2 \eta + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2} b_3(\eta) \cos \omega_3 \eta, \quad (\text{X.3.1})$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2.$$

Подставляя выражение (X.3.1) в общее решение (X.2.12) и используя формулу (X.4.9), получим

$$S(\omega, z) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{e^{-(z\omega)^2}}{(z\omega)^2} \int_0^\infty \cos \omega \eta d\eta \left[\sum_{n, m, k=0}^\infty \varepsilon_n \varepsilon_m \varepsilon_k \times \right. \\ \times I_n \left((z\omega)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} b_1 \right) I_m \left((z\omega)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} b_2 \right) I_k \left((z\omega)^2 \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2} b_3 \right) \times \\ \left. \times \cos n\omega_1 \eta \cos m\omega_2 \eta \cos k\omega_3 \eta - 1 \right]. \quad (\text{X.3.2})$$

В приближении узкополосности входных сигналов («медленности» огибающих b_1, b_2, b_3) член подынтеграль-

ной суммы с $n = m = k = 0$ может быть положен равным единице. Остальные члены дают комбинационные частоты и гармоники трех исходных волн. Поскольку наибольший интерес представляет рассмотрение взаимодействия именно этих волн — с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, — сохраним в (X.3.2) только нужные нам члены. Совершая косинус-преобразование Фурье, можно получить следующее выражение для корреляционной функции на частоте ω_1 :

$$\begin{aligned} B_{\omega_1}(\tau, z) = & \frac{2e^{-(z\omega_1)^2}}{(z\omega_1)^2} \cdot \left[I_1 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} b_1(\tau) \right) \times \right. \\ & \times I_0 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} b_2(\tau) \right) \cdot I_0 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2} b_3(\tau) \right) + \\ & + I_0 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} b_1(\tau) \right) \times \\ & \left. \times I_1 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} b_2(\tau) \right) I_1 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2} b_3(\tau) \right) \right] \cos \omega_1 \tau. \end{aligned} \quad (\text{X.3.3})$$

Аналогичные выражения на частотах ω_2, ω_3 получаются из (X.3.3) с помощью очевидной перестановки индексов.

Для анализа параметрического процесса $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ предположим, что волны ω_1, ω_2 — слабые, т. е. $\sigma_1^2/\sigma^2, \sigma_2^2/\sigma^2 \ll 1$ и $\sigma_3^2/\sigma^2 \approx 1$. Одновременно полагаем $\tau = 0$ и переходим к интенсивностям волн E_1, E_2, E_3 :

$$\begin{aligned} E_1 = & \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} e^{-(z\omega_1)^2} I_0 [(z\omega_1)^2] + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} e^{-(z\omega_1)^2} I_1 [(z\omega_1)^2], \\ E_2 = & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} e^{-(z\omega_2)^2} I_0 [(z\omega_2)^2] + \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} e^{-(z\omega_2)^2} I_1 [(z\omega_2)^2], \\ E_3 = & 2 \frac{e^{-(z\omega_3)^2}}{(z\omega_3)^2} I_1 [(z\omega_3)^2] + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2\sigma^4} (z\omega_3)^2 e^{-(z\omega_3)^2} I_0 [(z\omega_3)^2]. \end{aligned} \quad (\text{X.3.4})$$

При наиболее типичном задании исходного возмущения одна из слабых волн (например, ω_2) на границе отсутствует и возникает в нелинейной среде как результат взаимодействия между волнами ω_1, ω_3 . Именно этот случай отражен на рис. X.5, а, построенном в соответствии с формулами (X.3.4) для $\sigma_2 = 0, \sigma_1^2/\sigma^2 = 0,1, \omega_1/\omega_3 = 0,2$.

В качестве следующего примера рассмотрим процесс генерации суммарной частоты $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$. Здесь уже

нужно считать слабой волной ω_3 , т. е. положить $\sigma_3^2/\sigma^2 \approx 0$. Полученные таким образом выражения для

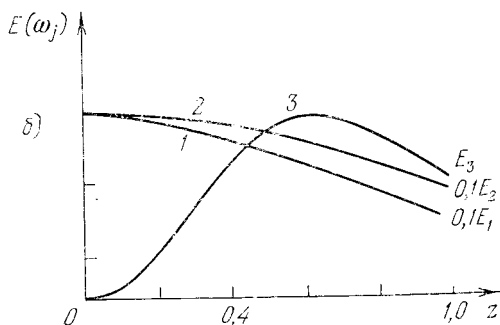
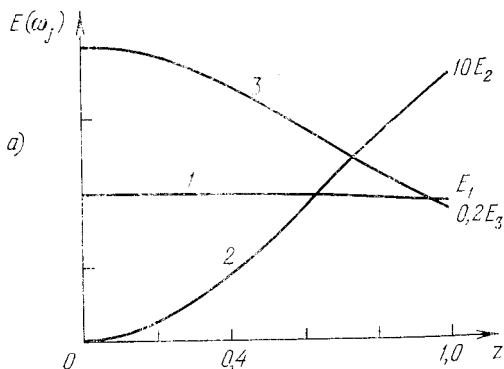


Рис. X.5. а) Параметрический процесс при шумовой накачке; б) генерация суммарной частоты в поле двух квазигармонических случайных волн.

ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВОЛН:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 2 \frac{e^{-(z\omega_1)^2}}{(z\omega_1)^2} I_0 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} \right) I_1 \left((z\omega_1)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \right), \\
 E_2 &= 2 \frac{e^{-(z\omega_2)^2}}{(z\omega_2)^2} I_0 \left((z\omega_2)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \right) I_1 \left((z\omega_2)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} \right), \\
 E_3 &= 2 \frac{e^{-(z\omega_3)^2}}{(z\omega_3)^2} I_1 \left((z\omega_3)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \right) I_1 \left((z\omega_3)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} \right)
 \end{aligned} \quad (X.3.5)$$

проанализированы на рис. X.5, 6 при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2/2$, $\omega_3/\omega_1 = \sqrt{3}$.

Следует обратить внимание на особенность в поведении кривых рис. X.5 и на их существенное отличие от аналогичных результатов для сред с сильной дисперсией. Дело в том, что в нашем случае, помимо рассмотренного «полезного» процесса $\omega_1 + \omega_2 \rightleftharpoons \omega_3$, одновременно с ним протекает множество «паразитных», к которым следует отнести генерацию гармоник и комбинационных частот, отличных от ω_1 , ω_2 , ω_3 . Наличие дополнительных каналов нелинейных потерь энергии значительно ослабляет эффективность полезных процессов и, как нетрудно видеть, является главной причиной спада кривых рис. X.5.

Примерно таким же способом можно проследить за динамикой искажения других, более сложных спектров. В частности, интересной с физической точки зрения является задача о взаимодействии узкой и слабой спектральной линии с интенсивным широким спектром, сосредоточенным вблизи нулевой частоты. Эта задача может соответствовать, например, распространению квазигармонической волны через среду со случайными неоднородностями. Можно показать, что перекачка энергии в линию приводит к ее уширению, причем в основном растет высокочастотное крыло, а граница со стороны низких частот практически неподвижна. Такое взаимодействие может значительно сместить энергетический центр линии $\bar{\omega}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega S(\omega, z) d\omega$ в область более высоких ω .

Рассмотренные в этом параграфе примеры носят иллюстративный характер и, разумеется, не исчерпывают всех возможностей, содержащихся в общем результате (X.2.12).

§ 4. О квазигармонических сигналах при наличии только фазовых флуктуаций [128]

Ультразвуковые волны большой интенсивности в жидкостях обычно получают с помощью электромеханических преобразователей различного типа. Их монохроматичность определяется главным образом флуктуациями радио-

генераторов, всегда обладающих малой нестабильностью частоты. У сигналов реальных генераторов флуктуируют амплитуда A и фаза φ , однако, как правило, малыми изменениями A можно пренебречь ($A \approx \text{const}$). Флуктуации же фазы $\varphi(t)$ в основном ответственны за конечную ширину спектра сигнала.

Рассмотрение вопроса о форме спектральных линий гармоник, возникающих в среде, при наличии на границе квазигармонического возмущения

$$\xi(t) = A \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (\text{X.4.1})$$

можно провести на основе общей теории, изложенной в § 2. Чтобы проделать усреднение и определить функцию корреляции в произвольном сечении нелинейной среды, необходимо рассчитать характеристическую функцию (X.2.7). Такой расчет нетрудно выполнить, пользуясь двумерным распределением случайной фазы $\varphi_j = \varphi(t_j)$ [89]:

$$W_2(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D |t_2 - t_1|} \cos n(\varphi_1 - \varphi_2) \right\}, \quad (\text{X.4.2})$$

где D — коэффициент диффузии фазы. При этом получается результат

$$C(\omega_1, -\omega_2) = J_0(\omega_1 z) J_0(\omega_2 z) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 D \tau} J_n(\omega_1 z) J_n(\omega_2 z) \cos n\omega_0 \tau. \quad (\text{X.4.3})$$

Здесь введены обозначения $z = A x \varepsilon / c_0^2$, $\tau = |\eta_1 - \eta_2|$. Зная корреляционную функцию (X.2.6) сигнала и пользуясь теоремой Винера — Хинчина, находим спектральную плотность сигнала в нелинейной среде:

$$S(\omega, z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A^2 \frac{J_n^2(\omega z)}{(\omega z)^2} \frac{n^2 D}{\pi [(n^2 D)^2 + (\omega - n\omega_0)^2]}. \quad (\text{X.4.4})$$

Это выражение является строгим в рамках дифференциального уравнения (X.1.2), поэтому условие его применимости $\frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega_0 x < 1$. При $n^2 D \rightarrow 0$ последний множитель в (X.4.4) дает дельта-функцию $\delta(\omega - n\omega_0)$. При этом

(X.4.4) переходит в выражение, которое получается для гармонического ($\varphi = \text{const}$) исходного сигнала при разложении решения (X.4.1) в ряд Бесселя — Фубини.

В пределе $z \rightarrow 0$ результат (X.4.4) дает лоренцеву спектральную плотность исходного сигнала

$$S(\omega, 0) = \frac{A^2}{2} \frac{D}{\pi [D^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (\text{X.4.5})$$

В нелинейной среде спектральное распределение сигнала и возникающих гармоник отличается от распределения Лоренца, и максимум спектра несколько смещается в сторону высоких частот $\omega > n\omega_0$. Однако эта деформация весьма мала, и с точностью до $(D/\omega_0) \ll 1$ все распределения можно считать лоренцевыми.

Ширина спектральных линий гармоник с номером n растет, как n^2 , — ситуация, сходная с умножением частот в сильно диспергирующих средах [117]. Интенсивность генерируемых гармоник оказывается такой же, как и в случае распространения в нелинейной среде чисто гармонического сигнала.

Возможна и другая постановка рассмотренной задачи. Пусть есть возможность проследить за деформацией каждого из периодов сигнала вплоть до образования в них разрывов. Тогда имеет смысл введение случайной длины образования разрыва [129]:

$$l_p(t) = \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} A \left(\omega_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{X.4.6})$$

статистику которой $W(l_p)$ нетрудно найти, зная функцию распределения девиации частоты $\Omega(t) = \partial \varphi / \partial t$. Для рассматриваемого нами случая [89]

$$W(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega^2}} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2\Omega^2} \right\}, \quad (\text{X.4.7})$$

$$W(l_p \geq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega^2} \frac{\varepsilon}{c_0^2} A l_p} \exp \left\{ -\frac{\left[1 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega_0 l_p \right]^2}{2\Omega^2 \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} A l_p \right)^2} \right\}. \quad (\text{X.4.8})$$

Интегральная функция от плотности распределения $W(l_p)$ характеризует вероятность обнаружения импуль-

сов с разрывными фронтами для заданного расстояния $x = L$ в нелинейной среде:

$$F(L) = \int_0^L W(l_p) dl_p = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{1 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega_0 L}{\sqrt{2\Omega^2} \frac{\varepsilon}{c_0^2} A L} \right) \right]. \quad (\text{X.4.9})$$

где Φ — функция ошибок. Из последнего результата следует, что на расстоянии $L = c_0^2/\varepsilon A \omega$ 50% импульсов имеют крутые фронты. В случае же гармонического сигнала на указанной длине все формируемые импульсы претерпевают разрыв.

§ 5. О взаимодействии регулярных волн со случайными [130]

Наиболее интересной с точки зрения физических приложений является задача о распространении в нелинейной среде смешанного возмущения, представляющего собой суперпозицию сигнала и шума. Сложная спектральная картина взаимодействия этих возмущений обычно и наблюдается в экспериментах. Поэтому наличие точного спектрального представления соответствующего решения нелинейного уравнения (X.1.2) открывает возможности как иного понимания уже известных явлений, так и изучения новых проблем. Многообразие всех интересных типов взаимодействий исключает возможность их общего рассмотрения. В § 5 будут подробно рассмотрены некоторые важные частные случаи.

В соответствии с предметом настоящего параграфа, сформулированным в его названии, положим в формуле (X.2.6)

$$\xi(\eta) = N(\eta) + S(\eta), \quad (\text{X.5.1})$$

где $S(\eta)$ — детерминированный сигнал, а $N(\eta)$ — случайный процесс.

Для определенности будем рассматривать нормальный шум $N(\eta)$ с нулевым средним значением $\bar{N} = 0$ и интен-

сивностью σ^2 . Статистическое усреднение в выражении (X.2.6) приводит в этом случае к характеристической функции (X.2.8). Усредняя далее выражение (X.2.6) по переменной y ($y = y_1$, $y_2 = y_1 + \tau$), получим

$$B(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi\omega^2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right)^2} d\omega \iint_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \times \\ \times \exp \left\{ i\omega(\eta_2 - \eta_1) + \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right)^2 R(\eta_1 - \eta_2) + \right. \\ \left. + i \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x [S(\eta_1) - S(\eta_2)] \right\} d\eta_1 d\eta_2, \quad (\text{X.5.2})$$

где обозначено

$$\Phi_1 = -\sigma^2 \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \eta_1^2} + \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right)^2 \left(\frac{\partial R}{\partial \eta_1}\right)^2 \right], \\ \Phi_2 = -i\sigma \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right) \left[\frac{\partial R}{\partial \eta_1} \frac{\partial S}{\partial \eta_2} - \frac{\partial R}{\partial \eta_2} \frac{\partial S}{\partial \eta_1} \right], \quad (\text{X.5.3}) \\ \Phi_3 = \frac{\partial S}{\partial \eta_1} \frac{\partial S}{\partial \eta_2}.$$

Дальнейшие упрощения в общем виде провести не удастся. На этом этапе необходимо конкретизировать регулярную часть $S(\eta)$ полного возмущения $\xi(\eta)$. Примем сигнал $S(\eta)$ монохроматическим:

$$S(\eta) = A \sin \omega_0 \eta. \quad (\text{X.5.4})$$

Переходя теперь в выражении (X.5.2) к новым переменным

$$\eta_1 - \eta_2 = \eta, \quad \eta_2 = \eta_2 \quad (\text{X.5.5})$$

и выполняя интегрирование по переменной η_2 , можно получить следующий результат для спектральной плотности процесса в произвольном сечении x нелинейной среды:

$$S(\omega, x) = S_1 + S_2 + S_3, \quad (\text{X.5.6})$$

где

$$S_1(\omega, x) = -\frac{\sigma^2}{2\pi\omega^2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[R'' + \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2 R' \right] J_0(\psi) \times \\ \times \exp \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2 R - i\omega\eta \right\} d\eta, \quad (\text{X.5.7})$$

$$S_2(\omega, x) = \frac{\sigma A}{\pi\omega} \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega_0 x\right) e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R' \cos \frac{\omega_0}{2} \eta J_1(\psi) \times \\ \times \exp \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2 R - i\omega\eta \right\} d\eta, \quad (\text{X.5.8})$$

$$S_3(\omega, x) = \frac{A^2 \omega_0^2}{4\pi\omega^2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega_0 \eta \cdot J_0(\psi) - J_2(\psi)] \times \\ \times \exp \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega x\right)^2 R - i\omega\eta \right\} d\eta. \quad (\text{X.5.9})$$

Аргументом ψ функций Бесселя J_0, J_1, J_2 , стоящих под знаками интегралов, является выражение

$$\psi = 2 \frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega x \cdot \sin \frac{\omega_0}{2} \eta. \quad (\text{X.5.10})$$

Каждый из трех полученных членов S_1, S_2, S_3 имеет наглядный физический смысл. Так, выражение $S_1(\omega, x)$ описывает процесс нелинейного искажения спектральной плотности шума (ср. с (X.2.9)), «подправленный» под знаком интеграла (X.5.7) множителем J_0 , который учитывает наличие регулярной компоненты $S(\eta)$.

Устремляя амплитуду A гармонического сигнала к нулю, нетрудно вместо (X.5.7) прийти к соответствующему выражению (X.2.9). Формула для $S_3(\omega, x)$ описывает нелинейные искажения регулярной части $S(\eta)$ с поправкой на шум. Если перейти в выражении (X.5.9) к пределу $\sigma \rightarrow 0$, можно получить результат, отвечающий решению Бесселя — Фубини. Наиболее интересен, пожалуй, член $S_2(\omega, x)$, дающий информацию о перекрестном взаимо-

действию сигнала с шумом. Однако детальный анализ показывает, что аналогичная информация содержится и в членах S_1, S_3 .

Для выделения интересующих нас выражений нужно воспользоваться теоремой сложения для цилиндрических функций, которая позволяет разложить функции Бесселя J_0, J_1, J_2 от аргумента (X.5.10) в ряд по парным произведениям функций Бесселя от аргумента $\frac{\varepsilon}{c_0^2} A\omega x$.

При этом из выражения (X.5.7) удастся получить формулу, описывающую в чистом виде искажение шумовой компоненты:

$$S^{(N)}(\omega, x) = -\frac{\sigma^2}{\pi} J_0^2\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} A\omega x\right) \int_0^\infty R'e^{\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right)^2 (R-1)} \frac{\sin \omega\eta}{\omega} d\eta. \quad (\text{X.5.11})$$

Результат (X.5.11) отличается от соответствующего ему выражения (X.2.11) наличием множителя J_0^2 , который учитывает нелинейные потери из-за присутствия регулярной части возмущения ($A \neq 0$).

Более сложные выкладки связаны с выделением членов, описывающих рождение новых участков спектра в процессе взаимодействия сигнала с шумом. Удерживая во всех трех выражениях (X.5.7) — (X.5.9) члены при $\sin \omega_0\eta$ или $\cos \omega_0\eta$, после ряда преобразований придем к следующему результату:

$$\begin{aligned} S^{(N, S)}(\omega, x) = \\ = -\frac{\sigma^2}{\pi} J_1^2\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} A\omega x\right) \int_0^\infty R'e^{\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma\omega x\right)^2 (R-1)} \frac{\sin(\omega - \omega_0)\eta}{\omega - \omega_0} d\eta. \end{aligned} \quad (\text{X.5.12})$$

Заметим, что структура интегралов в выражении для $S^{(N)}$ и $S^{(N, S)}$ одинакова. Этот факт значительно облегчает физический анализ полученных формул.

Наконец, разложение (X.5.9) в ряд содержит член, описывающий динамику спектральной линии сигнала:

$$S^{(S)}(\omega, x) = \frac{A^2}{2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \sigma \omega_0 x\right)^2} \left[\frac{2J_1\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega_0 x\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} A \omega_0 x\right)} \right]^2 \delta(\omega - \omega_0). \quad (\text{X.5.13})$$

Легко видеть, что в результате нелинейного взаимодействия с шумовой компонентой и генерации собственных гармоник величина спектральной плотности сигнала уменьшается, однако форма спектра $S^{(S)}$ сохраняет свой дельтаобразный вид.

В качестве иллюстрации нелинейных процессов, описываемых полученными формулами, рассмотрим конкретный пример.

Пусть корреляционная функция шума на входе равна

$$R(\eta) = (1 - 2\gamma^2 \eta^2) e^{-\gamma^2 \eta^2} \quad (\text{X.5.14})$$

(в точности такая же $R(\eta)$ рассматривалась в § 2). Вычисляя для этого случая интегралы (X.5.11), (X.5.12), придем к результатам, изображенным на рис. X.6 в безразмерных координатах $\Omega = \omega/2\gamma$, $\tilde{S} = \sqrt{\pi}\gamma S/\sigma^2$. При построении графиков полагалось $\Omega_0 = \omega_0/2\gamma = 5$, $A = \sigma/2$, а переменная $X = \varepsilon c_0^{-2} \sigma \gamma x$ принимала последовательно значения $X_0 = 0$, $X_1 = 1/48$, $X_2 = 1/36$, $X_3 = 1/24$, $X_4 = 1/12$, $X_5 = 1/6$.

На расстоянии от X_0 до X_5 исходный спектр шумового возмущения претерпевает относительно слабые искажения, обнаруживающие тенденцию (см. § 2) к перераспределению энергии как в область более низких, так и в область более высоких частот.

Особый интерес представляет рассмотрение динамики новой области спектра, рождающейся в окрестности $\Omega = \Omega_0$. Ширина этого «пьедестала» на малых расстояниях равна примерно удвоенной ширине спектра шумового возмущения; каждое из «крыльев» по обе стороны Ω_0 повторяет исходную форму шумового спектра. Принципиально важно отметить несимметричную (относительно $\Omega = \Omega_0$)

форму пьедестала. Его высокочастотное крыло имеет большую амплитуду и быстрее растет в результате нелинейной подкачки энергии, что является проявлением тенденции Мэнли — Роу. Постепенно впадина между двумя крыльями исчезает при $X \approx X_3$, и оба крыла пьедестала сливаются в единую широкую линию, энергетический

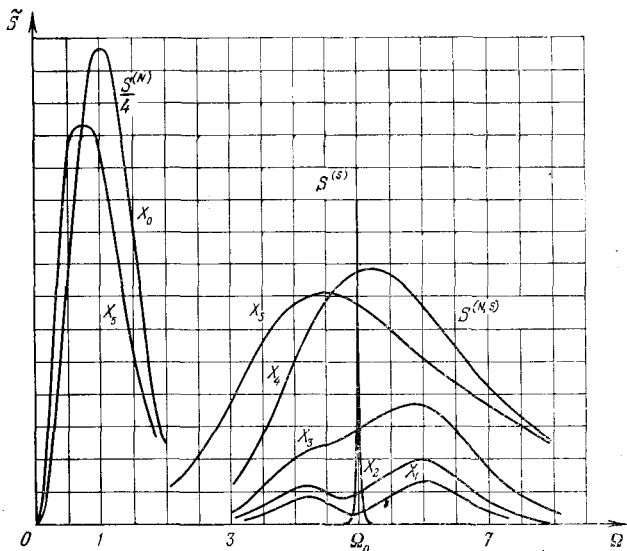


Рис. X.6. Процесс взаимодействия шумового спектра $S^{(N)}$ со спектральной линией $S^{(S)}$ регулярного сигнала. Происходит как деформация исходных спектральных распределений $S^{(N)}$, $S^{(S)}$, так и **рождение новых участков спектра $S^{(N,S)}$.**

центр которой смещен в область частот $\Omega > \Omega_0$. В дальнейшем эта линия еще больше увеличивается по амплитуде до $X \approx X_4$, а затем наступает этап растекания по спектру (см. $X = X_5$), причем опять-таки наибольшая доля энергии перекачивается в высшие частоты.

Движение энергетического центра вверх по спектру в процессе взаимодействия с низкочастотным шумом аналогично известному эффекту ускорения Ферми. Такая

аналогия очевидна в случае, если спектральная линия сигнала имеет сколь угодно малую, но конечную ширину. При этом линия рано или поздно сольется с образовавшимся у ее подножия пьедесталом, и говорить о положении линии будет уже невозможно. На этом этапе нужно следить за движением энергетического центра всего комплекса как целого.

Полная картина, однако, оказывается более сложной. Учет высших членов в разложениях формул (X.5.7) — (X.5.9) дает новые спектральные комплексы в окрестности частот $n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Нужно подчеркнуть, что при рассмотрении нелинейной динамики суперпозиции регулярной и шумовой волн с целью упрощения специально все время говорилось о таком расположении спектральной линии сигнала, когда она не перекрывается со спектром случайного возмущения. Разумеется, полученные решения позволяют рассмотреть и общий случай. Если исходные спектральные распределения сигнала и шума перекрываются, то динамика процесса оказывается более сложной и разбиение $S(\omega, x)$ на составляющие $S^{(N)}$, $S^{(N, S)}$, $S^{(S)}$ при $x \neq 0$ становится формальной процедурой.

Именно последний случай часто встречается на практике. Так, спектры кавитации [8], реактивных двигателей и некоторых других источников интенсивного шума состоят из дискретных линий, расположенных на фоне широкополосных шумов. Поскольку в соответствии с изложенной выше теорией широкий спектр воспроизводится у подножия каждой дискретной составляющей, нетрудно сделать вывод о быстром нарастании сплошной части спектра по мере распространения звука в среде. Кроме того, по измерениям «усиленного» широкополосного шума можно судить о структуре исходного спектра.

В заключение обсудим вопрос о нелинейном затухании звука, происходящем из-за его взаимодействия с шумовыми волнами. Уменьшение интенсивности звукового сигнала описывается формулой (X.5.13). Множитель в квадратных скобках ответствен за истощение сигнала в результате генерации его собственных гармоник. При малых амплитудах $A \rightarrow 0$ он может быть опущен. Экспоненциальный множитель в (X.5.13) описывает

уменьшение $S^{(S)}$ за счет нелинейного взаимодействия с шумом, заданным на входе.

Важно отметить, что для этого механизма в среде без дисперсии несуществен конкретный вид корреляционной функции $R(\eta)$, т. е. скорость затухания не зависит от спектра шума, а лишь от его полной интенсивности σ^2 . В общем случае шум σ^2 можно представить в виде суперпозиции теплового шума σ_t^2 , вызываемого тепловыми упругими волнами среды, и стороннего (или внешнего) шума σ_c^2 , обязанного своим происхождением другим источникам ($\sigma^2 = \sigma_t^2 + \sigma_c^2$).

Наиболее эффективно с сигнальной волной взаимодействуют те шумовые волны, которые распространяются относительно сигнала под углом, меньшим чем ширина угла синхронного взаимодействия θ . Для изотропных сред (см., например, (V.2.24))

$$\theta^2 \simeq 2\pi c_0 (\omega \pm \omega_0) / \omega \omega_0 x. \quad (\text{X.5.15})$$

Величина $\mathcal{E} = \rho_0 \sigma^2$ в (X.5.13) есть объемная плотность энергии шума «в синхронизме». Для тепловых волн следует положить $\mathcal{E} = \rho_0 \sigma^2 \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$, где $\Delta\Omega$ — телесный угол эффективного взаимодействия. Поскольку обычно $\omega \gg \omega_0$, $\theta^2 \simeq 2\pi c_0 / \omega_0 x$, то

$$\frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{\pi\theta^2}{4\pi} = \frac{\pi c_0}{2\omega_0 x}. \quad (\text{X.5.16})$$

Тогда коэффициент затухания звука согласно (X.5.13) равен

$$\alpha = \frac{\pi \varepsilon^2}{2c_0^3 \rho_0} \mathcal{E} \omega_0. \quad (\text{X.5.17})$$

Эта формула применима в том случае, когда звуковая и тепловая волны могут бесконечно долго распространяться и взаимодействовать друг с другом. Если же время жизни τ_0 тепловой волны конечно, результат (X.5.17) необходимо умножить на $\omega_0 \tau_0 / \pi$ [131]. В результате имеем

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2c_0^3 \rho_0} \mathcal{E} \tau_0 \omega_0^2. \quad (\text{X.5.18})$$

Нелинейная трактовка процесса затухания на языке фон-фононных взаимодействий преимущественно используется для вычисления коэффициентов α в твердых телах. Однако во многих случаях эта точка зрения может оказаться полезной при анализе диссипативных процессов в жидкостях и газах. Это связано с возможностью учета стороннего шума, что может привести к аномально большим коэффициентам затухания звука, учета процесса генерации гармоник и ряда других факторов [141]

Строго говоря, вопрос о взаимодействии детерминированного возмущения с распределенными шумами выходит за рамки подхода, принятого в этой главе. Здесь обсуждались те задачи, в которых волновой процесс описывался регулярным дифференциальным уравнением, а их статистический характер был обусловлен случайным возмущением на границе. Если распространение звука происходит в среде, параметры которой сами являются случайными величинами, то приходится иметь дело с уравнениями, содержащими случайные члены или коэффициенты.

Этот круг вопросов, называемый условно «статистикой среды» (по терминологии [142]), наряду с рассмотренными в гл. X нелинейными задачами, связанными со «статистикой поля», начал изучаться недавно [143, 144 *]. Учитывая большой интерес к проблемам статистической нелинейной акустики и их практическую значимость, можно в дальнейшем ожидать здесь появления новых интересных результатов **).

* * *

В заключение авторы хотели бы подчеркнуть, что принятый характер изложения и объем книги не позволили отразить в ней многие важные вопросы, которые обычно относят к нелинейной акустике. По этим же причинам библиография ни в коей мере не претендует на полноту. Так, например, задачи расчета параметрических излучателей и приемников ультразвука (устройств, находящихся все большее применение), удельный вес которых в

*) Краткий обзор этих результатов дан в [145].

**) В работе [146] обсуждается подход, основанный на кинетических уравнениях для функции плотности вероятности.

литературе последних лет очень велик, не отражены в книге вовсе. Среди других проблем, исследование которых с нашей точки зрения обещает быть перспективным, можно отметить описание процессов лазерной генерации звуковых возмущений [147, 148], распространения нелинейных волн в волноводах [149], вынужденных колебаний резонаторов. Некоторые из рассмотренных в книге вопросов, такие как распространение пучков нелинейных возмущений, исследованы в настоящее время недостаточно; здесь предстоит еще разобраться в особенностях фокусировки и самовоздействия (прежде всего теплового) периодических ударных волн. Проблема создания эффективно работающего параметрического усилителя также далека от завершения.

Наконец, мы совершенно не касались нелинейной акустики твердых тел [150, 151]. Здесь возникает большое количество дополнительных взаимодействий, связанных с наличием многих типов волн и разнообразием свойств реальных сред. Изучение этого круга явлений важно как само по себе, так и применительно к проблемам физики твердого тела, поскольку зависимость процессов от интенсивности волны дает в руки исследователей новый параметр для познания свойств и структуры вещества.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гос-техиздат, 1954.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, 1963.
3. Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, 1950.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, «Наука», 1966.
5. Станюкович К. П., Неустановившиеся движения сплошной среды, «Наука», 1971.
6. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Введение в нелинейную акустику, «Наука», 1966.
7. Остроумов Г. А., Основы нелинейной акустики, Изд-во ЛГУ, 1967.
8. Мощные ультразвуковые поля, под ред. Л. Д. Розенберга, «Наука», 1968.
9. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона, т. II, ч. Б, «Мир», 1969.
10. Ахманов С. А., Хохлов Р. В., Проблемы нелинейной оптики, ВИНТИ, 1964.
11. Яриш А., Квантовая электроника и нелинейная оптика, «Сов. радио», 1973.
12. Катаев И. Г., Ударные электромагнитные волны, «Сов. радио», 1963.
13. Цытович В. Н., Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967.
14. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б., Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, «Наука», 1973.
15. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И., Изв. ВУЗов, Радиофизика 13, 2, 163 (1970).
16. Кадоццев Б. Б., Карпман В. И., УФН 103, 2, 193 (1971).
17. Карпман В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, «Наука», 1973.
18. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
19. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952.
20. Poisson S. D., J. école polytechn. (Paris) 7, 364 (1808).
21. Stokes G. G., Phil. Mag. 33, 349 (1848).

22. *Airy G. B.*, Phil. Mag. **34**, 401 (1849).
23. *Earnshaw S.*, Trans. Roy. Soc. (London) **150**, 133 (1860).
24. *Riemann B.*, Götting. Abhandl. **8**, 1860. (Русский перевод: Риман Б., Сочинения, Гостехиздат, 1948).
25. *Эйхенвальд А. А.*, УФН **14**, 552 (1934).
26. *Мясников Л. Л.*, ЖТФ **8**, 1869 (1938).
27. *Михайлов Г. Д.*, ДАН СССР **89**, 4, 663 (1953).
28. *Горелик А. Г.*, *Зверев В. А.*, Акуст. ж. **1**, 4, 339 (1955).
29. *Зарембо Л. К.*, *Красильников В. А.*, *Шкловская-Корди В. В.*, ДАН СССР **109**, 3, 485 (1956).
30. *Зарембо Л. К.*, *Красильников В. А.*, *Шкловская-Корди В. В.*, Акуст. ж. **3**, 1, 29 (1957).
31. *Зарембо Л. К.*, *Красильников В. А.*, *Шкловская-Корди В. В.*, ДАН СССР **109**, 4, 731 (1956).
32. *Гольдберг З. А.*, Акуст. ж. **3**, 4, 322 (1957).
33. *Наугольных К. А.*, Акуст. ж. **4**, 2, 115 (1958).
34. *Наугольных К. А.*, *Романенко Е. В.*, Акуст. ж. **4**, 2, 200 (1958).
35. *Буров В. А.*, *Красильников В. А.*, ДАН СССР **118**, 5, 920 (1958).
36. *Полякова А. Л.*, ДАН СССР **122**, 1, 51 (1958).
37. *Наугольных К. А.*, Акуст. ж. **5**, 1, 80 (1959).
38. *Полякова А. Л.*, Акуст. ж. **5**, 1, 85 (1959).
39. *Романенко Е. В.*, Акуст. ж. **5**, 1, 101 (1959).
40. *Гольдберг З. А.*, Акуст. ж. **5**, 1, 118 (1959).
41. *Буров В. А.*, *Красильников В. А.*, ДАН СССР, **124**, 3, 571 (1959).
42. *Зарембо Л. К.*, Акуст. ж. **6**, 1, 43 (1960).
43. *Гольдберг З. А.*, Акуст. ж. **6**, 2, 307 (1960).
44. *Полякова А. Л.*, Акуст. ж. **6**, 3, 356 (1960).
45. *Романенко Е. В.*, Акуст. ж. **6**, 3, 374 (1960).
46. *Романенко Е. В.*, Акуст. ж. **7**, 1, 103 (1961).
47. *Burgers J. M.*, Advances in Mech., v. 1, 1948. (Русский перевод: В сб. «Проблемы механики», под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана, ИЛ, 1955.)
48. *Norf E.*, Comm. Pure Appl. Math. **3**, 201 (1950).
49. *Cole J. D.*, Quart Appl. Math., **9**, 3, 225 (1951).
50. *Mendousse J. S.*, JASA **25**, 1, 51 (1953).
51. *Lighthill M. J.*, Survey in Mechanics, Cambridge, 1956.
52. *Хохлов Р. В.*, Радиотехн. и электроники **6**, 6, 1116 (1961).
53. *Солуян С. И.*, *Хохлов Р. В.*, Вестн. МГУ, Физ., астр., № 3, 52 (1961).
54. *Наугольных К. А.*, *Солуян С. И.*, *Хохлов Р. В.*, Вестн. МГУ, Физ., астр., № 4, 54 (1962).
55. *Наугольных К. А.*, *Солуян С. И.*, *Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **9**, 1, 54 (1963).
56. *Полякова А. Л.*, *Солуян С. И.*, *Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **8**, 1, 107 (1962).
57. *Заболотская Е. А.*, *Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **15**, 1, 40 (1969).
58. *Руденко О. В.*, *Солуян С. И.*, *Хохлов Р. В.*, Вестн. МГУ, Физ., астр., № 5, 33 (1969).
59. *Fubini-Ghiron S.*, Alta Frequenza **4**, 530 (1935).

60. *Fay R. D.*, JASA **3**, 222 (1931).
61. *Солуян С. И., Хохлов Р. В.*, ЖЭТФ **41**, 2, 8, 534 (1961).
62. *Khokhlov R. V., Naugol'nykh K. A., Soluyan S. I.*, Acustica **14**, 5, 248 (1964).
63. *Руденко О. В., Солуян С. И.*, ДАН СССР **190**, 4, 815 (1970).
64. *Руденко О. В., Солуян С. И.*, Акуст. ж. **18**, 3, 421 (1972).
65. *Стокер Дж. Дж.*, Волны на воде, ИЛ, 1959.
66. Сб. «Нелинейная теория распространения волн», под ред. М. Дж. Лайтхилла, «Мир», 1970.
67. *Руденко О. В., Солуян С. И.*, Акуст. ж. **16**, 1, 161 (1970).
68. *Солуян С. И., Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **8**, 2, 220 (1962).
69. *Khokhlov R. V., Soluyan S. I.*, Acustica **14**, 5, 241 (1964).
70. *Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **9**, 2, 192 (1963).
71. *Новиков Б. К., Солуян С. И.*, Вестн. МГУ, Физ., астр. № **5**, 568 (1974).
72. *Зверев В. А., Калачев А. И.*, Акуст. ж. **14**, 2, 214 (1968).
73. *Зверев В. А., Калачев А. И.*, Акуст. ж. **15**, 3, 369 (1969).
74. *Зарембо Л. К.*, Автореф. докт. дисс., МГУ, физ. ф-т, 1971.
75. *Андреев Н. Н.*, В сб. «Исследования по экспериментальной и теоретической физике. Памяти Ландсберга», Изд-во АН СССР, 1959, стр. 53.
76. *Зарембо Л. К.*, Акуст. ж. **13**, 2, 298 (1967).
77. *Старунов В. С., Фабелинский И. Л.*, УФН **98**, 3, 441 (1969).
78. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона, т. IV, ч. А, «Мир», 1969.
79. *Woa-Teh-Chu, Kovasznay L. S. G.*, J. Fluid Mech. **3**, 494 (1958).
80. *Фабелинский И. Л.*, Молекулярное рассеяние света, «Наука» 1965.
81. *Пушкина Н. И., Хохлов Р. В.*, ЖЭТФ **57**, 1263 (1969).
82. *Lighthill M. J.*, Proc. Roy. Soc. (London) A **211**, 564 (1952).
83. *Lighthill M. J.*, Proc. Roy. Soc. (London) A **222**, 1 (1954).
84. *Татарский В. И.*, Распространение волн в турбулентной атмосфере, «Наука», 1967.
85. *Пушкина Н. И., Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **17**, 1, 167 (1971).
86. *Зельдович Б. Я., Собельман И. И.*, УФН **101**, 1, 3 (1970).
87. *Руденко О. В.*, Акуст. ж. **20**, 1, 108 (1974).
88. *Ляхов Г. А., Руденко О. В.*, Акуст. ж. **20**, 5, 738 (1974).
89. *Рытов С. М.*, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», 1966.
90. *Клышко Д. Н.*, Письма в ЖЭТФ **6**, 1, 490 (1967).
91. *Заболотская Е. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*, Акуст. ж. **12**, 2, 188 (1966).
92. *Shiren N. S.*, Appl. Phys. Lett. **4**, 4, 82 (1964).
93. *Зарембо Л. К., Сердобольская О. Ю., Чернобай И. П.*, Акуст. ж. **18**, 3, 397 (1972).
94. *Островский Л. А., Папилова И. А.*, Акуст. ж. **19**, 1, 67 (1973).
95. *Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М.*, Письма в ЖЭТФ **15**, 8, 456 (1972).
96. *Заболотская Е. А., Солуян С. И.*, Акуст. ж. **13**, 2, 296 (1967).

97. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В., Акуст. ж. 15, 3, 414 (1969).
98. Руденко О. В., Солуян С. И., Труды МИНХ 96, 7 (1970).
99. Ивановский А. И., Теоретическое и экспериментальное изучение потоков, вызванных звуком, Гидрометеиздат, 1959.
100. Eskart C., Phys. Rev. 73, 1, 68 (1948).
101. Наугольных К. А., ДАН СССР 123, 6, 1003 (1958).
102. Статников Ю. Г., Акуст. ж. 13, 1, 146 (1967).
103. Руденко О. В., Солуян С. И., Акуст. ж. 17, 1, 122 (1971).
104. Руденко О. В., Солуян С. И., Акуст. ж. 17, 2, 273 (1971).
105. Rudenko O. V., Semanova N. G., Soluyan S. I., VII Int. Congr. Acoust., Budapest, 4, 401 (1971).
106. Pigott M. T., Strum R. C., JASA 41, 3, 662 (1967).
107. Семенова Н. Г., Труды VI Всес. акустич. конф., Москва, 1968.
108. Руденко О. В., Солуян С. И., Труды МИНХ 96, 108 (1970).
109. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В., Акуст. ж. 16, 1, 49 (1970).
110. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. Труды VIII Всес. акуст. конф., Москва, 1973.
111. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В., Акуст. ж. 19, 6, 871 (1973).
112. Заболотская Е. А., Автореф. канд. дисс., МГУ, физ. ф-т, 1968.
113. Маложинец Г. Д., УФН 69, 2, 321 (1959).
114. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В., УФН 93, 19 (1967).
115. Кузнецов В. П., Акуст. ж. 16, 4, 548 (1970).
116. Наугольных К. А., Рой Н. А., Электрические разряды в воде, «Наука», 1971.
117. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Статистические явления в нелинейной оптике, Изд-во МГУ, 1971.
118. Руденко О. В., Чиркин А. С., Акуст. ж. 20, 2, 297 (1974).
119. Руденко О. В., Чиркин А. С., Труды VIII Всес. акуст. конф., Москва, 1973.
120. Руденко О. В., Чиркин А. С., ДАН СССР 214, 5, 1045 (1974).
121. Зарембо Л. К., Акуст. ж. 7, 2, 189 (1961).
122. Кузнецов В. П., Труды VI Всес. акуст. конф., Москва, 1968.
123. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З., ДАН СССР 192, 2, 297 (1970).
124. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И., ДАН СССР 208, 4, 794 (1973).
125. Кузнецов В. П., Акуст. ж. 16, 1, 155 (1970).
126. Наугольных К. А., Рыбак С. А., Акуст. ж. 20, 1, 157 (1974).
127. Руденко О. В., Чиркин А. С., Труды VI Всес. симп. по дифр. и распр. волн, Ереван, 1, 457 (1973).
128. Руденко О. В., Чиркин А. С., Радиотехн. и электроника 19, 10, 2170 (1974).
129. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Акуст. ж. 18, 4, 590 (1972).
130. Руденко О. В., Чиркин А. С., ЖЭТФ 67, 5, 1903 (1974).
131. Клеменс П., Динамика решетки (Физическая акустика, под ред. У. Мэзона, т. 3, ч. Б), «Мир», 1968.
132. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В., Акуст. ж. 20, 3, 449 (1974).

133. *Blackstock D. T.*, JASA 39, 6, 1019 (1966).
134. *Blackstock D. T.*, JASA 36, 3, 534 (1964).
135. *Абдуллин У. А., Ляхов Г. А., Руденко О. В., Чиркин А. С.*, ЖЭТФ 66, 3 (1974).
136. *Воляк К. И., Горшков А. С., Руденко О. В.*, Вестн. МГУ, Физ., астр. № 1, 68 (1975)
137. *Островский Л. А., Папилова И. А.*, Акуст. ж. 20, 1, 79 (1974).
138. *Shooter J. A., Muir T. G., Blackstock D. T.*, JASA, 55, 1, 54 (1974).
139. *Pernet D. F., Payne R. C.*, J. Sound Vib. 17, 3, 383 (1971).
140. *Pestorius F. M., Blackstock D. T.*, 1973 — Symposium on finite amplitude wave effects in fluids, 1.3, Copenhagen (1973).
141. *Красильников В. А., Руденко О. В., Чиркин А. С.*, Акуст. ж. 21, 1, 124 (1975).
142. *Ахманов С. А.*, Изв. вузов, Радиофизика 17, 4, 541 (1974).
143. *Howe M. S.*, J. Fluid Mech. 45, 4, 785 (1971).
144. *George A. R., Plotkin K. I.*, Phys. Fluids 14, 3, 548 (1971).
145. *Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е.*, Изв. вузов, Радиофизика 17, 6, 875 (1974).
146. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*, Изв. вузов, Радиофизика 17, 5, 699 (1974).
147. *Бункин Ф. В., Комиссаров В. М.*, Акуст. ж. 19, 3, 305 (1973).
148. *Руденко О. В.*, Письма в ЖЭТФ 20, 7, 445 (1974).
149. *Nayfeh A. H., Tsai M.-S.*, JASA 55, 6, 1166 (1974).
150. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.*, УФН 102, 4, 549 (1970).
151. *Леманов В. В., Смоленский Г. А.*, Акуст. ж. 20, 3, 426 (1974).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
§ 1. Линейная акустика. Уравнения и границы применимости (9). § 2. Сведения из теории ударных волн (16).	
Глава I. Плоские волны конечной амплитуды в средах без дисперсии	19
§ 1. Спектральный подход к нелинейным волнам (19). § 2. Простые волны в нелинейной акустике (22). § 3. Графический анализ деформации профиля простой волны (26). § 4. Образование разрывов в простой волне (30). § 5. Распространение волн Римана (в рамках второго приближения) (33)	
Глава II. Плоские волны конечной амплитуды в средах без дисперсии (вязкая теплопроводящая среда)	42
§ 1. Вывод уравнения Бюргерса (42). § 2. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения (46). § 3. Решение уравнения Бюргерса для периодического возмущения (строгое решение) (50). § 4. Решения уравнения Бюргерса для неперiodических возмущений (57).	
Глава III. Сферические и цилиндрические волны конечной амплитуды	65
§ 1. Вывод уравнений (65). § 2. Среда без диссипации (67). § 3. Диссипативная среда. Квазистационарные решения (71). § 4. Структура цилиндрической ударной волны. Автомодельный подход (73). § 5. Общая структура пространственно-симметричных волн с учетом нелинейности и диссипации (76). § 6. Особенности распространения сходящихся и расходящихся волн (78).	
Глава IV. Звуковые волны в диспергирующих средах	82
§ 1. О дисперсионных свойствах среды. Среда с релаксацией (82). § 2. Слабая и сильная дисперсия (88). § 3. Распространение конечных возмущений в релаксирующей среде (92).	

Глава V. Взаимодействие звуковых волн	101
§ 1. Коллинеарное взаимодействие плоских волн (101).	
§ 2. Рассеяние звука на звуке (113). § 3. Стоячие волны конечной амплитуды (127). § 4. О взаимодействии звука с волнами иного вида (138)	
Глава VI. Параметрические явления в звуковых волнах	145
§ 1. О трехчастотном параметрическом взаимодействии (145). § 2. Параметрическое усиление звука в средах без дисперсии (153). § 3. Параметрическое усиление звука в искусственных системах с дисперсией (163).	
Глава VII. Нелинейное самовоздействие волн. Эффекты высших порядков	177
§ 1. Газодинамический подход к теории распространения волн конечной амплитуды (177). § 2. Расчет отраженных от разрывов волн (180). § 3. Постоянная составляющая как следствие нелинейного самовоздействия волн (186). § 4. Модифицированный нелинейно-акустический подход. Простые волны с учетом отражения (189).	
Глава VIII. Акустические течения	197
§ 1. Вывод системы уравнений для акустических течений (197). § 2. Эккартовские течения (202). § 3. Неоднородные течения (208). § 4. Другие типы течений (217). § 5. Законы подобия и классификация акустических течений (222).	
Глава IX. Распространение ограниченных звуковых пучков	224
§ 1. Уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков (224). § 2. Параболическое уравнение. Некоторые задачи линейной теории дифракции (227). § 3. Нелинейные эффекты в звуковых пучках (232). § 4. Приближенные решения при больших и малых числах N (235). § 5. Нелинейная геометрическая акустика. Искажение однополярных возмущений (240).	
Глава X. О статистических явлениях в нелинейной акустике	251
§ 1. Случайно-модулированные звуковые волны (251). § 2. Общая теория нелинейной эволюции спектров случайных звуковых полей при отсутствии диссипации (261). § 3. Взаимодействие модулированных волн (267). § 4. О квазигармонических сигналах при наличии только фазовых флуктуаций (270). § 5. О взаимодействии регулярных волн со случайными (273).	
Цитированная литература	283