Д. Рюэль

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

R&C
Dynamics

GIAN-CARLO ROTA, *Editor*

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Volume 5

Section: Statistical Mechanics
Giovanni Gallavotti, Section Editor

Thermodynamic Formalism

The Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics

David Ruelle

Institut des Hautes Etudes Scientifiques

With a Foreword by
Giovanni Gallavotti
Università di Roma

1978

Addison-Wesley Publishing Company
Advanced Book Program
Reading, Massachusetts

London · Amsterdam · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo

Д. Рюэль

Термодинамический формализм

Перевод с английского Б. М. Гуревича

R&C Dynamics РХД
Москва • Ижевск

2002

УДК 530.132, 514.74

Рюэль Д.
Термодинамический формализм. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 288 стр.

Предлагаемая книга одного из создателей термодинамического формализма Д. Рюэля основывается на курсе лекций, прочитанных автором. В ней с математической точки зрения обсуждаются как традиционные вопросы статистической механики — распределение Гиббса, фазовые переходы и др., так и более современные вопросы, связанные с теорией динамических систем, топологической динамикой, исследованием инвариантных мер диффеоморфизмов.

В книгу также вошла более поздняя статья Д. Рюэля по динамическим дзета-функциям.

Будет полезна физикам и математикам, специализирующимся в области статистической механики и теории динамических систем.

ISBN 5-93972-115-X

http://rcd.ru

Оглавление

We haven’t seen everything yet,
but when we do
it won’t be for the first time
or the last, either.
You know us.

J. Vinograd[1]

---

[1] По сообщению автора, цитата взята из стихотворения "Bikers", опубликованного в поэтическом сборнике Julia Vinograd. "Street Spices". Thorp Spring Press, Berkeley Cal., 1973. — *Прим. ред.*

Предисловие редактора перевода

В этом издании объединены переводы на русский язык двух монографий Рюэля. Одна из них — «Thermodynamic formalism» — опубликована в 1978 г., другая — «Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval» — в 1994 г. Время выхода в свет оригиналов — не единственное, что разделяет эти книги. В первой излагается современный математический аппарат статистической физики, вторая, без сомнения, относится к теории динамических систем. По-видимому, необходимо объяснить читателю, почему мы, тем не менее, считаем совместную публикацию названных книг целесообразной и почему первая из них, несмотря на ее солидный возраст, не кажется нам устаревшей. Для этого необходимо остановиться на том, что́ принято сейчас понимать под термодинамическим формализмом.

По аналогии с формализмом дифференциального и интегрального исчисления можно было бы думать, что термодинамический формализм — это совокупность соотношений между термодинамическими величинами, таких, например, как уравнение состояния или вариационный принцип. Однако содержание книги Рюэля, который, вероятно, первым начал употреблять этот термин, показывает, что речь идет о математических методах статистической физики, основанных на введенном в конце 60-х годов Р. Л. Добрушиным и, независимо, О. Лэнфордом и Д. Рюэлем понятии гиббсовского состояния (синонимы: ДЛР-состояние, гиббсовская мера, гиббсовское случайное поле). Но и это еще не все: сегодня термодинамический формализм скорее воспринимается даже не как часть статистической физики, а как идеологически близкий к ней раздел теории динамических систем. Такое изменение произошло, в частности, под влиянием статьи Я. Г. Синая [4], опубликованной еще до книги Рюэля, да и содержание некоторых глав этой книги (особенно глав 6 и 7), как сможет убедиться читатель, во многом способствует такому восприятию.

С этой точки зрения, присоединение к монографии, излагающей термодинамический формализм, небольшой книги того же автора, посвященной анализу динамических дзета-функций для весьма популярного класса динамических систем — одномерных отображений — уже не должно казаться чем-то странным — ведь понятие дзета-функции встречается уже в самой этой монографии, что как раз и служит одним из признаков упомянутого «динамического» взгляда на термодинамический формализм.

«Термодинамический формализм» Рюэля не был первой монографией по статистической физике, основанной на понятии гиббсовского состояния: несколькими годами раньше вышли книги Престона [1] и [2], в которых это понятие играло не менее важную роль. За прошедшие с тех пор два с лишним десятилетия появились и другие изложения этого круга идей (см., например, Синай [5], Келлер [1], Малышев и Минлос [1], Саймон [2], Израэль [3]). Особо отметим монографию Георги [3], вобравшую в себя значительную часть того, что было сделано к середине 80-х годов. Но и на этом фоне книга Рюэля не представляется лишь литературным памятником. От всех перечисленных книг она отличается двумя особенностями. Одна из них — это уже упоминавшийся динамический подход, другая состоит в том, что рассматриваемые модели статистической физики на счетном множестве, в частности, на решетке, описываются вероятностными мерами, сосредоточенными, вообще говоря, не на всем пространстве конфигураций, а лишь на множестве «допустимых» конфигураций. Это обстоятельство, которое автор считает главным признаком общности модели (см. введение), равносильно тому, что потенциал взаимодействия, определяющий модель, принимает как действительные значения, так и значение $+\infty$, или, на другом языке, что у частиц может быть твердая сердцевина. Стоит заметить, что именно модели с твердой сердцевиной, как правило, возникают при изучении динамических систем методами символической динамики, хотя теория таких моделей гораздо менее продвинута, чем теория моделей без твердой сердцевины. Таким образом, две упомянутые особенности подхода Рюэля связаны между собой.

Теперь сделаем несколько замечаний технического характера. При переводе мы старались в максимальной степени сохранить довольно своеобразный стиль автора, в частности, нигде не употребляющего слово «доказательство». Другая особенность этого стиля — его лаконичность (здесь можно только согласиться с мнением Дж. Галловотти, редактора серии, в которой вышел «Термодинамический формализм»), и чтобы помочь читателю хотя бы на первых порах, мы сочли полезным кое-где поместить краткие подстрочные пояснения (в первых главах книги их больше, чем в последующих). Лишь в одном случае потребовался более длинный комментарий, который был включен непосредственно в текст и оговорен в примечании. Книга о динамических дзета-функциях представлена в данном издании в виде последних двух глав — восьмой и девятой. В этих главах нумерация параграфов, теорем, лемм и т. д. отличается от оригинальной, так как при переводе она была включена в общую систему. Списки литературы, имевшиеся в обеих переводимых книгах, были объединены и полученный общий список несколько расширен (добавленная литература отмечена звездочкой). Последнее относится и к алфавитному указателю.

Автор проявил интерес к русскому изданию его книг и прислал список опечаток, обнаруженных в оригинальном издании «Термодинамического формализма» (некоторые другие опечатки в обеих книгах были устранены при переводе), а также несколько дополнительных замечаний и ссылок на новые работы. Мы признательны профессору Рюэлю за эту информацию, которая была полностью включена в текст перевода.

В заключение необходимо сказать, что имя Давида Рюэля, одного из создателей современной математической физики, хорошо известно всем, кто имеет хотя бы некоторое отношение к этому предмету, а отечественный читатель знаком с русским переводом его «Статистической механики», вышедшим около тридцати лет назад. Можно надеяться, что публикация на русском языке еще одной книги Рюэля окажется полезной как для студентов, так и для специалистов.

Б. Гуревич

Предисловие автора

Эта монография основана на лекциях, прочитанных на математических факультетах в Беркли (1973 г.) и Орсэ (1974–75 гг.). Моей целью было описать математические структуры, лежащие в основе термодинамического формализма равновесной статистической механики, для простейшего случая классических решетчатых спиновых систем.

Термодинамический формализм берет свое начало в физике, но он уже проник в топологическую и дифференциальную динамику, а среди его приложений — изучение инвариантных мер диффеоморфизмов Аносова (Синай [3]) и вопрос о мероморфности дзета-функции Сельберга (Рюэль [7]). Данный текст представляет собой введение как в эту проблематику, так и в более традиционные задачи статистической механики, такие как фазовые переходы. Я достаточно подробно развиваю общую теорию, обладающую значительным единством, но оставляю в стороне специальную технику, которая важна при обсуждении примеров фазовых переходов, но должна быть объектом отдельного изучения.

Статистическая механика переносится на системы гораздо более общего вида, чем рассматриваемые здесь классические решетчатые спиновые системы (например на квантовые системы). Поэтому можно предвидеть, что теория, обсуждаемая в этой монографии, будет развита для существенно более общих, с математической точки зрения (в частности, некоммутативных), ситуаций. Я надеюсь, что этот текст послужит толчком к созданию более общих теорий и к прояснению концептуальной структуры существующего формализма.

Давид Рюэль

Глава 0

Введение

0.1. Общие сведения

Формализм равновесной статистической механики — в дальнейшем мы будем называть его *термодинамическим формализмом* — развивается с тех пор, как Гиббс описал свойства некоторого класса физических систем. Эти системы состояли из большего числа элементов (приблизительно 10^{27}), подобных молекулам одного литра газа или воды. Хотя физическое обоснование термодинамического формализма остается пока недостаточным, этот формализм оказался чрезвычайно полезным при объяснении различных физических явлений.

Совсем недавно стало понятно, что термодинамический формализм скрывает очень интересные математические структуры: он натолкнул на прекрасные теоремы и в некоторой степени и на их доказательства. Помимо статистической механики термодинамический формализм и его математические методы теперь интенсивно используются в *конструктивной квантовой теории поля*[1] и при изучении некоторых *дифференцируемых динамических систем* (среди последних наиболее известны диффеоморфизмы и потоки Аносова). В обоих случаях это применение происходит на довольно абстрактном математическом уровне и, на первый взгляд, совсем не очевидно. Понятно, что изучение окружающего мира — мощный источник вдохновения для математики. То, что это вдохновение может действовать таким образом, является более нетривиальным фактом, который читатель может интерпретировать в соответствии со своими взглядами.

Основной физической проблемой, которую равновесная статистическая механика пытается объяснить, является проблема фазовых переходов. Почему, когда понижают температуру воды, ее свойства изменяются сначала достаточно гладко, а затем, при достижении точки замерзания, ситуация внезапно меняется? Хотя имеются некоторые общие соображения об этом и получено много специальных результатов, концептуальное понимание пока

[1] См., например, Вило и Вайтман [1].

достаточно противоречиво[2]. Математическое исследование термодинамического формализма на самом деле еще не закончено; эта теория является достаточно молодой, до сих пор в ней больше уделяется внимания новым идеям, чем технически сложным задачам. Данная ситуация напоминает доклассические произведения искусства, в которых вдохновение не сдерживалось необходимостью следовать стандартным техническим формам. Мы надеемся, что в какой-то степени новизна предмета присутствует и в предлагаемой монографии.

Физические системы, к которым применяется термодинамический формализм, всегда представляются бесконечными (например $\mathbb{R}^\nu$, где при $\nu = 3$ мы имеем обычный окружающий нас мир). Такая идеализация необходима, так как только бесконечные системы допускают четко выраженный фазовый переход. Большая часть термодинамического формализма связана с изучением *состояний* бесконечных систем.

Для *классических систем* состояния являются вероятностными мерами на подходящем пространстве бесконечных конфигураций; такие состояния еще могут быть рассмотрены как линейные функционалы на абелевых алгебрах (например на алгебре непрерывных функций в случае радоновых мер). Для *квантовых систем* состояниями являются линейные функционалы на неабелевых алгебрах. Благодаря своей простоте, классические системы оказались изученными намного больше, чем квантовые. На самом деле, основное внимание сконцентрировалось на простейших системах, так называемых *классических решетчатых системах*, где пространство $\mathbb{R}^\nu$ заменено на $\mathbb{Z}^\nu$ (ν-мерная кристаллическая решетка). Для таких систем пространством конфигураций является подмножество Ω множества $\prod\limits_{x\in\mathbb{Z}^\nu} \Omega_x$ (где Ω_x, например, — множество возможных значений спина или «числа заполнения» на узле решетки x). Мы будем предполагать, что множество Ω_x конечно. Благодаря групповой инвариантности (относительно $\mathbb{Z}^\nu$ или $\mathbb{R}^\nu$) изучение состояний бесконечных систем тесно связано с эргодической теорией. Однако существуют разделы термодинамического формализма, относящиеся к совершенно другим вопросам (например к проблемам аналитичности).

Предлагаемая монография предназначена, в первую очередь, математикам. Ее цель — дать представление о термодинамическом формализме, соответствующих структурах и методах. Мы ограничимся только класси-

[2] На феноменологическом уровне значительно больше известно о фазовых переходах, основное внимание было уделено критическим точкам и «критическим явлениям»; последние, однако, на данный момент не поддаются строгому изучению.

ческими решетчатыми системами несмотря на то, что термодинамический формализм обобщен на разные классы систем. Это связано, в первую очередь, с тем, что теория, имеющаяся на данный момент для таких систем, не завершена, более специфична и сопряжена с техническими трудностями. Формализм, который мы опишем, не будет напрямую применяться к задачам конструктивной квантовой теории поля, но с его помощью будут исследованы диффеоморфизмы Аносова и связанные с ними динамические системы.

Математика, скрытая в термодинамическом формализме, состоит из общепринятых методов и специальной техники. Мы ограничимся в данной монографии рассмотрением этих методов и надеемся, что дополнение по специальной технике будет издано позже. Мы будем считать, что результат не является общим, если он подразумевает, что пространство конфигураций представимо в виде $\Omega = \prod \Omega_x$, где Ω_x — конечное множество «значений спина» в узле решетки x. Таким образом, группа общепринятых методов имеет замечательную единицу. В качестве специальной техники упомянем корреляционные неравенства, метод интегральных уравнений, циклическую теорему Ли–Янга и метод Пауэрлса. Эта техника выглядит в какой-то степени обособленной от общей точки зрения, принятой в данной монографии, но часто бывает крайне элегантной. С ее помощью в различных ситуациях удается получить ряд частных результатов, представляющих тем не менее огромный интерес для физиков.

0.2. Описание термодинамического формализма

Содержание этого параграфа логически не связано с дальнейшими главами. Мы приведем здесь, с целью мотивировки и ориентации, некоторые идеи и результаты термодинамического формализма[3]. Читатель может просмотреть бегло этот материал или вообще пропустить его.

I. Конечные системы

Пусть Ω — непустое конечное множество. Для вероятностной меры σ на Ω определим *энтропию*

$$S(\sigma) = -\sum_{\xi\in\Omega} \sigma(\xi)\log\sigma(\xi),$$

[3]Отчасти мы следуем работам Семинара Бурбаки, отчет 480.

где $t \log t = 0$, если $t = 0$. Для функции $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ определим действительное число Z, называемое *статистической суммой*, и вероятностную меру ρ на Ω, которая называется *гиббсовским ансамблем*

$$Z = \sum_{\xi \in \Omega} \exp(-U(\xi)), \quad \rho(\xi) = Z^{-1} \exp(-U(\xi)). \tag{0.1}$$

Предложение (вариационный принцип). *Максимум выражения*[4]

$$S(\sigma) - \sigma(U)$$

по всем вероятностным мерам σ на Ω совпадает с $\log Z$ и достигается на единственной мере $\sigma = \rho$.

В физических приложениях Ω интерпретируется как пространство конфигураций конечной системы. Принято писать $U = \beta E$, где $E(\xi)$ является энергией конфигурации ξ и $\beta = 1/kT$, где T — абсолютная температура и k — множитель, известный как постоянная Больцмана. Проблема, почему гиббсовский ансамбль описывает тепловое равновесие (по крайней мере, для «больших систем»), когда мы заменяем величину U на βE, достаточно не проста и до сих пор полностью не выяснена. Заметим, что энергия E может зависеть от физических параметров, называемых «магнитным полем», «химическим потенциалом» и т. д. Заметим также, что при традиционном определении энергии ставят знак минус в $\exp(-\beta E)$, который на практике является небольшим нюансом. В дальнейшем мы будем пропускать множитель β в определении U и будем называть эту величину *энергией*. Из всего вышесказанного мы должны уяснить, что гиббсовский ансамбль является интересным объектом для исследования при переходе к пределу «больших систем».

Термодинамический формализм изучает меры, похожие на гиббсовский ансамбль ρ в известном предельном переходе, при котором пространство Ω становится бесконечным, но при этом появляются некоторые дополнительные структуры. По аналогии с вариационным принципом указанного выше предложения можно определить *равновесные состояния* (см. II ниже), а по аналогии с определением (0.1) можно ввести *гиббсовские состояния* (см. III ниже).

[4]Мы будем писать $\sigma(U) = \sum_{\xi} \sigma(\xi) U(\xi)$ или, в общем случае, $\sigma(U) = \int U(\xi) \sigma(d\xi)$.

II. Термодинамический формализм на метрическом компактном множестве

Пусть Ω — непустое метрическое компактное пространство и $x \to \tau^x$ — гомеоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}^\nu$ $(\nu \geqslant 1)$ в группу гомеоморфизмов пространства Ω. Будем говорить, что гомеоморфизм τ является *разделяющим*, если для некоторой метрики d, совместимой с топологией Ω, существует такое $\delta > 0$, что

$$(d(\tau^x\xi,\, \tau^x\eta) \leqslant \delta \text{ при всех } x) \Longrightarrow (\xi = \eta).$$

Определение давления. Если $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_j)$ — покрытия пространства Ω, то по определению покрытие $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ состоит из множеств $\mathfrak{A}_i \bigcap \mathfrak{B}_j$. Очевидно, это определение распространяется на любое конечное семейство покрытий. Положим

$$\tau^{-x}\mathfrak{A} = (\tau^{-x}\mathfrak{A}_i),$$

$$\mathfrak{A}^\Lambda = \bigvee_{x\in\Lambda} \tau^{-x}\mathfrak{A}, \text{ если } \Lambda \in \mathbb{Z}^\nu,$$

$$\operatorname{diam}\mathfrak{A} = \sup_i \operatorname{diam}\mathfrak{A}_i,$$

где $\operatorname{diam}\mathfrak{A}_i$ является диаметром множества $\operatorname{diam}\mathfrak{A}_i$ относительно метрики d на пространстве Ω.

Определение давления, которое будет сейчас дано нами, человеку, незнакомому с предметом, покажется непростым и неестественным. Однако это не должно пугать читателя: в дальнейшем оно даст нам возможность коротко сформулировать утверждения основных теорем статистической механики. Кроме того, это определение встретится только в главе 6, где мы введем его после дополнительных приготовлений.

Обозначим через $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Omega)$ пространство непрерывных действительных функций на Ω. Пусть $A \in \mathscr{C}$, $\mathfrak{A}$ — конечное открытое покрытие пространства Ω и Λ — конечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$. Положим

$$Z_\Lambda(A,\, \mathfrak{A}) = \min\Big\{\sum_j \exp\Big[\sup_{\xi\in\mathfrak{B}_j} \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\xi)\Big] : (\mathfrak{B}_j) - \text{ подпокрытие } \mathfrak{A}^\Lambda\Big\}.$$

Если $a^1, \ldots, a^\nu$ — положительные целые числа, то положим $a = (a^1, \ldots, a^\nu)$ и

$$\Lambda(a) = \{(x^1, \ldots, x^\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : 0 \leqslant x^i < a^i \text{ при } i = 1, \ldots, \nu\}.$$

Функция $a \to \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$ является субаддитивной. Поэтому существует предел

$$P(A, \mathfrak{A}) = \lim_{a^1, \ldots, a^\nu \to \infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}) = \inf_a \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}),$$

где $|\Lambda(a)| = \operatorname{card} \Lambda(a) = \prod_i a^i$. Положим

$$P(A) = \lim_{\operatorname{diam} \mathfrak{A} \to 0} P(A, \mathfrak{A}).$$

Функция $P\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ называется топологическим *давлением*. Величина $P(A)$ конечна при всех $A \in \mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда $P(0) < +\infty$. В этом случае функция P является непрерывной (относительно топологии равномерной сходимости в $\mathscr{C}$) и выпуклой. Величина $P(0)$ называется *топологической энтропией*. Она является мерой скорости перемешивания действия τ.

Энтропия инвариантной меры. Для вероятностной меры σ на Ω и конечного борелевского разбиения $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$ пространства Ω положим

$$H(\sigma, \mathfrak{A}) = -\sum_i \sigma(\mathfrak{A}_i) \log \sigma(\mathfrak{A}_i).$$

Множество действительных мер на Ω образуют пространство $\mathscr{C}^*$, сопряженное к $\mathscr{C}$. Топология сходимости на элементах пространства $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}^*$ называется $*$-слабой топологией. Пусть $I \subset \mathscr{C}^*$ — множество вероятностных мер, инвариантных относительно τ, т. е. таких мер σ, что $\sigma(A) = \sigma(A \circ \tau^x)$ при всех $A \in \mathscr{C}$. Тогда множество I является выпуклым и компактным относительно $*$-слабой топологии. Для конечного борелевского разбиения пространства Ω и меры $\sigma \in I$ положим

$$h(\sigma, \mathfrak{A}) = \lim_{a^1, \ldots, a^\nu \to \infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} H(\sigma, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)}) = \inf_a \frac{1}{|\Lambda(a)|} H(\sigma, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)});$$

$$h(\sigma) = \lim_{\operatorname{diam} \mathfrak{A} \to 0} h(\sigma, \mathfrak{A}).$$

Функция $h\colon I \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$ является аффинной и называется *метрической энтропией*. Если τ разделяет траектории, то h конечна и полунепрерывна сверху на множестве I (относительно $*$-слабой топологии).

Теорема 1 (вариационный принцип).

$$P(A) = \sup_{\sigma \in I}\bigl(h(\sigma) + \sigma(A)\bigr)$$

при всех $A \in \mathscr{C}$.

Теорема 1 соответствует вариационному принципу для конечных систем, если $-A$ интерпретировать как вклад в энергию от одного узла решетки.

Предположим, что функция P конечна. Определим множество I_A *равновесных состояний* для $A \in \mathscr{C}$, положив

$$I_A = \{\sigma \in I \colon h(\sigma) + \sigma(A) = P(A)\}.$$

Заметим, что множество I_A может быть пустым.

Теорема 2. *Предположим, что функция h конечна и полунепрерывна сверху на множестве I (относительно $*$-слабой топологии). Тогда*

(a) $I_A = \{\sigma \in \mathscr{C}^* \colon P(A+B) \geqslant P(A) + \sigma(B)$ *при всех* $B \in \mathscr{C}\}$. *Это множество непусто; оно выпукло, компактно и является симплексом Шоке и фасадом множества I.*

(b) *Множество $D = \{A \in \mathscr{C} \colon \operatorname{card} I_A = 1\}$ является массивным в пространстве $\mathscr{C}$.*

(c) *Для любого $\sigma \in I$ справедливо равенство*

$$h(\sigma) = \inf_{A \in \mathscr{C}}(P(A) - \sigma(A)).$$

То, что множество I_A является метрическим симплексом, означает, что каждый элемент $\sigma \in I$ имеет единственное интегральное представление как барицентр меры с носителем в множестве крайних точек I_A. Известно, что множество I также является симплексом. Свойство множества I_A быть фасадом множества I означает, что крайние точки I_A содержатся в множестве крайних точек I (т. е. являются эргодическими мерами на Ω).

III. Статистическая механика на решетке

Теоремы, приведенные выше, обобщают результаты, известные для конкретных систем статистической механики (классических решетчатых систем). Например, если F является непустым конечным множеством (с дискретной топологией), то мы можем в качестве Ω взять пространство $F^{\mathbb{Z}^\nu}$

с топологией прямого произведения и определить преобразование τ^x очевидным образом. Более общо, мы можем взять в качестве Ω замкнутое τ-инвариантное непустое подмножество $F^{\mathbb{Z}^\nu}$. В этом случае Ω допускает физическую интерпретацию как пространство бесконечных конфигураций системы спинов на кристаллической решетке $\mathbb{Z}^\nu$. С точностью до знака и множителя β величину P можно рассматривать как «свободную энергию» или «давление» в зависимости от физической интерпретации F как множества «значений спина» или «чисел заполнения» в узлах решетки. Для простоты мы будем употреблять термин «давление».

Если $x = (x^i) \in \mathbb{Z}^\nu$, то положим $|x| = \max|x^i|$. Пусть $0 < \lambda < 1$. Для $\xi, \eta \in \Omega$, где $\xi = (\xi_x)_{x \in \mathbb{Z}^\nu}$, $\eta = (\eta_x)_{x\in\mathbb{Z}^\nu}$, определим расстояние d при помощи следующего равенства

$$d(\xi, \eta) = \lambda^k, \text{ где } k = \inf\{|x| \colon \xi_x \neq \eta_x\}.$$

Очевидно, расстояние d совместимо с топологией пространства Ω. Нетрудно проверить, что преобразование τ разделяет траектории относительно метрики d и, следовательно, справедливо утверждение теоремы 2.

В дальнейшем мы будем предполагать, что существуют конечные множества $\Delta \subset \mathbb{Z}^\nu$ и $G \subset F^\Delta$, при которых

$$\Omega = \{\xi \in F^{\mathbb{Z}^\nu} : \tau^x\xi|\Delta \in G \text{ для всех } x\}.$$

Обозначим через pr_Λ, pr'_Λ, где $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, проекции пространства $F^{\mathbb{Z}^\nu}$ на F^Λ и $F^{\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda}$ соответственно.

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha$ банахово пространство действительных гельдеровских непрерывных функций на Ω с показателем α (относительно метрики d). Пусть $\xi = (\xi_x) \in \Omega$, $\eta = (\eta_x) \in \Omega$. Если $\xi_x = \eta_x$ при всех x, за исключением, быть может, конечного числа, и $A \in \mathscr{C}^\alpha$, то произведение

$$g_A(\xi, \eta) = \prod_{x\in\mathbb{Z}^\nu} \exp(A(\tau^x\xi) - A(\tau^x\eta))$$

конечно и положительно, так как $|A(\tau^x\xi) - A(\tau^x\eta)|$ стремится к нулю экспоненциально быстро при $|x| \to \infty$. Для любого конечного Λ положим

$$f_\Lambda(\xi) = \begin{cases} \Bigl[\sum\limits_{\eta\in\Omega\colon\ \mathrm{pr}'_\Lambda \eta = \mathrm{pr}'_\Lambda \xi} g_A(\eta, \xi)\Bigr]^{-1}, & \text{если } \xi \in \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, f_Λ является непрерывной функцией на пространстве Ω.

Для любого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ обозначим через ε_Λ меру на $\operatorname{pr}_\Lambda \Omega$, которая приписывает каждой точке этого множества массу, равную единице.

Определение. Пусть $A \in \mathscr{C}^\alpha$. Вероятностную меру σ на пространстве Ω будем называть *гиббсовским состоянием*, если

$$\sigma = f_\Lambda \cdot (\varepsilon_\Lambda \otimes \operatorname{pr}'_\Lambda \sigma).$$

Это определение допускает иную формулировку: вероятностная мера σ является гиббсовским состоянием, если для любого конечного множества Λ условная вероятность того, что $\xi|\Lambda$ реализуется в Λ при условии того, что $\xi|(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)$ реализовалось в $\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$, равна $f_\Lambda(\xi)$.

Теорема 3. *Пусть $A \in \mathscr{C}^\alpha$. Тогда*

(a) *Каждое равновесное состояние является τ-инвариантным гиббсовским состоянием.*

(b) *Если $\Omega = F^{\mathbb{Z}^\nu}$, то любое τ-инвариантное гиббсовское состояние является равновесным состоянием.*

В силу (a) равновесные состояния являются вероятностными мерами, условные вероятности которых точно такие же, как и у гиббсовских состояний. Часть (b) справедлива относительно более общих условий, чем $\Omega = F^{\mathbb{Z}^\nu}$. Предположение о том, что $A \in \mathscr{C}^\alpha$, может быть значительно ослаблено. Для простоты в этом параграфе мы проведем не совсем обычное описание статистической механики с использованием гельдеровских функций на пространстве Ω вместо «взаимодействий», которые более удобны при детальном изучении предмета.

Теорема 4. *Множество гиббсовских состояний для функции $A \in \mathscr{C}^\alpha$ является симплексом Шоке.*

Таким образом, гиббсовское состояние имеет единственное интегральное разложение на крайние («чистые») гиббсовские состояния.

Физическая интерпретация. Крайние равновесные состояния являются τ-эргодическими мерами. Они интерпретируются как *чистые термодинамические фазы*. Так как равновесные состояния соответствуют касательным к графику функции P (см. теорему 2(a)), то отсутствие непрерывности у производной функции P соответствует *фазовому переходу*. После этого замечания понятно почему в дальнейшем мы будем интересоваться кусочной аналитичностью (в подходящем смысле) на пространстве $\mathscr{C}^\alpha$.

Крайнее равновесное состояние σ может иметь нетривиальное разложение на крайние гиббсовские состояния, которые не обязаны быть инвариантными относительно τ (см. теорему 3(b)). В этом случае говорят, что имеет место *разрушение симметрии* (под разрушенной симметрией мы понимаем инвариантность относительно преобразования τ).

Главная цель равновесной статистической механики состоит в понимании физической природы фаз и фазовых переходов. Поэтому основным предметом термодинамического формализма является изучение дифференциальных и аналитических свойств функции P, а также структуры равновесных и гиббсовских состояний. Как уже упоминалось, подробные результаты получены только в специальных случаях. В предлагаемой монографии мы ограничимся рассмотрением общей теории, которая известна на данный момент.

Достаточно полные результаты получены для одномерных систем, т. е. в случае, когда $\nu = 1$. Основной их смысл состоит в том, что в одномерных системах невозможны фазовые переходы. Для того чтобы сформулировать точное утверждение, введем пространство

$$\Omega = \{\xi = (\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}} \in F^{\mathbb{Z}} \colon t_{\xi_x\xi_{x+1}} = 1 \text{ при всех } x\},$$

где $t = (t_{uv})$ — матрица с элементами, равными 0 или 1. Предположим, что существует $N > 0$, при котором все элементы матрицы t^N положительны.

Теорема 5. *Если выполнены все упомянутые выше условия, то функция $P : \mathscr{C}^\alpha \to \mathbb{R}$ является вещественно-аналитической. Кроме того, для любого $A \in \mathscr{C}^\alpha$ существует только одно гиббсовское состояние, которое также является единственным равновесным состоянием.*

Заметим, что эта теорема перестает быть верной при $\nu > 1$.

0.3. Краткий обзор содержания

Главы с 1 по 5 этой монографии посвящены общей теории равновесной статистической механики классических решетчатых систем. В них почти все результаты снабжены полными доказательствами. В главах 6 и 7 термодинамический формализм обобщается для систем, лежащих вне пределов традиционной области применения статистической механики. Доказательства здесь в большинстве своем или опущены, или только кратко намечены[5]. Сейчас мы более подробно расскажем о содержании указанных глав.

[5]При этом, конечно, везде, где нужно, указаны ссылки на соответствующую литературу.

В главах 1 и 2 дана теория гиббсовских состояний без предположения об их трансляционной инвариантности (в этом случае вместо решетки $\mathbb{Z}^\nu$ рассматривается бесконечное счетное множество L). В главе 3 предполагается инвариантность относительно сдвига и развивается теория топологического давления и равновесных состояний для классических решетчатых систем. Кроме того, получены общие результаты по фазовым переходам. Глава 4 является центральной, в ней устанавливается связь между гиббсовскими и равновесными состояниями. Глава 5 посвящена одномерным системам и, таким образом, предваряет главу 7. В главе 6 теория равновесных состояний распространяется на случай, когда конфигурационное пространство Ω заменяется произвольным метрическим компактным пространством, на котором группа $\mathbb{Z}^\nu$ действует гомеоморфизмами. Глава 7 обобщает теорию гиббсовских состояний (и все соответствующие понятия) на конкретный класс компактных метрических пространств, называемых *пространствами Смейла*, на которых группа $\mathbb{Z}$ действует гомеоморфизмами. Пространства Смейла включают в себя базисные множества с аксиомой A и, в частности, многообразия с диффеоморфизмами Аносова.

Некоторый дополнительный материал помещен в форме упражнений в конце каждой главы.

Библиографические ссылки даны или в самом тексте или в замечаниях в конце главы. Для ориентации может быть полезным читать сначала эти замечания, а потом — соответствующую главу. Для понимания предмета особенно рекомендуем работы Рюэля [1], Добрушина [2], [3], Ланфорда и Рюэля [1], Израэля [1] и Синая [4].

Пояснительные сведения собраны в приложениях A.1 – A.5. Эти приложения напоминают некоторые хорошо известные факты в общепринятой терминологии. Вообще говоря, предполагается, что читатель знаком с основными понятиями функционального анализа, но от него не требуется знаний физики.

Некоторое количество нерешенных задач собрано в приложении B. Приложение C содержит краткое введение в теорию потоков.

Теперь сделаем несколько замечаний относительно определений и терминологии. Мы часто будем обозначать через $|X|$ число элементов в конечном множестве X. В главах 5–7 мы будем использовать символы $\mathbb{Z}_>$, $\mathbb{Z}_\geqslant$, $\mathbb{Z}_<$, $\mathbb{Z}_\leqslant$ для обозначения множеств целых чисел, которые соответственно > 0, $\geqslant 0$, < 0 и $\leqslant 0$. Мера ρ (она может быть по-другому обозначена в тексте) всегда будет предполагаться *радоновой мерой* на компактном множестве Ω. Если $f\colon \Omega \to \Omega'$ — непрерывное отображение, то образ ρ

относительно f (см. приложение A.4) будем обозначать через $f\rho$ (а не, как обычно, через $f^*\rho$).

Для более широкого изучения равновесной статистической механики мы отсылаем читателя к книге Рюэля [3] и превосходной монографии Боуэна [6] по приложениям к дифференцируемым динамическим системам[6]. Упомянем также монографию Израэля [2] и заметки Ланфорда [2], Джоджии [1] и Престона [1, 2]. Материал монографий по статистической механике, планируемых к издательству различными авторами, не включен в эту книгу. Заметим, что на данный момент большое количество результатов не имеет законченной формы и, таким образом, не может быть опубликовано.

Перед ознакомлением с главой 1 рекомендуем читателю просмотреть быстро приложения A.1 – A.5.

[6]Современное введение в эргодическую теорию и топологическую динамику см. в книгах Уолтерса [2], Денкера, Грилленбергера и Зигмунда [1].

Глава 1
Теория гиббсовских состояний

Эта глава посвящена общей теории гиббсовских состояний. Инвариантность относительно трансляций не предполагается.

1.1. Пространство конфигураций

Предположим, что даны следующие объекты:

L: бесконечное счетное множество;

Ω_x: конечное множество при любом $x \in L$;

$\mathscr{F}$: множество конечных подмножеств L, которое является локально конечным, т. е. любой элемент $x \in L$ содержится только в конечном числе множеств $\Lambda \in \mathscr{F}$;

$(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}$: семейство пространств $\overline{\Omega}_\Lambda \subset \prod\limits_{x\in\Lambda} \Omega_x$.

Теперь мы можем определить *пространство конфигураций*:

$$\Omega = \Big\{\xi \in \prod_{x\in L} \Omega_x \colon (\forall\Lambda \in \mathscr{F})\ \xi|\Lambda \in \overline{\Omega}_\Lambda\Big\}. \tag{1.1}$$

Мы всегда будем предполагать, что $\Omega \neq \varnothing$. Множество $\mathscr{F}$ может быть пустым. В этом случае $\Omega = \prod\limits_{x\in L} \Omega_x$.

Множество L удобно представлять как кристаллическую решетку, в каждом узле $x \in L$ которой система может находиться в конечном числе различных состояний $\xi_x \in \Omega_x$. Например, в модели сплава множество Ω_x является множеством классов атомов, которые могут находиться в x. Для систем спинов Ω_x является множеством возможных спиновых ориентаций атома в точке x. В качестве моделей часто рассматривают *решетчатый газ* с $\Omega_x = \{0, 1\}$ (значения 1 и 0 принимаются в зависимости от того, находится в узле x атом или нет) и *спиновую систему* с $\Omega_x = \{1, -1\}$ (знак перед 1 выбирается в зависимости от ориентации спина). *Конфигурацией* нашей системы является элемент $\xi = (\xi_x)_{x\in L}$ множества $\prod\limits_{x\in L} \Omega_x$. Мы будем накладывать определенные условия на элементы $(\xi_x)_{x\in\Lambda}$ множества $\overline{\Omega}_\Lambda$. Например, для решетчатого газа таким условием является запрет присваивать одинаковые символы двум соседним узлам решетки (в этом случае говорят, что частицы на решетке имеют *твердую сердцевину*).

Для любого множества $S \subset L$ положим

$$\Omega_S = \Big\{\xi \in \prod_{x\in S}\Omega_x \colon (\forall\Lambda \in \mathscr{F} \colon \Lambda \subset S)\ \xi|\Lambda \in \overline{\Omega}_\Lambda\Big\}. \tag{1.2}$$

Так как $\Omega \neq \varnothing$, то множество Ω_S не является пустым. Введем на Ω_x дискретную топологию, а на множестве $\prod\limits_{x\in S}\Omega_x$ — топологию прямого произведения, в которой по теореме Тихонова оно является компактом. Тогда пространства Ω_S и, в частности, Ω тоже компактны. Подмножества S индуцируют непрерывные отображения $\alpha_S \colon \Omega \mapsto \Omega_S$, где $\alpha_S\xi = \xi|S$ или $\alpha_S(\xi_x)_{x\in L} = (\xi_x)_{x\in S}$. В принципе, мы можем определить отображение $\alpha_{TS} \colon \Omega_S \mapsto \Omega_T$ при любом $S \supset T$. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Omega)$ — алгебра действительных непрерывных функций на Ω. Нетрудно проверить, что алгебра $\mathscr{C}$ является банаховым пространством относительно равномерной нормы и вероятностные меры на Ω образуют компактное выпуклое подмножество E слабо сопряженного пространства $\mathscr{C}^*$ ($\mathscr{C}^*$ — пространство действительных мер на Ω, его топология совпадает со слабой топологией сопряженного к $\mathscr{C}$ пространства). Множество E с индуцированной на нем топологией метризуемо. Для конечного $\Lambda \subset L$ обозначим через $\mathscr{C}_\Lambda$ алгебру функций вида $A \circ \alpha_\Lambda$, где $A \in \mathscr{C}(\Omega_\Lambda)$. По теореме Стоуна–Вейерштрасса объединение множеств $\mathscr{C}_\Lambda$ всюду плотно в $\mathscr{C}$.

Мы можем рассматривать элементы алгебры $\mathscr{C}$ как наблюдаемые величины нашей классической решетчатой системы. Элементы $\mathscr{C}_\Lambda$ тогда являются физическими величинами, которые могут быть измерены в конечной области Λ. Вероятностная мера $\mu \in E$ называется *состоянием*. Мы можем интерпретировать ее как функционал, сопоставляющий наблюдаемой ее среднее значение на Ω, т. е. как положительный линейный функционал на $\mathscr{C}$, для которого $\mu(1) = 1$.

1.2. Взаимодействия

Взаимодействием называется такая действительная функция Φ на множестве

$$\bigcup_{|\Lambda|<\infty,\,\Lambda\subset L}\Omega_\Lambda,$$

что $\Phi|\Omega_\varnothing = 0$ и при любом $x \in L$

$$|\Phi|_x = \sum_{X \ni x} \frac{1}{|X|} \sup_{x \in \Omega_X} |\Phi(\xi)| < \infty, \tag{1.3}$$

где $|X| = \operatorname{card} X$. Для данного Φ определим *энергетическую* функцию $U_\Lambda^\Phi : \Omega_\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ для каждого конечного $\Lambda \subset L$, положив

$$U_\Lambda^\Phi(\xi) = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(\xi|X). \tag{1.4}$$

Мы будем писать U_Λ вместо U_Λ^Φ везде, где это не приводит к двусмысленности.

Перепишем $U_\Lambda(\xi)$ в виде суммы

$$U_\Lambda(\xi) = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{X:\, x \in X \subset \Lambda} \frac{1}{|X|} \Phi(\xi|X). \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что

$$|U_\Lambda| \leqslant \sum_{x \in \Lambda} |\Phi|_x. \tag{1.6}$$

В оставшейся части этой главы мы будем предполагать, что вместо условия (1.3) выполнено более сильное требование

$$||\Phi||_x = \sum_{X \ni x} \sup_{\xi \in \Omega_x} |\Phi(\xi)| < +\infty. \tag{1.7}$$

Если Λ, M — непересекающиеся подмножества L, причем Λ конечно и $\xi \in \Omega_{\Lambda \bigcup M}$, то мы можем определить величину

$$W_{\Lambda M}(\xi) = \sum_X{}^{*} \Phi(\xi|X), \tag{1.8}$$

где $\sum^*$ означает суммирование по конечным множествам $X \subset \Lambda \bigcup M$, для которых $X \bigcap \Lambda \neq \varnothing$ и $X \bigcap M \neq \varnothing$. Таким образом,

$$|W_{\Lambda M}| \leqslant \sum_{x \in \Lambda} ||\Phi||_x. \tag{1.9}$$

Если множества Λ, M конечны, то справедливо следующее разложение:

$$U_{\Lambda \bigcup M} = U_\Lambda + U_M + W_{\Lambda M}. \tag{1.10}$$

1.3. Гиббсовские ансамбли и термодинамический предел

Гиббсовским ансамблем для конечной области $\Lambda \subset L$ и взаимодействия Φ называется вероятностная мера $\mu_{(\Lambda)}$ на Ω_Λ, определенная соотношением

$$\mu_{(\Lambda)}\{\xi\} = Z_\Lambda^{-1} \exp(-U_\Lambda^\Phi(\xi)), \tag{1.11}$$

где

$$Z_\Lambda = \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \exp(-U_\Lambda^\Phi(\xi)).$$

Термодинамический предел получается, когда Λ стремится к бесконечности (в этом случае мы будем писать $\Lambda \to L$). В нашей ситуации это означает, что $\Lambda \supset \Delta$ для любого конечного множества $\Delta \subset L$ начиная с некоторого Λ, т. е. предел берется по возрастающей цепи конечных подмножеств L, упорядоченных по включению.

Теперь мы докажем существование термодинамического предела для гиббсовских ансамблей при помощи теоремы компактности.

1.4. Предложение

Пусть (M_n) — последовательность конечных подмножеств L таких, что $M_n \to L$ и $\mu_{(M_n)}$ является вероятностной мерой на Ω_{M_n} при любом n. Тогда можно выбрать такую подпоследовательность (M_n'), что при любом $\Lambda \subset L$ существует следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{\Lambda M_n'} \mu_{(M_n')} = \rho_\Lambda.$$

Кроме того, найдется единственная вероятностная мера ρ на Ω, для которой

$$\rho_\Lambda = \alpha_\Lambda \rho$$

при всех Λ.

Заметим, что $\alpha_{\Lambda M_n} \mu_{(M_n)}$ определено только при $M_n \supset \Lambda$, т. е. только при достаточно больших n. Так как конечные подмножества Λ множества L образуют счетное семейство и множества Ω_Λ конечны, то существование подпоследовательности (M_n'), для которой справедливо (1.12), вытекает из диагонального процесса Кантора. В качестве следствия (1.12) имеем $\alpha_{\Lambda M} \rho_M = \rho_\Lambda$ для любого $\Lambda \subset M$. Таким образом, мы можем определить $\rho(A \circ \alpha_\Lambda) = \rho_\Lambda(A)$ при $A \in \mathscr{C}(\Omega_\Lambda)$ и продолжить по непрерывности на $\mathscr{C}$.[1] Единственность ρ следует из плотности множества $\bigcup\limits_{\Lambda} \mathscr{C}_\Lambda$ в $\mathscr{C}$. Мы будем говорить, что ρ является *термодинамическим пределом* вероятностных мер $\mu_{(\Lambda)}$.

При доказательстве мы не использовали того факта, что вероятностные меры $\mu_{(\Lambda)}$ — гиббсовские ансамбли. Как мы увидим в параграфе 1.6, в этом случае термодинамический предел ρ обладает специальными свойствами.

1.5. Гиббсовские состояния

Мы будем называть меру $\sigma \in E$ *гиббсовским состоянием* (для взаимодействия Φ), если для любого конечного множества $\Lambda \subset L$ существует такая вероятностная мера $\sigma_{L\setminus\Lambda}$ на $\Omega_{L\setminus\Lambda}$, что при всех $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$ справедливо равенство:

$$(\alpha_\Lambda\sigma)\{\xi_\Lambda\} = \int\limits_{\Omega_{L\setminus\Lambda}} \sigma_{L\setminus\Lambda}(d\eta)\mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}, \tag{1.14}$$

где

$$\mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\} = \frac{e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda)-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta)}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda} e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda)-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\eta_\Lambda\vee\eta)}}. \tag{1.15}$$

В этой формуле $\xi_\Lambda \vee \eta$ — элемент ζ пространства Ω, для которого $\zeta|\Lambda = \xi_\Lambda$, $\zeta|(L\setminus\Lambda) = \eta$ и опущены выражения с неопределенными $\xi_\Lambda \vee \eta$ и $\eta_\Lambda \vee \eta$. Последнее означает, что если элемент $\xi_\Lambda \vee \eta$ не определен, то мы полагаем $\exp(-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta)) = 0$. Кроме того, мы будем считать дробь (1.15) равной нулю, если ее числитель обращается в ноль. Заметим, что в силу предположения о локальной конечности множества $\mathscr{F}$ множества $\{\eta \in \Omega_{L\setminus\Lambda} : \xi_\Lambda \vee \eta \in \Omega\}$ и $\{\eta \in \Omega_{L\setminus\Lambda} : \xi_\Lambda \vee \eta \text{ не определен}\}$ открыты. С другой стороны, $W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}$ на множестве $\{\eta \in \Omega_{L\setminus\Lambda} : \xi_\Lambda \vee \eta \in \Omega\}$ является равномерно сходящейся суммой непрерывных функций (см. (1.7), (1.8)). поэтому *функции* $\eta \mapsto \exp(-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta))$, $\eta \mapsto \mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}$ *непрерывны на* $\Omega_{L\setminus\Lambda}$.

1.6. Термодинамический предел гиббсовских ансамблей

В этом параграфе мы докажем, что если ρ — термодинамический предел гиббсовских ансамблей $\mu_{(\Lambda)}$ для взаимодействия Φ, то ρ является гиббсовским состоянием для взаимодействия Φ.

[1] Для данного Λ можно выбрать такое конечное множество M, что $\alpha_{\Lambda M}\Omega_M = \alpha_\Lambda\Omega$. Тогда $|\rho(A\circ\alpha_\Lambda)| = |\rho_\Lambda(A)| = |\rho_M(A\circ\alpha_{\Lambda M})| \leqslant ||A\circ\alpha_{\Lambda M}|| = ||A\circ\alpha_\Lambda||$.

Используя определение (1.11), для $\Lambda \subset M$ имеем

$$(\alpha_{\Lambda M}\mu_{(M)})\{\xi_\Lambda\} = \sum_{\eta \in \Omega_{M \setminus \Lambda}} \mu_{(M)}\{\xi_\Lambda \vee \eta\} =$$

$$= \sum_{\eta \in \Omega_{M \setminus \Lambda}} \{Z_M^{-1} e^{-U_{M \setminus \Lambda}(\eta)}\} \exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M \setminus \Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta)) =$$

$$= \sum_{\eta \in \Omega_{M \setminus \Lambda}} ((\alpha_{M \setminus \Lambda,\, M}\mu_{(M)})\{\eta\})\mu_{(\Lambda,\, M)\eta}\{\xi_\Lambda\}, \quad (1.16)$$

где

$$\mu_{(\Lambda,\, M)\eta}\{\xi_\Lambda\} = \frac{e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M \setminus \Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta)}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M \setminus \Lambda}(\eta_\Lambda \vee \eta)}}. \quad (1.17)$$

Напомним, что мы придерживаемся соглашений параграфа 1.5 относительно значения $\xi_\Lambda \vee \eta$. В частности, мы положим выражение (1.17) равным нулю, если числитель обращается в ноль. Теперь исследуем, что получится, когда мы заменим M в (1.16) последовательностью (M'_n) из предложения 1.4 и перейдем к пределу по n.

(a) Заметим, что функция на $\Omega_{L \setminus \Lambda}$, определенная как

$$\eta \mapsto \mu_{(\Lambda,\, M'_n)(\eta | M'_n \setminus \Lambda)}\{\xi_\Lambda\},$$

сходится равномерно к $\eta \mapsto \mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}$ в силу сходимости сумм, определяющих $W_{\Lambda,\, L \setminus \Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta)$.

(b) Используя утверждение предложения 1.4 для последовательности $\alpha_{M'_n \setminus \Lambda,\, M'_n}\mu_{(M'_n)}$, мы видим, что она имеет термодинамический предел $\rho_{L \setminus \Lambda}$, который является вероятностной мерой на $\Omega_{L \setminus \Lambda}$.

Из (a), (b) и (1.16) получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_{\Lambda M'_n}\mu_{(M'_n)})\{\xi_\Lambda\} = \int\limits_{\Omega_{L \setminus \Lambda}} \rho_{L \setminus \Lambda}(d\eta)\mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}.$$

В силу утверждения предложения 1.4 это означает, что ρ является гиббсовским состоянием.

1.7. Граничные члены

Пусть вероятностная мера $\mu'_{(\Lambda)}$ на Ω_Λ определена для каждого конечного $\Lambda \subset L$ или для последовательности (Λ_n) такой, что $\Lambda_n \to \infty$, или для подходящей цепи множеств. Предположим, что мера $\mu'_{(\Lambda)}$ имеет следующий вид:

$$\mu'_{(\Lambda)}\{\xi_\Lambda\} = Z'^{-1}_\Lambda e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda)-B_\Lambda(\xi_\Lambda)},$$
$$Z'_\Lambda = \sum_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda} e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda)-B_\Lambda(\eta_\Lambda)}.$$

Если *граничный член* B_Λ ведет себя подходящим образом в термодинамическом пределе, то результаты параграфа 1.6 могут быть продолжены на меры (μ'_Λ).

Вместо (1.16) мы получим здесь

$$\begin{aligned}(\alpha_{\Lambda M}\mu'_{(M)})\{\xi_\Lambda\} &= \sum_{\eta\in\Omega_{M\setminus\Lambda}} \mu'_{(M)}\{\xi_\Lambda\vee\eta\} = \\ &= \sum_{\eta\in\Omega_{M\setminus\Lambda}} (Z'^{-1}_M e^{-U_{M\setminus\Lambda}(\eta)-B'(\eta)})\times \\ &\quad\times \exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\,M\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta) - B''(\xi_\Lambda,\,\eta)) \qquad (1.18)\end{aligned}$$

при условии $B_M(\xi_\Lambda\vee\eta) = B'(\eta) + B''(\xi_\Lambda,\,\eta)$. Аналогично пункту (а) параграфа 1.6 предположим, что функция на $\Omega_{L\setminus\Lambda}$ определенная соответствием:

$$\eta\mapsto\exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\,M\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee(\alpha_{M\setminus\Lambda,\,L\setminus\Lambda}\eta)) - B''(\xi_\Lambda,\,\alpha_{M\setminus\Lambda,\,L\setminus\Lambda}\eta)) \qquad (1.19)$$

стремится равномерно к $\eta\mapsto\exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta))$; в этом случае аргументация параграфа 1.6 остается справедливой и для рассматриваемой ситуации и, следовательно, термодинамический предел $(\mu'_{(\Lambda)})$ является гиббсовским состоянием.

Рассмотрим теперь пример. Для каждого конечного $\Lambda\subset L$ будем считать, что $\eta_{L\setminus\Lambda}$ является ограничением на $L\setminus\Lambda$ некоторого $\eta^*_{(\Lambda)}\in\Omega$. Используя (1.15) определим меру $\mu'_{(\Lambda)} = \mu_{(\Lambda)\eta_{L\setminus\Lambda}}$. Пусть

$$B_\Lambda(\xi_\Lambda) = W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta_{L\setminus\Lambda}).$$

Если $\Lambda\subset M$, $\xi_\Lambda\subset\Omega_\Lambda$, $\eta\in\Omega_{M\setminus\Lambda}$, то в силу (1.8) мы можем написать

$$B_M(\xi_\Lambda\vee\eta) = W_{M,\,\Lambda\setminus M}(\xi_\Lambda\vee\eta\vee\eta_{L\setminus M}) = B'(\eta) + B''(\xi_\Lambda,\,\eta),$$

где

$$B'(\eta) = \sum_X{}^{*}\,\Phi(\eta\vee\eta_{L\setminus M}|X) = W_{M\setminus\Lambda,\,L\setminus M}(\eta\vee\eta_{L\setminus M}),$$
$$B''(\xi_\Lambda,\,\eta) = \sum_X{}^{**}\,\Phi(\xi_\Lambda\vee\eta\vee\eta_{L\setminus M}|X).$$

Сумма $\sum^*$ берется по всем таким конечным множествам $X \subset L \setminus \Lambda$, что $X \bigcap (M \setminus \Lambda) \neq \varnothing$ и $X \bigcap (L \setminus M) \neq \varnothing$, а сумма $\sum^{**}$ — по всем конечным множествам $X \subset L$, для которых $X \bigcap \Lambda \neq \varnothing$ и $X \bigcap (L \setminus M) \neq \varnothing$. Теперь мы должны позаботиться о том факте, что элемент $\xi_\Lambda \vee \eta \vee \eta_{L\setminus\Lambda}$ не обязательно определен, т. е. может не существовать элемента $\zeta \in \Omega$ с ограничениями ξ_Λ, η, $\eta_{L\setminus M}$ на Ω_Λ, $\Omega_{M\setminus\Lambda}$, $\Omega_{L\setminus M}$. При фиксированном Λ и достаточно большом M это означает, что или $\xi_\Lambda \vee \eta$, или $\eta \vee \eta_{L\setminus M}$ не определено (мы используем здесь тот факт, что множество $\mathscr{F}$ локально конечно). Положим $e^{-W_{\Lambda,\, M\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta)} = 0$, если $\xi_\Lambda \vee \eta$ не определено, $e^{-B'(\eta)} = 0$, если $\eta \vee \eta_{L\setminus M}$ не определено, и $\Phi(\xi_\Lambda \vee \eta \vee \eta_{L\setminus M} | X) = 0$ в B'', если не определено $\xi_\Lambda \vee \eta \vee \eta_{L\setminus M}$. После сделанных замечаний легко проверить, что функция, определенная соответствием (1.19), равномерно сходится к своему пределу $\eta \mapsto \exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta))$. Таким образом, термодинамический предел $(\mu_{(\Lambda)\eta_{L\setminus\Lambda}})$ является гиббсовским состоянием.

Сейчас мы получим важнейший результат из приведенных выше рассуждений. Очевидно,

$$\mu_{(M)\eta_{L\setminus M}}\{\xi_\Lambda \vee \eta\} = ({Z'_M}^{-1} e^{-U_{M\setminus\Lambda}(\eta) - B'(\eta)}) \times \\ \times \exp(-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta) - B''(\xi_\Lambda,\, \eta)), \quad (1.20)$$

где B'' равномерно мало при больших M. Согласно определению (1.14) гиббсовское состояние σ обладает тем свойством, что $\alpha_M \sigma$ является усреднением по $\eta_{L\setminus M}$ мер $\mu_{(M)\eta_{L\setminus M}}$. Таким образом, мы можем оценить условную вероятность относительно $\sigma(d\xi)$ того, что $\xi|\Lambda = \xi_\Lambda$, когда $\xi|(M \setminus \Lambda) = \eta$. В силу (1.20) она равна

$$\frac{(\alpha_M \sigma)\{\xi_\Lambda \vee \eta\}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda} (\alpha_M \sigma)\{\eta_\Lambda \vee \eta\}} \approx \frac{e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta)}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda) - W_{\Lambda,\, M\setminus\Lambda}(\eta_\Lambda\vee\eta)}},$$

где ошибка равномерно мала при большом M. Отсюда следует, что для гиббсовского состояния σ условная вероятность того, что $\xi|\Lambda = \xi_\Lambda$ в случае, когда известно, что $\xi|(L \setminus \Lambda) = \eta$, равна $\mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}$. Обратно, если условная вероятность имеет такой вид, то, очевидно, справедливо равенство (1.14).

1.8. Теорема

Вероятностная мера σ на Ω является гиббсовским состоянием если и только если для каждого конечного $\Lambda \subset L$ условная вероятность того, *что* $\xi|\Lambda = \xi_\Lambda$, *когда известно, что* $\xi|(L \setminus \Lambda) = \eta$, *совпадает с* $\mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}$, *определенным равенством* (1.15).

Заметим, что таким образом мы можем взять $\sigma_{L\setminus\Lambda} = \alpha_{L\setminus\Lambda}\sigma$ в (1.14). Из теоремы следует, что слабый предел гиббсовских состояний является гиббсовским состоянием. Таким образом, множество гиббсовских состояний компактно; очевидно, оно также выпукло.

1.9. Теорема

Пусть Φ *— взаимодействие и вероятностные меры* $\mu_{(\Lambda)}$ *и* $\mu_{(\Lambda)\eta}$ (гиббсовский ансамбль и гиббсовский ансамбль с граничными условиями) *определены равенствами* (1.11) *и* (1.14), *где* $\eta \in \Omega_{L\setminus\Lambda}$ *является ограничением на множество* $L \setminus \Lambda$ *некоторого элемента* η^*, *который может зависеть от* Λ. *Предположим, что термодинамические пределы определены точно так же, как в утверждении предложения* 1.4. *Тогда*

(a) *Любой термодинамический предел* $(\mu_{(\Lambda)})$ *является гиббсовским состоянием.*

(b) *Любой термодинамический предел* $(\mu_{(\Lambda)\eta_{L\setminus\Lambda}})$ *является гиббсовским состоянием.*

(c) *Замкнутая выпуклая оболочка гиббсовских состояний, полученных в* (b), *совпадает со множеством* K_Φ *всех гиббсовских состояний.*

(d) $K_\Phi \neq \varnothing$; *множество* K_Φ *выпукло, компактно и является симплексом Шоке.*

Утверждения (a) и (b) были доказаны в параграфах 1.6 и 1.7 соответственно.

В силу (a) множество K_Φ всех гиббсовских состояний не пусто и, как мы видели после доказательства теоремы 1.8 это множество выпукло и компактно. Следовательно, замыкание выпуклой оболочки множества K гиббсовских состояний, полученных в (b), содержится в K_Φ. Предположим, что $K \neq K_\Phi$. Тогда существует функция $A \in \mathscr{C}$ и мера $\sigma \in K_\Phi$, для которых

$$\sigma(A) > \max_{\rho\in K} \rho(A). \tag{1.21}$$

Очевидно, мы можем считать, что $A = B \circ \alpha_\Lambda$, где $B \in \mathscr{C}(\Omega_\Lambda)$ при некотором конечном Λ. В силу (1.14) мы имеем $\mu_{(M)\eta}(B \circ \alpha_{\Lambda M}) \geqslant \sigma(A)$ при некотором $\eta \in \Omega_{L\setminus M}$ и при всех $M \supset \Lambda$. Если ρ — термодинамический предел $(\mu_{(M)\eta})$, то $\rho(A) \geqslant \sigma(A)$ в противоречии с (1.21). Таким образом, мы доказали утверждение (c) и первые две части утверждения (d).

Пусть $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$ для конечного множества $\Lambda \subset L$. Для любой меры $\sigma(d\xi)$ на Ω обозначим через $\sigma_{(L\setminus\Lambda)\xi_\Lambda}$ меру на $\Omega_{L\setminus\Lambda}$, полученную при помощи «обрамления $\xi|\Lambda = \xi_\Lambda$» (сначала ограничиваем σ на множество $\{\xi \in \Omega\colon \xi|\Lambda = \xi_\Lambda\}$, затем берем образ ограничения $\alpha_{L\setminus\Lambda}$). Если σ является гиббсовским состоянием, то по теореме 1.8 имеем

$$\sigma_{(L\setminus\Lambda)\xi_\Lambda}(d\eta) = \mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}\sigma_{L\setminus\Lambda}(d\eta). \tag{1.22}$$

Отсюда следует, что

$$e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda)-W_{\Lambda,\, L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta)}\sigma_{(L\setminus\Lambda)\eta_\Lambda}(d\eta) = \\ = e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda)-W_{\Lambda,\, L\setminus\Lambda}(\eta_\Lambda\vee\eta)}\sigma_{(L\setminus\Lambda)\xi_\Lambda}(d\eta) \tag{1.23}$$

для всех ξ_Λ, $\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda$. Обратно, если σ — вероятностная мера, для которой справедливо равенство (1.23) при всех Λ, ξ_Λ, η_Λ, то имеет место равенство (1.22) и, следовательно, мера σ является гиббсовским состоянием. Рассмотрим теперь замкнутое линейное подпространство $\mathscr{G}$ пространства $\mathscr{C}^*$, состоящее из действительных мер σ, для которых справедливо равенство (1.23) для всех Λ, ξ_Λ, η_Λ. Очевидно, если $\sigma \in \mathscr{G}$, то $|\sigma| \in \mathscr{G}$. Отсюда следует, что множество K_Φ является симплексом (см. приложение А.5.5).

1.10. Алгебра на бесконечности

Пусть σ — вероятностная мера на Ω. Обозначим через $\pi(A)$ класс функций, эквивалентных A, в $L^\infty(\Omega, \sigma)$. Положим

$$\mathscr{B}_\sigma = \bigcap_{\Lambda \text{ конечное } \subset L} \text{замыкание}\Big(\bigcup_{M \text{ конечное } \subset L\setminus\Lambda} \pi(\mathscr{C}_M)\Big), \tag{1.24}$$

где замыкание берется относительно топологии пространства $L^\infty(\Omega, \sigma)$, как слабо сопряженного к $L^1(\Omega, \sigma)$. Мы будем называть $\mathscr{B}_\sigma$ *алгеброй на бесконечности*, ассоциированной с σ. Мы охарактеризуем меры σ, которые имеют *тривиальную алгебру на бесконечности* (т. е. $\mathscr{B}_\sigma$ состоит из почти всюду постоянных функций) при помощи следующего *кластерного свойства*.

(C) *Для любого $A \in \mathscr{C}$ существует такое конечное множество $\Lambda \subset L$, что*

$$(B \in \mathscr{C}_M,\ M \cap \Lambda = \varnothing) \Longrightarrow |\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant ||B||.$$

Предположим сначала, что условие (C) выполнено. Тогда для любого $A \in \mathscr{C}$ и $B_\infty \in \mathscr{B}_\sigma$ имеем

$$|\sigma(AB_\infty) - \sigma(A)\sigma(B_\infty)| \leqslant ||B_\infty||.$$

Заменяя A на λA и переходя к пределу по λ, получим

$$\sigma(AB_\infty) = \sigma(A)\sigma(B_\infty);$$

отсюда следует, что B_∞ является константой, и, таким образом, алгебра $\mathscr{B}_\sigma$ тривиальна.

Предположим теперь, что условие (C) не выполнено. Тогда существуют $A \in \mathscr{C}$ и $B_{L\setminus\Lambda}$ для каждого конечного $\Lambda \subset L$ такие, что

$$B_{L\setminus\Lambda} \subset \bigcup_{M\subset L\setminus\Lambda} \mathscr{C}_M, \quad ||B_{L\setminus\Lambda}|| = 1,$$

$$|\sigma(AB_{L\setminus\Lambda}) - \sigma(A)\sigma(B_{L\setminus\Lambda})| > 1.$$

Пусть B_∞ — слабый предел сети $(\pi(B_{L\setminus\Lambda}))$ в пространстве $L^\infty(\Omega,\, \sigma)$. Тогда $B_\infty \in \mathscr{B}_\sigma$ и

$$|\sigma(AB_\infty) - \sigma(A)\sigma(B_\infty)| \geqslant 1.$$

Таким образом, функция B_∞ не может быть постоянной и, следовательно, алгебра $\mathscr{B}_\sigma$ не является тривиальной.

Теперь мы можем охарактеризовать крайние точки множества K_Φ гиббсовских состояний (*неразложимые гиббсовские состояния*).

1.11. Теорема (Характеристика неразложимых гиббсовских состояний)

Пусть $\sigma \in K_\Phi$; тогда следующие условия эквивалентны:

(A) *σ — крайняя точка множества K_Φ.*

(B) *Алгебра на бесконечности $\mathscr{B}_\sigma$, ассоциированная с σ, тривиальна.*

(C) *При любом $A \in \mathscr{C}$ существует такое конечное множество $\Lambda \subset L$, что*

$$(B \in \mathscr{C}_M,\, M \cap \Lambda = \varnothing) \Longrightarrow |\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant ||B||.$$

Мы показали эквивалентность утверждений (B) и (C) в параграфе 1.10. Докажем теперь, что $(A) \Longleftrightarrow (B)$.

То, что σ не является крайней точкой множества K_Φ, эквивалентно существованию функции $B_\infty \in L^\infty(\Omega,\, \sigma)$, $B_\infty \geqslant 0$, отличной от константы, для которой $B_\infty\sigma$ пропорциональна гиббсовскому состоянию. В силу (1.23) это эквивалентно равенству

$$e^{-U_\Lambda(\xi_\Lambda)-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\xi_\Lambda\vee\eta)}B_\infty(\eta_\Lambda\vee\eta)\sigma_{(L\setminus\Lambda)\eta_\Lambda}(d\eta) = \\ = e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda)-W_{\Lambda,\,L\setminus\Lambda}(\eta_\Lambda\vee\eta)}B_\infty(\xi_\Lambda\vee\eta)\sigma_{(L\setminus\Lambda)\xi_\Lambda}(d\eta)$$

при любом конечном Λ и ξ_Λ, $\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda$. Но это означает, что

$$B_\infty(\xi_\Lambda\vee\eta) = B_\infty(\eta_\Lambda\vee\eta)$$

(почти всюду относительно меры $(\alpha_{L\setminus\Lambda}\sigma)(d\eta)$), когда элементы $\xi_\Lambda\vee\eta$, $\eta_\Lambda\vee\eta$ определены. Последнее эквивалентно принадлежности B_∞ замыканию множества $\bigcup\limits_{M\subset L\setminus\Lambda}\pi(\mathscr{C}_M)$ при любом Λ и, следовательно, тому, что $B_\infty \in \mathscr{B}_\sigma$. Таким образом, неэкстремальность точки σ эквивалентна существованию нетривиальной функции $B_\infty \in \mathscr{B}_\sigma$.

1.12. Операторы $\mathscr{R}_\Lambda$

Для данного конечного $\Lambda \subset L$ определим линейное отображение $\mathscr{R}_\Lambda\colon \mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}$, положив

$$(\mathscr{R}_\Lambda A)(\xi_\Lambda\vee\eta) = \sum_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda}\mu_{(\Lambda)\eta}\{\eta_\Lambda\}A(\eta_\Lambda\vee\eta) \qquad (1.25)$$

для всех $\xi_\Lambda\vee\eta \in \Omega$ с $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$, $\eta \in \Omega_{L\setminus\Lambda}$.

Очевидно, $||\mathscr{R}_\Lambda A|| \leqslant ||A||$ и существует такая функция B на $\Omega_{L\setminus\Lambda}$, что $(\mathscr{R}_\Lambda A)(\xi_\Lambda\vee\eta) = B(\eta)$. Таким образом, если σ является гиббсовским состоянием, то равенство (1.22) позволяет получить следующий результат

$$\sigma(\mathscr{R}_\Lambda(A)) = (\alpha_{L\setminus\Lambda}\sigma)(B) = \int(\alpha_{L\setminus\Lambda}\sigma)(d\eta)\sum_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda}\mu_{(\Lambda)\eta}\{\eta_\Lambda\}A(\eta_\Lambda\vee\eta) = \\ = \sum_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda}\int\sigma_{(L\setminus\Lambda)\eta_\Lambda}(d\eta)A(\eta_\Lambda\vee\eta) = \sigma(A). \qquad (1.26)$$

(Обратно, если состояние σ обладает тем свойством, что $\sigma(\mathscr{R}_\Lambda A) = \sigma(A)$ при любом Λ и A, то σ является гиббсовским состоянием.)

Предположим, что при каждом A в топологии пространства $\mathscr{C}$ элемент $\mathscr{R}_\Lambda(A)$ сходится к постоянной c при $\Lambda \to L$ (т. е. для данного $\varepsilon > 0$

существует конечное множество Δ, для которого $||\mathscr{R}_\Lambda(A) - c|| < \varepsilon$ при $\Lambda \supset \Delta$). Пусть σ, $\sigma' \in K_\Phi$. Тогда в силу предположения имеем

$$\sigma(A) = \lim_{\Lambda\to L} \sigma(\mathscr{R}_\Lambda(A)) = \lim_{\Lambda\to L} \sigma'(\mathscr{R}_\Lambda(A)) = \sigma'(A)$$

и, следовательно, множество K_Φ состоит из единственной точки.

Предположим теперь, что $\mathscr{R}_\Lambda(A)$ не стремится к постоянному пределу. Мы можем считать, что $A = B \circ \alpha_\Lambda \in \mathscr{C}_\Lambda$ при некотором Λ. Тогда найдутся последовательности (M_n), (M_n') и ξ_n, $\xi_n' \in \Omega$ такие, что $M_n \to L$, $M_n' \to L$ и

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{R}_{M_n}(A))(\xi_n) \neq \lim_{n\to\infty} (\mathscr{R}_{M_n'}(A))(\xi_n').$$

Но это означает следующее:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{(M_n)\eta_n}(B \circ \alpha_{\Lambda M_n}) \neq \lim_{n\to\infty} \mu_{(M_n')\eta_n'}(B \circ \alpha_{\Lambda M_n'}),$$

где $\eta_n = \xi_n|(L \setminus M_n)$, $\eta_n' = \xi_n'|(L \setminus M_n')$. Поэтому множество K_Φ состоит более чем из одной точки.

1.13. Теорема (критерий единственности гиббсовского состояния)

Пусть $\sigma \in K_\Phi$; *тогда справедливы следующие импликации* (A$'$) $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ (B$'$) $\Longrightarrow$ (C$'$).

(A$'$) $K_\Phi = \{\sigma\}$.

(B$'$) *При любом* $A \in \mathscr{C}$ *последовательность* $\mathscr{R}_\Lambda A$ *сходится в пространстве* $\mathscr{C}$ *к постоянной при* $\Lambda \to L$.

(C$'$) *При любом* $A \in \mathscr{C}$ *существует такое конечное множество* $\Lambda \subset L$, *что*

$$(0 \leqslant B \in \mathscr{C}_M,\ M \cap \Lambda = \varnothing) \Longrightarrow |\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant \sigma(B).$$

Кроме того, (C$'$) $\Longrightarrow$ (B$'$), *если* $\operatorname{supp}\sigma = \Omega$.

Заметим, что условие (C$'$) является более сильным *кластерным свойством*, чем условие (C) параграфа 1.10.

В параграфе 1.12 мы показали, что (A$'$) $\Longleftrightarrow$ (B$'$). Пусть справедливо условие (B$'$). Тогда для данной функции A мы можем выбрать такое конечное множество Λ, что

$$|\mathscr{R}_\Lambda A - \sigma(A)| \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что если $B \in \mathscr{C}_M$, $M \bigcap \Lambda = \varnothing$, то
$$\sigma(AB) = \sigma(\mathscr{R}_\Lambda(AB)) = \sigma((\mathscr{R}_\Lambda A) \cdot B);$$
и если $B \geqslant 0$, то
$$|\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| = |\sigma((\mathscr{R}_\Lambda A - \sigma(A))B)| \leqslant \sigma(B).$$
Поэтому (B$'$) $\Longrightarrow$ (C$'$).

Докажем теперь включение (C$'$) $\Longrightarrow$ (B$'$), если $\operatorname{supp}\sigma = \Omega$. Предположим, что условие (B$'$) не выполняется. Тогда существуют функция A и последовательности (Λ_n), (ξ_n) такие, что $\Lambda_n \to L$ и $(\mathscr{R}_{\Lambda_n}A)(\xi_n) \to c \neq \sigma(A)$. Изменив, если надо, A, мы можем считать, что $c - \sigma(A) = 4$. В силу непрерывности $\mathscr{R}_\Lambda A$ мы можем найти множество M_n, для которого $M_n \bigcap \Lambda_n = \varnothing$ и $|(\mathscr{R}_{\Lambda_n}A)(\eta) - (\mathscr{R}_{\Lambda_n}A)(\xi_n)| < 1$, если $\eta|M_n = \xi_n|M_n$. Пусть B_n — характеристическая функция множества $\{\eta \in \Omega\colon \eta|M_n = \xi_n|M_n\}$, тогда при достаточно большом n имеем
$$(\mathscr{R}_{\Lambda_n}A)(\eta) > \sigma(A) + 2, \text{ если } B_n(\eta) \neq 0.$$
Поэтому
$$\sigma(AB_n) = \sigma(\mathscr{R}_{\Lambda_n}(AB_n)) = \sigma((\mathscr{R}_{\Lambda_n}A) \cdot B_n) \geqslant (\sigma(A) + 2)\sigma(B_n);$$
и, следовательно,
$$|\sigma(AB_n) - \sigma(A)\sigma(B_n)| \geqslant 2\sigma(B_n).$$
Но это противоречит условию (C$'$), потому что $\sigma(B_n) > 0$ в силу нашего предположения $\operatorname{supp}\sigma = \Omega$.

1.14. Замечание

Предположим, что пространство Ω обладает следующим свойством.

(D*) *Для любых ξ, $\eta \in \Omega$ и конечного $\Lambda \subset L$ существуют конечное множество $M \subset L$ и $\zeta \in \Omega$ такие, что*
$$\zeta|\Lambda = \xi|\Lambda, \quad \zeta|(L \setminus M) = \eta|(L \setminus M)$$
(*другими словами, при любом $\eta \in \Omega$ множество $\sum_\eta = \{\zeta \in \Omega\colon \exists$ конечное множество M, для которого $\zeta|(L \setminus M) = \eta|(L \setminus M)\}$ всюду плотно в Ω.*)

В этом случае каждое гиббсовское состояние σ имеет полный носитель, т. е. $\operatorname{supp}\sigma = \Omega$ (это прямо следует из определения (1.14) гиббсовского состояния). Таким образом, если выполнено (D*), то условия (A$'$), (B$'$), (C$'$) теоремы 1.13 эквивалентны.

Библиографические указания

Понятие гиббсовского состояния было введено Добрушиным [1, 2, 3] (и затем переоткрыто Лэнфордом и Рюэлем [1]). Гиббсовские состояния были определены Добрушиным как вероятностные меры, условные вероятности которых даны заранее (см. теорему 1.8). Точно также можно сказать, что они являются вероятностными мерами, удовлетворяющими определенному множеству уравнений (см. (1.14)), иногда называемых ДРЛ уравнениями. В этой главе мы в основном следовали Добрушину, излагая его теорию в более современном виде. Сделаны некоторые дополнения: например, доказано симплектическое свойство, введено понятие алгебры на бесконечности (Лэнфорд и Рюэль [1]), определены операторы $\mathscr{R}_\Lambda$ (Ледраппье [1]).

Упражнения

1. Если $\Omega = \prod_{x\in L}\Omega_x$ (в этом случае множество $\mathscr{F}$ пусто) и $\Phi|\Omega_\Lambda = 0$ при $|\Lambda| > 1$, то существует единственное гиббсовское состояние: $\sigma = \prod_{x\in L}\sigma_{(\{x\})}$.

2. Показать, что множество термодинамических пределов $(\mu_{(\Lambda)\eta_{L\setminus\Lambda}})$ — см. теорему 1.9(b) — является замкнутым и содержит все крайние точки множества K_Φ. (Второе утверждение, впервые доказанное Георгия [2], легко получается из теоремы Мильмана: см. приложение А.3.5.)

3. Два различных неразложимых гиббсовских состояния являются непересекающимися (т. е. сингулярными) мерами на Ω (см. приложение А.5.5).

4. Пусть Φ, Ψ — два взаимодействия и $\sigma \in K_\Phi$.

(a) Для каждого конечного $\Lambda \subset L$ и $\xi \in \Omega_\Lambda$ определим

$$\mu^*_{(\Lambda)}\{\xi\} = Z^{*-1}\exp(-U^\Psi_\Lambda(\xi))\cdot(\alpha_\Lambda\sigma)\{\xi\},$$

$$Z^* = (\alpha_\Lambda\sigma)(\exp(-U^\Psi_\Lambda)).$$

Доказать, что любой термодинамический предел $(\mu^*_{(\Lambda)})$ принадлежит множеству $K_{\Phi+\Psi}$.

(b) Используя (a), показать, что при $\Lambda \to L$ любой предел

$$Z^{*-1}\exp(-U^\Psi_\Lambda(\zeta|\Lambda))\cdot\sigma(d\zeta)$$

принадлежит множеству $K_{\Phi+\Psi}$.

(c) Найти аналогии (a) и (b) в случае, когда U_Λ заменен на $U_\Lambda + W_{\Lambda,\, L\setminus\Lambda}$. (Предостережение: знаменатель Z^* должен быть отличен от нуля.)

Глава 2

Гиббсовские состояния: продолжение

В этой главе мы изучаем, как преобразуются взаимодействия и гиббсовские состояния относительно различных отображений.

2.1. Морфизмы решетчатых систем

Тройку $(L,\, (\Omega_x)_{x\in L},\, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, введенную в главе 1, будем называть *решетчатой системой*. Каждой такой решетчатой системе мы сопоставим конфигурационное пространство Ω, определенное в параграфе 1.1. Обозначим через Ω' конфигурационное пространство, соответствующее решетчатой системе $(L',\, (\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$. Предположим теперь, что семейство $(F_x)_{x\in L}$ обладает следующими свойствами.

(M1) *F_x является отображением $\Omega'_{M(x)} \mapsto \Omega_x$, где $M(x)$ — конечное подмножество L'.*

(M2) *Семейство $(M(x))_{x\in L}$ локально конечно (т. е. множество $\{x\colon x' \in M(x)\}$ конечно при любом $x' \in L'$).*

(M3) *Если $\xi' \in \Omega'_{\cup\{M(x):x\in X\}}$, то $(F_x(\xi'|M(x)))_{x\in X}$ является элементом $F_X\xi'$ пространства Ω_X как только $X \subset L$.*

Условие (M3) достаточно проверить только для $X \in \mathscr{F}$.

Определим непрерывное отображение $F\colon \Omega' \mapsto \Omega$, положив

$$(F\xi')_x = F_x(\xi'|M(x)).$$

Пусть множество $\sum_\xi \subset \Omega$ состоит из тех η, для которых $\eta_x = \xi_x$ за исключением конечного числа $x \in L$. Определим аналогичным образом множество $\sum'_{\xi'} \subset \Omega$. Тогда F отображает множество $\sum'_{\xi'}$ в $\sum_{F\xi'}$. Мы будем говорить, что F является *морфизмом* из $(L',\, (\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$ в $(L,\, (\Omega_x)_{x\in L},\, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, если оно удовлетворяет следующему условию:

(M4) *Ограничение F на множество $\sum'_{\xi'}$ является биекцией на $\sum_{F\xi'}$ при каждом $\xi' \in \Omega'$.*

Заметим, что различные семейства $(F_x)_{x\in L}$ могут определять одно и то же отображение F и, следовательно, один и тот же морфизм. Легко проверить, что тождественное преобразование пространства Ω является морфизмом (тождественным морфизмом) и что композиция двух морфизмов дает снова морфизм (см. упражнение 1). Предположим, что F' — морфизм из $(L,\,(\Omega_x)_{x\in L},\,(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ в $(L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$ и что FF' и $F'F$ — тождественные преобразования соответственно на Ω и Ω'. В этом случае F будем называть *изоморфизмом*.

2.2. Пример

Предположим, что дана решетчатая система $(L',(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},(\overline{\Omega}_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$. Пусть — $(M(x))_{x\in L}$ разбиение L' на конечные подмножества. Положим $\Omega_x = \Omega'_{M(x)}$ и будем считать отображение $F_x\colon \Omega'_{M(x)} \mapsto \Omega_x$ тождественным. Выбрав множество $\Lambda \in \mathscr{F}$, для которого существует такое множество $\Lambda' \in \mathscr{F}'$, что $\Lambda' \bigcap M(x) \neq \varnothing$ при всех $x \in \Lambda$, мы можем определить множество $\overline{\Omega}_\Lambda = \{(\xi'|M(x))_{x\in\Lambda}\colon \xi' \in \Omega'_{\cup\{M(x):x\in\Lambda\}}\}$. Очевидно, семейство $(F_x)_{x\in L}$ определяет морфизм F из $(L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$ в $(L,\,(\Omega_x)_{x\in L},\,(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, который, на самом деле, является изоморфизмом.

2.3. Взаимодействие $F^*\Phi$

Пусть Φ — морфизм, определенный семейством $(F_x)_{x\in L}$ (см. параграф 2.1). Взяв взаимодействие Φ для $(L,\,(\Omega_x)_{x\in L},\,(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, мы введем взаимодействие $F^*\Phi$ для $(L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_\Lambda)_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$, положив

$$(F^*\Phi)(\xi') = \sum_{X\colon \cup\{M(x):x\in X\}=X'} \Phi(F_X\xi'),\ \text{если } \xi' \in \Omega'_{X'}.$$

В силу условия (M2) эта сумма конечна. Кроме того, используя (M3), получим

$$||F^*\Phi||_{x'} = \sum_{X'\ni x'} \sup_{\xi'\in\Omega'_{X'}} |(F^*\Phi)(\xi')| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{X'\ni x' \\ X\colon \cup\{M(x):x\in X\}=X'}} \sup_{\xi'\in\Omega'_{X'}} |\Phi(F_X\xi')| = \sum_{X\colon \cup\{M(x):x\in X\}\ni x'} \sup_{\xi'\in\Omega'_{X'}} |\Phi(F_X\xi')| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{X\colon X\bigcap\{x\colon x'\in M(x)\}\neq\varnothing} \sup_{\xi\in\Omega_x} |\Phi(\xi)| \leqslant \sum_{x\colon x'\in M(x)} ||\Phi||_x.$$

Заметим, что $F^*\Phi$ зависит от семейства $(F_x)_{x\in L}$, которое определяет морфизм F.

2.4. Лемма

Условные вероятности $\mu^{F^*\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}\{\xi'_{\Lambda'}\}$ зависят только от морфизма F и, следовательно, не зависят от семейства $(F_x)_{x\in L}$, его определяющего.

По определению

$$\mu^{F^*\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}\{\xi'_{\Lambda'}\} = \frac{\exp(-U_{\Lambda'}(\xi'_{\Lambda'}) - W_{\Lambda',\,L'\setminus\Lambda'}(\xi'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'}))}{\sum\limits_{\eta'_{\Lambda'}\in\Omega'_{\Lambda'}} \exp(-U_{\Lambda'}(\eta'_{\Lambda'}) - W_{\Lambda',\,L'\setminus\Lambda'}(\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'}))}, \tag{2.1}$$

где U, W вычислены для взаимодействия $F^*\Phi$. В этом случае

$$\exp(-U_{\Lambda'}(\eta'_{\Lambda'}) - W_{\Lambda',\,L'\setminus\Lambda'}(\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'})) =$$

$$= \exp\Big(-\sum_{X':\ X'\bigcap\Lambda'\neq\varnothing}\ \sum_{X:\ \cup\{M(x):x\in X\}=X'} \Phi(F_X((\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'})|X'))\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\sum_{X:\ \cup\{M(x):x\in X\}\bigcap\Lambda'\neq\varnothing} \Phi(F(\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'})|X)\Big) =$$

$$= \prod_{X:\ \cup\{M(x):x\in X\}\bigcap\Lambda'\neq\varnothing} \exp(-\Phi(F(\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'})|X)). \tag{2.2}$$

Другой выбор семейства $(F_x)_{x\in L}$ дал бы то же самое выражение, за исключением изменений в множествах $M(x)$. Однако выражение (2.1) останется тем же благодаря сокращениям в числителе и знаменателе.

2.5. Предложение

Если σ' — гиббсовское состояние на Ω' для взаимодействия $F^*\Phi$, то $F\sigma'$ — гиббсовское состояние на пространстве Ω для взаимодействия Φ.

Пусть $\xi' \in \Omega'$, $\xi = F\xi' \in \Omega$, и пусть Λ, Λ' — конечные подмножества L, L' соответственно. Положим

$$\xi_\Lambda = \xi|\Lambda, \quad \xi_{L\setminus\Lambda} = \xi|(L\setminus\Lambda), \quad \xi'_{L'\setminus\Lambda'} = \xi'|(L'\setminus\Lambda').$$

В силу (M4) для данного Λ и достаточно большого Λ' существует такая биекция f множества

$$A = \{\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda : \eta_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda} \text{ определено}\}$$

на множество

$$\{\eta'_{\Lambda'} \in \Omega'_{\Lambda'} : \eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'} \text{ определено и } F(\eta'_{\Lambda'} \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'})|(L \setminus \Lambda) = \xi_{L\setminus\Lambda}\},$$

что

$$F((f\eta_\Lambda) \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'}) = \eta_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda}. \tag{2.3}$$

Обозначим через P условную вероятность относительно меры $\sigma'(d\eta')$ того, что $(F\eta')|\Lambda = \xi_\Lambda$ при $\eta'|(L' \setminus \Lambda') = \xi'_{L'\setminus\Lambda'}$ и $(F\eta')|(L \setminus \Lambda) = \xi_{L\setminus\Lambda}$. Так как σ' — гиббсовское состояние, то мы имеем

$$P = \frac{\mu^{F^*\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}\{f\xi_\Lambda\}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in A} \mu^{F^*\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}\{f\eta_\Lambda\}} =$$

$$= \frac{\exp(-U_{\Lambda'}(f\xi_\Lambda) - W_{\Lambda',\,L'\setminus\Lambda'}((f\xi_\Lambda) \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'}))}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in A} \exp(-U_{\Lambda'}(f\eta_\Lambda) - W_{\Lambda',\,L'\setminus\Lambda'}((f\eta_\Lambda) \vee \xi'_{L'\setminus\Lambda'}))}.$$

Используя (2.2) и (2.3), получим

$$P = \frac{\prod\limits_{X:\, \cup\{M(x): x\in X\} \bigcap \Lambda' \neq \varnothing} \exp(-\Phi(\xi_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda}|X))}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in A} \prod\limits_{X:\, \cup\{M(x): x\in X\} \bigcap \Lambda' \neq \varnothing} \exp(-\Phi(\eta_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda}|X))}.$$

Множители с $X \bigcap \Lambda = \varnothing$ одинаковы в числителе и знаменателе. Поэтому

$$P = \frac{\exp\Big(-\sum\limits_{X:\, X \bigcap \Lambda \neq \varnothing} \Phi(\xi_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda}|X)\Big)}{\sum\limits_{\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda} \exp\Big(-\sum\limits_{X:\, X \bigcap \Lambda \neq \varnothing} \Phi(\eta_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda}|X)\Big)} = \mu^{\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}.$$

Это выражение не зависит от $\xi'_{L'\setminus\Lambda'}$, и, следовательно, условная вероятность относительно меры $\sigma'(d\eta')$ того, что $(F\eta')|\Lambda = \xi_\Lambda$ при $(F\eta')|(L\setminus\Lambda) = \xi_{L\setminus\Lambda}$, равна $\mu^{\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}$. Последнее утверждение эквивалентно тому, что условная вероятность $\eta|\Lambda = \xi_\Lambda$ при условии $\eta|(L\setminus\Lambda) = \xi_{L\setminus\Lambda}$ относительно меры $(F\sigma')(d\eta)$ совпадает с $\mu^{\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}$. Таким образом, $F\sigma'$ — гиббсовское состояние для взаимодействия Φ.

2.6. Замечание

Если $F\circ F'$ — морфизм, полученный при помощи композиции двух морфизмов F и F', то нетрудно проверить, что (см. упражнение 1)

$$(F\circ F')^* = F'^*F^*, \tag{2.4}$$

когда $F\circ F'$ определяется при помощи допустимого семейства $(\widetilde{F}_x)_{x\in L}$.

В случае, когда I — тождественный изоморфизм системы $(L, (\Omega_x)_{x\in L}, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, из леммы 2.4 следует, что взаимодействия Φ и $I^*\Phi$ определяют одни и те же условные вероятности:

$$\mu^{I^*\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\} = \mu^{\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\} \tag{2.5}$$

и, следовательно, имеют одинаковые гиббсовские состояния.

Если $F\colon \Omega'\mapsto\Omega$ — изоморфизм, то F является биекцией множества гиббсовских состояний для взаимодействия $F^*\Phi$ на Ω' в множество гиббсовских состояний для Φ на пространстве Ω. Это вытекает из предложения 2.5 и из (2.4), (2.5).

2.7. Системы условных вероятностей

Для каждого конечного множества $\Lambda\subset L$ положим

$$\Omega^*_{L\setminus\Lambda} = \{\xi\colon (\exists\xi^*\in\Omega)\,\xi = \xi^*|(L\setminus\Lambda)\}.$$

Это множество замкнуто в $\Omega_{L\setminus\Lambda}$ (см. параграф 1.5). Условные вероятности $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}$ для всех допустимых взаимодействий Φ (т. е. $||\Phi||_x<\infty$ при всех x — см. параграф 1.2) удовлетворяют следующим условиям.

(a) *Если* $\xi_{L\setminus\Lambda}\in\Omega^*_{L\setminus\Lambda}$ *и* $\xi_\Lambda\in\Omega_\Lambda$, *то* $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}\geqslant 0$ *и* $\sum_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda}\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\eta_\Lambda\} = 1$. *Кроме того,* $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}>0$ *тогда и только тогда, когда* $\xi_\Lambda\vee\xi_{L\setminus\Lambda}\in\Omega$.

(b) *Если* $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$, *то действительная функция* $\xi_{L\setminus\Lambda} \mapsto \mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}$ *на множестве* $\Omega^*_{L\setminus\Lambda}$ *является непрерывной.*

(c) *Пусть* $\Lambda \subset M$, $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$, $\xi_{M\setminus\Lambda} \in \Omega_{M\setminus\Lambda}$, $\xi_{L\setminus M} \in \Omega_{L\setminus M}$ *и* $\xi_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda} \vee \xi_{L\setminus M} \in \Omega$. *Тогда*

$$\mu_{(\Lambda)\xi_{M\setminus\Lambda}\vee\xi_{L\setminus M}}\{\xi_\Lambda\} \times \sum_{\eta\in\Omega_\Lambda} \mu_{(M)\xi_{L\setminus M}}\{\eta \vee \xi_{M\setminus\Lambda}\} = \mu_{(M)\xi_{L\setminus M}}\{\xi_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda}\}.$$

Утверждения (a) и (b) вытекают из параграфа 1.5, а утверждение (c) — из интерпретации чисел $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\}$ как условных вероятностей и может быть проверено прямым вычислением.

Семейство $(\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}})$, удовлетворяющее (a), (b), (c), будем называть *системой условных вероятностей.* Основная часть теории, изложенная до сих пор на языке взаимодействий, при помощи простых модификаций может быть объяснена на языке систем условных вероятностей.

Определение гиббсовского состояния (см. параграф 1.5) менять не будем. Покажем, что любой термодинамический предел $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}$ (с $\xi_{L\setminus\Lambda} \in \Omega^*_{L\setminus\Lambda}$) является гиббсовским состоянием. Пусть $\Lambda \subset M \subset N \subset L$. Условная вероятность относительно меры $\alpha_{MN}\mu_{(N)\xi_{L\setminus N}}$ того, что $\eta|\Lambda = \xi_\Lambda$ при условии $\eta|(M \setminus \Lambda) = \xi_{M\setminus\Lambda}$, равна

$$P = \frac{\alpha_{MN}\mu_{(N)\xi_{L\setminus N}}\{\xi_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda}\}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda\in\Omega_\Lambda} \alpha_{MN}\mu_{(N)\xi_{L\setminus N}}\{\eta_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda}\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\eta_{N\setminus M}} \mu_{(N)\xi_{L\setminus N}}\{\xi_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda} \vee \eta_{N\setminus M}\}}{\sum\limits_{\eta_\Lambda}\sum\limits_{\eta_{N\setminus M}} \mu_{(N)\xi_{L\setminus N}}\{\eta_\Lambda \vee \xi_{M\setminus\Lambda} \vee \eta_{N\setminus M}\}}.$$

Если это выражение не имеет смысла, то мы можем определить его произвольным образом. Используя условие (c), получим, что

$$P = \sum_{\eta_{N\setminus M}} \mu_{((N\setminus M)\bigcup\Lambda)\xi_{M\setminus\Lambda}\vee\xi_{L\setminus N}}\{\xi_\Lambda \vee \eta_{N\setminus M}\} =$$

$$= \sum_{\eta_{N\setminus M}} \mu_{(\Lambda)\xi_{M\setminus\Lambda}\vee\eta_{N\setminus M}\vee\xi_{L\setminus N}}\{\xi_\Lambda\}\times$$

$$\times \sum_{\eta_\Lambda} \mu_{((N\setminus M)\bigcup\Lambda)\xi_{M\setminus\Lambda}\vee\xi_{L\setminus N}}\{\eta_\Lambda \vee \eta_{N\setminus M}\}.$$

Таким образом, в силу (a) величина P является усреднением по $\eta_{N\setminus M}$ с некоторыми весами величины

$$\mu_{(\Lambda)\xi_{M\setminus\Lambda}\vee\eta_{N\setminus M}\vee\xi_{L\setminus N}}\{\xi_\Lambda\}.$$

В силу условия непрерывности (b) вариация этой величины относительно $\eta_{N\setminus M}\vee\xi_{L\setminus N}$ стремится равномерно к нулю при $M\to\infty$.

Отсюда следует, что термодинамический предел $(\mu_{(\Lambda)\eta_{L\setminus\Lambda}})$ является гиббсовским состоянием.

2.8. Свойства гиббсовских мер

Доказательства результатов главы 1, начиная с теоремы 1.8, применимы после очевидных изменений в рассматриваемой ситуации. Более точно, *теорема* 1.8 *и утверждения* (b), (c), (d) *теоремы* 1.9 *верны для систем условных вероятностей. Кроме того, характеристика чистых гиббсовских состояний* (*теорема* 1.11) *и условия их единственности* (*теорема* 1.13 *и замечание* 1.14) *также остаются справедливыми.*

Пусть морфизм F определен точно так же, как и в параграфе 2.1, и $(\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}})$ — система условных вероятностей для тройки $(L,\,(\Omega_x)_{x\in L},\,(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$. Введем теперь систему $(F^*\mu_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}})$ для $(L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$.

Для конечного множества $\Lambda'\subset L'$ и $\xi'_{L'\setminus\Lambda'}\in\Omega^*_{L'\setminus\Lambda'}$ положим $\Lambda = \{x\in L\colon M(x)\bigcap\Lambda'\neq\varnothing\}$. Тогда в силу свойств изоморфизма имеем

$$F(\eta'_{\Lambda'}\vee\xi'_{L'\setminus\Lambda'}) = F_\Lambda(\eta'_{\Lambda'}\vee\xi'_{L'\setminus\Lambda'})\vee\xi_{L\setminus\Lambda}$$

при некотором $\xi_{L\setminus\Lambda}\in\Omega^*_{L\setminus\Lambda}$ как только $\eta'_{\Lambda'}\vee\xi'_{L'\setminus\Lambda'}\in\Omega'$. Определим

$$F^*\mu_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}\{\xi'_{\Lambda'}\} = \frac{\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{F_\Lambda(\xi'_{\Lambda'}\vee\xi'_{L'\setminus\Lambda'})\}}{\sum\limits_{\eta'_{\Lambda'}\in\Omega'_{\Lambda'}}\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{F_\Lambda(\eta'_{\Lambda'}\vee\xi'_{L'\setminus\Lambda'})\}}.$$

Семейство $(F^*\mu_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}})$ является системой условных вероятностей для $(L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$. Заметим, что в силу (2.1) и (2.2) если Φ является взаимодействием, то

$$F^*\mu^{\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}} = \mu^{F^*\Phi}_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}}.$$

Нетрудно проверить, что предложение 2.5 и замечание 2.6 остаются справедливыми для систем условных вероятностей, если вместо $F^*\Phi$ рассматривать $(F^*\mu_{(\Lambda')\xi'_{L'\setminus\Lambda'}})$.

2.9. Замечание

Превосходство рассмотрения систем условных вероятностей по сравнению с взаимодействиями состоит в том, что они имеют более общую природу и, в то же время, изменяются естественным образом относительно морфизмов. Действительно, если F является морфизмом, то отображение F^* определено однозначно на системах условных вероятностей, но не на взаимодействиях. Кроме того, на системах условных вероятностей морфизмы действуют как функторы в том смысле, что $(F \circ F')^* = F'^*F^*$ и I^* является тождественным преобразованием, если I — тождественный морфизм.

Однако системы условных вероятностей не всегда являются естественным объектом исследования[1], и поэтому всегда полезно иметь взаимодействия в своем распоряжении.

Послесловие

Эта глава в каком-то смысле формальна по своей природе и является попыткой избавиться от произвола, присутствующего в выборе тройки $(L,\ (\Omega_x)_{x\in L},\ (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ и взаимодействий Φ в главе 1. Последнее достигается при помощи введения понятия изоморфизма между «решетчатыми системами» $(L,\ (\Omega_x)_{x\in L},\ (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ и сопоставления каждому взаимодействию «системы условных вероятностей». Интересно, что можно определить не только изоморфизм решетчатых систем, но их морфизм. Они преобразуют системы условных вероятностей контравариантно, а гиббсовские состояния — ковариантно. Морфизмы могут быть использованы для формализации некоторых процедур в статистической механике[2].

Определение системы условных вероятностей см. в работе Салливана [1]. Результаты остальной части этой главы публикуются впервые.

[1] Это, в первую очередь, из-за того, что для них нельзя определить давление P в случае, когда имеется инвариантность относительно сдвигов (см. главы 3, 4).

[2] См., например, сведение к транзитивным и перемешивающим системам в теоремах 5.2, 5.3. Другим примером является использование «контуров» в изучении модели Изинга с нулевым магнитным полем.

Упражнения

1. Пусть F, F' — морфизмы

$$F\colon (L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}) \mapsto (L,\,(\Omega_x)_{x\in L},\,(\overline{\Omega}_{\Lambda})_{\Lambda\in\mathscr{F}}),$$

$$F'\colon (L'',\,(\Omega''_{x''})_{x''\in L''},\,(\overline{\Omega}''_{\Lambda''})_{\Lambda''\in\mathscr{F}''}) \mapsto (L',\,(\Omega'_{x'})_{x'\in L'},\,(\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}),$$

определенные семействами $(F_x)_{x\in L}$, $(F'_{x'})_{x'\in L'}$, где $F_x\colon \Omega'_{M(x)} \mapsto \Omega_x$ и $F'_x\colon \Omega''_{M'(x')} \mapsto \Omega'_{x'}$. Пусть $\widetilde{M}(x) = \bigcup\{M'(x')\colon x' \in M(x)\}$ и $\widetilde{F}_x\colon \Omega''_{\widetilde{M}(x)} \mapsto \Omega_x$ — такое семейство, что $\widetilde{F}(\xi'') = F_x(F'_{M(x)}\xi'')$.

Проверить, что отображение $\widetilde{F} = F\circ F'$ является морфизмом, определенным при помощи семейства $(\widetilde{F}_x)_{x\in L}$. Проверить, что $\widetilde{F}^*\Phi = F'^*F^*\Phi$, где F^*, F'^*, $\widetilde{F}^*$ определены семействами (F_x), $(F'_{x'})$, $(\widetilde{F}_x)$ соответственно.

2. Если мы откажемся от условия $\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}}\{\xi_\Lambda\} > 0$ при $\xi_\Lambda \vee \xi_{L\setminus\Lambda} \in \Omega$ в параграфе 2.7(a), то мы получим более общее определение системы условных вероятностей. Проверить, что свойства, описанные в параграфе 2.8 (за исключением замечания 1.14), тем не менее остаются в этом случае верными.

3. Пусть дана система условных вероятностей $(\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}})$. Для любых ξ, $\eta \in \Omega$, для которых существует такое конечное множество Λ, что $\xi|(L\setminus\Lambda) = \eta|(L\setminus\Lambda)$, положим

$$V(\xi,\,\eta) = \log\mu_{(\Lambda)\xi|(L\setminus\Lambda)}\{\xi|\Lambda\} - \log\mu_{(\Lambda)\xi|(L\setminus\Lambda)}\{\eta|\Lambda\}. \qquad (*)$$

Проверить, что это определение не зависит от выбора множества Λ и что оно обладает следующими свойствами:

(a) V — действительная функция на множестве $\{(\xi,\,\eta) \in \Omega\times\Omega\colon \xi|(L\setminus\Lambda) = \eta|(L\setminus\Lambda)$ при некотором конечном $\Lambda\}$.

(b) Если ξ_Λ, $\eta_\Lambda \in \Omega_\Lambda$, то функция $\xi_{L\setminus\Lambda} \mapsto V(\xi_\Lambda\vee\xi_{L\setminus\Lambda},\,\eta_\Lambda\vee\xi_{L\setminus\Lambda})$ непрерывна на множестве $\{\xi_{L\setminus\Lambda}\in\Omega_{L\setminus\Lambda}\colon \xi_\Lambda\vee\xi_{L\setminus\Lambda}\in\Omega$ и $\eta_\Lambda\vee\eta_{L\setminus\Lambda}\in\Omega\}$.

(c) $V(\xi,\,\eta)+V(\eta,\,\zeta)+V(\zeta,\,\xi) = 0$, как только определена левая сторона этого равенства.

Проверить, что $(*)$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между системами условных вероятностей и объектами V, удовлетворяющими условиям (a), (b) и (c). Очевидно, эти объекты образуют линейное пространство. Проверить, что естественное действие F^*, где F — морфизм, на этом пространстве является линейным.

4. Рассмотрим две решетчатые системы с конфигурационными пространствами Ω и Ω'. Пусть Φ, Φ' — взаимодействия для них. Дадим естественное определение суммы и произведения двух решетчатых систем: ими будут решетчатые системы с конфигурационными пространствами $\Omega^* = \Omega \bigcup \Omega'$ (объединение) и $\Omega^{**} = \Omega \times \Omega'$ (произведение) соответственно. Определим также сумму и произведение взаимодействий Φ и Φ'.

(a) Показать, что инъекция $\Omega \mapsto \Omega^*$ является морфизмом.

(b) Показать, что если σ, σ' — гиббсовские состояния для взаимодействий Φ и Φ', то $\sigma \otimes \sigma'$ — гиббсовское состояние для $\Phi \times \Phi'$.

(Для того чтобы определить сумму $(L^*, (\Omega_x^*)_{x \in L^*}, (\overline{\Omega}_\Lambda^*)_{\Lambda \in \mathscr{F}^*})$, используйте произвольную идентификацию счетных бесконечных множеств L и L' и положите $L^* = L = L'$, $\Omega_x^* = \Omega_x \bigcup \Omega'_x$. Возьмите $(\overline{\Omega}_\Lambda^*)_{\Lambda \in \mathscr{F}^*}$ такие, чтобы $\xi \in \Omega^*$ тогда и только тогда, когда $\xi \in \Omega$ и $\xi \in \Omega'$. Для того чтобы определить произведение, положите $L^{**} = L \bigcup L'$.)

Глава 3

Трансляционная инвариантность. Теория равновесных состояний

Предположив трансляционную инвариантность, мы построим в этой главе теорию равновесных состояний и давления, а также получим общие результаты, касающиеся фазовых переходов.

3.1. Трансляционная инвариантность

Теория гиббсовских состояний получает очень интересное развитие в случае, когда предполагается инвариантность относительно «достаточно большой» группы симметрии G. В качестве G мы возьмем группу $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geqslant 1$, но заметим, что и другие группы могут представлять интерес[1]. В данной главе мы не будем рассматривать гиббсовских состояний, а вместо этого изложим теорию равновесных состояний. Связь между гиббсовскими и равновесными состояниями будет обсуждаться в главе 4.

Пусть $L = \mathbb{Z}^\nu$ и группа $G = \mathbb{Z}^\nu$ действует на L посредством сдвигов:

$$(a, x) \mapsto a + x.$$

Для любого $x \in \mathbb{Z}^\nu$ положим $\Omega_x = \Omega_o$ так, что $\prod_{x\in\mathbb{Z}^\nu} \Omega_x = (\Omega_o)^{\mathbb{Z}^\nu}$. Для любого $S \subset L$ определим отображение $\tau^a\colon \prod_{x\in S} \Omega_x \mapsto \prod_{x\in S-a} \Omega_x$ равенством

$$(\tau^a \xi)_x = \xi_{x+a}.$$

В этой главе мы не будем вводить семейство $(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}$ из главы 1, а просто предположим, что $\Omega \subset \prod_{x\in\mathbb{Z}^\nu} \Omega_x$ и $\Omega_\Lambda \subset \prod_{x\in\Lambda} \Omega_x$ (для конечных $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$) удовлетворяют условиям:

(a) $\Omega_{\Lambda-a} = \tau^a \Omega_\Lambda$;

(b) $\Omega_M | \Lambda \subset \Omega_\Lambda$, если $\Lambda \subset M$;

(c) $\Omega \neq \varnothing$ и $\xi \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\xi | \Lambda \in \Omega_\Lambda$ для всех Λ.

В части, касающейся Ω, эти условия сводятся к предположению, что Ω — *произвольное непустое замкнутое τ-инвариантное подмножество пространства* $\prod_{x\in\mathbb{Z}^\nu} \Omega_x$.[2]

---

[1] См., например, иерархическую модель Дайсона [1].

[2] Легко понять, что семейство множеств Ω_Λ не определяется однозначно множеством Ω. — *Прим. ред.*

Пусть α_Λ, $\alpha_{\Lambda M}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_\Lambda$ определены так же, как в главе 1. Заметим, что τ^a, $a \in G$, является гомеоморфизмом компактного множества Ω и что отображение $A \mapsto A \circ \tau^a$ определяет автоморфизм алгебры $\mathscr{C}$, являющийся изометрией и переводящий $\mathscr{C}_\Lambda$ в $\mathscr{C}_{\Lambda+a}$.

Взаимодействие Φ будем называть инвариантным, если

$$\Phi(\tau^a \xi) = \Phi(\xi) \tag{3.1}$$

при всех $a \in \mathbb{Z}^\nu$, $\xi \in \Omega_\Lambda$ и конечных $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$. Такие взаимодействия образуют банахово пространство $\mathscr{A}$ относительно нормы

$$|\Phi| = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \sup_{\xi \in \Omega_X} |\Phi(\xi)|. \tag{3.2}$$

В дальнейшем мы будем использовать всюду плотное линейное пространство $\mathscr{A}_o \subset \mathscr{A}$, состоящее из всех *взаимодействий конечного радиуса*; по определению, Φ — взаимодействие конечного радиуса, если существует такое конечное множество Δ, что $\Phi(\xi|X)$ может быть отлично от нуля лишь в случае, когда $X - x \subset \Delta$ при всех $x \in X$.

В описанной модели множество $L = \mathbb{Z}^\nu$ можно интерпретировать как ν-мерную кристаллическую решетку. Тогда групповая инвариантность — это инвариантность относительно сдвигов решетки.

3.2. Функция A_Φ

Каждому взаимодействию $\Phi \in \mathscr{A}$ поставим в соответствие некоторую непрерывную функцию A_Φ на пространстве Ω так, чтобы величину $-A_\Phi(\xi)$ можно было интерпретировать как вклад одного узла решетки (скажем, узла 0) в энергию конфигурации ξ. Это можно сделать, положив

$$A_\Phi(\xi) = -\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \Phi(\xi|X).$$

Возможны, однако, и другие определения с той же физической интерпретацией и с тем же значением $\sigma(A_\Phi)$ для любого инвариантного состояния σ (см. ниже § 3.5). Так, мы могли бы положить

$$A_\Phi(\xi) = -\sum_X{}^* \Phi(\xi|X), \tag{3.3}$$

где сумма $\sum^*$ берется по всем тем X, которые, будучи лексикографически упорядочены, имеют 0 своим первым элементом (или последним элементом). Лексикографическим здесь является любой полный порядок на множестве $\mathbb{Z}^\nu$, согласованный со сдвигами. Мы могли бы также определить A_Φ равенством (3.3), где суммирование ведется по всем X, для которых 0 служит $[(|X|+1)/2]$-м[3] (т. е. «средним») элементом множества X при лексикографическом упорядочении. Мы будем использовать это последнее определение. Его достоинство состоит в том, что

$$\{A_\Phi\colon \Phi \in \mathscr{A}_o\} = \bigcup_{\Lambda\text{ — конечное}} \mathscr{C}_\Lambda \quad \text{и} \quad \{A_\Phi\colon \Phi \in \mathscr{A}\} = \mathscr{C}.$$

Чтобы убедиться в представимости каждой функции $A \in \mathscr{C}_\Lambda$ в виде A_Φ при подходящем $\Phi \in \mathscr{A}_o$, подберем такое $X \supset \Lambda$, в котором 0 является $[(|X| + 1)/2]$-м элементом (в лексикографическом порядке). Положим $\Phi(\xi|X) = -A(\xi)$ и $\Phi(\xi|Y) = 0$, если Y не получено сдвигом из X. Тогда $|\Phi| = ||A||$ и $A = A_\Phi$. Для любой функции $A \in \mathscr{C}$ имеет место разложение $A = \sum_n A_n$, где $A_n \in \mathscr{C}_{\Lambda_n}$ и $\sum_n ||A_n|| < \infty$. Следовательно, если Φ_n выбрано указанным выше способом, мы получим равенство $A = A_\Phi$ с $\Phi = \sum_n \Phi_n$.

Заметим, что отображение $\Phi \mapsto A_\Phi$ является линейным и что

$$||A_\Phi|| \leqslant \sum_{X\ni 0} \frac{1}{|X|} \sup_{\xi\in\Omega_X} |\Phi(\xi)| = |\Phi|.$$

Более точно,

$$||A|| = \inf\{|\Phi|\colon A = A_\Phi\}. \tag{3.4}$$

Таким образом, мы имеем линейное отображение $\Phi \mapsto A_\Phi$ пространства $\mathscr{A}$ на $\mathscr{C}$.

3.3. Статистические суммы[4]

Для любого конечного $S \subset \mathbb{Z}^\nu$ положим

$$\Omega_S^* = \{\xi\colon (\exists \xi^* \in \Omega)\, \xi = \xi^*|S\}.$$

[3] $[(|X| + 1)/2]$ обозначает целую часть числа $(|X| + 1)/2$.

[4] В оригинале — «partition functions»; при переводе этого термина мы следуем давно сложившейся и вполне оправданной традиции. — *Прим. ред.*

Для конечного Λ и для $\Phi \in \mathscr{A}$ введем *статистические суммы*

$$Z_\Lambda^\Phi = \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \exp[-U_\Lambda^\Phi(\xi)], \quad Z_\Lambda^{*\Phi} = \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda^*} \exp[-U_\Lambda^\Phi(\xi)].$$

При $A \in \mathscr{C}$ положим также

$$Z_\Lambda^*(A) = \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda^*} \exp \sum_{x \in \Lambda} A(\tau^x \xi^*),$$

где для каждого $\xi \in \Omega_\Lambda^*$ произвольно выбрано такое $\xi^* \in \Omega$, что $\xi^* | \Lambda = \xi$.

Пусть $P_\Lambda^\Phi = |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi$. Тогда

$$\frac{d}{dt} P_\Lambda^{\Phi + t\Psi} = (Z_\Lambda^{\Phi + t\Psi})^{-1} \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \frac{-U_\Lambda^\Psi(\xi)}{|\Lambda|} \exp[-U_\Lambda^{\Phi + t\Psi}(\xi)]$$

и, следовательно,

$$|\Lambda| \frac{d^2}{dt^2} P_\Lambda^{\Phi + t\Psi}|_{t=0} =$$

$$= (Z_\Lambda^\Phi)^{-2} \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \sum_{\eta \in \Omega_\Lambda} \frac{1}{2} [U_\Lambda^\Psi(\xi) - U_\Lambda^\Psi(\eta)]^2 \exp[-U_\Lambda^\Phi(\xi) - U_\Lambda^\Phi(\eta)] \geqslant 0. \quad (3.5)$$

Отсюда видно, что $\Phi \mapsto P_\Lambda^\Phi$ — выпуклая функция. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt} P_\Lambda^{\Phi + t\Psi} \leqslant \|\Psi\|;$$

поэтому

$$|P_\Lambda^\Phi - P_\Lambda^\Psi| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{d}{dt} P_\Lambda^{\Phi + t(\Psi - \Phi)} \right| \leqslant \|\Phi - \Psi\|. \quad (3.6)$$

Заметим также, что

$$-\|\Phi\| \leqslant P_\Lambda^\Phi \leqslant \|\Phi\| + \log |\Omega_0|. \quad (3.7)$$

Свойства, аналогичные (3.5), (3.6) и (3.7), сохранятся, если заменить Z_Λ^Φ на $Z_\Lambda^{*\Phi}$ или $Z_\Lambda^*(A)$. В частности, положим $P_\Lambda^*(A) = |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^*(A)$; тогда функция $A \mapsto P_\Lambda^*(A)$ выпукла и

$$|P_\Lambda^*(A) - P_\Lambda^*(B)| \leqslant ||A - B|| \quad (3.8)$$

(предполагается, что в определении Z_Λ^* фиксирован некоторый выбор точки $\xi^* \in \Omega$).

3.4. Теорема

Для любых $a_1, \ldots, a_\nu > 0$ *определим множество*

$$\Lambda(a) = \{x \in \mathbb{Z}^\nu : 0 \leqslant x_i < a_i\}$$

и будем писать $a \to \infty$, *когда* $a_1, \ldots, a_\nu \to \infty$. *Если* $\Phi \in \mathscr{A}$ *и* $A \in \mathscr{C}$, *то существуют пределы*

$$P^\Phi = \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi(a) = \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_{\Lambda(a)}^{*\Phi}, \tag{3.9}$$

$$P(A) = \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_{\Lambda(a)}^{*}(A). \tag{3.10}$$

При этом $P^\Phi = P(A_\Phi)$, *функция* P, *которая называется давлением, выпукла и непрерывна на* $\mathscr{C}$; *более того,*

$$|P(A) - P(B)| \leqslant ||A - B||. \tag{3.11}$$

Если $t \in \mathbb{R}$, *то*

$$P(A + B \circ \tau^x - B + t) = P(A) + t. \tag{3.12}$$

Ниже мы увидим, что термодинамический предел $a \to \infty$ в (3.9), (3.10) можно заменить более общим предельным переходом $\Lambda \uparrow \infty$ (см. § 3.9 и следствие 3.13). Другие свойства функции P приведены в параграфе 6.8.

Пусть сначала $\Phi \in \mathscr{A}_0$: если $\xi \in \Omega_X$ и $X - X \not\subset \Delta$, то $\Phi(\xi) = 0$. При $\Lambda \subset M$

$$Z_M^\Phi \leqslant Z_\Lambda^\Phi \left(|\Omega_o| e^{||\Phi||}\right)^{|M| - |\Lambda|}, \tag{3.13}$$

где

$$||\Phi|| = \sum_{X \ni 0} \sup_{\xi \in \Omega_X} |\Phi(\xi)|.$$

Если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, то

$$Z_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}^\Phi \leqslant Z_{\Lambda_1}^\Phi Z_{\Lambda_2}^\Phi e^{N(\Lambda_2)||\Phi||}, \tag{3.14}$$

где $N(\Lambda_2)$ — число таких точек $x \in \Lambda_2$, что $x + \Delta \not\subset \Lambda_2$.

Положим

$$P^\Phi = \varliminf_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_{\Lambda(a)}^\Phi. \tag{3.15}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ выбираем такое b, что

$$\frac{N(\Lambda(b))}{|\Lambda(b)|} ||\Phi|| < \varepsilon/2, \quad |\Lambda(b)|^{-1} \log Z_{\Lambda(b)}^\Phi < P^\Phi + \varepsilon/2.$$

Тогда для любого набора $a_1, \ldots, a_\nu$, который целочисленно кратен набору $b_1, \ldots, b_\nu$, в силу (3.14) справедливо неравенство

$$|\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{\Phi}_{\Lambda(a)} < P^{\Phi} + \varepsilon.$$

С помощью (3.13) отсюда нетрудно вывести, что

$$\varlimsup_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{\Phi}_{\Lambda(a)} \leqslant P^{\Phi}. \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) получаем

$$\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{\Phi}_{\Lambda(a)} = P^{\Phi}. \tag{3.17}$$

Случай произвольного $\Phi \in \mathscr{A}$ сводится к рассмотренному с использованием свойства равномерной непрерывности (3.6).

Заметим теперь, что (3.14) можно заменить неравенством

$$Z^{\Phi}_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \leqslant \widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda_1} \widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda_2} e^{N(\Lambda_2)||\Phi||}, \tag{3.18}$$

где

$$\widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda_1} = \sum_{\xi\in\widetilde{\Omega}_{\Lambda_1}} \exp[-U_\Lambda(\xi)], \quad \widetilde{\Omega}_{\Lambda_1} = \{\widetilde{\xi}|\Lambda_1 \colon \widetilde{\xi} \in \Omega_{\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2}\};$$

$\widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda_2}$ определяется аналогичным образом. Неравенство (3.18) легко обобщить, заменив $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ на $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n$. Взяв в качестве $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ множества, полученные сдвигом из $\Lambda(b)$ и такие, что $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n = \Lambda(a)$, приходим к неравенству

$$\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{\Phi}_{\Lambda(a)} \leqslant |\Lambda(b)|^{-1} \log \widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda(b)} + \frac{N(\Lambda(b))}{|\Lambda(b)|}||\Phi||; \tag{3.19}$$

при этом $\widetilde{Z}^{\Phi}_{\Lambda(b)}$ вычисляется с использованием множества

$$\widetilde{\Omega}_{\Lambda(b)} = \{\widetilde{\xi}|\Lambda(b) \colon \widetilde{\xi} \in \Omega_{\Lambda(b)+\Delta}\},$$

где Δ — любое конечное множество, содержащее 0 (чтобы убедиться в этом, заметим, что $\Lambda_j + \Delta \subset \Lambda(a)$ для большинства j между 1 и n, если $a \to \infty$). Из справедливости неравенство (3.19) при всех Δ вытекает, что

$$P^{\Phi} \leqslant |\Lambda(b)|^{-1} \log Z^{*\Phi}_{\Lambda(b)} + \frac{N(\Lambda(b))}{|\Lambda(b)|}||\Phi||,$$

а так как $Z^{*\Phi}_{\Lambda(b)} \leqslant Z^{\Phi}_{\Lambda(b)}$, мы получаем

$$\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{*\Phi}_{\Lambda(a)} = P^{\Phi},$$

что и завершает доказательство соотношений (3.9).

В силу (3.3) при $\xi^* \in \Omega$

$$U^{\Phi}_{\Lambda}(\xi^*|\Lambda) + \sum_{x\in\Lambda} A_{\Phi}(\tau^x \xi^*) = \sum_{X\subset\Lambda} \Phi(\xi^*|X) - \sum_{x\in\Lambda} \sideset{}{^*}\sum_{X} \Phi(\xi^*|X+x).$$

Следовательно, если $\Phi \in \mathscr{A}_o$, то

$$\Big| U^{\Phi}_{\Lambda}(\xi^*|\Lambda) + \sum_{x\in\Lambda} A_{\Phi}(\tau^x \xi^*) \Big| \leqslant N(\Lambda)\|\Phi\|$$

и, значит,

$$\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \big[\log Z^{*\Phi}_{\Lambda(a)} - \log Z^{*\Phi}_{\Lambda(a)}(A_{\Phi})\big] = 0.$$

Пользуясь плотностью множества $\{A_{\Phi}\colon \Phi \in \mathscr{A}_o\}$ в $\mathscr{C}$ и равномерной непрерывностью (3.8), мы получаем отсюда (3.10) и равенство $P^{\Phi} = P(A_{\Phi})$ для всех $\Phi \in \mathscr{A}$. Выпуклость функции P и неравенство (3.11) вытекают из соответствующих свойств $P^{*\Phi}_{\Lambda}$, а равенство (3.12) — из соотношений

$$\lim_{a\to\infty} \big[P^{*\Phi}_{\Lambda(a)}(A_{\Phi} + A_{\Psi}\circ\tau^x - A_{\Psi}) - P^{*\Phi}_{\Lambda(a)}(A_{\Phi})\big] = 0, \quad \Phi,\, \Psi \in \mathscr{A}_o,$$

$$Z^{*}_{\Lambda(a)}(A+t) = e^{t|\Lambda|} Z^{*}_{\Lambda(a)}(A),$$

которые проверяются непосредственно.

3.5. Инвариантные состояния

Для каждого $a \in \mathbb{Z}^{\nu}$ определим линейное отображение τ^a, действующее в пространстве $\mathscr{C}^*$ действительных мер на Ω равенством

$$(\tau^a\sigma)(A) = \sigma(A\circ\tau^a), \quad \sigma \in \mathscr{C}^*, \quad A \in \mathscr{C}.$$

Это отображение непрерывно в слабой топологии и переводит множество E вероятностных мер (состояний) в себя. Пусть I — множество τ-инвариантных мер:

$$I = \{\sigma \in E\colon \tau^a\sigma = \sigma \text{ при всех } a \in \mathbb{Z}^{\nu}\}.$$

Мы будем называть эти меры трансляционно-инвариантными состояниями или просто инвариантными состояниями.

3.6. Предложение

Множество I инвариантных состояний выпукло, компактно и является симплексом Шоке.

Это общее свойство совокупности вероятностных мер, инвариантных относительно некоторой группы гомеоморфизмов компактного множества. Выпуклость и компактность I очевидны. Если σ — какая-нибудь τ-инвариантная мера, то мера $|\sigma|$ тоже τ-инвариантна. Отсюда следует, что I — симплекс Шоке (см. приложение A.5.5).

Экстремальные точки множества I называются *эргодическими состояниями*. Единственное разложение инвариантного состояния ρ на эргодические состояния называется *эргодическим разложением*; оно определяется вероятностной мерой m_ρ на I, для которой

$$m_\rho(\widehat{A}^2) = \lim_{\Lambda\nearrow\infty} \rho\Big[\Big(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big)^2\Big],$$

где $\widehat{A}$ — функция на I, заданная равенством $\widehat{A}(\sigma) = \sigma(A)$ (см. приложение A.5.6). Поэтому инвариантное состояние ρ эргодично, если и только если

$$\lim_{\Lambda\nearrow\infty} \rho\Big[\Big(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big)^2\Big] = [\rho(A)]^2$$

для всех $A \in \mathscr{C}$. Это свойство называется *слабым кластерным свойством*. Его физическая интерпретация будет обсуждаться в параграфе 3.15.

3.7. Теорема

Пусть $A \in \mathscr{C}$ и $I_A \subset \mathscr{C}^*$ — множество таких мер σ на Ω, что

$$P(A+B) \geqslant P(A) + \sigma(B) \quad \text{для всех } B \in \mathscr{C}.$$

Тогда

(a) $\varnothing \neq I_A \subset I$, *причем множество I_A выпукло и компактно*; *как мы увидим позже, оно является симплексом Шоке и гранью симплекса I* (следствие 3.14).

(b) *Множество*

$$D = \{A \in \mathscr{C} \colon I_A \text{ состоит из единственной точки}\}$$

массивно в $\mathscr{C}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — сепарабельное банахово пространство и $\varphi\colon \mathfrak{X} \mapsto \mathscr{C}$ — непрерывное линейное отображение, удовлетворяющее условию $\varphi\mathfrak{X}$ плотно в $\mathscr{C}$.

(c) *Для $\Phi \in \mathfrak{X}$ определим множество*

$$I'_\Phi = \{F \in \mathfrak{X}^*\colon P \circ \varphi(\Phi + \Psi) \geqslant P \circ \varphi(\Phi) + F(\Psi) \text{ при всех } \Psi \in \mathfrak{X}\},$$

$$D' = \{\Phi \in \mathfrak{X}\colon I'_\Phi \text{ состоит из единственной точки}\}.$$

Тогда $I'_\Phi = \{\sigma \circ \varphi\colon \sigma \in I_{\varphi\Phi}\}$ и множество $D' = \varphi^{-1}D$ массивно в $\mathfrak{X}$.

(d) *$I_{\varphi\Phi}$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества таких ρ, что*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n, \quad \rho_n \in I_{\varphi\Phi_n},$$

$$\lim_{n\to\infty} ||\Phi_n - \Phi|| = 0, \quad \Phi_n \in \varphi^{-1}D.$$

Элементы множества I_A называются *равновесными состояниями для A*; элементы множества I_{A_Φ} — *равновесные состояния для взаимодействия* Φ.

Непустота I_A и утверждение (b) верны для любого непрерывного выпуклого функционала P на сепарабельном банаховом пространстве (см. приложение А.3.6 и А.3.7). Поэтому множество D' массивно в $\mathfrak{X}$.[5]

Из (3.11) следует, что если $F \in I'_\Phi$, то

$$F(\Psi) \leqslant P \circ \varphi(\Phi + \Psi) - P \circ \varphi(\Phi) \leqslant ||\varphi\Psi||.$$

Отсюда, заменив Ψ на $-\Psi$, получаем $|F(\Psi)| \leqslant ||\varphi\Psi||$, т. е.

$$\sup_{||\varphi\Psi||\leqslant 1} |F(\Psi)| \leqslant 1 \tag{3.20}$$

и существует такое $\sigma \in \mathscr{C}^*$, что $F = \sigma \circ \varphi$. Вследствие плотности множества $\varphi\mathfrak{X}$ в $\mathscr{C}$ мера σ единственна и принадлежит множеству $I_{\varphi\Phi}$. Таким образом, $I'_\Phi \subset \{\sigma \circ \varphi\colon \sigma \in I_{\varphi\Phi}\}$ и, следовательно, $I'_\Phi = \{\sigma \circ \varphi\colon \sigma \in I_{\varphi\Phi}\}$ (надо воспользоваться плотностью множества $\varphi\mathfrak{X}$ в $\mathscr{C}$). В частности, I'_Φ состоит из единственной точки тогда и только тогда, когда этим свойством обладает $I_{\varphi\Phi}$; тем самым, $D' = \varphi^{-1}D$. Так как мы уже установили, что множество D' массивно в $\mathfrak{X}$, утверждение (c) доказано.

[5] Чтобы убедиться в этом, надо сказанное в предыдущей фразе применить к $P \circ \varphi$. — *Прим. ред.*

Перейдем к доказательству утверждения (a). Мы уже знаем, что $I_A \neq \varnothing$. Положив в (3.20) $\mathfrak{X} = \mathscr{C}$, получим $||\sigma|| \leqslant 1$ для всех $\sigma \in I_A$. Кроме того, в силу (3.12)

$$\sigma(1) = -\sigma(-1) \geqslant -[P(A-1) - P(A)] = 1.$$

Но если $||\sigma|| \leqslant 1$ и $\sigma(1) \geqslant 1$, то $\sigma \geqslant 0$ и $||\sigma|| = 1$, т. е. $\sigma \in E$. Еще раз применив (3.12), получаем

$$\begin{aligned} 0 = P(A + B\circ\tau^x - B) - P(A) \geqslant \sigma(B\circ\tau^x - B) \geqslant \\ \geqslant -[P(A - B\circ\tau^x + B) - P(A)] = 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что $\sigma \in I$. Таким образом, $I_A \subset I$. Очевидно, множество I_A выпукло и компактно. Доказательство утверждения (a) закончено.

Обратимся к утверждению (d). Для всех ρ, ρ_n, Φ, Φ_n, о которых идет речь в этом утверждении, и всех $B \in \mathscr{C}$ справедливо неравенство

$$P(\varphi\Phi_n + B) \geqslant P(\varphi\Phi_n) + \rho_n(B).$$

Поэтому

$$P(\varphi\Phi + B) \geqslant P(\varphi\Phi) + \rho(B),$$

т. е. $\rho \in I_{\varphi\Phi}$.

Предположим, что $\sigma \in I_{\varphi\Phi}$ не принадлежит замкнутой выпуклой оболочке указанного множества мер ρ. По теореме о разделимости компактных множеств (приложение A.3.3 (c)) существует такое $\Psi \in \mathfrak{X}$, что

$$\sup_{\sigma\in I_{\varphi\Phi}} \sigma(\varphi\Psi) > \sup_{\rho} \rho(\varphi\Psi).$$

Пусть $\Phi_n = \Phi + (1/n)\Psi + X_n$, где $||X_n|| < 1/n^2$ и $\Phi_n \in \varphi^{-1}D$.[6] Будем писать $\{\rho_n\}$ вместо $I_{\varphi\Phi_n}$. Если $\sigma \in I_{\varphi\Phi}$, то в силу выпуклости функции P

$$\sigma\Big(\varphi\Big(\frac{1}{n}\Psi + X_n\Big)\Big) \leqslant \rho_n\Big(\varphi\Big(\frac{1}{n}\Psi + X_n\Big)\Big).$$

Поэтому

$$\sigma(\varphi\Psi) - \frac{||\varphi||}{n} \leqslant \rho_n(\varphi\Psi) + \frac{||\varphi||}{n}$$

[6]Существование такого Φ_n вытекает из плотности в $\mathfrak{X}$ множества $\varphi^{-1}D$. – *Прим. ред.*

и, значит,

$$\sigma(\varphi\Psi) \leqslant \rho(\varphi\Psi)$$

для всякой предельной точки ρ последовательности мер ρ_n. Поскольку это противоречит выбору Ψ, утверждение (d) доказано; его также можно вывести из общих свойств выпуклых функций (см. приложение А.3.7).

3.8. Энтропия

Для конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ и вероятностной меры σ_Λ на Ω_Λ *энтропия* определяется равенством

$$S(\sigma_\Lambda) = -\sum_{\xi\in\Omega_\Lambda} \sigma_\Lambda\{\xi\}\log\sigma_\Lambda\{\xi\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$0 \leqslant S(\sigma_\Lambda) \leqslant |\Lambda|\log|\Omega_o|.$$

При $\Lambda = \varnothing$ энтропия считается равной нулю.

Если σ'_Λ — другая вероятностная мера и $0 < \alpha < 1$, то

$$\alpha S(\sigma_\Lambda) + (1-\alpha)S(\sigma'_\Lambda) \leqslant S(\alpha\sigma_\Lambda + (1-\alpha)\sigma'_\Lambda) \leqslant \\ \leqslant \alpha S(\sigma_\Lambda) + (1-\alpha)S(\sigma'_\Lambda) + \log 2. \quad (3.21)$$

Действительно, положив $\sigma_\xi = \sigma_\Lambda\{\xi\}$, $\sigma'_\xi = \sigma'_\Lambda\{\xi\}$ и пользуясь выпуклостью функции $t \mapsto t\log t$ и монотонностью логарифма, получим

$$-\sum_\xi[\alpha\sigma_\xi\log\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi\log\sigma'_\xi] \leqslant \\ \leqslant -\sum_\xi[\alpha\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi]\log[\alpha\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi] \leqslant \\ \leqslant -\sum_\xi[\alpha\sigma_\xi\log\alpha\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi\log(1-\alpha)\sigma'_\xi] = \\ = -\sum_\xi[\alpha\sigma_\xi\log\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi\log\sigma'_\xi) - \alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha) \leqslant \\ \leqslant -\sum_\xi[\alpha\sigma_\xi\log\sigma_\xi + (1-\alpha)\sigma'_\xi\log\sigma'_\xi] + \log 2.$$

Если $\sigma \in E$, то $S(\alpha_\Lambda \sigma)$ — возрастающая[7] функция множества Λ, которая обладает свойством *сильной субаддитивности*:

$$S(\alpha_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}\sigma) + S(\alpha_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}\sigma) \leqslant S(\alpha_{\Lambda_1}\sigma) + S(\alpha_{\Lambda_2}\sigma). \tag{3.22}$$

Возрастание $S(\alpha_\Lambda \sigma)$ прямо следует из монотонности логарифма. Чтобы доказать (3.22), воспользуемся неравенством $-\log(1/t) \leqslant t - 1$, в силу которого

$$S(\alpha_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}\sigma) + S(\alpha_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}\sigma) - S(\alpha_{\Lambda_1}\sigma) - S(\alpha_{\Lambda_2}\sigma) =$$

$$= - \sum_{\xi \in \Omega_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}} \sum_{\xi' \in \Omega_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_2}} \sum_{\xi'' \in \Omega_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}} \sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} \log \frac{\sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} \sigma_\xi}{\sigma_{\xi \vee \xi'} \sigma_{\xi \vee \xi''}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\xi \xi' \xi''} \sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} \left[\frac{\sigma_{\xi \vee \xi'} \sigma_{\xi \vee \xi''}}{\sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} \sigma_\xi} - 1 \right] =$$

$$= \sum_{\xi \xi'} \frac{\sigma_{\xi \vee \xi'}}{\sigma_\xi} \sum_{\xi''} \sigma_{\xi \vee \xi''} - \sum_{\xi \xi' \xi''} \sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} = \sum_{\xi \xi'} \sigma_{\xi \vee \xi'} - 1 = 0$$

(чтобы избежать неопределенных выражений, можно в приведенных выше вычислениях сначала предположить, что $\sigma_{\xi \vee \xi' \vee \xi''} > 0$ для всех ξ, ξ', ξ'', а затем перейти к пределу).

3.9. Предел на бесконечности в смысле ван Хова

Будем говорить, что конечные множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ *стремятся к бесконечности в смысле ван Хова* (и будем писать $\Lambda \nearrow \infty$), если $|\Lambda| \to \infty$ и для любого $a \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\frac{|(\Lambda + a) \setminus \Lambda|}{|\Lambda|} \to 0.$$

Грубо говоря, это означает, что «граница множества Λ» становится в пределе пренебрежимо малой по сравнению с Λ.

3.10. Теорема

Если $\sigma \in I$, то существует предел

$$s(\sigma) = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda \sigma) = \inf_\Lambda |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda \sigma).$$

Функция s, называемая средней энтропией[8]*, неотрицательна, аффинна и полунепрерывна сверху на I.*

[7] Точнее — неубывающая. — *Прим. ред.*

[8] А также удельной энтропией. — *Прим. ред.*

Если множества Λ_1 и Λ_2 не пересекаются, то (3.22) превращается в свойство субаддитивности:

$$S(\alpha_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}\sigma) \leqslant S(\alpha_{\Lambda_1}\sigma) + S(\alpha_{\Lambda_2}\sigma). \tag{3.23}$$

Так как $\sigma \in I$, справедливо равенство

$$S(\alpha_{(\Lambda+x)}\sigma) = S(\alpha_\Lambda\sigma). \tag{3.24}$$

Определив $\Lambda(a)$ так же, как в теореме 3.4, положим

$$s = \inf_a |\Lambda(a)|^{-1} S(\alpha_{\Lambda(a)}\sigma). \tag{3.25}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ выбираем такое b, что

$$|\Lambda(b)|^{-1} S(\alpha_{\Lambda(b)}\sigma) \leqslant s + \varepsilon,$$

Введем множество

$$\mathbb{Z}^\nu(b) = \{x \in \mathbb{Z}^\nu : x_i = n_i b_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}^\nu, \quad i = 1, \ldots, \nu\}.$$

Сдвинув $\Lambda(b)$ на все $x \in \mathbb{Z}^\nu(b)$, мы получим разбиение множества $\mathbb{Z}^\nu$. Пусть Λ_+ — объединение элементов этого разбиения, имеющих непустое пересечение с Λ. Тогда $\Lambda_+ \supset \Lambda$ и $|\Lambda_+|/|\Lambda| \to 1$ при $\Lambda \nearrow \infty$. Так как $S(\alpha_\Lambda\sigma)$ — неубывающая функция множества Λ, из (3.23), (3.24) следует, что

$$S(\alpha_\Lambda\sigma) \leqslant S(\alpha_{\Lambda_+}\sigma) \leqslant \frac{|\Lambda_+|}{|\Lambda(b)|} S(\alpha_{\Lambda(b)}\sigma) \leqslant |\Lambda_+|(s+\varepsilon)$$

и, значит,

$$\limsup_{\Lambda\nearrow\infty} |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda\sigma) \leqslant s + \varepsilon. \tag{3.26}$$

Из (3.25) и (3.26) получаем

$$\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} S(\alpha_{\Lambda(a)}\sigma) = s.$$

Если $x \notin \Lambda' \supset \Lambda$, то вследствие сильной субаддитивности энтропии (см. (3.22)) выполняется неравенство

$$S(\alpha_{\Lambda\cup\{x\}}\sigma) - S(\alpha_\Lambda\sigma) \geqslant S(\alpha_{\Lambda'\cup\{x\}}\sigma) - S(\alpha_{\Lambda'}\sigma), \tag{3.27}$$

которое позволяет оценить, как возрастает энтропия, когда к множеству Λ последовательно в лексикографическом порядке присоединяются новые точки. В частности, если Λ фиксировано (с точностью до сдвига), а в качестве Λ' берутся множества, последовательно возникающие при лексикографическом построении большого $\Lambda(a)$, то (3.27) справедливо для большинства таких Λ'. Поэтому

$$S(\alpha_{\Lambda\cup\{x\}}\sigma) - S(\alpha_\Lambda\sigma) \geqslant \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} S(\alpha_{\Lambda(a)}\sigma) = s.$$

Отсюда следует, что

$$S(\alpha_\Lambda\sigma) \geqslant |\Lambda| s$$

при всех Λ. Из этого неравенства с учетом (3.26) получаем

$$\lim_{\Lambda\nearrow\infty} |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda\sigma) = \inf_\Lambda |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda\sigma) = s,$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Неотрицательность s вытекает из аналогичного свойства S, а аффинность — из (3.21). Наконец, s полунепрерывна сверху функцией как inf непрерывных функций $\sigma \mapsto |\Lambda|^{-1} S(\alpha_\Lambda\sigma)$.

3.11. Лемма

Пусть E_Λ — множество всех вероятностных мер на Ω_Λ. Тогда

$$\log Z_\Lambda^\Phi = \max_{\sigma_\Lambda\in E_\Lambda} [S(\sigma_\Lambda) - \sigma_\Lambda(U_\Lambda^\Phi)].$$

Действительно, вследствие вогнутости логарифма

$$S(\sigma_\Lambda) - \sigma_\Lambda(U_\Lambda^\Phi) = \sum_{\xi\in\Omega_\Lambda} \sigma_\Lambda\{\xi\} \log \frac{e^{-U_\Lambda^\Phi(\xi)}}{\sigma_\Lambda\{\xi\}} \leqslant \log \sum_{\xi\in\Omega_\Lambda} e^{-U_\Lambda^\Phi(\xi)},$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\sigma_\Lambda\{\xi\} = (Z_\Lambda^\Phi)^{-1} e^{-U_\Lambda^\Phi(\xi)} = \mu_{(\Lambda)}\{\xi\}$.

Следующая теорема содержит вариант этого *вариационного принципа* для термодинамического предела $\Lambda \nearrow \infty$.

3.12. Теорема

Для всех $A \in \mathscr{C}$

$$P(A) = \max_{\sigma\in I} [s(\sigma) + \sigma(A)], \tag{3.28}$$

причем множество точек максимума есть в точности I_A. Для всех $\sigma \in I$

$$s(\sigma) = \inf_{A\in\mathscr{C}} [P(A) - \sigma(A)]. \tag{3.29}$$

Сначала докажем, что

$$P(A) = \sup_{\sigma \in I}[s(\sigma) + \sigma(A)] \tag{3.30}$$

при $A = A_\Phi$, где $\Phi \in \mathscr{A}_o$. По лемме 3.11

$$P(A_\Phi) \geqslant s(\sigma) + \sigma(A_\Phi) \text{ для всех } \sigma \in I, \tag{3.31}$$

поскольку

$$\sigma(A_\Phi) = -\lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1}(\alpha_{\Lambda(a)}\sigma)(U^\Phi_{\Lambda(a)}). \tag{3.32}$$

При помощи гиббсовских ансамблей $\mu_{(\Lambda)}$ для взаимодействия Φ определим теперь меры

$$\rho_{\Lambda,\,n}\{\xi\} = |\Lambda(a_n)|^{-1} \sum_{x\colon\, \Lambda+x\subset\Lambda(a_n)} (\alpha_{\Lambda+x}\mu_{(\Lambda(a_n))})\{\tau^{-x}\xi\}.$$

Легко видеть, что последовательность (a_n) может быть выбрана так, что $a_n \to \infty$ и для любого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ существует предел

$$\rho_\Lambda = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Lambda,\,n}. \tag{3.33}$$

Тогда единственное состояние ρ, для которого $\alpha_\Lambda\rho = \rho_\Lambda$ при всех Λ, принадлежит I и

$$\begin{aligned}
s(\rho) = \lim_{b\to\infty} |\Lambda(b)|^{-1} S(\rho_{\Lambda(b)}) = \\
= -\lim_{b\to\infty}\lim_{n\to\infty} |\Lambda(b)|^{-1} \sum_{\xi\in\Omega_{\Lambda(b)}} \rho_{\Lambda(b),\,n}\{\xi\}\log\rho_{\Lambda(b),\,n}\{\xi\} \geqslant \\
\geqslant \limsup_{b\to\infty}\limsup_{n\to\infty} |\Lambda(b)|^{-1}|\Lambda(a_n)|^{-1} \sum_{x\colon\,\Lambda(b)+x\subset\Lambda(a_n)} S(\alpha_{\Lambda(b)+x}\mu_{(\Lambda(a_n))}) \geqslant \\
\geqslant \limsup_{n\to\infty} |\Lambda(a_n)|^{-1} S(\mu_{(\Lambda(a_n))})
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(на последнем шаге мы использовали (3.23) и тот факт, что существует $|\Lambda(b)|$ способов представить $\Lambda(a_n)$ в виде объединения сдвигов множества $\Lambda(b)$ плюс k_n точек, где $k_n/|\Lambda(a_n)| \to 0$ при $n\to\infty$). Из (3.34) получаем

$$\begin{aligned}
s(\rho)+\rho(A_\Phi) \geqslant \lim_{n\to\infty} |\Lambda(a_n)|^{-1} \sum_{\xi\in\Omega_{\Lambda(a_n)}} \mu_{(\Lambda(a_n))}\{\xi\}\log\frac{\exp[-U^\Phi_{\Lambda(a_n)}(\xi)]}{\mu_{(\Lambda(a_n))}\{\xi\}} = \\
= \lim_{n\to\infty} |\Lambda(a_n)|^{-1}\log Z^\Phi_{\Lambda(a_n)} = P(A_\Phi).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Неравенства (3.31) и (3.35) доказывают (3.30) в случае, когда $A = A_\Phi$, $\Phi \in \mathscr{A}_0$. Так как обе части (3.30) непрерывны по A, то в силу плотности множества $\{A_\Phi : \Phi \in \mathscr{A}_o\}$ в $\mathscr{C}$ это соотношение справедливо при всех $A \in \mathscr{C}$. Кроме того, энтропия $s(\sigma)$ полунепрерывности сверху, откуда следует, что $\sup$ в (3.30) достигается и имеет место соотношение (3.28).

Докажем теперь (3.29). Из (3.28) мы уже знаем, что

$$s(\sigma) \leqslant P(A) - \sigma(A),$$

и достаточно показать, что при подходящем выборе функции A правая часть этого неравенства как угодно мало отличается от $s(\sigma)$. Положим

$$C = \{(\sigma, t) \in \mathscr{C}^* \times \mathbb{R} \colon \sigma \in I \text{ и } 0 \leqslant t \leqslant s(\sigma)\}.$$

Так как функция s аффинна и полунепрерывна сверху, множество C выпукло и компактно. Поэтому для любых $\rho \in I$ и $u > s(\rho)$ существуют такие $A \in \mathscr{C}$ и $c \in \mathbb{R}$, что

$$-\rho(A) + c = u$$

и

$$-\sigma(A) + c > s(\sigma) \text{ для всех } \sigma \in I$$

(см. приложение A.3.3). Отсюда следует, что

$$-\sigma(A) + u + \rho(A) > s(\sigma),$$

и если σ выбрано так, что $P(A) = s(\sigma) + \sigma(A)$, то

$$0 \leqslant P(A) - s(\rho) - \rho(A) = s(\sigma) + \sigma(A) - s(\rho) - \rho(A) < u - s(\rho).$$

Поскольку разность $u - s(\rho)$ можно считать как угодно малой, равенство (3.29) доказано.

Условие $\rho \in I_A$, т. е.

$$P(A + B) \geqslant P(A) + \rho(B) \text{ при всех } B \in \mathscr{C}$$

можно записать в виде

$$P(A + B) - \rho(A + B) \geqslant P(A) - \rho(A) \text{ для любого } B \in \mathscr{C},$$

что эквивалентно неравенству

$$\inf_{C \in \mathscr{C}} [P(C) - \rho(C)] \geqslant P(A) - \rho(A),$$

или, в силу (3.29), неравенству

$$s(\rho) \geqslant P(A) - \rho(A).$$

Поэтому $\max$ в (3.28) достигается в точности на I_A. Теорема доказана.

3.13. Следствие

Имеют место следующие соотношения, обобщающие (3.9) *и* (3.10):

$$P^\Phi = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^{*\Phi}, \tag{3.36}$$

$$P(A) = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^*(A). \tag{3.37}$$

Вначале заметим, что если $\Phi \in \mathscr{A}_o$, то рассуждения, примененные для доказательства (3.16), приводят к неравенству

$$\limsup_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi \leqslant P^\Phi.$$

С другой стороны, в силу леммы 3.11 при всех $\sigma \in I$

$$\liminf_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi \geqslant s(\sigma) + \sigma(A_\Phi),$$

а потому при всех $\Phi \in \mathscr{A}_o$

$$\lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^\Phi = P^\Phi.$$

Как обычно, случай произвольного $\Phi \in \mathscr{A}$ сводится к только что рассмотренному с использованием плотности множества $\mathscr{A}_o$ в $\mathscr{A}$ и свойства равномерной непрерывности. Заменяя Ω_Λ на Ω_Λ^*, устанавливаем существование предела

$$\lim_{\Lambda \nearrow \infty} |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda^{*\Phi}.$$

В силу теоремы 3.4 этот предел равен P^Φ. Тем самым, выполняется (3.36). Равенство (3.37) доказывается так же, как (3.10) в теореме 3.4.

3.14. Следствие

Для любого $A \in \mathscr{C}$ множество I_A является симплексом Шоке и гранью I.

Мы знаем, что I — симплекс (предложение 3.6). Пусть $\rho \in I_A$ и m_ρ — единственная вероятностная мера на I с результантом ρ, сосредоточенной на множестве экстремальных точек I. Положив $\widehat{A}(\sigma) = \sigma(A)$, получим (см. приложение А.5.1)

$$m_\rho(s + \widehat{A}) = s(\rho) + \rho(A) = P(A).$$

Отсюда следует, что носитель меры m_ρ содержится в множестве $\{\sigma \in I\colon s(\sigma) + \sigma(A) = P(A)\} = I_A$. Поэтому I_A является симплексом и гранью симплекса I.

3.15. Физическая интерпретация

Мы уже отмечали в параграфе 1.1, что функцию $A \in \mathscr{C}$ можно рассматривать как наблюдаемую величину. Если $\rho \in E$, то вероятностная мера $\mu_A = A\rho$ на $\mathbb{R}$ задается равенством

$$\mu_A(\varphi) = \rho(\varphi \circ A) \text{ (для всех непрерывных } \varphi\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}).$$

Мера μ_A описывает распределение значений наблюдаемой A в состоянии ρ. В общем случае A флуктуирует, т. е. носитель меры μ_A состоит из более чем одной точки.

Рассмотрим теперь среднее наблюдаемой A по всем сдвигам из Λ, определяемое равенством

$$\langle A\rangle_\Lambda = |\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} A \circ \tau^x.$$

Пусть $\rho \in I$. Тогда условие

$$\lim_{\Lambda \nearrow \infty} \rho([\langle A\rangle_\Lambda - \rho(A)]^2) = 0 \text{ для всех } A \in \mathscr{C}$$

выполняется в том и только том случае, когда ρ — эргодическое состояние (см. § 3.6). Это условие означает, что при больших Λ среднее $\langle A\rangle_\Lambda$ флуктуирует слабо; мы говорим в этом случае, что ρ — (*чистая термодинамическая*) *фаза.* Такая фаза характеризуется тем, что «крупнозернистые» величины, т. е. средние $\langle A\rangle_\Lambda$, не флуктуируют (при $\Lambda \nearrow \infty$). С другой стороны, для *смеси* некоторые крупнозернистые величины флуктуируют. Заметим, что согласно физическим представлениям каждая смесь должна иметь единственное разложение на чистые фазы.

Пусть ρ — равновесное состояние для A. Поскольку множество I_A — симплекс, ρ имеет единственное разложение по крайним точкам этого множества I_A, а так как I_A — грань симплекса I, упомянутое разложение совпадает с эргодическим разложением ρ (см. § 3.6). С физической точки зрения его можно интерпретировать как разложение равновесного состояния на чистые термодинамические фазы.

Массивное множество $D \subset \mathscr{C}$ (или $\varphi^{-1}D \subset \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ и φ введены в теореме 3.7) можно рассматривать как «большое» множество. Следовательно, в «общем случае» существует только одна чистая термодинамическая фаза, связанная с $A \in \mathscr{C}$ (или с $\Phi \in \mathfrak{X}$). Этот факт является слабой формой *гиббсовского правила фаз*.

3.16. Теорема

Для любых $A \in \mathscr{C}$ (*соответственно,* $\Phi \in \mathscr{A}$), $\sigma \in I$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $A' \in \mathscr{C}$ (*соответственно,* $\Phi' \in \mathscr{A}$) *и* $\sigma' \in I_{A'}$, *что*

$$||\sigma' - \sigma|| \leqslant \varepsilon$$

и

$$||A' - A|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(A) - \sigma(A) - s(\sigma)]$$

$$(\text{соответственно, } ||\Phi' - \Phi|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P^{\Phi} - \sigma(A_{\Phi}) - s(\sigma)]).$$

Это утверждение есть в точности теорема Бишопа и Фелпса (см. приложение А.3.6) с $V = \mathscr{C}$ (соответственно, $V = \mathscr{A}$; заметим, что для этого случая касательные функционалы описаны в теореме 3.7 (с), и чтобы получить неравенство $||\sigma' - \sigma|| \leqslant \varepsilon$, надо использовать (3.4)).

3.17. Следствие

(a) *Объединение множеств* I_A *по всем* $A \in \mathscr{C}$, *т. е. множество всех равновесных состояний, всюду плотно в* I *относительно топологии, порожденной нормой в* $\mathscr{C}^*$.

(b) *Если* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — *эргодические состояния, то существует взаимодействие* $\Phi \in \mathscr{A}$, *для которого все они являются равновесными состояниями.*

Утверждение (a) очевидно. В частности, для любых эргодических $\rho_1, \ldots, \rho_n$ существует такое равновесное состояние ρ, отвечающее взаимодействию $\Phi \in \mathscr{A}$, что $||\rho - (1/n)(\rho_1 + \ldots + \rho_n)|| < 1/n$. Пусть m_ρ порождает эргодическое разложение этого ρ. Тогда

$$\left\| m_\rho - \frac{1}{n}(\delta_{\rho_1} + \ldots + \delta_{\rho_n}) \right\| < \frac{1}{n}$$

(см. приложение А.5.5) и, следовательно, $m_\rho(\{\rho_1\}) > 0, \ldots, m_\rho(\{\rho_n\}) > 0$. Но в таком случае в силу следствия 3.14 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ являются равновесными состояниями для взаимодействия Φ.

3.18. Аппроксимация инвариантных состояний равновесными

Мы только что установили, что каждое инвариантное состояние σ можно приблизить по норме равновесным состоянием σ' для некоторого взаимодействия из $\mathscr{A}$. Однако с физической точки зрения этот интересный результат следует считать патологией, так как не все взаимодействия из $\mathscr{A}$ являются физически приемлемыми. В действительности, чтобы иметь возможность определить гиббсовские состояния, мы введем в следующей главе некоторое более узкое пространство взаимодействий $\mathscr{B}$. Затем будет показано (см. предложение 4.7 (b)), что если взаимодействия Φ, $\Phi' \in \mathscr{B}$ имеют общее равновесное состояние, то они в некотором смысле эквивалентны и все их равновесные состояния одинаковы (это совершенно не похоже на ситуацию следствия 3.17 (b)).

Физически значимые результаты могут быть получены при помощи аппроксимации инвариантных состояний равновесными, если использовать общую теорему о выпуклых функциях, принадлежащую Израэлю (см. приложение А.3.6). Из этой теоремы следует, что в некотором подпространстве или конусе пространства $\mathscr{A}$ можно найти взаимодействие, которое обладает равновесным состоянием, удовлетворяющим определенным неравенствам. Если эти неравенства выражают отсутствие определенного кластерного свойства, то отсюда можно вывести физические следствия. Доказываемая ниже теорема 3.20 содержит пример взаимодействия, у которого имеется несколько различных равновесных состояний (другие примеры см. в упражнении 1 главы 4).

3.19. Лемма

Пусть A_1, $A_2 \in \mathscr{C}$ и $S \subset \mathbb{Z}^\nu$. Определим выпуклое множество

$$\mathscr{L}_S = \Big\{a_1 A_1 + a_2 A_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} \big(b_x A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x) + b_{-x}(A_1 \circ \tau^x) \cdot A_2\big) :$$

$$a_1,\, a_2,\, b_x \in \mathbb{R}, \quad b_x \geqslant 0, \quad b_x = 0, \text{ если } x \notin S, \quad \sum_{x \in S} b_x < \infty \Big\}.$$

Предположим, что A_1, $A_2 \in \mathscr{C}_\Delta$ *для некоторого конечного* $\Delta \subset \mathbb{Z}^\nu$. *Тогда для любых* $\sigma_0 \in I$, $B_0 \in \mathscr{C}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $B \in B_0 + \mathscr{L}_S$ *и* $\sigma \in I_B$, *что*

$$||B - B_0|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(B_0) - \sigma(B_0) - s(\sigma_0)] \tag{3.38}$$

и

$$\sigma\big(A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x)\big) - \sigma(A_1)\sigma(A_2) \geqslant \\ \geqslant \sigma_0(A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x)) - \sigma_0(A_1)\sigma_0(A_2) - 3\varepsilon||A_1|| \cdot ||A_2|| \tag{3.39}$$

при всех $x \in S$.

Можно считать, что 0 — «средний» элемент множества Δ в лексикографическом порядке. Для a_1, a_2, $b_x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $b_x \geqslant 0$, $b_x = 0$ при $x \notin S$ и $\sum b_x < \infty$, определим взаимодействие $\Phi \in \mathscr{A}$, положив

$$-\Phi(\xi|\Delta) = a_1 A_1(\xi) + a_2 A_2(\xi) + b_0 A_1(\xi) \cdot A_2(\xi),$$

$$-\Phi\big(\xi|\Delta \cup (\Delta + x)\big) = b_x A_1(\xi) \cdot A_2(\tau^x \xi) + b_{-x} A_1(\tau^x \xi) \cdot A_2(\xi), \text{ если } x \neq 0,$$

$$\Phi(\xi|X) = 0, \text{ если } X \text{ нельзя получить из } \Delta \cup (\Delta + x) \text{ с помощью сдвига.}$$

Используя выражение (3.2) для нормы, убеждаемся, что такие Φ образуют замкнутый выпуклый конус $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}$.

Пусть $\Psi_0 \in \mathscr{A}$ таково, что $A_{\Psi_0} = B_0$. Воспользуемся теоремой Израэля (см. приложение A.3.6) и описанием касательных плоскостей к отображению $\Phi \mapsto P^\Phi$, данным в теореме 3.7 (c). В силу этих результатов существуют такие $\Psi \in \Psi_0 + \mathscr{R}$ и $\sigma \in I_{A_\Psi}$, что

$$\|\Psi - \Psi_0\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P^{\Psi_0} - \sigma_0(A_{\Psi_0}) - s(\sigma_0)] \tag{3.40}$$

и для всех $\Phi \in \mathscr{R}$

$$\sigma(A_\Phi) \geqslant \sigma_0(A_\Phi) - \varepsilon|\Phi|. \tag{3.41}$$

Из (3.41) вытекает, что

$$|\sigma(A_1) - \sigma_0(A_1)| \leqslant \varepsilon||A_1||, \quad |\sigma(A_2) - \sigma_0(A_2)| \leqslant \varepsilon||A_2|| \tag{3.42}$$

и для всех $x \in S$

$$\sigma\big(A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x)\big) \geqslant \sigma_0\big(A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x)\big) - \varepsilon||A_1|| \cdot ||A_2||. \tag{3.43}$$

Из (3.42) получаем

$$|\sigma(A_1)\sigma(A_2) - \sigma_0(A_1)\sigma_0(A_2)| \leqslant 2\varepsilon ||A_1|| \cdot ||A_2||,$$

которое вместе с (3.43) доказывает (3.39).

Пусть C — элемент $\mathscr{L}_S$, образованный при помощи тех же самых a_1, a_2, b_x, которые определяют $\Psi - \Psi_0$ в $\mathscr{R}$. Положим $B = B_0 + C$. Тогда $B \in B_0 + \mathscr{L}_S$ и в силу (3.40)

$$||B - B_0|| = ||C|| \leqslant |\Psi - \Psi_0| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(B_0) - \sigma_0(B_0) - s(\sigma_0)],$$

которое доказывает (3.38). Далее, $\rho(C) = \rho(A_{\Psi - \Psi_0})$ для всех $\rho \in I$. Поэтому $I_B = I_{A_\Psi} \ni \sigma$, что завершает доказательство.

3.20. Теорема

Пусть $A \in \mathscr{C}_\Delta$ для некоторого $\Delta \subset \mathbb{Z}^\nu$. Определим выпуклый конус

$$\mathscr{L} = \Big\{ aA + \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} b_x A \cdot (A \circ \tau^x) \colon a,\, b_x \in \mathbb{R}, \quad b_x \geqslant 0, \quad \sum b_x < \infty \Big\}.$$

(a) *Пусть σ_0', $\sigma_0'' \in I$ таковы, что $\sigma_0'(A) \neq \sigma_0''(A)$. Тогда для любого $C \in \mathscr{C}$ найдутся $B \in C + \mathscr{L}$ и равновесные состояния σ', $\sigma'' \in I_B$, для которых $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$.*

(b) *Пусть σ_0', $\sigma_0'' \in I$ — равновесные состояния для $C \in \mathscr{C}$, для которых $\sigma_0'(A) \neq \sigma_0''(A)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $C' \in \mathscr{C}$ и $||C' - C|| < \delta$, то существуют $B \in C' + \mathscr{L}$ с $||B - C'|| < \varepsilon$ и равновесные состояния σ', $\sigma'' \in I_B$ с $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$.*

Положим $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_0' + \sigma_0'')$. Тогда из предположения $\sigma_0'(A) \neq \sigma_0''(A)$ следует, что

$$m_{\sigma_0}(\widehat{A}^2) = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} \sigma_0\Big(\Big[|\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} A \circ \tau^x\Big]^2\Big) > \sigma_0(A)^2$$

(см. § 3.6). Выбираем такое $\varepsilon > 0$, что

$$\lim_{\Lambda \nearrow \infty} \sigma_0\Big(\Big[|\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} A \circ \tau^x\Big]^2\Big) \geqslant \sigma_0(A)^2 + 4\varepsilon ||A||^2.$$

Применив лемму 3.19 при $A_1 = A_2 = A$ и $S = \mathbb{Z}^\nu$ (B_0 мы выбираем позже), найдем такие $B \in B_0 + \mathscr{L}$ и $\sigma \in I_B$, что

$$||B - B_0|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(B_0) - \sigma_0(B_0) - s(\sigma_0)]$$

и

$$\sigma\Big(\Big[|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big]^2\Big) - \sigma(A)^2 \geqslant \sigma_0\Big(\Big[|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big]^2\Big) - \sigma_0(A)^2 - 3\varepsilon||A||^2.$$

Тогда

$$m_\sigma(\widehat{A}^2) = \lim_{\Lambda\nearrow\infty} \sigma\Big(\Big[|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big]^2\Big) \geqslant \sigma(A)^2 + \varepsilon||A||^2.$$

Отсюда следует, что найдутся σ', σ'', принадлежащие носителю меры m_σ, для которых $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$. Взяв $B_0 = C$, приходим к утверждению (a).

Предположим теперь, что σ_0', $\sigma_0'' \in I_C$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $C' \in \mathscr{C}$ и $||C' - C|| < \delta$ выполнялось неравенство

$$P(C') - \sigma_0(C') - s(\sigma_0) < \varepsilon^2.$$

Положив $B_0 = C'$, получаем $B \in C' + \mathscr{L}$ и с помощью (3.38) приходим к неравенству $||B - C'|| < \varepsilon$, что завершает доказательство.

3.21. Сосуществование фаз

В приведенных выше лемме и теореме мы ограничились рассмотрением взаимодействий Φ, для которых $\Phi(\xi|X) = 0$ при $|X| > 2|\Delta|$. Такие взаимодействия принадлежат пространству $\mathscr{B}$, которое будет введено в главе 4; они является «физически допустимым». В теореме 3.20 рассматривается ситуация, когда существуют по крайней мере два различных равновесных состояния. С физической точки зрения это соответствует сосуществованию по крайней мере двух фаз. Утверждение (b) теоремы 3.20 показывает, что взаимодействие Ψ_0 (или функция C), для которого существует несколько фаз, не может быть изолированным: оно принадлежит «бесконечномерному многообразию» таких взаимодействий. Следует проверить, что не все они «физически эквивалентны» (см. § 4.7). В связи с этим см. упражнение 2.

Сосуществование по меньшей мере $n+1$ фаз можно исследовать аналогичным образом. Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}_\Delta$ и

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Выберем $\sigma_0^{(0)}, \sigma_0^{(1)}, \ldots, \sigma_0^{(n)} \in I$ так, чтобы равенство

$$\sigma_0^{(0)}(A) = \sigma_0^{(1)}(A) = \ldots = \sigma_0^{(n)}(A)$$

не выполнялось ни при каких $a_1, \ldots, a_n$. Положив

$$\sigma_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \sigma_0^{(i)},$$

получим неравенство

$$m_{\sigma_0}(\widehat{A}^2) - \sigma_0(A)^2 \geqslant 4\varepsilon ||A||^2$$

при некотором $\varepsilon > 0$, не зависящем от $a_1, \ldots, a_n$. Пусть $B_0 \in \mathscr{C}$ и $\mathscr{L}$ — линейное пространство, порожденное функциями A_i и $A_i \cdot (A_j \circ \tau^x)$. Тогда существуют такое $B \in B_0 + \mathscr{L}$, что

$$||B - B_0|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(B_0) - \sigma_0(B_0) - s(\sigma_0)],$$

и такое $\sigma \in I_B$, что

$$|\sigma\big(A \cdot (A \circ \tau^x)\big) - \sigma(A)^2 - \big[\sigma_0(A \cdot (A \circ \tau^x)\big) - \sigma_0(A)^2\big]| \leqslant 3\varepsilon ||A||^2$$

при всех $a_1, \ldots, a_n$ и всех $x \in \mathbb{Z}^\nu$. Следовательно, справедливо неравенство

$$m_\sigma(\widehat{A}^2) - \sigma(A)^2 \geqslant \varepsilon ||A||^2,$$

доказывающее, что размерность I_B не меньше, чем n, и, значит, существует по крайней мере $n+1$ фаз. И так же, как раньше, взаимодействие, для которого все это имеет место, не может быть изолированным.

Библиографические указания

Статистическая механика в условиях трансляционной инвариантности, изложенная в этой главе, была в основном развита физиками раньше, чем теория гиббсовских состояний из глав 1 и 2. Существование термодинамического предела для давления было доказано в разных формах разными людьми, после чего постепенно возникло понятие равновесного состояния. Галавотти и Миракль [1] обнаружили важный факт (теорема 3.7 (b)), состоящий в том, что для массивного множества взаимодействий существует только одно равновесное состояние. Обсуждение понятия энтропии (параграфы 3.8 – 3.10) см. в Robinson and Ruelle [1]; по поводу вариационного принципа (теорема 3.12) см. Ruelle [1]. Параграфы 3.16 – 3.21 основаны на работе Израэля [1], которая недавно пролила некоторый свет на природу фазовых переходов.

Упражнения

1. Для $x \in \mathbb{Z}^\nu$ положим $|x| = \max_i |x_i|$. Пусть $0 < \lambda < 1$. Если $\xi, \eta \in \Omega$, положим

$$d(\xi,\, \eta) = \lambda^k, \text{ где } k = \inf\{|x|\colon \xi_x \neq \eta_x\}.$$

(a) Проверьте, что d — метрика, совместимая с топологией пространства Ω.

(b) Пусть $0 < \alpha < 1$. Функция $A\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, для которой $|A(\xi) - A(\eta)| \leqslant \leqslant cd(\xi,\, \eta)^\alpha$ при $c \geqslant 0$, называется гельдеровской функцией с показателем α. Такие функции образуют банахово пространство $\mathscr{C}^\alpha(\Omega)$ с нормой

$$||A||_\alpha = \max\Big(\max_\xi |A(\xi)|,\, \sup_{\xi\neq\eta} \frac{|A(\xi) - A(\eta)|}{d(\xi,\eta)^\alpha}\Big).$$

Положим $\operatorname{diam} X = \max\{|y - x|\colon x,\, y \in X\}$ и пусть $\theta = \lambda^{\alpha/2}$. Докажите, что если $A \in \mathscr{C}^\alpha(\Omega)$, то $A = A_\Phi$, причем

$$\sup_X \theta^{-\operatorname{diam} X} \sup_{\xi\in\Omega} |\Phi(\xi|X)| < \infty.$$

(Указание к п. (b): положим $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^\nu\colon |x| \leqslant n\}$ и $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathscr{C}_{\Lambda_n}$ и $||A_n|| \leqslant ||A||_\alpha(\lambda^n)^\alpha$; теперь можно действовать аналогично параграфу 3.2.)

2. Рассмотрим систему («решетчатый газ») с $\Omega_0 = \{0,\, 1\}$ и $\Omega = \{0,\, 1\}^{\mathbb{Z}^\nu}$. Определим функцию $A \in \mathscr{C}_{\{0\}}$ равенством $A(\xi) = \xi_0$ (тем

самым, A принимает значения 0 и 1). Будем рассматривать «парные» взаимодействия Φ, для которых $\Phi(\xi|X) = 0$, если $|X| > 2$, и

$$\Phi(\xi|\{0\}) = -\mu A(\xi),$$
$$\Phi(\xi|\{0,\, x\}) = \varphi(x) A(\xi) A(\tau^x \xi) \text{ при } x \neq 0.$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$ и $\varphi(x) = \varphi(-x) \in \mathbb{R}$ определено для любого $x \neq 0$. Заметим, что

$$\|\Phi\| = |\mu| + \frac{1}{2} \sum_{x \neq 0} |\varphi(x)|.$$

(a) Пусть $0 \in M \subset \mathbb{Z}^\nu$, M конечно и $M = -M$. Предположим, что дана функция $\widetilde{\varphi}\colon M \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, для которой $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(-x)$. Докажите, что $\widetilde{\varphi}$ можно так продолжить до функции $\varphi\colon \mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{x \neq 0} |\varphi(x)| < \infty,$$

что при подходящем μ у взаимодействия Φ существуют два равновесных состояния σ' и σ'' с $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$.

(b) Пусть μ_0 и φ_0 определяют парное взаимодействие Φ_0. Предположим, что σ_0' и σ_0'' — равновесные состояния для Φ_0 и что $\sigma_0'(A) \neq \sigma_0''(A)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что имеет место следующее.

Пусть $0 \in M \subset \mathbb{Z}^\nu$, M конечно и $M = -M$. Предположим, что функция $\widetilde{\varphi}\colon M \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(-x)$ и

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in M \setminus \{0\}} |\widetilde{\varphi}(x) - \varphi_0(x)| < \delta.$$

Тогда функцию $\widetilde{\varphi}$ можно продолжить до $\varphi\colon \mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ и найти такое μ, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi(x) \leqslant \varphi_0(x)$ при $x \notin M$,

$$|\mu - \mu_0| + \frac{1}{2} \sum_{x \notin M} |\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon$$

и для взаимодействия Φ существуют два равновесных состояния σ' и σ'' с $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$. (Повторите доказательство теоремы 3.20, используя лемму 3.19 с $S = \mathbb{Z}^\nu \setminus M$. Заметим, что

$$m_\rho(\widehat{A}^2) = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} \rho\Big(|\Lambda|^{-2} \sum_{x,\, y \in \Lambda,\, x - y \notin M} (A \circ \tau^x) \cdot (A \circ \tau^y)\Big).$$

Замечание: Можно показать (см. упражнение 2 к главе 4), что Φ и Φ_0 физически эквивалентны только при $\mu = \mu_0$ и $\varphi = \varphi_0$.)

Глава 4
Связь между гиббсовскими и равновесными состояниями

В этой главе устанавливается связь между гиббсовскими состояниями и равновесными состояниями, введенными в предыдущих главах.

4.1. Основные предположения

Мы будем использовать общие предположения глав 1 и 3. Будем считать, таким образом, что задано семейство $(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}$, инвариантное относительно сдвигов, и что для любого $S \subset \mathbb{Z}^\nu$ определено множество

$$\Omega_S = \Big\{\xi \in \prod_{x\in S} \Omega_x \colon (\forall \Lambda \in \mathscr{F} \colon \Lambda \subset S)\, \xi|\Lambda \in \overline{\Omega}_\Lambda\Big\}.$$

Введем банахово пространство $\mathscr{B}$ трансляционно-инвариантных взаимодействий с нормой

$$\Phi \mapsto ||\Phi|| = \sum_{X\ni 0} \sup_{\xi\in\Omega_X} |\Phi(\xi)| < \infty.$$

Очевидно, $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Определим отображение $\varphi \colon \mathscr{B} \mapsto \mathscr{C}$, положив $\varphi\Phi = A_\Phi$. Множество $\varphi\mathscr{B}$ плотно в $\mathscr{C}$ и отображение φ непрерывно:

$$||\Phi|| \geqslant |\Phi| \geqslant ||A_\Phi||.$$

Поэтому утверждения (c) и (d) теоремы 3.7 справедливы при $\mathfrak{X} = \mathscr{B}$.

Если $\Phi \in \mathscr{B}$, то для Φ определены множество K_Φ гиббсовских состояний и множество $I_{\varphi\Phi}$ равновесных состояний. Мы увидим, что $I_{\varphi\Phi} \subset K_\Phi \cap I$. Обратного включения $I_{\varphi\Phi} \supset K_\Phi \cap I$, вообще говоря, нет, но оно справедливо, если пространство Ω удовлетворяет следующему условию:

(D) *Существуют такие последовательности множеств* (Λ_n) *и* (M_n)*, что* $\Lambda_n \nearrow \infty$*,* $\Lambda_n \subset M_n$*,* $|\Lambda_n|/|M_n| \to 1$ *и для любых* ξ*,* $\eta \in \Omega$ *и* n *найдется* $\zeta_n \in \Omega$*, для которого*

$$\zeta_n|\Lambda_n = \xi|\Lambda_n, \quad \zeta_n|(\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n) = \eta|(\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n).$$

Заметим, что это условие сильнее, чем условие (D*) из замечания 1.14. При $\nu = 1$ оба они сводятся к условию «перемешивания» (см. главу 5).

4.2. Теорема

Если $\Phi \in \mathscr{B}$, то $I_{A_\Phi} \subset K_\Phi \cap I$. Если, кроме того, пространство Ω удовлетворяет условию (D)*, то $I_{A_\Phi} = K_\Phi \cap I$, т. е. инвариантное состояние является равновесным тогда и только тогда, когда оно — гиббсовское.*

Если $\Phi \in \mathscr{A}_0$, то гиббсовский ансамбль $\mu_{(\Lambda)\eta}$ с граничным условием η зависит только от $\eta|(M\backslash\Lambda)$, где $M = \Lambda + \Delta$ — некоторое конечное множество (множество Δ зависит от Φ и семейства $\mathscr{F}$). Пользуясь определением (3.33) из доказательства теоремы 3.12, можно проверить, что

$$\rho_\Lambda\{\xi\} = \sum_{\eta \in \Omega_{M\backslash\Lambda}} \mu_{(\Lambda)\eta}\{\xi\}\rho_{M\backslash\Lambda}\{\eta\}.$$

Отсюда следует, что состояние ρ^Φ, определенное при помощи равенства $\rho_\Lambda = \alpha_\Lambda \rho^\Phi$, является гиббсовским состоянием. С другой стороны, из доказательства теоремы 3.12 видно, что $\rho^\Phi \in I_{\varphi\Phi}$. Таким образом, $\rho^\Phi \in I_{\varphi\Phi} \cap K_\Phi$ в случае, когда $\Phi \in \mathscr{A}_0$.

Пусть теперь $\Phi \in \varphi^{-1}D$, $\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n$, $\Phi_n \in \mathscr{A}_0$. Тогда любая предельная точка последовательности мер ρ^{Φ_n}, $n \to \infty$, содержится в $I_{\varphi\Phi} = \{\rho^\Phi\}$, а также в K_Φ. Тем самым, при $\Phi \in \varphi^{-1}D$ существует $\rho^\Phi \in I_{\varphi\Phi} \cap K_\Phi$.

Для произвольного $\Phi \in \mathscr{B}$ из теоремы 3.7 (d) следует, что $I_{\varphi\Phi}$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой состояний $\rho \in K_\Phi \cap I$. Значит, $I_{\varphi\Phi} \subset K_\Phi \cap I$.

Предположим теперь, что пространство Ω удовлетворяет условию (D). Нужно доказать, что если $\sigma \in K_\Phi \cap I$, то $\sigma \in I_{\varphi\Phi}$. Мы докажем несколько более общее утверждение, а именно, что если $\sigma \in K_\Phi$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} |M_n|^{-1}[S(\alpha_{M_n}\sigma) - (\alpha_{M_n}\sigma)(U^\Phi_{M_n})] \geqslant P^\Phi.$$

По определению гиббсовского состояния

$$(\alpha_{M_n}\sigma)\{\xi\} = \int\limits_{\Omega_{\mathbb{Z}^\nu\backslash M_n}} \sigma_{\mathbb{Z}^\nu\backslash M_n}(d\eta)\mu_{(M_n)\eta}\{\xi\},$$

а вследствие вогнутости энтропии

$$S(\alpha_{M_n}\sigma) - (\alpha_{M_n}\sigma)(U^{\Phi}_{M_n}) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}} \sigma_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(d\eta)[S(\mu_{(M_n)\eta}) - \mu_{(M_n)\eta}(U^{\Phi}_{M_n})] =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}} \sigma_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(d\eta) \sum_{\xi \in \Omega_{M_n}} \mu_{(M_n)\eta}\{\xi\} \times$$
$$\times \Big[W_{M_n, \mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(\xi \vee \eta) + \log \sum_{\zeta \in \Omega_{M_n}} \exp[-U^{\Phi}_{M_n}(\zeta) - W_{M_n, \mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(\zeta \vee \eta)]\Big].$$

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} |M_n|^{-1}[S(\alpha_{M_n}\sigma) - (\alpha_{M_n}\sigma)(U^{\Phi}_{M_n})] \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{n\to\infty} |M_n|^{-1} \int\limits_{\Omega_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}} \sigma_{\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(d\eta) \times$$
$$\times \log \sum_{\zeta \in \Omega_{M_n}} \exp[-U^{\Phi}_{M_n}(\zeta) - W_{M_n, \mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(\zeta \vee \eta)].$$

В силу условия (D) (при $\eta = \eta^*|(\mathbb{Z}^\nu \setminus M_n)$ для некоторого $\eta^* \in \Omega$)

$$\sum_{\zeta \in \Omega_{M_n}} \exp[-U^{\Phi}_{M_n}(\zeta) - W_{M_n, \mathbb{Z}^\nu \setminus M_n}(\zeta \vee \eta)] \geqslant \sum_{\xi \in \Omega^*_{\Lambda_n}} \exp[-U^{\Phi}_{\Lambda_n}(\xi) + R_n],$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n|/|M_n| = 0$. Отсюда получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} |M_n|^{-1}[S(\alpha_{M_n}\sigma) - (\alpha_{M_n}\sigma)(U^{\Phi}_{M_n})] \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{n\to\infty} |M_n|^{-1} \log \sum_{\xi \in \Omega^*_{\Lambda_n}} \exp[-U^{\Phi}_{\Lambda_n}(\xi) + R_n) = P^{\Phi}.$$

4.3. Физическая интерпретация

В случае, когда чистая термодинамическая фаза для взаимодействия $\Phi \in \mathscr{B}$ допускает нетривиальное разложение на чистые гиббсовские состояния, мы будем говорить, что имеет место *нарушение симметрии* или, точнее, что нарушается трансляционная инвариантность теории.

4.4. Предложение

Предположим, что выполнено условие (D) *и* $\Phi \in \mathscr{B}$, $\sigma \in K_\Phi$, $C \in \mathscr{C}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \sigma\Big(\exp \sum_{x\in\Lambda_n} C \circ \tau^x\Big) = P(A_\Phi + C) - P(A_\Phi).$$

В силу плотности множества $\{A_\Psi \colon \Psi \in \mathscr{A}_0\}$ в $\mathscr{C}$ и свойства равномерной непрерывности (см. (3.8)) достаточно рассмотреть случай $C = A_\Psi$, где $\Psi \in \mathscr{A}_0$. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \sigma\Big(\exp \sum_{x\in\Lambda_n} C \circ \tau^x\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\big(\exp(-U^{\Psi}_{\Lambda_n})\big).$$

Из условия (D) следует, что для любых ξ, $\eta \in \Omega$

$$\frac{[(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\{\xi|\Lambda_n\}] \exp U^{\Phi}_{\Lambda_n}(\xi|\Lambda_n)}{[(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\{\eta|\Lambda_n\}] \exp U^{\Phi}_{\Lambda_n}(\eta|\Lambda_n)} \leqslant e^{R_n}, \tag{4.1}$$

где $R_n/|\Lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

В самом деле, по определению состояния Гиббса (см. (1.14), (1.15))

$$\begin{aligned}(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\{\xi|\Lambda_n\} &= \sum_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}} (\alpha_{M_n}\sigma)\{(\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\} = \\ &= \int\limits_{\Omega_{L\setminus M_n}} \sum_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}} \sigma_{L\setminus M_n}(d\zeta)\mu_{(M_n)\zeta}\{(\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\} = \\ &= \int\limits_{\Omega_{L\setminus M_n}} \sigma_{L\setminus M_n}(d\zeta) \sum_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}} [Z'_{M_n}(\zeta)]^{-1} \exp\big[-U^{\Phi}_{\Lambda_n}(\xi|\Lambda_n) - \\ &\quad - U^{\Phi}_{M_n\setminus\Lambda_n}(\xi') - W_{\Lambda_n,\, M_n\setminus\Lambda_n}\big((\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\big) - W_{M_n,\, L\setminus M_n}((\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\vee\zeta)\big],\end{aligned}$$

где $Z'_{M_n}(\zeta)$ — нормирующая постоянная, а сумма, стоящая под знаком интеграла, вычисляется в соответствии с принятым ранее соглашением (см. § 1.5): если $\xi|\Lambda_n \vee \xi' \vee \zeta \notin \Omega$, то отвечающее этому ξ' слагаемое считается равным нулю. Из определения множества M_n следует, что в этой сумме обязательно есть ненулевое слагаемое. Аналогично записывается $(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\{\eta|\Lambda_n\}$. Таким образом, левая часть (4.1) есть отношение двух интегралов, в каждом из которых подынтегральная функция положительна при всех $\zeta \in \Omega_{L\setminus M_n}$. Отношение этих подынтегральных функций не превосходит числа

$$r_n = |\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}| \exp\Bigl(\sup_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}} \bigl[-U^{\Phi}_{M_n\setminus\Lambda_n}(\xi') - W_{\Lambda_n,\, M_n\setminus\Lambda_n}\bigl((\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\bigr)\bigr] + \\ + \sup_{\zeta\in\Omega}\bigl[-W_{M_n,\, L\setminus M_n}(\zeta)\bigr] - \inf_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}}\bigl[-U_{M_n\setminus\Lambda_n}(\xi') - \\ - W_{\Lambda_n,\, M_n\setminus\Lambda_n}\bigl((\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\bigr)\bigr] - \inf_{\zeta\in\Omega}\bigl[-W_{M_n,\, L\setminus M_n}(\zeta)\bigr]\Bigr), \quad (4.2)$$

которое мы сейчас оценим.

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$ и пользуясь конечностью нормы $||\Phi||$, подберем конечное множество Δ_ε, для которого

$$\sum_{X\subset L\colon\, 0\in X\not\subset\Delta_\varepsilon} \sup_{\xi_X\in\Omega_X} |\Phi(\xi_X)| \leqslant \varepsilon$$

(здесь и ниже множество X предполагается конечным). Тогда для любого $\zeta \in \Omega$

$$|W_{M_n,\, L\setminus M_n}(\zeta)| \leqslant \sum_{x\in\Lambda_n}\Bigl[\sum_{X\subset L\colon\, x\in X\not\subset\Delta_\varepsilon+x} |\Phi(\zeta|X)| + \sum_{\substack{X\subset L\colon\, x\in X\subset\Delta_\varepsilon+x,\\ X\cap(L\setminus M_n)\neq\varnothing}} |\Phi(\zeta|X)|\Bigr] + \\ + \sum_{x\in M_n\setminus\Lambda_n}\ \sum_{X\subset L\colon\, x\in X} |\Phi(\zeta|X)| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon|\Lambda_n| + ||\Phi||\bigl(|M_n\setminus\Lambda_n| + |\{x\in\Lambda_n\colon (\Delta_\varepsilon+x)\cap(L\setminus M_n)\neq\varnothing\}|\bigr) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon|\Lambda_n| + ||\Phi||\Bigl(|M_n\setminus\Lambda_n| + \sum_{y\in\Delta_\varepsilon} |((\Lambda_n+y)\setminus\Lambda_n) - y|\Bigr) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon|\Lambda_n| + ||\Phi||\Bigl(\sum_{y\in\Delta_\varepsilon} |(\Lambda_n+y)\setminus\Lambda_n| + |M_n\setminus\Lambda_n|\Bigr).$$

Ясно также, что

$$\bigl|U^{\Phi}_{M_n\setminus\Lambda_n}(\xi') + W_{\Lambda_n,\, M_n\setminus\Lambda_n}\bigl((\xi|\Lambda_n)\vee\xi'\bigr)\bigr| \leqslant |M_n\setminus\Lambda_n|\cdot||\Phi||$$

при всех $\xi' \in \Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}$. Отсюда, пользуясь условием (D) и тем, что $\Lambda_n \nearrow \infty$ в смысле Ван Хова (см. § 3.9), получаем

$$\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n|^{-1}\Bigl(\sup_{\zeta\in\Omega}\bigl|W_{M_n,\, L\setminus M_n}(\zeta)\bigr| + \sup_{\xi'\in\Omega_{M_n\setminus\Lambda_n}}\bigl|U^{\Phi}_{M_n\setminus\Lambda_n}(\xi')\bigr|\Bigr) = 0. \quad (4.3)$$

Тем самым (см. (4.2)), $r_n = \exp R_n$, где $R_n/|\Lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$, и мы приходим к (4.1).

Поменяв ролями ξ и η, убеждаемся, что дробь в левой части (4.1) оценивается снизу величиной e^{-R_n}. Полученную двустороннюю оценку преобразуем так, чтобы в средней части осталось $(\alpha_{\Lambda_n}\sigma)(\eta|\Lambda_n)$, а затем просуммируем по $\eta|\Lambda_n$. Пользуясь тем, что σ — вероятностная мера, получаем (см. (1.11))

$$e^{-R_n}\mu_{(\Lambda_n)}\{\xi_{\Lambda_n}\} \leqslant (\alpha_{\Lambda_n}\sigma)\{\xi_{\Lambda_n}\} \leqslant e^{R_n}\mu_{(\Lambda_n)}\{\xi_{\Lambda_n}\},$$

откуда следует, что

$$e^{-R_n}Z_{\Lambda_n}^{\Phi+\Psi}/Z_{\Lambda_n}^{\Phi} \leqslant (\alpha_{\Lambda_n}\sigma)(\exp(-U_{\Lambda_n}^{\Psi})) \leqslant e^{R_n}Z_{\Lambda_n}^{\Phi+\Psi}/Z_{\Lambda_n}^{\Phi}.$$

Предложение доказано.

4.5. Замечание

Пусть заданы представление τ группы $\mathbb{Z}^\nu$ гомеоморфизмами компактного метризуемого пространства Ω, τ-инвариантная вероятностная мера σ_0 и непрерывная действительная функция A на Ω. Для любого конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ положим

$$Z_\Lambda^* = \sigma_0\Big(\exp\sum_{a\in\Lambda} A\circ\tau^a\Big).$$

Синай [4] предложил (для $\nu = 1$) называть гиббсовским состоянием любой предел при $\Lambda \to \mathbb{Z}^\nu$ семейства мер

$$Z_\Lambda^{*-1}\Big[\exp\sum_{a\in\Lambda} A(\tau^a\xi)\Big]\sigma_0(d\xi).$$

С этим определением связан следующий результат.

Пусть Φ, $\Psi \in \mathscr{B}$ *и* $\sigma \in K_\Phi$. *Для конечного* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ *положим*

$$Z_\Lambda^* = \sigma\Big(\exp\sum_{a\in\Lambda} A_\Psi\circ\tau^a\Big).$$

Тогда любой предел при $\Lambda \to \mathbb{Z}^\nu$ *мер*

$$Z_\Lambda^{*-1}\Big[\exp\sum_{a\in\Lambda} A_\Psi\circ\tau^a\Big]\sigma$$

принадлежит множеству $K_{\Phi+\Psi}$.

Это утверждение легко доказать при помощи методов главы 1; см. также упражнение 4 из этой главы.

4.6. Строгая выпуклость давления

Из теоремы 3.4 мы знаем, что функция $\Phi \mapsto P^\Phi = P(A_\Phi)$ непрерывна и выпукла на $\mathscr{B}$. Предположим, что ее график содержит прямолинейный интервал, т. е. существуют такие функции Φ, $\Psi \in \mathscr{B}$, $\Psi \neq 0$, что

$$P^{\Phi+t\Psi} = P^\Phi + ct \text{ при } t \in [-1, 1].$$

Из теоремы 3.7 следует, что если ρ — равновесное состояние для Φ, то оно служит также равновесным состоянием для $\Phi + t\Psi$ при $|t| \leqslant 1$. Но тогда ρ — гиббсовское состояние для $\Phi + t\Psi$ при $|t| \leqslant 1$. Так как выражение

$$\int\limits_{\Omega_{L\setminus\Lambda}} \rho_{L\setminus\Lambda}(d\eta)\mu^{\Phi+t\Psi}_{(\Lambda)\eta}\{\xi_\Lambda\}$$

вещественно-аналитично по t и постоянно при $|t| \leqslant 1$, оно постоянно при всех действительных t. Отсюда следует, что ρ — гиббсовское состояние для $\Phi + t\Psi$ при всех действительных t. Если выполнено условие (D), то по теореме 4.2 ρ — равновесное состояние и, значит,

$$\max_{\sigma \in I}[s(\sigma) + \sigma(A_\Phi) + t\sigma(A_\Psi)] = s(\rho) + \rho(A_{\Phi+t\Psi}) = P^\Phi + ct$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что $\sigma(A_\Psi) = c$ при любом $\sigma \in I$ или $\sigma(A_\Psi - c) = 0$ для всех трансляционно-инвариантных мер σ на пространстве Ω. Поэтому $A_\Psi - c$ принадлежит замкнутому подпространству $\mathscr{I} \subset \mathscr{C}$, порожденному элементами $A \circ \tau^a - A$, где $A \in \mathscr{C}$, $a \in \mathbb{Z}^\nu$.[1] В итоге мы приходим к следующему утверждению.

4.7. Предложение

Пусть отображение $\varphi\colon \mathscr{B} \mapsto \mathscr{C}$ *определено равенством* $\varphi\Phi = A_\Phi$ *и пусть* $\mathscr{I}$ *— замкнутое подпространство в* $\mathscr{C}$*, порожденное элементами*

[1]Действительно, предположив, что $A_\Psi - c \not\subset \mathscr{I}$, определим на подпространстве $\mathscr{I}_\Psi$, натянутом на $\mathscr{I}$ и $A_\Psi - c$, линейный функционал l по формуле $l(B + \gamma(A_\Psi - c)) = \gamma$, $B \in \mathscr{I}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Будучи равным нулю на $\mathscr{I}$, этот функционал трансляционно-инвариантен. По теореме Хана – Банаха (см. приложение A.3.2) $l = L|\mathscr{I}_\Psi$, где $L \in \mathscr{C}^*$. По теореме Рисса – Маркова $L = \sigma^+ - \sigma^-$, где σ^+, σ^- — конечные положительные меры на Ω. При этом $\sigma^+/\sigma^+(\Omega) \in I$ и $\sigma^+(A_\Psi - c) \neq 0$, что противоречит доказанному выше. — *Прим. ред.*

$A \circ \tau^a - A$, где $A \in \mathscr{C}$, $a \in \mathbb{Z}^\nu$. Обозначим через $[\Phi]$ образ элемента $\Phi \in \mathscr{B}$ в $\varphi\mathscr{B}/(\varphi\mathscr{B} \cap \mathscr{I})$. Тогда

(a) *функция $[\Phi] \mapsto P(A_\Phi)$ корректно определена на $\varphi\mathscr{B}/(\varphi\mathscr{B} \cap \mathscr{I})$, и если выполнено условие* (D), *то эта функция строго выпукла на подмножестве $\{[\Phi] \in \varphi\mathscr{B}/(\varphi\mathscr{B} \cap \mathscr{I})\colon \sigma(A_\Phi) = 0\}$, где σ — произвольно выбранный элемент множества I.*

(b) *Если выполняется* (D) *и взаимодействия Φ, Φ' имеют общее равновесное состояние ρ, то $A_{\Phi'} - A_\Phi \in \mathscr{I} + \mathbb{R}$.*

Будем говорить, что взаимодействия $\Phi, \Phi' \in \mathscr{B}$ *физически эквивалентны*, если существуют такие $c \in \mathbb{R}$ и $B \in \mathscr{I}$, что $A_{\Phi'-\Phi} = B + c$ (или, в других обозначениях, $[\Phi'] = [\Phi] + c$, $c \in \mathbb{R}$). Два физически эквивалентных взаимодействия из $\mathscr{B}$ имеют одинаковые равновесные состояния. Обратно, если два взаимодействия из $\mathscr{B}$ имеют общее равновесное состояние, то они физически эквивалентны. Ограничение функции P на класс эквивалентности $\{\Phi' \in \mathscr{B}\colon A_{\Phi'-\Phi} \in \mathscr{I} + \mathbb{R}\}$ аффинно, и классы эквивалентности являются максимальными аффинными множествами, на которых функция P аффинна.

4.8. $\mathbb{Z}^\nu$-решетчатые системы и $\mathbb{Z}^\nu$-морфизмы

В параграфе 2.1 мы ввели объекты $\big(L, (\Omega_x)_{x\in L}, \overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$, назвав их решетчатыми системами. В настоящей главе предполагается, что $L = \mathbb{Z}^\nu$, $\Omega_x = \Omega_0$ и система $(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}$ инвариантна относительно сдвигов решетки $\mathbb{Z}^\nu$. Такую решетчатую систему с дополнительной структурой, обусловленной сдвигами, мы будем называть *$\mathbb{Z}^\nu$-решетчатой системой* и обозначать $\big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$. Будем говорить, что отображение

$$F\colon \big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega_0', (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big) \mapsto \big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$$

является *$\mathbb{Z}^\nu$-морфизмом*, если существует семейство $(F_x)_{x\in\mathbb{Z}^\nu}$ со свойствами (M1)–(M4) из параграфа 2.1 и если, кроме того,

(M5) $F_{x-a}\tau^a = F_x$.

Такое отображение F является морфизмом. Если это изоморфизм, то будем называть его *$\mathbb{Z}^\nu$-изоморфизмом*.

4.9. Предложение

Отображение $F\colon \Omega' \mapsto \Omega$ является $\mathbb{Z}^\nu$-морфизмом тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(a) F *непрерывно*;

(b) F *эквивариантно, т. е.* $\tau^a F = F\tau^a$;

(c) *ограниченное* F *на множество* $\sum'_{\xi'} = \{\eta' \in \Omega' \colon \lim\limits_{x\to\infty} d'(\tau^x\eta', \tau^x\xi') = 0\}$ *является биекцией на множество* $\sum_{F\xi'} = \{\eta \in \Omega \colon \lim\limits_{x\to\infty} d(\tau^x\eta, \tau^x F\xi') = 0\}$ (*здесь* d, d' — *метрики, совместимые с топологиями на* Ω, Ω' *соответственно*).

Очевидно, из (M1) – (M5) вытекают свойства (a) – (c). Предположим теперь (a) – (c) выполненными. Так как отображение F непрерывно, существует такое конечное множество $M \subset \mathbb{Z}^\nu$, что $(F\xi')_0$ зависит только от $\xi'|M$. Положим $M' = M \cup \{M + \Lambda \colon 0 \in \Lambda \in \mathscr{F}\}$. В силу компактности можно выбрать такое конечное множество $M'' \supset M'$, что для любого $\eta' \in \Omega'_{M''}$ существует $\eta^* \in \Omega'$, удовлетворяющее условию

$$\eta^*|M' = \eta'|M'.$$

Положим $M(x) = M'' + x$ и определим отображение $F_x \colon \Omega'_{M(x)} \mapsto \Omega_x$ равенством

$$F_x(\tau^{-x}\eta') = (F\eta^*)_0.$$

Ясно, что мы получим (M1), (M2), (M4) и (M5). При $\Lambda \in \mathscr{F}$, $\Lambda \subset X$, $\xi' \in \Omega'_{\cup\{M(x)\colon x\in X\}}$ возьмем $x_0 \in \Lambda$ и пусть $\eta' = \tau^{x_0}\xi'|M''$. Тогда существует такое $\eta^* \in \Omega'$, что $\eta^*|M' = \eta'|M' = \tau^{x_0}\xi'|M'$. Следовательно, если $x \in \Lambda$, то $\eta^*|M + (x - x_0) = \tau^{x_0}\xi'|M + (x - x_0)$ в силу определения M'. Заметим теперь, что

$$F_x(\xi'|M(x)) = F_x\big(\tau^{-x}\tau^{x-x_0}(\tau^{x_0}\xi'|M'' + (x - x_0))\big) =$$
$$= F_x\big(\tau^{-x}\tau^{x-x_0}(\eta^*|M'' + (x - x_0))\big) = (F\tau^{x-x_0}\eta^*)_0 = (F\eta^*)_{x-x_0},$$

откуда вытекает (M3).

4.10. Следствие

(a) *Всякий эквивариантный гомеоморфизм* $F \colon \Omega' \mapsto \Omega$ *является* $\mathbb{Z}^\nu$*-изоморфизмом.*

(b) *Для любой* $\mathbb{Z}^\nu$*-решетчатой системы* $\big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$ *существует* $\mathbb{Z}^\nu$*-изоморфизм*

$$F \colon \big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega'_0, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big) \mapsto \big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big),$$

где $\mathscr{F}'$ *состоит из двухточечных множеств* $\{x, y\}$, *в которых* x *и* y — *ближайшие соседи, т. е.* $\sum\limits_{i=1}^{\nu} |x_i - y_i| = 1$.

Утверждение (a) непосредственно вытекает из предложения 4.9.

Чтобы доказать (b), положим $M(x) = \{y \in \mathbb{Z}^\nu \colon \max\limits_i |x_i - y_i| \leqslant l\}$, где $l \geqslant 0$ выбрано так, что если $x \in \Lambda \in \mathscr{F}$, то $\Lambda \subset M(x)$. Пусть $\Omega'_x = \Omega_{M(x)}$ и пусть, в соответствии с приведенной выше формулировкой,

$$\mathscr{F}' = \{\{x,\, y\} \colon x \text{ и } y \text{ — ближайшие соседи}\}.$$

Для $\{x,\, y\} \in \mathscr{F}'$ положим

$$\overline{\Omega}'_{\{x,\,y\}} = \{(\xi,\, \eta) \in \Omega_{M(x)} \times \Omega_{M(y)} \colon \xi|M(x) \cap M(y) = \eta|M(x) \cap M(y)\}.$$

Отображение $F \colon \Omega' \mapsto \Omega$, для которого $(F\xi')_x = (\xi'_x)_x$, является эквивариантным гомеоморфизмом и, тем самым, в силу (a) — $\mathbb{Z}^\nu$-изоморфизм.

4.11. Замечание

К $\mathbb{Z}^\nu$-морфизмам и трансляционно-инвариантным взаимодействиям можно непосредственно применить результаты главы 2. В частности, если $\Phi \in \mathscr{B}\big(\mathbb{Z}^\nu,\, \Omega_0,\, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{F}}\big)$ и F является $\mathbb{Z}^\nu$-морфизмом, то $F^*\Phi \in \mathscr{B}\big(\mathbb{Z}^\nu,\, \Omega'_0,\, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathscr{F}'}\big)$, как следует из оценки нормы в параграфе 2.3.

4.12. Предложение

Пусть $F \colon \big(\mathbb{Z}^\nu,\, \Omega'_0,\, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathscr{F}'}\big) \mapsto \big(\mathbb{Z}^\nu,\, \Omega_0,\, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{F}}\big)$ *является* $\mathbb{Z}^\nu$*-морфизмом. Тогда*

(a) *Если* σ' *— произвольное* τ*-инвариантное состояние на* Ω'*, то* $s(\sigma') \geqslant s(F\sigma')$ *и*

$$\sigma'(A_{F^*\Phi}) = (F\sigma')(A_\Phi).$$

(b) *Если* F *является* $\mathbb{Z}^\nu$*-изоморфизмом, то* $P^{F^*\Phi} = P^\Phi$.

Так как $S(\sigma'_{\cup\{M(x)\colon x \in \Lambda\}}) \geqslant S\big((F\sigma')_\Lambda\big)$, мы получаем $s(\sigma') \geqslant s(F\sigma')$. Далее,

$$\begin{aligned}
\sigma'(A_{F^*\Phi}) &= -\sum_{X' \ni 0} \frac{1}{|X'|} \sigma'\big((F^*\Phi) \circ \alpha_{X'}\big) = \\
&= -\sum_{X' \ni 0} \sum_{X \colon \cup\{M(x)\colon x \in X\} = X'} \frac{1}{|X'|} \sigma'(\Phi \circ \alpha_X \circ F) = \\
&= -\sum_{X \colon \cup\{M(x)\colon x \in X\} \ni 0} \frac{1}{|\cup \{M(x) \colon x \in X\}|} (F\sigma')(\Phi \circ \alpha_X) = \\
&= -\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} (F\sigma')(\Phi \circ \alpha_X) = (F\sigma')(A_\Phi).
\end{aligned}$$

Это доказывает утверждение (a); (b) следует из (a) и вариационного принципа для P (теорема 3.12).

4.13. Ограничение $\mathbb{Z}^\nu$ на подгруппу G

Пусть G — подгруппа конечного индекса в $\mathbb{Z}^\nu$ (в этом случае G изоморфна $\mathbb{Z}^\nu$) и $\big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega'_0, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big)$ — $\mathbb{Z}^\nu$-решетчатая система. Выберем множество $M(0) \subset \mathbb{Z}^\nu$ так, чтобы оно содержало по одному элементу из каждого смежного класса $\mathbb{Z}^\nu \mod G$ и положим $M(x) = M(0) + x$, $x \in G$. *Семейство* $\big(M(x)\big)_{x\in G}$ является разбиением множества $\mathbb{Z}^\nu$, и конструкция примера 2.2 приводит к изоморфизму

$$F\colon \big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega'_0, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big) \mapsto \big(G, \Omega'_{M(0)}, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big).$$

(Заметим, что этот изоморфизм не является $\mathbb{Z}^\nu$-морфизмом, если $G \neq \mathbb{Z}^\nu$.) Будем говорить, что G-решетчатая система $\big(G, \Omega'_{M(0)}, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$ получена из $\big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega'_0, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big)$ ограничением на подгруппу G. Этот объект определен однозначно с точностью до G-изоморфизма вследствие произвола в выборе множества $M(0)$.

4.14. Предложение

Предположим, что $\Phi' \in \mathscr{B}\big(\mathbb{Z}^\nu, \Omega'_0, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}\big)$ *и* $\Phi'^* = (F^{-1})^*\Phi'$ (*мы определяем* $(F^{-1})_x$ *как отображение ограничения* $\Omega'_{M(a)} \mapsto \Omega'_x$ *при* $x \in M(a)$). *Тогда* $\Phi'^* \in \mathscr{B}\big(G, \Omega'_{M(0)}, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}\big)$ *и*

(a) *если* σ — *любое* τ_G*-инвариантное состояние на* Ω, *то*

$$\sigma(A_{\Phi'^*} \circ F) = \sum_{x\in M(0)} \tau^x\sigma(A_{\Phi'});$$

(b) *давление для взаимодействия* Φ'^* *и группы* G *вычисляется по формуле*

$$P^{\Phi'^*} = |M(0)|P^{\Phi'};$$

аналогично, если A — *непрерывная действительная функция на* Ω', *то*

$$P\Big(\sum_{x\in M(0)} A\circ\tau^x\circ F^{-1}\Big) = |M(0)|P(A).$$

Включение $\Phi'^* \in \mathscr{B}$ следует из оценки нормы в параграфе 2.3 и G-инвариантности взаимодействия Φ'^*.

По определению

$$A_{\Phi'^*}(F\xi) = -\sum_{X \subset G}^{*} \big((F^{-1})^* \Phi'\big)(F\xi|X) =$$

$$= -\sum_{X \subset G}^{*} \sum_{X'\colon \{a \in G\colon X' \cap M(a) \neq \varnothing\} = X} \Phi'(\xi|X').$$

Для каждого конечного множества $Y' \subset \mathbb{Z}^\nu$ и каждого $x \in M(0)$ в правой части этого равенства присутствует в точности один сдвиг X' множества $Y' + x$ на элемент группы G. Поэтому справедливо (a).

Утверждение (b) вытекает из вариационного принципа для P (теорема 3.12), утверждения (a) и следующих легко проверяемых фактов:

(i) энтропия меры σ относительно G равна энтропии меры $\tau^x\sigma$ и, следовательно, энтропии меры $\sigma' = |M(0)|^{-1} \sum\limits_{x \in M(0)} \tau^x \sigma$ относительно G;

(ii) энтропия меры σ' относительно группы G равна энтропии этой меры относительно $\mathbb{Z}^\nu$, умноженной на $|M(0)|$.

4.15. Неразрешимость и непериодичность

Приведем некоторые любопытные факты, касающиеся $\mathbb{Z}^\nu$-решетчатых систем (подробное изложение утверждений (a)–(c) см. в Робинсон [1]).

(a) Обозначим через $\mathscr{F}'$ множество двухточечных подмножеств решетки $\mathbb{Z}^\nu$, состоящих из ближайших соседей (см. следствие 4.10(b)). Зададим конечное множество Ω_0 и трансляционно-инвариантное семейство $(\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{F}}$, где $\overline{\Omega}_\Lambda \subset (\Omega_0)^\Lambda$. Тогда проблема выяснения, определяют ли эти данные непустое пространство конфигураций

$$\Omega = \{\xi \in (\Omega_0)^{\mathbb{Z}^2} : (\forall \Lambda \in \mathscr{F}')\, \xi|\Lambda \in \overline{\Omega}_\Lambda\}$$

алгоритмически неразрешима (см. Бергер [1]).

(b) Среди $\mathbb{Z}^2$-решетчатых систем, описанных в пункте (a), найдется такая, в которой нет периодических конфигураций: если $\xi \in \Omega$ и $\tau^a\xi = \xi$, то $a = 0$. Соответствующий пример с $|\Omega_0| = 56$ и нулевой топологической энтропией (см. § 6.20) построен Робинсоном [1]. Существование $\mathbb{Z}^2$-решетчатой системы без периодических конфигураций служит составной частью доказательства свойства неразрешимости, упомянутого в пункте (a), и, в свою очередь, следует из этого свойства.

(c) Робинсон [1] построил систему того же типа с $|\Omega_0| = 36$, для которой неразрешима следующая проблема продолжения: для произвольного конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ и для $\xi \in \Omega_\Lambda$ выяснить, существует ли такое $\xi^* \in \Omega$, что $\xi^*|\Lambda = \xi$.

(d) Пусть $K(l) = \{x \in \mathbb{Z}^2\colon |x_1| \leqslant l, |x_2| \leqslant l\}$. Используя $\mathbb{Z}^2$-решетчатую систему из (c), определим наименьшую функцию $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со следующим свойством: элемент $\xi \in \Omega_{K(l)}$ продолжается до некоторого $\xi^* \in \Omega$ тогда и только тогда, когда он может быть продолжен до некоторого $\xi^{**} \in \Omega_{K(F(l))}$. Вследствие неразрешимости проблемы из пункта (c) функция F невычислима. В частности, она очень быстро возрастает. Таким образом, хотя условия $\xi|\Lambda \in \overline{\Omega}_\Lambda$ наложены лишь на множества, $\Lambda \in \mathscr{F}'$, образованные парами соседних точек, влияние этих условий распространяется на очень большие расстояния.

Библиографические указания

Добрушин [2] показал, что трансляционно-инвариантные гиббсовские состояния являются равновесными состояниями. Обратное установили Лэнфорд и Рюэль [1]. Эквивалентность этих двух понятий, занимающая центральное место в статистической механике, является основным результатом настоящей главы. В качестве приложения мы доказали, следуя Гриффитсу и Рюэлю [1], теорему о «строгой выпуклости давления». Оставшаяся часть главы посвящена общим результатам, касающимся морфизмов, совместимых с действием группы $\mathbb{Z}^\nu$.

4.16. Упражнения

1. Пусть A_1, $A_2 \in \mathscr{C}_\Delta$, где Δ — конечное множество. Предположим, что существует $\sigma_0 \in I$, для которого $\sigma_0[A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x)]$ не имеет предела при $x \to \infty$. Показать, что тогда для некоторого взаимодействия $\Phi \in \mathscr{B}$ найдется такое эргодическое равновесное состояние σ, что $\sigma(A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x))$ не имеет предела при $x \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что σ не является чистым гиббсовским состоянием для взаимодействия Φ. (См. Израэль [1], теорема 5. Положим

$$\mathscr{L} = \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} (b_x A_1 \cdot (A_2 \circ \tau^x) + b_{-x}(A_1 \circ \tau^x) \cdot A_2)\colon b_x \in \mathbb{R}, \sum_{x \in S} |b_x| < \infty \Big\}$$

и будем действовать, как в лемме 3.19. Это даст нам состояние σ' (не обязательно эргодическое) с требуемым свойством. В его эргодическом разложении найдется состояние σ с тем же свойством, которое, в силу теоремы 1.11, не является чистым гиббсовским состоянием.)

2. Предположим, что $\mathscr{F} = \varnothing$, т. е. $\Omega = (\Omega_0)^{\mathbb{Z}^\nu}$. Пусть $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{B}$ — подпространство таких взаимодействий Φ, что

$$\sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \Phi(\xi \vee \eta) = 0$$

для всех пар непересекающихся конечных множеств Λ, M и всех $\eta \in \Omega_M$. Если $\Omega_0 = \{0, 1\}$, то пусть $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{B}$ — подпространство таких взаимодействий Φ, что $\Phi(\xi|X) = 0$ во всех случаях, кроме одного, а именно, когда $\xi_x = 1$ при всех $x \in \Lambda$. Доказать для $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0$ и $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1$ следующие утверждения.

(a) Если σ — общее гиббсовское состояние для Φ, $\Phi' \in \mathscr{S}$, то $\Phi = \Phi'$.

(b) Если взаимодействия Φ, $\Phi' \in \mathscr{S}$ физически эквивалентны, то $\Phi = \Phi'$.

(c) Ограничение P на $\mathscr{S}$ строго выпукло.

(См. Гриффитс и Рюэль [1]. Чтобы доказать утверждение (a), заметим, что в силу замечания 1.14 $\operatorname{supp} \sigma = \Omega$. Так как σ является гиббсовским состоянием, отношение

$$\frac{\exp[-U_\Lambda(\xi_\Lambda) - W_{\Lambda,\, \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda}(\xi_\Lambda \vee \eta)]}{\exp[-U_\Lambda(\xi'_\Lambda) - W_{\Lambda,\, \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda}(\xi'_\Lambda \vee \eta)]},$$

где ξ, $\xi' \in \Omega_\Lambda$, $\eta \in \Omega_{\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda}$, одинаково для взаимодействий Φ и Φ'. В случае подпространства $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0$ определим для конечного X «частичный след» $T_X \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}_X$ равенством

$$(T_X A)(\xi) = \lim_{M \to \mathbb{Z}^\nu} |\Omega_{M \setminus X}|^{-1} \sum_{\eta \in \Omega_{M \setminus X}} A((\xi|X) \vee \eta).$$

Используя отображение T_Λ, можно показать, что разность $U_\Lambda(\xi_\Lambda) - U_\Lambda(\xi'_\Lambda)$ одинакова для Φ и Φ'. Отсюда индукцией по $|X|$ получаем $\Phi|\Omega_X = \Phi'|\Omega_X$. В случае $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1$, взяв η, для которого $\eta_x = 0$ при всех $x \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$, опять приходим к заключению, что разность $U_\Lambda(\xi_\Lambda) - U_\Lambda(\xi'_\Lambda)$ для взаимодействий Φ и Φ' — одна и та же, откуда получаем $\Phi|\Omega_X = \Phi'|\Omega_X$. Для доказательства утверждений (b) и (c) см. § 4.7.)

3. Пусть $\Omega_0 = \{0, 1\}$. Предположим, что если для некоторого конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ элемент $\xi \in (\Omega_0)^{\mathbb{Z}^\nu}$ удовлетворяет условию $\xi|\Lambda \in \Omega_\Lambda$ и $\xi_x = 0$ при $x \notin \Lambda$, то $\xi \in \Omega$. Показать, что результаты упражнения 2 с $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1$ можно обобщить на такую $\mathbb{Z}^\nu$-решетчатую систему (она называется «решетчатым газом с твердой сердцевиной»).

Глава 5
Одномерные системы

Теория гиббсовских состояний на «решетке» $\mathbb{Z}^\nu$ лучше всего понята в одномерном случае (при $\nu = 1$), к изучению которого мы приступаем. *$\mathbb{Z}$-решетчатая система* $(\mathbb{Z},\, \Omega_0,\, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ называется также *подсдвигом конечного типа*. Заметим, что теперь τ^a можно рассматривать как a-ю степень «сдвига» $\tau = \tau^1$.

Переходя к $\mathbb{Z}$-изоморфной системе (см. следствие 4.10(b)), мы можем предположить, что $\mathscr{F}$ состоит из двухточечных множеств $\{x,\, x+1\}$. Пусть t — квадратная матрица, индексированная множеством $\Omega_0 \times \Omega_0$, с элементами

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,\, j) \in \overline{\Omega}_{\{x,\, x+1\}}, \\ 0, \text{ если } (i,\, j) \notin \overline{\Omega}_{\{x,\, x+1\}}. \end{cases}$$

В таком случае $\xi \in (\Omega_0)^{\mathbb{Z}}$ является элементом множества Ω, если и только если

$$t_{\xi_x,\, \xi_{x+1}} = 1 \text{ при всех } x \in \mathbb{Z}.$$

В дальнейшем будет удобно использовать для этой $\mathbb{Z}$-решетчатой системы обозначение $(\Omega_0,\, t)$. Мы будем предполагать, что при любом $i \in \Omega_0$ существует $\xi \in \Omega$, для которого $\xi_0 = i$.

Будем говорить, что $\mathbb{Z}$-решетчатая система является *транзитивной*, если τ действует на Ω топологически $(+)$-транзитивно[1], т. е. если для любых двух непустых открытых множеств $U,\, V \subset \Omega$ и любого $N \geqslant 0$ найдется такое $n > N$, что $U \cap \tau^n V \neq \varnothing$. Транзитивность системы $(\Omega_0,\, t)$ эквивалентна выполнению следующего условия: для любых $i,\, j \in \Omega_0$ найдется такое целое $a > 0$, что $(t^a)_{ij} > 0$.

Будем говорить, что $\mathbb{Z}$-решетчатая система является *перемешивающей*, если действие τ на пространстве Ω топологически перемешивает, т. е. если для любых двух непустых открытых множеств $U,\, V \subset \Omega$ найдется такое $N > 0$, что $U \cap \tau^n V \neq \varnothing$ при всех $n > N$. Для системы $(\Omega_0,\, t)$ перемешивание эквивалентно существованию такого целого $a > 0$, что $(t^a)_{ij} > 0$ при всех $i,\, j \in \Omega_0$.

[1] См. приложение A.2.

Пусть $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_1(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ — банахово пространство трансляционно-инвариантных взаимодействий с нормой

$$||\Phi||_1 = |\Phi| + |\Phi|_1, \tag{5.1}$$

где

$$|\Phi|_1 = \sum_{X\ni 0} \frac{\operatorname{diam} X}{|X|} \sup_{\xi\in\Omega_X} |\Phi(\xi)| < \infty \tag{5.2}$$

и $\operatorname{diam}\{x_1, \ldots, x_l\} = x_l - x_1$, если $x_1 < \ldots < x_l$. Заметим, что $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$ и $||\cdot||_1 \geqslant ||\cdot||$ (см. также ниже замечание 5.17).

Пусть $R \subset \{x \in \mathbb{Z}\colon x < a\}$, $S \subset \{x \in \mathbb{Z}\colon x \geqslant a\}$. Если $\Phi \in \mathscr{B}_1$, то сумма $W_{R,\,S}$ корректно определена даже для бесконечных множеств R, S; при этом

$$|W_{R,\,S}(\xi)| \leqslant \sum_{\substack{X\colon X\cap R\neq\varnothing,\\ X\cap S\neq\varnothing}} |\Phi(\xi|X)| \leqslant |\Phi|_1. \tag{5.3}$$

5.1. Лемма

Если $F\colon (\mathbb{Z}, \Omega_0', (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}) \mapsto (\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ является $\mathbb{Z}$-морфизмом и $\Phi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, то $F^*\Phi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{Z}, \Omega_0', (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$ и отображение F^* непрерывно.

Из параграфа 2.3 следует, что

$$|F^*\Phi| \leqslant |M(0)| \cdot |\Phi|,$$

и, аналогичным образом,

$$|F^*\Phi|_1 \leqslant |M(0)| \cdot [(\operatorname{diam} M(0)) \cdot |\Phi| + |\Phi|_1].$$

Нижеследующие теоремы 5.2 и 5.3 показывают, что изучение гиббсовских состояний для $\mathbb{Z}$-решетчатой системы с взаимодействием $\Phi \in \mathscr{B}_1$ сводится к изучению гиббсовских состояний для перемешивающих $\mathbb{Z}$-решетчатых систем.

5.2. Теорема

Для всякой $\mathbb{Z}$-решетчатой системы $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ существует конечное число транзитивных систем $(\Omega_0^{(\alpha)}, t^{(\alpha)})$ и инъективных $\mathbb{Z}$-морфизмов

$$F^{(\alpha)}\colon (\Omega_0^{(\alpha)}, t^{(\alpha)}) \mapsto (\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$$

таких, что

(a) *образы* $F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$ *не пересекаются*;

(b) *каждое гиббсовское состояние для взаимодействия* $\Phi \in \mathscr{B}_1$ *является выпуклой комбинацией гиббсовских состояний* $F^{(\alpha)}\sigma^{(\alpha)}$, *где* $\sigma^{(\alpha)}$ — *гиббсовское состояние для* $F^{(\alpha)*}\Phi$ *на* $(\Omega_0^{(\alpha)}, t^{(\alpha)})$,

(c) *если* $\xi \in \Omega$ *является периодической точкой* (*т. е.* $\tau^p\xi = \xi$ *при некотором* $p > 0$), *то* ξ *принадлежит одному из множеств* $F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$.

5.3. Теорема

Для всякой транзитивной $\mathbb{Z}$*-решетчатой системы* $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ *при некотором* $N > 0$ *существует* N *перемешивающих* $N\mathbb{Z}$*-решетчатых систем*[2] $(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$ *и* N *инъективных* $N\mathbb{Z}$*-морфизмов*

$$F^{(\beta)} \colon (\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)}) \to (N\mathbb{Z}, \Omega_{M(0)}, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}),$$

где система $(N\mathbb{Z}, \Omega_{M(0)}, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$ *получена из* $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ *ограничением* $\mathbb{Z}$ *на подгруппу* $N\mathbb{Z}$ *со следующими свойствами*:

(a) *образы* $F^{(\beta)}\Omega^{(\beta)}$ *образуют разбиение пространства* Ω *и циклически переставляются отображением* τ,

(b) *если* $\Phi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ *и* Φ^* — *соответствующее взаимодействие для системы* $(N\mathbb{Z}, \Omega_{M(0)}, (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$, *определенное в предложении* 4.14, *то каждое гиббсовское состояние для* Φ *является выпуклой комбинацией гиббсовских состояний* $F^{(\beta)}\sigma^{(\beta)}$, *где* $\sigma^{(\beta)}$ — *единственное гиббсовское состояние для* $F^{(\beta)*}\Phi^*$ *на* $(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$,

(c) *если* $\xi \in \Omega$ — *периодическая точка и* $\tau^p\xi = \xi$, *то* p *кратно* N.

Для доказательства сформулированных теорем предположим, не ограничивая общности, что $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}}) = (\Omega_0, t)$. Тогда существует такое целое $J > 0$, что $(t^{2J})_{ij} > 0$, если и только если $(t^J)_{ij} > 0$. [Очевидно, можно найти такие целые $k, l > 0$, что $l \geqslant 2k$ и $(t^k)_{ij} > 0$ в том и только том случае, когда $(t^l)_{ij} > 0$. Возьмем $J = l^2 - kl$ и заметим, что $J = lk + (l-2k)l$, $2J = ll + (l-2k)l$.]

Введем отношение порядка

$$(i \prec j) \iff (t^J)_{ij} > 0.$$

[2] Используя изоморфизм $\mathbb{Z} \to N\mathbb{Z}$, мы рассматриваем $\mathbb{Z}$-решетчатую систему $(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$ как $N\mathbb{Z}$-решетчатую систему.

Оно не зависит от выбора J (так как $i \prec j$ эквивалентно выполнению при любом целом $J' > 0$ неравенства $(t^{JJ'})_{ij} > 0$). Кроме того, из $i \prec j$, $j \prec k$ вытекает, что $i \prec k$. На множестве $\{i \in \Omega_0 \colon i \prec i\}$ определим отношение эквивалентности $\sim$, положив

$$(i \sim j) \Longleftrightarrow (i \prec j \text{ и } j \prec i).$$

Обозначим через $[i]$ класс эквивалентности точки i, порожденный этим отношением. Порядок $\prec$ на классах эквивалентности определяется следующим образом[3]:

$$([i] \prec [j]) \Longleftrightarrow (i \prec j).$$

5.4. Лемма

Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ и

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{Z} \colon aJ < x < bJ\}, \quad M = \{x \in \mathbb{Z} \colon (a-1)J < x < (b+1)J\}.$$

Тогда существует такое $K > 0$, не зависящее от a, b, что если η, $\eta' \in \Omega_{\mathbb{Z}\setminus M}$ и

$$[\eta_{(a-1)J}] = [\eta'_{(a-1)J}] \prec [\eta_{(b+1)J}] = [\eta'_{(b+1)J}],$$

то

$$(\alpha_{\Lambda M}\mu_{(M)\eta})\{\xi\} \leqslant K(\alpha_{\Lambda M}\mu_{(M)\eta'})\{\xi\}. \tag{5.4}$$

Сперва заметим, что если ζ, $\zeta' \in \Omega$ и $\zeta|\Lambda = \zeta'|\Lambda$, то

$$\exp[-U(\zeta|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta)] \leqslant K_1 \exp[-U(\zeta'|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta')],$$

где $K_1 = \exp[2 \times 2 \times (2|\Phi|_1 + J|\Phi|)]$. Поэтому

$$\sum_{\substack{\zeta^* \colon \zeta^*|\Lambda = \zeta, \\ \zeta^*|(\mathbb{Z}\setminus M) = \eta}} \exp[-U(\zeta^*|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta^*)] \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \sum_{\substack{\zeta^* \colon \zeta^*|\Lambda = \zeta, \\ \zeta^*|(\mathbb{Z}\setminus M) = \eta'}} \exp[-U(\zeta^*|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta^*)], \tag{5.5}$$

[3] Определение классов эквивалентности и порядка на них, аналогичное изложенному, является стандартным в теории цепей Маркова; см., например, Чунг [1], I, § 3.

где $K_2 = |\Omega_0|^{2J} K_1$. Просуммировав по ζ и поменяв местами η и η', получим

$$\sum_{\zeta^*:\ \zeta^*|(\mathbb{Z}\setminus M)=\eta} \exp[-U(\zeta^*|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta^*)] \geqslant$$
$$\geqslant (K_2)^{-1} \sum_{\zeta^*:\ \zeta^*|(\mathbb{Z}\setminus M)=\eta'} \exp[-U(\zeta^*|M) - W_{M,\mathbb{Z}\setminus M}(\zeta^*)]. \quad (5.6)$$

Деление (5.5) на (5.6) приводит к неравенству (5.4) с $K = (K_2)^2$.

5.5. Доказательство теорем 5.2 и 5.3

Для любых классов $[i]$ и $[j]$ определим функцию C на пространстве Ω равенством

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lim\limits_{n\to-\infty}[\xi_{nJ}] = [i] \text{ и } \lim\limits_{n\to+\infty}[\xi_{nJ}] = [j], \\ 0 \text{ в противном случае }. \end{cases}$$

Для всякой вероятностной меры σ на Ω функция C принадлежит алгебре на бесконечности (см. § 1.10) и, следовательно, если σ — чистое (= экстремальное) гиббсовское состояние, то эта функция почти всюду равна нулю или единице. Поэтому для любого чистого гиббсовского состояния σ, отвечающего взаимодействию $\Phi \in \mathscr{B}$, существуют такие (однозначно определенные) классы $[i]$ и $[j]$, что σ-почти всюду

$$\lim_{n\to-\infty}[\xi_{nJ}] = [i], \quad \lim_{n\to+\infty}[\xi_{nJ}] = [j].$$

Предположим сначала, что $[i] \neq [j]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\sigma\big(\{\xi\colon [\xi_{nJ}] = [i] \text{ для } n \leqslant -N \text{ и } [\xi_{nJ}] = [j] \text{ для } n \geqslant N\}\big) > 1 - \varepsilon.$$

Так как σ — гиббсовское состояние, мы можем оценить вероятность p_- того, что $[\xi_{-NJ}] = [i]$, в терминах $\mu_{(M)\eta}\{\xi\}$, где M — достаточно большой интервал с центром в точке $-NJ$ и

$$[\eta_{nJ}] = \begin{cases} [i] & \text{при } n < 0, \\ [j] & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

То же самое относится и к вероятности p_+ того, что $[\xi_{nJ}] = [i]$. Из леммы 5.4 с учетом трансляционной инвариантности Φ получим $p_- \leqslant K p_+$. Это неравенство несовместимо с неравенствами $p_- > 1 - \varepsilon$, $p_+ < \varepsilon$, если ε выбрано достаточно малым. Поэтому предположение $[i] \neq [j]$ необходимо отбросить.

Покажем теперь, что при $[i] = [j]$ существует только одно чистое гиббсовское состояние. Пусть Λ, M выбраны так же, как в лемме 5.4, и пусть $[\eta_{nJ}] = [\eta'_{nJ}] = [i]$ при всех n. Зафиксировав η', рассмотрим разность

$$\widetilde{\mu}_{(\Lambda)\eta}\{\xi\} = (\alpha_{\Lambda M}\mu_{(M)\eta})\{\xi\} - \frac{1}{K}(\alpha_{\Lambda M}\mu_{(M)\eta'})\{\xi\} \geqslant 0.$$

Тогда

$$||\widetilde{\mu}_{(\Lambda)\eta}|| = \sum_{\xi\in\Omega_\Lambda} \widetilde{\mu}_{(\Lambda)\eta}\{\xi\} = 1 - K^{-1}.$$

Если σ, σ' — гиббсовские состояния, то

$$\alpha_\Lambda(\sigma - \sigma')\{\xi\} = \int (\sigma_{\mathbb{Z}\setminus M}(d\eta) - \sigma'_{\mathbb{Z}\setminus M}(d\eta))\widetilde{\mu}_{(\Lambda)\eta}\{\xi\}.$$

Поэтому

$$||\sigma - \sigma'|| = \lim_{-a,\, b\to\infty} ||\alpha_\Lambda(\sigma - \sigma')|| \leqslant ||\sigma - \sigma'||(1 - K^{-1})$$

и, следовательно, $||\sigma - \sigma'|| = 0$.

Таким образом, мы показали, что для каждого чистого гиббсовского состояния σ на $(\Omega_0,\, t)$ существует такой класс $[i]$, что мера σ сосредоточена на множестве

$$\Omega^{[i]} = \{\xi \in \Omega\colon [\xi_{nJ}] = [i] \text{ при любом } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть ξ, $\xi' \in \Omega^{[i]}$ и $0 < a < J$; тогда $(t^a)_{i\xi_a} > 0$ и $(t^{J-a})_{\xi'_a i'} > 0$ для некоторых i, $i' \in [i]$. Так как $(t^J)_{i'i} > 0$, мы имеем $(t^{2J})_{\xi'_a\xi_a} > 0$. Отсюда видно, что $\xi'_a \prec \xi_a$ и, следовательно, ξ_a и ξ'_a принадлежат одному и тому же классу $[j]$. Тем самым, $\tau^a\Omega^{[i]} \subset \Omega^{[j]}$. Аналогичным образом, $\tau^{J-a}\Omega^{[j]} \subset \Omega^{[i]}$, так что $\tau^a\Omega^{[i]} = \Omega^{[j]}$.

Пусть α — множество таких классов $[j]$, что $\Omega^{[j]} = \tau^a\Omega^{[i]}$ при $a \in \mathbb{Z}$ (или, что то же самое, $0 \leqslant a < J$). Если $[j]$, $[k] \in \alpha$ и $[j] \prec [k]$, то, как мы покажем, $[j] = [k]$. Действительно, найдется такое a, $0 \leqslant a < J$, что $\tau^a\Omega^{[k]} = \Omega^{[j]}$ и, следовательно, $(t^a)_{kj} > 0$ при некоторых $j \in [j]$, $k \in [k]$. С другой стороны, $[j] \prec [k]$ означает, что $(t^J)_{jk} > 0$. Но тогда $(t^{(l+1)a+lJ})_{kj} > 0$ при всех целых $l \geqslant 0$. Взяв $l = J-1$, получим $k \prec j$ и, значит, $[j] = [k]$. Таким образом, мы доказали, что *различные классы* $[j]$, $[k] \in \alpha$ *несравнимы*.

Обозначим через $\Omega_0^{(\alpha)} \subset \Omega_0$ объединение классов $[j] \in \alpha$. Пусть $t^{(\alpha)}$ — ограничение матрицы t на множество $\Omega_0^{(\alpha)} \times \Omega_0^{(\alpha)}$. Положим

$$\Omega^{(\alpha)} = \{\xi \in (\Omega_0^{(\alpha)})^{\mathbb{Z}} \colon t^{(\alpha)}_{\xi_x\xi_{x+1}} = 1 \text{ для всех } x \in \mathbb{Z}\}$$

и введем отображение вложения $F^{(\alpha)}\colon \Omega^{(\alpha)} \mapsto \Omega$. Пусть $\xi \in F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$ и $\lim\limits_{n\to-\infty}[\xi_{nJ}] = [j]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}[\xi_{nJ}] = [k]$. Тогда $[j] \prec [k]$ и, следовательно, $[j] = [k]$, $\xi \in \Omega^{[j]}$. Поэтому

$$F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)} = \bigcup_{[j]\in\alpha} \Omega^{[j]}. \tag{5.7}$$

Теперь мы можем доказать теорему 5.2. Прежде всего ясно, что для любых j, $k \in \Omega_0^{(\alpha)}$ найдется такое $a > 0$, что $(t^a)_{jk} > 0$ и, значит, система $(\Omega_0^{(\alpha)}, t^{(\alpha)})$ транзитивна. Легко видеть, что $F^{(\alpha)}$ является $\mathbb{Z}$-морфизмом; здесь главное — проверить, что если $\xi \in \Omega^{(\alpha)}$, то $\Sigma_{F^{(\alpha)}\xi} \subset F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$. Так как в силу (5.7) можно предположить, что $F^{(\alpha)}\xi \in \Omega^{[j]}$, мы действительно получаем $\Sigma_{F^{(\alpha)}\xi} \subset \Omega^{[i]} \subset F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$.

Различные множества α классов $[i]$ можно считать непересекающимися, что доказывает п. (a) теоремы 5.2. Вспомним теперь, что носитель каждого чистого гиббсовского состояния для взаимодействия $\Phi \in \mathscr{B}_1$ на Ω содержится в одном из множеств $\Omega^{[i]}$ и, следовательно, в одном из множеств $F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$. Поэтому ограничение такого состояния на $\Omega^{(\alpha)}$ является гиббсовским состоянием для ограничения взаимодействия Φ на множество $\bigcup\{\Omega_X^{(\alpha)}\colon X \text{ конечно}\}$, т. е. для $F^{(\alpha)*}\Phi$. Это доказывает утверждение (b). Утверждение (c) доказывается непосредственно.

Для доказательства теоремы 5.3 предположим, что система (Ω_0, t) транзитивна, т. е. что имеется только одно α и $\Omega = \Omega^{(\alpha)}$. Пусть N — число различных классов $[j]$ в α. Тогда множества $\Omega^{[j]}$ циклически переставляются под действием τ с периодом N и (5.7) принимает вид

$$\Omega = \bigcup_{\beta=0}^{N-1} \tau^{-\beta}\Omega^{[i]}. \tag{5.8}$$

Отображение $x \mapsto Nx$ является изоморфизмом группы $\mathbb{Z}$ на ее подгруппу $N\mathbb{Z}$. Ограничение $\mathbb{Z}$ на $N\mathbb{Z}$ в (Ω_0, t) дает $N\mathbb{Z}$-решетчатую систему, которую (ввиду изоморфизма $\mathbb{Z} \mapsto N\mathbb{Z}$) можно рассматривать как $\mathbb{Z}$-решетчатую систему (Ω_0^*, t^*). Здесь $\Omega_0^* = \Omega_{[0,\,N)}$ и если $\xi, \xi' \in \Omega_0^*$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{N-1})$, $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_{N-1})$, мы полагаем $t^*_{\xi\xi'} = t_{\xi_{N-1}\xi'_0}$. При $\beta = 0, 1, \ldots, N-1$ положим $\Omega_0^{(\beta)} = \{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) \in \Omega_0^* \colon \xi_\beta \in [i]\}$. Если ξ, ξ' принадлежат различным $\Omega_0^{(\beta)}$, то $t^*_{\xi\xi'} = 0$. Пусть $t^{(\beta)}$ — ограничение t^* на $\Omega_0^{(\beta)} \times \Omega_0^{(\beta)}$. Положим

$$\Omega^{(\beta)} = \{\xi \in (\Omega_0^{(\beta)})^{\mathbb{Z}} \colon t^{(\beta)}_{\xi_x\xi_{x+1}} = 1 \text{ при всех } x \in \mathbb{Z}\}$$

и пусть $F^{(\beta)} \colon \Omega^{(\beta)} \mapsto \Omega$ — отображение вложения. Тогда

$$F^{(\beta)}\Omega^{(\beta)} = \tau^{-\beta}\Omega^{[i]} = \Omega^{[j]}$$

при некотором $[j]$. Так как N — делитель J, система $(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$ является перемешивающей в силу определения классов эквивалентности $[j]$. Теперь утверждение (a) теоремы 5.3 следует из (5.8). Чтобы доказать (b), заметим, что если $\Phi \in \mathscr{B}_1(\Omega_0, t)$, то соответствующее взаимодействие Φ^* на (Ω^*, t^*) принадлежит $\mathscr{B}_1(\Omega_0^*, t^*)$. Поэтому достаточно применить теорему 5.2(b) и доказанное выше утверждение, что чистое гиббсовское состояние сосредоточено на некотором $\Omega^{[j]}$. Утверждение (c) доказывается непосредственно.

5.6. Следствия теорем 5.2 и 5.3

Пусть $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ — *$\mathbb{Z}$-решетчатая система и* Φ — *взаимодействие из* $\mathscr{B}_1$. *Тогда*

(a) *если система* $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ *транзитивна, то существует единственное равновесное состояние*[4]*, которое совпадает с единственным трансляционно-инвариантным гиббсовским состоянием*; *его носителем является все пространство* Ω;

(b) *если система* $(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ — *перемешивающая, то существует единственное гиббсовское состояние*;

(c) *в условиях теоремы* 5.2 (*при* $A \in \mathscr{C}$)

$$P^\Phi = \max_\alpha P^{F^{(\alpha)*}\Phi}, \quad P(A) = \max_\alpha P(A \circ F^{(\alpha)});$$

[4]Единственность равновесного состояния можно доказать при несколько меньших ограничениях на функцию A, чем условие $A = A_\Phi$, $\Phi \in \mathscr{B}_1$. См. § 7.14.

(d) *в условиях теоремы* 5.3 *при всех* β

$$P^{\Phi} = N^{-1} P^{F^{(\beta)*}\Phi^*}, \quad P(A) = N^{-1} P((A + A \circ \tau + \ldots + A \circ \tau^{N-1}) \circ F^{(\beta)}).$$

В транзитивном случае инвариантное гиббсовское состояние обязано иметь вид

$$\frac{1}{N} \sum_{\beta=0}^{N-1} \tau^{-\beta} \sigma,$$

где σ — гиббсовское состояние, имеющее носитель в $\Omega^{[i]}$, и, следовательно, единственное. В силу замечания 1.14 $\operatorname{supp} \sigma = \Omega^{[i]}$. Таким образом, существует самое большее одно инвариантное гиббсовское состояние, и его носитель совпадает с Ω. Так как всегда существует по крайней мере одно равновесное состояние, из теоремы 4.2 вытекает утверждение (a). Утверждение (b) доказывается непосредственно, а утверждение (c) вытекает из вариационного принципа для P (см. теорему 3.12) и предложения 4.12(a). Наконец, утверждение (d) следует из (c) и предложения 4.14(b).

5.7. Теорема

Пусть Φ, $\Phi' \in \mathscr{B}_1$ *для транзитивной* $\mathbb{Z}$*-решетчатой системы и* ρ, ρ' — *соответствующие равновесные состояния. Тогда* $\rho = \rho'$, *если и только если существуют такие* $c \in \mathbb{R}$ *и* $C \in \mathscr{C}$, *что*

$$A_{\Phi'} - A_{\Phi} = c + C \circ \tau - C. \tag{5.9}$$

В этой формуле постоянная с однозначно определяется по разности $\Phi' - \Phi$, *а функция* C — *с точностью до аддитивной постоянной.*

Если выполняется (5.9), то $P(A_{\Phi'} + B) = P(A_{\Phi} + B) + c$ для всех $B \in \mathscr{C}$ (теорема 3.4) и, следовательно, $\rho = \rho'$ (теорема 3.7).

Обратно, пусть $\rho = \rho'$. Вследствие выпуклости P мера ρ является равновесным состоянием для $(1-t)\Phi + t\Phi'$ при всех $t \in [0, 1]$. Таким образом, мы оказываемся в ситуации параграфа 4.6: мера ρ — гиббсовское состояние для $(1-t)\Phi + t\Phi'$ при $t \in [0, 1]$ и, следовательно, при всех действительных t (последнее доказывается с помощью аналитического продолжения). Так как ρ — трансляционно-инвариантное гиббсовское состояние и наша $\mathbb{Z}$-решетчатая система транзитивна, следствие 5.6(a) показывает, что мера ρ — равновесное состояние для $(1-t)\Phi + t\Phi'$ при всех действительных t.

Пусть $\Psi = \Phi' - \Phi$ и $c = \rho(A_\Psi)$. Тогда

$$\max_{\sigma\in I}[s(\sigma) + \sigma(A_\Phi) + t\sigma(A_\Psi)] = s(\rho) + \rho(A_{\Phi+t\Psi}) = P^\Phi + ct$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\sigma(A_\Psi) = c$ для всех $\sigma \in I$, или

$$A_{\Phi'} - A_\Phi = c + B, \tag{5.10}$$

где $\sigma(B) = 0$ при всех $\sigma \in I$. В частности, если точка $\xi \in \Omega$ имеет период n, то

$$\sum_{j=0}^{n-1} B(\tau^j\xi) = 0. \tag{5.11}$$

Так как наша $\mathbb{Z}$-решетчатая система транзитивна, существует точка $\eta \in \Omega$ с плотной орбитой $\Gamma = \{\tau^k\eta\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Определим на Γ функцию C равенством

$$C(\tau^k\eta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} B(\tau^i\eta), \text{ если } k \geqslant 0, \\ \displaystyle -\sum_{j=k}^{-1} B(\tau^j\eta), \text{ если } k < 0. \end{cases}$$

Пусть $\eta', \eta'' \in \Gamma$ и $\eta'_x = \eta''_x$ при $|x| \leqslant m$. Если $\eta' = \tau^k\eta$, $\eta'' = \tau^l\eta$ и $k < l$, то

$$C(\eta'') - C(\eta') = \sum_{j=k}^{l-1} B(\tau^j\eta)$$

и $\eta_{k+x} = \eta_{l+x}$ при $|x| \leqslant m$. Для достаточно большого m существует $\xi \in \Omega$, для которого $\tau^{l-k}\xi = \xi$ и $\xi_x = \eta_x$ при $k - m \leqslant x \leqslant l + m$. Используя (5.11), получаем

$$C(\eta'') - C(\eta') = \sum_{j=k}^{l-1}[B(\tau^j\eta) - B(\tau^j\xi)].$$

Если $(\tau^j\eta)_x = (\tau^j\xi)_x$ при $|x| \leqslant r$, то

$$|B(\tau^j\eta) - B(\tau^j\xi)| = |A_\Psi(\tau^j\eta) - A_\Psi(\tau^j\xi)| \leqslant \\ \leqslant 2 \sum_{X\ni 0\colon\ \operatorname{diam} X > r} \frac{1}{|X|} \sup_{\xi\in\Omega_X} |\Psi(\xi)|. \tag{5.12}$$

Поэтому

$$|C(\eta'') - C(\eta')| \leqslant 4 \sum_{r=m}^{\infty} \sum_{X \ni 0:\ \operatorname{diam} X > r} \frac{1}{|X|} \sup_{\xi \in \Omega_X} |\Psi(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{X \ni 0:\ \operatorname{diam} X > m} \frac{\operatorname{diam} X}{|X|} \sup_{\xi \in \Omega_X} |\Psi(\xi)|.$$

Так как $\Psi \in \mathscr{B}_1$, последнее выражение мало, если m велико. Отсюда следует, что C продолжается до непрерывной функции на Ω. Очевидно,

$$C \circ \tau - C = B.$$

Поэтому (5.9) вытекает из (5.10).

Из построения видно, что постоянная c единственна, а функция C определяется с точностью до аддитивной константы.

5.8. Перемешивающие $\mathbb{Z}$-решетчатые системы

На основании теорем 5.2 и 5.3 мы можем сосредоточить внимание на перемешивающих $\mathbb{Z}$-решетчатых системах. Итак, будем считать, что система (Ω_0, t) перемешивает. Обозначим через $\mathbb{Z}_\geqslant$, $\mathbb{Z}_\leqslant$, $\mathbb{Z}_>$ и $\mathbb{Z}_<$ множества целых чисел, которые соответственно $\geqslant 0$, $\leqslant 0$, > 0 и < 0. Положим

$$\Omega_\geqslant = \{\xi \in (\Omega_0)^{\mathbb{Z}_\geqslant} : t_{\xi_x \xi_{x+1}} = 1 \text{ при всех } x \in \mathbb{Z}_\geqslant\}$$

и аналогичным образом определим $\Omega_\leqslant$, $\Omega_>$, $\Omega_<$. Ограничив $\Phi \in \mathscr{B}_1(\Omega_0, t)$ на подмножества пространств $\mathbb{Z}_\geqslant$, $\mathbb{Z}_\leqslant$, $\mathbb{Z}_>$, $\mathbb{Z}_<$, получим взаимодействия $\Phi_\geqslant$, $\Phi_\leqslant$, $\Phi_>$, $\Phi_<$.

5.9. Лемма

(a) *Существует единственное гиббсовское состояние $\sigma_\geqslant$ (соответственно, $\sigma_\leqslant$, $\sigma_>$, $\sigma_<$) на пространстве $\Omega_\geqslant$ (соответственно, на $\Omega_\leqslant$, $\Omega_>$, $\Omega_<$) для взаимодействия $\Phi_\geqslant$ (соответственно, для $\Phi_\leqslant$, $\Phi_>$, $\Phi_<$).*

(b) *Существует такое $K > 0$, что*

$$\sigma_\leqslant(d\xi_\leqslant) \times \sigma_>(d\xi_>) \exp[-W_{\mathbb{Z}_\leqslant, \mathbb{Z}_>}(\xi_\leqslant \vee \xi_>)] = K\sigma(d(\xi_\leqslant \vee \xi_>)),$$

где σ — единственное гиббсовское состояние для взаимодействия Φ на Ω.

(c) *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n(\varepsilon)$, что если $B \in \mathscr{C}(\Omega_\leqslant \times \Omega_>)$, $||B|| \leqslant 1$ и $B(\xi_\leqslant, \xi_>)$ не зависит от ξ_x при $|x| < n(\varepsilon)$, то*

$$\Big| \int \sigma(d(\xi_\leqslant \vee \xi_>))B(\xi_\leqslant, \xi_>) - \\ - \iint \sigma(d(\xi'_\leqslant \vee \xi'_>))\sigma(d(\xi''_\leqslant \vee \xi''_>))B(\xi'_\leqslant, \xi''_>) \Big| < \varepsilon.$$

Утверждение (a) доказывается так же, как единственность гиббсовского состояния с носителем в $\Omega^{[i]}$, (см. § 5.5 и лемму 5.4), но с заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_\geqslant$ (соответственно, $\mathbb{Z}_\leqslant$, $\mathbb{Z}_>$, $\mathbb{Z}_<$) и $[i]$ — на Ω_0.

Так как $\Phi\mathscr{B}_1$, функция $\exp[-W_{\mathbb{Z}_\leqslant, \mathbb{Z}_>}]$ непрерывна взаимодействия на множестве $\Omega_\leqslant \times \Omega_>$. Отсюда, пользуясь определением гиббсовского состояния, получаем утверждение (b).

Рассмотрим решетчатую систему $(L, (\Omega_x)_{x\in L}, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, где $L = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_\leqslant \cup \mathbb{Z}_>$, $\Omega_x = \Omega_0$,

$$\mathscr{F} = \{\{x, x+1\} \colon x \in \mathbb{Z} \text{ и } x \neq 0\},$$

$$\overline{\Omega}_{\{x, x+1\}} = \{(\xi_x, \xi_{x+1}) \colon t_{\xi_x \xi_{x+1}} = 1\}.$$

Пространством конфигураций этой системы служит $\Omega_\leqslant \times \Omega_>$, а взаимодействие Φ^* определим равенством $\Phi^*(\xi|X) = \Phi(\xi|X)$ при $X \subset \mathbb{Z}_\leqslant$ или $X \subset \mathbb{Z}_>$ и равенством $\Phi^*(\xi|X) = 0$ в противном случае. В силу определения гиббсовского состояния и утверждения (a) существует только одно гиббсовское состояние для Φ^*, а именно, $\sigma_\leqslant \otimes \sigma_>$ (обобщение этой конструкции см. в упражнении 4 главы 2).

Теперь можно применить теорему 1.11(C) с функцией

$$A(\xi_\leqslant, \xi_>) = \frac{2}{K\varepsilon} \exp\big[-W(\xi_\leqslant \vee \xi_>)\big],$$

где $W = W_{\mathbb{Z}_\leqslant, \mathbb{Z}_>}$. Из утверждения (b) следует, что если $B \in \mathscr{C}(\Omega_\leqslant \times \Omega_>)$, $||B|| \leqslant 1$ и $B(\xi)$ не зависит от ξ_x при $|x| < n$, то при достаточно больших n

$$\Big| \int \sigma(d(\xi_\leqslant \vee \xi_>))B(\xi_\leqslant, \xi_>) - \iint \sigma_\leqslant(d\xi_\leqslant)\sigma_>(d\xi_>)B(\xi_\leqslant, \xi_>) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.13)$$

Аналогичным образом, положив

$$A(\xi'_\leqslant, \xi'_>) = \frac{2}{K^2\varepsilon} \Big[\int \sigma_>(d\xi'_>) \exp\big[-W(\xi'_\leqslant \vee \xi'_>)\big]\Big] \times \\ \times \Big[\int \sigma_\leqslant(d\xi''_\leqslant) \exp\big[-W(\xi''_\leqslant \vee \xi''_>)\big]\Big],$$

получим при достаточно больших n

$$\Big| \iint \sigma_{\leqslant}(d\xi_{\leqslant})\sigma_{>}(d\xi_{>})B(\xi_{\leqslant},\, \xi_{>}) - \\ - \iint \sigma(d(\xi'_{\leqslant} \vee \xi'_{>}))\sigma(d(\xi''_{\leqslant} \vee \xi''_{>}))B(\xi'_{\leqslant},\, \xi''_{>}) \Big| < \varepsilon/2. \quad (5.14)$$

Сравнение (5.13) с (5.14) дает (c).

5.10. Теорема[5]

Пусть Φ — взаимодействие из класса $\mathscr{B}_1$ для перемешивающей $\mathbb{Z}$-решетчатой системы $(\Omega_0,\, t)$ и σ — единственное гиббсовское состояние. Если Ω содержит больше одной точки, то динамическая система $(\Omega,\, \sigma,\, \tau)$ изоморфна сдвигу Бернулли.

Очевидно, множества $\mathfrak{A}_i = \{\xi \in \Omega\colon \xi_0 = i\}$ образуют некоторое разбиение $\mathfrak{A}$ пространства Ω. Согласно теореме Фридмана – Орнстейна (см. приложение A.4.6) достаточно показать, что разбиение $\mathfrak{A}$ является слабо-бернуллиевским для системы $(\Omega,\, \sigma,\, \tau)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n(\varepsilon)$ и $k,\, l \geqslant 0$

$$\sum_{\eta,\, \zeta} |(\alpha_{[-n-k,\, -n]\cup[n,\, n+l]}\sigma)\{\eta \vee \zeta\} - \\ - (\alpha_{[-n-k,\, -n]}\sigma)\{\eta\} \cdot (\alpha_{[n,\, n+l]}\sigma)\{\zeta\}| < \varepsilon. \quad (5.15)$$

Пусть $\widehat{B}(\eta \vee \zeta)$ равно ± 1 в зависимости от знака разности в левой части (5.15). Если $\xi_{\leqslant}|[-n-k,\, -n] = \eta$ и $\xi_{>}|[n,\, n+l] = \zeta$, положим $B(\xi_{\leqslant},\, \xi_{>}) = \widehat{B}(\eta \vee \zeta)$. При таком выборе функции B неравенство (5.15) вытекает из леммы 5.9(c).

5.11. Трансфер-матрица и оператор $\mathscr{L}$

Представим $\xi_{\geqslant} \in \Omega_{\geqslant}$ в виде $\xi_{\geqslant} = \xi_0 \vee \xi_{>}$, где $\xi_0 \in \Omega_0$, $\xi_{>} \in \Omega_{>}$, и по заданной мере μ на $\Omega_{>}$ определим меру $\mathfrak{M}^*\mu$ на $\Omega_{\geqslant}$ равенством

$$(\mathfrak{M}^*\mu)(A) = \sum_{\xi_0} \int \mu(d\xi_{>})A(\xi_0 \vee \xi_{>}) \exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\, \mathbb{Z}_{>}}(\xi_0 \vee \xi_{>})].$$

[5] См. Галавотти [1], Ледрапье [1].

Из определения гиббсовского состояния вытекает, что мера $\mathfrak{M}^*\sigma_>$ пропорциональна гиббсовскому состоянию для $\Phi_\geqslant$ на $\Omega_\geqslant$. В этом можно убедиться следующим образом[6].

Введем статистические суммы

$$Z_{([0,\,n])\eta} = \sum_{\xi_{[0,\,n]} \in \Omega_{[0,\,n]}} \exp[-U_{[0,\,n]} - W_{[0,\,n],\,[n+1,\,\infty)}(\xi_{[0,\,n]} \vee \eta)],\ \eta \in \Omega_{[n+1,\,\infty)},$$

$$Z_{([1,\,n])\eta} = \sum_{\xi_{[1,\,n]} \in \Omega_{[1,\,n]}} \exp[-U_{[1,\,n]} - W_{[1,\,n],\,[n+1,\,\infty)}(\xi_{[1,\,n]} \vee \eta)],\ \eta \in \Omega_{[n+1,\,\infty)}.$$

Положим $\sigma^* = \mathfrak{M}^*\sigma_>$. Из определения σ^* и $\sigma_>$ непосредственно выводится, что при всех n

$$\sigma^*(1) = \int (\alpha_{[n+1,\,\infty)}\sigma_>)(d\eta) Z_{([0,\,n])\eta}/Z_{([1,\,n])\eta}$$

и при всех $\xi_{[0,\,n]} \in \Omega_{[0,\,n]}$

$$(\alpha_{[0,\,n]}\sigma^*)\{\xi_{[0,\,n]}\} = \int (\alpha_{[n+1,\,\infty)}\sigma_>)(d\eta) \times \\ \times \frac{\exp[-U_{[0,\,n]} - W_{[0,\,n],\,[n+1,\,\infty)}(\xi_{[0,\,n]} \vee \eta)]}{Z_{([0,\,n])\eta}} \frac{Z_{([0,\,n])\eta}}{Z_{([1,\,n])\eta}}.$$

Отсюда видно, что для вероятностной меры $\sigma = \sigma^*/\sigma^*(1)$ при $\Lambda = [0,\,n]$ выполняются соотношения (1.14), (1.15), в первом из которых роль $\sigma_{L\setminus\Lambda}$ играет вероятностная мера $(\alpha_{[n+1,\,\infty)}\sigma_>)(d\eta)\dfrac{1}{\sigma^*(1)}\left(\dfrac{Z_{([0,\,n])\eta}}{Z_{([1,\,n])\eta}}\right)$. Но если это верно для $\Lambda = [0,\,n]$, то верно и для любого $\Lambda \subset [0,\,n]$ (ср. § 1.6). Поэтому в соответствии с определением из § 1.5 мера σ является гиббсовским состоянием для $\Phi_\geqslant$ на $\Omega_\geqslant$.

Тогда, по лемме 5.9(a),

$$\mathfrak{M}^*\sigma_> = \lambda\sigma_\geqslant$$

при некотором $\lambda > 0$. Определим отображение $\tau^{-1}\colon \Omega_\geqslant \mapsto \Omega_>$, следуя параграфу 3.1. Очевидно, $\tau^{-1}\sigma_\geqslant = \sigma_>$. Пусть $\mathscr{L}^* = \tau^{-1}\mathfrak{M}^*$. Тогда

$$\mathscr{L}^*\sigma_> = \lambda\sigma_>. \tag{5.16}$$

[6] Приводимое ниже рассуждение добавлено при переводе. — *Прим. ред.*

Оператор $\mathscr{L}^*$, действующий на меры, называется *трансфер-матрицей*. Сопряженный к нему оператор $\mathscr{L}$ на $\mathscr{C}(\Omega_>)$ определяется равенством

$$(\mathscr{L}A)(\xi_>) = \sum_{\xi_0} A(\tau^{-1}(\xi_0 \vee \xi_>)) \exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\,\mathbb{Z}_>}(\xi_0 \vee \xi_>)].$$

Заметим, что

$$\mathscr{L}[A \cdot (B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>\mathbb{Z}_\geqslant} \circ \tau)] = (\mathscr{L}A) \cdot B \tag{5.17}$$

для любых A, $B \in \mathscr{C}(\Omega_>)$.

Как мы увидим в дальнейшем, изучение оператора $\mathscr{L}$ приведет к важным результатам, касающимся гиббсовских состояний и давления экспоненциально убывающих взаимодействий.

5.12. Функция $\psi_>$

Определим на пространстве $\Omega_>$ функцию $\psi_>$, положив

$$\psi_>(\xi_>) = \frac{1}{K} \int \sigma_\leqslant(d\xi_\leqslant) \exp[-W_{\mathbb{Z}_\leqslant,\mathbb{Z}_>}(\xi_\leqslant \vee \xi_>)],$$

где K — постоянная из леммы 5.9(b). В силу этой леммы при всех $A \in \mathscr{C}(\Omega_>)$

$$\sigma_>(\psi_> \cdot A) = \sigma(A \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}); \tag{5.18}$$

в частности, $\sigma_>(\psi_>) = 1$.

Так как система (Ω_0, t) — перемешивающая и $\sigma_\leqslant$ — гиббсовское состояние для $\Phi_\leqslant$ (соответственно, $\sigma_>$ — гиббсовское состояние для $\Phi_>$), мы знаем, что

$$\operatorname{supp} \sigma_\leqslant = \Omega_\leqslant, \quad \operatorname{supp} \sigma_> = \Omega_> \tag{5.19}$$

(см. замечание 1.14). Из определения $\psi_>$ видно, что

$$d^{-1} \leqslant \psi_>(\xi_>) \leqslant d \tag{5.20}$$

при некотором $d > 0$.[7]

В силу (5.17) и (5.18)

$$\begin{aligned}\sigma_>((\mathscr{L}\psi_>) \cdot B) &= \sigma_>(\mathscr{L}[\psi_> \cdot (B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>\mathbb{Z}_\geqslant} \circ \tau)]) = \\ &= \lambda\sigma_>(\psi_> \cdot (B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>\mathbb{Z}_\geqslant} \circ \tau)) = \lambda\sigma(B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}) = \sigma_>((\lambda\psi_>) \cdot B),\end{aligned}$$

[7] См. (5.3). — *Прим. ред.*

откуда, используя (5.19), получаем

$$\mathscr{L}\psi_> = \lambda\psi_>. \tag{5.21}$$

5.13. Предложение

Для собственного значения λ *операторов* $\mathscr{L}$ *и* $\mathscr{L}^*$, *определенного в* (5.21) *и* (5.16), *справедливо соотношение*

$$\log\lambda = P^\Phi.$$

В силу (5.20) и теоремы 3.4

$$\log\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathscr{L}^n\psi_>(\xi_>) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathscr{L}^n 1)(\xi_>) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{\xi_{-n+1}\,\dots\,\xi_0}\exp[-U_{\{-n+1,\,\dots,\,0\}}(\xi_{-n+1}\vee\,\dots\,\vee\xi_0) -$$
$$- W_{\{-n+1,\,\dots,\,0\},\,\mathbb{Z}_>}(\xi_{-n+1}\vee\,\dots\,\vee\xi_0\vee\xi_>)] = P^\Phi.$$

5.14. Оператор $\mathscr{S}$

Ввиду (5.20) равенство

$$\mathscr{S}A = (\psi_>)^{-1}\cdot\lambda^{-1}\mathscr{L}(\psi_>\cdot A)$$

определяет ограниченный оператор $\mathscr{S}$ на $\mathscr{C}(\Omega_>)$. Очевидно,

$$\mathscr{S}1 = 1,$$

$$(A\geqslant 0)\Longrightarrow(\mathscr{S}A\geqslant 0)$$

и, следовательно,

$$||\mathscr{S}|| = 1.$$

Заметим также, что в силу (5.17)

$$\mathscr{S}^n[A\cdot(B\circ(\alpha_{\mathbb{Z}_>\mathbb{Z}_\geqslant}\circ\tau)^n)] = (\mathscr{S}^n A)\cdot B, \tag{5.22}$$

если $B\in\mathscr{C}(\Omega_>)$.

5.15. Лемма

Функции

$$\xi_{>} \mapsto \frac{1}{K \cdot \psi_{>}(\xi_{>})} \int \sigma_{\leqslant}(d\xi_{\leqslant}) A(\xi_{\leqslant}) \exp[-W_{\mathbb{Z}_{\leqslant},\mathbb{Z}_{>}}(\xi_{\leqslant} \vee \xi_{>})],$$

где $A \in \mathscr{C}(\Omega_{\leqslant})$ *и* $||A|| \leqslant 1$*, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на пространстве* $\Omega_{>}$*.*

Пусть Δ *— множество таких функций. Тогда* $\mathscr{S}^n B \in \Delta$*, если* $B \in \mathscr{C}(\Omega_{>})$*,* $||B|| \leqslant 1$ *и* $B(\xi_{>})$ *зависит только от* $\xi_1, \ldots, \xi_n$*.*

Отображение $\Omega_{>} \mapsto \mathscr{C}(\Omega_{\leqslant})$, определенное соответствием

$$\xi_{>} \mapsto \exp[-W_{\mathbb{Z}_{\leqslant},\mathbb{Z}_{>}}(\cdot \vee \xi_{>})],$$

непрерывно. Отсюда следует ограниченность и равностепенная непрерывность. Включение $\mathscr{S}^n B \in \Delta$ проверяется прямым вычислением.

5.16. Предложение

Если $B \in \mathscr{C}(\Omega_{>})$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}^n B = \sigma(B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}}), \tag{5.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \mathscr{L}^n B = \sigma_{>}(B) \cdot \psi_{>}, \tag{5.24}$$

причем сходимость равномерна на компактных подмножествах пространства $\mathscr{C}(\Omega_{>})$*, в частности, на* Δ*.*

Так как $||\mathscr{S}|| = 1$, достаточно доказать (5.23) в предположении, что $B(\xi_{>})$ зависит только от $\xi_1, \ldots, \xi_N$, где N — некоторое натуральное число. В этом случае по лемме 5.15 последовательность $(\mathscr{S}^n B)$ имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\overline{B}$ — ее предел. Используя сначала (5.22), затем тот факт, что σ — чистое гиббсовское состояние, и теорему 1.11, и наконец (5.18), получим для всех $C \in \mathscr{C}(\Omega_{>})$

$$\begin{aligned}
\sigma_{>}(\psi_{>} \cdot \overline{B} \cdot C) &= \lim \sigma_{>}(\psi_{>} \cdot \mathscr{S}^n B \cdot C) = \\
&= \lim \sigma_{>}(\psi_{>} \cdot \mathscr{S}^n [B \cdot (C \circ (\alpha_{\mathbb{Z}_{>}\mathbb{Z}_{\geqslant}} \circ \tau)^n)]) = \\
&= \lim \sigma_{>}(\psi_{>} \cdot B \cdot (C \circ (\alpha_{\mathbb{Z}_{>}\mathbb{Z}_{\geqslant}} \circ \tau)^n)) = \\
&= \lim \sigma((B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}}) \cdot (C \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}} \circ \tau^n)) = \\
&= \sigma(B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}}) \cdot \sigma(C \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}}) = \sigma(B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_{>}}) \cdot \sigma_{>}(\psi_{>} \cdot C).
\end{aligned}$$

Из (5.19) и (5.20) теперь следует, что $\overline{B}$ — константа: $\overline{B} = \sigma(B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>})$, и мы приходим к соотношению (5.23), а из него непосредственно вытекает (5.24).

Так как $||\mathscr{S}^n|| = 1$ при любом $n > 0$, сходимость в (5.23) и (5.24) равномерна на компактных множествах.

5.17. Замечание

Множество $X \subset \mathbb{Z}$ будем называть (конечным) *интервалом*, если $X = [k, l] = \{x\colon k \leqslant x \leqslant l\}$. Для любого $\Phi \in \mathscr{B}_1$ найдется такое $\Phi_* \in \mathscr{B}_1$, что

(a) $\Phi_*(\xi|X) = 0$, если X не является интервалом,

(b) $U_\Lambda^\Phi = U_\Lambda^{\Phi_*}$, если Λ — интервал,

(c) $W_{\Lambda,\,M}^\Phi = W_{\Lambda,\,M}^{\Phi_*}$, если Λ и M — интервалы,

(d) $||\Phi_*|| = ||\Phi_*||_1 \leqslant ||\Phi||_1$.

Действительно, пусть Φ_* удовлетворяет условию (a) и $\Phi_*(\xi|[k,\, l])$ равно сумме величин $\Phi(\xi|X)$ по всем множествам X, для которых k и l являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами. Тогда свойства (b) и (c) очевидны, а (d) вытекает из (5.1) и (5.2).

С учетом (b), (c) и (d) для целей данной главы было бы достаточно использовать вместо пространства $\mathscr{B}_1$ подпространство $\mathscr{B}_* \subset \mathscr{B}$, состоящее из взаимодействий, удовлетворяющих условию (a).

5.18. Экспоненциально убывающие взаимодействия

Пусть $\mathscr{B}^\theta = \mathscr{B}^\theta(\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$, где $0 < \theta < 1$, — банахово пространство трансляционно-инвариантных взаимодействий Φ, для которых $\Phi(\xi|X) = 0$, если X — не интервал, с нормой

$$||\Phi||_\theta = \sup_X \theta^{-\operatorname{diam} X} \sup_{\xi\in\Omega_X} |\Phi(\xi)| < \infty. \tag{5.25}$$

Такие взаимодействия мы будем называть *экспоненциально убывающими*. Если разрешить Φ принимать комплексные значения, мы получим вместо $\mathscr{B}^\theta$ комплексное банахово пространство $\mathscr{B}^\theta_{\mathbb{C}}$ с нормой (5.25).

Заметим, что $\mathscr{B}^\theta \subset \mathscr{B}_1$ и

$$||\cdot||_1 \leqslant (1-\theta)^{-2} ||\cdot||_\theta.$$

Если $\theta \leqslant \theta'$, то $\mathscr{B}^\theta \subset \mathscr{B}^{\theta'}$ и $||\cdot||_\theta \geqslant ||\cdot||_{\theta'}$.

Если множество $M(0)$ в определении $\mathbb{Z}$-морфизма $F\colon (\mathbb{Z}, \Omega_0', (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'}) \mapsto (\mathbb{Z}, \Omega_0, (\overline{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{F}})$ является интервалом (такой выбор $M(0)$ всегда возможен) и $\Phi \in \mathscr{B}^\theta$, то $F^*\Phi \in \mathscr{B}^\theta(\mathbb{Z}, \Omega_0', (\overline{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda'\in\mathscr{F}'})$. Нетрудно проверить, что ограничение $\mathbb{Z}$ на некоторую подгруппу $N\mathbb{Z}$ заменяет $\Phi \in \mathscr{B}^\theta$ на $\Phi^* \in \mathscr{B}^{\theta'}$, где $\theta' = \theta^N$. Поэтому можно применять теоремы 5.2 и 5.3, не покидая области экспоненциального убывающих взаимодействий. Учитывая это, мы часто будем ограничиваться перемешивающими $\mathbb{Z}$-решетчатыми системами.

Для последующего заметим, что отображение $\Phi \mapsto F^{(\beta)*}\Phi^*$ из теоремы 5.3 линейно и непрерывно на пространстве $\mathscr{B}^\theta(\Omega_0, t)$, переводит его в $\mathscr{B}^{\theta^N}(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$ и продолжается до $\mathbb{C}$-линейного непрерывного отображения $\mathscr{B}^\theta_\mathbb{C}(\Omega_0, t) \mapsto \mathscr{B}^{\theta^N}_\mathbb{C}(\Omega_0^{(\beta)}, t^{(\beta)})$.

5.19. Пространство $\mathscr{F}^\theta$ и связанные с ним пространства

Для $A \in \mathscr{C}$ (соответственно для $A \in \mathscr{C}(\Omega_>)$) положим

$$\operatorname{var}_n A = \sup\{|A(\xi) - A(\xi')|\colon \xi_x = \xi'_x \text{ при } |x| \leqslant n\}$$

(соответственно,

$$\operatorname{var}_n A = \sup\{|A(\xi_>) - A(\xi'_>)|\colon \xi_x = \xi'_x \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant n\}).$$

Обозначим через $\mathscr{F}^\theta$ (соответственно через $\mathscr{F}^\theta_>$) подпространство пространства $\mathscr{C}$ (соответственно $\mathscr{C}(\Omega_>)$), состоящее из функций A с

$$||A||_\theta = \sup_{n\geqslant 0}(\theta^{-2n-1}\operatorname{var}_n A) < \infty$$

(соответственно

$$||A||_\theta = \sup_{n\geqslant 1}(\theta^{-n}\operatorname{var}_n A) < \infty).$$

Эти величины определяют нормы на фактор-пространствах F^θ и $F^\theta_>$ пространств $\mathscr{F}^\theta$ и $\mathscr{F}^\theta_>$ по подпространству постоянных функций, причем F^θ и $F^\theta_>$ являются банаховыми пространствами относительно этих норм, а $\mathscr{F}^\theta$ и $\mathscr{F}^\theta_>$ — банаховыми пространствами относительно нормы

$$|||A|||_\theta = \max(||A||, ||A||_\theta).$$

Аналогичным образом можно определить комплексные банаховы пространства $\mathscr{F}^\theta_\mathbb{C}$, $\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}>}$, $F^\theta_\mathbb{C}$, $F^\theta_{\mathbb{C}>}$, состоящие из комплекснозначных функций.

5.20. Предложение

Образом пространства $\mathscr{B}^\theta$ при отображении $\Phi \mapsto A_\Phi$ является пространство $\mathscr{F}^\theta$.

Если $\xi_x = \xi'_x$ при $|x| \leqslant n$, то

$$A_\Phi(\xi) - A_\Phi(\xi') = \sum_X{}^{*} (\Phi(\xi'|X) - \Phi(\xi|X)),$$

где суммирование ведется по всем таким X, что 0 является «средним» элементом множества X в лексикографическом порядке (см. § 3.2) и $\operatorname{diam} X > 2n$. Поэтому

$$\operatorname{var}_n A_\Phi \leqslant \sum_{k=2n+1}^{\infty} 2||\Phi||_\theta \theta^k = \frac{2||\Phi||_\theta}{1-\theta} \cdot \theta^{2n+1}$$

и, следовательно, $A_\Phi \in \mathscr{F}^\theta$.

Обратно, если $A \in \mathscr{F}^\theta$, то $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathscr{C}_{[-n,\,n]}$ и $||A_n|| \leqslant \operatorname{var}_{n-1} A$ при $n > 0$. Поэтому $A = A_\Phi$, где $\Phi \in \mathscr{B}^\theta$ выбрано так, что $\Phi(\xi|[-n,\,n]) = -A_n(\xi)$ и $\Phi(\xi|X) = 0$, если X не получено сдвигом из некоторого интервала $[-n,\,n]$. Для дальнейшего заметим, что отображение $A \mapsto \Phi$ может быть выбрано линейным и, следовательно, имеющим $\mathbb{C}$-линейное непрерывное продолжение $\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}} \mapsto \mathscr{B}^\theta_{\mathbb{C}}$.

5.21. Теорема

Предположим, что система $(\Omega_0,\,t)$ транзитивна. Пусть $A,\,A' \in \mathscr{F}^\theta$ и $\rho,\,\rho'$ — соответствующие равновесные состояния. Тогда $\rho = \rho'$ в том и только том случае, когда существуют постоянная $c \in \mathbb{R}$ и функция $C \in \mathscr{F}^\theta$, для которых

$$A' - A = c + C \circ \tau - C. \tag{5.26}$$

Выбрав такие $\Phi,\,\Phi' \in \mathscr{B}^\theta$, что $A = A_\Phi$ и $A' = A_{\Phi'}$ (см. предложение 5.20), мы оказываемся в ситуации теоремы 5.7 и должны лишь доказать, что если $\Phi,\,\Phi' \in \mathscr{B}^\theta$ и $\rho = \rho'$, то имеет место равенство (5.26) с $C \in \mathscr{F}^\theta$. Для этой цели воспользуемся конструкцией функции C в доказательстве теоремы 5.7.

Если $(\tau^j\eta)_x = (\tau^j\xi)_x$ при $|x| \leqslant r$, $r \geqslant 0$, то вместо (5.12) имеем

$$|B(\tau^j\eta) - B(\tau^j\xi)| = |A_\Psi(\tau^j\eta) - A_\Psi(\tau^j\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{s=2r+1}^{\infty} \sup_{\xi\in\Omega_{[0,\,s]}} |\Psi(\xi)| \leqslant 2||\Psi||_\theta \sum_{s=2r+1}^{\infty} \theta^s = \frac{2||\Psi||_\theta}{1-\theta}\theta^{2r+1},$$

откуда следует, что

$$|C(\eta'') - C(\eta')| \leqslant \frac{4||\Psi||_\theta}{1-\theta}\sum_{r=m}^{\infty}\theta^{2r+1} = \frac{4||\Psi||_\theta}{(1-\theta)(1-\theta^2)}\theta^{2m+1}.$$

Тем самым, $C \in \mathscr{F}^\theta$.

5.22. Замечания

(a) Если система $(\Omega_0,\, t)$ — перемешивающая, то (5.26) эквивалентно равенству

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}}[\rho((A'-A)\circ\tau^x(A'-A)) - (\rho(A'-A))^2] = 0$$

(см. упражнение 5(c)).

(b) Отображение $\delta\colon C \mapsto C\circ\tau - C$ непрерывно на пространстве F^θ и переводит его в некоторое замкнутое подпространство. Из доказательства теоремы 5.21 видно, что существует непрерывное обратное отображение $\delta^{-1}\colon \delta F^\theta \mapsto F^\theta$.

5.23. Лемма

Пусть $\Phi \in \mathscr{B}^\theta(\Omega_0,\, t)$, *где* $(\Omega_0,\, t)$ — *перемешивающая система. Тогда*

(a) *функции* $\psi_>$ *и* $(\psi_>)^{-1}$ *принадлежат пространству* $\mathscr{F}^\theta_>$;

(b) *если* $A \in \mathscr{F}^\theta_>$, *то*

$$\mathrm{var}_k\, \mathscr{S}^n A \leqslant c_1\, \mathrm{var}_{n+k}\, A + c_2\theta^k||A||,$$

где c_1, c_2 — *постоянные* (*зависящие от* Φ *и* θ).

Вначале заметим, что если $A,\, A' \in \mathscr{F}^\theta_>$, то $A\cdot A' \in \mathscr{F}^\theta_>$ и

$$||A\cdot A'||_\theta \leqslant ||A||\cdot||A'||_\theta + ||A||_\theta\cdot||A'||. \tag{5.27}$$

Кроме того, если $A \in \mathscr{F}^{\theta}_{>}$ и $\inf |A(\xi_{>})| > 0$, то $A^{-1} \in \mathscr{F}^{\theta}_{>}$ и

$$||A^{-1}||_{\theta} \leqslant ||A^{-1}||^{2} \cdot ||A||_{\theta}. \tag{5.28}$$

При любом k справедливо неравенство

$$\operatorname{var}_k W_{\mathbb{Z}_{\leqslant}, \mathbb{Z}_{>}}(\xi_{\leqslant} \vee \cdot) \leqslant 2||\Phi||_{\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \theta^{m+n} = \frac{2||\Phi||_{\theta}}{(1-\theta)^2} \theta^{k+1}. \tag{5.29}$$

Поэтому определение функции $\psi_{>}$ (см. § 5.12) дает включение $\psi_{>} \in \mathscr{F}^{\theta}_{>}$. Из (5.20) и (5.28) теперь получаем $(\psi_{>})^{-1} \in \mathscr{F}^{\theta}_{>}$, что доказывает (a).

Согласно параграфам 5.11 и 5.12

$$\lambda^{-n} \mathscr{L}^{n}(\psi_{>} \cdot A) = \frac{1}{K} \int \sigma_{\leqslant}(d\xi_{\leqslant}) \exp[-W_{\mathbb{Z}_{\leqslant}, \mathbb{Z}_{>}}(\xi_{\leqslant} \vee \cdot)] \times$$
$$\times [A \circ \alpha_{\mathbb{Z}} \circ \tau^{-n}(\xi_{\leqslant} \vee \cdot)],$$

откуда с помощью (5.29), получим

$$\operatorname{var}_k \lambda^{-n} \mathscr{L}^{n}(\psi_{>} \cdot A) \leqslant ||\psi_{>}|| \operatorname{var}_{n+k} A + c\theta^{k} ||A||,$$

где c — постоянная (зависящая от Φ и θ). Это неравенство вместе с (5.27) приводит к утверждению (b).

5.24. Предложение

Пусть $\Phi \in \mathscr{B}^{\theta}(\Omega_0, t)$*, где* (Ω_0, t) *— перемешивающая система. Тогда оператор* $\mathscr{S}$ *отображает пространство* $\mathscr{F}^{\theta}_{>}$ *в себя и определяет ограниченный оператор* S *на банаховом пространстве* $F^{\theta}_{>}$*, введенном в параграфе* 5.19*, со спектральным радиусом, строго меньшим единицы.*

Из леммы 5.23 вытекает, что $\mathscr{S}$ отображает пространство $\mathscr{F}^{\theta}_{>}$ в себя. Так как $\mathscr{S}1 = 1$ (см. § 5.14), то, перейдя к фактор-пространству по подпространству констант, мы получим отображение $S\colon F^{\theta}_{>} \mapsto F^{\theta}_{>}$. В силу пункта (b) леммы 5.23

$$\operatorname{var}_k S^n A \leqslant c_1 \operatorname{var}_{n+k} A + c_2 \theta^{k} \operatorname{var}_0 A. \tag{5.30}$$

С другой стороны, так как множество

$$\{A \in \mathscr{C}(\Omega_{>})\colon |||A|||_{\theta} \leqslant 1\}$$

компактно в $\mathscr{C}(\Omega_>)$, из предложения 5.16 следует, что для любого $\delta > 0$ найдется n, при котором

$$\operatorname{var}_0 S^n A \leqslant \delta ||A||_\theta. \tag{5.31}$$

В силу (5.30) и (5.31)

$$\begin{aligned}\operatorname{var}_k S^{2n} A = c_1 \operatorname{var}_{n+k} S^n A + c_2\theta^k \operatorname{var}_0 S^n A \leqslant \\ \leqslant c_1(c_1 \operatorname{var}_{2n+k} A + c_2\theta^{n+k} \operatorname{var}_0 A) + c_2\theta^k\delta||A||_\theta \leqslant \\ \leqslant (c_1^2\theta^{2n} + c_1c_2\theta^n + c_2\delta)||A||_\theta\theta^k\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$||S^{2n}A||_\theta \leqslant (c_1^2\theta^{2n} + c_1c_2\theta^n + c_2\delta)||A||_\theta.$$

Если δ выбрано достаточно малым, а n — достаточно большим, то норма оператора $S^{2n}\colon F^\theta_> \mapsto F^\theta_>$ строго меньше единицы. Но тогда и спектральный радиус оператора S меньше единицы.

5.25. Замечание

Из того, что спектральный радиус оператора S меньше единицы, вытекает экспоненциальное убывание корреляций (см. упражнение 4(c)).

5.26. Теорема

Предположим, что (Ω_0, t) — транзитивная система. Тогда функция $\Phi \mapsto P^\Phi$ на $\mathscr{B}^\theta$ является вещественно-аналитической функцией.

Предположим сначала, что система (Ω_0, t) перемешивает. Если $\Phi \in \mathscr{B}^\theta_{\mathbb{C}}$, то формула[8]

$$(\mathscr{L}A)(\xi_>) = \sum_{\xi_0} A(\tau^{-1}(\xi_0 \vee \xi_>)) \exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\mathbb{Z}_>}(\xi_0 \vee \xi_>)]$$

определяет ограниченный оператор $\mathscr{L}$ на пространстве $\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}>}$ и $\Phi \mapsto \mathscr{L}$ является *целой аналитической функцией из пространства $\mathscr{B}^\theta_{\mathbb{C}}$ в пространство*

[8] См. § 5.11; различные банаховы пространства, используемые здесь, определены в параграфах 5.18 и 5.19.

ограниченных операторов на $\mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}>}$. В самом деле, для любого ξ_0 отображение пространства $\mathscr{B}^{\theta}_{\mathbb{C}}$ в $\mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}>}$, задаваемое формулой

$$\Phi \mapsto \{\xi_> \mapsto U_{\{0\}}(\xi_0) + W_{\{0\},\,\mathbb{Z}_>}(\xi_0 \vee \xi_>)\},$$

является $\mathbb{C}$-линейным и непрерывным и, следовательно, аналитическим, а так как функция $\exp\colon \mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}>} \to \mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}>}$ также аналитична, аналитическим является и отображение

$$\Phi \mapsto \{\xi_> \mapsto \exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\,\mathbb{Z}_>}(\xi_0 \vee \xi_>)]\}$$

пространства $\mathscr{B}^{\theta}_{\mathbb{C}}$ в $\mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}>}$. Отсюда и из (5.27) вытекает аналитичность отображения $\Phi \mapsto \mathscr{L}$.

Если Φ вещественно, т. е. $\Phi \in \mathscr{B}^{\theta}$, то

$$\mathscr{L}A = \lambda \cdot \psi_> \cdot \mathscr{S}(\psi_>^{-1} \cdot A)$$

и предложение 5.24 показывают, что спектр оператора $\mathscr{L}$ состоит из $\{\lambda\}$ и множества, содержащегося в круге $\{z\colon |z| \leqslant \lambda_1\}$, где $\lambda_1 < \lambda$. С помощью стандартного рассуждения отсюда выводится, что отображение $\Phi \mapsto \lambda$, а следовательно, и $\Phi \mapsto P^{\Phi}$ продолжается до аналитической функции в окрестности множества $\mathscr{B}^{\theta} \subset \mathscr{B}^{\theta}_{\mathbb{C}}$.

Общий случай транзитивной системы $(\Omega_0,\, t)$ сводится к случаю перемешивающей системы при помощи теоремы 5.3. Действительно, согласно следствию 5.6(d)

$$P^{\Phi} = N^{-1} P^{F^{(\beta)*}\Phi^*},$$

а отображение $\Phi \mapsto F^{(\beta)*}\Phi^*$, как отмечено в параграфе 5.18, продолжается до $\mathbb{C}$-линейного, непрерывного и, следовательно, аналитического отображения пространства $\mathscr{B}^{\theta}_{\mathbb{C}}(\Omega_0,\, t)$ в $\mathscr{B}^{\theta^N}_{\mathbb{C}}(\Omega_0^{(\beta)},\, t^{(\beta)})$.

5.27. Следствие

Предположим, что система $(\Omega_0,\, t)$ *транзитивна. Тогда функция* P *на пространстве* $\mathscr{F}^{\theta}$ *является вещественно-аналитической.*

Представим отображение $A \mapsto P(A)$ в виде

$$A \mapsto \Phi \mapsto P^{\Phi} = P(A_{\Phi}) = P(A),$$

где $A \mapsto \Phi$ продолжается до аналитического отображения $\mathscr{F}^{\theta}_{\mathbb{C}} \mapsto \mathscr{B}^{\theta}_{\mathbb{C}}$ (см. замечание в конце доказательства предложения 5.20).

5.28. Дзета-функция

Для любой $\mathbb{Z}$-решетчатой системы (Ω_0, t) и любой функции $A \in \mathscr{C}$ положим

$$\operatorname{Fix}\tau^m = \{\xi \in \Omega\colon \tau^m\xi = \xi\},$$

$$Z_m(A, \tau) = \sum_{x \in \operatorname{Fix}\tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A(\tau^k x)$$

и введем степенной ряд

$$\zeta_\tau(ze^A) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(A, \tau)\frac{z^m}{m}. \tag{5.32}$$

По теореме 5.2 каждая τ-периодическая точка содержится в одном из множеств $F^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}$. Поэтому $\zeta_\tau(ze^A)$ разлагается на множители, соответствующие транзитивным $\mathbb{Z}$-решетчатым системам. В случае, когда система (Ω_0, t) транзитивна, из теоремы 5.3 следует, что $Z_m(A, \tau) = 0$, если m не кратно числу N, и

$$Z_{nN}(A, \tau) = NZ_n(A + A\circ\tau + \ldots + A\circ\tau^{N-1}|\Omega^{(\beta)}, \tau^N|\Omega^{(\beta)}),$$

$$\zeta_\tau(ze^A) = \zeta_{\tau^N|\Omega^{(\beta)}}(z^N\exp(A + A\circ\tau + \ldots + A\circ\tau^{N-1})|\Omega^{(\beta)}).$$

Величина $Z_n(A, \tau)$ — это *статистическая сумма с периодическими граничными условиями*. Методы главы 3 показывают, что если система (Ω_0, t) перемешивает, то

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log Z_m(A, \tau) = P(A).$$

Следовательно, степенной ряд (5.32) сходится при $|z| < \exp[-P(A)]$ к некоторой голоморфной функции. В силу пунктов (c) и (d) следствия 5.6 это утверждение остается справедливым даже для случая, когда система (Ω_0, t) не является перемешивающей или транзитивной. Нетрудно проверить, что при $z = \exp[-P(A)]$ ряд (5.32) расходится. Таким образом, *радиус сходимости ряда* (5.32) *равен* $\exp[-P(A)]$ *и при* $|z| < \exp[-P(A)]$ *этот ряд определяет голоморфную функцию, которая называется дзета-функцией* (*ассоциированной с функцией* A).

Сейчас мы покажем, что если функция A принадлежит пространству $\mathscr{F}^\theta$, то область аналитичности дзета-функции может быть расширена.

5.29. Теорема[9]

Пусть $(\Omega_0,\, t)$ — *перемешивающая система и* $A \in \mathscr{F}^\theta$. *Тогда существует такое* $R(A) > \exp[-P(A)]$, *что*

$$d_A(z) = \zeta(ze^A)^{-1} = \exp\Big[-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A(\tau^k\xi)\Big]$$

продолжается до аналитической функции в круге $\{z\colon |z| < R(A)\}$ *с единственным нулем; этот нуль находится в точке* $z = \exp[-P(A)]$ *и является простым.*

Согласно предложению 5.20 $A = A_\Phi$, где $\Phi \in \mathscr{B}^\theta$. Положим

$$\Phi^{(n)}(X) = \begin{cases} \Phi(X), & \text{если } \operatorname{diam} X \leqslant n, \\ 0, & \text{если } \operatorname{diam} X > n. \end{cases}$$

Тогда

$$||A_\Phi - A_{\Phi^{(n)}}|| \leqslant \sum_{l>n} ||\Phi||_\theta \theta^l = ||\Phi||_\theta \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta}.$$

Для целых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ положим

$$a(m) = \sum_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A(\tau^k\xi),$$

$$b(m,\, n) = \sum_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A_{\Phi^{(n)}}(\tau^k\xi) =$$

$$= \sum_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m} \exp\Big[-\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n} \Phi(\xi|[k,\, k+l])\Big].$$

Нетрудно проверить, что справедливо неравенство

$$\Big|\frac{a(m)}{b(m,\, n)} - 1\Big| \leqslant \exp\Big(\frac{||\Phi||_\theta}{1-\theta} m\theta^{n+1}\Big) - 1.$$

[9]Эта теорема анонсирована в работе Рюэля [6]; см. также упражнение 7.

Пусть $\alpha \in (0,\, 1)$. Если $n = [\alpha m]$ (целая часть числа αm), то

$$\left|\frac{a(m)}{b(m,\, [\alpha m])} - 1\right| \leqslant \left(\frac{||\Phi||_\theta}{1-\theta} m\theta^{\alpha m}\right) \exp\left(\frac{||\Phi||_\theta}{1-\theta} m\theta^{\alpha m}\right). \tag{5.33}$$

Очевидно,

$$d_A(z) = \exp\Big[-\sum_{m=1}^{\infty} b(m,\, [\alpha m])\frac{z^m}{m}\Big] \exp\sum_{m=1}^{\infty}[-a(m) + b(m,\, [\alpha m])]\frac{z^m}{m}.$$

Если r — радиус сходимости первого ряда в правой части этого тождества, то в силу (5.33) второй ряд сходится при $|z| < r/\theta^\alpha$. Поэтому достаточно доказать теорему для

$$d'(z) = \exp\Big[-\sum_{m=1}^{\infty} b(m,\, [\alpha m])\frac{z^m}{m}\Big]$$

вместо $d_A(z)$.

Определим на пространстве $\mathscr{C}(\Omega_{[1,\, n]})$ оператор $L_{(n)}$ равенством

$$(L_{(n)}B)(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n) =$$
$$= \sum_{\xi_0} B(\xi_0,\, \ldots,\, \xi_{n-1}) \exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\, \{1, \ldots, n\}}(\xi_0 \vee \xi_1 \ldots \vee \xi_n)].$$

Определим обычным образом след оператора, действующего на конечномерном пространстве $\mathscr{C}(\Omega_{[1,\, n]})$. Нетрудно проверить, что $\operatorname{tr} L_{(n)}^m = b(m,\, n)$. Следовательно, $b(m,\, n)$ можно оценить в терминах собственных значений оператора $L_{(n)}$. Заметим, что каждое собственное значение оператора $L_{(n)}$ является собственным значением оператора $\mathscr{L}_{(n)} : \mathscr{F}_{\mathbb{C}>}^\theta \mapsto \mathscr{F}_{\mathbb{C}>}^\theta$, определенного как оператор $\mathscr{L}$ для взаимодействия $\Phi^{(n)}$. Мы знаем из доказательства теоремы 5.26, что отображение $\Phi \mapsto \mathscr{L}$ — целая аналитическая функция на пространстве $\mathscr{B}_{\mathbb{C}}^{\theta'}$, где $\theta' > \theta$. В частности, существует такое $r' > 0$, что при достаточно больших n оператор $\mathscr{L}_{(n)}$ имеет только одно собственное значение, по модулю превосходящее r'^{-1}. Это собственное значение $\lambda_{(n)}$ — положительное и простое; при $n \to \infty$ оно стремится к $\lambda = \exp P^\Phi$. Следовательно, при достаточно больших n

$$|b(m,\, n) - \lambda_{(n)}^m| < |\Omega_{[1,\, n]}| \cdot r'^{-m}.$$

Представим $d'(z)$ в виде

$$d'(z) = \exp\Big(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\lambda_{([\alpha m])}z)^m\Big) \exp\sum_{m=1}^{\infty}\Big(-b(m,\, [\alpha m]) + \lambda_{([\alpha m])}^m\Big)\frac{z^m}{m}.$$

Радиус сходимости первого ряда равен λ^{-1}, а второго — не меньше, чем $r'/|\Omega_0|^\alpha$. Взяв α, для которого $r'/|\Omega_0|^\alpha > \lambda^{-1}$, мы видим, что утверждение теоремы достаточно доказать для

$$d''(z) = \exp\Big(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^m}{m}\Big) \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\lambda^m_{([\alpha m])} + \lambda^m\right) \frac{z^m}{m}.$$

Первый множитель здесь равен $\exp\log(1-\lambda z) = 1-\lambda z$. Чтобы исследовать второй множитель, мы воспользуемся неравенством

$$|\lambda^m_{([\alpha m])} - \lambda^m| \leqslant m \cdot (\max(\lambda,\, \lambda_{([\alpha m])}))^{m-1} \cdot |\lambda_{([\alpha m])} - \lambda|.$$

В силу теоремы 5.26 функция $\Phi \mapsto \lambda$ аналитична на пространстве $\mathscr{B}^\theta$. Заменив θ на θ', где $\theta < \theta' < 1$, получим

$$|\lambda_{(n)} - \lambda| \leqslant C_{\theta'} ||\Phi - \Phi^{(n)}||_{\theta'},$$

$$||\Phi - \Phi^{(n)}||_{\theta'} \leqslant (\theta/\theta')^{n+1} ||\Phi||_\theta.$$

Поэтому радиус сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda^m_{([\alpha m])} - \lambda^m\right) \frac{z^m}{m}$$

не меньше, чем $(\lambda \cdot (\theta/\theta')^\alpha)^{-1}$, а так как мы можем устремить θ' к единице, не меньше, чем $1/\lambda\theta^\alpha$. Это завершает доказательство теоремы.

5.30. Замечание

Функция $z \mapsto \zeta(ze^A)$, вообще говоря, не допускает мероморфного продолжения на всю комплексную плоскость. В работе [2] Галлавотти построил контрпримеры того типа, что описан в упражнении 8.

Библиографические замечания

Основным фактом статистической механики одномерных систем является «отсутствие фазовых переходов». В частности, существует только одно гиббсовское состояние: это верно для перемешивающих систем и взаимодействий из пространства $\mathscr{B}_1$ (см. следствие 5.6(b)). Единственность гиббсовского состояния была независимо доказана Рюэлем [2] с помощью метода трансфер-матрицы и Добрушиным [3], применившим другие методы. В этой главе мы обобщили идею Добрушина и выяснили структуру гиббсовских состояний, не предполагая перемешивания (см. теоремы 5.2 и 5.3). Заметим, что случай взаимодействий конечного радиуса, сводящийся к теории марковских процессов, уже давно был понят физиками. Напомним также, что перемешивающие системы с «дальнодействием» ($\Phi \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}_1$) могут иметь несколько гиббсовских состояний, как это видно из параграфа 3.21[10].

Любопытная теорема 5.7 и ее специальные случаи — теорема 5.21, следствие 7.10(c) и замечание 7.11 — появились в работах Лившица [1], [2] и Синая [4] (см. также статью Боуэна [6]).

Трансфер-матрица, отвечающая взаимодействию $\Phi \in \mathscr{B}_1$, сопряжена с оператором $\mathscr{L}$; для трансфер-матрицы справедлив аналог теоремы Перона–Фробениуса[11]. $\mathscr{L}$ имеет положительное собственное значение, которое совпадает со спектральным радиусом; это собственное значение равно $\exp P^{\Phi}$. Спектральные свойства $\mathscr{L}$ связаны с кластерными свойствами гиббсовского состояния и аналитическими свойствами дзета-функции. Приведенные факты оправдывают изучение оператора $\mathscr{L}$, которое мы провели при помощи нового метода.

Единственность гиббсовского состояния — это один аспект «отсутствия фазовых переходов» в одномерных системах. Другой его аспект проявляется в вещественной аналитичности давления P, ограниченного на подходящее подпространство взаимодействий. Мы рассмотрели экспоненциально убывающие взаимодействия и установили аналитичность функции P, показав, что $\exp P^{\Phi}$ является изолированным собственным значением оператора $\mathscr{L}$ (здесь мы использовали идею работы Араки [1] по одномерным квантовым спиновым системам; см. Синай [4] и Рюэль [5], приложение B). В параграфе 5.28 была введена дзета-функция для подсчета τ-периодических точек, взятых со стандартными для статистической механики весами. Она имеет полюс в точке $\exp(-P^{\Phi})$, соответствующей собственному значению $\exp P^{\Phi}$ оператора $\mathscr{L}$. Другие свойства систем с экспоненциально убывающими взаимодействиями будут приведены в упражнениях (в частности,

[10]В параграфе 3.21 мы следовали Израэлю [1], который доказал существование взаимодействий (без их явного построения) с несколькими гиббсовскими состояниями. Простые примеры таких взаимодействий были ранее известны благодаря работе Дайсона [1]. Другие примеры получены в моделях Фишера [1] и кратко изложены в упражнении 8.

[11]См., например, книгу Гантмахера [1].

экспоненциальное убывание корреляций). Эти свойства окажутся полезными при изучении пространств Смейла в главе 7.

Хотя сильное условие на взаимодействие типа экспоненциального убывания кажется необходимым для доказательства того факта, что $\exp P^{\Phi}$ — изолированное собственное значение оператора $\mathscr{L}$, аналитические свойства давления P можно получить при менее ограничительных условиях. Это следует из одного красивого и довольно неожиданного результата Добрушина [4]. К сожалению, его доказательство является трудным, а условия, наложенные на решетчатую систему, — по-видимому, слишком точными. Поэтому за формулировкой доказательством теоремы Добрушина мы отсылаем читателя к оригинальной работе.

Упражнения

1. Пусть Ω_0 — конечное множество и $t \neq 0$ — квадратная матрица с элементами t_{ij}, $i, j \in \Omega_0$, принимающими целые неотрицательные значения. Введем множество $\Omega_0^* = \{(i, j, m) \in \Omega_0 \times \Omega_0 \times \mathbb{Z}_> : m \leqslant t_{ij}\}$ и положим $t^*_{(i,j,m)(k,l,n)} = 1$, если $j = k$, и $t^*_{(i,j,m)(k,l,n)} = 0$ в противном случае. Тогда (Ω_0^*, t^*) является $\mathbb{Z}$-решетчатой системой, для которой мы будем также употреблять обозначение $(\Omega_0, t)^*$ (мы предполагаем, что $\Omega_0^* \neq \varnothing$).

(a) Предположим, что t_{ij} принимает только значения 0 и 1, так что (Ω_0, t) является $\mathbb{Z}$-решетчатой системой. Если $\xi^* \in \Omega^*$ и $\xi^*_x = (i, j, 1)$, положим $(F\xi^*)_x = i$. Показать, что отображение $F\colon (\Omega_0^*, t^*) \mapsto (\Omega_0, t)$ является $\mathbb{Z}$-изоморфизмом.

(b) Показать, что $\mathbb{Z}$-решетчатая система, полученная ограничением $\mathbb{Z}$ на $N\mathbb{Z}$ и применением группового изоморфизма $\mathbb{Z} \mapsto N\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-изоморфна системе $(\Omega_0, t^N)^*$ (см. Вильямс [1]).

2. Пусть (Ω_0, t) — перемешивающая $\mathbb{Z}$-решетчатая система и $\sigma \in I$. Для $\eta_0 \vee \eta_> \in \Omega_\geqslant$ обозначим через $p_\sigma(\eta_0 \vee \eta_>)$ условную вероятность того, что $\xi|\{0\} = \eta_0$, при условии, что $\xi|\mathbb{Z}_> = \eta_>$. Положим $g_\sigma(\xi) = -\log p_\sigma(\xi_0 \vee \xi_>)$. Тогда g_σ определено σ-почти всюду, $g_\sigma \geqslant 0$ и

$$\int g_\sigma \, d\sigma = s(\sigma)$$

(см. Биллингслей [1], § 13).

Пусть $\Phi \in \mathscr{B}_1$ и σ — соответствующее гиббсовское состояние. Доказать, что g_σ продолжается до непрерывной функции на пространстве Ω, для которой мы используем то же обозначение g_σ, причем

$$g_\sigma(\xi) = -\log \frac{\psi_>(\tau^{-1}(\xi_0 \vee \xi_>))\exp[-U_{\{0\}}(\xi_0) - W_{\{0\},\mathbb{Z}_>}(\xi_0 \vee \xi_>)]}{\lambda \cdot \psi_>(\xi_>)}.$$

Доказать, что $\int g_{\sigma'}\, d\sigma' \leqslant \int g_\sigma\, d\sigma'$ при всех $\sigma' \in I$, а равенство выполняется лишь при $\sigma' = \sigma$ (см. Пэрри [2], а также Кин [1] и Ледрапье [2]).

3. Пусть Φ, $\Phi' \in \mathscr{B}_1(\Omega_0, t)$, где (Ω_0, t) — перемешивающая система, и σ, σ' — соответствующие гиббсовские состояния. Доказать, что

(a) если $A \in \mathscr{C}(\Omega_>)$ и $n \geqslant 0$, то

$$\sigma(A \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}) = \sigma((\mathscr{S}^n A) \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}).$$

Если A, $B \in \mathscr{C}(\Omega_>)$, то

$$\sigma((A \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}) \cdot (B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>} \circ \tau^n)) = \sigma(((\mathscr{S}^n A) \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>}) \cdot (B \circ \alpha_{\mathbb{Z}_>})).$$

(b) Положим

$$Z_{n+1}^- = \sigma'\Big(\exp \sum_{x=-n}^{0} A_{\Phi-\Phi'} \circ \tau^x\Big),$$

$$Z_n^+ = \sigma\Big(\exp \sum_{x=1}^{n} A_{\Phi'-\Phi} \circ \tau^x\Big)$$

и определим меру $\widetilde{\sigma}$ как слабый предел:

$$\widetilde{\sigma} = \lim_{n\to\infty} (Z_{n+1}^-)^{-1}\Big(\exp \sum_{x=-n}^{0} A_{\Phi-\Phi'} \circ \tau^x\Big) \cdot \sigma' =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (Z_n^+)^{-1}\Big(\exp \sum_{x=1}^{n} A_{\Phi'-\Phi} \circ \tau^x\Big) \cdot \sigma.$$

Показать, что

$$\tau\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma} \cdot \exp[A_{\Phi'} - A_\Phi - P^{\Phi'} + P^\Phi].$$

(Утверждение (b) принадлежит Синаю: см. Гуревич и Оселедец [1]. Для существования и равенства использовать лемму 5.9(a). Очевидно, $\tau\widetilde{\sigma} = C \exp A_{\Phi'-\Phi} \cdot \widetilde{\sigma}$, где $C = \lim_{n\to\infty} Z_{n+1}^-/Z_n^- = \lim_{n\to\infty} (Z_n^-)^{1/n} = \exp(P^\Phi - P^{\Phi'})$ в силу предложения 4.4.)

4. Пусть $\Phi \in \mathscr{B}^{\theta}(\Omega_0,\, t)$, где $(\Omega_0,\, t)$ — перемешивающая система и σ — соответствующее гиббсовское состояние. Доказать следующие утверждения.

(a) Если $0 \leqslant A \in \mathscr{C}(\Omega_{[1,\, m]})$, то $||\mathscr{S}^m(A \circ \alpha_{[1,\, m],\, \mathbb{Z}_>})||_\theta \leqslant c\sigma(A \circ \alpha_{[1,\, m]})$ при некотором c, не зависящем от A и m.

(b) Если $0 \leqslant A \in \mathscr{C}(\Omega_{[1,\, m]})$ и $\sigma(A \circ \alpha_{[1,\, m]}) > 0$, то

$$\left\| \frac{\mathscr{S}^{m+n}(A \circ \alpha_{[1,\, m],\, \mathbb{Z}_>})}{\sigma(A \circ \alpha_{[1,\, m]})} - 1 \right\| < e^{a-bn},$$

где действительные числа a, b не зависят от A и m, причем $b > 0$.

(c) (Экспоненциальное убывание корреляций.) Если $0 \leqslant A \in \mathscr{C}_{[-m+1,\, 0]}$ и $0 \leqslant B \in \mathscr{C}_{[n+1,\, n+m]}$, то

$$|\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant e^{a-bn}\sigma(A)\sigma(B).$$

(d) Если $A \in \mathscr{C}_{(-\infty,\, 0]}$ и $B \in \mathscr{C}_{[n+1,\, \infty)}$, то

$$|\sigma(AB) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant e^{a-bn}\sigma(|A|)\sigma(|B|).$$

(e) При $b' < \min(b,\, 2|\log\gamma|)$ существует такое действительное a', что если A, $B \in \mathscr{F}^{\gamma}$, то

$$|\sigma(A \cdot (B \circ \tau^x)) - \sigma(A)\sigma(B)| \leqslant e^{a'-b'|x|}||A||_\gamma ||B||_\gamma.$$

При фиксированных θ и $M > 0$ постоянные a' и b' можно выбрать так, что это неравенство будет выполняться для всех Φ с $||\Phi||_\theta \leqslant M$.

[Утверждение (a) вытекает из доказательства леммы 5.23, причем c можно сделать непрерывной функцией от $||\Phi||_\theta$ при фиксированном θ. Из (a) и предложения 5.24 вытекает утверждение (b), в котором a и b могут быть выбраны непрерывными функциями от $||\Phi||_\theta$ (чтобы убедиться в этом, используйте аналитичность по $\Phi \in \mathscr{B}_{\theta'}$, где $\theta < \theta' < 1$, и тот факт, что множество $\{\Phi\colon ||\Phi||_\theta \leqslant M\}$ компактно в $\mathscr{B}_{\theta'}$). Утверждения (c) и (d) получаются из (b) и упражнения 3(a). Чтобы доказать (e), представьте функции A и B в виде $A = \sum A_n$, $B = \sum B_n$, как в доказательстве предложения 5.20.]

5. Пусть $(\Omega_0,\, t)$ — перемешивающая система и $\sigma = \sigma_A$ — единственное равновесное состояние для $A \in \mathscr{F}^{\theta}$. Для $B_1,\, \ldots,\, B_l \in \mathscr{F}^{\theta}$ положим

$$D^l(B_1,\, \ldots,\, B_l) = \frac{\partial^l}{\partial s_1 \ldots \partial s_l} P\Big(A + \sum_i s_i B_i\Big)\Big|_{s_1 = \ldots = s_l = 0}.$$

Тогда

(a) $D^1(B_1) = \sigma(B_1)$;

(b) $D^2(B_1,\, B_2) = \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} [\sigma(B_1 \cdot (B_2 \circ \tau^x)) - \sigma(B_1)\sigma(B_2)]$;

(c) отображение $B_1 \mapsto D^2(B_1,\, B_1)$ определяет положительно полуопределенную квадратичную форму на $\mathscr{F}^\theta$. Его ядром служит множество $\{c + C \circ \tau - C\colon c \in \mathbb{R}, C \in \mathscr{F}^\theta\}$, которое, тем самым, не зависит от функции A. Кроме того, существует такое $R > 0$, что $[D^2(B_1,\, B_1))^{1/2} \leqslant \leqslant R||B_1||_\theta$.

(d) При всех $p \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-ipx}(\sigma(B_1 \cdot (B_1 \circ \tau^x)) - \sigma(B_1)\sigma(B_1)) \geqslant 0.$$

С учетом упражнения 4(e) утверждение достаточно доказать (b) в случае, когда $A,\, B_1,\, B_2 \in \mathscr{C}_\Lambda$, где Λ — конечное множество. Перейдя к $\mathbb{Z}$-изоморфной системе (см. доказательство следствия 4.10(b)), можно считать, что

$$A = \widetilde{A} \circ \alpha_{\{0\}}, \quad B_1 = \widetilde{B}_1 \circ \alpha_{\{0\}}, \quad B_2 = \widetilde{B}_2 \circ \alpha_{\{0\}},$$

где $\widetilde{A},\ \widetilde{B}_1,\ \widetilde{B}_2 \in \mathscr{C}(\Omega_0)$. Положим $U(\xi_0) = \exp[\widetilde{A}(\xi_0) + s\widetilde{B}_2(\xi_0)]$ и определим на пространстве $\Omega_{[-n,\, n]}$ вероятностную меру $\sigma_{n,\, s}$ так, чтобы $\sigma_{n,\, s}\{(\xi_{-n},\, \ldots,\, \xi_n)\}$ было пропорционально произведению

$$U(\xi_{-n})t_{\xi_{-n}\xi_{-n+1}}U(\xi_{-n+1}) \ldots t_{\xi_{n-1}\xi_n}U(\xi_n).$$

В силу единственности гиббсовского состояния термодинамический предел мер $\sigma_{n,\, s}$ равен σ_{A+sB_2}. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\sigma_{n,s}(\widetilde{B}_1 \circ \alpha_{\{0\},[-n,n]}) = \sum_{x=-n}^{n} [\sigma_{n,s}((\widetilde{B}_1 \circ \alpha_{\{0\},[-n,n]})(\widetilde{B}_2 \circ \alpha_{\{x\},[-n,n]}))-\\ - \sigma_{n,\, s}(\widetilde{B}_1 \circ \alpha_{\{0\},\, [-n,\, n]})\sigma_{n,\, s}(\widetilde{B}_2 \circ \alpha_{\{x\},\, [-n,\, n]})].\end{aligned}$$

При $|x| \to \infty$ выражение в квадратных скобках экспоненциально убывает равномерно по n (и по s при достаточно малых s). Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{d}{ds}\sigma_{n,\, s}(\widetilde{B}_1 \circ \alpha_{\{0\},\, [-n,\, n]}) =\\ = \sum_{x\in\mathbb{Z}} [\sigma_{A+sB_2}(B_1 \cdot (B_2 \circ \tau^x)) - \sigma_{A+sB_2}(B_1)\sigma_{A+sB_2}(B_2)],\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{ds}\sigma_{A+sB_2}(B_1) = \sum_{x\in\mathbb{Z}}[\sigma_{A+sB_2}(B_1\cdot(B_2\circ\tau^x)) - \sigma_{A+sB_2}(B_1)\sigma_{A+sB_2}(B_2)], \tag{$*$}$$

что доказывает (b). Неравенство $D^2(B_1,\, B_1) \geqslant 0$ следует из выпуклости P. В частности, если $D^2(B_1,\, B_1) = 0$, то $D^2(B_1,\, B_2) = 0$. Равенство $(*)$ позволяет с помощью индукции по l вычислить D^l и установить, что если $D^2(B_1,\, B_1) = 0$, то $D^l(B_1,\, \ldots,\, B_l) = 0$ при $l \geqslant 2$. Следовательно, $d^l\sigma_{A+sB_1}(B_2)/ds^l \to 0$ при $s = 0$ и $l \geqslant 1$, а так как $s \mapsto \sigma_{A+sB_1}(B_2)$ — вещественно-аналитическая функция, она является константой. Вид ядра отображения $B_1 \mapsto D^2(B_1,\, B_1)$ определяется теперь при помощи теоремы 5.21. Оценка $D^2(B_1,\, B_1) \leqslant R^2(||B_1||_\theta)^2$ следует, например, из упражнения 4(e). Чтобы доказать утверждение (d), заметим, что в пространстве $L^2(\Omega,\, \sigma)$ существует унитарный оператор V, для которого $V1 = 1$ и $VB = B\circ\tau$. С его помощью рассматриваемое выражение можно представить в виде

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-ipx}\langle(B_1 - \langle 1,\, B_1\rangle),\, V^x(B_1 - \langle 1,\, B_1\rangle)\rangle.$$

6. Пусть $(\Omega_0,\, t)$ — $\mathbb{Z}$-решетчатая система. Тогда

(a) для любой непрерывной функции $A\colon \Omega \mapsto \mathbb{C}$ радиус сходимости степенного ряда в правой части равенства

$$\zeta_\tau(ze^A) = \exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}\sum_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m}\exp\sum_{k=0}^{m-1}A(\tau^k\xi)$$

(а также ряда для $\zeta_\tau(ze^A)^{-1}$) не меньше, чем $\exp[-P(\operatorname{Re}A)]$;

(b) функции $A \mapsto \zeta_\tau(e^A)$ и $A \mapsto \zeta_\tau(e^A)^{-1}$ голоморфны в «выпуклой цилиндрической области» $\{A\colon P(\operatorname{Re}A) < 0\}$ банахова пространства непрерывных функций $A\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

7. Пусть $(\Omega_0,\, t)$ перемешивающая система. Тогда на пространстве $\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}}$ существует такая действительная непрерывная функция R, что

(a) $R(A) \geqslant \exp[-P(\operatorname{Re}A)]$;

(b) если $d_A(z) = \exp\Big[-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}\sum\limits_{\xi\in\operatorname{Fix}\tau^m}\exp\sum\limits_{k=0}^{m-1}A(\tau^k\xi)\Big]$, то функция $(z,\, A) \mapsto d_A(z)$ аналитична в области

$$\{(z,\, A) \in \mathbb{C}\times\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}}\colon |z| < R(A)\};$$

(c) если функция A действительна, то $R(A) > e^{-P(A)}$ и функция $d_A(\cdot)$ имеет только один нуль в круге $\{z\colon |z| < R(A)\}$. Этот нуль находится в точке $z = \exp[-P(A)]$ и является простым.

[Утверждение (c) следует из теоремы 5.29, в которой $R > e^{-P}$, а R можно считать непрерывной функцией на $\mathscr{F}^\theta$: следуя доказательству этой теоремы, положим

$$R(A) = \begin{cases} e^{-P(A)}/\theta^\beta = r'/|\Omega_0|^\beta, & \text{если } \beta \leqslant 1, \\ e^{-P(A)}/\theta, & \text{если } \beta \geqslant 1, \end{cases}$$

где

$$\beta = \frac{\log r' + P(A)}{\log|\Omega_0| - \log\theta}.$$

В силу упражнения 6 функция $(z, A) \mapsto d_A(z)$ голоморфна на множестве $\{(z, A) \in \mathbb{C} \times \mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}}\colon |z| < \exp[-P(\operatorname{Re} A)]\}$. Представим функцию $A \in \mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}}$ в виде $A = B + iC$, где $B, C \in \mathscr{F}^\theta$. Пользуясь теоремой 5.29 при действительных t и упражнением 6 при остальных t, мы можем оценить производные

$$\frac{d^n}{dz^n}\, d_{B+tC}(z)|_{z=0}, \tag{$*$}$$

а затем с помощью конформного отображения и формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta \geqslant \log|f(0)|$$

(теорема Йенсена) получить новые оценки этих производных. Благодаря этому функцию R можно продолжить непрерывным образом с $\mathscr{F}^\theta$ на $\mathscr{F}^\theta_{\mathbb{C}}$ так, чтобы выполнялись условия (a) и (b).)

8. Пусть $\Omega_0 = \{0, 1\}$ и взаимодействие Φ определено равенством

$$\Phi(\xi|X) = \begin{cases} \varphi_{|X|}, & \text{если } X \text{ — интервал и } \xi_x = 1 \text{ при всех } x \in X, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть

$$W_n = \sum_{k=1}^n (n-k+1)\varphi_k, \quad C = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k.$$

Проверить, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{\xi \in \operatorname{Fix} \tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A_\Phi(\tau^k \xi) = -\,z\frac{d}{dz}\Big[\log(1-z) + \log(1-ze^{-C}) + \\ + \log\Big(1 - \frac{z}{1-z}\sum_{k=1}^{\infty} z^k e^{-W_k}\Big)\Big]$$

и, следовательно,

$$\zeta(ze^A)^{-1} = (1-ze^{-C})\Big[1 - z\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k e^{-W_k}\Big)\Big].$$

(Введенный здесь потенциал соответствует модели Фишера [1], см. также Галлавотти [2]).)

9. Пусть $\Phi \in \mathscr{B}^\theta(\Omega_0, t)$, где (Ω_0, t) — перемешивающая система, и σ — соответствующее гиббсовское состояние. Для $A \in \mathscr{F}^\theta$ и конечного интервала $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ положим

$$A_\Lambda(\xi) = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{x \in \Lambda} \left[A(\tau^x \xi) - \sigma(A)\right],$$

$$D = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left[\sigma(A \cdot (A \circ \tau^x)) - \sigma(A)^2\right] = D^2(A, A) \geqslant 0.$$

Пусть γ — гауссовская вероятностная мера $(1/\sqrt{2\pi D})e^{-t^2/2D}dt$ на $\mathbb{R}$, если $D > 0$, и вероятностная мера δ_0, сосредоточенная в точке 0, если $D = 0$.

(a) При всех целых $n \geqslant 0$

$$\lim_{|\Lambda| \to \infty} \sigma(A_\Lambda^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!}\frac{D^n}{2^n}, \qquad \lim_{|\Lambda| \to \infty} \sigma(A_\Lambda^{2n+1}) = 0.$$

(b) (Центральная предельная теорема.) При $|\Lambda| \to \infty$ мера $A_\Lambda \sigma$ слабо сходится к γ. В действительности, если функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ растет не быстрее, чем полиномиально, то $(A_\Lambda \sigma)(\varphi) \to \gamma(\varphi)$.

(c) (Обобщение.) Для $A = (A_1, \ldots, A_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, где $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{F}^\theta$, положим

$$A_\Lambda(\xi) = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{x \in \Lambda} \left[A(\tau^x \xi) - \sigma(A)\right],$$

$$D_{ij} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left[\sigma\big(A_i \cdot (A_j \circ \tau^x)\big) - \sigma(A_i)\sigma(A_j)\right] = D^2(A_i, A_j).$$

Тогда матрица (D_{ij}) неотрицательна. Предположим (для простоты), что она имеет обратную матрицу (Δ_{ij}). Пусть γ — гауссовская вероятностная мера

$$(2\pi)^{-m/2}\,(\det(D_{ij}))^{-1/2}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j}\Delta_{ij}t_{ij}\Bigr)\,dt_1\ldots dt_m.$$

Тогда $(A_\Lambda\sigma)(\varphi)\to\gamma(\varphi)$ при $|\Lambda|\to\infty$ для любой непрерывной функции $\varphi\colon\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$, которая растет не быстрее, чем полиномиально.

[Заметим сначала, что $D=D^2(A,\,A)\geqslant 0$ в силу упражнения 5, причем $D=0$ только тогда, когда $A=c+C\circ\tau-C$, где $c\in\mathbb{R}$, $C\in\mathscr{F}^\theta$. Утверждение (a) вытекает из упражнения 4. Далее,

$$\gamma(t^{2n})=\frac{(2n)!}{n!}\frac{D^n}{2^n},\qquad\gamma(t^{2n+1})=0;$$

поэтому $(A_\Lambda\sigma)(\varphi)\to\gamma(\varphi)$, если φ — многочлен, и утверждение (b) вытекает из того факта, что мера γ однозначно определяется своими моментами. Наконец, утверждение (c) можно легко доказать с помощью теоремы Вика (см., например, Саймон [1], предложение I.2).]

Глава 6

Обобщение термодинамического формализма

В этой главе мы распространим некоторые результаты предыдущих глав на более общий случай. Доказательства будут изложены кратко, но при этом будут даны ссылки на соответствующую литературу (в самом в тексте или в библиографических замечаниях в конце главы). Обобщение заключается в замене пространства конфигураций Ω более общим компактным метризуемым пространством $\boldsymbol{\Omega}$, на котором группа $\mathbb{Z}^\nu$ действует гомеоморфизмами.

6.1. Основные определения

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ — непустое компактное метризуемое пространство и $x \to \tau^x$ — представление группы $\mathbb{Z}^\nu$ гомеоморфизмами пространства $\boldsymbol{\Omega}$ (τ^0 — тождественное преобразование и $\tau^{x+y} = \tau^x \tau^y$). Обозначим через $\mathscr{C}$ банахову алгебру $\mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$ непрерывных действительных функций на $\boldsymbol{\Omega}$ с равномерной нормой. Вероятностные меры на $\boldsymbol{\Omega}$ (называемые также *состояниями*) образуют выпуклое компактное метризуемое подмножество слабо дуального к $\mathscr{C}$ пространства $\mathscr{C}^*$ ($\mathscr{C}^*$ состоит из действительных мер на $\boldsymbol{\Omega}$ и снабжено *слабой топологией*). Множество $\boldsymbol{I}$ инвариантных относительно τ состояний выпукло, компактно и является симплексом Шоке (см. приложение A.5.5). Крайние точки множества $\boldsymbol{I}$ называются *эргодическими состояниями*, и так как $\boldsymbol{I}$ — метризуемый симплекс, каждое состояние $\sigma \in \boldsymbol{I}$ допускает единственное разложение на эргодические состояния, называемое *эргодическим разложением* (см. приложение A.5.6).

Мы воспользуемся метрикой d, совместимой с топологией пространства $\boldsymbol{\Omega}$, но результаты не будут зависеть от конкретного выбора метрики.

6.2. Разделимость траекторий

$\mathbb{Z}^\nu$-действие τ на пространстве $\boldsymbol{\Omega}$ называется *разделяющим траектории*[1], если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\big(d(\tau^x \boldsymbol{\xi},\, \tau^x \boldsymbol{\eta}) \leqslant \varepsilon \text{ при всех } x \in \mathbb{Z}^\nu\big) \Longrightarrow \big(\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}\big).$$

[1] В оригинале — expansive. — *Прим. ред.*

Число ε называется *разделяющей константой* (относительно метрики d). Нетрудно проверить, что действие τ на пространстве Ω, рассмотренное в главе 3, разделяет траектории.

Предположим, что τ разделяет траектории и ε — разделяющая константа. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $L > 0$, что

$$\big(d(\tau^x \boldsymbol{\xi},\, \tau^x \boldsymbol{\eta}) \leqslant \varepsilon \text{ при всех } |x| \leqslant L\big) \Longrightarrow \big(d(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{\eta}) < \delta\big). \tag{6.1}$$

(Это вытекает из компактности пространства $\boldsymbol{\Omega}$.)

6.3. Покрытия

Семейство $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$ подмножеств пространства $\boldsymbol{\Omega}$ называется *покрытием*, если $\bigcup\limits_i \mathfrak{A}_i = \boldsymbol{\Omega}$; $\mathfrak{A}$ называется *конечным* покрытием, если множество индексов i конечно, и *открытым* (соответственно, *борелевским*, *измеримым*) покрытием, если $\mathfrak{A}_i$ — открытые (соответственно, борелевские, измеримые) множества. *Разбиение* — это покрытие, для которого $\mathfrak{A}_i \bigcap \mathfrak{A}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Пусть $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$ и $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_j)$ — покрытия пространства $\boldsymbol{\Omega}$. Покрытие $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ состоит из множеств $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_j$. Это определение распространяется на любое конечное число покрытий. Покрытие $\tau^{-x}\mathfrak{A}$ состоит из множеств $\tau^{-x}\mathfrak{A}_i$. Положим

$$\mathfrak{A}^\Lambda = \bigvee_{x \in \Lambda} \tau^{-x}\mathfrak{A},$$

$$|\mathfrak{A}| = \operatorname{card}\{i\colon \mathfrak{A}_i \neq \varnothing\},$$
$$\operatorname{diam}\mathfrak{A} = \sup_i \operatorname{diam}\mathfrak{A}_i,$$

где $\operatorname{diam}\mathfrak{A}_i$ — диаметр множества $\mathfrak{A}_i$ относительно метрики d.

Пусть $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$ — открытое покрытие компактного метризуемого множества $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда существует такое $\delta > 0$ (*число Лебега*), что если $\operatorname{diam} X < \delta$, то $X \subset \mathfrak{A}_i$ при некотором i. (Это вытекает из компактности $\boldsymbol{\Omega}$.)

Предположим, что τ — разделяющий гомеоморфизм с разделяющей константой ε и $\operatorname{diam}\mathfrak{A} \leqslant \varepsilon$. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует конечное множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, для которого

$$\operatorname{diam}\mathfrak{A}^\Lambda < \delta. \tag{6.2}$$

(Это следует из (6.1).)

Если $\mathfrak{A}$ — покрытие пространства $\mathbf{\Omega}$ и $\mathfrak{B}$ — подсемейство семейства $\mathfrak{A}$, также являющееся покрытием $\mathbf{\Omega}$, мы будем говорить, что $\mathfrak{B}$ — *подпокрытие*. Очевидно, $|\mathfrak{B}| \leqslant |\mathfrak{A}|$.

6.4. Энтропия

Для меры $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$ и конечного борелевского разбиения $\mathfrak{A}$ пространства $\mathbf{\Omega}$ положим

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = -\sum_i \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i) \log \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i)$$

(где $0 \log 0 = 0$). Тогда существует предел

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = \lim_{\Lambda \nearrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda) = \inf_\Lambda \frac{1}{|\Lambda|} H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda). \tag{6.3}$$

(Доказательство. Следуя главе 3, положим $\Omega = (\Omega_0)^{\mathbb{Z}^\nu}$, где $\Omega_0 = \{\mathfrak{A}_i\}$. Существует такая мера $\sigma \in I$,[2] что $H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda) = S(\alpha_\Lambda \sigma)$ для всех конечных $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ и, значит, можно применить теорему 3.10.) Нетрудно проверить, что для любого непустого конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda). \tag{6.4}$$

Величина

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = h_\tau(\boldsymbol{\sigma}) = \sup_{\mathfrak{A}} h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A})$$

называется (*средней*) *энтропией* меры $\boldsymbol{\sigma}$; это неотрицательное число или $+\infty$. Энтропия является инвариантом абстрактной динамической системы $(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\sigma}, \tau)$ (при $\nu = 1$ он называется *инвариантом Колмогорова–Синая*).

6.5. Предложение

Пусть $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$ *и* $\mathfrak{A}$ *— борелевское разбиение пространства* $\mathbf{\Omega}$. *Тогда*

(a) $h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) \to h(\boldsymbol{\sigma})$ *при* $\operatorname{diam} \mathfrak{A} \to 0$, *вследствие чего функция* $h_\tau(\cdot)$ *аффинна на* $\boldsymbol{I}$;

(b) *если* τ *разделяет траектории и* ε *— разделяющая константа, то* $h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = h_\tau(\boldsymbol{\sigma})$ *при* $\operatorname{diam} \mathfrak{A} \leqslant \varepsilon$, *в частности, если* τ *разделяет траектории, то функция* $h_\tau(\cdot)$ *полунепрерывна сверху на* $\boldsymbol{I}$.

[2]Здесь и ниже используются обозначения главы 3; в частности, I — это множество τ-инвариантных мер на Ω. — *Прим. ред.*

[Доказательство, данное Боуэном (см. [6], § 2A) для $\nu = 1$, легко распространяется на общий случай. Вначале доказывается (см. упражнение 1), что

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) - h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) \leqslant H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}), \tag{6.5}$$

а затем — тот факт, что при любом $\mathfrak{A}$ (неотрицательную) правую часть неравенства можно сделать как угодно малой, выбрав $\operatorname{diam}\mathfrak{B}$ достаточно близким к нулю. Отсюда следует утверждение (a). В условиях утверждения (b) из (6.2) и (6.4) следует, что $h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = h_\tau(\boldsymbol{\sigma})$ при $\operatorname{diam}\mathfrak{A} \leqslant \varepsilon$. Для любого $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{I}$ покрытие $\mathfrak{A}$ можно выбрать таким, что $\operatorname{diam}\mathfrak{A} < \varepsilon$ и границы элементов $\mathfrak{A}_i$ покрытия $\mathfrak{A}$ имеют $\boldsymbol{\rho}$-меру 0. Тогда функция $\boldsymbol{\sigma} \mapsto H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda)$ непрерывна в точке $\boldsymbol{\rho}$ при каждом Λ и, следовательно, в силу (6.3) энтропия $h_\tau(\cdot) = h_\tau(\cdot, \mathfrak{A})$ полунепрерывна сверху в той же точке[3].]

6.6. Давление

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечное покрытие пространства $\boldsymbol{\Omega}$. Для всякой функции $A \in \mathscr{C}$ и всякого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ определим *статистическую сумму*

$$Z_\Lambda(A, \mathfrak{A}) = \min\Big\{\sum_j \exp\Big[\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathfrak{B}_j} \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x \boldsymbol{\xi})\Big] : \{\mathfrak{B}_j\} \text{ — подпокрытие покрытия } \mathfrak{A}^\Lambda\Big\}.$$

Очевидно,

$$Z_{\Lambda+x}(A, \mathfrak{A}) = Z_\Lambda(A, \mathfrak{A}). \tag{6.6}$$

Нетрудно также проверить, что если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, то

$$Z_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}(A, \mathfrak{A}) \leqslant Z_{\Lambda_1}(A, \mathfrak{A}) \cdot Z_{\Lambda_2}(A, \mathfrak{A}). \tag{6.7}$$

Положим

$$P(A, \mathfrak{A}) = \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}) = \inf_a |\Lambda(a)|^{-1} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}). \tag{6.8}$$

То, что предел существует и равен inf, следует из субаддитивности функции $a \mapsto \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$, которая имеет место в силу (6.6), (6.7) (см. приложение A.1.4). Очевидно,

$$\exp(-|\Lambda| \cdot ||A||) \leqslant Z_\Lambda(A, \mathfrak{A}) \leqslant (|\mathfrak{A}| \exp ||A||)^{|\Lambda|}. \tag{6.9}$$

[3]См. приложение A.1.3. — *Прим. перев.*

В силу первого из неравенств (6.9) $P(A, \mathfrak{A}) < \infty$. Используя (6.7) и второе из неравенств (6.9), мы можем сравнить $Z_\Lambda(A, \mathfrak{A})$ со статистической суммой для объединения непересекающихся сдвигов множества $\Lambda(a)$, содержащихся в Λ. Это приводит к соотношению

$$\limsup_{\Lambda\nearrow\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda(A, \mathfrak{A}) = P(A, \mathfrak{A}). \tag{6.10}$$

Предполагая $\mathfrak{A}$ конечным *открытым* покрытием пространства $\boldsymbol{\Omega}$, можно доказать, что существует предел

$$\lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0} P(A, \mathfrak{A}) = P(A) = P_\tau(A), \tag{6.11}$$

который конечен или равен $+\infty$. [См. Боуэн [6], предложение 2.8. Идея состоит в том, что если $\mathfrak{B}$ — открытое покрытие и каждый его элемент $\mathfrak{B}_j$ содержится в некотором $\mathfrak{A}_i$, то $P(A, \mathfrak{A}) \leqslant P(A, \mathfrak{B}) + \delta$, где δ — максимум колебания функции A на множестве $\mathfrak{A}_i$, т. е. $\delta = \max_i \sup\{|A(\boldsymbol{\xi}) - A(\boldsymbol{\eta})| : \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{A}_i\}$. Это, в частности, верно, если $\operatorname{diam}\mathfrak{B}$ является числом Лебега для $\mathfrak{A}$.] Предел $P(A)$, определенный в (6.11), называется (*топологическим*) *давлением* функции $A \in \mathscr{C}$.

Если имеется последовательность (или сеть) открытых покрытий $\mathfrak{A}$ и для каждого $\mathfrak{A}$ существует такое непустое конечное множество $\Lambda \in \mathbb{Z}^\nu$, что $\operatorname{diam}\mathfrak{A}^\Lambda \to 0$, то $P(A, \mathfrak{A}) \to P(A)$. (Доказательство похоже на доказательство равенства (6.11): если $\operatorname{diam}\mathfrak{B}^\Lambda$ служит числом Лебега для $\mathfrak{A}$, то

$$Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}) \leqslant Z_{\Lambda(a)+\Lambda}(A, \mathfrak{B}) \exp[|\Lambda(a)|\delta + (|\Lambda(a)+\Lambda| - |\Lambda(a)|)||A||]$$

и, следовательно, $P(A, \mathfrak{A}) \leqslant P(A, \mathfrak{B}) + \delta$.) В частности, если τ разделяет траектории и $\operatorname{diam}\mathfrak{A}$ — разделяющая константа, то $P(A, \mathfrak{A}) = P(A)$.

6.7. Другие определения давления

Пусть снова $A \in \mathscr{C}$ и $\mathfrak{A}$ — конечное открытое покрытие пространства $\boldsymbol{\Omega}$. Определим новую статистическую сумму:

$$Z^{(1)}_\Lambda(A, \mathfrak{A}) = \min\Big\{\sum_j \exp\Big[\inf_{\boldsymbol{\xi}\in\mathfrak{B}_j} \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi})\Big] : \\ (\mathfrak{B}_j) \text{ — подпокрытие покрытия } \mathfrak{A}^\Lambda\Big\}.$$

Тогда

$$1 \leqslant \frac{Z_\Lambda(A, \mathfrak{A})}{Z^{(1)}_\Lambda(A, \mathfrak{A})} \leqslant e^{|\Lambda|\delta},$$

где δ — максимум колебаний функции A на множествах из $\mathfrak{A}^\Lambda$. Нетрудно проверить, что

$$P(A) = \lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0} \limsup_{\Lambda\nearrow\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{(1)}(A, \mathfrak{A}) =$$

$$= \sup_{\mathfrak{A}} \limsup_{\Lambda\nearrow\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{(1)}(A, \mathfrak{A}).$$

В этой формуле можно заменить Λ на $\Lambda(a)$ и $\Lambda \nearrow \infty$ — на $a \to \infty$. Кроме того,

$$P(A) = \lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to\infty} \liminf_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}^{(1)}(A, \mathfrak{A}).$$

Пусть S — конечное подмножество пространства $\boldsymbol{\Omega}$. Будем говорить, что S является (Λ, ε)-*разделенным*, если $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in S$ и $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\eta}$ влечет

$$d(\tau^x\boldsymbol{\xi}, \tau^x\boldsymbol{\eta}) > \varepsilon \text{ при некотором } x \in \Lambda.$$

Будем называть множество S (Λ, ε)-*плотным*, если для любого $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Omega}$ существует такое $\boldsymbol{\xi} \in S$, что

$$d(\tau^x\boldsymbol{\xi}, \tau^x\boldsymbol{\eta}) \leqslant \varepsilon \text{ при всех } x \in \Lambda.$$

Теперь можно определить статистические суммы

$$Z_\Lambda^{(2)}(A,\varepsilon) = \sup\Big\{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in S} \exp \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi})\colon S \text{ является } (\Lambda,\varepsilon)\text{-разделенным}\Big\},$$

$$Z_\Lambda^{(3)}(A,\varepsilon) = \inf\Big\{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in S} \exp \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi})\colon S \text{ является } (\Lambda,\varepsilon)\text{-плотным}\Big\}.$$

Очевидно, при $i = 2, 3$

$$\limsup_{\Lambda\nearrow\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{(i)}(A, \varepsilon)$$

возрастает при убывании ε. Доказывается (Уолтерс [1], § 1), что

$$P(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\Lambda\nearrow\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{(i)}(A, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}^{(i)}(A, \varepsilon)$$

(см. упражнение 2). Кроме того,

$$P(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}^{(i)}(A, \varepsilon).$$

Если τ разделяет траектории, то нет необходимости полагать $\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0$ или $\varepsilon \to 0$ в формуле для давления (в этом и предыдущем параграфах), достаточно взять $\operatorname{diam}\mathfrak{A}$ или ε равным разделяющей константе. В частности,

$$\begin{aligned} P(A) &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}(A,\, \mathfrak{A}) = \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z^{(1)}_{\Lambda(a)}(A,\, \mathfrak{A}) = \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z^{(i)}_{\Lambda(a)}(A,\, \varepsilon), \quad i = 2,\, 3. \end{aligned}$$

Таким образом, определение давления, данное в теореме 3.4, является специальным случаем приведенного здесь.

6.8. Свойства давления

Имеет место альтернатива: либо $P(A) = +\infty$ для всех $A \in \mathscr{C}$, либо $P(A)$ конечно для всех $A \in \mathscr{C}$. В последнем случае функция P выпукла и не убывает (т. е. $A \leqslant B$ влечет $P(A) \leqslant P(B)$); кроме того, она непрерывна:

$$|P(A) - P(B)| \leqslant ||A - B||$$

и обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} P(A + B \circ \tau^x - B + t) = P(A) + t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ P(A + B) \leqslant P(A) + P(B), \\ |P(A)| \leqslant P(|A|). \end{gathered}$$

(Простые доказательства имеются в статье Уолтерс [1], теорема 2.1.)

6.9. Действие $\boldsymbol{\tau}^a$

Для любых целых $a_1, \ldots, a_\nu > 0$ положим $ax = (a_1x_1, \ldots, a_\nu x_\nu)$. $\mathbb{Z}^\nu$-действие τ^a определяется равенством $(\tau^a)^x = \tau^{ax}$. Нетрудно проверить, что

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A}) = \frac{1}{|\Lambda(a)|} h_{\tau^a}(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)}), \tag{6.12}$$

$$P_\tau(A,\, \mathfrak{A}) = \frac{1}{|\Lambda(a)|} P_{\tau^a}\Big(\sum_{x\in\Lambda(a)} A \circ \tau^x,\, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)}\Big) \tag{6.13}$$

(Боуэн [6], лемма 2.9).

6.10. Лемма

Пусть $\mathfrak{B}$ — конечное открытое покрытие пространства $\boldsymbol{\Omega}$ и Λ — конечное подмножество решетки $\mathbb{Z}^\nu$. Тогда существует такое борелевское разбиение $\mathfrak{B}_\Lambda$ пространства $\boldsymbol{\Omega}$, что

(a) *каждый элемент разбиения $\mathfrak{B}_\Lambda$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{B}^\Lambda$;*

(b) *каждая точка $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Omega}$ принадлежит замыканию не более чем $|\Lambda| \cdot |\mathfrak{B}|$ элементов $\mathfrak{B}_\Lambda$.*

[См. Боуэн [6], лемма 2.12. Идея состоит в следующем. Разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{B}$, порождает отображение $\alpha\colon \boldsymbol{\Omega} \mapsto \Delta$, где Δ — $(|\mathfrak{B}| - 1)$-мерный симплекс. Пусть $\beta = (\alpha \circ \tau^x)_{x\in\Lambda}\colon \boldsymbol{\Omega} \mapsto \Delta^\Lambda$; тогда в качестве $\mathfrak{B}_\Lambda$ можно выбрать прообраз при отображении β подходящего разбиения $(|\mathfrak{B}| \cdot |\Lambda| - |\Lambda|)$-мерного множества Δ^Λ.]

6.11. Лемма

Если $\mathfrak{A}$ — борелевское разбиение пространства $\boldsymbol{\Omega}$ и каждая точка $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Omega}$ содержится в замыкании не более чем M элементов разбиения $\mathfrak{A}$, то

$$h(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) + \boldsymbol{\sigma}(A) \leqslant P(A) + \log M. \tag{6.14}$$

[См. Боуэн [6], лемма 2.11. Пусть $\mathfrak{A}_i^\Lambda$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — непустые элементы разбиения $\mathfrak{A}^\Lambda$. Для каждого i выберем такое $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathfrak{A}_i^\Lambda$, что

$$\int_{\mathfrak{A}_i^\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(d\boldsymbol{\xi}) \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i^\Lambda) \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}_i).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) + \boldsymbol{\sigma}(A) &\leqslant |\Lambda|^{-1}\Big[H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda) + \boldsymbol{\sigma}\Big(\sum_{x\in\Lambda} A\circ\tau^x\Big)\Big] \leqslant \\ &\leqslant |\Lambda|^{-1}\sum_i \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i^\Lambda)\Big(-\log\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i^\Lambda) + \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}_i)\Big) \leqslant \\ &\leqslant |\Lambda|^{-1}\log\sum_i \exp\sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}_i). \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — такое конечное открытое покрытие пространства $\boldsymbol{\Omega}$, что каждый элемент разбиения $\mathfrak{B}$ пересекает не более чем M элементов разбиения $\mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}'_j)$ — какое-нибудь подпокрытие покрытия $\mathfrak{B}^\Lambda$. Для каждого $\mathfrak{A}_i^\Lambda$ выберем $\mathfrak{B}'_j \ni \boldsymbol{\xi}_i$; тогда при отображении $\mathfrak{A}_i^\Lambda \mapsto \mathfrak{B}'_j$ каждый элемент покрытия $\mathfrak{B}'$ имеет не более $M^{|\Lambda|}$ прообразов. Теперь из очевидного неравенства $\sum\limits_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}_i) \leqslant \sup\limits_{\boldsymbol{\xi}\in\mathfrak{B}'_j} \sum\limits_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi})$ следует, что

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) + \boldsymbol{\sigma}(A) \leqslant |\Lambda|^{-1} \log \sum_j M^{|\Lambda|} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathfrak{B}'_j} \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x\boldsymbol{\xi}).$$

Взяв минимум по всем подпокрытиям $(\mathfrak{B}'_j)$, получим

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) + \boldsymbol{\sigma}(A) \leqslant \log M + |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda(A, \mathfrak{B}).$$

Перейдя к пределу при $\Lambda \nearrow \infty$, а затем — при $\operatorname{diam}\mathfrak{B} \to 0$, получим (6.14).]

6.12. Теорема (вариационный принцип)

При всех $A \in \mathscr{C}$ имеем

$$P(A) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{I}} [h(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A)].$$

Это основная общая теорема о топологическом давлении. Мы дадим набросок ее доказательства (предположив для простоты, что $P(A) < \infty$). При этом в п. (a) мы следуем Боуэну ([6], § 2.B), а в п. (b) — Денкеру ([1], теорема 2).

(a) *Для всех $A \in \mathscr{C}$ и $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$*

$$h(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) \leqslant P(A). \tag{6.15}$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы убрать слагаемое $\log M$ в (6.14), заменив $\mathbb{Z}^\nu$-действие τ на τ^a. Пусть $\mathfrak{A}$ — борелевское разбиение пространства $\boldsymbol{\Omega}$. В силу (6.12)

$$h_\tau(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) + \boldsymbol{\sigma}(A) = \frac{1}{|\Lambda(a)|} \Big[h_{\tau^a}(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)}) + \boldsymbol{\sigma}\Big(\sum_{x\in\Lambda(a)} A\circ\tau^x \Big) \Big].$$

Взяв конечное открытое покрытие $\mathfrak{B}$ с достаточно малым $\operatorname{diam}\mathfrak{B}$, выберем борелевское разбиение $\mathfrak{B}_{\Lambda(a)}$ в соответствии с леммой 6.10. В силу (6.5) и леммы 6.11, примененной к $\mathfrak{B}_{\Lambda(a)}$, приведенное выше выражение не превосходит

$$\frac{1}{|\Lambda(a)|}\Big[h_{\tau^a}(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) + \boldsymbol{\sigma}\Big(\sum_{x\in\Lambda(a)} A\circ\tau^x\Big) +$$

$$+ H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) - H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{B}_{\Lambda(a)})\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|}\Big[P_{\tau^a}\Big(\sum_{x\in\Lambda(a)} A\circ\tau^x\Big) + \log(|\Lambda(a)|\cdot|\mathfrak{B}|) +$$

$$+ H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) - H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{B}_{\Lambda(a)})\Big].$$

В силу (6.13) первое слагаемое равно $P(A)$; величина $|\Lambda(a)|^{-1}\log(|\Lambda(a)|\cdot|\mathfrak{B}|)$ стремится к нулю при $a\to\infty$; наконец (см. упражнение 1(a)),

$$\frac{1}{|\Lambda(a)|}\Big[H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A}^{\Lambda(a)} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) - H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{B}_{\Lambda(a)})\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|}\sum_{x\in\Lambda(a)}\big[H(\boldsymbol{\sigma},\, (\tau^{-x}\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) - H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{B}_{\Lambda(a)})\big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|}\sum_{x\in\Lambda(a)}\big[H(\boldsymbol{\sigma},\, \mathfrak{A} \vee \tau^x\mathfrak{B}_{\Lambda(a)}) - H(\boldsymbol{\sigma},\, \tau^x\mathfrak{B}_{\Lambda(a)})\big],$$

и так как $\operatorname{diam}\tau^x\mathfrak{B}_{\Lambda(a)} \leqslant \operatorname{diam}\mathfrak{B}$, это выражение можно сделать как угодно малым (см. упражнение 1(b)).

(b) *Для любых $A\in\mathscr{C}$ и $\varepsilon>0$ существует такое $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{I}$, что*

$$h(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) \geqslant P(A) - 3\varepsilon. \tag{6.16}$$

Выберем конечное открытое покрытие $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_j\}$, удовлетворяющее двум условиям:

$$P(A,\, \mathfrak{B}) \geqslant P(A) - \varepsilon,$$

и $|A(\boldsymbol{\xi}) - A(\boldsymbol{\eta})| < \varepsilon$ при $\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{\eta}\in\mathfrak{B}_j$. Затем возьмем такое a, что $|\Lambda(a)|^{-1}\log(|\Lambda(a)|\cdot|\mathfrak{B}|) < \varepsilon$, и выберем разбиение $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{\Lambda(a)}$ в соответствии с леммой (6.10). Положив $\Omega_0 = \{\mathfrak{A}_i\}$, рассмотрим пространства

$$\Omega = \Big\{(\mathfrak{A}_{i_x}) \in (\Omega_0)^{\mathbb{Z}^\nu}\colon \bigcap_{x\in\mathbb{Z}^\nu}\operatorname{cl}(\tau^{ax}\mathfrak{A}_{i_x}) \neq \varnothing\Big\},$$

$$\Omega^* = \Big\{(\boldsymbol{\xi},\, (\mathfrak{A}_{i_x})) \in \boldsymbol{\Omega}\times\Omega\colon \boldsymbol{\xi} \in \bigcap_{x\in\mathbb{Z}^\nu}\operatorname{cl}(\tau^{ax}\mathfrak{A}_{i_x})\Big\},$$

где $\mathrm{cl}(V)$ — замыкание множества V. Пусть $p\colon \Omega^* \mapsto \mathbf{\Omega}$, $q\colon \Omega^* \to \Omega$ — проекции на соответствующие пространства. Определим функцию $B \in \mathscr{C}(\Omega)$ равенством

$$B(\mathfrak{A}_{i_x}) = \max_{j\colon \mathfrak{A}_{i_0} \subset \mathfrak{B}_j} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{B}_j} \sum_{x \in \Lambda(a)} A(\tau^x \boldsymbol{\xi}).$$

Тогда

$$P(A) - \varepsilon \leqslant P(A,\, \mathfrak{B}) = \frac{1}{|\Lambda(a)|} P_{\tau^a}\Big(\sum_{x \in \Lambda(a)} A \circ \tau^x,\, \mathfrak{B}^{\Lambda(a)} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|} P(B) = \frac{1}{|\Lambda(a)|} [s(\sigma) + \sigma(B)],$$

где σ — некоторая инвариантная относительно сдвига вероятностная мера на Ω (мы используем здесь теорему 3.12). В силу теорем Хана–Банаха и Маркова–Какутани (см. приложения A.3.2 и A.3.4) существует такая инвариантная относительно сдвига вероятностная мера σ^* на пространстве Ω^*, что $q\sigma^* = \sigma$. Пусть $\widetilde{\sigma} = p\sigma^*$; тогда $\widetilde{\sigma}$ является τ^a-инвариантной мерой и

$$\sigma(B) \leqslant \widetilde{\sigma}\Big(\sum_{x \in \Lambda(a)} A \circ \tau^x \Big) + |\Lambda(a)|\varepsilon,$$

$$s(\sigma) \leqslant h_{\tau^a}(\widetilde{\sigma}) + \log(|\Lambda(a)| \cdot |\mathfrak{B}|)$$

(величину $h_{\tau^a}(\widetilde{\sigma})$ можно оценить при помощи разбиения, образованного пересечениями замыканий множеств $\mathfrak{A}_i$). Следовательно,

$$P(A) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|} \Big[h_{\tau^a}(\widetilde{\sigma}) + \widetilde{\sigma}\Big(\sum_{x \in \Lambda(a)} A \circ \tau^x \Big) \Big] + 2\varepsilon,$$

или, если положить $\boldsymbol{\sigma} = |\Lambda(a)|^{-1} \sum\limits_{x \in \Lambda(a)} \tau^x \widetilde{\sigma} \in \boldsymbol{I}$, то

$$P(A) - 3\varepsilon \leqslant \frac{1}{|\Lambda(a)|} h_{\tau^a}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) = h_\tau(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A).$$

6.13. Равновесные состояния

В предположении, что $P(A) < +\infty$, введем для $A \in \mathscr{C}$ множество *равновесных состояний*

$$\boldsymbol{I}_A = \{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}\colon h(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) = P(A)\}.$$

Это множество может быть пустым (см., например, Гуревич [1]). В частности, оно не обязано совпадать с множеством

$$\boldsymbol{I}'_A = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{C}^* \colon P(A+B) \geqslant P(A) + \boldsymbol{\sigma}(B) \text{ при всех } B \in \mathscr{C}\}. \qquad (6.17)$$

Особый интерес представляет случай, когда h_τ — полунепрерывная сверху функция на $\boldsymbol{I}$ (см. следующую теорему). Это имеет место, если τ разделяет траектории (см. предложение 6.5(b)).

6.14. Теорема

Пусть энтропия h_τ конечна и полунепрерывна сверху на $\boldsymbol{I}$. Тогда

(a) $\boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}'_A \neq \varnothing$; *множество $\boldsymbol{I}_A$ является выпуклым компактным симплексом Шоке и, кроме того, гранью множества $\boldsymbol{I}$.*

(b) *Множество*

$$\boldsymbol{D} = \{A \in \mathscr{C} \colon \operatorname{card} \boldsymbol{I}_A = 1\}$$

массивно в $\mathscr{C}$.

(c) *Для всякого $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$*

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \inf_{A \in \mathscr{C}} [P(A) - \boldsymbol{\sigma}(A)].$$

Как и при доказательстве теоремы 3.7 устанавливается, что множество $\boldsymbol{I}'_A$ выпукло, компактно и содержится в $\boldsymbol{I}$, а множество

$$\boldsymbol{D}' = \{A \in \mathscr{C} \colon \operatorname{card} \boldsymbol{I}'_A = 1\}$$

массивно в $\mathscr{C}$.

Из полунепрерывности сверху энтропии h_τ следует, что $\boldsymbol{I}_A \neq \varnothing$, и доказательство утверждения (c) совпадает с доказательством соответствующего утверждения теоремы 3.12. Из доказательства теоремы 3.12 видно, что $\boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}'_A$. Следовательно, множество $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}'$ является массивным в $\mathscr{C}$, что доказывает утверждение (b).

Наконец, доказательство того, что $\boldsymbol{I}_A$ — симплекс Шоке и грань множества $\boldsymbol{I}$, совпадает с доказательством следствия 3.14.

6.15. Замечание

Предположим, что $P(0) < +\infty$ и что для всякого $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \inf_{A \in \mathscr{C}} [P(A) - \boldsymbol{\sigma}(A)]. \qquad (6.18)$$

Тогда энтропия h, будучи точной нижней гранью непрерывных функций, полунепрерывна сверху. Таким образом, в силу теоремы 6.14(c) условие (6.18) эквивалентно полунепрерывности сверху функции h.

К рассматриваемому случаю применима теорема Израэля (приложение А.3.6), позволяющая аппроксимировать инвариантные состояния равновесными состояниями. В частности, справедливы следующие аналоги теоремы 3.16 и следствия 3.17.

Пусть энтропия h_τ конечна и полунепрерывна сверху. Тогда для любых $A \in \mathscr{C}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $A' \in \mathscr{C}$ и $\boldsymbol{\sigma}' \in \boldsymbol{I}_{A'}$, что

$$||\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}|| \leqslant \varepsilon$$

и

$$||A' - A|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(A) - \boldsymbol{\sigma}(A) - h_\tau(\boldsymbol{\sigma})].$$

Объединение множеств $\boldsymbol{I}_A$ по всем $A \in \mathscr{C}$, т. е. множество всех равновесных состояний, всюду плотно в $\boldsymbol{I}$ относительно топологии, порожденной нормой.

Если $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — эргодические состояния, то существует функция $A \in \mathscr{C}$, для которой $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \boldsymbol{I}_A$.

6.16. Коммутирующие непрерывные отображения

Если вместо $\mathbb{Z}^\nu$-действия τ на $\boldsymbol{\Omega}$, порожденного ν коммутирующими гомеоморфизмами, даны ν коммутирующих непрерывных отображений, то мы можем обобщить на эту ситуацию большинство предыдущих результатов данной главы (это отмечено в параграфе 6.18). Для простоты мы опускаем здесь рассмотрение свойства разделимости траекторий.

Заметим, что отображение τ^x теперь определено только при $x \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant = \{x \in \mathbb{Z}^\nu : x_1, \ldots, x_\nu \geqslant 0\}$ и, таким образом, τ^x является $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действием. Сейчас мы покажем, как связать его с некоторым $\mathbb{Z}^\nu$-действием.

6.17. Продолжение до $\mathbb{Z}^\nu$-действия

Вначале положим

$$\boldsymbol{\Omega}' = \bigcap_{x \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant} \tau^x \boldsymbol{\Omega}. \tag{6.19}$$

Ограничим $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действие τ на $\boldsymbol{\Omega}'$. Очевидно, отображение $\tau^x : \boldsymbol{\Omega}' \mapsto \boldsymbol{\Omega}'$ при каждом $x \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant$ является эпиморфизмом. Построим теперь компактное метризуемое пространство $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$ с $\mathbb{Z}^\nu$-действием τ и непрерывное отображение $\boldsymbol{\pi}\colon \underline{\boldsymbol{\Omega}} \mapsto \boldsymbol{\Omega}$, для которых

$$\boldsymbol{\pi}\underline{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}'$$

и $\boldsymbol{\pi}\tau^a = \tau^a\boldsymbol{\pi}$ при $a \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant$.

Положим

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}} = \{(\boldsymbol{\xi}_x) \in (\boldsymbol{\Omega}')^{\mathbb{Z}^\nu_\leqslant} : \tau^a\boldsymbol{\xi}_{x-a} = \boldsymbol{\xi}_x, \text{ если } a \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant \text{ и } x \in \mathbb{Z}^\nu_\leqslant\}.$$

Множество $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$ компактно и метризуемо, как замкнутое подмножество счетного произведения компактных метризуемых множеств. Положим также

$$\tau^{a-b}(\boldsymbol{\xi}_x) = (\boldsymbol{\eta}_x), \text{ где } \boldsymbol{\eta}_x = \tau^a\boldsymbol{\xi}_{x-b},\ a,\, b \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant.$$

Корректность этого определения легко проверить и мы получаем, таким образом, $\mathbb{Z}^\nu$-действие гомеоморфизмами τ^x пространства $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$. Наконец, положим

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}_x) = \boldsymbol{\xi}_0.$$

Ясно, что $\boldsymbol{\pi}\tau^a = \tau^a\boldsymbol{\pi}$ при $a \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant$. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\boldsymbol{\pi}\underline{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}'.$$

Если $\boldsymbol{\sigma}$ — τ-инвариантная вероятностная мера на $\boldsymbol{\Omega}$, то $\operatorname{supp}\boldsymbol{\sigma} \subset \boldsymbol{\Omega}'$. В силу теорем Хана–Банаха и Маркова–Какутани[4] существует такая вероятностная мера $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ на $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$, что $\boldsymbol{\pi}\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$ и $\tau^x\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ при всех $x \in \mathbb{Z}^\nu_\geqslant$. Тогда $\tau^x\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ при $x \in \mathbb{Z}^\nu$ (так как τ^x гомеоморфизмы пространства $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$). Такая мера $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ единственна, так как множество функций $A \circ \boldsymbol{\pi} \circ \tau^x$, где $A \in \mathscr{C}$ и $x \in \mathbb{Z}^\nu$, всюду плотно в пространстве $\mathscr{C}(\underline{\boldsymbol{\Omega}})$. Следовательно, отображение $\boldsymbol{\pi}\colon \underline{\boldsymbol{\sigma}} \mapsto \boldsymbol{\sigma}$ является биекцией множества τ-инвариантных состояний на $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$ на множество τ-инвариантных состояний на $\boldsymbol{\Omega}$ (это отображение — аффинный гомеоморфизм).

6.18. Результаты для $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действий

Как уже говорилось, мы не будем касаться разделимости траекторий для $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действий. Все остальные определения и результаты параграфов 6.1, 6.3, 6.4 и 6.5 переносятся на рассматриваемый случай, но со следующими уточнениями.

(a) Мы определяем и рассматриваем $\mathfrak{A}^\Lambda$ только при $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu_\geqslant$.

---

[4] См. приложения A.3.2 и A.3.4.

(b) Если $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$ и состояние $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ получено при помощи конструкции параграфа 6.17, то

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^{\Lambda}) = H(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A}^{\Lambda}) = H(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, (\boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A})^{\Lambda})$$

и из существования предела (6.3) следует, что

$$h(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}) = h(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A}).$$

В силу (6.4) для любого конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$

$$h(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A}) = h(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, (\boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A})^{\Lambda}).$$

Так как величина $\operatorname{diam}(\boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A})^{\Lambda}$ произвольно мала при достаточно малом $\operatorname{diam}\mathfrak{A}$ и достаточно большом Λ, справедливо предложение 6.5(a) и, следовательно,

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = h(\underline{\boldsymbol{\sigma}}). \tag{6.20}$$

Относительно определения давления в параграфе 6.6, заметим, что равенство (6.6) не обязано выполняться для $\mathbb{Z}_{\geqslant}^{\nu}$-действий, однако при $\Lambda \subset \mathbb{Z}_{\geqslant}^{\nu}$ и $x \in \mathbb{Z}_{\geqslant}^{\nu}$ справедливо неравенство

$$Z_{\Lambda+x}(A, \mathfrak{A}) \leqslant Z_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}),$$

так как $\tau^{x}\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{\Omega}$. Поэтому функция $a \mapsto \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$ остается субаддитивной и и сохраняются соотношения (6.8) и (6.10). Кроме того,

$$P(A, \mathfrak{A}) = \lim_{a\to\infty} |\Lambda(a)|^{-1} \log Z^{*}_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A}),$$

где

$$Z^{*}_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}) = \lim_{x\to\infty} Z_{\Lambda+x}(A, \mathfrak{A}).$$

Обозначим через $Z'_{\Lambda}(A, \mathfrak{A})$ статистическую сумму, вычисленную для ограничений A и $\mathfrak{A}$ на $\boldsymbol{\Omega}'$ (см. (6.19)). Тогда

$$Z'_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}) = Z_{\Lambda}(A \circ \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A})$$

и

$$Z'_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}) \leqslant Z^{*}_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}) \leqslant Z'_{\Lambda}(A, \mathfrak{A})e^{|\Lambda|\delta},$$

где δ — максимум колебаний функции A на множествах $\mathfrak{A}_i$. Поскольку $\operatorname{diam}(\boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A})^{\Lambda}$ произвольно мал, если $\operatorname{diam}\mathfrak{A}$ достаточно мал, а Λ достаточно велико (см. § 6.6), можно утверждать, что

$$\lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0} P(A \circ \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^{-1}\mathfrak{A}) = P(A \circ \boldsymbol{\pi}).$$

Поэтому выполняются равенства (6.11) и

$$P(A) = P(A \circ \boldsymbol{\pi}). \tag{6.21}$$

Содержание параграфов 6.7, 6.8 и 6.9 переносится на $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действия без каких-либо затруднений. Леммы 6.10 и 6.11 нам не понадобятся (хотя они и верны). Теорема 6.12 остается справедливой, так как случай $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действия сводится к случаю $\mathbb{Z}^{\nu}$-действия при помощи (6.20) и (6.21). Наконец, определения множеств $\boldsymbol{I}_A$ и $\boldsymbol{I}'_A$, данные в параграфе 6.13, теорема 6.14 и замечание 6.15 также сохраняются.

6.19. Замечание

Если τ^* — $\mathbb{Z}^{\nu}$-действие на пространстве $\boldsymbol{\Omega}$, а τ — $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действие, полученное при помощи ограничения τ^* на $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$, то множество τ-инвариантных состояний совпадает с множеством τ^*-инвариантных состояний, $h_\tau = h_{\tau^*}$, $P_\tau = P_{\tau^*}$ и отображение $\boldsymbol{\pi}\colon \underline{\boldsymbol{\Omega}} \mapsto \boldsymbol{\Omega}$, введенное в параграфе 6.17, является гомеоморфизмом.

6.20. Топологическая энтропия

Величина $P_\tau(0)$ называется *топологической энтропией* $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действия τ. Из различных определений параграфов 6.6 и 6.7 видно, что топологическая энтропия служит мерой того, насколько перемешивающим является τ.[5] В частности,

$$P(0) = \sup_{\mathfrak{A}} \inf_{a} |\Lambda(a)|^{-1} \log \begin{pmatrix} \text{наименьшая мощность подпо-} \\ \text{крытия покрытия } \mathfrak{A}^{\Lambda(a)} \end{pmatrix}.$$

Вариационный принцип в этом случае принимает вид

$$P(0) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}} h(\boldsymbol{\sigma}).$$

Если $\nu > 1$ и $P_\tau(0) > 0$, то, как нетрудно проверить, топологическая энтропия $\mathbb{Z}_{\geqslant}$-действия, порожденного каждой образующей $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действия τ, равна $+\infty$.

[5] Вероятно, точнее было бы сказать, что топологическая энтропия показывает, насколько быстро (в логарифмической шкале) при действии τ дробятся открытые покрытия. Связь энтропии с перемешиванием, понимаемым в том смысле, который имеет этот термин в теории динамических систем (см. Корнфельд, Синай, Фомин [1*]), также существует, но она сложнее (см., например, Рохлин [3*]). — *Прим. ред.*

6.21. Относительное давление

Пусть $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}'$ — метризуемые компактные множества с $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$-действиями τ и τ', каждое из которых порождено ν непрерывными отображениями. Предположим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Omega}' & \xrightarrow{\tau'} & \mathbf{\Omega}' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ \mathbf{\Omega} & \xrightarrow{\tau} & \mathbf{\Omega} \end{array}$$

коммутативна, а π — непрерывное сюръективное отображение. Обозначим через $\boldsymbol{I}$ (соответственно через $\boldsymbol{I}'$) множество τ-инвариантных вероятностных мер на $\mathbf{\Omega}$ (соответственно τ'-инвариантных вероятностных мер на $\mathbf{\Omega}'$).

Пусть $A' \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega}')$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{\Omega}$ и Λ — конечное подмножество множества $\mathbb{Z}^{\nu}_{\geqslant}$.

Для любого конечного открытого покрытия пространства $\mathbf{\Omega}'$ положим

$$Z_\Lambda(A', \boldsymbol{\xi}, \mathfrak{A}) = \min\Big\{\sum_j \exp\Big[\sup_{\boldsymbol{\xi}' \in \mathfrak{B}_j \cap \boldsymbol{\pi}^{-1}\boldsymbol{\xi}} \sum_{x\in\Lambda} A'(\tau'^x \boldsymbol{\xi}')\Big] :$$
$$(\mathfrak{B}_j) - \text{ подсемейство покрытия } \mathfrak{A}^\Lambda, \text{ которое покрывает } \pi^{-1}\boldsymbol{\xi}\Big\}$$

и аналогичным образом определим $Z^{(1)}_\Lambda$, заменив $\sup\limits_{\boldsymbol{\xi}'}$ на $\inf\limits_{\boldsymbol{\xi}'}$.

При $\varepsilon > 0$ положим[6]

$$Z^{(2)}_\Lambda(A', \boldsymbol{\xi}, \varepsilon) = \sup\Big\{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in S} \exp \sum_{x\in\Lambda} A'(\tau'^x \boldsymbol{\xi}') :$$
$$S \subset \pi^{-1}\boldsymbol{\xi} \text{ и } S \text{ является } (\Lambda, \varepsilon)\text{-разделенным}\Big\},$$

$$Z^{(3)}_\Lambda(A, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon) = \inf\Big\{\sum_{\boldsymbol{\xi}\in S} \exp \sum_{x\in\Lambda} A'(\tau'^x \boldsymbol{\xi}') :$$
$$S \subset \mathbf{\Omega} \text{ и } S \text{ является } (\Lambda, \varepsilon)\text{-протяженным для } \pi^{-1}\boldsymbol{\xi}\Big\}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

[6] Возможны и другие определения; например, в $Z^{(2)}$ вместо sup по всем (Λ, ε)-разделенным множествам $S \subset \pi^{-1}\boldsymbol{\xi}$ можно взять одно максимальное (Λ, ε)-разделенное множество $S \subset \pi^{-1}\boldsymbol{\xi}$, а в $Z^{(3)}$ вместо $S \subset \mathbf{\Omega}$ — взять множество $S \subset \pi^{-1}\boldsymbol{\xi}$.

6.22. Теорема[7]

(a) *Предположим, что* $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$. *Тогда для почти всех* $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Omega}$ *относительно меры* $\boldsymbol{\sigma}$ *существует следующий предел*:

$$\begin{aligned}P(A', \boldsymbol{\xi}) &= \lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z_{\Lambda(a)}(A', \boldsymbol{\xi}, \mathfrak{A}) = \\ &= \lim_{\operatorname{diam}\mathfrak{A}\to 0} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z^{(1)}_{\Lambda(a)}(A', \boldsymbol{\xi}, \mathfrak{A}) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z^{(2)}_{\Lambda(a)}(A', \boldsymbol{\xi}, \varepsilon) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{|\Lambda(a)|} \log Z^{(3)}_{\Lambda(a)}(A', \boldsymbol{\xi}, \varepsilon),\end{aligned}$$

который определяет измеримую τ-*инвариантную функцию* $P(A', \cdot)$ *на пространстве* $\boldsymbol{\Omega}$.

(b) *Имеет место следующий вариационный принцип*:

$$\int P(A', \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}(d\boldsymbol{\xi}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}'\in \boldsymbol{I}' :\, \pi\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}} (h_{\tau'}(\boldsymbol{\sigma}'|\pi) + \boldsymbol{\sigma}'(A')), \tag{6.22}$$

где относительная энтропия $h_{\tau'}(\boldsymbol{\sigma}'|\pi)$ *равна* $h_{\tau'}(\boldsymbol{\sigma}') - h_{\tau}(\pi\boldsymbol{\sigma}')$ *при* $h_{\tau}(\pi\boldsymbol{\sigma}') < +\infty$.

Очевидно, если мера $\boldsymbol{\sigma}$ является эргодической, то можно считать, что $P(A', \boldsymbol{\xi})$ не зависит от $\boldsymbol{\xi}$, и писать $P(A', \boldsymbol{\sigma})$ вместо $P(A', \boldsymbol{\xi})$.

6.23. Следствие

Пусть $\nu = 1$, F — *конечное множество и* $M\colon \boldsymbol{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^{F^2}$ — *непрерывная функция со значениями в множестве* $F\times F$-*матриц с элементами* $M_{jk} > 0$. *Тогда при* $\boldsymbol{\sigma}$-*почти всех* $\boldsymbol{\xi}$ *существует предел*

$$P_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||M(\boldsymbol{\xi})M(\tau\boldsymbol{\xi}) \ldots M(\tau^{n-1}\boldsymbol{\xi})||. \tag{6.23}$$

Если $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} \times F^{\mathbb{Z}}$ *и* $\pi\colon \boldsymbol{\Omega}' \mapsto \boldsymbol{\Omega}$ — *каноническая проекция, то* $P_{\boldsymbol{\xi}} = P(A', \boldsymbol{\xi})$, *где*

$$A'(\boldsymbol{\xi}, (\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}}) = \log M(\boldsymbol{\xi})_{\xi_0\xi_1},$$

и справедлива формула (6.22).

(По поводу существования предела (6.23) см. Фюстенберг, Кестен [1] и Оселедец [1].)

[7] См. Ледрапье и Уолтерс [1].

Библиографические замечания

Понятие энтропии было введено Колмогоровым и Синаем. Теперь оно является классическим для $\nu = 1$ (см. Биллингслей [1]). Случай $\nu > 1$ был рассмотрен Конзом [1].

Многое из остального содержания этой главы можно найти в работе Уолтерса [1]. Он определил топологическое давление и доказал вариационный принцип (теорему 6.12) при $\nu = 1$ (фактически — для непрерывных отображений). Обобщение на случай $\nu > 1$ было получено Эльсаноуси [1].

Вариационный принцип Уолтерса явился обобщением вариационного принципа для решетчатых систем (теорему 3.12). Его появлению частично способствовало промежуточное обобщение, сделанное Рюэлем в [4] (где было определено давление) и более ранние работы по топологической энтропии (см. § 6.20). Определение топологической энтропии принадлежит Адлеру, Конхейму и МакЭндрю [1]; в дальнейшем эквивалентные определения были предложены Боуэном [3]. Гудвин доказал для всех $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$ неравенство $P(0) \geqslant h(\boldsymbol{\sigma})$. Совпадение $P(0)$ с точной верхней гранью энтропии $h(\cdot)$ доказано Динабургом [1] для случая конечномерного $\boldsymbol{\Omega}$, а затем Гудменом [1] для любого $\boldsymbol{\Omega}$. С технической точки зрения, существенную роль играет лемма 6.10, доказанная Гудвином.

В этой главе мы следовали в основном изложению Боуэна [6], за исключением простого доказательства второй половины теоремы 6.12, найденного Денкером [1]. Другое очень простое доказательство всей теоремы принадлежит Мисюревичу [1]. Теорема 6.14 в данном контексте, по-видимому, является новой. За остальными подробностями рекомендую обратиться к работе Боуэна [6].

Упражнения

1. (См. Боуэн [6], леммы 2.2 и 2.3.)

(а) Пусть $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$ — борелевские покрытия пространства $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{A}'' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}'' \vee \mathfrak{B}) + H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) \leqslant 0$$

(новая форма сильной субаддитивности энтропии, см. (3.22)). Это неравенство можно переписать в виде

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{A}'' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) \leqslant$$
$$\leqslant H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) + H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}'' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}).$$

Следовательно, если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — борелевские покрытия, то

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}^\Lambda) &\leqslant H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}^\Lambda \vee \mathfrak{B}^\Lambda) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}^\Lambda) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{x\in\Lambda} [H(\boldsymbol{\sigma}, (\tau^{-x}\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}^\Lambda) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}^\Lambda)] \leqslant \\
&\leqslant \sum_{x\in\Lambda} [H(\boldsymbol{\sigma}, (\tau^{-x}\mathfrak{A}) \vee (\tau^{-x}\mathfrak{B})) - H(\boldsymbol{\sigma}, \tau^{-x}\mathfrak{B})] = \\
&= |\Lambda|[(H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}))].
\end{aligned}
$$

Отсюда вытекает неравенство (6.5).

(b) Пусть заданы $\mathfrak{A}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда можно выбрать δ, для которого

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) < \varepsilon,$$

если $\operatorname{diam} \mathfrak{B} < \delta$.

[Обозначим через $\triangle$ симметрическую разность множеств: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Найдется такое $\alpha > 0$, что если $\mathfrak{A}'$ — разбиение, элементам которого отвечает то же множество индексов, что и элементам $\mathfrak{A}$, и

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i \triangle \mathfrak{A}'_i) < \alpha \text{ при всех } i, \tag{$*$}$$

то

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}') - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}') = -\sum_{i,\,k} \boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}'_k) \log \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}'_k)}{\boldsymbol{\sigma}(\mathfrak{A}'_k)} < \varepsilon.$$

Если δ достаточно мало и $\operatorname{diam} \mathfrak{B} < \delta$, то существует разбиение $\mathfrak{A}'$, являющееся укрупнением разбиения $\mathfrak{B}$ (т. е. элементы $\mathfrak{A}'$ — объединения элементов $\mathfrak{B}$), для которого имеет место $(*)$. В таком случае

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{B}) &= H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}) - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}) \leqslant \\
&\leqslant H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}') - H(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{A}') < \varepsilon).]
\end{aligned}
$$

2. В параграфах 6.6 и 6.7 мы определили соответственно величины Z_Λ и $Z_\Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Положим

$$Z^{(2)\prime}{}_\Lambda(A, \varepsilon) = \sum_{\boldsymbol{\xi}\in S} \exp \sum_{x\in\Lambda} A(\tau^x \boldsymbol{\xi}),$$

где S — произвольное максимальное (Λ, ε)-разделенное множество.

Докажите, что

(a) $Z^{(3)}_\Lambda \leqslant Z^{(2)\prime}_\Lambda \leqslant Z^{(2)}_\Lambda$ (всякое максимальное $(\Lambda,\,\varepsilon)$-разделенное множество является $(\Lambda,\,\varepsilon)$-плотным).

(b) $Z^{(2)}_\Lambda(A,\,\operatorname{diam}\mathfrak{A}) \leqslant Z_\Lambda(A,\,\mathfrak{A})$.

(c) $Z^{(1)}_\Lambda(A,\,\mathfrak{A}) \leqslant Z^{(3)}_\Lambda(A,\,\delta/2)$, если δ — число Лебега для $\mathfrak{A}$.

(d) Справедливы утверждения параграфа 6.7.

(e) Можно определить P в терминах $Z^{(2)\prime}_\Lambda$.

3. Пусть $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}^*$ — метризуемые компактные множества с $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действиями τ и τ^* соответственно и $f\colon \mathbf{\Omega}^* \to \mathbf{\Omega}$ — непрерывное отображение, для которого $f\circ\tau^{*x} = \tau^x\circ f$.

(a) Если $\boldsymbol{\sigma}^*$ — τ^*-инвариантная вероятностная мера на $\mathbf{\Omega}^*$, то $h_{\tau^*}(\boldsymbol{\sigma}^*) \geqslant h_\tau(f\boldsymbol{\sigma}^*)$. В случае, когда f инъективно, выполняется равенство.

(b) Если A — непрерывная действительная функция на $\mathbf{\Omega}$ и отображение f сюръективно, то

$$P_\tau(A) \leqslant P_{\tau^*}(A\circ f).$$

(c) Если A — непрерывная действительная функция на $\mathbf{\Omega}$ и отображение f инъективно, то

$$P_\tau(A) \geqslant P_{\tau^*}(A\circ f)$$

($P_{\tau^*}(A\circ f)$ — это давление, отвечающее ограничению функции A на множество $f\mathbf{\Omega}^*$). В случае, когда носитель любой τ-инвариантной меры содержится в $f\mathbf{\Omega}^*$, справедливо равенство.

4. Предположим, что $\mathbf{\Omega} = \bigcup\limits_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$, где множество $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ замкнуто и τ-устойчиво (т. е. $\tau^x\mathbf{\Omega}^{(\alpha)} \subset \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ при всех $x\in\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$). Тогда $P_\tau(A)$ есть точная верхняя верхняя грань по α давления функции A, ограниченной на $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$. (Выберем такое $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{I}$, что $P(A) < h(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) + \varepsilon$, и разложим $\boldsymbol{\sigma}$ на меры с подходящими носителями; см. Уолтерс [1], следствие 4.12(i).)

5. Пусть $\mathbf{\Omega}_1$, $\mathbf{\Omega}_2$ — метризуемые компакты с $\mathbb{Z}^\nu_\geqslant$-действиями τ_1, τ_2 и пусть $\tau^x = \tau_1^x\times\tau_2^x$ на $\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{\Omega}_2$. Если $A_1\in\mathscr{C}(\mathbf{\Omega}_1)$, $A_2\in\mathscr{C}(\mathbf{\Omega}_2)$ и $A(\boldsymbol{\xi}_1,\,\boldsymbol{\xi}_2) = A(\boldsymbol{\xi}_1) + A(\boldsymbol{\xi}_2)$, то $P_\tau(A) = P_{\tau_1}(A_1) + P_{\tau_2}(A_2)$. (Ср. Уолтерс [1], теорема 2.2 (viii). Воспользуйтесь определением давления в терминах $Z^{(3)}$, чтобы доказать неравенство $P_\tau(A) \leqslant P_{\tau_1}(A_1) + P_{\tau_2}(A_2)$, и вариационным принципом — для доказательства обратного неравенства.)

6. Если $P(0) < +\infty$, то

$$\{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{C}^*\colon \boldsymbol{\sigma}(A) \leqslant P(A) \text{ при всех } A\in\mathscr{C}\} = \boldsymbol{I}.$$

7. При $P(0) < +\infty$ определим множество $\boldsymbol{I}'_A$ при помощи (6.17). Покажите, что $\boldsymbol{I}_A \subset \boldsymbol{I}'_A$ и множество $D' = \{A \in \mathscr{C}\colon\ \operatorname{card} \boldsymbol{I}'_A = 1\}$ является массивным.

Покажите, что $\boldsymbol{I}'_A$ совпадает с множеством $\boldsymbol{I}''_A$ всех предельных точек последовательностей $\boldsymbol{\sigma}_n$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} [h(\boldsymbol{\sigma}_n) + \boldsymbol{\sigma}_n(A)] = P(A)$.

[Пусть $\boldsymbol{\sigma} = \lim \boldsymbol{\sigma}_n$, где $h(\boldsymbol{\sigma}_n) + \boldsymbol{\sigma}_n(A) \geqslant P(A) - 1/n$. Так как $P(A + B) \geqslant h(\boldsymbol{\sigma}_n) + \boldsymbol{\sigma}_n(A+B) \geqslant P(A) + \boldsymbol{\sigma}_n(B) - 1/n$ для всех $B \in \mathscr{C}$, то $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}'_A$ и, следовательно, $\boldsymbol{I}''_A \subset \boldsymbol{I}'_A$. Поэтому из $A \in \boldsymbol{D}'$ вытекает $\boldsymbol{I}''_A = I'_A$. Чтобы доказать в общем случае включение $\boldsymbol{I}'_A \subset \boldsymbol{I}''_A$, используйте тот факт, что $\boldsymbol{I}'_A$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества предельных точек последовательностей $\boldsymbol{\sigma}_n$, где $\boldsymbol{\sigma}_n$ — единственный элемент множества $\boldsymbol{I}'_{A_n}$, $A_n \in \boldsymbol{D}'$ и $A_n \to A$ (см. приложение A.3.7.).]

Глава 7

Статистическая механика на пространствах Смейла

Как мы убедились в главе 6, часть термодинамического формализма можно распространить на случай произвольного $\mathbb{Z}^\nu$-действия гомеоморфизмами компактного метризуемого пространства $\mathbf{\Omega}$. В этой главе мы обобщим более богатый формализм одномерных систем из главы 5 на некоторый класс $\mathbb{Z}$-действий гомеоморфизмами компактных метрических пространств. Такие $\mathbb{Z}$-действия впервые изучались в теории диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A Смейла [1]. Мы представляем здесь абстрактный вариант той части теории, которая имеет отношение к предмету этой книги. За доказательствами будем отсылать главным образом к публикациям по A-диффеоморфизмам. Эти публикации, в особенности работы Смейла [1] и Боуэна [6], содержат также соответствующие мотивировки. Главный новый излагаемой теории — это предположение о наличии *структуры локального произведения*. Пространство $\mathbf{\Omega}$ «расслаивается» на «устойчивые многообразия» V_x^+, которые экспоненциально быстро сжимаются под действием итераций отображения f, и «неустойчивые многообразия» V_x^-, которые сжимаются под действием итераций отображения f^{-1}. Если точки x и y достаточно близки, то пересечение $V_x^+ \cap V_y^-$ не пусто и состоит из единственной точки $[x, y]$. Структура локального произведения определяется тогда отображением $x, y \to [x, y]$.

7.1. Пространства Смейла

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — непустое компактное метрическое пространство с метрикой d. Предположим, что число $\varepsilon > 0$ и отображение $[\cdot, \cdot]$ обладают следующими свойствами:

(SS1) $$[\cdot, \cdot]\colon \{(x, y) \in \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}\colon d(x, y) < \varepsilon\} \to \mathbf{\Omega}$$

представляет собой непрерывное отображение, для которого $[x, x] = x$ *и*

$$[[x, y], z] = [x, z], \quad [x, [y, z]] = [x, z],$$

если правая и левая части этих соотношений определены.

Заметим, что существует такое $\varepsilon_n > 0$, что если $\operatorname{diam}(\{x_1, \ldots, x_n\}) < \varepsilon_n$, то любое выражение, полученное из $x_1, \ldots, x_n$ расстановкой вложенных друг в друга квадратных скобок, определено и равно $[x_1, x_n]$.

Пусть, в частности, $d(x, y) < \varepsilon_4$. Если мы пишем $u = [y, x]$, $v = [x, y]$, то считаем, что

$$\begin{gathered} d(u, x) < \varepsilon, \quad d(v, x) < \varepsilon, \quad d(u, v) < \varepsilon, \\ u = [u, x], \quad v = [x, v], \quad [u, v] = y. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Обратно, если u, v удовлетворяют этим условиям, то $u = [u, x] = [[u, v], x] = [y, x]$ и, аналогичным образом, $v = [x, y]$. Отсюда следует, что отображение $[\cdot, \cdot]\colon V_x^-(\delta) \times V_x^+(\delta) \mapsto \mathbf{\Omega}$, где

$$V_x^-(\delta) = \{u\colon u = [u, x],\ d(x, u) < \delta\}, \tag{7.2}$$

$$V_x^+(\delta) = \{v\colon v = [x, v],\ d(x, v) < \delta\} \tag{7.3}$$

и δ выбрано так, что если $d(x, u) < \delta$ и $d(x, v) < \delta$, то $d(x, [u, v]) < \varepsilon_4$, является гомеоморфизмом на некоторое открытое подмножество пространства $\mathbf{\Omega}$.

Если $d(x, y) < \varepsilon_4$, то в силу (7.1), (7.2), (7.3)

$$\{[x, y]\} = V_x^+(\delta) \cap V_y^-(\delta). \tag{7.4}$$

Предположим теперь, что заданы $\lambda \in (0, 1)$ и отображение f со следующими свойствами:

(SS2) *f — гомеоморфизм пространства $\mathbf{\Omega}$, для которого $f[x, y] = [fx, fy]$, если обе части этого равенства определены, и*

$$d(f^n y, f^n z) \leqslant \lambda^n d(y, z), \text{ если } y, z \in V_x^+(\delta), \quad n > 0,$$

$$d(f^{-n} y, f^{-n} z) \leqslant \lambda^n d(y, z), \text{ если } y, z \in V_x^-(\delta), \quad n > 0.$$

Заменяя при необходимости δ меньшим числом, получим

$$V_x^+(\delta) = \{y\colon d(f^n x, f^n y) < \delta \text{ при всех } n \geqslant 0\}, \tag{7.5}$$

$$V_x^-(\delta) = \{y\colon d(f^{-n} x, f^{-n} y) < \delta \text{ при всех } n \geqslant 0\}. \tag{7.6}$$

[В самом деле, выберем такое δ', что из $d(x, y) < \delta'$ вытекает

$$d(x, [x, y]) < \delta, \quad d(x, [y, x]) < \delta.$$

Тогда справедливы следующие импликации (каждое неравенство имеет место при всех $n \geqslant 0$):

$$\begin{aligned} d(f^n x,\, f^n y) < \delta' \Rightarrow d(f^n x,\, f^n [y,\, x]) < \delta \Rightarrow f^n[y,\, x] \in V^-_{f^n x}(\delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(x,\, [y,\, x]) \leqslant \lambda^n d(f^n x,\, f^n[y,\, x]) \leqslant \lambda^n \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow d(x,\, [y,\, x]) = 0 \Rightarrow y = [[y,\, x],\, [x,\, y]] = [x,\, [x,\, y]] = [x,\, y]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\{y\colon d(f^n x,\, f^n y) < \delta' \text{ для всех } n \geqslant 0\} \subset V^+_x(\delta').$$

Обратное включение следует из (SS2). Таким образом, мы доказали (7.5) с заменой δ на некоторое меньшее число δ'. Доказательство соотношения (7.6) проводится аналогично.]

Определим *пространство Смейла* как компактное метрическое пространство $\mathbf{\Omega}$ вместе с отображением $[\cdot, \cdot]$ и гомеоморфизмом f, удовлетворяющими условиям (SS1) и (SS2) при подходящих ε и λ.

Заметим, что существует естественная *двойственность*, при которой f переходит в f^{-1}, $[x,\, y]$ — в $[y,\, x]$, V^+ — в V^- и т. д.

7.2. Пример

Пусть Ω — пространство конфигураций $\mathbb{Z}$-решетчатой системы $(\Omega_0,\, t)$ и τ — соответствующий сдвиг (см. главу 5). Для произвольного $\lambda \in (0,\, 1)$ определим расстояние d на Ω равенством

$$d(\xi,\, \eta) = \lambda^k, \tag{7.7}$$

где $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega$, $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega$ и $k = \inf\{|n|\colon \xi_n \neq \eta_n\}$.

Если $d(\xi,\, \eta) < 1$, то $\xi_0 = \eta_0$ и можно положить

$$[\xi,\, \eta] = (\,\ldots,\, \eta_{-l},\, \ldots,\, \eta_{-1},\, \xi_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_l,\, \ldots) \in \Omega.$$

Нетрудно проверить, что условия параграфа 7.1 выполняются при $\mathbf{\Omega} = \Omega$, $f = \tau$, $\varepsilon = \delta = 1$.

Так же легко доказывается, что банахово пространство $\mathscr{C}^\alpha(\Omega)$ действительных гельдеровских функций с показателем α совпадает с пространством $\mathscr{F}^\theta$, $\theta = \lambda^{\alpha/2}$, введенным в параграфе 5.19.

7.3. Свойства пространств Смейла

Как видно из (7.5), (7.6), (7.4), f является разделяющим гомеоморфизмом с разделяющей константой δ, если δ достаточно мало. Более точно, существует такое $C > 0$, что если $d(f^k x,\, f^k y) < \delta$ при $|k| < n$, то $d(x,\, y) < C\lambda^n$. [Действительно, положив $C = \max\{\operatorname{diam}\boldsymbol{\Omega},\, 2\varepsilon/\lambda\}$ и пользуясь условием (SS2) при $n \neq 0$, получаем

$$d(x,\, [x,\, y]) \leqslant \lambda^{n-1} d(f^{-n+1}x,\, f^{-n+1}[x,\, y]),$$
$$d([x,\, y],\, y) \leqslant \lambda^{n-1} d(f^{n-1}[x,\, y],\, f^{n-1}y).]$$

Пусть S — конечный или бесконечный интервал[1] в $\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in S} \in \boldsymbol{\Omega}^S$ и $\alpha > 0$. Назовем $\boldsymbol{x}$ *α-траекторией*, если

$$d(fx_k,\, x_{k+1}) < \alpha \text{ если } k,\, k+1 \in S.$$

Будем говорить, что $x \in \boldsymbol{\Omega}$ *α-отслеживает* $\boldsymbol{x}$, если

$$d(f^k x,\, x_k) < \alpha \text{ при всех } k \in S.$$

Для всякого $\beta > 0$ существует такое $\alpha > 0$, что

(a) *каждая α-траектория $\boldsymbol{x}$ β-отслеживается некоторой точкой $x \in \boldsymbol{\Omega}$;*

(b) *если $x \in \boldsymbol{\Omega}$ и $d(f^n x,\, x) < \alpha$, то существует $y \in \boldsymbol{\Omega}$, для которого $f^n y = y$ и*

$$d(f^k x,\, f^k y) < \beta \text{ при всех } k \in [0,\, n]$$

(см. Боуэн [6], предложение 3.6 и следствие 3.7.)

Неблуждающее множество системы $(\boldsymbol{\Omega},\, f)$, определяемое как

$$\{x \in \boldsymbol{\Omega}\colon U \cap \bigcup_{n>0} f^n U \neq \varnothing \text{ для всякого открытого множества } U \ni x\},$$

является замыканием множества

$$\{x \in \boldsymbol{\Omega}\colon f^n x = x, \text{ при котором } n > 0\}$$

периодических точек.

Это утверждение есть *лемма Аносова о замыкании* (см. Боуэн [6], предложение 3.8[2]). Заметим, что множество неблуждающих точек непусто (см. приложение A.2).

[1] S может иметь вид $[k,\, l]$, $[k,\, +\infty)$, или $(-\infty,\, l]$, или $\mathbb{Z}$.

[2] См. также Нитецки. — *Прим. ред.*

7.4. «Спектральное разложение» Смейла

Неблуждающее множество системы $(\mathbf{\Omega},\, f)$ *является объединением конечного числа непересекающихся компактных множеств* $\mathbf{\Omega}^\alpha$*, для которых* $f\mathbf{\Omega}^\alpha = \mathbf{\Omega}^\alpha$ *и ограничение* $f|\mathbf{\Omega}^\alpha$ *топологически* $(+)$*-транзитивно*[3].

Каждое $\mathbf{\Omega}^\alpha$ *есть объединение* n_α *непересекающихся компактных множеств* $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$*, циклически переставляемых отображением* f *и таких, что* $f^{n_\alpha}|\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ *топологически перемешивает.*

Этими свойствами $\mathbf{\Omega}$*,* α*,* n_α *и* $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ *определяются однозначно.*

(См. Боуэн [6], теорема 3.5.) Приведенное утверждение частично обобщает теоремы 5.2 и 5.3, относящиеся к $\mathbb{Z}$-решетчатым системам. Заметим, что неблуждающее множество системы $(\mathbf{\Omega},\, f)$ и множества $\mathbf{\Omega}^\alpha$ снова являются пространствами Смейла, а множество $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ — пространством Смейла относительно $f^{n_\alpha}|\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$.

Множества $\mathbf{\Omega}^\alpha$ называются *базисными множествами*. Носитель всякой f-инвариантной меры на $\mathbf{\Omega}$ содержится в неблуждающем множестве. В частности, каждая f-эргодическая вероятностная мера имеет носитель в одном из базисных множеств.

7.5. Марковские разбиения и символическая динамика

Пусть $\delta > 0$ достаточно мало и $x \in \mathbf{\Omega}$. Предположим, что множество $C \subset V_x^-(\delta)$ является замыканием своей внутренности в $V_x^-(2\delta)$, а множество $D \subset V_x^+(\delta)$ — замыканием своей внутренности в $V_x^+(2\delta)$. Тогда $R = [C,\, D]$ является замыканием своей внутренности в $\mathbf{\Omega}$ и называется *прямоугольником*. Его граница имеет вид

$$\partial R = \partial^+ R \cup \partial^- R,$$

где

$$\partial^+ R = [\partial C,\, D], \quad \partial^- R = [C,\, \partial D]$$

и ∂C, ∂D — границы множеств C и D в $V_x^-(2\delta)$ и $V_x^+(2\delta)$ соответственно.

Марковским разбиением называется такое конечное покрытие (R_i) пространства $\mathbf{\Omega}$ прямоугольниками, что

(a) $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

---

[3]См. определение топологических $(+)$-транзитивности, транзитивности и перемешивания в приложении А.2.

(b) если $x \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1}\operatorname{int} R_j$, то

$$f[C_i,\, x] \supset [C_j,\, fx],$$

$$f[x,\, D_i] \subset [fx,\, D_j],$$

где C_i, D_i определяются из соотношений $R_i = [C_i,\, D_i]$, $R_j = [C_j,\, D_j]$.

Пространство Смейла $\mathbf{\Omega}$ *обладает марковским разбиением произвольно малого диаметра* (см. Боуэн [1] или [6], теорема 3.12).

Для любого марковского разбиения (R_i) положим

$$\partial^+ = \bigcup_i \partial^+ R_i, \quad \partial^- = \bigcup_i \partial^- R_i.$$

Можно показать, что

$$f\partial^+ \subset \partial^+, \quad f^{-1}\partial^- \subset \partial^-.$$

Пусть Ω_0 — множество прямоугольников R_i в марковском разбиении. Положим

$$t_{R_iR_j} = \begin{cases} 1, \text{ если } \operatorname{int} R_i \cap f^{-1}\operatorname{int} R_j \neq \varnothing, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Множество Ω_0 (*множество символов*) и матрица t (*матрица переходов*) определяют $\mathbb{Z}$-решетчатую систему $(\Omega_0,\, t)$ (см. главу 5) с пространством конфигураций Ω и сдвигом τ на нем. Динамическая система $(\Omega,\, \tau)$ служит *символической динамикой* динамической системы $(\mathbf{\Omega},\, f)$. Такая терминология оправдывается следующими результатами, справедливыми для марковского разбиения достаточно малого диаметра.

7.6. Теорема

Если $\xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega$, *то* $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\xi_n$ *состоит из единственной точки* $\pi(\xi) \in \mathbf{\Omega}$. *Кроме того,*

(a) *отображение* $\pi\colon \Omega \mapsto \mathbf{\Omega}$ *непрерывно и сюръективно*;

(b) $\pi \circ \tau = f \circ \pi$;

(c) π^{-1} *однозначно определено на массивном множестве* $\mathbf{\Omega} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\partial^+ \cup \partial^-)$;

(d) *существует такое целое d, что $\pi^{-1}x$ для любой точки x состоит не более чем из d элементов*;

(e) *если гомеоморфизм f топологически $(+)$-транзитивен* (*соответственно, перемешивает*), *то система* $(\Omega_0,\, t)$ *является транзитивной* (*соответственно, перемешивающей*).

По поводу утверждений (a), (b), (c), (e) см. Боуэн [1] (§ 4) или Боуэн [6] (теорема 3.18 и предложение 3.19), по поводу утверждения (d) — Боуэн [2] (предложение 10); в качестве d можно взять $|\Omega_0|^2$ (Р. Боуэн, устное сообщение).

7.7. Гельдеровские функции

Утверждение (a) теоремы 7.6 можно уточнить. *Если число λ, использованное в* (7.7) *для определения метрики на $\mathbf{\Omega}$, совпадает с λ из условия* (SS2) *для $\mathbf{\Omega}$, то отображение π удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует такое $C > 0$, что*

$$d(\pi\xi,\, \pi\eta) \leqslant Cd(\xi,\, \eta). \tag{7.8}$$

Если $\xi \neq \eta$, то $d(\xi,\, \eta) = \lambda^n$ при некотором $n \geqslant 0$ и $\xi_k = \eta_k$ при $|k| < n$. Предположив, что диаметр марковского разбиения меньше δ, получим

$$d(f^k\pi\xi,\, f^k\pi\eta) < \delta \text{ при } |k| < n,$$

и, следовательно,

$$d(\pi\xi,\, \pi\eta) < C\lambda^n$$

(см. § 7.3). Отсюда следует (7.8).

Поскольку π удовлетворяет условию Липшица, для любой функции $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$, т. е. любой гельдеровской функции с показателем α на пространстве $\mathbf{\Omega}$ выполняется включение $A \circ \pi \in \mathscr{C}^\alpha(\Omega) = \mathscr{F}^\theta$, где $\theta = \lambda^{\alpha/2}$ (см. § 7.2). Таким образом, π порождает ограниченное линейное отображение $\mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega}) \mapsto \mathscr{F}^\theta$.

7.8. Давление и равновесные состояния

Изучение давления и равновесных состояний можно свести к аналогичной задаче для базисных множеств (см. § 7.4 и упражнения 3(c) и 4 главы 6). Поэтому мы можем предположить, что система $(\mathbf{\Omega}, f)$ обладает свойством топологически $(+)$-транзитивности. Заметим, что

$$P_f(A) \leqslant P_\tau(A \circ \pi) \tag{7.9}$$

(см. упражнение 3(b) главы 6).

Пусть $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ и система $(\mathbf{\Omega}, f)$ топологически $(+)$-транзитивна. Так как $A \circ \pi \in \mathscr{F}^\theta$, где $\theta = \lambda^{\alpha/2}$, существует единственная τ-инвариантная вероятностная мера ρ на Ω, для которой

$$h_\tau(\rho) + \rho(A \circ \pi) = P_\tau(A \circ \pi)$$

и, кроме того, $\operatorname{supp} \rho = \Omega$ (см. следствие 5.6(a)). Множества

$$\pi^{-1} \bigcap_{n \geqslant 0} f^n \partial^+, \quad \pi^{-1} \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n} \partial^-$$

замкнуты и τ-инвариантны. Их дополнения непусты и, следовательно, имеют положительную ρ-меру. Используя эргодичность ρ, получаем

$$\rho\Bigl(\pi^{-1} \bigcap_{n \geqslant 0} f^n \partial^+\Bigr) = \rho\Bigl(\pi^{-1} \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n} \partial^-\Bigr) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\pi^{-1} \partial^+) = \rho(\pi^{-1} \partial^-) = 0$$

и, значит,

$$\rho\Bigl(\pi^{-1} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\partial^+ \cup \partial^-)\Bigr) = 0.$$

Теорема 7.6(c) позволяет теперь утверждать, что $\pi\colon (\Omega, \rho) \mapsto (\mathbf{\Omega}, \pi\rho)$ изоморфизмом абстрактных динамических систем. В частности,

$$h_f(\pi\rho) = h_\tau(\rho)$$

и, следовательно,

$$P_f(A) \geqslant h_f(\pi\rho) + (\pi\rho)(A) = P_\tau(A \circ \pi).$$

Сравнение с (7.9) показывает, что

$$P_f(A) = P_\tau(A \circ \pi) \tag{7.10}$$

и $\pi\rho$ — равновесное состояние для A.

Если $\boldsymbol{\sigma}$ — какое-либо равновесное состояние для A, то существует τ-инвариантное состояние σ, для которого $\pi\sigma = \boldsymbol{\sigma}$ (это вытекает из теорем Хана – Банаха и Маркова – Какутани, см. приложения A.3.2 и A.3.4). Тогда

$$P_\tau(A \circ \pi) \geqslant h_\tau(\sigma) + \sigma(A \circ \pi) \geqslant h_f(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A) = P_f(A)$$

(см. упражнение 3(a) главы 6). Следовательно, σ является равновесным состоянием для $A \circ \pi$, а потому $\sigma = \rho$.

Заметим, что в силу плотности множества $\mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$ в $\mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$ равенство (7.10) остается справедливым для любой функции $A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

7.9. Теорема

Если $(\boldsymbol{\Omega}, f)$ — топологически $(+)$-транзитивная система и $A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$, то

$$P_f(A) = P_\tau(A \circ \pi).$$

Для $A \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$ существует единственное равновесное состояние $\boldsymbol{\rho}_A = \pi\rho$, где ρ — единственное равновесное состояние для функции $A \circ \pi$. Отображение $\pi\colon (\Omega, \rho) \to (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\rho}_A)$ порождает изоморфизм абстрактных динамических систем.

Приведем несколько следствий.

7.10. Следствие

Пусть $(\boldsymbol{\Omega}, f)$ — топологически $(+)$-транзитивная система. Тогда

(a) *Функция P_f вещественно-аналитична на $\mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$.*

(b) *Если $A \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$, то* $\operatorname{supp} \boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\Omega}$.

(c) *Пусть A, $A' \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$. Тогда $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_{A'}$, если и только если существуют $c \in \mathbb{R}$ и непрерывная функция C, для которых*

$$A' - A = c + C \circ f - C$$

(*этим равенством c определяется однозначно, а C — с точностью до аддитивной константы*).

(d) *Если $A \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$ и $(\boldsymbol{\Omega}, f)$ топологически перемешивает, то система $(\boldsymbol{\rho}_A, f)$ изоморфна сдвигу Бернулли.*

Утверждение (a) вытекает из следствия 5.27, (b) — из следствия 5.6(a), (c) доказывается так же, как теорема 5.7 (см. (a) и упражнение 2); (d) следует из теоремы 5.10.

7.11. Замечание

Функция C из следствии 7.10(c) является гельдеровской: $C \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$, если выполняется следующее условие (см. упражнения 2 и 3):

(SS3) *существует такое* $L > 0$*, что*

$$d(x,\, [x,\, y]) \leqslant L d(x,\, y).$$

Ниже это условие используется только в тех случаях, когда оно явно формулируется. Заметим, что ему удовлетворяет динамическая система примера 7.2.

Вот другие следствия теоремы 7.9.

7.12. Следствие

Предположим, что $(\mathbf{\Omega},\, f)$ *топологически перемешивает. Фиксируем* $\alpha \in (0,\, 1)$ *и для* $A,\, B_1,\, \ldots,\, B_l \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ *введем обозначение*

$$D^l(B_1,\, \ldots,\, B_l) = \frac{\partial^l}{\partial s_1 \ldots \partial s_l} P\Big(A + \sum_{i=0}^{l} s_i B_i\Big)\Big|_{s_1 = \ldots = s_l = 0}.$$

В частности, $D^1(B_1) = \boldsymbol{\rho}_A(B_1)$.

(a) *Для всякого* $M > 0$ *найдутся такие* $a,\, b > 0$*, что*

$$|\boldsymbol{\rho}_A(B_1 \cdot (B_2 \circ f^k)) - \boldsymbol{\rho}_A(B_1)\boldsymbol{\rho}_A(B_2)| \leqslant e^{a - b|k|} ||B_1||_\alpha ||B_2||_\alpha,$$

если $||A||_\alpha \leqslant M$ $(||\cdot||_\alpha$ *— норма в пространстве* $\mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega}))$.

(b) $D^2(B_1,\, B_2) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} [\boldsymbol{\rho}_A(B_1 \cdot (B_2 \circ f^k)) - \boldsymbol{\rho}_A(B_1)\boldsymbol{\rho}_A(B_2)]$.

(c) $B_1 \mapsto D^2(B_1,\, B_1)$ *является положительной полуопределенной квадратичной формой на* $\mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$*. Если выполнено условие* (SS3)*, то ее ядро имеет вид* $\{c + C \circ f - C \colon c \in \mathbb{R},\, C \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})\}$*. Существует такое* $R > 0$*, что*

$$[D^2(B_1,\, B_1)]^{1/2} \leqslant R ||B_1||_\alpha.$$

(d) *При всех* $p \in \mathbb{R} \mod 2\pi$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ipk}[\boldsymbol{\rho}_A(B_1 \cdot (B_1 \circ f^k)) - \boldsymbol{\rho}_A(B_1)\boldsymbol{\rho}_A(B_1)] \geqslant 0.$$

(e) (Центральная предельная теорема[4].) *Пусть*

$$B_\Lambda = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{k\in\Lambda} [B_1 \circ f^k - \boldsymbol{\rho}_A(B_1)],$$

где Λ *— конечный интервал на* $\mathbb{Z}$. *Обозначим через* γ *вероятностную меру на* $\mathbb{R}$, *которая имеет плотность* $(1/\sqrt{2\pi D})e^{-t^2/2D}$ *(гауссовская мера), если* $D = D^2(B_1,\, B_1) > 0$, *и приписывает единичную массу точке* 0 *(*δ*-мера* δ_0*), если* $D^2(B_1,\, B_1) = 0$. *Тогда при* $|\Lambda| \to \infty$ *мера* $B_\Lambda \boldsymbol{\rho}_A$ *слабо сходится к* γ.

Все это — переформулировка упражнений 4(e), 5 и 9 главы 5.

7.13. Следствие

Пусть динамическая система $(\boldsymbol{\Omega},\, f)$ *топологически* $(+)$*-транзитивна и* $A,\, B \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$. *Положим*

$$Z_{[a,\,b]} = \boldsymbol{\rho}_A\Bigl(\exp \sum_{k=a}^{b-1} B \circ f^k\Bigr).$$

Тогда

(a) $\lim\limits_{b-a\to\infty} \dfrac{1}{b-a} \log Z_{[a,\,b]} = P(A+B) - P(A)$.

(b) *Мера* $Z_{[a,\,b]}^{-1}(\exp \sum\limits_{k=a}^{b-1} B \circ f^k) \cdot \boldsymbol{\rho}_A$ *при* $a \to -\infty$, $b \to \infty$ *сходится в слабой топологии к* $\boldsymbol{\rho}_{A+B}$.

См. предложение 4.4 и замечание 4.5 для перемешивающих систем. Случай $(+)$-транзитивных систем рассматривается аналогично.

7.14. Равновесные состояния для негельдеровских функций

В этом параграфе мы опишем один результат, справедливый для динамических систем несколько более общей природы, чем пространства Смейла.

[4] См. Ратнер [1]; этот результат можно улучшить и обобщить, следуя упражнению 9 главы 5.

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — компактное метризуемое пространство и $f\colon \mathbf{\Omega} \mapsto \mathbf{\Omega}$ — гомеоморфизм. Выберем метрику d на $\mathbf{\Omega}$. Мы будем говорить, что f удовлетворяет условию *спецификации*, если для любого $\delta > 0$ существует такое $p(\delta) > 0$, что справедливо следующее:

для любых интервалов $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \subset \mathbb{Z}$, содержащихся в $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $d(\Lambda_i, \Lambda_j) \geqslant p(\delta)$ при $i \neq j$ и любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{\Omega}$, существует такая точка $x \in \mathbf{\Omega}$, что
$$f^{b-a+p(\delta)}x = x$$
и
$$d(f^k x, f^k x_i) < \delta \text{ при } k \in \Lambda_i.$$

Пусть A — непрерывная действительная функция на $\mathbf{\Omega}$. Сформулируем следующее условие:

(S) *Существуют такие $\delta > 0$ и $K \geqslant 0$, что если $d(f^k x, f^k y) < \delta$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, то*
$$\left|\sum_{k=0}^{n} A(f^k x) - \sum_{k=0}^{n} A(f^k y)\right| \leqslant K.$$

Боуэн [5] получил следующее условие единственности равновесного состояния:

Если гомеоморфизм $f\colon \mathbf{\Omega} \mapsto \mathbf{\Omega}$ разделяет траектории и удовлетворяет условию спецификации, а функция $A \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$ удовлетворяет условию (S)*, то A имеет единственное равновесное состояние.*

В случае пространств Смейла спецификация вытекает из перемешивания, что можно установить при помощи символической динамики (см. теорему 7.6(e)). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Если $(\mathbf{\Omega}, f)$ — топологически $(+)$-транзитивное пространство Смейла и функция $A \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$ удовлетворяет условию (S)*, то для A существует ровно одно равновесное состояние.*

(Случай топологической $(+)$-транзитивности сводится к случаю перемешивания.)

Для любого $A \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$ положим
$$\operatorname{var}_{n,\delta} A = \sup\{|A(y) - A(x)|\colon d(f^k x, f^k y) < \delta \text{ при } |k| \leqslant n\}.$$

Предположим, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{var}_{n,\delta} A < \infty$. Тогда функция A удовлетворяет условию (S) с $K = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{var}_{n,\delta} A$. В случае пространств Смейла это имеет место, если A — гельдеровская функция (поскольку $d(x, y) < C\lambda^n$, если $d(f^k x, f^k y) < \delta$ при $|k| < n$ (см. § 7.3)).

В частном случае $\mathbb{Z}$-решетчатых систем (см. пример 7.2) функция A_Φ удовлетворяет условию (S), если $\Phi \in \mathscr{B}_1$.

7.15. Сопряженные точки и сопрягающие гомеоморфизмы

Пусть, как и раньше, $\mathbf{\Omega}$ — пространство Смейла. Будем говорить, что точки x, $y \in \mathbf{\Omega}$ *сопряжены*, если

$$\lim_{|k|\to\infty} d(f^k x,\, f^k y) = 0.$$

Тогда найдется такое $n > 0$, что

$$f^n y \in V^+_{f^n x}(\delta), \quad f^{-n} y \in V^-_{f^{-n} x}(\delta)$$

и для z из некоторой окрестности O точки x можно положить

$$\varphi z = [f^{-n}[f^n[z,\, x],\, f^n y],\, f^n[f^{-n} y,\, f^{-n}[x,\, z]]].$$

Очевидно, $\varphi x = y$ и

(a) *отображение* φ *непрерывно в* O;

(b) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d(f^k z,\, f^k \varphi z) = 0$ *равномерно по* z.

Пару $(O,\, \varphi)$ со свойствами (a) и (b) будем называть *сопрягающим отображением*. Пусть $(O',\, \varphi')$ — другое сопрягающее отображение, для которого $y \in O'$, $\varphi' y = x$. Тогда и $(O \cap \varphi^{-1} O',\, \varphi'\varphi)$ является сопрягающим отображением и, как видно из (a), (b), $\varphi'\varphi$ — тождественное отображение в некоторой окрестности точки x. Поэтому O можно заменить меньшей окрестностью точки x так, чтобы в этой окрестности φ было бы гомеоморфизмом. В этом случае мы будем называть $(O,\, \varphi)$ *сопрягающим гомеоморфизмом*.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Если x и y сопряжены, то существует такой сопрягающий гомеоморфизм $(O,\, \varphi)$, что $x \in O$, $\varphi x = y$. Пусть $(O,\, \varphi)$, $(O',\, \varphi')$ — сопрягающие гомеоморфизмы. Если $O \cap \varphi^{-1} O' \neq \varnothing$, то $(O \cap \varphi^{-1} O',\, \varphi'\varphi)$ — сопрягающий гомеоморфизм. Если $x \in O \cap O'$ и $\varphi x = \varphi' x$, то $\varphi = \varphi'$ в некоторой окрестности точки x.

7.16. Предложение

(a) *Если x — неблуждающая точка и точка y сопряжена с x, то и y — неблуждающая точка.*

(b) *Если* $x \in \mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$, *то* $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ *— замыкание множества точек, сопряженных с* x.

При доказательстве утверждения (a) мы можем предполагать, что x — периодическая точка (это не ограничивает общности в силу существования сопрягающих гомеоморфизмов (§ 7.15) и леммы Аносова о замыкании (§ 7.3)). Пусть x имеет период p и O — окрестность точки y. В силу (7.4) можно выбрать число δ_4 настолько малым, что

$$V_u^+(\delta) \cap V_v^-(\delta) \neq \varnothing$$

при $d(u, v) < \delta_4$. Возьмем произвольно большое $m > 0$, для которого

$$d(f^{mp}y, x) < \delta_4/2, \quad d(f^{-mp}y, x) < \delta_4/2$$

и в силу (SS2)

$$f^{-mp}V^-_{f^{mp}y}(\delta) \subset O, \quad f^{mp}V^+_{f^{-mp}y}(\delta) \subset O.$$

Тогда

$$f^{mp}O \cap f^{-mp}O \supset V^-_{f^{mp}y}(\delta) \cap V^+_{f^{-mp}y}(\delta) \neq \varnothing,$$

что и доказывает утверждение (a).

Множества $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ удалены друг от друга на положительное расстояние и инвариантны относительно f^N при подходящем $N > 0$. Следовательно, если y сопряжено с $x \in \mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$, то $y \in \mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$, так как $\lim\limits_{|k|\to\infty} d(f^{kN}x, f^{kN}y) = 0$. Чтобы доказать (b), достаточно проверить, что множество точек, сопряженных с x, всюду плотно в $\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$. Точки $x, y \in \mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}$ сопряжены, если и только если $\lim\limits_{|k|\to\infty} d(f^{kn_\alpha}x, f^{kn_\alpha}y) = 0$, т. е. если и только если они сопряжены для $(\mathbf{\Omega}^{\alpha\beta}, f^{n_\alpha})$. Поэтому достаточно доказать, что точки, сопряженные с x, всюду плотны в $\mathbf{\Omega}$, если отображение f топологически перемешивает. Очевидно, это верно, если точки, сопряженные с ξ, где $\pi\xi = x$, всюду плотны в Ω. Но последнее есть свойство (D*) из замечания 1.14, которое имеет место потому, что система (Ω_0, t) перемешивает (теорема 7.6(e)).

7.17. Теорема

Пусть система $(\mathbf{\Omega}, f)$ *топологически* $(+)$*-транзитивна и* $\boldsymbol{\rho}_0$ *—* f*-инвариантная вероятностная мера, на которой реализуется максимум энтропии* (*мера Боуэна*). *Тогда*

(a) *Для всякого $x \in \mathbf{\Omega}$ существуют положительные меры $\boldsymbol{\sigma}^-$ и $\boldsymbol{\sigma}^+$, определенные на $V_x^-(\delta)$ и $V_x^+(\delta)$ соответственно и такие, что отображение $[\cdot,\cdot]\colon V_x^-(\delta) \times V_x^+(\delta) \to \mathbf{\Omega}$ переводит произведение $\boldsymbol{\sigma}^- \times \boldsymbol{\sigma}^+$ в ограничение меры $\boldsymbol{\rho}_0$ на множество $[V_x^-(\delta), V_x^+(\delta)]$.*

(b) *если (O, φ) — сопрягающий гомеоморфизм, то φ переводит ограничение меры $\boldsymbol{\rho}_0$ на O в ограничение $\boldsymbol{\rho}_0$ на φO:*

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_0|O) = \boldsymbol{\rho}_0|\varphi O.$$

Утверждение (a) доказано Синаем [1], а также Рюэлем и Салливеном [1, теорема 1.1]. Оно связано с тем, что $\boldsymbol{\rho}_0 = \pi\rho_0$, где (ρ_0, τ) — перемешивающий марковский процесс, если отображение $(\mathbf{\Omega}, f)$ топологически перемешивает (теорема Пэрри: Пэрри [1]).

При доказательстве утверждения (b) можно предположить, что O — достаточно малая окрестность точки x, затем использовать (a) и проверить, что факторизация меры $\boldsymbol{\rho}_0$ вблизи точки x переходит в факторизацию вблизи точки φx при естественных отображениях $V_x^\pm \to V_{\varphi x}^\pm$.

7.18. Гиббсовские состояния

Пусть $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ и (O, φ) — сопрягающий гомеоморфизм. Определим функцию $g\colon O \to \mathbb{R}$ равенством

$$g(z) = \exp \sum_{k=-\infty}^{\infty} [A(f^k\varphi z) - A(f^k z)].$$

Так как $d(f^k z, f^k\varphi z)$ равномерно стремится к нулю с экспоненциальной скоростью, функция g непрерывна. Назовем вероятностную меру $\boldsymbol{\sigma}$ на $\mathbf{\Omega}$ *гиббсовским состоянием для* A, если

$$\varphi(g \cdot (\boldsymbol{\sigma}|O)) = \boldsymbol{\sigma}|\varphi O$$

для всех сопрягающих гомеоморфизмов (O, φ). Эта формула означает, что φ переводит ограничение меры $\boldsymbol{\sigma}$ на O, умноженное на g, в отображение $\boldsymbol{\sigma}$ на φO.

Если $\boldsymbol{\sigma}$ — равновесное состояние для A, то оно является и гиббсовским состоянием для A. [Так как мера $\boldsymbol{\sigma}$ f-инвариантна, ее носитель содержится в неблуждающем множестве (см. § 7.4). Мы также знаем, что точка, сопряженная с точкой из базисного множества, содержится в том же базисном множестве (см. предложение 7.16(b)). Поэтому наше утверждение достаточно доказать для случая, когда система $(\mathbf{\Omega},\, f)$ топологически $(+)$-транзитивна. При этом предположении оно справедливо для $A = 0$ (теорема 7.17(b)) и, значит, в силу следствия 7.13(b), — для любой функции $A \in \mathscr{C}^{\alpha}(\mathbf{\Omega})$.]

7.19. Периодические точки

Обозначим через $\operatorname{Fix} f$ множество неподвижных точек отображения F. Для любой непрерывной действительной функции A на $\mathbf{\Omega}$ и любого натурального n определим статистическую сумму

$$Z_n(A) = \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x).$$

Так как f разделяет траектории с разделяющей константой δ (см. § 7.3), множество $\operatorname{Fix} f^n$ является $([1,\, n],\, \delta)$-*разделенным*.

Пусть $(\mathbf{\Omega},\, f)$ топологически перемешивает. Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется такое m, что если $x,\, y \in \mathbf{\Omega}$, то существует $z \in \mathbf{\Omega}$, для которого

$$d(y,\, z) < \alpha, \quad d(x,\, f^m z) < \alpha.$$

[Покроем пространство $\mathbf{\Omega}$ конечным числом шаров радиуса $\alpha/2$, центрами которых служат некоторые периодические точки y_i. Все y_i принадлежат множеству $\operatorname{Fix} f^N$ при некотором $N > 0$. Так как множество $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} f^{nN} V^-_{y_i}(\alpha/2)$ всюду плотно в $\mathbf{\Omega}$ (см. предложение 7.16(b)), существует такое n, что каждая точка $x \in \mathbf{\Omega}$ находится на расстоянии $< \alpha$ от множества $f^{nN} V^-_{x_i}(\alpha/2)$ при каждом i.] Поэтому, пользуясь утверждениями (a) и (b) параграфа 7.3, можно выбрать такое m, что если $n > m$ и $x \in \mathbf{\Omega}$, то существует $x' \in \operatorname{Fix} f^n$, для которого $d(f^k x,\, f^k x') < \delta$ при всех $k \in [1,\, n - m]$. Другими словами, множество $\operatorname{Fix} f^n$ является $([1,\, n - m],\, \delta)$-*плотным*.

Поскольку для перемешивающего f множество $\operatorname{Fix} f^n$ одновременно является $([1,\, n],\, \delta)$-разделенным и $([1,\, n{-}m],\, \delta)$-плотным, из параграфа 6.7 следует, что если $A \in \mathscr{C}$, то

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x).$$

Без предположения о перемешивании из спектрального разложения Смейла получаем равенство

$$P(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x\in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x). \tag{7.11}$$

7.20. Теорема

Пусть $(\mathbf{\Omega}, f)$ *топологически перемешивает. Тогда*

(a) *Функции* P_n*, определенные на пространстве* $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$ *равенством*

$$P_n(A) = \frac{1}{n} \log \sum_{x\in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x),$$

поточечно сходятся к $P(A)$ *при* $n \to \infty$.

(b) *Определим* f*-инвариантную вероятностную меру* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *с носителем в* $\operatorname{Fix} f^n$*, положив для любого* $y \in \operatorname{Fix} f^n$

$$\boldsymbol{\sigma}_n\{y\} = \frac{\exp \sum\limits_{k=0}^{n-1} A(f^k y)}{\sum\limits_{x\in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum\limits_{k=0}^{n-1} A(f^k x)}.$$

Если для функции A *существует единственное равновесное состояние* $\boldsymbol{\rho}_A$*, то при* $n \to \infty$ *последовательность* $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}$ *слабо сходится к* $\boldsymbol{\rho}_A$*. В частности, такая сходимость имеет место, когда функция* A *— гельдеровская или когда она удовлетворяет условию* (S) *из параграфа* 7.14.

Утверждение (a) было доказано выше. Так как

$$\frac{d}{ds} P_n(A+sB)|_{s=0} = \boldsymbol{\sigma}_n(B), \quad \frac{d}{ds} P(A+sB)|_{s=0} = \boldsymbol{\rho}_A(B),$$

утверждение (b) следует из (a) и выпуклости функционалов P_n.

7.21. Изучение периодических точек методами символической динамики

Периодические точки отображения f можно изучать с помощью символической динамики. Действительно, точка $\xi \in \Omega$ *периодична тогда и* *только тогда, когда периодична точка* $\pi\xi$ (правда, не обязательно с тем же периодом): это немедленно следует из теоремы 7.6(d). Известно также, что *если точка* $\pi\xi = \pi\eta$ *периодична и* $\xi_0 = \eta_0$, *то* $\xi = \eta$ (Боуэн [2], предложение 12).

7.22. Предложение

Существует конечное число $\mathbb{Z}$*-решетчатых систем* (Ω_i, t_i), *которые отвечают сдвигам* τ_i, *действующим на пространствах* Ω_i, *а также непрерывные отображения* $\pi_i\colon \Omega_i \to \mathbf{\Omega}$ *и числа* $s_i = \pm 1$ *такие, что*

(a) π_i *удовлетворяет условию Липшица и* $\pi_i\tau_i = f\pi_i$.

(b) *Существует одно значение индекса* i, *скажем,* $i = 1$, *для которого* $s_1 = +1$ *и* τ_1, Ω_1, π_1 *являются соответственно сдвигом* τ, *пространством* Ω *и отображением* π, *ассоциированными с некоторым марковским разбиением.*

(c) *Если* $i \neq 1$, *то* $\pi_i\Omega_i \neq \mathbf{\Omega}$.

(d) *Для каждого* $x \in \mathbf{\Omega}$

$$\operatorname{card}[\{x\} \cap \operatorname{Fix} f^n] = \sum_i s_i \operatorname{card}[\pi_i^{-1}\{x\} \cap \operatorname{Fix} \tau_i^n].$$

Сдвиги τ_i явно построены Мэннингом в [1] так, что имеет место (d); (a), (b), (c) вытекают из построения (в связи с (a) см. § 7.7).

7.23. Дзета-функции

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\zeta(z) = \zeta_f(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Fix} f^n| \frac{z^n}{n}.$$

В силу предложения 7.22

$$\zeta(z) = \prod_i \Big[\exp \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Fix} \tau_i^n| \frac{z^n}{n}\Big]^{s_i}.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\operatorname{Fix} \tau_i^n| = \operatorname{tr} t_i^n$$

и, следовательно,

$$\zeta(z) = \prod_i [\exp \operatorname{tr}(-\log(1 - zt_i))]^{s_i} = \prod_i [\det(1 - zt_i)]^{-s_i}.$$

Отсюда видно, что ζ имеет ненулевой радиус сходимости и *продолжается до рациональной функции переменной* z.

Более общим образом, для $A \in \mathscr{C}$ положим

$$\zeta_f(ze^A) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A) \frac{z^n}{n}.$$

При $A = 0$ это сводится к ζ-функции, определенной выше. В общем случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A) \frac{z^n}{n}$$

в силу (7.11) сходится при $|z| < e^{-P(A)}$. Таким образом, функция $z \mapsto \zeta_f(ze^A)$ является аналитической и не обращается в нуль в области $|z| < e^{-P(A)}$.

Заметим, что $\zeta_f(ze^A)$ есть произведение функций

$$\zeta_{f|\boldsymbol{\Omega}^\alpha}\left(ze^{A|\boldsymbol{\Omega}^\alpha}\right) = \zeta_{f^{n_\alpha}|\boldsymbol{\Omega}^{\alpha\beta}}\left(z^{n_\alpha} \exp \sum_{m=0}^{n_\alpha - 1} A \circ f^m | \boldsymbol{\Omega}^{\alpha\beta}\right),$$

по базисным множествам $\boldsymbol{\Omega}^\alpha$ спектрального разложения Смейла, так что можно ограничиться случаем, когда система $(\boldsymbol{\Omega},\ f)$ топологически перемешивает.

В силу предложения 7.22

$$\zeta_f(ze^A) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_i s_i \sum_{\xi \in \operatorname{Fix} \tau_i^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k \pi_i \xi) =$$

$$= \prod_i \left[\exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{\xi \in \operatorname{Fix} \tau_i^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A \circ \pi_i(\tau_i^k \xi)\right]^{s_i} = \prod_i [\zeta_{\tau_i}(ze^{A \circ \pi_i})]^{s_i}.$$

Как было замечено выше, множитель

$$\left[\zeta_{\tau_i}\left(ze^{A \circ \pi_i}\right)\right]^{s_i}$$

аналитичен и не обращается в нуль при $|z| < e^{-P(A \circ \pi_i)}$.

В силу теоремы 7.9 $P(A \circ \pi_1) = P(A)$. Если $i \neq 1$, то (см. теорему 7.6(d))

$$Z_n(A \circ \pi_i) \leqslant d \cdot Z_n(A|\pi_i\Omega_i)$$

и $P(A \circ \pi_i) \leqslant P(A|\pi_i\Omega_i)$. Так как $\pi_i\Omega_i$ — замкнутое f-инвариантное подмножество пространства $\mathbf{\Omega}$ и $\pi_i\Omega_i \neq \mathbf{\Omega}$ (см. предложение 7.22(c)), отсюда вытекает, что $P(A|\pi_i\Omega) < P(A)$ (см. следствие 7.10(b)).

7.24. Теорема

Пусть $(\mathbf{\Omega}, f)$ топологически перемешивает и $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$. Тогда существует такое $R(A) > \exp[-P(A)]$, что функция $z \mapsto \zeta(ze^A)$ мероморфна, не обращается в нуль и имеет только один полюс в круге $\{z\colon |z| < R(A)\}$. Этот полюс находится в точке $z = \exp[-P(A)]$ и его порядок равен единице.

Утверждение достаточно доказать для $\zeta_\tau(ze^{A\circ\pi})$ вместо $\zeta_f(ze^A)$, но это уже было сделано в теореме 5.29.

Заметим, что *для общего пространства Смейла $\mathbf{\Omega}$ и функции $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ существует такое $R(A) > \exp[-P(A)]$, что функция $z \mapsto \zeta(ze^A)$ мероморфна в круге $\{z\colon |z| < R(A)\}$, не обращается там в нуль и имеет полюса только в точках* $\exp[-P(A) + 2\pi ik/d]$, *$k = 0, \ldots, d-1$, где $d \in \mathbb{N}$.*

Заметим также, что в общем случае функция $z \mapsto \zeta(ze^A)$ не обязана иметь мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (см. замечание 5.30).

7.25. Следствие

Пусть $(\mathbf{\Omega}, f)$ топологически перемешивает. Тогда

(a) *Если $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} e^{nP(A)} z^n$$

сходится при $|z| < R(A)$ и, следовательно,

$$Z_n(A) e^{-nP(A)} - 1$$

при $n \to \infty$ сходится к нулю с экспоненциальной скоростью.

(Это утверждение усиливает пункт (a) теоремы 7.20 в случае, когда $A \in \mathscr{C}^{\alpha}(\mathbf{\Omega})$.)

(b) *Функция $z \mapsto \zeta(z)$ продолжается до рациональной функции на $\mathbb{C}$, у которой в точке $z = \exp[-P(0)]$ (где $P(0)$ — топологическая энтропия) имеется простой полюс, а все остальные полюса и нули строго больше по абсолютной величине, чем $e^{-P(0)}$.*

7.26. Растягивающие отображения

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — компактное метрическое пространство с метрикой d и f — непрерывное отображение пространства $\mathbf{\Omega}$ на себя[5]. Будем называть отображение f растягивающим, если существуют $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in (0,\, 1)$ со следующим свойством:

(E) *Если $d(fx,\, y') < 2\varepsilon$, то найдется единственное y, для которого $fy = y'$, $d(x,\, y) < 2\varepsilon$ и, кроме того,*

$$d(x,\, y) \leqslant \lambda d(fx,\, fy).$$

Из (E) вытекает, что

$$d(fx,\, fy) \geqslant \lambda^{-1} d(x,\, y),$$

как только $d(x,\, y) < 2\lambda\varepsilon$.

Определим отображение

$$\gamma\colon \{(x,\, y') \in \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}\colon d(fx,\, y') < \varepsilon\} \mapsto \mathbf{\Omega}$$

условиями:

$$f\gamma(x,\, y') = y', \quad d(x,\, \gamma(x,\, y')) < 2\varepsilon.$$

В силу свойства (E) они определяют γ однозначно, причем

$$d(x,\, \gamma(x,\, y')) \leqslant \lambda d(fx,\, y').$$

Кроме того, отображение γ непрерывно. [Пусть $(x,\, y') \mapsto (x_0,\, y'_0)$ и $\gamma(x,\, y') = y$, $\gamma(x_0,\, y'_0) = y_0$. Тогда

$$d(y_0,\, y) \leqslant d(y_0,\, x_0) + d(x_0,\, x) + d(x,\, y) < 2\lambda\varepsilon,$$

[5] Если f не является сюръективным, то заменим $\mathbf{\Omega}$ на $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} f^n \mathbf{\Omega}$.

так как $d(y_0, x_0) + d(x, y) < \lambda d(fx_0, y_0') + \lambda d(fx, y') < 2\lambda\varepsilon$ и $d(x_0, x)$ как угодно мало. Отсюда в силу (E) следует, что $d(y_0, y) \leqslant \lambda d(y_0', y') \to 0$.] В частности, f является локальным гомеоморфизмом (и, следовательно, открытым отображением).

Положим

$$\underline{\mathbf{\Omega}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_\leqslant} : x_n \in \mathbf{\Omega}, \quad fx_{n-1} = x_n \text{ при всех } n\},$$

$$\mathbf{f}(x_n) = (fx_n), \quad \mathbf{f}^{-1}(x_n) = (x_{n-1}), \quad \boldsymbol{\pi}(x_n) = x_0.$$

Это согласуется с определением $\underline{\mathbf{\Omega}}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\pi}$ в § 6.17. Множество $\underline{\mathbf{\Omega}}$ является компактным метрическим пространством с метрикой

$$d((x_n), (y_n)) = \sup_{n\leqslant 0} \lambda^{|n|} d(x_n, y_n),$$

а отображение $\mathbf{f}$ — гомеоморфизмом этого пространства, причем $f\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{f}$, где $\boldsymbol{\pi}$ — непрерывное открытое отображение пространства $\underline{\mathbf{\Omega}}$ на пространство $\mathbf{\Omega}$.

Если $d((x_n), (y_n)) < \varepsilon$, определим $(z_n) = [(x_n), (y_n)]$ условиями $z_0 = x_0$ и $d(z_n, y_n) < \varepsilon$ для всех n. Эквивалентное определение:

$$z_0 = x_0, \quad z_{n-1} = \gamma(y_{n-1}, z_n).$$

Отображение $[\cdot, \cdot]$ непрерывно, поскольку непрерывно γ. Легко видеть, что для него выполняются условие (SS1); (SS2) (с $\delta = \varepsilon$) также справедливо. Это же можно сказать и об условии (SS3) из параграфа 7.11, так как

$$d\big((y_n), [(x_n), (y_n)]\big) = d(x_0, y_0) \leqslant d\big((x_n), (y_n)\big).$$

Кроме того,

$$d(\mathbf{f}^{-1}(x_n), \mathbf{f}^{-1}(y_n)) \geqslant \lambda^{-1} d((x_n), (y_n)). \tag{7.12}$$

Таким образом, $\underline{\mathbf{\Omega}}$ (с отображением $[\cdot, \cdot]$ и гомеоморфизмом) является пространством Смейла, канонически связанным с растягивающим отображением f.

7.27. Замечания

(а) Поскольку $\underline{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\pi}$ определены так же, как аналогичные объекты в в параграфе 6.17, можно утверждать, что $\boldsymbol{\pi}$ индуцирует биекцию $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \mapsto \boldsymbol{\sigma}$ множества $\mathbf{f}$-инвариантных состояний на $\underline{\mathbf{\Omega}}$ и множества f-инвариантные состояния $\boldsymbol{\sigma}$ на $\mathbf{\Omega}$, для которой $h(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = h(\boldsymbol{\sigma})$. Кроме того, если $A \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$, то $P(A \circ \boldsymbol{\pi}) = P(A)$ (см. § 6.18).

(b) $\boldsymbol{\pi}$ — биекция множеств $\operatorname{Fix}\mathbf{f}^n$ и $\operatorname{Fix} f^n$ (доказательство очевидно).

(c) Отображение $\boldsymbol{\pi}$ — сжатие. Следовательно, если A — гельдеровская функция на $\boldsymbol{\Omega}$, то $A \circ \boldsymbol{\pi}$ — гельдеровская функция на $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$.

(d) Отображение f топологически $(+)$-транзитивно (соответственно, перемешивает) тогда и только тогда, когда таковым является отображение $\mathbf{f}$. [$\mathbf{f}$ топологически $(+)$-транзитивно, если и только если для любых непустых открытых множеств U, $V \subset \boldsymbol{\Omega}$ и любых p, q, $N \geqslant 0$ существует такое $n > N$, что

$$\mathbf{f}^n(\mathbf{f}^p\boldsymbol{\pi}^{-1}U) \cap (\mathbf{f}^q\boldsymbol{\pi}^{-1}V) \neq \varnothing,$$

или если существует такое $n > N + p - q$, что

$$(\boldsymbol{\pi}^{-1}U) \cap (\mathbf{f}^{-n}\boldsymbol{\pi}^{-1}V) \neq \varnothing.$$

Так как $\mathbf{f}^{-n}\boldsymbol{\pi}^{-1}V = (\boldsymbol{\pi}\mathbf{f}^n)^{-1}V = (f^n\boldsymbol{\pi})^{-1}V = \boldsymbol{\pi}^{-1}(f^n)^{-1}V$, это условие можно переписать в виде

$$(\boldsymbol{\pi}^{-1}U) \cap (\boldsymbol{\pi}^{-1}(f^n)^{-1}V) \neq \varnothing,$$

или

$$U \cap (f^n)^{-1}V \neq \varnothing \text{ или } f^nU \cap V \neq \varnothing.$$

Случай перемешивания рассматривается аналогичным образом.]

7.28. Результаты для растягивающих отображений

Из приведенных замечаний видно, что теория, связанная с давлением и равновесными состояниями для пространств Смейла, обобщается на случай растягивающего отображения. В частности, если отображение f топологически $(+)$-транзитивно и $A \in \mathscr{C}^\alpha(\boldsymbol{\Omega})$, то существует единственное равновесное состояние $\boldsymbol{\rho}_A$, т. е. единственное f-инвариантное состояние, для которого

$$h(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\rho}(A)$$

принимает максимальное значение, равное $P(A)$. Аналогичным образом, читатель может проверить, что почти все утверждения следствий 7.10, 7.12, 7.13 переносятся на растягивающие отображения буквально или с простыми изменениями.

Используя замечание 7.27(b) о периодических точках, можно показать, что остаются справедливыми также теоремы 7.20, 7.24 и следствие 7.25.

Дальнейшие результаты получаются при помощи марковских разбиений пространства $\boldsymbol{\Omega}$.

7.29. Марковские разбиения

Пусть (R_i) — марковское разбиение пространства $\underline{\mathbf{\Omega}}$. Каждое R_i имеет вид $[C_i, D_i]$, где C_i совпадает с замыканием в $V^-_{x_i}(\delta)$ при некотором x_i множества своих внутренних точек. Поэтому каждое множество $\boldsymbol{\pi} C_i \subset \mathbf{\Omega}$ имеет всюду плотную внутренность. Мы определим множества $S_j \subset \mathbf{\Omega}$ как замыкания минимальных непустых пересечений множеств $\boldsymbol{\pi}\mathrm{int}\, C_i$. Множества S_j непусты, замкнуты, имеют всюду плотную внутренность и покрывают $\mathbf{\Omega}$. Кроме того,

(a) $\mathrm{int}\, S_i \cap \mathrm{int}\, S_j = \varnothing$, если $i \neq j$;

(b) каждое $f S_i$ является объединением множеств S_j.

Семейство (S_i) будем называть *марковским разбиением*[6] для растягивающего отображения f.

Множества $\boldsymbol{\pi}^{-1} S_i$ удовлетворяют условиям, определяющим марковское разбиение пространства $\underline{\mathbf{\Omega}}$ (эти множества не имеют малого диаметра, но мы можем считать, что при некотором $N > 0$ семейство $(\mathbf{f}^N \boldsymbol{\pi}^{-1} S_i)$ является настоящим марковским разбиением пространства $\underline{\mathbf{\Omega}}$. Поэтому можно построить символическую динамику. Более точно, пусть Ω_0 — совокупность множеств S_i. Положим

$$t_{S_i S_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{int}\, S_i \cap f^{-1} \mathrm{int}\, S_j \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим пространство $\Omega_\geqslant$ так же, как это было сделано в параграфе 5.8, и введем односторонний сдвиг $\widetilde{\tau}\colon \Omega_\geqslant \mapsto \Omega_\geqslant$ равенством $\widetilde{\tau}(\xi_n)_{n\geqslant 0} = (\xi_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Этот сдвиг очевидным образом связан со сдвигом τ на пространстве Ω.

7.30. Теорема

Если $\xi = (\xi_n)_{n\geqslant 0} \in \Omega_\geqslant$, то $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} f^{-n}\xi_n$ состоит из единственной точки $\pi(\xi)$. Кроме того,

(a) *Отображение $\pi\colon \Omega_\geqslant \mapsto \mathbf{\Omega}$ является непрерывным и сюръективным.*

(b) $\pi \circ \widetilde{\tau} = f \circ \pi$.

[6] Марковские разбиения для растягивающих отображений можно получить и непосредственно с помощью упрощенной конструкции марковских разбиений для пространств Смейла; см. Боуэн [1].

(c) *Отображение* π^{-1} *однозначно определено на массивном множестве* $\mathbf{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{n\geqslant 0} f^{-n}\partial$, *где* $\partial = \bigcup\limits_i (S_i \setminus \operatorname{int} S_i)$.

(d) *Существует такое число* $d < \infty$, *что* $\operatorname{card}\pi^{-1}x \leqslant d$ *при всех* $x \in \mathbf{\Omega}$.

(e) *Если отображение* f *топологически* $(+)$*-транзитивно* (*соответственно, перемешивает*), *то сдвиг* τ *транзитивен* (*соответственно, перемешивает*).

Все это можно непосредственно получить из теоремы 7.6 (в доказательстве утверждения (e) нужно воспользоваться замечанием 7.27(b)).

7.31. Приложения

Пусть f — растягивающее отображение пространства $\mathbf{\Omega}$ и A — действительная непрерывная функция. Определим отображение $\mathscr{L}_A : \mathscr{C}(\mathbf{\Omega}) \mapsto \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$ равенством

$$(\mathscr{L}_A B)(x) = \sum_{y\colon fy=x} e^{A(y)} B(y).$$

Обозначим через D массивное множество точек пространства $\mathbf{\Omega}$, для которых отображение π^{-1} однозначно определено. Если $\pi\xi \in D$, то

$$(\mathscr{L}_A B)(\pi\xi) = \sum_{\eta\colon \widetilde{\tau}\eta=\xi} e^{A\circ\pi(\eta)} B\circ\pi(\eta) = (\mathscr{L}(B\circ\pi))(\xi),$$

где $\mathscr{L}$ — некоторый оператор на пространстве $\mathscr{C}(\Omega_{\geqslant})$. Этот оператор того же типа, что и оператор из параграфа 5.11. К нашей ситуации можно применить или приспособить рассуждения главы 5.

Рассмотрим следующий пример. *Предположим, что отображение* f *топологически перемешивает и* $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$. *Тогда существуют функция* $\widetilde{A} \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ *и вероятностная мера* $\boldsymbol{\sigma}$, *для которых*

$$\operatorname{supp}\sigma = \mathbf{\Omega}$$

и при всех $B \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nP(A)} \mathscr{L}_A^n B = \sigma(B)\cdot e^{\widetilde{A}},$$

причем сходимость равномерна на $\mathbf{\Omega}$.

[В силу предложения 5.16 сходимость равномерна на D и, следовательно, на всем $\mathbf{\Omega}$, так как D всюду плотно в $\mathbf{\Omega}$. Предположим, что при $d(x', x) < 2\varepsilon$ выполняется неравенство $|C(x') - C(x)| \leqslant cd(x, x')^\alpha$. Тогда

$$\frac{(\mathscr{L}_A e^C)(x')}{(\mathscr{L}_A e^C)(x)} = \frac{\sum\limits_{y'\colon fy'=x'} \exp[A(y') + C(y')]}{\sum\limits_{y\colon fy=x} \exp[A(y) + C(y)]} \leqslant$$

$$\leqslant \exp[a(\lambda d(x, x'))^\alpha + c(\lambda d(x, x'))^\alpha],$$

так что, $|\widetilde{A}(x) - \widetilde{A}(x')| \leqslant \widetilde{a} d(x, x')^\alpha$, где $\widetilde{a} = a\lambda^\alpha(1 - \lambda^\alpha)^{-1}$.]

В качестве другого примера рассмотрим отображение f, которое имеет якобиан e^A относительно вероятностной меры ρ на $\mathbf{\Omega}$. Это означает, что если $B \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$, то

$$(f(B \cdot \rho))(dx) = \Big[\sum_{y\colon fy=x} e^{A(y)} B(y) \Big] \cdot \rho(dx)$$

и, следовательно,

$$f^n(B \cdot \rho) = (\mathscr{L}_A^n B) \cdot \rho.$$

В частности, если отображение f топологически перемешивает и $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$, то $P(A) = 0$ и $f^n \rho \mapsto e^{\widetilde{A}} \rho$, причем норма разности $f^n\rho - e^{\widetilde{A}}\rho$ убывает экспоненциально быстро (см. упражнение 4(b) главы 5). В таком случае мера $e^{\widetilde{A}}\rho$ f-инвариантна и эквивалентна мере ρ.

Приведенные выше рассуждения часто позволяют показать, что $g^n\sigma$ имеет предел, когда σ — мера на компактном множестве Λ, но отображение $g\colon \Lambda \mapsto \Lambda$ не удовлетворяет нашему условию (E). Для этого достаточно найти сюръективное отображение $\omega\colon \mathbf{\Omega} \mapsto \Lambda$ и растягивающее отображение f, для которых $\omega \circ f = g \circ \omega$ и отображение ω^{-1} однозначно определено σ-почти всюду.

Предположим, например, что $\Lambda = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Lambda_i$ и для каждого i существуют множество $I(i)$ и непрерывное отображение $g_i\colon \Lambda_i \mapsto \bigcup\limits_{j \in I(i)} \Lambda_j$ со следующими свойствами:

(a) $\bigcup\limits_i I(i) = \{1, \ldots, n\}$.

(b) Множества Λ_i замкнуты и $\sigma(\Lambda_i \cap \Lambda_j) = 0$, если $i \neq j$.

(c) Отображения g_i биективны и

$$d(x, y) \leqslant \lambda d(fx, fy).$$

(d) Существует такая функция $A_i \in \mathscr{C}^\alpha(\Lambda_i)$, что

$$g_i(\sigma|\Lambda_i)(dx) = \exp[A_i \circ g_i^{-1}x] \cdot \Big(\sigma \Bigm| \bigcup_{j \in I(i)} \Lambda_j\Big)(dx).$$

Пусть ограничение отображения $g\colon \Lambda \mapsto \Lambda$ на Λ_i совпадает с g_i (g не обязательно определено на $\Lambda_i \cap \Lambda_j$ при $i \neq j$). Тогда $g^n\sigma$ при $n \to \infty$ имеет предел, эквивалентный мере σ. Чтобы убедиться в этом, введем множество $\mathbf{\Omega}$ последовательностей вида $(x_n,\, i_n)$, $n \geqslant 0$, где $x_n \in \Lambda_{i_n}$, $i_{n+1} \in I(i_n)$ и $x_{n+1} = g_{i_n}x_n$. Пусть $f(x_n,\, i_n) = (x_{n+1},\, i_{n+1})$, $\omega(x_n,\, i_n) = x_0$. Тогда $\omega \circ f = g \circ \omega$ и для f и метрики

$$d((x_n,\, i_n),\, (y_n,\, j_n)) = \sup_n \lambda^n \big[d(x_n,\, y_n) + 2\varepsilon(1 - \delta_{i_n j_n})\big]$$

выполняется условие (E). Положим $\rho = \omega^{-1}\sigma$ и $A(x_n,\, i_n) = A_{i_0}(x_{i_0})$.[7] Тогда $A \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ и отображение f имеет якобиан e^A относительно меры ρ.

Библиографические замечания

Диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A, были введены Смейлом в статье [1], которая до сих пор служит лучшим введением в эту тематику. Определение Смейла обобщает более раннее понятие диффеоморфизма Аносова (см. Аносов [1]). Идея абстрактного изучения A-диффеоморфизма, ограниченного на неблуждающее множество (или на гиперболическое множество), принадлежит Боуэну [1] (ср. с «Фактом 1», используемым в его работе). Наше изучение основывается на аксиомах (SS1) и (SS2), и термин «пространство Смейла» мы употребляем по отношению к динамическим систем с этими свойствами. Полученные результаты применимы к A-диффеоморфизмам и, в частности, к диффеоморфизмам Аносова.

Основным инструментом служат марковские разбиения и символическая динамика, существование которых впервые доказано Синаем в [1, 2] для диффеоморфизмов Аносова. Это доказательство было улучшено и обобщено на А-диффеоморфизмы Боуэном [1]. Синай [4] обнаружил, что, используя символическую динамику, можно применить методы статистической механики к изучению инвариантных мер на многообразии с диффеоморфизмом Аносова. Это соображение обобщается и на А-диффеоморфиз-

[7] Из (b) и (d) следует, что отображение $\omega\colon \mathbf{\Omega} \to \Lambda$ обратимо σ-почти всюду. Это и позволяет говорить о мере $\omega^{-1}\sigma$. — *Прим. ред.*

мы (см. Рюэль [5], Боуэн и Рюэль [1]). Данное изложение следует идеям Синая и монографии Боуэна [6], но содержит и некоторые новые факты.

Теория гиббсовских состояний, представленная в параграфах 7.15–7.18, соответствует общему определению гиббсовского состояния, предложенному Капокачиа [1].

Изучение периодических точек в параграфах 7.19 – 7.25 следует Боуэну [2] и Мэннингу [1]. Теорема 7.24 была анонсирована Рюэлем в [6].

Теория растягивающих отображений, развитая в параграфах 7.26 – 7.31, служит приложением теории пространств Смейла. Она является более общей (и, следовательно, менее богатой), чем теория растягивающих диффеоморфизмов Шуба [1] и Хирша [1]. Исследование итераций оператора $\mathscr{L}_A$ в параграфе 7.31 приводит к обобщению теоремы Перрона – Фробениуса (см. предложение 5.16). Развитие этой темы можно найти у Уолтерса [3], [4] и, в другом направлении, у Ласоты и Йорка [1].

Упражнения

1. Доказать, что пространство Смейла имеет конечную хаусдорфову размерность[8].

[Покроем $\mathbf{\Omega}$ конечным числом N множеств диаметра $< \delta$, где δ определено в параграфе 7.3. Для всякого $n > 0$ пространство $\mathbf{\Omega}$ можно покрыть не более чем N^{2n-1} множествами S_i диаметра $< C\lambda^n$. Поэтому, если $\alpha > (2\log N)/|\log\lambda|$, то

$$\lim_{n\to\infty} C\lambda^n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_i(\operatorname{diam} S_i)^\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} N^{2n-1}(C\lambda^n)^\alpha = \frac{C^\alpha}{N}\lim_{n\to\infty}(N^2\lambda^\alpha)^n = 0,$$

и, значит, $\dim\mathbf{\Omega} \leqslant (2\log N)/|\log\lambda|$ (см. Биллингслей [1], § 14).]

2. Пусть $(\mathbf{\Omega}, f)$ — топологически $(+)$-транзитивное пространство Смейла. Тогда следующие условия на функцию $B \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$ эквивалентны:

(a) $\boldsymbol{\sigma}(B) = 0$ для всех $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} B(f^k x) = 0$ для всех n и $x \in \operatorname{Fix} f^n$.

[8] Этот результат, принадлежащий Розенбергу, сообщен мне Боуэном.

(c) $B = C \circ f - C$, где $C \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$.

В (c) функция C определена с точностью до аддитивной постоянной, и если выполняется условие (SS3) из параграфа 7.11, то $C \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$.

[Импликации (c)⇒(a)⇒(b) тривиальны. Чтобы доказать (b)⇒(c), выберем точку $y \in \mathbf{\Omega}$, для которой множество $\Gamma = \{f^k y \colon k \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbf{\Omega}$, и построим сначала функцию C на множестве Γ так, как это было сделано при доказательстве теоремы 5.7. Пусть $u, v \in \mathbf{\Omega}$, $f^k y \to u$, $f^l y \to v$ и $l - k \to +\infty$. Если расстояние $d(u, v)$ достаточно мало, то существует точка z, для которой $f^{l-k} z = z$ и $d(f^m z, f^{k+m} y) < \delta$ при $m \in [0, l-k]$ (см. § 7.3). Тогда

$$C(v) - C(u) = \lim[C(f^l y) - C(f^k y)] = \lim \sum_{j=0}^{l-k-1} B(f^{k+j} y) =$$

$$= \lim \sum_{j=0}^{l-k-1} [B(f^{k+j} y) - B(f^j z)].$$

Последнюю сумму можно оценить почленно, пользуясь тем, что

$$d(f^{k+j} y, f^j z) < \mathrm{const} \times \max(\lambda^j, \lambda^{(l-k)-j}).$$

Перейдя к пределу при $l - k \to \infty$, $z \to [u, v]$, получим:

$$C(v) - C(u) = \sum_{j=0}^{\infty} [B(f^j u) - B(f^j [u, v])] + \sum_{j=1}^{\infty} [B(f^{-j} v) - B(f^{-j} [u, v])].$$

Таким образом,

$$|C(v) - C(u)| \leqslant \mathrm{const} \times \bigl[d(u, [u, v])^\alpha + d(v, [u, v])^\alpha\bigr].$$

Отсюда следует, что $C \in \mathscr{C}(\mathbf{\Omega})$, а если выполняется условие (SS3), то $C \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbf{\Omega})$.]

3. Используя упражнение 2, покажите, что при выполнении условия (SS3) (см. § 7.11) функция C из следствия 7.10(c) является гельдеровской.

4. Пусть f — растягивающее отображение. Тогда

(a) Если f топологически перемешивает, то множество периодических точек всюду плотно в $\mathbf{\Omega}$.

(b) f топологически перемешивает тогда и только тогда, когда для каждого непустого открытого множества $O \subset \mathbf{\Omega}$ существует такое $N > 0$, что $f^N O = \mathbf{\Omega}$.

(c) Если множество периодических точек всюду плотно в $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}$ связно, то f топологически перемешивает.

[(a): В силу замечания 7.27(d) отображение f топологически перемешивает. Поэтому $\underline{\mathbf{\Omega}}$ состоит из неблуждающих точек и, следовательно, периодические точки всюду плотны в $\underline{\mathbf{\Omega}}$. Но тогда (см. замечание 7.27(b)) периодические точки всюду плотны в $\mathbf{\Omega}$. (b): Пусть f топологически перемешивает и O — непустое открытое подмножество пространства $\mathbf{\Omega}$. С учетом (a) возьмем $x \in O \cap \operatorname{Fix} f^p$. Заменив O достаточно малым шаром с центром в точке x и пользуясь условием (E), получим $\overline{O} \subset f^p O$. Таким образом, множество $f^{np} O$ возрастает с ростом n. Если $y \in \bigcup\limits_{n>0} f^{np} O$, то в силу (E) $\{z\colon d(z, y) < 2\varepsilon\} \subset \bigcup\limits_{n>0} f^{np} O$. Так как f перемешивает, множество $\bigcup\limits_{n>0} f^{np} O$ всюду плотно в $\mathbf{\Omega}$ и, значит, совпадает со всем пространством $\mathbf{\Omega}$. Множества $f^{np} O$ открыты, а пространство $\mathbf{\Omega}$ компактно. Поэтому существует такое n, что $f^{np} O = \mathbf{\Omega}$. Обратное утверждение очевидно. (c): доказывается так же, как (b).]

Глава 8

Введение в динамические дзета-функции

Главы 8 и 9 основаны на айзенштадтовских лекциях «Динамические дзета-функции», прочитанных автором в Монреальском университете в октябре 1993 г. Но здесь акцент сделан на другом. С одной стороны, уже существуют два прекрасных обзора, посвященных этому предмету: они принадлежат Перри и Полликотту [33] и Баланди [3]. С другой стороны, теория дзета-функций для гиперболических динамических систем находится в движении благодаря продолжающейся работе Ру [45] и Фрида. По этой причине гиперболические системы здесь подробно не обсуждаются. После общего введения, содержащегося в главе 8, мы сосредоточимся на кусочно-монотонных отображениях интервала и дадим подробное доказательство обобщенного варианта теоремы Балади и Келлера [4] (гл. 9). Эта теорема содержит типичные утверждения, которые желательно иметь для дзета-функций, связанных с различными классами динамических систем, а изложенный здесь вариант представляется в разумном смысле окончательным.

Не сразу очевидно, что динамические дзета-функции, которые мы определим ниже, интересны с математической точки зрения. Наша цель в этой главе — показать, что в действительности они представляют собой интересный и естественный объект для изучения. Попутно мы вводим здесь понятия, необходимые для главы 9, что делает изложение в известном смысле замкнутым.

Для более подробного ознакомления с материалом этой главы мы рекомендуем монографию Перри и Полликотта [33] и обзорную статью Балади [3]; в них содержатся также многочисленные ссылки на литературу по динамическим дзета-функциям.

Заметим, что в гл. 8 мы отдаем предпочтение доступности перед строгой логической организацией и полнотой: эта глава представляет собой скорее введение, чем обзор.

§ 1. Подсчет периодических орбит для отображений и потоков

Пусть $f\colon M \to M$ — отображение, $\operatorname{Fix} f^m = \{x\colon f^m x = x\}$ и $\varphi\colon M \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ — матричнозначная функция. Если множество $\operatorname{Fix} f^m$ конечно при всех m, мы можем определить формальный степенной ряд

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} \operatorname{tr} \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(f^k x). \tag{1.1}$$

Пусть $(f^t)_{t \geqslant 0}$ — однопараметрическая группа отображений $f^t\colon M \to M$ (полупоток) и $(\varphi^t)_{t \geqslant 0}\colon M \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ — семейство матричнозначных функций, удовлетворяющее условиям $\varphi^0 = 1$, $\varphi^{s+t}(x) = \varphi^s(f^t x)\varphi^t(x)$. Обозначим через P семейство периодических орбит и через $T(\gamma)$ — период орбиты $\gamma \in P$. Положим

$$\zeta = \prod_{\gamma \in P} \left[\det\bigl(1 - \varphi^{T(\gamma)}(x_\gamma)\bigr)\right]^{-1}, \tag{1.2}$$

где x_γ — произвольная точка орбиты γ (здесь мы игнорируем проблему сходимости).

В частности, взяв $B\colon M \to \mathbb{C}$, можно определить φ^t (при $d = 1$) равенством $\varphi^t(x) = \exp \int\limits_0^t (B(f^u x) - s)\, du$.[1] Тогда

$$\zeta = \zeta(s) = \prod_{\gamma \in P} \left[1 - \exp \int\limits_0^{T(\gamma)} \bigl(B(f^t x_\gamma) - s\bigr)\, dt\right]^{-1}.$$

При $B = 0$ получим

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma \in P} \left(1 - e^{-sT(\gamma)}\right)^{-1}.$$

Очевидно, можно рассмотреть варианты определений (1.1) и (1.2), в которых матричнозначные функции φ и φ^t заменены на отображения векторных расслоений над f или f^t.

[1] Конечно, здесь требуется некоторое условие измеримости, но в этом параграфе оно также игнорируется. — *Прим ред.*

Продакт-формула (см. ниже §4) показывает, что определения (1.1) и (1.2) тесно связаны одно с другим. Мы будем называть объекты только что введенного типа *динамическими дзета-функциями*. В них суммируются периодические орбиты (отображений и потоков) с *весами* (определяемыми функцией φ).

§ 2. Подсдвиги конечного типа

Пусть I — непустое конечное множество, называемое *алфавитом* (можно взять $I = \{1, \ldots, \operatorname{card} I\}$), и t — матрица с элементами $t_{ij} \in \{0, 1\}$, называемая *матрицей перехода*. Множество I, наделенное дискретной топологией, компактно, вследствие чего произведение $I^{\mathbb{Z}}$ тоже компактно. Определим замкнутое подмножество $\Lambda \subset I^{\mathbb{Z}}$ и непрерывное отображение $\tau\colon \Lambda \to \Lambda$ равенствами

$$\Lambda = \{(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}\colon t_{\xi_k\xi_{k+1}} = 1 \text{ для всех } k\},$$

$$(\tau(\xi_\bullet))_l = \xi_{l+1}.$$

Пара (Λ, τ) называется *подсдвигом конечного типа*, а отображение τ — сдвигом.

Предложение 2.1 (формула Боуэна – Лэнфорда). *Дзета-функция*

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{card} \operatorname{Fix} \tau^m$$

продолжается до рациональной функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{\det(1 - zt)}.$$

Основное наблюдение состоит в том, что

$$\operatorname{card} \operatorname{Fix} \tau^m = \operatorname{tr} t^m.$$

Теперь, используя общую формулу

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A,$$

находим

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{card} \operatorname{Fix} \tau^m = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{tr} t^m =$$

$$= \exp \operatorname{tr}[-\log(1 - zt)] = [\det(1 - zt)]^{-1}.$$

Впервые это было замечено Боуэном и Лэнфордом [9].

§ 3. Продакт-формула для отображений

Пусть $\mathrm{Per}\,(n)$ — множество периодических орбит отображения $f\colon M \to M$, имеющих минимальный период n. При $\gamma \in \mathrm{Per}\,(n)$ и натуральном q обозначим через γ^q ту же орбиту γ, но пройденную q раз. Для $\gamma \in \mathrm{Per}\,(n)$, $x_\gamma \in \gamma$ положим

$$\Phi(\gamma^q) = \operatorname{tr} \prod_{k=0}^{nq-1} \varphi(f^k x_\gamma) = \operatorname{tr}\Big[\Big(\prod_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)^q\Big].$$

Пусть $\mathrm{Per}\,(n)$ — множество периодических орбит минимального периода n. Тогда

$$\sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} \operatorname{tr} \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(f^k x) = \sum_{n|m} \sum_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(n)} n \Phi(\gamma^{m/n}),$$

где $n \mid m$ означает, что n делит m. Следовательно,

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n|m} \frac{n}{m} z^m \sum_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(n)} \Phi(\gamma^{m/n}) =$$

$$= \exp \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(p)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^{pq}}{q} \Phi(\gamma^q) =$$

$$= \exp \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(p)} \Big[-\operatorname{tr} \log\Big(1 - z^p \prod_{k=0}^{p-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)\Big] =$$

$$= \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(p)} \Big[\det\Big(1 - z^p \prod_{k=0}^{p-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)\Big]^{-1}.$$

Мы получили *продакт-формулу*

$$\zeta(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{\gamma \in \mathrm{Per}\,(p)} \Big[\det\Big(1 - z^p \prod_{k=0}^{p-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)\Big]^{-1}.$$

Обозначив через $p(\gamma)$ минимальный период орбиты γ, ее можно переписать в виде

$$\zeta(z) = \prod_{\gamma \in P} \Big[\det\Big(1 - z^{p(\gamma)} \prod_{k=0}^{p(\gamma)-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)\Big]^{-1}.$$

Если, в частности, $\varphi \equiv 1$, то

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{card} \operatorname{Fix} f^m = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - z^p)^{-\operatorname{card}\mathrm{Per}(p)}.$$

Заметим, что все формулы справедливы лишь на уровне формальных степенных рядов.

Пример 3.1. Отображение $x \mapsto 1 - \mu x^2$ отрезка $[-1,\, 1]$ в себя, где μ — константа Фейгенбаума, равная 1,401155..., имеет при каждом $n \geqslant 0$ одну периодическую орбиту периода 2^n. Отсюда с помощью тождества

$$(1 - z)^{-1} = \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + z^{2^n}\Big)$$

получаем

$$\zeta(z) = \exp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} z^{2^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 - z^{2^n}\Big)^{-1} = \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + z^{2^n}\Big)^{n}.$$

§ 4. Продакт-формула для полупотоков

Предположим, что полупоток (f^t) обладает глобальным сечением Σ. Это значит, что всякая орбита $(f^t x)_{t \geqslant 0}$ пресекает Σ и существует такая функция $t\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, что $t(x)$ — наименьшее из тех $t > 0$, для которых $f^{t(x)} x \in \Sigma$. Определим отображение $\varphi\colon \Sigma \to \Sigma$ формулой $\varphi x = \varphi^{t(x)} x$

и будем писать $\varphi(x) = \varphi^{t(x)}(x)$. Тогда

$$\zeta = \prod_{\gamma \in P} \Big[\det\Big(1 - \varphi^{t(\gamma)}(x_\gamma)\Big)\Big]^{-1} = \\ = \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{\gamma \in \operatorname{Per}(p)} \Big[\det\Big(1 - \prod_{k=0}^{p-1} \varphi(f^k x_\gamma)\Big)\Big]^{-1} = \zeta(z)\big|_{z=1}.$$

Эта формула (в которой мы игнорируем проблему сходимости) связывает дзета-функцию для полупотока и дзета-функцию для отображения.

§ 5. Формула Лефшеца

Для непрерывного отображения $f\colon M \to M$ компактного многообразия M можно определить индекс $L(x,\, f) \in \mathbb{Z}$ любой изолированной неподвижной точки x. Если f дифференцируемо в этой точке и матрица $1 - D_x f$ обратима, то $L(x,\, f) = \operatorname{sign}\det(1 - D_x f)$. Сумма $\sum\limits_{x \in \operatorname{Fix} f} L(x,\, f)$ (имеющая смысл, если множество $\operatorname{Fix} f$ конечно) является гомотопическим инвариантом.

Число Лефшеца отображения f определяется равенством

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \operatorname{tr}\, f_{*i},$$

где f_{*i} — автоморфизм, который f индуцирует на группе $H_i(M,\, Q)$ i-мерных (сингулярных) гомологий с рациональными коэффициентами. Отсюда вытекает *формула следа Лефшеца*

$$\sum_{x \in \operatorname{Fix} f} L(x,\, f) = \Lambda(f).$$

Введем дзета-функцию Лефшеца

$$\widetilde{\zeta}(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} L(x,\, f^m)$$

(предполагается, что множество $\operatorname{Fix} f^m$ конечно при всех m). Тогда

$$\widetilde{\zeta}(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_i (-1)^i \operatorname{tr} f_{*i}^m = \\ = \prod_i \Big[\exp \operatorname{tr} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} f_{*i}^m\Big]^{(-1)^i} = \prod_i \left[\det\left(1 - z f_{*i}\right)\right]^{(-1)^{i+1}}.$$

Как мы видим, эта функция рациональна и допускает гомологическую интерпретацию.

Пусть x — гиперболическая периодическая точка минимального периода p (это значит, что $D_x f^p$ не имеет собственных чисел λ с $|\lambda| = 1$) и E^u — подпространство, отвечающее собственным значениям λ дифференциала $D_x f^p$ с $|\lambda| > 1$. Обозначив через $\gamma = \{x, \ldots, f^{p-1}x\}$ орбиту точки x, положим $u(\gamma) = \dim E^u$ и будем писать $\Delta(\gamma) = \pm 1$ в зависимости от того, сохраняет Df^p ориентацию в E^u или меняет ее. Следуя Смейлу [46], заметим, что

$$L(x, f^{pq}) = (-1)^{u(\gamma)} \Delta(\gamma)^q.$$

Значит, если все периодические точки преобразования f — гиперболические, мы имеем продакт-формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta}(z) &= \exp \sum_p \sum_{\gamma \in \operatorname{Per}(p)} (-1)^{u(\gamma)} \sum_q \frac{z^{pq}}{q} \Delta(\gamma)^q = \\ &= \prod_p \prod_{\gamma \in \operatorname{Per}(p)} [1 - \Delta(\gamma) z^p]^{(-1)^{u(\gamma)+1}} = \\ &= \prod_{\gamma \in P} \Big[1 - \Delta(\gamma) z^{p(\gamma)}\Big]^{(-1)^{u(\gamma)+1}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в голоморфном случае $\Delta(\gamma) = 1$, $u(\gamma)$ — четное число и $\widetilde{\zeta}(z)$ сводится к $\zeta(z)$.

Теперь естественно определить динамическую дзета-функцию Лефшеца по формуле

$$\widetilde{\zeta}(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} L(x, f^m) \operatorname{tr} \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(f^k x).$$

В общей ситуации имеет смысл попытаться свести изучение динамической дзета-функции к изучению дзета-функции Лефшеца (последняя в некотором смысле более естественна и ее легче анализировать).

Чтобы достичь успеха и, в частности, исследовать сходимость формальных степенных рядов, определяющих $\zeta(z)$, нам придется выбрать конкретный класс динамических систем и функциональное пространство, из которого берутся весовые функции φ. Оказывается, что возможны и интересны разные способы сделать такой выбор. Но это в то же время означает, что теория динамических дзета-функций имеет тенденцию распасться на ряд отдельных ветвей: все они связаны друг с другом, но различны, и объединяющая их теория отсутствует. В гл. 9 излагается одна из таких «специальных ветвей», где f предполагается кусочно-монотонным отображением отрезка. Чтобы приобрести более широкий взгляд на предмет, в этом месте имеет смысл остановиться на истории дзета-функций.

§ 6. Исторические замечания: от дзета-функции Римана к динамическим дзета-функциям

Для вещественного $s > 1$ положим

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p-\text{простое}} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Эта продакт-формула была открыта Эйлером в XVIII веке, но подробное аналитическое исследование функции ζ было проведено Риманом в XIX веке, отсюда и ее название — *дзета-функция Римана*.

При всяком целом m классы вычетов $\overline{n}$ по модулю m целых чисел n с $(n, m) = 1$[2] образуют мультипликативную группу. Пусть χ — *характер* этой группы; для любого целого n будем писать $\chi(n) = \chi(\overline{n})$, если $(n, m) = 1$, и $\chi(n) = 0$, если $(n, m) \neq 1$. Формула

$$L(s, \chi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \chi(p) p^{-s}\right)^{-1}.$$

определяет *L-функцию Дирихле*.

В дальнейшем были определены другие функции, аналогичные дзета-функции Римана и L-функции Дирихле. Часто эти функции вводились ради теоретико-числовых приложений и, как правило, обладали следующими свойствами[3]:

(i) Мероморфность на всей комплексной плоскости [положение полюсов и нулей было первым предметом изучения: дзета-функция Римана имеет простой полюс в точке $s = 1$ и простые нули при $s = -2, -4, \ldots, -2n, \ldots$

[2] (n, m) — обозначение для наибольшего общего делителя чисел n и m. — *Прим. ред.*

[3] См. статью «Zeta functions» в математическом энциклопедическом словаре Сугаккаи [1] (см. также аналогичную статью в «Математической энциклопедии», т. 2, стр. 112–119, М., 1979. — *Прим. ред.*)

(тривиальные нули), а согласно гипотезе Римана, все остальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ (нетривиальные нули)].

(ii) Представление в виде ряда Дирихле $\sum\limits_n a_n e^{-\lambda_n s}$.

(iii) Представление в виде произведения Эйлера.

(iv) Функциональное уравнение [для дзета-функции Римана, если мы положим $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, функциональное уравнение будет иметь вид $\xi(s) = \xi(1-s)$].

Пусть k — конечное поле, состоящее из q элементов, и V — несингулярное проективное алгебраическое многообразие размерности n, определенное над k (заметим, что координаты точек V принадлежат алгебраическому замыканию поля k, но коэффициенты уравнений, определяющих V, принадлежат самому k). Если N_m — число точек многообразия V, координаты которых лежат в расширении степени m поля k, можно определить дзета-функцию многообразия V, положив

$$Z(z, V) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{z^m}{m}.$$

Заметим, что

$$N_m = \operatorname{card} \operatorname{Fix} F^m,$$

где F — *морфизм Фробениуса*, заменяющий точку с координатами (x_i) точкой (x_i^q). Несколько гипотез о свойствах $Z(z, V)$, высказанных Вейлем, привели к циклу работ Вейля, Дворка, Гротендика и других; полное доказательство в конце концов дал Делинь. Было обнаружено, что $Z(z, V)$ — рациональная функция от z:

$$Z(z, V) = \prod_{l=0}^{2n} P_l(z)^{(-1)^{l+1}},$$

где P_l — многочлен, нули которого по абсолютной величине равны $q^{-l/2}$, а сам он имеет когомологическую интерпретацию (состоящую, грубо говоря, в следующем: $P_l(z) = \det\bigl(1 - zF^*|H^l(V)\bigr)$, где F^* — действие морфизма Фробениуса на когомологиях).

Если морфизм Фробениуса алгебраического многообразия V заменить диффеоморфизмом f компактного гладкого многообразия, то получится функция

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{card} \operatorname{Fix} f^m. \tag{6.1}$$

Артин и Мазур [1] показали, что для плотного в C^1-топологии множества диффеоморфизмов f

$$\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\operatorname{card}\operatorname{Fix}f^m<\infty$$

и, следовательно, ряд (6.1) имеет ненулевой радиус сходимости. Затем Смейл [46] предположил, что для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, которые он ввел, дзета-функция Артина–Мазура рациональна. Впоследствии это было доказано Гукенхеймером [17] и Мэннингом [25] (см. также Боуэн [8] и Фрид [13]).

Пусть $\{\gamma\}$ — множество замкнутых геодезических на компактной поверхности M постоянной кривизны, равной -1, и $l(\gamma)$ — длина геодезической γ. Формула

$$Z(s)=\prod_{\gamma}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-(s+k)l(\gamma)}\right) \tag{6.2}$$

определяет *дзета-функцию Сельберга*. Это целая функция порядка 2, удовлетворяющая некоторому функциональному уравнению. Она имеет «тривиальные нули» в точках $0,\ -1,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$ и «нетривиальные нули» в точках s с $\operatorname{Re}s=1/2$, а также в конечном числе точек интервала $(0,\,1)$ (нетривиальные нули функции Z связаны с собственными значениями оператора Лапласа на M).

Число $l(\gamma)$ можно интерпретировать как период периодической орбиты геодезического потока (f^t) на M. Этим подсказывается следующее определение дзета-функции потока (f^t):

$$\zeta(s)=\prod_{\gamma\in P}\left(1-e^{-sT(\gamma)}\right)^{-1}; \tag{6.3}$$

здесь P — множество периодических орбит и $T(\gamma)$ — период орбиты γ. Для геодезического потока на компактной поверхности кривизны -1 мы имеем $\zeta(s)=Z(s+1)/Z(s)$. Смейл [1] предложил определять дзета-функцию потока формулой (6.2), но это определение удовлетворительно лишь в случае, когда кривизна равна -1 (функция (6.2), вообще говоря, плохо ведет себя при замене времени).

Как мы видели, рассмотрение *арифметических дзета-функций* естественным образом приводит к определениям (6.1) и (6.3) дзета-функций, считающих периодические орбиты динамических систем. Идеи равновесной статистической механики подсказывают мысль снабдить периодические орбиты весами, т. е. заменить (6.1) и (6.3) формулами

$$\zeta(s) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} A(f^k x) \tag{6.4}$$

и

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma \in P} \Big[1 - \exp\Big(- \int\limits_0^{T(\gamma)} \big(s - B(f^t x_\gamma) \big)\, dt \Big) \Big]^{-1}, \tag{6.5}$$

где $x_\gamma \in \gamma$. Эти формулы задают *динамические дзета-функции*.

Заметим, что тривиальный выбор $B = 0$ в (6.5), превращающий эту формулу в (6.3), соответствует в силу продакт-формулы из § 4 нетривиальному выбору A в (6.4). Это делает введение веса $\varphi = e^A$ очень естественным. Определения (6.4) и (6.5) были предложены и изучены Рюэлем [6], [7], [8] (для динамических систем, удовлетворяющих аксиоме А).

Оказалось, что динамические дзета-функции тесно связаны с проблемами эргодической теории (убыванием корреляций, термодинамическим формализмом).

§ 7. Свойства динамических дзета-функций

Если мы сравним свойства теоретико-числовых дзета-функций и динамических дзета-функций, то убедимся, что для последних имеют место

(i) аналитические свойства, которые могут быть подробно изучены;

(ii) разложения в ряды Дирихле в случае полупотока;

(iii) продакт-формула;

(iv) возможно, что-то вроде функционального уравнения (см. Рюэль [15]).

Параллелизм бросается в глаза. Если, однако, мы посмотрим на (ко)гомологическую интерпретацию дзета-функции Лефшеца (§ 8.5), то обнаружим, что она полностью разрушается в результате введения весов. В действительности, вместо возможности выразить дзета-функцию в терминах действия динамической системы на конечномерных группах когомологий, мы можем только выразить ее в терминах действия динамической системы на бесконечномерных группах коцепей.

Здесь следует упомянуть, что Атья и Ботт в классической работе [1] проанализировали ситуации, в которых все-таки можно «перейти к фактору» и достичь уровня когомологических групп.

Упомянутое выше действие динамической системы на группах цепей задается так называемыми *трансфер-операторами*, а динамическая дзета-функция выражается через детерминанты этих операторов. В некоторых случаях детерминанты трансфер-операторов — это просто определители Фредгольма (в смысле Гротендика, см. ниже, § 11). Но в других случаях теория Фредгольма – Гротендика требует обобщения.

Замечательно, что Дворк уже на ранней стадии использовал трансфер-операторы в p-адической ситуации для изучения дзета-функций алгебраических гиперповерхностей над конечным полем. Аналогичные более поздние исследования касались гельдеровской дифференцируемой и аналитической ситуаций.

§ 8. Трансфер-операторы

Как и раньше, рассмотрим отображение $f\colon M \to M$, но заменим матричнозначную функцию ϕ скалярной функцией $g\colon M \to \mathbb{C}$ (матричнозначные функции через минуту появятся снова). Определим *трансфер-оператор* $\mathcal{L}$ действующий на функции $\Phi\colon M \to \mathbb{C}$ формулой

$$\mathcal{L}\Phi(x) = \sum_{y\colon fy=x} g(y)\Phi(y).$$

Отметим важное свойство:

$$\mathcal{L}\left(\Phi \cdot (\Phi' \circ f)\right) = \Phi' \cdot (\mathcal{L}\Phi).$$

Интересная ситуация возникает, естественно, в случае, когда f необратимо и существует конечное (или хотя бы дискретное) множество обратных ветвей ψ_ω (часто удается извлечь пользу из перехода от задачи с обратимым f к задаче с необратимым f). Перепишем $\mathcal{L}$ в терминах обратных ветвей ψ_ω или, более общим образом, определим (обобщенный) трансфер-оператор $\mathcal{K}$ одним из следующих равенств:

$$\mathcal{K}\Phi(x) = \sum_{\omega} \varphi_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x),$$

$$\mathcal{K} = \int m(d\omega)\varphi_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x);$$

здесь ψ_ω — гомеоморфизм, переводящий одно из подмножеств пространства M в другое, и $m(d\omega)$ — некоторая мера. Оператор $\mathcal{K}$ действует в банаховом пространстве B функций (обычно непрерывных) на M или, в более общем случае, на пространстве сечений некоторого векторного расслоения.

Если M и f — гладкие, мы можем заменить g матричнозначной функцией $g \cdot \wedge^l (T^* \psi_\omega)$ и в результате получить трансфер-оператор $\mathcal{L}^{(l)}$, действующий на l-формы, причем $\mathcal{L}^{(0)}$ — исходный трансфер-оператор $\mathcal{L}$.

§ 9. Следы и определители

Если M и f обладают свойством гладкости и график функции f трансверсален к диагонали $\Delta \subset M \times M$, естественно определить «след» (или «плоский след», см. Атья и Ботт [1], Гийемин и Стернберг [1]).

$$\operatorname{Tr} \mathcal{L} = \sum_{x \in \operatorname{Fix} f} \frac{g(x)}{|\det(1 - D_x f^{-1}|},$$

где $D_x f$ — производная функции f, действующая в касательном пространстве $T_x M$. Естественность этого определения вытекает из того, что в локальных координатах в окрестности точки x мы имеем согласно теории распределений

$$\int \mathcal{L}(\xi, \eta) \delta(\xi - \eta)\, d\xi\, d\eta = \int g(\eta) \delta(\eta - f^{-1}\xi) \delta(\xi - \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ = \int g(\xi) \delta(\xi - f^{-1}\xi)\, d\xi = g(x)/|\det(1 - D_x f^{-1})|$$

(ядро $\mathcal{L}(\xi, \eta)$ определено так, что $\mathcal{L}\Phi(\xi) = \int \mathcal{L}(\xi, \eta)\Phi(\eta)\, d\eta$).

Это определение естественным образом обобщается на трансфер-операторы $\mathcal{L}^l$ с помощью формулы

$$\operatorname{Tr} \mathcal{L}^l = \sum_{x \in \operatorname{Fix} f} \frac{g(x) \operatorname{tr}(\wedge^l D_x f^{-1})}{|\det(1 - D_x f^{-1}|},$$

где Tr обозначает след оператора в конечномерном пространстве $\wedge^l T_x M$. Тогда мы получаем таинственный результат

$$\sum_{l=0}^{\dim M} (-1)^l \operatorname{Tr} \mathcal{L}^{(l)} = \sum_{x \in \operatorname{Fix} f} g(x) \frac{\det(1 - D_x f^{-1})}{|\det(1 - D_x f^{-1})|} = \sum_{x \in \operatorname{Fix} f} g(x) L(x, f^{-1})$$

(индекс Лефшеца $L(x,\ f^{-1})$ достаточно просто связан с $L(x,\ f)$ и во многих случаях равен единице).

С помощью «следов» Tr определим «детерминант» Det обычной формулой

$$\mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L}) = \exp\Bigl(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \operatorname{Tr} \mathcal{L}^m\Bigr).$$

Тогда мы получим

$$\zeta^\times(z) = \prod_{l=0}^{\dim M} \bigl(\mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L}^l)\bigr)^{(-1)^{l+1}},$$

где $\zeta^\times$ есть ζ-функция Лефшеца. Различие между $\zeta^\times$ и ζ не должно вызывать серьезного беспокойства: часто эти две функции довольно просто связаны. Серьезная проблема состоит в том, чтобы выражению $\mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L}^l)$ придать смысл не формального степенного ряда, а аналитической функции, определенной в достаточно большой области. Здесь потребуется спектральная теория трансфер-операторов, и результат будет зависеть как от рассматриваемого класса динамических систем, так и от функционального пространства.

Обратимся теперь ненадолго к теории детерминантов Фредгольма, которые служат одним из хорошо понятых примеров функциональных детерминантов типа $\mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L})$.

§ 10. Целые аналитические функции

Стоит напомнить некоторые результаты, касающиеся целых аналитических функций.

Пусть целая аналитическая функция $f(z)$ имеет нуль порядка m в точке 0 и пусть (α_k) — последовательность других ее нулей, расположенных в порядке возрастания модулей, в которой каждый нуль повторен столько раз, какова его кратность. При $\lambda > 0$ положим

$$S(\lambda) = \sum |\alpha_k|^{-\lambda}$$

и определим показатель сходимости нулей ρ_0 формулой

$$\rho_0 = \inf\{\lambda\colon S(\lambda) < +\infty\}.$$

Если $\rho_0 < +\infty$, мы называем *родом* функции f наименьшее целое $p \geqslant 0$, для которого $S(p+1) < +\infty$ (таким образом, $p = [\rho_0]$, если только ρ_0 не есть целое число $\geqslant 1$, в этом последнем случае $p = \rho_0 - 1$). По формуле Вейерштрасса

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp g_p\left(\frac{z}{\alpha_k}\right), \tag{10.1}$$

где $g_0 = 0$, $g_p(z) = \sum\limits_{k=1}^{p} z^k/k$ и g — некоторая целая функция.

Порядок ρ целой функции $f(z) = \sum a_k z^k$ определяется равенством

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\log r} \log\log \max_{|z|=r} |f(z)| = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n\log n}{|\log|a_n||}.$$

Теорема 10.1. *Всегда справедливо неравенство*

$$\rho_0 \leqslant \rho$$

и в случае, когда $\rho < \infty$, функция g в (10.1) *— многочлен степени $\leqslant \rho$, причем $\rho_0 = \rho$, если только ρ не есть целое число $\geqslant 1$.*

§ 11. Теория Фредгольма – Гротендика

(См. Гротендик [1], [2].)

Если $E_1, \ldots, E_n$ — банаховы пространства, то норма $\|\cdot\|_1$ на $\otimes E_i$ определяется равенством

$$\|u\|_1 = \inf \sum_i \|x_{i1}\| \cdot \|x_{i2}\| \cdots \|x_{in}\|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям

$$u = \sum_i x_{i1} \otimes x_{i2} \otimes \cdots \otimes x_{in}.$$

Пополнение произведения $\otimes E_i$ по этой норме есть есть банахово пространство $\widehat{\otimes} E_i$ (*проективное тензорное произведение пространств* E_i). Гротендик назвал элементы этого пространства *фредгольмовыми ядрами*.

Если E, F — банаховы пространства и E' — пространство, сопряженное к E, то существует каноническое отображение $E'\widehat{\otimes}F \to \mathcal{L}(E,\, f)$, определение которого очевидно. Оно не увеличивает норму[4]. Образ $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(E,\, f)$ элемента $u \in E'\widehat{\otimes}F$ называется *ядерным оператором*, переводящим E в F. Всякий такой оператор компактен. В частности, образ пространства $E'\widehat{\otimes}F$ есть идеал в $\mathcal{L}(E)$. Всякий элемент $u \in E\widehat{\otimes}F$ можно записать в виде сходящегося ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

где $x_i \in E$, $y_i \in F$, $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon$ для как угодно малого ε.

Присоединив к алгебре $E'\widehat{\otimes}F$ единицу (если E бесконечномерно) и взяв

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i' \otimes x_i,$$

где $x_i \in E$, $x_i' \in E'$, естественно положить по определению

$$\operatorname{Det}(1+u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \det(\langle x_{i_l}',\, x_{i_k}\rangle) = \tag{11.1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha_n(u), \tag{11.2}$$

где $(\langle x_{i_l}',\, x_{i_k}\rangle)$ представляет собой $n\times n$-матрицу, элементы которой индексированы числами $k,\, l = 1,\, \ldots,\, n$.

Если $u_1,\, \ldots,\, u_n \in E' \otimes E$, можно написать

$$u_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i' \otimes x_{ki}, \quad k = 1,\, \ldots,\, n,$$

и определить n-линейную симметричную функцию $\widehat{\alpha}_n\colon (E'\widehat{\otimes}F)^n \to \mathbb{C}$ равенством

$$\widehat{\alpha}_n(u_1,\, \ldots,\, u_n) = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \det(\langle x_{i_l}',\, x_{ki_k}\rangle).$$

[4]Отображение $E'\widehat{\otimes}F \to \mathcal{L}(E,\, f)$ часто оказывается инъективным; в этом случае $E'\widehat{\otimes}F$ можно отождествить с подпространством пространства $\mathcal{L}(E,\, f)$.

Не ограничивая общности, можно взять $\|x'_i\| = 1$. Тогда

$$|\widehat{\alpha}_n(u_1, \ldots, u_n)| \leqslant \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \prod_{k=1}^{n} (n^{1/2}) \|x_{k i_k}\| = n^{n/2} \prod_{k=1}^{n} \sum_{i} \|x_{ki}\|,$$

так что $|\widehat{\alpha}_n(u_1, \ldots, u_n)| \leqslant n^{n/2} \|u_1\|_1 \ldots \|u_n\|_1$. Так как $\alpha_n(u) = \widehat{\alpha}_n(u, \ldots, u)$, мы видим, что (11.2) определяет на $E' \widehat{\otimes} F$ целую аналитическую функцию $u \to \operatorname{Det}(1 + u)$.

Теорема 11.1. *Следующие условия эквивалентны*:

(а) *оператор* $1 - \widetilde{u}$ *обратим на* $\mathcal{L}(E)$,

(б) *оператор* $1 - u$ *обратим в алгебре, полученной путем присоединения единицы к* $E' \widehat{\otimes} F$,

(в) $\operatorname{Det}(1 - u) \neq 0$.

Теперь можно написать

$$(1 - u)^{-1} = \frac{R(u)}{\operatorname{Det}(1 - u)},$$

где $R(u)$ — операторозначная целая аналитическая функция от u (коэффициенты которой могут быть конкретно указаны).

Теорема 11.2. *Если* λ — *собственное значение кратности* n *оператора* $\widetilde{u}$, *определенного включением* $u \in E' \widehat{\otimes} F$ (*т. е. если* n — *размерность соответствующего обобщенного собственного пространства*), *то* λ^{-1} — *нуль порядка* n *целой функции* $z \mapsto \operatorname{Det}(1 - zu)$.

Замечания 11.3. (а) След $\sum x'_i \otimes x_i \mapsto \sum \langle x'_i, x_i \rangle$ продолжается до непрерывной линейной формы $\operatorname{Tr}\colon E' \widehat{\otimes} E \to \mathbb{C}$ и справедливо тождество

$$\operatorname{Det}(1 - zu) = \exp - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{Tr} u^n,$$

связывающее степенные ряды, сходящиеся в некоторой окрестности нуля. В частности, если $z \mapsto \operatorname{Det}(1 - zu)$ имеет порядок < 1 и, значит, род 0, то $\sum |\lambda_i| < \infty$ (где λ_i — собственные значения оператора $\widetilde{u}$) и $\operatorname{Tr} u = \sum \lambda_i$.

(б) В силу наших оценок коэффициентов функции $z \mapsto \operatorname{Det}(1 - zu)$ эта целая функция имеет порядок $\leqslant 2$. Теперь, пользуясь результатом Гротендика (см. [1], гл. 2, стр. 18), получаем

$$\operatorname{Det}(1 - zu) = e^{-z \operatorname{Tr} u} \prod_{i} (1 - z\lambda_i) e^{z\lambda_i},$$

где произведение берется по всем ненулевым собственным значениям λ_i (каждое из которых повторено столько раз, какова его кратность). Если $\sum\limits_i |\lambda_i| < \infty$, то

$$\operatorname{Det}(1 - zu) = e^{-\alpha z} \prod_i (1 - z\lambda_i),$$

где $\alpha = \operatorname{Tr} u - \sum\limits_i \lambda_i$.

(в) Если M и L — компактные пространства и m — мера на L, то непрерывное ядро $K\colon M \times L \to \mathbb{C}$ определяет элемент $u \in \mathcal{C}(L)'\widehat{\otimes}\mathcal{C}(M)$, отвечающий оператору

$$\widetilde{u}\colon \Phi \mapsto \int K(\cdot,\, y)\Phi(y)m(dy),$$

причем

$$\|u\|_1 = \int \max_x |K(x,\, y)||m(dy)|.$$

Описанная ситуация содержит классический случай, рассмотренный Фредгольмом, к которому теория Гротендика, следовательно, применима. Гротендик указал ряд неклассических примеров, в которых его теория также работает.

§ 12. Линейные отображения, улучшающие аналитичность

Рассмотрим d-мерное комплексное многообразие V и ограниченную меру m на V, имеющую непрерывную положительную плотность. Для открытого $U \subset V$ обозначим через $E(U)$ подпространство голоморфных функций из $L^2(U,\, m|U)$ и через $||\cdot||_U$ соответствующую норму (можно было бы рассмотреть и более общую ситуацию, когда $E(U)$ — гильбертово пространство интегрируемых в квадрате голоморфных сечений голоморфного векторного расслоения над U).

Предложение 12.1. *Пусть F — банахово пространство и $\widetilde{u}\colon E(V) \to F$ — линейное отображение, удовлетворяющее условию*

$$||\widetilde{u}\Phi|| \leqslant \mathrm{const}||\Phi||_U,$$

где U — открытое множество с компактным замыканием $\overline{U} \subset V$. Тогда $\widetilde{u}$ связано с $u \in E(V)'\widehat{\otimes}F$, и можно написать $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k' \otimes y_k$, где

$||x_k'|| \leqslant 1$, $||y_k|| \leqslant 1$ *и* $0 < \lambda_k \leqslant \exp\left(A - Bk^{1/d}\right)$ *(A, B — константы, причем $B > 0$).*

Мы можем выбрать такие открытые множества W_1, W_2 с компактными замыканиями $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$, что

$$\overline{U} \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset V.$$

С помощью формулы Коши можно убедиться, что отображения ограничения $E(W_2) \to E(W_2) \to E(U)$ определяются ограниченными непрерывными ядрами. Будучи квадратично интегрируемыми, они отвечают элементам $\sum \lambda_i v_i' \otimes v_i$ с $\sum |\lambda_i|^2$, $||v_i'|| \leqslant 1$, $||v_i|| \leqslant 1$. Тогда отображение ограничения $E(W_2) \to E(U)$ отвечает элементу $\sum \lambda_i w_i' \otimes w_i$ с $\sum |\lambda_i|^2$, $||v_i'|| \leqslant 1$, $||v_i|| \leqslant 1$. По построению $w_i \in L^2(U, m|U)$, а применив проектирование, можно взять $w_i \in E(U)$.

При $\Phi \in E(V)$ мы можем оценить $w_i'(\Phi)$ с помощью разложения Тейлора функции Φ в конечном числе точек a_j и производных в этих точках, выраженных в терминах интегралов Коши. В результате получаем

$$w_i'(\Phi) = \sum_j \sum_{k_1, \ldots, k_d \geqslant 0} \alpha^{k_1 + \ldots + k_d} A_{ijk_1 \ldots k_d} u'_{jk_1 \ldots k_d}(\Phi),$$

где $0 < \alpha < 1$ и

$$|A_{ijk_1 \ldots k_d}| \leqslant \mathrm{const}, \quad ||u'jk_1 \ldots k_d|| \leqslant \mathrm{const}.$$

По предположению $\widetilde{u}$ получено с помощью композиции отображения ограничения $E(V) \to E(U)$ и ограниченного линейного отображения $\varphi\colon E(U) \to F$. В итоге убеждаемся, что $\widetilde{u}$ связано с

$$\sum_j \sum_{k_1, \ldots, k_d \geqslant 0} \alpha^{k_1 + \ldots + k_d} u'jk_1 \ldots k_d \otimes \sum_i \lambda_i A_{ijk_1 \ldots k_d}(\varphi w_i),$$

что и есть требуемое выражение. Заметим, что α можно считать произвольно малым положительным числом и, тем самым, B — произвольно большим.

Следствие 12.2. *Пусть $F = E(V)$, т. е. $\widetilde{u}$ улучшает аналитичность. Тогда целая функция $z \mapsto \mathrm{Det}(1 - zu)$ имеет порядок 0; более точно, существуют такие константы C, D, что*

$$|\,\mathrm{Det}(1 - zu)| \leqslant \exp\left(C + D\left(\log_+ |z|\right)^{d+1}\right).$$

См. Фрид [2], лемма 6.

Пример 12.3. Пусть $\psi : V \to U$ — голоморфное отображение и $\varphi \in E(V)$. Определим оператор, действующий на интегрируемые в квадрате голоморфные l-формы на V равенством

$$(\mathcal{L}\Phi)(z) = \varphi(z) \cdot \left(\bigwedge^{l} (T_z^* \psi) \right) (\Phi \circ \psi(z)),$$

где $T_z^*\psi$ — отображение, сопряженное с касательным отображением $T\psi$ в точке z. Если множество $\overline{U} \subset V$ компактно, то предложение 12.1 и следствие 12.2 применимы к трансфер-оператору $\mathcal{L}$. Более общим образом, эти результаты применимы к линейным комбинациям вида $\int \mu(d\omega)\mathcal{L}_\omega$, если выполнены естественные условия на φ_ω, ψ_ω и μ.

Отметим следующие результаты, полезные для приложений.

Лемма 12.4. *Пусть $V \subset \mathbb{C}^d$, V связно и $\psi V \to U$ голоморфно, причем $\overline{U} \subset V$ компактно. Тогда множество*

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \psi^k \overline{U}$$

состоит из единственной точки Z, причем все собственные значения производной ψ'_Z меньше единицы по модулю.

См. Рюэль [8], лемма 1 (D надо взять открытым, связным и удовлетворяющим условию $D \supset \overline{U}$).

Предложение 12.5. *При сделанных выше предположениях и введенных обозначениях*

$$\operatorname{Tr} \mathcal{L} = \frac{\varphi(Z) \operatorname{tr}\left(\bigwedge^{l} \psi'_Z \right)}{\det (1 - \psi'_Z)}.$$

См. Рюэль [8], лемма 2.

§ 13. Нефредгольмовы ситуации

Если динамическая система (M, f) и g голоморфны (или вещественно аналитичны) и если f растягивает, то с помощью результатов предыдущего параграфа можно доказать, что $\mathcal{L}$ улучшает аналитичность. Следовательно, существует корректно определенный определитель Фредгольма $\operatorname{Det}(1 - z\mathcal{L})$, являющийся целой функцией от z. Это приводит к дзета-функции, мероморфной на всей комплексной плоскости.

Бывают, однако, случаи, когда $\mathcal{L}$ не только не имеет конечного следа, но даже не является компактным оператором, и когда, тем не менее, можно доказать, что радиус сходимости формального степенного ряда $\operatorname{Det}(1 - z\mathcal{L})$

нетривиален. В следующей главе мы подробно обсудим один такой пример, изложив предварительно общий подход, который будет сейчас намечен и который доказал свою эффективность в нескольких различных ситуациях.

Прежде всего необходимо определенным образом выбрать банахово пространство B, на котором действует оператор $\mathcal{L}$ (гельдеровские, дифференцируемые или функции ограниченной вариации). Затем мы оценим *спектральный радиус* этого оператора, пользуясь формулой

$$\text{спектральный радиус } = \lim_{m\to\infty} ||\mathcal{L}^m||^{1/m}.$$

Пусть r таково, что существует лишь конечное число собственных значений λ оператора $\mathcal{L}$ (каждый из которых имеет конечную кратность) с $|\lambda| > r$. Точная нижняя грань этих r есть *существенный спектральный радиус* и

$$\text{сущ. спектральный радиус } = \lim_{m\to\infty} ||\mathcal{L}^m - E_m||^{1/m},$$

если E_m — операторы конечного ранга (Нассбаум [1] показал, что при подходящем выборе операторов E_m правая часть этого неравенства есть на самом деле существенный спектральный радиус). Если повезет удачно выбрать E_m, то можно получить оценку существенного спектрального адреса, которая строго меньше, чем спектральный радиус, и, следовательно, дает нетривиальную спектральную информацию.

Существует принадлежащий Хэйдну [2] трюк, который позволил в некоторых случаях показать, что $\mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L})$ — аналитическая функция переменной z при

$$|z| < (\text{сущ. спектральный радиус })^{-1}.$$

Кроме того, нули функции $z \to \mathrm{Det}(1 - z\mathcal{L})$ в указанной области — это в точности обратные величины по отношению к собственным значениям оператора $\mathcal{L}$, причем они имеют те же самые кратности (пример рассматривается в следующей главе).

Наконец, в случае, когда веса g положительны, как правило, существует собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{L}$, равное спектральному радиусу, причем

$$\lambda_0 - \exp P(\log g),$$

где P — давление, описываемое в следующем параграфе.

Намеченная только что программа была реализована в некотором числе примеров, которые мы теперь кратко опишем.

Вначале заметим, что теория Фредгольма (для улучшающих аналитичность операторов) применима к аналитическим растягивающим отображениям (Рюэль [8], Фрид [2]) и к широкому классу рациональных отображений римановой сферы (Левин, Содин, Юдицкий [1], [2]). Ее можно также применить (пользуясь марковскими разбиениями) к гиперболическим отображениям и потокам, у которых устойчивое и неустойчивое слоения аналитичны (Рюэль [8], Фрид [2]). Последнее условие, как заметили Ру [1] и Фрид, можно ослабить.

При изучении растягивающих и гиперболических динамических систем, являющихся не голоморфными, а только дифференцируемыми или гельдеровскими, естественно воспользоваться марковскими разбиениями (введенными Синаем, Ратнер и Боуэном). Тем самым, исследование исходной динамической системы сводится к *символической динамике*, т. е. к подсдвигам конечного типа (см. § 2). В связи с этим подходом мы отсылаем читателя к монографии Перри и Полликотта и, в частности, к имеющимся там ссылками на работы Рюэля, Полликотта, Хайдна и др.

Использование символической динамики имеет, однако, и недостатки: оно не носит канонического характера и не учитывает унформации, содержащейся в предположениях дифференцируемости. Этот метод последовательно улучшался в статьях Тэнгермана [1], Рюэля [10, 11] и Фрида [2].

Нетривиальные результаты аналитического характера были получены также для дзета-функций, связанных с кусочно-монотонными отображениями интервала. Для этих отображений Хофбауэр построил «марковское расширение» (в действительности бесконечное марковское разбиение), а Хофбауэр и Келлер (и многие другие) изучили динамику во всех подробностях и в различных направлениях. Первый результат, касающийся дзета-функций, был получен Баладжи и Келлером [1]. Дальнейшие результаты см. в работах Келлера и Новицкого [1] Рюэля [13]. В следующей главе мы докажем обобщенный вариант теоремы Балади и Келлера.

Другой подход к изучению дзета-функций кусочно-монотонных отображений интервала был предложен Милнором и Терстном [1] (см. также Престон [3] и Балади и Рюэль [1]).

§ 14. Термодинамический формализм[5]

Если ρ — инвариантная вероятностная мера динамической системы (M, f), то *энтропия* (инвариант Колмогорова–Синая) $h(\rho) = h_f(\rho)$

[5]В этом параграфе автор кратко излагает некоторые результаты из своей книги «Термодинамический формализм», перевод которой составляет первые семь глав настоящего издания. Ниже, во всех случаях, когда это возможно, мы заменяем ссылки общего характера на эту книгу указанием конкретных параграфов или глав. — *Прим. ред.*

измеряет скорость создания информации преобразованием f относительно ρ (см. Биллингслей [1])[6]. Если M компактно, а f и $A\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывны, то интересно рассмотреть величину $P(A)$, называемую *давлением* (см. § 6.6, а также Рюэль [4], Уолтерс [1], [2] и Денкер, Грилленбергер, Зигмунд [4]) и определяемую равенством

$$P(A) = \sup_{\rho}\left(h(\rho) + \rho(A)\right).$$

В различных случаях можно доказать, что энтропия h полунепрерывна сверху (в слабой топологии на пространстве мер) и что верхняя грань в определении $P(A)$ достигается на некоторой мере, которая называется *равновесной мерой* (см. гл. 3, а также Боуэн [6]).

В § 8.13 мы заметили, что «обычно» при $g > 0$ число $\lambda_0 = \exp P(\log g)$ является собственным значением трансфер-оператора $\mathcal{L}$ и что оно равно спектральному радиусу. В действительности «обычно» λ_0 — простое собственное значение и ему отвечает собственный вектор $\Phi > 0$, а сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ обладает собственным вектором μ, являющимся положительной мерой. Кроме того (при условии нормировки $\mu(\Phi) = 1$), произведение $\Phi \cdot \mu$ есть единственное равновесное состояние для $\log g$.

Мы по крайней мере можем проверить, что $\rho = \Phi \cdot \mu$ является f-инвариантной мерой, т. е. $\rho(A \circ f)\rho(A)$ для всех непрерывных $A\colon M \to \mathbb{R}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho(A \circ f) = \mu\left(\Phi \cdot (A \circ f)\right) = \lambda_0^{-1}(\mathcal{L}^*)\mu\left(\Phi \cdot (A \circ f)\right) = \\ = \lambda_0^{-1}\mu\left(\mathcal{L}\left(\Phi \cdot (A \circ f)\right)\right) = \lambda_0^{-1}\mu\left(A \cdot \mathcal{L}(\Phi)\right) = \mu(A \cdot \Phi) = \rho(A);\end{aligned}$$

здесь мы использовали тождество из § 8.8.

Интересен вопрос о скорости *убывания корреляций* для равновесного состояния $\rho = \Phi \cdot \mu$: верно ли, что корреляционная функция

$$C(n) = \rho\left(\cdot(B \circ f^n)\right)$$

экспоненциально убывает при $n \to \infty$ (для простоты мы предполагаем, что $\rho(A) = \rho(B) = 0$)? Для ответа на этот вопрос рассмотрим преобразование

[6]См. также Мартин, Ингленд [1], Каток, Хассельблатт [1], Корнфельд, Синай, Фомин [1], Рохлин [2], [3], где можно найти дополнительную информацию об энтропии. — *Прим. ред.*

Фурье – Лапласа

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{n\alpha} C(n) = \sum_{n\geqslant 0} e^{n\alpha} \lambda_0^{-n} (\mathcal{L}^{*n}\mu)\,(\Phi A\cdot (B\circ f^n)) =$$
$$= \sum_{n\geqslant 0} e^{n\alpha} \lambda_0^{-n} \mu\,(\mathcal{L}^n\,(\Phi A\cdot (B\circ f^n))) =$$
$$= \sum_{n\geqslant 0} e^{n\alpha} \lambda_0^{-n} \mu\,(B\cdot \mathcal{L}^n(\Phi A)) = \mu\left(B\left(1 - e^{\alpha}\lambda_0^{-1}\mathcal{L}\right)^{-1}(\Phi A)\right).$$

Поскольку в правой части появляется резольвента оператора $\mathcal{L}$, мы видим, что скорость убывания корреляций связана со спектральными свойствами трансфер-оператора и, следовательно, с аналитическими свойствами соответствующей динамической дзета-функции.

§ 15. Связи с другими областями математики

Дзета-функция Римана была введена для изучения статистических свойств простых чисел. В предыдущем параграфе мы видели, что динамическая дзета-функция связана с термодинамическим формализмом и, значит, с эргодической теорией и опять со статистическими свойствами. Это подсказывает вывод о связи динамических дзета-функций с более традиционными областями математики.

Например, Пэрри и Полликотт [1] изучили дзета-функции, связанные с геодезическим потоком на многообразии отрицательной кривизны (не обязательно постоянной) и доказали теорему о распределении замкнутых орбит, аналогичную теореме о распределении простых чисел.

Другой пример — это исследование Майером [1] дзета-функций, связанных, с одной стороны, с геодезическими на модулярной поверхности, а с другой — с преобразованием непрерывных дробей (равновесная мера здесь — это мера Гаусса).

Мы закончим задачей, которая, кажется, совершенно не решена. Известно, что геодезический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны экспоненциально перемешивает (Ратнер). Остается ли это верным для переменной отрицательной кривизны (мы видели, что для отображений имеется простая связь между скоростью убывания корреляций и спектральными свойствами трансфер-оператора, но для потоков ситуация кажется гораздо менее ясной)?

Глава 9

Кусочно-монотонные отображения

В этой главе мы изучим дзета-функции, связанные с системами $(X,\, f,\, g)$, где X — компактное подмножество прямой $\mathbb{R}$, $f\colon X \to X$ — кусочно-монотонная функция и $g\colon X \to \mathbb{C}$ — функция ограниченной вариации.

В связи с обсуждаемыми здесь проблемами см. статьи Хофбауера [1], Хофбауера и Келлера [1] и Милнора и Тёрстена [1]. Имеется также большая литература по другим аспектам теории отображений интервала.

Основной результат, касающийся дзета-функций, принадлежит Баладии и Келлеру [1]. Здесь мы обобщим его, используя новый метод.

§ 1. Определения

Пусть X — упорядоченное топологическое пространство, эквивалентное (с учетом порядка и топологии) компактному подмножеству пространства $\mathbb{R}$. Для простоты будем считать, что X — *компактное подмножество* $\mathbb{R}$. Важный пример: $[0,\, 1] \subset \mathbb{R}$.

Будем говорить, что J — *интервал* в X, если $J = X \cap I$, где I — интервал в $\mathbb{R}$. Если I замкнут, то J — *замкнутый интервал* в X, т. е. $J = \varnothing$ или

$$J = \{x \in X\colon u \leqslant x \leqslant v\}$$

для подходящих $u, v \in X$, $u \leqslant v$. Отображение $f\colon J \to X$ *строго монотонно*, если оно строго возрастает ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$) или строго убывает ($x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$). Если, кроме того, fJ — интервал в X (т. е. f принимает все промежуточные значения между $f(u)$ и $f(v)$), мы говорим, что f обладает *свойством Дарбу*; в частности, f непрерывно и, следовательно, является гомеоморфизмом[1].

[1] Строго монотонное отображение со свойством Дарбу — это то же самое, что монотонный гомеоморфизм интервала на интервал.

Назовем отображение $f\colon X \to X$ *кусочно-монотонным*, если X можно так покрыть замкнутыми интервалами $J_1, \ldots, J_n$, что $f|J_i$ строго монотонно и обладает свойством Дарбу при $i = 1, \ldots, n$ (тем самым, $f|J_i$ является монотонным гомеоморфизмом интервала J_i на некоторый подинтервал в X). Предположим, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — *минимальное покрытие* множества X замкнутыми интервалами; это значит, что если $(J'_1, \ldots, J'_N)$ — другое покрытие и $J'_1 \subset J_1, \ldots, J'_N \subset J_N$, то $(J'_1, \ldots, J'_N) = (J_1, \ldots, J_N)$ (в частности, $J_i \cap J_j$ содержит не более одной точки; очевидно, разбиение является минимальным покрытием). Предположим также, что все J_i непусты, $J_1 \leqslant J_2 \leqslant \ldots \leqslant J_N$ и $N > 1$.

Если J_i сводится к единственной точке, мы произвольным образом решаем, возрастает $f|J_i$ или убывает (это удобно для дальнейшего).

Пусть $\{b_1, \ldots, b_s\}$ — множество общих концов интервалов J_i и J_{i+1}. При $x \in \{b_1, \ldots, b_s\}$ и $x \notin \{b_1, \ldots, b_s\}$ положим соответственно $\varepsilon(x) = 0$ и $\varepsilon(x) = \pm 1$, выбрав знак «плюс», если f возрастает на интервале $J_i \ni x$, и знак «минус» — в противном случае. Множество $\operatorname{Per} f = \bigcup\limits_{m\geqslant 1} \operatorname{Fix} f^m$ содержит следующие подмножества:

$$\operatorname{Fix}^{\pm} f^m = \Big\{x \in \operatorname{Fix} f^m\colon \prod_{k=0}^{m-1} \varepsilon(f^k x) = \pm 1\Big\},$$

$$\operatorname{Per}^{\pm}(f, m) = \{x \in \operatorname{Fix}^{\pm} f^m\colon \text{ минимальный период } x \text{ равен } m\}.$$

Назовем x *отрицательной* (соответственно *положительной*) *периодической точкой*, если $x \in \operatorname{Per}^{-}(f, m)$ (соответственно $x \in \operatorname{Per}^{+}(f, m)$) для некоторого $m \geqslant 1$. Если $(J_1, \ldots, J_N)$ — разбиение, то каждая периодическая точка либо положительна, либо отрицательна; в общем случае возможно конечное число исключений.

Назовем $(J_1, \ldots, J_N)$ *марковским покрытием* для f, если для каждого i образ fJ_i есть объединение некоторых J_j. Покрытие $(J_1, \ldots, J_N)$ называется образующим, если пересечение

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n} J_{i(n)}$$

содержит не более одной точки[2].

[2]По определению, марковское покрытие не обязано быть образующим.

Для функции $g\colon X \to \mathbb{C}$, где $\operatorname{card} X > 1$, положим

$$\operatorname{var} g = \sup \sum_{1}^{n} |g(a_i) - g(a_{i-1})|,$$

где $\sup$ берется по всем конечным подмножествам точек из X, упорядоченным так, что $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Говорят, что g имеет *ограниченную вариацию*, если $\operatorname{var} g < \infty$. Аналогично можно определить $\operatorname{var}(g|\Lambda)$, где Λ — произвольный интервал в X (не обязательно замкнутый).

Функции ограниченной вариации $\Phi\colon X \to \mathbb{C}$ образуют банахово пространство с нормой Var, определяемой равенством

$$\operatorname{Var} \Phi = \sup\Bigl(|\Phi(a_0)| + \sum_{1}^{n} |\Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1}) + \Phi(a_n)|\Bigr),$$

где $\sup$ берется по всем конечным подмножествам точек $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ множества X. Заметим, что $\sup$ в определении величин var и Var можно заменить пределом по конечным множествам, упорядоченным по включению.

Если $X = \{a\}$, мы полагаем $\operatorname{var} g = 0$ и $\operatorname{Var} \Phi = 2|\Phi(a)|$. Из этих определений следует, что норма Var эквивалентна норме $\|\cdot\|_0 + \operatorname{var}$. Действительно,

$$\|\Phi\|_0 \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Var} \Phi,$$

$$\operatorname{var} \Phi \leqslant \operatorname{Var} \Phi,$$

$$\operatorname{Var} \Phi \leqslant 2\|\Phi\|_0 + \operatorname{var} \Phi.$$

Кроме того,

$$\operatorname{Var}(\Phi \cdot \Psi) \leqslant \|\Phi\|_0 \operatorname{Var} \Psi + \operatorname{var} \Phi \|\Psi\|_0 \leqslant \operatorname{Var} \Phi \cdot \operatorname{Var} \Psi,$$

и если функция ψ строго монотонна и обладает свойством Дарбу, то

$$\operatorname{Var}(\Phi \circ \psi) = \operatorname{Var} \Phi.$$

При $Y \subset X$ обозначим через $\mathcal{B}_Y$ подпространство пространства $\mathcal{B}$, состоящее из функций Φ, равных нулю вне Y, и через $\mathcal{B}_{\setminus Y}$ — фактор-пространство $\mathcal{B}/\mathcal{B}_Y$.

§ 2. Построение новых систем

Пусть система $(X,\ f,\ g)$ состоит из компактного множества $X \subset \mathbb{R}$, кусочно-монотонного отображения f, минимального покрытия замкнутыми интервалами $(J_1,\ \ldots,\ J_n)$, связанного с f, и функции ограниченной вариации g. По этим данным мы различными способами построим новую систему $(\widehat{X},\ \widehat{f},\ \widehat{g})$ и покрытие $(\widehat{J}_1,\ \ldots,\ \widehat{J}_n)$ с улучшенными свойствами: в одном случае $(\widehat{J}_1,\ \ldots,\ \widehat{J}_n)$ будет разбиением, в другом — марковским или образующим покрытием, а функция $\widehat{g}$ будет непрерывна в периодических точках.

Что касается множества $\widehat{X}$, то оно, вообще говоря, не будет интервалом (не только в $\mathbb{R}$, но даже в X); этим объясняется тот факт, что мы не хотим с самого начала ограничиваться отображениями интервалов.

Напомним, что $\mathcal{B}$ — это банахово пространство комплекснозначных функций ограниченной вариации, определенных на X. Обозначим через $\widehat{\mathcal{B}}$ аналогичное пространство функций на $\widehat{X}$, а через $\widehat{\mathcal{B}}_{\widehat{Y}}$ — подпространство функций, равных нулю вне множества $\widehat{Y} \subset \widehat{X}$. Положим также $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus\widehat{Y}} = \widehat{\mathcal{B}}/\widehat{\mathcal{B}}_{\widehat{Y}}$.

Предложение 9.1 (конструкция разбиения $(\widehat{J}_1,\ \ldots,\ \widehat{J}_n)$[3]).

Можно так подобрать $(\widehat{X},\ \widehat{f},\ \widehat{g})$, $(\widehat{J}_1,\ \ldots,\ \widehat{J}_n)$ и сохраняющее порядок непрерывное сюръективное отображение $\widehat{\pi}\colon \widehat{X} \to X$, что $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \circ \widehat{\pi}$, $\widehat{g} = g \circ \widehat{\pi}$ и $\widehat{\pi}\widehat{J}_i = J_i$ для $i = 1,\ \ldots,\ N$. Кроме того, можно сделать так, чтобы $\widehat{J}_1,\ \ldots,\ \widehat{J}_n$ не пересекались, прообразы точек некоторого счетного множества при отображении $\widehat{\pi}$ были двухточечными, а прообразы всех остальных точек — одноточечными.

Если $Z = \{x \in X,\ \operatorname{card}\widehat{\pi}^{-1}x = 2\}$, $Y = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} f^n Z$ и $\widehat{Y} = \widehat{\pi}^{-1}Y$, то каждая точка множества Y есть предел точек из $X \setminus Y$, а каждая точка множества $\widehat{Y}$ — предел точек из $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$.

Отображение $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ задает изоморфизм банаховых пространств.

Пусть $b_1,\ \ldots,\ b_s$ — точки множества X, принадлежащие двум разным интервалам J_i. Предположим, что $\xi \in X$, $f^k\xi \in \{b_1,\ \ldots,\ b_s\}$ для некоторого $k \geqslant 0$, и выберем наименьшее из этих k. Если $k \geqslant 1$, предположим дополнительно, что ξ не является концом какого-либо из интервалов J_i.

[3] Для случая $X = [0,\ 1]$ см. Хофбауэр и Келлер [1].

Заменим ξ двумя точками, $\xi_- < \xi_+$, и вставим между ними пробел длины $\varepsilon\alpha^k$, где $0 < \alpha < 1/N$, так что общая длина вставленных пробелов не будет превосходить $s\varepsilon(1 - N\alpha)^{-1}$. В результате мы получим компактное множество $\widehat{X} \subset \mathbb{R}$ и стягивающее отображение $\widehat{\pi}\colon \widehat{X} \to X$, которое сохраняет порядок, на некотором счетном множестве переводит две точки в одну, а вне этого множества является взаимнооднозначным.

Определив $\widehat{g}$ равенством $\widehat{g} = g \circ \widehat{\pi}$, убеждаемся, что $\operatorname{var}\widehat{g} = \operatorname{var} g < \infty$.

Для каждого интервала $J_i = \{x \in X\colon \alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i\}$ определим $\widehat{J}_i = \{\xi \in \widehat{X}\colon \widehat{\alpha}_i \leqslant \xi \leqslant \widehat{\beta}_i\}$ условиями $\widehat{\pi}\widehat{\alpha}_i = \alpha$, $\widehat{\pi}\widehat{\beta}_i = \beta_i$; если при этом $\widehat{\pi}^{-1}\alpha_i = \{\alpha_{i-}, \alpha_{i+}\}$, положим $\widehat{\alpha}_i = \alpha_{i+}$, а если $\widehat{\pi}^{-1}\beta_i = \{\beta_{i-}, \beta_{i+}\}$, положим $\widehat{\beta}_i = \beta_{i-}$. Из этого определения видно, что интервалы $\widehat{J}_i$ не пересекаются и $\widehat{\pi}\widehat{J}_i = J_i$.

Отображение $\widehat{f}$ полностью определяется условием, что оно монотонно и гомеоморфно отображает каждый интервал $\widehat{J}_i$, $i = 1, \ldots, N$, на некоторый замкнутый интервал в $\widehat{X}$ и что $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \circ \widehat{\pi}$.

Покажем, что точки множества Y (соответственно множества $\widehat{Y}$) являются пределами точек множества $X \setminus Y$ (соответственно $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$). Так как $(J_1, \ldots, J_N)$ — минимальное покрытие, точки $b_i, \ldots, b_s$, принадлежащие двум разным J_i, обязаны быть пределами слева и справа других точек множества X. Вспомним, что

$$Y = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n Z,$$

$$Z = \{x \in X\colon \operatorname{card}\widehat{\pi}^{-1}x = 2\} = \bigcup_{k \geqslant 0} Z_k,$$

где

$$Z_0 = \{b_1, \ldots, b_s\},$$

а при $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
&Z_k = f^{-1}Z_{k-1} \setminus Z_k^*,\\
&Z_k^* = \{\text{концы интервалов } J_i\} \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_{k-1}.
\end{aligned}$$

Индукцией по k доказывается, что все точки из Z являются предельными точками (слева и справа) других точек из X. Следовательно, все точки множества Y являются пределами (по крайней мере с одной стороны) других точек множества X.

Предположим теперь, что точка $y \in Y$ не является пределом точек из $X \setminus Y$, т. е. у нее найдется такая открытая окрестность V, что $X \cap V = Y \cap V$. Тогда по доказанному каждая точка из $Y \cap V$ является пределом других точек из $Y \cap V$. Пользуясь этим, построим (путем последовательного удвоения) при каждом $n \geqslant 0$ конечные множества Y_n, $Y'_n \subset Y$, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{card} Y_n = \operatorname{card} Y'_n = 2^n, \quad Y_0 = \{y\}, \quad Y'_n \cap Y_n = \varnothing, \quad Y_{n+1} = Y_n \cup Y'_n.$$

Очевидно также существование при каждом n такого $\varepsilon_n > 0$, что все попарные расстояния между точками множества Y_n больше ε_n, а для каждой точки множества Y'_n найдется отличная от нее точка множества Y_n, расстояние до которой не превосходит $\frac{1}{3}\varepsilon_n$. Замыкание объединения $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} Y_n$ будет тогда некоторым канторовым множеством $K \subset X$, пересечение которого с V несчетно, что противоречит предположению $K \cap V \subset X \cap V = Y \cap V$, так как последнее множество счетно. Тем самым, доказано, что Y принадлежит замыканию множества $X \setminus Y$.

Чтобы получить соответствующий результат для $\widehat{Y} = \widehat{\pi}^{-1} Y$, заметим, что $\widehat{Y} = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \widehat{f}^n \widehat{Z}$, где $\widehat{Z} = \widehat{\pi}^{-1} Z$ и все точки множества $\widehat{Z}$ являются (односторонними) пределами других точек из $\widehat{X}$. Следовательно, все точки множества $\widehat{Y}$ являются пределами (по крайней мере с одной стороны) других точек множества $\widehat{X}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны уже проведенным.

Отображение $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ переводит $\mathcal{B}$ в подпространство пространства $\widehat{\mathcal{B}}$, состоящее из тех $\widehat{\Phi}$, для которых $\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{\Phi}(\xi')$, если $\widehat{\pi}\xi = \widehat{\pi}\xi'$. Пусть задано $\widehat{\Psi} \in \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$. Взяв $\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathcal{B}}$ в том классе смежности, которому принадлежит $\widehat{\Psi}$, можно так изменить $\widehat{\Phi}$ в точках множества $\widehat{Y}$, чтобы получилось $\widehat{\Phi}'$, удовлетворяющее условиям: $\widehat{\Phi}'(\xi) = \widehat{\Phi}'(\xi')$, если $\widehat{\pi}\xi = \widehat{\pi}\xi'$, и $\operatorname{Var} \widehat{\Phi}' \leqslant \operatorname{Var} \widehat{\Phi}$. Следовательно, $\widehat{\Phi}' = \Phi \circ \widehat{\pi}$ и если $\Psi \in \mathcal{B}_{\setminus Y}$ — класс смежности, которому принадлежит Φ, то

$$\|\widehat{\Psi}\| = \inf \operatorname{Var} \widehat{\Phi}' = \inf \operatorname{Var} \Phi \circ \widehat{\pi} = \inf \operatorname{Var} \Phi = \|\Psi\|.$$

Отсюда видно, что отображение $\Psi \mapsto \widehat{\Psi}$ порождает изоморфизм $\mathcal{B}_{\setminus Y} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$ банаховых пространств.

Замечания 9.2. (1) Всюду, кроме конечного числа периодических орбит, проходящих через $b_1, \ldots, b_s$, отображение $\widehat{\pi}$ определяет при каждом $m \geqslant 1$ биекцию $\operatorname{Fix} \widehat{f}^m \to \operatorname{Fix} f^m$.

(2) Так как конструкция удваивает точки $b_1, \ldots, b_s$, можно было бы начинать с функций f и g, которые принимают в этих точках по два значения («левое» и «правое»). На этом пути можно изучать кусочно-монотонные отображения $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, имеющие точки разрыва.

Предложение 9.3 (построение марковского разбиения $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_n)$[4]). *Можно так выбрать $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ и сохраняющее порядок инъективное непрерывное отображение $\pi\colon X \to \widehat{X}$, что $\widehat{f} \circ \pi = \pi \circ f$, $\widehat{g} \circ \pi = g$ и $\pi J_i \subset \widehat{J}_i$, $i = 1, \ldots, N$. При этом разбиение $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ можно сделать марковским.*

С помощью π отождествим X с некоторым подмножеством множества $\widehat{X}$ так, что $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ являются продолжениями f, g и $J_i = \widehat{J}_i \cap X$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда $\widehat{Y} = \widehat{X} \setminus X$ будет объединением некоторого множества открытых интервалов (U_α), каждый из которых содержится в некотором $\widehat{J}_i$, и для каждого U_α найдется такое $n \geqslant 0$, что U_α, $\widehat{f} U_\alpha, \ldots, \widehat{f}^n U_\alpha$ будут интервалами из семейства (U_α), причем $\widehat{g} | \widehat{f}^n U_\alpha = 0$. Каждый интервал U_α отделен от интервалов U_β сверху или снизу некоторой точкой $x \in \widehat{X} \setminus \widehat{Y}$.

Отображение $\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} | X$ определяет изоморфизм $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}} \to \mathcal{B}$ банаховых пространств.

Напомним, что по предположению $J_1 < \ldots < J_N$, а $\varepsilon(i)$ равно $+1$ и -1, если f соответственно возрастает или убывает на J_i.

Пусть $X_{i_1 \ldots i_k}$ и $J_{i_1 \ldots i_k i}$ — копии множеств X и J_i. Снабдим их первоначальным порядком, если $\prod\limits_{r=1}^{k} \varepsilon(i_r) = +1$, и противоположным порядком, если $\prod\limits_{r=1}^{k} \varepsilon(i_r) = -1$. При $i_1 = j_1, \ldots, i_{l-1} = j_{l-1}$, $i_l < j_l$ положим

$$X_{i_1 \ldots i_k} < X_{j_1 \ldots j_k}, \quad \text{если } \prod_{r=1}^{l-1} \varepsilon(i_r) = +1,$$

$$X_{i_1 \ldots i_k} > X_{j_1 \ldots j_k}, \quad \text{если } \prod_{r=1}^{l-1} \varepsilon(i_r) = -1.$$

[4]См. приложение в [13] для случая, когда $(J_1, \ldots, J_n)$ — образующее разбиение.

Таким образом, на дизъюнктном объединении

$$X^{(k)} = \bigcup_{i_1\,\dots\,i_k} X_{i_1\,\dots\,i_k} = \bigcup_{i_1\,\dots\,i_k i_{k+1}} J_{i_1\,\dots\,i_k i_{k+1}}, \quad k \geqslant 1,$$

вводится некоторый порядок. Положим $X^{(0)} = X$.

Ограничение f на J_i определяет отображения $J_i \to X$ и

$$J_{i_1\,\dots\,i_k i_{k+1}} \to X_{i_1\,\dots\,i_{k+1}},$$

а также отображение

$$\pi^{(k)}\colon X^{(k)} = \bigcup J_{i_1\,\dots\,i_k i_{k+1}} \to X^{(k+1)},$$

которое является сохраняющим порядок гомеоморфизмом множества $X^{(k)}$ на его образ $\pi^{(k)}X^{(k)} \subset X^{(k+1)}$.

Определим отображение $\widehat{\pi}^{(k)}\colon X^{(k+1)} \to X^{(k)}$ равенством

$$\widehat{\pi}^{(k)}(x) = \begin{cases} \left(\pi^{(k)}\right)^{-1}x, \text{ если } x \in \pi^{(k)}J_{i_1\,\dots\,i_{k+1}}, \\ \min \text{ или } \max J_{i_1\,\dots\,i_{k+1}}, \text{ если } x \in X_{i_1\,\dots\,i_{k+1}} \setminus \pi^{(k)}J_{i_1\,\dots\,i_{k+1}}, \end{cases}$$

где выбор максимума или минимума определяется требованием, чтобы $\widehat{\pi}^{(k)}$ не убывало. В частности, отображение $\widehat{\pi}^{(k)}\pi^{(k)}$ тождественно на $X^{(k)}$.

Определим $\widehat{X} = \varprojlim X^{(k)}$ как обратный предел

$$X^{(0)} \xleftarrow{\widehat{\pi}^{(0)}} X^{(1)} \longleftarrow \dots \longleftarrow X^{(k)} \xleftarrow{\widehat{\pi}^{(k)}} X^{(k+1)} \longleftarrow \dots$$

и пусть $\widehat{\pi}\colon \widehat{X} \to X^{(0)} = X$ — соответствующее отображение. Множество $\widehat{X}$ компактно и упорядочено, его можно рассматривать как компактное подмножество прямой; отображение $\widehat{\pi}$ непрерывно и сохраняет порядок. Определим также отображение $\pi\colon X \to \widehat{X}$ равенством

$$\pi x = (x,\, \pi^{(0)}x,\, \pi^{(1)}\pi^{(0)}x,\, \dots).$$

Оно сохраняет порядок, является гомеоморфизмом множества X на его образ и обладает тем свойством, что $\widehat{\pi}\pi$ тождественно на X.

Положим

$$J_i^{(0)} = J_i, \quad J_i^{(k+1)} = \bigcup_{i_1\,\dots\,i_k} X_{ii_1\,\dots\,i_k} \subset X^{(k+1)}, \quad k+1 \geqslant 1.$$

Поскольку $X_{ii_1\,\ldots\,i_k}$ и $X_{i_1\,\ldots\,i_k}$ — копии множества X, существуют естественный монотонный гомеоморфизм множества $J_i^{(k+1)}$ на $X^{(k)}$ и кусочно-монотонное отображение

$$f^{(k)}\colon X^{(k+1)} = \bigcup_i J_i^{(k+1)} \to X(k).$$

Легко проверить, что

$$f^{(k+1)} \circ \pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} \circ f^{(k)},$$
$$f^{(k)} \circ \widehat{\pi}^{(k+1)} = \widehat{\pi}^{(k)} \circ f^{(k+1)}.$$

Если $\xi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \in \widehat{X}$, положим

$$\widehat{f}\xi = \left(f^{(0)}x_1, f^{(1)}x_2, \ldots, f^{(n)}x_{n+1}, \ldots\right).$$

Отображение $\widehat{f}$ на множестве

$$\widehat{J}_i = \lim_{\leftarrow} J_i^{(k)} = \widehat{\pi}^{-1} J_i$$

есть гомеоморфизм этого множества на $\widehat{X}$, сохраняющий порядок, если $\varepsilon(i) = +1$, и меняющий его на обратный, если $\varepsilon(i) = -1$. Тем самым, $\widehat{f}$ — кусочно-монотонное отображение $\widehat{X} \to \widehat{X}$, причем

$$\widehat{f} \circ \pi = \pi \circ f$$

и $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ — марковское разбиение для $\widehat{f}$. Кроме того, $\widehat{J}_i = \widehat{\pi}^{-1}(\widehat{\pi} \circ \pi) J_i \supset \pi J_i$.

Пусть χ_1 — характеристическая функция объединения N интервалов $[\min \pi J_i, \max \pi J_i]$ в $\widehat{X}$. Положив

$$\widehat{g}(\xi) = \chi_1(\xi) \circ g(\widehat{\pi}\xi),$$

получим функцию ограниченной вариации (так как $\operatorname{Var} \chi_1 \leqslant 2N$ и $\operatorname{Var} g \circ \widehat{\pi} = \operatorname{Var} g$).

Для любой тройки $\alpha = (n, i, \varepsilon)$, где $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$ и $\varepsilon = \pm 1$, положим

$$\begin{aligned} U\alpha = \{\xi = (x_0, x_1, \ldots) \in \widehat{J}_i : \\ x_{k+1} = \pi^{(k)} x_k \text{ для } k = 0, \ldots, n-1 \text{ и } x_{n+1} \gtrless \pi^{(n)} x_n\}, \end{aligned}$$

где $\gtrless$ означает $<$, если $\varepsilon = -1$, и $>$, если $\varepsilon = +1$. В таком случае $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \widehat{X} \setminus \pi X = \widehat{Y}$. Если $n > 0$, то fU_α есть некоторый элемент U_β семейства (U_α) (чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться равенством $f^{(k+1)}\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} f^{(k)}$). Если $n = 0$, то включение $\xi \in U_\alpha$ означает, что $x_1 \notin \pi^{(0)} J_i$, т. е. $\chi_1(\xi) = 0$ и, значит, $\widehat{g}(\xi) = 0$.

Заметим, что интервал U_α отделен от интервалов U_β, лежащих сверху или снизу от него, точкой $\pi\widehat{\pi}U_\alpha$.

Ограничение $\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} \circ \pi$ определяет не увеличивающее норму отображение $\widehat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$, но для каждого $\Phi \in \mathcal{B}$ можно найти такое $\widehat{\Phi}$, что $\operatorname{Var} \widehat{\Phi} = \operatorname{Var} \Phi$. Тем самым, отображение $\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} \circ \pi$ определяет некоторый изоморфизм $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}} \to \mathcal{B}$.

Предложение 9.4 (построение образующего разбиения $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$[5]**).** *По заданному разбиению $(J_1, \ldots, J_N)$ можно выбрать такие $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ и сохраняющее порядок непрерывное сюръективное отображение $\pi\colon X \to \widehat{X}$, что $\widehat{f} \circ \pi = \pi \circ f$, $\widehat{g}(\xi) = g(\pi^{-1}\xi)$, если $\operatorname{card} \pi^{-1}\xi = 1$,*[6] *и $\pi J_i = \widehat{J}_i$ при $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ — образующее разбиение.*

Множество $\widehat{Y} = \{\xi \in \widehat{X}\colon \operatorname{card} \pi^{-1}\xi > 1\}$ счетно; замкнутые интервалы $U_\alpha = \pi^{-1}\xi$ с $\xi \in \widehat{Y}$ имеют вид $\bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^{-k} J_{i(k)}$; f отображает каждый такой интервал в другой интервал U_β из того же семейства: $fU_\alpha \subset U_\beta$; отображение $\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} \circ \pi$ определяет изоморфизм банаховых пространств $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}} \to \mathcal{B}_{\setminus Y}$, где $Y = \pi^{-1}\widehat{Y} = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

Если $(J_1, \ldots, J_N)$ марковское разбиение, то $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ — образующее марковское разбиение. Каждая точка $\xi \in \widehat{Y}$ является предельной для $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$ и один из концов каждого интервала U_α является предельной точкой для $X \setminus Y$.

При $x, y \in X$ будем писать $x \sim y$, если $f^k x$, $f^k y$ при всех $k \geqslant 0$ принадлежат одному и тому же $J_{i(k)}$. Так как $J_1, \ldots, J_N$ попарно не пересекаются, мы получаем отношение эквивалентности. Каждый класс эквивалентности $[x]$ — это замкнутый интервал, который мы обозначим U_α, если он содержит более одной точки. В этом случае $\operatorname{diam} U_\alpha > 0$, что может иметь место лишь для счетного множества интервалов U_α. Пусть

[5] Для случая интервала в $\mathbb{Z}$ см. Балади, Рюэль [2].

[6] Дальнейшие условия будут наложены в замечании 9.5(1) и предложении 9.9 (см. ниже).

$\pi\colon X \to \widehat{X}$ стягивает каждый интервал U_α в точку. Тогда $\widehat{X}$ оказывается компактным подмножеством прямой, π сохраняет порядок и вне некоторого счетного множества $\widehat{Y}$ выполняется равенство $\operatorname{card}\pi^{-1}x = 1$.

Соотношения $\widehat{f} \circ \pi = \pi \circ f$ и $\pi J_i = \widehat{J}_i$ определяют $\widehat{f}$ и связанное с $\widehat{f}$ разбиение $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$. По построению это разбиение является образующим.

В данный момент мы накладываем на $\widehat{g}$ лишь условие, что $\widehat{g}(\xi) = g(\pi^{-1}\xi)$, если $\operatorname{card}\pi^{-1}\xi = 1$; разумеется, оно согласовано с неравенством $\operatorname{Var}\widehat{g} < \infty$.

Поскольку ограничение f на U_α ($\subset J_i$) — это гомеоморфизм, f переводит $U_\alpha = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^{-k}J_{i(k)}$ в $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} f^{-k+1}J_{i(k)} = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^{-k}J_{i(k+1)} = U_\beta$, где $\operatorname{card} U_\beta > 1$.

Отображению $\widehat{\Phi} \to \widehat{\Phi}\circ\pi$ отвечает не увеличивающее норму отображение $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus\widehat{Y}} = \mathcal{B}_{\setminus Y}$. Но если $\Psi \in \mathcal{B}_{\setminus Y}$, то в классе, которому принадлежит Ψ, найдется Φ, постоянное на каждом U_α и такое, что $\operatorname{Var}\Phi = \|\Psi\|$. Поэтому, положив $\Phi = \widehat{\Phi}\circ\pi$, мы получим $\operatorname{Var}\widehat{\Phi} = \operatorname{Var}\Phi = \|\Psi\|$. Отсюда следует, что $\widehat{\mathcal{B}}_{\setminus\widehat{Y}} \to \mathcal{B}_{\setminus Y}$ — изоморфизм.

Ясно, что если $(J_1, \ldots, J_N)$ — марковское разбиение, то $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ тоже марковское разбиение и $\widehat{X} = \pi X$ — канторово множество. Так как $\widehat{Y}$ — счетное множество, каждая его точка является предельной для $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$. Следовательно, каждое U_α содержит предельную точку множества $X \setminus Y$.

Замечания 9.5. (1) π определяет инъективное отображение

$$\operatorname{Fix}^- f^m \to \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^m,$$

и для $x \in \operatorname{Fix}^- f^m$ можно положить $\widehat{g}(\pi x) = g(x)$.

[Так как $\widehat{f}^m \circ \pi = \pi \circ f^m$, мы имеем $\pi \operatorname{Fix} f^m \subset \operatorname{Fix}\widehat{f}^m$ и $\pi\operatorname{Fix}^- f^m \subset \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^m$. Предположим, что $x \in \operatorname{Fix}^- f^m$, $y \in \operatorname{Fix}^- f^n$ и $\pi x = \pi y = \xi$. Тогда $\xi \in \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^k$ и можно предположить, что k — минимальный период точки ξ, так что $m = kp$, $n = kq$, где p и q — нечетные числа. Поскольку f^{kpq} индуцирует убывающее отображение $\pi^{-1}\xi \to \pi^{-1}\xi$, неподвижные точки x и y совпадают. Следовательно, $\pi^{-1}\xi$ содержит не более одной отрицательной периодической точки для f и отображение $\operatorname{Fix}^- f^m \to \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^m$ инъективно. Инъективность отображения $\operatorname{Fix}^- f^m \to \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^m \hookrightarrow \widehat{X}$ дает возможность положить $\widehat{g}(\pi x) = g(x)$ при $x \in \operatorname{Fix}^- f^m$].

(2) Если f — кусочно растягивающее (т. е. $f|J_i$ растягивает с коэффициентом $\geqslant \theta^{-1} > 1$ при $i = 1, \ldots, N$), то $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее

разбиение. Тогда отображение π, построенное в предложении 9.4, — тождественное.

(3) Конструкции предложений 9.3 и 9.4 можно применять последовательно, причем они *почти* коммутируют. Независимо от порядка их применения получаются полный сдвиг $(\widehat{X}, \widehat{f})$ и отображение $\pi\colon X \to \widehat{X}$, удовлетворяющее соотношению $\widehat{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Но в зависимости от этого порядка g соответственно переходит в отображения $\widehat{g}_1$ и $\widehat{g}_2$, которые могут быть различны. Если, однако, при построении этих отображений сделан соответствующий выбор, то на множестве πX они будут совпадать.

Следствие 9.6. *Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = 1$. Предположим, что отображение $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ непрерывно и строго монотонно на интервалах $[a_{i-1}, a_i]$, а g имеет ограниченную вариацию*[7]*. Пусть, далее, $(\widetilde{X}, \widetilde{f}, \widetilde{g})$, $(\widetilde{J}_1, \ldots, \widetilde{J}_N)$ и $\widetilde{\pi}_1$ получены в результате применения предложения* 9.1 *к $([0, 1], f, g)$, $([a_0, a_1], \ldots, [a_{N-1}, a_N])$, а $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ и $\widetilde{\pi}_2$ — в результате применения предложения* 9.4 *к $(\widetilde{X}, \widetilde{f}, \widetilde{g})$, $(\widetilde{J}_1, \ldots, \widetilde{J}_N)$. Тогда $\widetilde{\pi}_2$ определяет биекцию $\mathrm{Fix}^- \widetilde{f}^m \to \mathrm{Fix}^- \widehat{f}^m$ и для $x \in \mathrm{Fix}^- \widetilde{f}^m$ можно положить $\widehat{g}(\widetilde{\pi}_2 x) = g(x)$.*

Каждое множество $\widetilde{\pi}_2^{-1}\xi$ есть, по построению, интервал в $\mathbb{R}$ (т. е. оно связно). Если $\xi \in \mathrm{Fix}^- \widehat{f}^m$, то $\widetilde{f}^m$ переводит этот интервал в себя и, следовательно, $\widetilde{\pi}_2^{-1}\xi$ содержит некоторую неподвижную точку $x \in \mathrm{Fix}^- \widetilde{f}^m$. Отсюда видно, что $\widetilde{\pi}_2$ отображает $\mathrm{Fix}^- \widetilde{f}^m$ на $\mathrm{Fix}^- \widehat{f}^m$, и доказываемое следствие вытекает из замечания 9.5(1).

Предложение 9.7 (построение $\widehat{g}$, непрерывного в периодических точках). *Если $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее разбиение и S — множество периодических точек, то можно так выбрать $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, разбиение $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$ и сохраняющее порядок сюръективное непрерывное отображение $\widehat{\pi}\colon \widehat{X} \to X$, что $\widehat{J}_i = \widehat{\pi}^{-1}J_i$ при $i = 1, \ldots, N$, $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \circ \widehat{\pi}$, $\widehat{g}(\xi) = g(\widehat{\pi}\xi)$ при $\widehat{\pi}\xi \notin S$ и $\widehat{g}$ непрерывно на множестве $\widehat{\pi}^{-1}S$. Разбиение $(\widehat{J}_1, \ldots, \widehat{J}_N)$, вообще говоря, не является образующим. При отображении $\widehat{\pi}$ прообразы точек некоторого счетного множества двухточечны, а прообразы остальных точек одноточечны. Кроме того, энтропия $\widehat{h}$ любой f-инвариантной вероятностной меры удовлетворяет соотношению $\widehat{h} = h \circ \pi$, вследствие чего $\widehat{h}$ полунепрерывна сверху.*

---

[7] f и g в точках $a_1, \ldots, a_{N-1}$ могут принимать по два значения, см. замечание 9.2(2).

Существует счетное множество Y, содержащее $\{x\in X\colon \operatorname{card}\widehat{\pi}^{-1}x = 2\}$, а также все периодические точки разрыва отображения g и такое, что $fY \subset Y$ и каждая точка $y \in Y$ является предельной точкой множества $X \setminus Y$. Соответственно, если $\widehat{Y} = \widehat{\pi}^{-1}Y$, то $\widehat{f}\widehat{Y} \subset \widehat{Y}$ и каждая точка из $\widehat{Y}$ является предельной для $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$.

Отображение $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{B}_{\setminus Y} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$ банаховых пространств.

Если X — канторово множество, то и $\widehat{X}$ — канторово множество.

Пусть X_0, X_1, X_2 состоят из тех точек множества X, которые соответственно изолированы, служат односторонними пределами точек из X и служат двусторонними пределами точек из X. Точка $x \in X_2 \cap J_i$ не может быть концом интервала J_i и, так как $f|J_i$ — монотонный гомеоморфизм, мы снова получаем $fx \in X_2$. Тем самым, $fX_2 \subset X_2$. Аналогично, $fX_1 \subset X_1 \cup X_2$ и, разумеется, $fX_0 \subset X_0 \cup X_1 \cup X_2$.

Пусть $S_0 = S \cap X_0$, $S_1 = S \cap X_1$, $S_2 = S \cap X_2$. Тогда $fS_0 = S_0$, $fS_1 = S_1$, $fS_2 = S_2$.

Положим $Z_0 = S_2$ и определим индуктивно Z_k равенством

$$Z_k = f^{-1}Z_{k-1} \setminus (\{\text{концы интервалов } J_i\} \cup Z_0).$$

Чтобы построить $\widehat{X}$, заменим каждую точку $\xi \in Z = \bigcup_{k\geqslant 0} Z_k$ двумя точками, $\xi_- < \xi_+$. Если $\eta = f^k\xi$, где $\xi \in Z_k$ и η имеет период l, вставим между ξ_- и ξ_+ пробел длины $\varepsilon\alpha^{k+l}$ (где $0 < \alpha < 1/N$). Пусть $\widehat{\pi}\colon \widehat{X} \to X$ — стягивающее отображение, $\widehat{J}_i = \widehat{\pi}^{-1}J_i$ и $\widehat{f}$ — отображение, однозначно определяемое равенством $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \circ \widehat{\pi}$ и условием, что $\widehat{f}|\widehat{J}_i$ — монотонный гомеоморфизм множества $\widehat{J}_i$ на некоторый интервал в $\widehat{X}$.

Положим $Y = S_1 \cup Z$. Отображение g непрерывно в точках множества S_0. Поэтому в Y содержатся периодические точки разрыва g; кроме того, Y содержит $\{x \in X\colon \operatorname{card}\widehat{\pi}^{-1}x = 2\} = Z$, а так как $fZ \subset Z$, мы приходим к выводу, что $fY \subset Y$. Положив $\widehat{Y} = \widehat{\pi}^{-1}Y$ и пользуясь равенством $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \circ \widehat{\pi}$, получим $\widehat{f}\widehat{Y} \subset \widehat{Y}$.

Покажем теперь, что каждая точка множества $\widehat{Y}$ является предельной для $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$. По предположению, каждая точка $\xi \in \widehat{\pi}^{-1}S_1 \cup \widehat{\pi}^{-1}S_2$ — это предел (односторонний) других точек из $\widehat{X}$. Индукцией по k это свойство доказывается и для точек $\xi \in \widehat{\pi}^{-1}Z_k$ (вспомним, что $Z_0 = S_2$). Следовательно, всякая точка $\xi \in \widehat{Y} = \widehat{\pi}^{-1}(S_1 \cup Z)$ служит пределом других точек из $\widehat{X}$. Отсюда, как и при доказательстве предложения 9.1, вытекает, что ξ — предельная точка множества $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$ (в противном случае нашлась бы такая окрестность V точки ξ, что $V \cap \widehat{X} = V \cap \widehat{Y}$, и можно было бы построить канторово множество $K \subset \widehat{X}$, для которого $\xi \in K \subset V$, что невозможно в силу счетности $\widehat{Y}$). Отсюда также видно, что каждая точка множества Y является предельной для $X \setminus Y$.

При $\widehat{\pi}\xi \notin S_1 \cup S_2$ положим $\widehat{g}(\xi) = g(\widehat{\pi}\xi)$. Если $\widehat{\pi}\xi \in S_1 \cup S_2$, то ξ является односторонним пределом точек η, принадлежащих $\widehat{X}$ (или даже $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$) и мы положим $\widehat{g}(\xi) = \lim g(\widehat{\pi}\eta)$ (этот предел существует, поскольку g имеет ограниченную вариацию). Определенная таким образом функция $\widehat{g}$ также имеет ограниченную вариацию, она, кроме того, непрерывна в точках множества $\widehat{\pi}^{-1}S$ и удовлетворяет соотношению $\widehat{g}(\xi) = g(\widehat{\pi}\xi)$, если $\widehat{\pi}\xi \notin S$.

Каждая $\widehat{f}$-инвариантная вероятностная мера $\widehat{\rho}$ представима в виде $\widehat{\rho} = \alpha\widehat{\rho}_0 + (1-\alpha)\widehat{\rho}_1$, где $\widehat{\rho}_0$ (соответственно, $\widehat{\rho}_1$) — атомическая (соответственно, неатомическая) вероятностная мера. Так как энтропия атомической меры равна нулю, а $\widehat{\pi}$ по отношению к неатомическим мерам является изоморфизмом, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\widehat{\rho}) &= \alpha\widehat{h}(\widehat{\rho}_0) + (1-\alpha)\widehat{h}(\widehat{\rho}_1) = \\ &= (1-\alpha)\widehat{h}(\widehat{\rho}_1) = (1-\alpha)h(\widehat{\pi}\widehat{\rho}_1) = \\ &= \alpha h(\widehat{\pi}\widehat{\rho}_0) + (1-\alpha)h(\widehat{\pi}\widehat{\rho}_1) = h(\widehat{\pi}\widehat{\rho}).\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее разбиение и что в слабой топологии энтропия h полунепрерывна сверху[8], а отображение $\widehat{\pi}$ непрерывно, мы приходим к выводу, что и энтропия $\widehat{h}$ полунепрерывна сверху.

Доказательство того, что $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ определяет изоморфизм $\mathcal{B}_{\setminus Y} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$, не представляет труда и по существу аналогично доказательству предложения 9.1.

Наконец, в силу того, что конструкция множества $\widehat{X}$ не приводит к появлению изолированных точек, мы заключаем, что $\widehat{X}$ — канторово множество, если таковым является X.

§ 3. Функционал Θ

Для заданного компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}$ и кусочно-монотонного отображения $f\colon X \to X$ определим на множестве функций g ограни-

[8] См. § 9.7.

ченной вариации функционал $g \mapsto \Theta$ (аналогичный введенному Хофбауером и Келлером для отображений интервала).

Если x — левая или правая предельная точка множества X, положим соответственно

$$g(x,\,-) = \lim_{y \nearrow x} g(y),$$

$$g(x,\,+) = \lim_{y \searrow x} g(y).$$

Пусть также

$$f(x,\,-) = (fx,\,-)\ (\text{соответственно, } (fx,\,+)),$$

если f возрастает (соответственно, убывает) слева от x, и

$$f(x,\,+) = (fx,\,+)\ (\text{соответственно, } (fx,\,-)),$$

если f возрастает (соответственно, убывает) справа от x.

Назовем $(x,\,\pm)$ виртуальной периодической точкой, если $f^m(x,\,\pm) = (x,\,\pm)$. Периодической точке x (минимального) периода m можно поставить в соответствие либо виртуальную периодическую точку (минимального) периода $2m$, либо не более двух виртуальных периодических точек (минимального) периода m.

Если $x \in \operatorname{Fix} f^m$, положим

$$\Theta(x) = \left| \prod_{k=0}^{m-1} g(f^k x) \right|^{1/m}.$$

Если $(x,\,\pm)$ — виртуальная периодическая точка периода n, положим

$$\Theta(x,\,\pm) = \left| \prod_{k=0}^{n-1} g\bigl(f^k(x,\,\pm)\bigr) \right|^{1/n}.$$

Для f-инвариантной вероятностной меры ρ на X определим $\Theta(\rho)$ равенством

$$\Theta(\rho) = \exp \int \rho(dx) \ln |g(x)|.$$

Предложение 9.8. *Пусть*

$$\Theta = \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \prod_{k=0}^{m-1} g(f^k x) \right|^{1/m} = \exp \inf_m \sup_{x\in X} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \ln |g(f^k x)|.$$

Тогда $\Theta = \max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}, \Theta_{\text{erg}}\}$*, где* $\Theta_{\text{per}} = \sup \Theta(x)$ *по периодическим точкам,* $\Theta_{\text{vir}} = \sup \Theta(x, \pm)$ *по виртуальным периодическим точкам и* $\Theta_{\text{erg}} = \sup \Theta(\rho)$ *по неатомическим* f*-эргодическим мерам* ρ*.*

Чтобы доказать это, положим

$$C(m) = \sup_{x \in X} \sum_{k=0}^{m-1} \ln |g(f^k x)|.$$

Тогда

$$C(m+n) \leqslant C(m) + C(n)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} C(m) = \inf_m \frac{1}{m} C(m),$$

что оправдывает данное выше определение Θ.

Беря в качестве x поочередно периодическую точку, точку, стремящуюся к периодической, и ρ-почти любую точку, получаем $\Theta \geqslant \Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}, \Theta_{\text{erg}}$. Остается убедиться, что $\Theta \leqslant \max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}, \Theta_{\text{erg}}\}$; при этом достаточно ограничиться случаем $\Theta \neq 0$. Пусть $x(\alpha)$, $m(\alpha)$ таковы, что $m(\alpha) \to \infty$ и

$$\frac{1}{m(\alpha)} \sum_{k=0}^{m(\alpha)-1} \ln \left| g(f^k x(\alpha)) \right| \to \ln \Theta.$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно предположить, что $\rho(\alpha) = \dfrac{1}{m(\alpha)} \sum\limits_{k=0}^{m(\alpha)-1} \delta_{f^k x(\alpha)}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере ρ на X. Эту меру мы представим в виде $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 — атомическая мера (сосредоточенная на множестве периодических орбит), а ρ_1 — неатомическая.

Выберем теперь $\rho_0(\alpha)$, $\rho_1(\alpha)$ так, что $\rho(\alpha) = \rho_0(\alpha) + \rho_1(\alpha)$ и $\rho_0(\alpha) \to \rho_0$, $\rho_1(\alpha) \to \rho_1$ в смысле слабой сходимости. Если $\Theta_{\text{per}} = \Theta_{\text{vir}} = 0$, то $\rho_0 = 0$ и мы полагаем $\rho_0(\alpha) = 0$. В противном случае возьмем $\delta > 0$ и определим $\rho_0(\alpha)$ равенством $\rho_0(\alpha) = \dfrac{1}{m(\alpha)} \sum^* \delta_{f^k x(\alpha)}$, где сумма $\sum^*$ при фиксированном α берется по длинным отрезкам значений k, для которых точка $f^k x(\alpha)$ близка к некоторому конечному множеству периодических орбит. В частности, мы можем предположить, что

$$\frac{1}{m(\alpha)} \sum\nolimits^* \ln \left| g(f^k x(\alpha)) \right| \leqslant \|\rho_0(\alpha)\| \left(\ln \max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}\} + \delta \right).$$

Необходимо рассмотреть лишь случай $\rho_1 \neq 0$. Вначале предположим, что $\rho_1 (\ln|g|) = -\infty$. Для заданного $N > 0$ можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что если $|g|_\varepsilon(x) = \max\{|g(x)|, \varepsilon\}$, то $\rho_1 (\ln|g|_\varepsilon) < -N$. Заметим, что ρ_1 приписывает нулевую меру множеству точек разрыва функции $\ln|g|_\varepsilon$, которая ограничена и имеет ограниченную вариацию, откуда следует, что $\rho_1(\alpha) (\ln|g|_\varepsilon) \to \rho_1 (\ln|g|_\varepsilon) \leqslant -N$. Следовательно, для всех $N \leqslant 0$

$$\ln\Theta = \lim \rho(\alpha) (\ln|g|) \leqslant \|\rho_0\| (\ln\max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}\} + \delta) - N,$$

а потому $\Theta = 0$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $\rho_1 (\ln|g|) > -\infty$ и можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что

$$\rho_1 (\ln|g|_\varepsilon) \leqslant \rho_1 (\ln|g|) + \|\rho_1\|\delta.$$

Поскольку мера ρ_1 множества точек разрыва функции $\ln|g|_\varepsilon$ равна нулю, мы имеем $\rho_1(\alpha) (\ln|g|_\varepsilon) \to \rho_1 (\ln|g|_\varepsilon)$ и, значит,

$$\ln\Theta = \lim \rho(\alpha) (\ln|g|) \leqslant \|\rho_0\| (\ln\max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}\} + \delta) + \|\rho_1\| (\ln\Theta(\rho_1') + \delta),$$

где $\rho_1' = \rho_1/\|\rho_1\|$. Индивидуальная эргодическая теорема и теория Крылова – Боголюбова показывают, что $\Theta(\rho_1') \leqslant \Theta(\rho')$ для некоторой эргодической меры ρ', а так как $\Theta(\rho') \leqslant \max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{erg}}\}$, мы окончательно получаем

$$\ln\Theta \leqslant \delta + \ln\max\{\Theta_{\text{per}}, \Theta_{\text{vir}}, \Theta_{\text{erg}}\},$$

что и доказывает утверждение.

Предложение 9.9. *Пусть* Θ *отвечает системе* (X, f, g), *а* $\widehat{\Theta}$ *— системе* $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, *фигурирующей в предложениях* 9.1, 9.3, 9.3 *и* 9.7. *Тогда в случае предложений* 9.1 *и* 9.3 *мы имеем* $\widehat{\Theta} = \Theta$, *в случае предложения* 9.4 *можно так выбрать* $\widehat{g}$, *что* $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$, *а в случае предложения* 9.7 *мы также имеем* $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$.

В условиях предложения 9.1 переход от первой системы ко второй может привести к замене одних периодических орбит другими с тем же Θ, но без изменения виртуальных периодических точек и эргодических мер; следовательно, $\widehat{\Theta} = \Theta$.

В условиях предложения 9.3 выбор $\widehat{g}$ гарантирует, что если $\xi \in \operatorname{Fix} \widehat{f}^m$, то либо $\widehat{\Theta}(\xi) = 0$, либо $\xi = \pi x$, где $x \in \operatorname{Fix} f^m$, а тогда $\widehat{\Theta}(\xi) = \Theta(\xi)$. Если $(\xi, \pm)$ — виртуальная периодическая точка для $\widehat{f}$, то либо $\widehat{\Theta}(\xi, \pm) = 0$, либо $\xi = \pi x$, где x — f-периодическая. В таком случае либо $(x, \pm)$ — виртуальная периодическая точка для f и $\widehat{\Theta}(\xi, \pm) = \Theta(x, \pm)$, либо $\widehat{\Theta}(\xi, \pm) = 0$. Если, наконец, $\widehat{\rho}$ — эргодическая мера для $\widehat{f}$ и $\widehat{\Theta}(\widehat{\rho}) > 0$, то $\widehat{\rho}$ сосредоточена на множестве точек вида πx, так что $\widehat{\rho} = \pi\rho$, где ρ — f-эргодическая мера, и $\widehat{\Theta}(\widehat{\rho}) = \Theta(\rho)$, вследствие чего мы получаем $\widehat{\Theta} = \Theta$.

В условиях предложения 9.4 необходимо начать с продолжения $\widehat{g}$ на все $\widehat{X}$. Если $\widehat{f}$-периодическая точка ξ имеет период m, то f^m отображает замкнутый интервал $\pi^{-1}\xi$ в себя. В случае, когда множество $\pi^{-1}\xi \cap \operatorname{Fix} f^m$ непусто, положим $\widehat{g}(\widehat{f}^k\xi) = g(f^k x)$, $k \geqslant 0$, где x — какая-нибудь точка этого множества. Если же $\pi^{-1}\xi \cap \operatorname{Fix} f^m = \varnothing$, то $\xi \in \operatorname{Fix}^- \widehat{f}^m$ и существует точка $x \in \pi^{-1}\xi \cap \operatorname{Fix} f^{2m}$. Положим тогда

$$\widehat{g}(\widehat{f}^k\xi) = \left(g(f^k x) g(f^{m+k}x)\right)^{1/2}, \quad k \geqslant 0,$$

где квадратный корень выбран так, что точки $\widehat{g}(\widehat{f}^k x)$, $g(f^k x)$, $g(f^{m+k}x)$ принадлежат одной и той же половине комплексной плоскости, граница которой проходит через начало координат. Из этого определения с помощью простого геометрического рассуждения, использующего подобие треугольников, получаем

$$\left|\widehat{g}(\widehat{f}^k x) - g(f^k x)\right| + \left|g(f^{m+k}x) - \widehat{g}(\widehat{f}^k x)\right| \leqslant 2\left|g(f^{m+k}x) - g(f^k x)\right|. \quad (3.1)$$

Поскольку $\widehat{g}(\xi)$ уже определено для периодических ξ, положим $\widehat{g}(\xi) = g(\pi^{-1}\xi)$ для всех остальных ξ (данное определение согласуется с определением, содержащимся в предложении 9.4 и замечании 9.5(1)). В силу (3.1) $\operatorname{Var}\widehat{g} \leqslant 2\operatorname{Var} g$.

По построению $\widehat{\Theta}_{\text{per}} \leqslant \Theta_{\text{per}}$. Если неатомическая мера $\widehat{\rho}$ является $\widehat{f}$-эргодической, то она приписывает нулевую вероятность счетному множеству $\{\xi\colon \operatorname{card}\pi^{-1}\xi > 1\}$. Следовательно, существует такая f-эргодическая мера ρ, что $\pi\rho = \widehat{\rho}$ и $\widehat{\Theta}(\widehat{\rho}) = \Theta(\rho)$, а потому $\widehat{\Theta}_{\text{erg}} \leqslant \Theta_{\text{erg}}$. Пусть $(\xi, -)$ — виртуальная периодическая точка периода m для $\widehat{f}$ и $\xi_\alpha \nearrow \xi$. Если $x_\alpha \in \pi^{-1}\xi_\alpha$ и $x_\alpha \nearrow x$, то $x \in \operatorname{Fix} f^m$ и $\lim \widehat{g}(\xi_\alpha) = \lim g(x_\alpha)$, так что выполняются равенство $\widehat{\Theta}(\xi, -) = \Theta(x, -)$ и аналогичное равенство для $(\xi, +)$. Следовательно, $\widehat{\Theta}_{\text{vir}} \leqslant \Theta_{\text{vir}}$ и, таким образом, $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$.

В условиях предложения 9.7 $\widehat{\Theta}_{\text{vir}} = \Theta_{\text{vir}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{erg}} = \Theta_{\text{erg}}$. Значения $\widehat{\Theta}$, отвечающего периодическим точкам новой системы, совпадают со значениями Θ, отвечающего периодическим или виртуальным периодическим точкам старой системы. Тем самым, и здесь $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$.

§ 4. Трансфер-оператор $\mathcal{L}$

Как и раньше, рассмотрим систему (X, f, g), состоящую из компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}$, кусочно-монотонного отображения f и функции ограниченной вариации g. Выберем минимальное покрытие $(J_1, \ldots, J_N)$, связанное с f. Назовем *трансфер-оператором* оператор $\mathcal{L}$, определенный на банаховом пространстве $\mathcal{B}$ функций $X \to \mathbb{C}$ ограниченной вариации формулой

$$(\mathcal{L}\Phi)(x) = \sum_{y\colon fy=x} g(y)\Phi(y),$$

и положим[9]

$$R = \lim_{m\to\infty} \left(\|\mathcal{L}^m\|_0\right)^{1/m}.$$

Тем самым, R — это спектральный радиус того же $\mathcal{L}$, но действующего на пространстве ограниченных функций $X \to \mathbb{C}$.

Теорема 9.10. (a) *Спектральный радиус $R_\mathcal{B}$ оператора $\mathcal{L}$, действующего на $\mathcal{B}$, удовлетворяет неравенству*

$$\Theta \leqslant R_\mathcal{B} \leqslant R.$$

(b) *Существенный спектральный радиус оператора $\mathcal{L}$ не превосходит Θ.*

(c) *Если $g \geqslant 0$, то $R_\mathcal{B} = R$. Если, кроме того, $\Theta < R$, то R служит собственным значением оператора $\mathcal{L}$ и существует отвечающая ему собственная функция $\Phi_0 \geqslant 0$.*

В параграфе 9.6 мы увидим, что $R \leqslant \max(\Theta, \exp P(\ln|g|))$, где P — давление.

Доказательство утверждения (а). Для каждого $m > 0$ подберем такое y_m, что

$$\left|\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k y_m)\right| \geqslant \frac{1}{2}\sup_y \left|\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k y)\right|.$$

[9] В другом месте (Ruelle [12]) мы использовали обозначение R для спектрального радиуса оператора $|\mathcal{L}|$, действующего на пространстве ограниченных функций и определяемого как как оператор, который получается при замене g в определении $\mathcal{L}$ на $|g|$.

Пусть Φ_m — функция, равная единице в точке y_m и равная нулю в остальных точках. Тогда

$$R_{\mathcal{B}} = \lim_{m\to\infty} \|\mathcal{L}^m\|^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|\mathcal{L}^m \Phi_m\|\right)^{1/m} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left|\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k y_m)\right|^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2} \sup_y \left|\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k y)\right|\right)^{1/m} = \Theta.$$

Аналогично получаем

$$R = \lim_{m\to\infty} (\|\mathcal{L}^m\|_0)^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} (\|\mathcal{L}^m \Phi_m\|_0)^{1/m} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left|\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k y_m)\right|^{1/m} = \Theta.$$

Пусть интервалы $\widetilde{J}_i$, $i = 1, \ldots, N$, где $\widetilde{J}_i \subset J_i$, образуют разбиение пространства X и ψ_i — отображение, обратное к $f|\widetilde{J}_i$. Положив

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_k}(x) = g(\psi_{i_1} x) \cdot g(\psi_{i_2}\psi_{i_1} x) \cdots g(\psi_{i_k} \ldots \psi_{i_1} x),$$

мы получим

$$\mathcal{L}^m \Phi(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_m} \varphi_{i_1, \ldots, i_m}(x) \Phi(\psi_{i_m} \ldots \psi_{i_1} x),$$

$$\operatorname{Var} \mathcal{L}^m \Phi = \sum_{k=1}^{m} \sup_x \left|g\left(f^{k-2}x\right) \ldots g(fx) g(x)\right| \cdot \sum_{i_k} \operatorname{Var}(g \circ \psi_{i_k}) \times$$
$$\times \sup_y \left| \sum_{i_{k+1} \ldots i_m} \varphi_{i_{k+1} \ldots i_m}(\psi_{i_k} y) \Phi(\psi_{i_m} \ldots \psi_{i_k} y)\right| +$$
$$+ \sup_x \left|g\left(f^{m-1}x\right) \ldots g(fx) g(x)\right| \cdot \operatorname{Var} \Phi.$$

Следовательно, если $\overline{\Theta} > \Theta$, $\overline{R} > R$, то найдутся такие C, $C' > 0$, что

$$\operatorname{Var} \mathcal{L}^m \Phi \leqslant C \left[\sum_i \operatorname{Var} g \circ \psi_i \cdot \sum_{k=1}^{m} \overline{\Theta}^{k-1} \overline{R}^{m-k} \|\Phi\|_0 + \overline{\Theta}^m \operatorname{Var} \Phi\right] \leqslant$$
$$\leqslant (m+1) C' \left(\max(\overline{\Theta}, \overline{R})\right)^m \cdot \operatorname{Var} \Phi$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{L}^m\|^{1/m} \leqslant \max(\Theta,\, R) = R.$$

Доказательство утверждения (в). Пользуясь обозначениями пункта (а), возьмем точку $x_{i_1,\,\ldots,\,i_m}$ из области определения отображения $\psi_{i_m} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}$ (если эта область непуста) и определим оператор K_m равенством

$$(K_m\Phi)(x) \sum_{i_1\,\ldots\,i_m} \varphi_{i_1,\,\ldots,\,i_m}(x)\Phi(\psi_{i_m} \circ \ldots \circ \psi_{i_1} x_{i_1,\,\ldots,\,i_m}).$$

Очевидно, K_m — оператор конечного ранга, и если мы докажем, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|\mathcal{L}^m - K_m\|^{1/m} \leqslant \Theta, \tag{9.1}$$

то из формулы Нуссбаума [1] для существенного спектрального радиуса будет следовать, что существенный спектральный радиус оператора $\mathcal{L}$ не превосходит Θ. Будем действовать так же, как в пункте (а), но с заменой $\mathcal{L}^m\Phi$ на $\mathcal{L}^m\Phi - K_m\Phi$. Заметим, что

$$\sum_{i_{k+1}\,\ldots\,i_m} \|\Phi \circ \psi_{i_m} \circ \ldots \circ \psi_{i_k} - \\ - \Phi(\psi_{i_m} \circ \ldots \circ \psi_{i_k}(\psi_{i_{k-1}} \circ \ldots \circ \psi_{i_1} x_{i_1\,\ldots\,i_m}))\|_0 \leqslant \operatorname{var}\Phi,$$

а потому

$$\operatorname{Var}(\mathcal{L}^m\Phi - K_m\Phi) \leqslant \\ \leqslant C\Big[\sum_i \operatorname{Var} g \circ \psi_i \cdot \sum_{k=1}^{m} \overline{\Theta}^{k-1}\overline{\Theta}^{m-k} \operatorname{var}\Phi + \overline{\Theta}^m \cdot 2\operatorname{Var}\Phi\Big] \leqslant \\ \leqslant (m+1)C'\overline{\Theta}^m \operatorname{Var}\Phi,$$

откуда вытекает (9.1).

Доказательство пункта (с). Пользуясь условием $g \leqslant 0$, мы получаем

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{L}^m\|^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} (\operatorname{Var}(\mathcal{L}^m 1))^{1/m} \geqslant \\ \geqslant \lim_{m\to\infty} (\|\mathcal{L}^m 1\|_0)^{1/m} = \lim_{m\to\infty} (\|\mathcal{L}^m\|_0)^{1/m} = R, \tag{9.2}$$

так что $R_{\mathcal{B}} \geqslant R$. Тогда, согласно п. (а), $R_{\mathcal{B}} = R$.

Предположив, что $\Theta < R$, докажем, что R — собственное число оператора $\mathcal{L}$ и что отвечающая ему собственная функция неотрицательна. Мы можем написать

$$1 = \Psi + \sum_j \Psi_j,$$

где каждая функция Ψ_j принадлежит обобщенному собственному подпространству оператора $\mathcal{L}$, отвечающему собственному числу λ_j с $|\lambda_j| = R$. При этом

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\mathcal{L}^m\Psi}{r^m} = 0,$$

где $0 < r < R$. В силу (4.2)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \operatorname{Var}(\mathcal{L}^m 1) = \log R$$

и, значит, не все Ψ_j равны нулю.

Записав ограничение оператора $\mathcal{L}$ на обобщенное собственное пространство, отвечающее λ_j, в жордановой нормальной форме, можно убедиться в том, что существует целое $k \geqslant 0$, для которого

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_j^m m^k} \mathcal{L}^m \Psi_j = \Phi_j, \quad \mathcal{L}\Phi_j = \lambda_j \Phi_j$$

при всех j, и что найдется j, для которого $\Phi_j \neq 0$. Так как

$$0 \leqslant \frac{\mathcal{L}^m 1}{R^m m^k} = \frac{\mathcal{L}^m \Psi}{R^m m^k} + \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \frac{\mathcal{L}^m \Psi_j}{\lambda_j^m m^k},$$

мы получаем

$$\sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \geqslant -\varepsilon(m), \tag{9.3}$$

где $0 \leqslant \varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Заметим, что сумма в левой части последнего неравенства конечна и что $|\lambda_j/R| = 1$ при всех j.

Пусть $\langle \ldots \rangle_m$ обозначает усреднение по $m \in \mathbb{Z}$. Тогда (9.3) приводит к неравенствам

$$\Big\langle (1 \pm \cos\alpha m) \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \Big\rangle_m \geqslant 0,$$

$$\Big\langle (1 \pm \sin \alpha m) \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \Big\rangle_m \geqslant 0.$$

Если $\lambda_j \neq R$ при всех j, то

$$\Big\langle \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \Big\rangle_m = 0$$

и, следовательно,

$$\Big\langle e^{i\alpha m} \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \Big\rangle_m = 0$$

при всех вещественных α. Но тогда $\Phi_j = 0$ при всех j, что невозможно. Тем самым, R — собственное число, скажем, $\lambda_0 = R$. Кроме того, $\Phi_0 = \Big\langle \sum_j \Big(\frac{\lambda_j}{R}\Big)^m \Phi_j \Big\rangle_m \geqslant 0$ и Φ_0 не может быть тождественным нулем.

Лемма 9.11. *Пусть (U_α) — семейство попарно не пересекающихся интервалов в X (не обязательно замкнутых) и $Y = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Предположим, что каждый интервал U_α содержится в некотором J_i и что либо*

(a$_1$) *fU_α содержится в некотором U_β из того же семейства, либо*

(a$_2$) *g равно нулю на U_α.*

Предположим также, что каждый интервал U_α обладает одним из следующих ниже свойств:

(b$_1$) *если $U_\beta < U_\alpha$, то существует такое $x_{\alpha\beta} \in X \setminus Y$, что $U_\beta < x_{\alpha\beta} < U_\alpha$,*

(b$_2$) *если $U_\beta > U_\alpha$, то существует такое $x_{\alpha\beta} \in X \setminus Y$, что $U_\alpha < y_{\alpha\beta} < U_\beta$.*

При условии (a) *$\mathcal{L}\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_Y$. В таком случае оператор $\mathcal{L}_{\setminus Y}$ на $\mathcal{B}_{\setminus Y}$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_{\setminus Y}\omega = \omega\mathcal{L}$, где $\omega\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{\setminus Y}$ — фактор-отображение.*

При условии (b) *спектральный радиус ограничения оператора $\mathcal{L}$ на $\mathcal{B}_Y$ не превосходит Θ. Следовательно, если $|\lambda| > \Theta$ и E^λ, $E^\lambda_{\setminus Y}$ — обобщенные собственные пространства операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\setminus \mathcal{Y}}$, отвечающие собственному числу λ, то $\omega\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{\setminus Y}$ порождает биекцию $E^\lambda \to E^\lambda_{\setminus Y}$.*

Предположим, что Ψ обращается в нуль вне Y. Тогда $(\mathcal{L}\Psi)(x) \neq 0$ возможно лишь при $x = fy$, где $y \in U_\alpha$, $g(y) \neq 0$. Поэтому в силу условия (a) $x \in U_\beta \subset Y$. Следовательно, $\mathcal{L}\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_Y$ и $\mathcal{L}_{\setminus Y}$ корректно определено.

Если выполняется условие (b) и $\Psi \in \mathcal{B}_Y$, то

$$\operatorname{Var}\Psi \leqslant \sum_{\alpha} \operatorname{Var}(\Psi|U_\alpha) \leqslant 2\operatorname{Var}\Psi$$

(для доказательства второго неравенства заметим, что при вычислении

$$\operatorname{Var}\Psi = \lim \Bigl(|\Psi(a_0)| + \sum |\Psi(a_i) - \Psi(a_{i-1})| + |\Psi(a_n)|\Bigr)$$

можно предположить, что каждому растянутому a_i в данном U_α непосредственно предшествует или за ним непосредственно следует некоторое a_j с $\Psi(a_j) = 0$).

Стало быть, если $\Psi \in \mathcal{B}_Y$, то

$$\operatorname{Var}\mathcal{L}^m\Psi \leqslant \sum_{\beta} \operatorname{Var}(\mathcal{L}^m\Psi|U_\beta) \leqslant \sum_{\alpha} \operatorname{Var}\bigl(\mathcal{L}^m(\chi_{U_\alpha}\Psi)\bigr),$$

и, обозначив отображение, обратное к $f|J_i$, через ψ_i, мы получим

$$\mathcal{L}^m(\chi_{U_\alpha}\Psi) = (g \circ \psi_{i_1}) \ldots (g \circ \psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_m})\bigl((\chi_{U_\alpha}\Psi) \circ \psi_{i_1} \circ \ldots \circ \psi_{i_m}\bigr).$$

При любом $\varepsilon > 0$ произведение k множителей g вдоль траектории преобразования f не превосходит $C(\Theta + \varepsilon)^k$. Следовательно,

$$\operatorname{Var}\bigl(\mathcal{L}^m(\chi_{U_\alpha}\Psi)\bigr) \leqslant mC^2(\Theta + \varepsilon)^{m-1} \cdot \operatorname{Var} g \cdot \operatorname{Var}(\Psi|U_\alpha)$$

и, окончательно,

$$\operatorname{Var}\mathcal{L}^m\Psi \leqslant mC^2(\Theta + \varepsilon)^{m-1} \cdot \operatorname{Var} g \cdot 2\operatorname{Var}\Psi.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{L}^m|\mathcal{B}_Y\| \leqslant 2mC^2(\Theta + \varepsilon)^{m-1} \cdot \operatorname{Var} g$$

и спектральный радиус ограничения $\mathcal{L}|\mathcal{B}_Y$ не превосходит Θ. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Предложение 9.12. *Предположим, что $\mathcal{L}$, Y, Θ, а также $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{\Theta}$ с $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$ удовлетворяют условиям леммы* 9.11. *Если существует изоморфизм $\mathcal{B}_{\setminus Y} \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$, отождествляющий $\mathcal{L}_{\setminus Y}$ и $\widehat{\mathcal{L}}_{\setminus \widehat{Y}}$, будем говорить, что трансфер-операторы $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ являются Θ-эквивалентными: их собственные* *значения λ с $|\lambda| > \Theta$ одинаковы, а между обобщенными собственными подпространствами E^λ и $\widehat{E}^\lambda$ имеется естественное соответствие. Отношение Θ-эквивалентности можно продолжать, пользуясь его транзитивностью.*

Конструкции предложения 9.1 (*приводящего к некоторому разбиению*), *предложения* 9.3 (*приводящего к марковскому разбиению*), *предложения* 9.4 *при* $\widehat{\Theta} \leqslant \Theta$ (*приводящего к образующему разбиению*) *и предложения* 9.7 (*дающего* $\widehat{g}$, *непрерывное в периодических точках*) *каждый раз порождают* Θ*-эквивалентность* $\mathcal{L} \sim \widehat{\mathcal{L}}$.

В случае предложения 9.4 мы вначале предположим, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — марковское разбиение. Условия применимости леммы 9.11 уже проверены в предложениях 9.1, 9.3 (при $Y = \varnothing$), 9.4 (в марковском случае) и 9.7. Кроме того, из построения вытекает, что изоморфизм $\mathcal{B}_{\setminus Y} \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\setminus \widehat{Y}}$, порождаемый отображениями $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ (предложение 9.1), $\widehat{\Phi}|X \leftarrow \widehat{\Phi}$ (предложение 9.3), $\widehat{\Phi} \circ \pi \leftarrow \widehat{\Phi}$ (предложение 9.4) и $\Phi \mapsto \Phi \circ \widehat{\pi}$ (предложение 9.7), отождествляют $\mathcal{L}_{\setminus Y}$ и $\widehat{\mathcal{L}}_{\setminus \widehat{Y}}$.

Таким образом, если не заботиться о марковости разбиений в предложении 9.4, то мы установили требуемую Θ-эквивалентность $\mathcal{L} \sim \widehat{\mathcal{L}}$.

Переходя к общему случаю в предложении 9.4, заметим, что предложения 9.3 и 9.4 можно применять в любом порядке, получая при этом почти одинаковые результаты (см. замечание 9.5(3)). Обозначим символами $(*)$ и $(\widehat{\ })$ применение предложений 9.3 и 9.4 соответственно. Тогда мы получим операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{L}}^*$, $(\mathcal{L}^*)\widehat{\ }$, причем в смысле Θ-эквивалентности $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}^* \sim (\mathcal{L}^*)\widehat{\ }$, $\widehat{\mathcal{L}} \sim \widehat{\mathcal{L}}^*$. Но, согласно предложению 9.3 и замечанию (3), сделанному после предложения 9.4, $(\mathcal{L}^*)\widehat{\ } \sim \widehat{\mathcal{L}}^*$, что по транзитивности дает $\mathcal{L} \sim \widehat{\mathcal{L}}$.

Замечание 9.13. Предположим, что X — канторово множество, и пусть $\mathcal{B}_\infty = \{\Phi \in \mathcal{B}\colon \{x\colon \Phi(x) \neq 0\}$ счетно$\}$. Определим $\mathcal{L}_{\setminus\infty}$ равенством $\mathcal{L}_{\setminus\infty}\omega = \omega\mathcal{L}$, где

$$\omega\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{\setminus\infty} = \mathcal{B}/\mathcal{B}_\infty$$

— фактор-отображение. Тогда у $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\setminus\infty}$ совпадают собственные значения λ с $|\lambda| > \Theta$, а ω индуцирует биекцию $E^\lambda \to E^\lambda_{\setminus\infty}$ соответствующих обобщенных собственных подпространств.

Зафиксировав $\Psi \in \mathcal{B}_\infty$, положим $Z = \{x\colon \Psi(x) \neq 0\}$ и $Y = \bigcup_{m\geqslant 0} f^m Z$. Поскольку каждая точка счетного множества Y является предельной для $X \setminus Y$ (так как X — канторово множество), мы можем применить лемму 9.11. Значит (как и при доказательстве этой леммы),

$$\|\mathcal{L}^m \Psi\| \leqslant 2mC^2(\Theta+\varepsilon)^{m-1} \operatorname{Var} g \cdot \|\Psi\|,$$

а потому спектральный радиус $\mathcal{L}|\mathcal{B}_\infty$ не превосходит Θ, что и приводит к нашему утверждению.

Замечание 9.14. Предположим, что X — канторово множество, а функция $\widetilde{g}$ с $\operatorname{Var}\widetilde{g} < \infty$ такова, что множество $\{x\colon \widetilde{g}(x) \neq g(x)\}$ счетно и

$$\lim_{m\to\infty} \sup_x \left| \prod_{k=0}^{m-1} \widetilde{g}(f^k x) \right|^{1/m} \leqslant \Theta.$$

Тогда трансфер-оператор $\widetilde{\mathcal{L}}$, связанный с $\widetilde{g}$, Θ-эквивалентен оператору $\mathcal{L}$.

Для доказательства можно воспользоваться замечанием 9.13, заметив, что $\mathcal{L}_{\setminus\infty} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\setminus\infty}$.

§ 5. Дзета-функции

Изучение дзета-функций кусочно-монотонных отображений на том уровне общности, с которым мы здесь имеем дело, было начато Баланди и Келлером [4], которые рассмотрели случай, когда X — интервал прямой $\mathbb{R}$ и минимальное покрытие $(J_1, \ldots, J_N)$ является образующим. Их доказательство упрощается, если предположить, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее марковское разбиение (а X — канторово множество). Мы начнем с рассмотрения именно этого случая, а затем используем развитую выше технику в более общих случаях (и, в частности, докажем теорему Баланди–Келлера).

Предложение 9.15. *Пусть X — канторово множество, $f\colon X \to X$ — кусочно-монотонное отображение, g — функция ограниченной вариации и $(J_1, \ldots, J_N)$ — разбиение, связанное с f.*

Предположив, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее разбиение и что $fJ_i = X$ для $i = 1, \ldots, N$ (откуда, в частности, видно, что $(J_1, \ldots, J_N)$ — марковское разбиение), определим дзета-функцию равенством

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x\in\operatorname{Fix} f^m} \prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right).$$

Тогда функция $1/\zeta(z)$ *аналитична при* $|z| < \Theta^{-1}$ *и ее нули имеют вид* λ^{-1}, *где* λ *— собственные значения трансфер-матрицы* $\mathcal{L}$, *причем кратности нулей и соответствующих им собственных значений совпадают.*

Первоначальная идея доказательства принадлежит Хайдну [1], который работал с функциями g, удовлетворяющими условию Гельдера. Рассуждения Хайдна были приспособлены к рассматриваемой ситуации Балади и Келлером.

Пусть Λ_+ — множество последовательностей $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ с $\xi_i \in \{1, \ldots, N\}$ и τ — сдвиг: $\tau\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Пару (X, f) мы можем отождествить с (Λ_+, τ), поставив в соответствие точке x такую последовательность $(\xi_0, \xi_1, \ldots)$, что $f^k x \in J_{\xi_k}$. Имея в виду это отождествление, мы будем соответствующим образом менять обозначения там, где это окажется удобным.

Пусть

$$\zeta_m = \sum_{\xi \in \operatorname{Fix} \tau^m} \prod_{k=0}^{m-1} g\left(\tau^k \xi\right),$$

так что

$$1/\zeta(z) = \exp\Big[-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\zeta_m z^m\Big].$$

Согласно теореме 9.10(b), можно найти такое $\overline{\Theta} > \Theta$, как угодно близкое к Θ, что у трансфер-оператора $\mathcal{L}$ не существует собственных значений λ с $|\lambda| = \overline{\Theta}$, а число тех λ, для которых $|\lambda| > \overline{\Theta}$, конечно (и равно, скажем, M). Проектор $\mathcal{P}$, отвечающий той части спектра оператора $\mathcal{L}$, которая лежит в области $\{\lambda\colon |\lambda| < \overline{\Theta}\}$, является ограниченным оператором в $\mathcal{B}$, и мы можем написать

$$\mathcal{L}\Phi = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \sum_{\alpha,\, \beta} S_{j\alpha} \cdot (L_j)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta}(\Phi) + \mathcal{P}\mathcal{L}\Phi,$$

$$\mathcal{L}^m\Phi = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j^m \sum_{\alpha,\, \beta} S_{j\alpha} \cdot (L_j^m)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta}(\Phi) + \mathcal{P}\mathcal{L}^m\Phi,$$

где $\Theta < |\lambda_j| \leqslant R$ и $(S_{j\alpha})$, $(\sigma_{j\alpha})$ — сопряженные базисы в обобщенных собственных подпространствах операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$, отвечающих собственному значению λ_j. При этом матрицы L_j можно считать приведенными к жордановой нормальной форме (L_j^m — это m-я степень матрицы L_j). Пусть m_j — кратность λ_j, т. е. $m_j = \operatorname{tr} L_j$.

При фиксированном $m > 0$ обозначим через Σ_η суммирование по всем словам η длины m, т. е. по элементам множества $\{1, \ldots, N\}^m$, и через $\vee$ — операцию сцепления двух слов[10]. Пусть $\eta^* = \eta \vee \eta \vee \ldots \in \Lambda_+$ — периодическое продолжение слова η и $\chi_\eta \in \mathcal{B}$ таково, что $\chi_\eta(\xi) = 1$, если ξ начинается со слова η, и $\chi_\eta(\xi) = 0$ в противном случае. Тогда

$$(\mathcal{L}^m \chi_\eta)(\xi) = \prod_{k=0}^{m-1} g\left(\tau^k(\eta \vee \xi)\right).$$

Заметим, что для некоторой константы C_1

$$\|\mathcal{L}^m \chi_\eta\|_0 \leqslant C_1 \overline{\Theta}^m,$$

вследствие чего

$$\operatorname{Var} \mathcal{L}^m \chi_\eta \leqslant m \operatorname{Var} g \cdot C_1^2 \overline{\Theta}^{m-1}.$$

Немного изменив $\overline{\Theta}$, мы можем игнорировать множитель m и получить

$$\operatorname{Var} \mathcal{L}^m \chi_\eta \leqslant C_2 \overline{\Theta}^m.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\zeta_m &= \sum_\eta \prod_{k=0}^{m-1} g\left(\tau^k \eta^*\right) = \sum_\eta \prod_{k=0}^{m-1} g\left(\tau^k(\eta \vee \eta^*)\right) = \sum_\eta \left(\mathcal{L}^m \chi_\eta\right)(\eta^*) = \\
&= \sum_\eta \Big[\sum_{j=1}^{M} \lambda_j^m \sum_{\alpha,\,\beta} S_{j\alpha}(\eta^*) \cdot (L_j^m)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta}(\chi_\eta) + (\mathcal{P}\mathcal{L}^m \chi_\eta)(\eta^*)\Big] = \\
&= \sum_{j=1}^{M} \lambda_j^m \sum_{\alpha,\,\beta} (L_j^m)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta} \Big(\sum_\eta S_{j\alpha}(\eta^*)\chi_\eta\Big) + \sum_\eta \left(\mathcal{P}\mathcal{L}^m \chi_\eta\right)(\eta^*) = \\
&= \zeta_m^{(0)} + \zeta_m^{(1)} + \zeta_m^{(2)},
\end{aligned}$$

где

$$\zeta_m^{(0)} = \sum_{j=1}^{M} m_j \lambda_j^m,$$

[10] Сцепление слова η длины m со словом η' длины m' приводит к слову $\eta \vee \eta'$ длины $m + m'$.

$$\zeta_m^{(1)} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j^m \sum_{\alpha,\, \beta} \left(L_j^m\right)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta} \Big(\sum_\eta S_{j\alpha}(\eta^*)\chi_\eta - S_{j\alpha} \Big),$$

$$\zeta_m^{(2)} = \sum_\eta \left(\mathcal{P}\mathcal{L}^m \chi_\eta\right)(\eta^*).$$

Поскольку

$$\exp\Big[- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \zeta_m^{(0)} z^m \Big] = \prod_{j=1}^{M} (1 - \lambda_j z)^{m_j},$$

доказываемое утверждение вытекает из нижеследующих лемм 9.16 и 9.17.

Лемма 9.16. *Найдется такая константа C, что*

$$|\zeta_m^{(1)}| \leqslant C \overline{\Theta}^m.$$

Воспользуемся формулой

$$\mathcal{L}^{*m} \sigma_{j\alpha} = \lambda_j^m \sum_\beta \left(L_j^m\right)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta}.$$

Тогда

$$\zeta_m^{(1)} = - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j^m \sum_{\alpha,\, \beta} \left(L_j^m\right)_{\alpha\beta} \sigma_{j\beta} \Big(S_{j\alpha} - \sum_\eta S_{j\alpha}(\eta^*)\chi_\eta \Big) =$$
$$= - \sum_{j=1}^{M} \sum_\alpha (\mathcal{L}^{*m} \sigma_{j\alpha}) \Big(S_{j\alpha} - \sum_\eta S_{j\alpha}(\eta^*)\chi_\eta \Big) =$$
$$= - \sum_{j=1}^{M} \sum_\alpha \sigma_{j\alpha} \Big(\mathcal{L}^m \Big(S_{j\alpha} - \sum_\eta S_{j\alpha}(\eta^*)\chi_\eta \Big) \Big) =$$
$$= - \sum_{j=1}^{M} \sum_\alpha \sigma_{j\alpha} \left(\mathcal{L}^m S_{j\alpha} - K_m S_{j\alpha} \right),$$

где K_m — оператор конечного ранга, определенный равенствами

$$K_m = \mathcal{L}^m E_m,$$

$$(E_m\Phi)(\xi) = \sum_{\eta} \Phi(\eta^*)\chi_\eta(\xi).$$

Если $\Psi_\eta = \chi_\eta \cdot (1 - E_m)\Phi = \chi_\eta \cdot (\Phi - \Phi(\eta^*))$, то

$$\sum_\eta \operatorname{Var}\Psi_\eta \leqslant 3\operatorname{Var}\Phi,$$

так что

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\mathcal{L}^m\Phi - K_m\Phi) = \operatorname{Var}\left(\mathcal{L}^m(1 - E_m)\Phi\right) = \operatorname{Var}\sum_\eta L^m\Psi_\eta \leqslant \\ \leqslant \sum_\eta \operatorname{Var}\mathcal{L}^m\chi_\eta \cdot \operatorname{Var}\Psi_\eta \leqslant 3C_2\overline{\Theta}^m \operatorname{Var}\Phi\end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\mathcal{L}^m - K_m\| \leqslant 3C_2\overline{\Theta}^m$. Окончательно получаем

$$|\zeta_m^{(1)}| \leqslant C\overline{\Theta}^m,$$

что и утверждалось.

Лемма 9.17. *Найдется такая константа C', что*

$$|\zeta_m^{(2)}| \leqslant C'\overline{\Theta}^m.$$

Зафиксируем $\widetilde{\eta} \in \Lambda_+$ и для каждого слова η_k длины k положим

$$Y_{\eta_k} = \begin{cases} \mathcal{L}^k\chi_{\eta_k} - g(\eta_k \vee \widetilde{\eta}) \cdot \mathcal{L}^{k-1}\chi_{\tau\eta_k}, & \text{если } k \geqslant 2, \\ \mathcal{L}\chi_{\eta_k}, & \text{если } k = 1, \end{cases}$$

где $\tau\eta_k$ — слово длины $k-1$, полученное сдвигом, и χ_{η_k} — характеристическая функция множества последовательностей из Λ_+, начинающихся с η_k. При $k \geqslant 2$ мы получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} Y_{\eta_k} = \operatorname{Var}\left[(g(\eta_k \vee \cdot) - g(\eta_k \vee \widetilde{\eta})) \cdot \left(\mathcal{L}^{k-1}\chi_{\tau\eta_k}\right)(\cdot)\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{Var} g \cdot \operatorname{Var}\mathcal{L}^{k-1}\chi_{\tau\eta_k} \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{Var} g \cdot C_2\overline{\Theta}^{k-1} = C_3\overline{\Theta}^k.\end{aligned}$$

Через мгновение мы воспользуемся этим неравенством.

Положив $\eta_m = \eta$, получаем

$$\mathcal{L}^m \chi_\eta = \sum_{k=0}^{m-1} g(\eta \vee \widetilde{\eta}) \dots g\left(\tau^{k-1}\eta \vee \widetilde{\eta}\right) Y_{\tau^k \eta}.$$

Следовательно,

$$\zeta_m^{(2)} = \sum_\eta \left(\mathcal{P}\mathcal{L}^m \chi_\eta\right)(\eta^*) =$$
$$= \sum_\eta \sum_{k=0}^{m-1} g(\eta \vee \widetilde{\eta}) \dots g\left(\tau^{k-1}\eta \vee \widetilde{\eta}\right) \cdot \left(\mathcal{P}Y_{\tau^k \eta}\right)(\eta^*) = a + b,$$

где

$$a = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_\eta g(\eta \vee \widetilde{\eta}) \dots g\left(\tau^{k-1}\eta \vee \widetilde{\eta}\right) \left[\left(\mathcal{P}Y_{\tau^k \eta}\right)(\eta^*) - \left(\mathcal{P}Y_{\tau^k \eta}\right)(\eta \vee \widetilde{\eta})\right],$$

$$b = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_\eta g(\eta \vee \widetilde{\eta}) \dots g\left(\tau^{k-1}\eta \vee \widetilde{\eta}\right) \cdot \left(\mathcal{P}Y_{\tau^k \eta}\right)(\eta \vee \widetilde{\eta}).$$

При этом

$$|a| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \sum_\eta \left|g(\eta \vee \widetilde{\eta}) \dots g\left(\tau^{k-1}\eta \vee \widetilde{\eta}\right)\right| \cdot \operatorname{var}\left(\mathcal{P}Y_{\tau^k \eta} | \eta \vee \Lambda_+\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} C_1 \overline{\Theta}^k \sum_{\eta_{m-k}} \operatorname{Var} \mathcal{P}Y_{\eta_{m-k}} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} C_1 \overline{\Theta}^k \|\mathcal{P}\| \cdot C_3 \overline{\Theta}^{m-k} =$$
$$= m\|\mathcal{P}\| C_1 C_2 \overline{\Theta}^m,$$

а b представляется в виде

$$b = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\eta_{m-k}} \left(\mathcal{L}^k \mathcal{P} Y_{\eta_{m-k}}\right)(\eta_{m-k} \vee \widetilde{\eta}),$$

откуда вытекает, что

$$|b| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\eta_{m-k}} \|\mathcal{P}\mathcal{L}^k\| \operatorname{Var} Y_{\eta_{m-k}} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} C_4 \overline{\Theta}^k \cdot C_3 \overline{\Theta}^{m-k} = m C_3 C_4 \overline{\Theta}^m.$$

Немного изменив $\overline{\Theta}$, можно избавиться от множителя m в последнем выражении и в результате получить

$$|\zeta_m^{(2)}| \leqslant |a| + |b| \leqslant C'\overline{\Theta}^m,$$

что и требовалось.

Репрезентативное множество периодических точек

Начав с динамической системы (X, f) и минимального покрытия $(J_1, \ldots, J_N)$ и последовательно применив предложения 9.1 и 9.4, мы перейдем сначала к системе $(\widetilde{X}, \widetilde{f})$, а затем — к системе $(\widehat{X}, \widehat{f})$. Точки пространства $\widehat{X}$ — это последовательности $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$ элементов множества $\{1, \ldots, N\}$ (*символов*), а $\widehat{f}$ — *сдвиг*. Если орбита $\left(f^k x\right)_{k\geqslant 0}$ не проходит через точки $b_1, \ldots, b_s$, общие концы интервалов J_i, J_{i+1}, то образ $\alpha x = (\xi_k)_{k\geqslant 0} \in \widehat{X}$ точки x корректно определен включениями $f^k x \in J_{\xi_k}$. В частности, если $\operatorname{Per} f$ и $\operatorname{Per}\widehat{f}$ — множества периодических точек преобразований f и $\widehat{f}$, то существуют конечные множества P_*, $\widehat{P}_*$, для которых

$$\alpha(\operatorname{Per} f \setminus P_*) = \operatorname{Per}\widehat{f} \setminus \widehat{P}_*.$$

Назовем f-инвариантное множество $S \subset \operatorname{Per} f$ *репрезентативным множеством периодических точек*, если α индуцирует такую биекцию

$$\beta\colon S \setminus \text{конечное множество} \to \operatorname{Per}\widehat{f} \setminus \text{конечное множество},$$

что $\widehat{f}$-период точки βx равен f-периоду точки x.

Пусть, как и в параграфе 9.1, $\operatorname{Per}^{\pm}(f, m)$ — множество точек из $\operatorname{Per} f \setminus P_*$, которые являются соответственно положительными $(+)$ и отрицательными $(-)$ периодическими точками с минимальным периодом m. Аналогичным образом, пусть $\operatorname{Per}^{\pm}(\widehat{f}, m)$ — множество точек из $\operatorname{Per}\widehat{f}$, которые положительны или отрицательны и имеют минимальный период m. Заметим, что отображение α сохраняет период m точки x в том и только том случае, когда оно сохраняет ее знак ($+$ или $-$), но что возможны случаи, когда $x \in \operatorname{Per}^{+}(f, 2n)$ и $\alpha x \in \operatorname{Per}^{-}(\widehat{f}, n)$. Для положительной периодической точки $\xi \in \operatorname{Per}^{+}(\widehat{f}, m) \setminus \widehat{P}_*$ всегда найдется $x \in \alpha^{-1}\xi \cap \operatorname{Per}^{+}(f, m)$. Если X — интервал в $\mathbb{R}$, то в силу следствия 9.6 для отрицательной периодической точки $\xi \in \operatorname{Per}^{-}(\widehat{f}, m) \setminus \widehat{P}_*$ найдется точка $x \in \alpha^{-1}\xi \cap \operatorname{Per}^{-}(f, m)$, которая к тому же единственна. Следовательно, в случае интервала всегда существует репрезентативное множество периодических точек. Этот факт входит в качестве пункта (a) в следующее предложение.

Предложение 9.18. *Пусть f — кусочно-монотонное преобразование компактного подмножества X прямой $\mathbb{R}$ и $(J_1, \ldots, J_N)$ — связанное с ним минимальное покрытие*[11]. *Тогда*

(a) *если X — интервал, то всегда существует репрезентативное множество S периодических точек*;

(b) *в следующих случаях само множество* $\operatorname{Per} f$ *является репрезентативным множеством периодических точек*:

(b_1) $(J_1, \ldots, J_N)$ *— образующее разбиение*;

(b_2) *X — интервал в $\mathbb{R}$, а f — кусочно-аффинное отображение с наклонами $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, удовлетворяющими условию $\prod \sigma_i^{m_i} \neq 1$, если целые $m_1, \ldots, m_N$ неотрицательны и $\Sigma m_i > 0$*;

(b_3) *X — интервал, а f — отображение класса C^3 с отрицательной производной Шварца*[12]:

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 < 0.$$

Пункт (a) уже доказан.

В условиях пункта (b_1) процедура, описанная в предложении 9.1, изменяет лишь конечное число периодических точек, а процедура из предложения 9.4 вообще не меняет их. Поэтому α индуцирует биекцию множеств периодических точек по модулю конечного множества и сохраняет период.

Пусть выполнены условия пункта (b_2) и пусть $\xi \in \operatorname{Per}^{\pm}(\widehat{f}, m) \setminus \widehat{P}_*$. Тогда f^m отображает $\alpha^{-1}\xi$ в $\alpha^{-1}\xi$, является аффинным на этом интервале и имеет наклон $\neq 1$. Поэтому существует единственная неподвижная точка $x \in \operatorname{Per}^{\pm}(f, m)$. Тем самым, α индуцирует биекцию $\operatorname{Per} f \setminus P_* \to \operatorname{Per} \widehat{f} \setminus \widehat{P}_*$, сохраняющую период.

Прежде чем переходить к пункту (b_3), необходимо напомнить некоторые сведения, касающиеся производных Шварца. Важность условия $Sf < 0$

[11] Как уже сказано в замечании 9.2(2), мы можем позволить f принимать по два значения в общих концевых точках $b_1, \ldots, b_s$ соседних интервалов J_i и J_{i+1}.

[12] Это условие можно ослабить. Будем считать, как всегда, что функция f непрерывна и строго монотонна на интервалах $J_i = [a_{i-1}, a_i]$. Предположим также, что f непрерывно дифференцируема на (a_{i-1}, a_i), а $|f'|^{-1/2}$ строго выпукла. Эти условия достаточны для справедливости пункта (b_3) (см. Престон [3]).

в рассматриваемом контексте впервые была отмечена Д. Зингером. Отображения интервала, удовлетворяющие этому условию, рассматривались в работах Престона [3], де Мело [1], Мартенса [1][13]. Фундаментальный факт состоит в том, что если $Sf_1 < 0$, $Sf_2 < 0$, то $S(f_1 \circ f_2) < 0$ и, значит, условие отрицательности производной Шварца сохраняется при итерациях.

Предположим, что $Sf < 0$ и f строго возрастает на $[a, b]$. Тогда, как можно проверить, f' не может иметь локальных минимумов на (a, b), а в таком случае у f может быть на (a, b) не более одной отталкивающей неподвижной точки (т. е. такой точки x, что $fx = x$ и $f'(x) > 1$). Если x — произвольная неподвижная точка преобразования f, то либо $fu > u$ для всех $u \in (a, x)$, либо $fu < u$ для всех $u \in (x, b)$, либо x — отталкивающая точка. Применим этот результат к ограничению f^{2m} на интервал $\bigcap\limits_{k=0}^{m-1} f^{-k} J_{\xi(k)}$, где $\xi(k) \in \operatorname{Per}^{\pm}(\widehat{f}, m)$. Этот интервал содержит по крайней мере одну неподвижную точку отображения f^m и не более одной отталкивающей неподвижной точки отображения f^{2m}. Остальные f^{2m}-неподвижные точки имеют вид $\lim\limits_{n \to \infty} f^{2mn}u$, где $0 \leqslant k < 2m$ и $f^k u$ произвольно близко к одной из точек деления $a_0, \ldots, a_N$. Отсюда следует, что множество периодических орбит отображения f, не являющихся отталкивающими, конечно. Но тогда α индуцирует биекцию

$$\operatorname{Per} f \setminus \text{конечное множество} \to \operatorname{Per} \widehat{f} \setminus \text{конечное множество},$$

сохраняющую период.

Теорема 9.19. *Пусть X — компактное подмножество прямой $\mathbb{R}$, $f\colon X \to X$ — кусочно-монотонное отображение, $g\colon X \to \mathbb{C}$ — функция ограниченной вариации и $(J_1, \ldots, J_N)$ — минимальное покрытие, связанное с f.*

Если S — репрезентативное множество периодических точек, определим дзета-функцию ζ_S равенством

$$\zeta_S(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in S \cap \operatorname{Fix} f^m} \prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right).$$

Если само $\operatorname{Per} f$ — репрезентативное множество периодических точек,

[13]См. также де Мело и ван Стрин [1*]. — *Прим. ред.*

положим

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} \prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right).$$

Тогда функции $1/\zeta_S(z)$, $1/\zeta(z)$ аналитичны при $|z| < \Theta^{-1}$ и их нули в этой области имеют вид λ^{-1}, где λ — собственные значения трансфер-оператора $\mathcal{L}$, причем кратности нулей и соответствующих собственных значений одинаковы[14].

В случае (b_1) предложения 9.18, когда $(J_1, \ldots, J_N)$ — образующее, мы получаем теорему Баладив–Келлера. В случаях (b_2) и (b_3), относящихся к кусочно-аффинным отображениям и к отображениям с неотрицательной производной Шварца соответственно, мы можем иметь дело как с притягивающими, так и с отталкивающими периодическими орбитами.

Для доказательства теоремы 9.19 мы последовательно применим предложения 9.1, 9.4, 9.3 и посмотрим, как при этом будут изменяться дзета-функция ζ_S, параметр Θ и трансфер-оператор $\mathcal{L}$.

Если мы изменим S на одну периодическую орбиту периода p, проходящую через точку x_p, то $1/\zeta_S(z)$ изменится на

$$\begin{aligned}\exp\Bigl[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{np} \cdot p\Bigl(\prod_{k=0}^{p-1} g\left(f^k x_p\right)\Bigr)^n\Bigr] &= \exp\Bigl[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Bigl(z^p \prod_{k=0}^{p-1} g\left(f^k x_p\right)\Bigr)^n\Bigr] = \\ &= 1 - z^p \prod_{k=0}^{p-1} g\left(f^k x_p\right).\end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой голоморфную функцию, не имеющую нулей при $|z| < \Theta^{-1}$. Значит, при доказательстве теоремы можно изменять множество S на конечное число периодических орбит. Поскольку S — репрезентативное множество периодических орбит, мы можем с помощью предложений 9.1 и 9.4 заменить ζ_S функцией ζ, отвечающей системе с образующим разбиением (мы определяем $\widehat{g}$ на втором шаге в соответствии с доказательством предложения 9.9, так что $\widehat{g}(\alpha x) = g(x)$, если $x \in S \setminus$ конечное множество). Применение же предложения 9.3 не изменяет ζ.

Заметим, что применение предложений 9.1, 9.4, и 9.3 может лишь уменьшить Θ (см. предложение 9.9).

[14] Кратность собственного значения λ оператора $\mathcal{L}$ — это размерность обобщенного собственного пространства.

Наконец, согласно предложению 9.12, все трансфер-операторы, полученные в результате последовательного применения предложений 9.1, 9.4, и 9.3, Θ-эквивалентны и, следовательно, имеют одинаковые собственные значения с $|\lambda| > \Theta$, кратности которых также совпадают.

Таким образом, мы пришли к ситуации, которая охватывается предложением 9.15. Этим завершается доказательство теоремы 9.19.

Следствие 9.20. [15] *Пусть в условиях теоремы* 9.19 X — *интервал прямой* $\mathbb{R}$ *и* $J_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, N$. *Определим функцию* $\varepsilon\colon X \to \{-1, 0, +1\}$ *условиями*: $\varepsilon(a_0) = \ldots = \varepsilon(a_N) = 0$, $\varepsilon(x) = \pm 1$ *при* $x \in (a_i, a_{i+1})$, *где знаки* $+$ *и* $-$ *выбираются в зависимости от того, возрастает* f *на* (a_i, a_{i+1}) *или убывает. Определим отрицательную дзета-функцию равенством*

$$\zeta^-(z) = \exp\Big[2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}\sum_{x\in\mathrm{Fix}^- f^m}\prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right)\Big],$$

где $\mathrm{Fix}^- f^m = \{x \in \mathrm{Fix}\, f^m\colon \prod\limits_{k=0}^{m-1}\varepsilon(f^k x) = -1\}$. *Тогда функция* $\zeta^-(z)$ *мероморфна при* $|z| < \Theta^{-1}$ *и ее порядок*[16] *в точке* λ^{-1} *равен* $n^\varepsilon(\lambda) - n(\lambda)$, *где* $n(\lambda)$ *и* $n^\varepsilon(\lambda)$ — *кратности* λ *как собственного значения операторов* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g$ *и* $\mathcal{L}^\varepsilon = \mathcal{L}_{\varepsilon g}$ *соответственно.*

Так как X — интервал, существует репрезентативное множество S периодических точек (см. предложение 9.18(a)). В соответствии с параграфом 9.5 (и следствием 9.6) S с точностью до конечного множества содержит множество

$$\bigcup_m \mathrm{Per}^-(f, m) = \bigcup_m \mathrm{Fix}^-(f, m)$$

отрицательных периодических точек. Говоря об аналитических свойствах ζ^-, мы можем игнорировать это конечное множество и написать

$$2\sum_{x\in\mathrm{Fix}^- f^m}\prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right) = \sum_{x\in S\cap\mathrm{Fix}^- f^m}\prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right) =$$

$$= \sum_{x\in S\cap\mathrm{Fix}\, f^m}\Big(\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k x) - \prod_{k=0}^{m-1}\varepsilon(f^k x) g(f^k x)\Big),$$

[15] Это специальный случай гипотезы из [12], частично доказанной Балади и Рюэлем [2].

[16] Мы определяем порядок мероморфной функции ζ в точке z_0 как единственное $n \in \mathbb{Z}$, для которого $(z - z_0)^{-n}\zeta(z)$ голоморфна и не равна нулю при $z = z_0$.

откуда получаем

$$\zeta^{-}(z)=\zeta_S(z)/\zeta_S^{\varepsilon}(z),$$

где ζ_S^{ε} вычисляется по εg так же, как ζ_S — по g. Отсюда моментально следует доказываемое утверждение.

§ 6. Термодинамический формализм

Теорема 9.21. *Пусть X — компактное подмножество прямой $\mathbb{R}$, $f\colon X\to X$ — кусочно-монотонное отображение, g — неотрицательная функция ограниченной вариации на X и $(J_1,\,\ldots,\,J_N)$ — минимальное покрытие, связанное с f.*

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество f-инвариантных вероятностных мер на X, через $h(\rho)$ — энтропию меры $\rho\in\mathcal{I}$. Пусть $R_{\mathcal{B}}$ — спектральный радиус оператора $\mathcal{L}$, действующего на $\mathcal{B}$. Тогда

$$R_{\mathcal{B}}=\max\left(\Theta,\,\exp P(\ln g)\right),$$

где

$$P(\ln g)=\sup_{\rho\in\mathcal{I}}\left(h(\rho)+\rho(\ln g)\right).$$

Из теоремы 9.10 мы знаем, что

$$R_{\mathcal{B}}=R=\lim_{m\to\infty}\left(\|\mathcal{L}^m 1\|_0\right)^{1/m}\geqslant\Theta.$$

Поэтому остается доказать, что если $\max\left(R,\,\exp P(\ln g)\right)>\Theta$, то $R=$ $=\exp P(\ln g)$. При этом можно предположить, что $\Theta>0$, так как при $\Theta=0$ мы имеем $R=\exp P(\ln g)=0$.

Начнем с нескольких частных случаев, а затем перейдем к общей ситуации.

Случай А (полный сдвиг, непрерывная функция $g>0$). Предположение, что сдиг — «полный» равносильно тому, что $(J_1,\,\ldots,\,J_N)$ — образующее разбиение и $fJ_i=X$ при $i=1,\,\ldots,\,N$. В этом случае, согласно стандартной теории (см. Уолтерс [1], Рюэль [4]),

$$\exp P(\ln g)=\lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{x\in\operatorname{Fix}f^m}\prod_{k=0}^{m-1}g\left(f^k x\right)\Big)^{1/m}.$$

Так как $g > 0$, правая часть этого равенства имеет вид r^{-1}, где r — радиус сходимости ряда

$$\zeta(z) = \exp\Big[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^m} \prod_{k=0}^{m-1} g\left(f^k x\right)\Big].$$

Теорема 9.19 и теорема 9.10(c) показывают, что если $r > \Theta^{-1}$, то $r = R^{-1}$, а если $r = \Theta^{-1}$, то $R = \Theta$, так что во всех случаях $R = \exp P(\ln g) \geqslant \Theta$.

Случай B (образующее марковское разбиение, $g \geqslant 0$). Здесь и в дальнейшем «марковость» означает, что $fJ_i = X$ при $i = 1, \ldots, N$. С помощью предложения 9.7 мы строим систему $(\widehat{X}, \widehat{f}, \widehat{g})$, где функция $\widehat{g}$ непрерывна в периодических точках. Заметим, что X — канторово множество и, значит, $\widehat{X}$ — тоже канторово множество. Пусть $\overline{g}$ — наименьшая полунепрерывная сверху функция, удовлетворяющая условию $\overline{g} \geqslant \widehat{g}$. Тогда разность $\overline{g} - \widehat{g}$ обращается в нуль вне некоторого счетного множества, не содержащего периодических точек. Кроме того, $\sum\limits_{x \in X} (\overline{g}(x) - \widehat{g}(x)) < +\infty$.

Пусть (A_n) — убывающая последовательность непрерывных положительных функций, сходящаяся к $\ln \overline{g}$. Используя очевидные обозначения, можно написать

$$\Theta_n \searrow \overline{\Theta} = \widehat{\Theta} \leqslant \Theta,$$

где первое соотношение следует из определения Θ, второе — из предложения 9.8 и третье — из предложения 9.9. Покажем, что

$$R_n \searrow \overline{R} = \widehat{R}, \quad R = \max(\widehat{R}, \Theta).$$

Первое утверждение вытекает из определения R, второе — из следствия 9.14, а последнее — из Θ-эквивалентности операторов $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ (см. предложение 9.12).

Если $\exp P(\ln g) > \Theta$, то можно считать, что в равенстве

$$P(\ln g) = \sup_{\rho} \left(h(\rho) + \rho(\ln g)\right)$$

мера ρ — неатомическая и $h(\rho) > 0$. Следовательно,

$$P(A_n) \geqslant P(\ln \overline{g}) = P(\ln \widehat{g}) = P(\ln g) > \Theta.$$

Из равенства $\exp P(A_n) = R_n$ (см. случай (A)) получаем

$$R_n \searrow \bar{R} = \widehat{R} = R > \Theta.$$

Поэтому остается доказать, что если $R > \Theta > 0$, то $R = \exp P(\ln g)$, причем мы уже знаем, что

$$\Theta_n \searrow \overline{\Theta} = \widehat{\Theta} \leqslant \Theta,$$

$$R_n \searrow \overline{R} = \widehat{R} = R.$$

Положив $R/\Theta = e^{2\varepsilon}$, мы видим, что при достаточно большом n

$$R_n/\Theta_n \geqslant R/\Theta e^{\varepsilon} = e^{\varepsilon}.$$

Так как $R_n = \exp P(A_n)$ (см. случай (A)), можно утверждать, что

$$\widehat{h}(\rho_n) + \rho_n(A_n) = P(A_n) \geqslant \ln \Theta_n + \varepsilon$$

для подходящей меры $\rho_n \in \widehat{\mathcal{I}}$, которая, в частности, должна удовлетворять неравенству $\widehat{h}(\rho_n) \geqslant \varepsilon$.[17] Выделив из ρ_n подпоследовательность, слабо сходящуюся к $\widehat{\rho}$, получим (см. ниже, § 9.7)

$$P(A_n) \searrow P(\ln \overline{g}) = \widehat{h}(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \overline{g}),$$

$$\widehat{h}(\widehat{\rho}) \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом, существует неатомическая мера $\widehat{\rho}$, удовлетворяющая тем же условиям. В частности,

$$P(\ln \widehat{g}) \leqslant P(\ln \overline{g}) = \widehat{h}(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \overline{g}) = \widehat{h}(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \widehat{g}) \leqslant P(\ln \widehat{g}),$$

так что

$$P(\ln \overline{g}) = P(\ln \widehat{g}) = \widehat{h}(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \widehat{g}).$$

Кроме того,

$$h(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \widehat{g}) = h(\widehat{\pi}\widehat{\rho}) + (\widehat{\pi}\widehat{\rho})(\ln g) \leqslant P(\ln g).$$

Объединив эти факты, получим

$$P(A_n) \searrow P(\ln \overline{g}) = P(\ln \widehat{g}) \leqslant P(\ln g).$$

Значит, при больших n

$$P(\ln g) \geqslant P(A_n) - \varepsilon = \ln R_n - \varepsilon \geqslant \ln R - \varepsilon \ln \Theta + \varepsilon.$$

[17]Поскольку из определения Θ_n (см. § 9.3) следует, что $\rho_n(A_n) \leqslant \ln \Theta_n$. — *Прим. ред.*

Отсюда видно, что в формуле

$$P(\ln g) = \sup\bigl(h(\rho) + \rho(\ln g)\bigr)$$

$\sup$ можно брать по неатомическим мерам ρ с $h(\rho) \geqslant \varepsilon$ и, тем самым, по мерам ρ вида $\widehat{\pi}\widehat{\rho}$. Поэтому

$$P(\ln \widehat{g}) = P(\ln g).$$

В итоге получаем

$$P(A_n) \searrow P(\ln \overline{g}) = P(\ln \widehat{g}) = P(\ln g),$$

и так как уже известно, что $R_n \searrow \bar{R} = \widehat{R} = R$ и $R_n = \exp P(A_n)$, мы приходим к равенству $R = \exp P(\ln g)$.

Случай C (марковское разбиение, $g \geqslant 0$**).** С помощью предложения 9.4 построим образующее марковское разбиение. При этом будет выполняться неравенство $\Theta \geqslant \widehat{\Theta}$, а в силу предложения 9.12 — равенство

$$R = \max(\widehat{R}, \Theta),$$

где $\widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g})$ (см. случай (B)).

а) Предположим сначала, что $\exp P(\ln g) > \Theta$. Тогда в равенстве

$$P(\ln g) = \sup\,(h(\rho) + \rho(\ln g))$$

можно ограничиться мерами ρ, для которых $h(\rho) \geqslant \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ (например при $\varepsilon = \frac{1}{2}\,(P(\ln g) - \ln \Theta)$). Если σ — инвариантная мера, сосредоточенная на множестве $\pi^{-1}\widehat{Y} = Y = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ (см. предложение 9.4), то вследствие счетности $\widehat{Y}$ мера $\pi\sigma$ сосредоточена на объединении периодических орбит. Если $\pi\sigma$ сосредоточена на одной периодической орбите, мы можем считать, что $\rho(U_\alpha) = 1/n$ и $f^n U_\alpha \subset U_\alpha$. В таком случае $h(\sigma) = 0$, поскольку $f^n | U_\alpha$ — гомеоморфизм. В более общем случае, когда мера σ сосредоточена на $Y = \pi^{-1}\widehat{Y}$, равенство $h(\sigma) = 0$ также выполняется. Поэтому можно считать, что $P(\ln g)$ задается как $\sup$ по тем ρ, для которых $\rho(Y) = 0$. Следовательно,

$$P(\ln \widehat{g}) = P(\ln g).$$

Таким образом,

$$\widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g}) = \exp P(\ln g) > \Theta$$

и, тем самым, $R = \widehat{R} = \exp P(\ln g)$.

b) Теперь предположим, что $R > \Theta$ и, значит,

$$R = \widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g}).$$

Положив $R/\Theta = e^{2\varepsilon}$, получим

$$\exp P(\ln \widehat{g}) = e^{2\varepsilon}\Theta \geqslant e^{2\varepsilon}\widehat{\Theta}.$$

Поэтому меры $\widehat{\rho}$ в равенстве

$$P(\ln \widehat{g}) = \sup\bigl(\widehat{h}(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \widehat{g})\bigr)$$

можно считать удовлетворяющими условию $\widehat{h}(\widehat{\rho}) \geqslant \varepsilon$ и к тому же неатомическими. В результате получим $\widehat{\rho}(\widehat{Y}) = 0$, $\widehat{\rho} = \pi\rho$, где $\rho \in \mathcal{I}$ и

$$h(\rho) + \rho(\ln g) = h(\widehat{\rho}) + \widehat{\rho}(\ln \widehat{g}).$$

Таким образом, $\exp P(\ln g) \geqslant \exp P(\ln \widehat{g}) = R > \Theta$, и мы возвращаемся к случаю (A).

Случай D (разбиение общего вида, $g \geqslant 0$). С помощью предложения 9.3 перейдем от произвольного разбиения к марковскому. При этом будет выполняться равенство $\widehat{\Theta} = \Theta$. Отождествив X с некоторым подмножеством множества $\widehat{X}$, можно утверждать, что если $\rho \in \widehat{\mathcal{I}}$ и $\rho\,(\ln \widehat{g})$ конечен, то $\operatorname{supp} \rho \subset X$. Следовательно,

$$P(\ln \widehat{g}) = \sup_{\rho \in \widehat{\mathcal{I}}} (h(\rho) + \rho(\ln \widehat{g})) = \sup_{\rho \in \mathcal{I}} (h(\rho) + \rho(\ln g)) = P(\ln g).$$

Если $\exp P(\ln g) > \Theta$ и, значит, $\exp P(\ln \widehat{g}) > \widehat{\Theta}$, то $\widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g})$ (см. случай (C)), вследствие чего $\widehat{R} > \widehat{\Theta}$. Поэтому предположение $\max\,(R, \exp P(\ln g)) > \Theta$ приводит к заключению, что $\max(R, \widehat{R}) > \Theta = \widehat{\Theta}$. С помощью предложения 9.12 отсюда сначала получаем $R = \widehat{R} > \Theta$, затем $R = \widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g})$ (см. случай (C)) и наконец $R = \exp P(\ln g)$.

Случай E (общий). С помощью предложения 9.1 перейдем от минимального покрытия к разбиению. При этом будет выполняться равенство

$\widehat{\Theta} = \Theta$. Если $\exp P(\ln g) > \Theta$, то обычное рассуждение позволяет доказать, что $P(\ln g) = P(\ln \widehat{g})$, а так как $\exp P(\ln \widehat{g}) = \widehat{R}$ (случай (D)), мы получаем $\widehat{R} > \Theta$. Поэтому предположение $\max(R, \exp P(\ln g)) > \Theta$ приводит к неравенству $\max(R, \widehat{R}) > \Theta$. Отсюда следует (см. предложение 9.12), что $\widehat{R} = R > \Theta = \widehat{\Theta}$. Так как $\widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g})$ (случай (D)), справедливо неравенство $\exp P(\ln \widehat{g}) > \widehat{\Theta}$. Еще раз применив обычные рассуждения, получим $P(\ln g) = P(\ln \widehat{g})$. Таким образом, $R = \widehat{R} = \exp P(\ln \widehat{g}) = \exp P(\ln g)$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема справедлива при наших обычных предположениях относительно X, f и g, включающих, в частности, ограниченность вариации функции g.

Теорема 9.22. [18] *Если $g \geqslant 0$ и $\exp P(\ln g) > \Theta$, то множество равновесных состояний*

$$\Delta = \bigl\{\rho \in \mathcal{I}\colon h(\rho) + \rho(\ln g) = P(\ln g)\bigr\}$$

непусто и представляет собой симплекс, вершинами которого служат эргодические меры с энтропией $h \geqslant P(\ln g) - \ln \Theta$.

Если энтропия h полунепрерывна сверху на $\mathcal{I}$, а g — полунепрерывная функция на X, то

$$\rho \mapsto h(\rho) + \rho(\ln g)$$

— аффинная полунепрерывная сверху функция на $\mathcal{I}$. Поэтому она достигает максимума, равного $P(\ln g)$, на некоторой *грани* Δ симплекса Шоке $\mathcal{I}$, которая также является симплексом. Вершины (экстремальные точки) симплекса Δ — это эргодические меры, так как Δ — грань симплекса $\mathcal{I}$.

При доказательстве теоремы 9.21 мы свели общий случай к случаю системы $(\widehat{X}, \widehat{f}, \overline{g})$ (см. пункт (b) доказательства упомянутой теоремы), в которой $\widehat{h}$ и $\overline{g}$ полунепрерывны сверху. В этой ситуации множество

$$\overline{\Delta} = \Bigl\{\rho \in \widehat{\mathcal{I}}\colon \widehat{h}(\rho) + \rho(\ln \overline{g}) = P(\ln \overline{g})\Bigr\}$$

является гранью симплекса $\widehat{\mathcal{I}}$, вершины которого — эргодические меры. Так как $\rho(\ln \overline{g}) \leqslant \overline{\ln}\Theta$, при $\rho \in \overline{\Delta}$ выполняется неравенство $\widehat{h}(\rho) \geqslant P(\ln \overline{g}) - \ln \overline{\Theta} > 0$, откуда видно, что $\overline{\Delta}$ состоит из неатомических мер. Теперь

[18] В доказательстве этой теоремы используется теория Шоке (симплексы, грани и т. д.), для знакомства с которой см., например, Шоке и Мейер [1].

воспользуемся слабой топологией на $\widehat{\mathcal{I}}$ и $\overline{\Delta}$, т. е. топологией поточечной сходимости на пространстве $\widehat{\mathcal{C}}$ непрерывных функций $\widehat{X} \to \mathbb{C}$. Эта топология на $\overline{\Delta}$ не изменится, если заменить $\widehat{\mathcal{C}}$ на $\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{B}}$, где $\widehat{\mathcal{B}}$ — пространство функций $\widehat{X} \to \mathbb{C}$ ограниченной вариации (элементы множества $\widehat{\mathcal{B}}$ определяют на $\overline{\Delta}$ непрерывные функции, так как $\overline{\Delta}$ состоит из неатомических мер). Если теперь заменить $\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{B}}$ на $\widehat{\mathcal{B}}$, топология на $\overline{\Delta}$ опять не изменится (так как последняя замена приводит к более слабой хаусдорфовой топологии, которая, тем самым, эквивалентна исходной топологии). Наконец, слабая топология на $\overline{\Delta}$ есть тоже топология поточечной сходимости на $\widehat{\mathcal{B}}$. Конструкции, проведенные при доказательстве теоремы 9.2, индуцируют линейный гомеоморфизм $\Delta \to \Delta$, причем топология на Δ — это опять топология поточечной сходимости на $\mathcal{B}$, т. е. слабая топология. Тем самым, множество Δ непусто и является симплексом, а его вершины — это эргодические меры с энтропией $h \geqslant P(\ln g) - \ln \Theta$.

§ 7. Приложение: общее определение давления[19]

Пусть X — метризуемый компакт и $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Последнее называется *разделяющим точки*, если для всякой допустимой метрики d найдется такое $\varepsilon > 0$, что если $d(f^k x,\, f^k y) < \varepsilon$ при всех $k \geqslant 0$, то $x = y$. В соответствии с терминологией главы 8 можно сказать, что если $X \subset \mathbb{R}$ и $(X,\, f)$ обладает образующим разбиением, то f разделяет точки.

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество f-инвариантных вероятностных мер на X, снабженное слабой топологией (при этом $\mathcal{I}$ оказывается компактом). Если $\rho \in \mathcal{I}$, то энтропия $h(\rho)$ может принимать любые значения от до нуля до бесконечности. Функция $h(\cdot)$ — аффинная, и если f разделяет точки, то энтропия $h(\cdot)$ конечна и полунепрерывна сверху (см. Уолтерс [2] и гл. 6). Заметим, что построение проективного предела позволяет перейти от непрерывного разделяющего точки отображения к гомеоморфизму с тем же свойством, т. е. такому гомеоморфизму f, что если $d(f^k x,\, f^k y) < \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $x = y$.

Для непрерывной функции $A\colon X \to \mathbb{R}$ *давление* $P(A)$ определяется

[19]Поскольку в настоящее издание входит перевод книги «Термодинамический формализм», повторение в данном параграфе некоторых определений из этой книги можно при желании считать излишеством. Мы, однако, не пошли на возможные (весьма незначительные) сокращения, чтобы сохранить с максимальной полнотой оригинальный стиль автора. — *Прим. ред.*

равенством
$$P(A) = \sup_{\rho \in \mathcal{I}} \left(h(\rho) + \rho(A) \right).$$

Понятие давления пришло из статистической механики, см. Рюэль [4]; имеется другое определение давления, его эквивалентность приведенной выше формуле доказана Уолтерсом [2]. Мера $\rho \in \mathcal{I}$, для которой $h(\rho) + \rho(A) = P(A)$, называется *равновесным состоянием*. Если, в частности, функция $h(\cdot)$ полунепрерывна сверху, то для A существует по крайней мере одно равновесное состояние.

С помощью той же формулы давление и равновесные состояния можно определить и для некоторых отображений A, не являющихся непрерывными. Укажем один случай, в котором это обобщение полезно.

Если энтропия h, определенная на $\mathcal{I}$, конечна и полунепрерывна сверху, а функция g на X неотрицательна и также полунепрерывна сверху, то формула
$$\rho \mapsto h(\rho) + \rho(\ln g) \tag{9.4}$$
определяет аффинное полунепрерывное сверху отображение $\mathcal{I} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и мы можем положить
$$P(\ln g) = \max_{\rho \in \mathcal{I}} \left(h(\rho) + \rho(\ln g) \right).$$

Если (A_n) — убывающая последовательность непрерывных функций, сходящаяся к $\ln g$, то $P(A_n) \to P(\ln g)$. Если ρ_n — равновесное состояние для A_n и $\rho_n \to \rho$ (слабо), то ρ — равновесное состояние для $\ln g$.

Для доказательства заметим, что функция $\rho \mapsto \rho(\ln g)$ является пределом убывающей последовательности непрерывных функций $\rho \mapsto \rho(A_n)$. Поэтому она полунепрерывна сверху, так что функция (9.4) также полунепрерывна сверху. Поскольку
$$P(A_n) = h(\rho_n) + \rho_n(A_n)$$
и $\rho_n \to \rho$, мы имеем
$$P(\ln g) \leqslant \lim_{n \to \infty} P(A_n) \leqslant h(\rho) + \rho(A_n) \to h(\rho) + \rho(\ln g) \leqslant P(\ln g),$$
вследствие чего $P(A_n) \to P(\ln g)$ и ρ — равновесное состояние для $\ln g$.

Приложение A.1
Разнообразные определения и результаты

A.1.1. Порядок

Пусть $\leqslant$ — отношение порядка на множестве E и $S \subset E$. Существует не более одного $a \in S$, для которого $a \geqslant x$ при всех $x \in S$ (a — *наибольший элемент* множества S) и не более одного $b \in S$, для которого $b \leqslant x$ при всех $x \in S$ (b — *наименьший элемент* множества S).

Если $a \in E$ и $a \geqslant x$ при всех $x \in S$, то a — *мажоранта* множества S. Если множество мажорант имеет наименьший элемент, то он называется *верхней гранью* множества S и обозначается $\vee S$.[1] Если $b \in E$ и $b \leqslant x$ при всех $x \in S$, то b — *миноранта* множества S. Если множество минорант обладает наибольшим элементом, то последний называется *нижней гранью* множества S и обозначается $\wedge S$.[2]

Упорядоченное множество E называется *структурой*[3], если каждое его конечное подмножество $S \subset E$ обладает верхней гранью и нижней гранью. Достаточно потребовать, чтобы это имело место для каждого двухэлементного подмножества.

A.1.2. Массивные множества

Пусть E — топологическое пространство. Множество $S \subset E$ называется *массивным*, если оно содержит пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств. Если E метризуемо и полно, то каждое его массивное подмножество всюду плотно в E (теорема Бэра). Мы будем говорить, что свойство (точек x пространства E) является *типичным*, если оно выполняется для всех x из некоторого массивного подмножества.

[1] В переводе этих терминов мы следуем традиции, сложившейся в отечественной математической литературе и несколько отступаем от терминологии автора: на месте «мажоранты» в оригинале стоит «upper bound», а на месте «верхней грани» — «least upper bound». Аналогичное замечание относится к понятиям миноранты и нижней грани (см. ниже). — *Прим. ред.*

[2] Заметим, что использование нами символов $\vee$ и $\wedge$ для покрытий (см. § 6.3) не вполне соответствует этим определениям.

[3] В оригинале «lattice». — *Прим. ред.*

А.1.3. Полунепрерывность сверху

Функция f на топологическом пространстве E со значениями в $\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$ называется *полунепрерывной сверху*, если для любых $x \in E$ и $a > f(x)$ существует такая окрестность $\mathfrak{N}_x$ точки x, что

$$y \in \mathfrak{N}_x \Rightarrow f(y) < a.$$

Это эквивалентно требованию, чтобы для всякого действительного a множество $\{x \in E\colon f(x) < a\}$ было открыто, или чтобы множество $\{x \in E\colon f(x) \geqslant a\}$ было замкнуто.

Нижняя грань семейства непрерывных действительных функций на пространстве E полунепрерывна сверху. Если пространство E компактно и функция f полунепрерывна сверху, то существует точка $x \in E$, для которой

$$f(x) = \sup_{y\in E} f(y).$$

Таким образом, на компактном множестве всякая полунепрерывная сверху функция достигает своего максимума.

А.1.4. Субаддитивность

Предположим, что функция $F(a_1, \ldots, a_r)$ определена для всех натуральных $a_1, \ldots, a_r$. Она называется субаддитивной, если при всех k

$$F(a_1, \ldots, a_k'+a_k'', \ldots, a_r) \leqslant F(a_1, \ldots, a_k', \ldots, a_r)+F(a_1, \ldots, a_k'', \ldots, a_r).$$

В этом случае

$$\lim_{a_1, \ldots, a_r\to\infty} \frac{F(a_1, \ldots, a_r)}{\prod\limits_{k=1}^{r} a_k} = \inf_{a_1, \ldots, a_r} \frac{F(a_1, \ldots, a_r)}{\prod\limits_{k=1}^{r} a_k},$$

причем предел является действительным числом или равен $-\infty$ (это используется при доказательстве соотношения (3.17)).

Приложение А.2
Топологическая динамика

Пусть Ω — непустое хаусдорфово топологическое пространство и $f\colon \Omega \mapsto \Omega$ — непрерывное отображение. Пара $(\Omega,\ f)$ называется *топологической динамической системой*. Точка $x \in \Omega$ называется *блуждающей*, если у нее существует такая окрестность U, что $U \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^n U = \varnothing$. Точка $x \in \Omega$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого числа $N \geqslant 0$ найдется такое $n > N$, что $f^n U \cap U \neq \varnothing$. Неблуждающие точки образуют *неблуждающее множество* Λ. Множество Λ замкнуто и $f\Lambda \subset \Lambda$. Если f — гомеоморфизм, то неблуждающие множества отображений f^{-1} и f совпадают. Если пространство Ω компактно, то множество неблуждающих точек непусто.

Будем говорить, что динамическая система $(\Omega,\ f)$ (или отображение f) *топологически* $(+)$*-транзитивна*, если выполняется следующее условие:

(+T) *для любых двух непустых открытых множеств $U,\ V \subset \Omega$ и любого $N \geqslant 0$ существует такое $n > N$, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$.*

Если отображение f топологически $(+)$-транзитивно, то неблуждающее множество совпадает с Ω. Гомеоморфизм f топологически $(+)$-транзитивен тогда и только тогда, когда этим свойством обладает f^{-1}. Если Ω — компактное метризуемое пространство, то (+T) эквивалентно каждому из следующих двух условий:

(+T$'$) *Существует точка $x \in \Omega$, для которой множество предельных точек последовательности $\{f^n x\}_{n>0}$ совпадает с Ω.*

(+T$''$) *Те $x \in \Omega$, для которых множество предельных точек последовательности $\{f^n x\}_{n>0}$ совпадает с Ω, образуют массивное множество.*

[Пусть $\{V_k\}_{k>0}$ — счетный базис топологии пространства Ω. Множество предельных точек последовательности $\{f^n x\}$ совпадает со всем пространством Ω, если множество $\{f^{m+n}x\colon n > 0\}$ всюду плотно в Ω при любом $m > 0$. Множество тех x, для которых верно последнее, имеет вид

$$\bigcap_{k>0} \bigcap_{m>0} \bigcup_{n} f^{-m-n} V_k,$$

т. е. является счетным пересечением открытых множеств. Если выполняется условие (+Т), то это множество имеет непустое пересечение с каждым открытым множеством $U \neq \varnothing$ и, следовательно, всюду плотно в Ω. Поэтому (+Т) $\Rightarrow$ (+Т$''$). Ясно, что (+Т$''$) $\Rightarrow$ (+Т$'$). Если выполняется условие (+Т$'$) и U, V — непустые открытые множества то $f^m x \in U$ и $f^{m+n} x \in V$ при некоторых m, $n > N$. Отсюда следует (+Т).]

Заметим, что если множество предельных точек последовательности $\{f^n x\}$ совпадает со всем пространством Ω, то множество $\{f^n x\colon n > 0\}$ всюду плотно в Ω. Если Ω не содержит изолированных точек, то верно и обратное.

Динамическая система (Ω, f) (или отображение f) называется *топологически перемешивающей*, если выполняется условие

(М) *для любых непустых открытых множеств U, $V \subset \Omega$ существует такое $N \geqslant 0$, что*

$$f^n U \cap V \neq \varnothing \textit{при всех } n > N.$$

Если отображение f топологически перемешивает, то оно топологически (+)-транзитивно. Гомеоморфизм f топологически перемешивает тогда и только тогда, когда этим свойством обладает f^{-1}.

Гомеоморфизм f называется *топологически транзитивным*, если он удовлетворяет условию

(Т) *для любых двух непустых открытых множеств U, V существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$.*

Гомеоморфизм f топологически (+)-транзитивен тогда и только тогда, когда он топологически транзитивен и его неблуждающее множество совпадает с Ω:

$$(+\text{Т}) \Leftrightarrow (\text{Т}) \text{ и неблуждающее множество} = \Omega.$$

[Ясно, что из (+Т) вытекает (Т) и совпадение неблуждающего множества с Ω. Обратно, пусть выполняется (Т) и Ω является неблуждающим множеством. Возьмем непустые открытые множества U, $V \subset \Omega$ и любое $N \geqslant 0$. Мы хотим доказать, что

$$f^m U \cap V \neq \varnothing \text{ при } m > N.$$

Из (Т) следует, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$ при некотором $n \in \mathbb{Z}$. Так как каждая точка x множества $W = f^n U \cap V$ является неблуждающей, существует $m > N$, при котором $W \cap f^{m-n} W \neq \varnothing$. Поэтому $f^m U \cap V \supset W \cap f^{m-n} W \neq \varnothing$.]

Если Ω — компактное метризуемое пространство и f — гомеоморфизмом, то (T) эквивалентно следующим условиям (см. Уолтерс [2], гл. 5, § 2):

(T$'$) *существует такая точка* $x \in \Omega$, *что множество* $\{f^n x \colon n \in \mathbb{Z}\}$ *всюду плотно в* Ω;

(T$''$) *точки* $x \in \Omega$, *для которых множество* $\{f^n x \colon n \in \mathbb{Z}\}$ *всюду плотно в* Ω, *образуют массивное подмножество*.

Приложение A.3
Выпуклость

A.3.1. Общие определения

Пусть V — вещественное векторное пространство. Множество $S \subset V$ называется *выпуклым*, если $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$ при всех $x, y \in S$ и $\alpha \in [0, 1]$. *Выпуклой оболочкой* множества $S \subset V$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее S.

Пусть S — выпуклое множество. Функция $f\colon S \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если $\{(x, t) \in V \times \mathbb{R}\colon x \in S, t \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество. Функция f называется *вогнутой*, если функция $-f$ выпукла; если функция f одновременно выпукла и вогнута, она называется *аффинной*. В более общем случае, когда W — вещественное векторное пространство, мы говорим, что $f\colon S \mapsto W$ — *аффинное* отображение, если $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ при любых $x, y \in S$ и $\alpha \in [0, 1]$. В частности, всякое линейное отображение $V \to W$ аффинно.

Если S — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то всякая выпуклая функция на S непрерывна. Если f — действительная функция, определенная на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и $d^2 f(x)/dx^2 \geqslant 0$ при $x \in (a, b)$, то f выпукла.

Понятие выпуклости занимает центральное место в теории топологических векторных пространств (см. Кёте [1][4]). Здесь мы приводим только некоторые результаты, используемые в тексте.

A.3.2. Теорема Хана–Банаха

Пусть $P\colon V \mapsto \mathbb{R}$ — выпуклая функция и W — линейное подпространство пространства V. Предположим, что линейная функция $w\colon W \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $w \leqslant P|W$. Тогда существует такая линейная функция $v\colon V \mapsto \mathbb{R}$, что

$$v \leqslant P, \quad v|W = w.$$

[4]Более доступны отечественному читателю книги Бурбаки [1], Данфорда и Шварца [1], Иоффе и Тихомирова [1], Рокафеллара [1]. — *Прим. ред.*

Если V — топологическое векторное пространство и функция P непрерывна, то и функция v непрерывна. Стандартный пример: V — нормированное пространство и P — норма.

А.3.3. Теоремы отделимости

Говорят, что подмножества S и S' топологического векторного пространства V *разделены* (замкнутой) гиперплоскостью, если существуют непрерывная линейная функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ и число $c \in \mathbb{R}$, для которых $f(x) \leqslant c$ при $x \in S$ и $f(x) \geqslant c$ при $x \in S'$. Если $f(x) < c$ при $x \in S$ и $f(x) > c$ при $x \in S'$, то говорят, что S и S' *строго разделены*.

Пусть S и S' — непересекающиеся выпуклые множества.

(a) Если S открыто, то S и S' разделены гиперплоскостью.

(b) Если S и S' открыты, то они строго разделены гиперплоскостью.

(c) Если пространство V локально выпукло, множество S компактно, а множество S' замкнуто, то S и S' строго разделены гиперплоскостью.

(Заметим, что утверждения (a) и (b) — это различные формы теоремы Хана – Банаха).

А.3.4. Выпуклые компакты

Пусть V — нормированное пространство. Сопряженное к нему пространство V^* (пространство непрерывных линейных функционалов на V) — это банахово пространство с нормой

$$\sigma \mapsto ||\sigma|| = \sup_{x \in V\colon ||x|| \leqslant 1} |\sigma(x)|.$$

Слабой топологией на V^* называется топология, порожденная поточечной сходимостью линейных функционалов на V.[5] Пространство V^* со слабой топологией локально выпукло и сопряженное к нему пространство есть V. Замкнутый единичный шар $\{\sigma \in V^*\colon ||\sigma|| \leqslant 1\}$ компактен в слабой топологии пространства V^* (это частный случай теоремы *Алаоглу – Бурбаки*).

Пусть K — выпуклое компактное подмножество локально выпуклого топологического векторного пространства V и (f_α) — семейство коммутирующих непрерывных аффинных отображений множества K в себя. Тогда

[5] Эту топологию часто называют также $*$-слабой (Колмогоров и Фомин [1]) и V-топологией (Данфорд и Шварц [1], гл. 5, § 4). — *Прим. ред.*

отображения f_α имеют общую неподвижную точку (теорема *Маркова–Какутани*).

А.3.5. Крайние точки

Пусть V — вещественное векторное пространство и $S \subset V$. Точка $z \in S$ называется *крайней* точкой множества S, если

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y \text{ при некоторых } x,\, y \in S, \quad \alpha \in (0,\, 1),$$

лишь в том случае, когда $x = y = z$.

Пусть K — выпуклое компактное подмножество локально-выпуклого топологического векторного пространства V и $\mathscr{E}$ — совокупность крайних точек множества K. Тогда замыкание выпуклой оболочки множества $\mathscr{E}$ совпадает со всем K (теорема *Крейна–Мильмана*).

Пусть S — подмножество локально-выпуклого топологического векторного пространства V, причем замыкание K его выпуклой оболочки компактно. Тогда крайние точки множества K содержатся в замыкании множества S (теорема *Мильмана*).

А.3.6. Касательные функционалы к выпуклым функциям

Пусть V — топологическое векторное пространство и $P\colon V \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная выпуклая функция. Линейный функционал $\sigma\colon V \mapsto \mathbb{R}$ называется *касательным* к P в точке x, если

$$P(x + y) \geqslant P(x) + \sigma(y) \text{ при всех } y \in V.$$

Рассмотрим более общую ситуацию. Функционал σ называется *P-ограниченным*, если существует такое $c \in \mathbb{R}$, что

$$\sigma - c \leqslant P.$$

По теореме Хана–Банаха функционал σ непрерывен, т. е. содержится в пространстве V^*, сопряженном к V. Кроме того, для каждой точки $x \in V$ множество касательных функционалов к P в этой точке непусто.

Пусть V — банахово пространство, $P\colon V \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная выпуклая функция и C — замкнутый выпуклый конус в пространстве V с вершиной O. Если функционал $\sigma_0 \in V^*$ является P-ограниченным, $x_0 \in V$ и $\varepsilon > 0$, то существует функционал $\sigma \in V^*$, удовлетворяющий условию

$$\sigma(y) \geqslant \sigma_0(y) - \varepsilon||y|| \text{ при всех } y \in C \qquad (*)$$

и касательный к P в некоторой точке $x \in x_0 + C$ такой, что

$$||x - x_0|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[P(x_0) - \sigma_0(x_0) - s(\sigma_0)],$$

где $s(\sigma_0) = \inf\{P(y) - \sigma_0(y)\colon y \in V\}$. (Это теорема *Израэля* [1]. Если C — линейное подпространство, то условие $(*)$ принимает вид $||(\sigma-\sigma_0)|C|| \leqslant \varepsilon$; в частности, при $C = V$ мы получаем теорему *Бишопа–Фелпса*.)

А.3.7. Единственность касательного функционала[6]

Если V — сепарабельное банахово пространство и $P\colon V \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная выпуклая функция, то множество точек $x \in V$, в которых существует только один касательный функционал к P, является массивным (теорема *Мазура* [1]).

Если V — сепарабельное банахово пространство и $P\colon V \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная выпуклая функция, то множество

$$\{\sigma \in V^*\colon \sigma \text{ — касательный функционал к } P \text{ в точке } x\}$$

совпадает с замкнутой (в слабой топологии) выпуклой оболочкой множества предельных точек последовательностей $\{\sigma_n\}$, где σ_n — единственный касательный функционал к P в точке x_n, которая при $n \to \infty$ стремится к x: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (теорема *Ланфорда–Робинсона* [1]).

[6]В оригинале название этого пункта таково: «Multiplicity of tungent functionals». Однако речь в нем идет по преимуществу о единственности. — *Прим. ред.*

Приложение А.4
Меры и абстрактные динамические системы

А.4.1. Меры на компактных множествах

Пусть Ω — компактное пространство и $\mathscr{C}(\Omega)$ — банахово пространство непрерывных действительных функций на Ω с нормой

$$A \mapsto ||A|| = \sup_{x\in\Omega} |A(x)|$$

(равномерная норма). Пространство $\mathscr{C}(\Omega)^*$, сопряженное к $\mathscr{C}(\Omega)$, состоит из действительных мер на Ω. Мы будем иметь дело со *слабой топологией* на $\mathscr{C}(\Omega)^*$ (см. приложение А.3.4)[7]. Пространство $\mathscr{C}(\Omega)^*$ является банаховым пространством с нормой

$$\rho \mapsto ||\rho|| = \sup_{A:\ ||A||\leqslant 1} |\rho(A)|.$$

Пусть Ω' — другое компактное пространство и $f\colon \Omega \mapsto \Omega'$ — непрерывное отображение. Определим отображение $f\colon \mathscr{C}(\Omega)^* \mapsto \mathscr{C}(\Omega')^*$ формулой:

$$(f\rho)(A) = \rho(A \circ f), \quad \rho \in \mathscr{C}(\Omega)^*, \quad A \in \mathscr{C}(\Omega').$$

Меру $f\rho$ будем называть *образом* меры ρ при непрерывном отображении f.

Если $A \in \mathscr{C}(\Omega)$ и $\rho \in \mathscr{C}(\Omega)^*$, то произведение $A \cdot \rho \in \mathscr{C}(\Omega)^*$ определяется равенством $(A \cdot \rho)(B) = \rho(AB)$, $B \in \mathscr{C}(\Omega)$.

Если ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{C}(\Omega)^*$ и $\rho_1(A) \leqslant \rho_2(A)$ для любой неотрицательной функции $A \in \mathscr{C}(\Omega)$, мы пишем $\rho_1 \leqslant \rho_2$. Это неравенство устанавливает отношение порядка, которое превращает пространство $\mathscr{C}(\Omega)^*$ в структуру (см. приложение А.1.1). Мера ρ на Ω называется *вероятностной*, если выполнены любые два (а значит, и все) из следующих условий:

---

[7]В оригинале автор употребляет для нее также наименование vague topology. Этот термин (не имеющий общепринятого русского эквивалента) обычно относится к топологии на пространстве мер, порождающей сходимость интегралов от любой непрерывной функции с компактным носителем. Поскольку пространство Ω компактно, такая топология совпадает со слабой. — *Прим. ред.*

(a) $\rho \geqslant 0$;
(b) $\rho(1) = 1$;
(c) $||\rho|| = 1$.
Для $\rho \in \mathscr{C}(\Omega)^*$ и $A \in \mathscr{C}(\Omega)$ мы используем обозначение $\rho(A)$

$$\rho(A) = \int A\,d\rho = \int A(x)\rho(dx).$$

Интегрирование по мере ρ можно продолжить с пространства $\mathscr{C}(\Omega)$ на широкий класс функций, в частности, на характеристические функции многих подмножеств пространства Ω и определить тем самым меру этих (*измеримых*) подмножеств. К числу измеримых подмножеств метризуемого компактного пространства относятся *борелевские множества* — элементы σ-кольца, порожденного компактными множествами. (Непустой класс множеств называется σ-кольцом, если он замкнут относительно операций симметрической разности и счетного объединения.) Измеримые множества — это множества вида $X \cup N$, где X — борелевское подмножество, а N — подмножество некоторого борелевского множества меры нуль.

Мы кратко изложили здесь теорию мер Радона на компактных пространствах (см., например, Бурбаки [1], [2]). Меры Радона на локально компактных пространствах определяются аналогичным образом (примером может служить мера Лебега на $\mathbb{R}^n$). Во всех случаях, специально оговоренных, меры в этой монографии считаются радоновыми.

А.4.2. Абстрактная теория меры

Можно развить и абстрактную теорию меры, не предполагая, что на пространстве Ω имеется топология (см., например, Халмош [1]). Основной объект такой теории — это *пространство с мерой* $(\Omega, \mathscr{A}, \rho)$, где $\mathscr{A}$ — семейство подмножеств пространства Ω (измеримых подмножества), а мера ρ — счетно-аддитивная функция на $\mathscr{A}$. Мы предполагаем, что $\rho \geqslant 0$ и $\rho(\Omega) < \infty$. Изоморфизмы пространств с мерой — это сохраняющие меру преобразования, определенные и взаимнооднозначные с точностью до множеств меры ноль. Можно показать, что компактное метризуемое пространство с положительной мерой Радона является *пространством Лебега*, т. е. изоморфно объединению интервала действительной прямой с мерой Лебега и счетного множества (конечного или бесконечного), каждая точка которого имеет положительную меру, или «массу» (см. Рохлин [1]). В частности, если вероятностная мера ρ на компактном метризуемом пространстве не имеет атомов (т. е. $\rho(x) = 0$ для любой точки x), то она определяет пространство с мерой, изоморфное единичному интервалу $(0,\ 1) \subset \mathbb{R}$ с мерой Лебега.

А.4.3. Абстрактные динамические системы

Мы будем называть четверку $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \rho,\ \tau)$ *абстрактной динамической системой*, если $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \rho)$ — пространство с мерой и $\tau\colon \Omega \mapsto \Omega$ — обратимое отображение, сохраняющее $\mathscr{A}$ и ρ. Предположим, что $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \rho)$ изоморфно единичному интервалу $(0,\ 1) \subset \mathbb{R}$ с мерой Лебега.

Изоморфизмом двух абстрактных динамических систем, $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \rho,\ \tau)$ и $(\Omega',\ \mathscr{A}',\ \rho',\ \tau')$, называется такой изоморфизм $f\colon (\Omega,\ \mathscr{A},\ \rho) \mapsto (\Omega',\ \mathscr{A}',\ \rho')$ пространств с мерой, что $f \circ \tau = \tau' \circ f$.

Энтропия или *инвариант Колмогорова – Синая* абстрактной динамической системы определяется так, как это было сделано в параграфе 6.4, но с заменой только борелевских разбиений на измеримые. В случае, когда абстрактная динамическая система определяется гомеоморфизмом компактного метризуемого пространства, это определение совпадает с определением параграфа 6.4. Энтропия любой динамической системы — это неотрицательное число или $+\infty$; она не меняется при изоморфизме.

А.4.4. Сдвиги Бернулли

Пусть μ — вероятностная мера на конечном множестве Ω_0. Мера ρ на пространстве $\Omega = \Omega_0^{\mathbb{Z}}$, определяемая как прямое произведение $\rho = \mu^{\otimes\mathbb{Z}}$, инвариантна относительно сдвига τ (см. главу 5). Полученная таким образом динамическая система (и любая динамическая система, изоморфная ей) называется *сдвигом Бернулли*. Заметим, что энтропия в этом случае равна

$$h = -\sum_{\xi\in\Omega_0} \mu\{\xi\}\log\mu\{\xi\}.$$

Мы предполагаем, что $h > 0$.

А.4.5. Разбиения

Определение разбиения и связанных с ним понятий было дано в параграфе 6.3.

Пусть $\mathfrak{A} = (A_i)_{i \in I}$ и $\mathfrak{B} = (B_j)_{j \in J}$ — конечные измеримые разбиения пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \rho)$ и $\varepsilon > 0$. Говорят, что разбиение $\mathfrak{A}$ является *ε-независимым* от $\mathfrak{B}$, если существует множество $J' \subset J$, для которого $\sum\limits_{j \in J'} \rho(B_j) \leqslant \varepsilon$ и

$$\sum_{i \in I} |\rho(A_i \cap B_j)/\rho(B_j) - \rho(A_i)| < \varepsilon$$

при $j \notin J'$. Это отношение не симметрично, но оно влечет за собой симметричное неравенство

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\rho(A_i \cap B_j) - \rho(A_i)\rho(B_j)| < 3\varepsilon$$

и, в свою очередь, вытекает из симметричного неравенства

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\rho(A_i \cap B_j) - \rho(A_i)\rho(B_j)| < \varepsilon^2.$$

Разбиение $\mathfrak{A} = (A_i)$ называется *образующей* абстрактной динамической системы $(\Omega, \mathscr{A}, \rho, \tau)$, если множества $\tau^k A_i$ $(k \in \mathbb{Z})$ порождают $\mathscr{A}$ (при помощи операций счетного объединения и пересечения и с точностью до множеств меры нуль). Разбиение $\mathfrak{A}$ называется *слабобернуллиевским*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что разбиение $\bigvee\limits_{x \in [n,\, n+k]} \tau^x \mathfrak{A}$ является ε-независимым от $\bigvee\limits_{x \in [-k,\, -1]} \tau^x \mathfrak{A}$ при всех $k > 0$.

А.4.6. Теоремы об изоморфизме

Два сдвига Бернулли с одинаковой энтропией изоморфны (теорема *Орнстейна*).

Если абстрактная динамическая система (с пространством Лебега и неатомической мерой) имеет слабобернуллиевское разбиение в качестве образующей, то она изоморфна сдвигу Бернулли (теорема *Фридмана и Орнстейна*).

Подробно теоремы изоморфизма изложены в книгах Орнстейна [1], Шилдса [1] Смородинского [1].

Приложение А.5. Интегральные представления на выпуклых компактных множествах

Здесь мы следуем приложению А.5 из книги Рюэля [3]. Доказательства можно найти в книге Бурбаки [1] и статье Шоке и Мейера [1], на которые мы в дальнейшем будем ссылаться как на [B] и [C-M]. См. также Фелпс [1] и Ланфорд [1].

А.5.1. Результант меры

Пусть V — локально-выпуклое топологическое векторное пространство и $K \subset V$ — выпуклое компактное множество. Пространство $\mathscr{C}(K)^*$, дуальное к $\mathscr{C}(K)$, состоит из действительных мер на K. Обозначим через $\mathfrak{M}_+$ выпуклый конус положительных мер на K и через $\mathfrak{M}_1$ — множество положительных мер с нормой единица ($\mathfrak{M}_1$ — множество вероятностных мер на K). Для $\rho \in K$ обозначим через δ_ρ вероятностную меру, соответствующую единичной массе в точке ρ (меру Дирака).

Если $m \in \mathfrak{M}_1$, то существует такое $\rho \in K$, что для всех $f \in V^*$ (V^* — пространство, дуальное к V) справедливо равенство

$$f(\rho) = \int f(\sigma) m(d\sigma).$$

Точка ρ называется *результантом* меры m ([B], стр. 216, следствие). Если вероятностная мера m имеет результант ρ, то ее можно представить как слабый предел последовательности мер $m' \in \mathfrak{M}_1$ с результантом ρ, имеющих конечный носитель (т. е. $m' = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\rho_i}$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\rho_i \in K$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i = \rho$ (см. [B], стр. 217, предложение 3). Если мера $m \in \mathfrak{M}_1$ имеет результант ρ и функция f аффинна и полунепрерывна сверху на K, то $m(f) = f(\rho)$ ([C-M], лемма 10).

Компактное подмножество S множества K называется *фасадом* K, если $\operatorname{supp} m \subset S$ для любой вероятностной меры m, результант которой принадлежит множеству S.

А.5.2. Максимальные меры

Пусть $S \subset \mathscr{C}(K)$ — выпуклый конус непрерывных выпуклых функций на K. Введем отношение порядка $\prec$ на множестве $\mathfrak{M}_+$, положив

$$(m_1 \prec m_2) \Longleftrightarrow (m_1(f) \leqslant m_2(f) \text{ для всех } f \in S).$$

Если $m_1 \prec m_2$ и f — непрерывная функция, то $m_1(f) = m_2(f)$; в частности, $||m_1|| = ||m_2||$ и если $m_1 \in \mathfrak{M}_1$, то m_1 и m_2 имеют одинаковый результант. Если $m \in \mathfrak{M}_1$ и $\rho \in K$, то

$$(\text{результант } m \text{ равен } \rho) \Longleftrightarrow (m \succ \delta_\rho).$$

Говорят, что $m \in \mathfrak{M}_+$ — *максимальная мера*, если она максимальна относительно порядка $\prec$. Для любой меры $m \in \mathfrak{M}_+$ существует максимальная мера $\widetilde{m}$, для которой $m \prec \widetilde{m}$ (см. [C-M], теорема 3). В частности, для любой точки $\rho \in K$ существует максимальная мера с результантом ρ.

А.5.3. Проблема единственности

Пусть K — основание выпуклого конуса C с вершиной $O \in V$. Это означает, что K является пересечением C с замкнутой гиперплоскостью H пространства V, которая не содержит O и пересекает все образующие лучи C. Эту ситуацию всегда можно реализовать, заменив V на $\mathbb{R} \times V$ и вложив K в $\mathbb{R} \times V$ как $\{1\} \times K$. Конус C определяет порядок в V ($\xi_1 \leqslant \xi_2$ означает, что $\xi_2 - \xi_1 \in C$); если C — решетка относительно этого порядка (см. приложение А.1.1), говорят, что K является *симплексом* (Шоке). Это определение не зависит от выбора C.

Следующие условия эквивалентны ([C-M], теорема 11):

(a) K — симплекс.

(b) Если $\rho \in K$, то существует единственная максимальная мера $m_\rho \succ \delta_\rho$ (т. е. каждая точка $\rho \in K$ является результантом только одной максимальной меры m_ρ).

Для любого симплекса K отображение $\rho \mapsto m_\rho$ аффинно ([C-M], доказательство теоремы 11).

А.5.4. Максимальные меры и крайние точки

Пусть $\mathscr{E}(K)$ — совокупность крайних точек множества K. Если мера $m \in \mathfrak{M}_+$ сосредоточена на $\mathscr{E}(K)$ (т.е. если $\mathscr{E}(K)$ m-измеримо и $m(K \setminus \mathscr{E}(K)) = 0$), то m максимальна ([C-M], предложение 15). Обратно, если K метризуемо и мера $m \in \mathfrak{M}_+$ максимальна, то m сосредоточена на $\mathscr{E}(K)$ ([C-M], лемма 13).

Таким образом, если K метризуемо и $m \in \mathfrak{M}_+$, то

$$(m \text{ максимальна }) \Longleftrightarrow (m \text{ сосредоточена на } \mathscr{E}(K)).$$

В частности, всякая точка $\rho \in K$ является результантом некоторой меры m_ρ, сосредоточенной на $\mathscr{E}(K)$, и если K — симплекс, то $\rho \mapsto m_\rho$ является взаимнооднозначным отображением множества K на множество вероятностных мер, определенных на K и сосредоточенных на $\mathscr{E}(K)$. В этом случае можно сказать, что каждая точка $\rho \in K$ имеет единственное интегральное представление на $\mathscr{E}(K)$, определяемое некоторой мерой m_ρ, такой, что $f(\rho) = m_\rho(f)$ для любой непрерывной аффинной функции f на K.

А.5.5. Симплексы мер

Пусть Ω — компактное пространство. Зададим на пространстве $\mathscr{C}(\Omega)^*$ действительных мер на Ω слабую топологию (см. приложение А.4.1). Тогда множество $E = \mathfrak{M}_1$ вероятностных мер на Ω будет компактом, который метризуем, если метризуемо пространство Ω.

Пусть $\mathscr{G}$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathscr{C}(\Omega)^*$. Если из $\sigma \in \mathscr{G}$ следует $|\sigma| \in \mathscr{G}$, то множество $K = E \cap \mathscr{G}$ является симплексом. Если ρ, $\rho' \in E \cap \mathscr{G}$, то $||\rho' - \rho|| = ||m_{\rho'} - m_\rho||$. В частности, если ρ, ρ' — различные крайние точки множества $E \cap \mathscr{G}$, то $||\rho' - \rho|| = 2$, т.е. меры ρ и ρ' сингулярны. [Действительно, пусть $H = \{\sigma \in \mathscr{G} \colon \sigma(1) = 1\}$ и $\mathscr{G}_+$ — выпуклый конус положительных мер из $\mathscr{G}$. Так как $E \cap \mathscr{G} = H \cap \mathscr{G}_+$, множество $E \bigcap \mathscr{G}$ служит основанием конуса $\mathscr{G}_+$. Пусть σ_1, $\sigma_2 \in \mathscr{G}_+$; тогда меры $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 \pm |\sigma_1 - \sigma_2|)$, которые определяются соответственно как $\sup(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\inf(\sigma_1, \sigma_2)$ в $\mathscr{C}(\Omega)^*$, по предположению принадлежат множеству $\mathscr{G}$, а следовательно, и множеству $\mathscr{G}_+$. Но тогда $\sigma_\pm$ — это sup и inf мер σ_1 и σ_2 относительно порядка, определенного в $\mathscr{G}_+$. Поэтому $\mathscr{G}_+$ — симплексный конус и $E \cap \mathscr{G}$ — симплекс. Пусть теперь ρ, $\rho' \in E \cap \mathscr{G}$. Положим $\rho_\pm = \frac{1}{2}(|\rho' - \rho| \pm (\rho' - \rho)) \geqslant 0$, а также $m_\pm = ||\rho_\pm|| m_{\rho_\pm/||\rho_\pm||}$, если

$||\rho_\pm|| \neq 0$, и 0 в противном случае. Меры m_+ и m_- сингулярны (так как сингулярны меры ρ_+ и ρ_-) и $m_{\rho'} - m_\rho = m_+ - m_-$ (так как $\rho' - \rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\sigma \mapsto m_\sigma$ — аффинное отображение). Поэтому

$$||\rho' - \rho|| = ||\rho_+ - \rho_-|| = ||\rho_+|| + ||\rho_-|| = \\ = ||m_+|| + ||m_-|| = ||m_+ - m_-|| = ||m_{\rho'} - m_\rho||.]$$

A.5.6. $\mathbb{Z}^\nu$-инвариантные меры

Пусть Ω — компактное пространство, τ — действие группы $\mathbb{Z}^\nu$ гомеоморфизмами этого пространства и $I \subset \mathscr{C}(\Omega)^*$ — симплекс τ-инвариантных вероятностных мер на Ω. Единственная максимальная мера m_ρ на I с результантом $\rho \in I$ однозначно определяется соотношением

$$m_\rho\Big(\prod_{i=1}^{l} \widehat{A}_i\Big) = \lim_{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l \nearrow \infty} \rho\Big(\prod_{i=1}^{l}\big(|\Lambda_i|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_i} A_i \circ \tau^x\big)\Big),$$

где $\widehat{A}\colon I \mapsto \mathbb{R}$ определяется равенством $\widehat{A}(\sigma) = \sigma(A)$.

Крайние точки множества I называются *эргодическими* мерами. Эргодичность меры $\rho \in I$ равносильна тому, что $m_\rho(\widehat{A}^2) = \rho(A)^2$ для всех $A \in \mathscr{C}$. Интегральное представление $\rho \mapsto m_\rho$ называется *эргодическим разложением*[8] (см. Рюэль [3], глава 6).

[8]А также разложением на эргодические компоненты. — *Прим. ред.*

Приложение B
Нерешенные задачи

В этом приложении собраны нерешенные задачи, различные по трудности и значению[9].

B.1. Системы условных вероятностей (глава 2)

Насколько общим является представление системы условных вероятностей $(\mu_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}})$ в виде $(\mu^{\Phi}_{(\Lambda)\xi_{L\setminus\Lambda}})$? (По этому поводу см., в частности, Салливэн [1].)[10]

B.2. Теория фазовых переходов (глава 3)

Показать, что в подходящем пространстве взаимодействий точки сосуществования $n+1$ фаз образуют многообразие размерности n? Каковы отношения инцидентности этих многообразий? Как появляется критическая точка? «Эвристическая теория» содержится в работе Рюэля [8]. [Частично отрицательные результаты имеются в работах Дэниелса и ван Энтера [1] и ван Энтера [1]].[11]

B.3. Точка зрения абстрактной теории меры (глава 4)

В замечании 4.5 гиббсовское состояние получается из другого гиббсовского состояния умножением на непрерывную функцию и переходом к пределу в слабом смысле. Существует ли вариант этого подхода в рамках

[9]Некоторые из этих задач сопровождаются комментариями автора, присланными специально для русского издания. Эти комментарии помещены в квадратные скобки. — *Прим. ред.*

[10]Первым этот вопрос исследовал М. Б. Аверинцев [1]. См. также Козлов [1], где имеются ссылки на другие работы. — *Прим. ред.*

[11]С этой проблемой связана «теория Пирогова – Синая», изложенная в книге Синая [5]. — *Прим. ред.*

абстрактной теории меры? В частности, можно ли использовать бернуллиевское свойство из теоремы 5.10?

В.4. Одна теорема Добрушина (глава 5)

Можно ли теорему Добрушина [4] об аналитичности давления для одномерных систем обобщить на перемешивающие системы?

В.5. Определение давления (глава 6)

Если τ разделяет траектории, то давление определяется с помощью предельного перехода при $a \to \infty$ (см. конец параграфа 6.7). Можно ли здесь использовать предел при $\Lambda \nearrow \infty$. Заметим, что это возможно в ситуации главы 3 (следствие 3.13).

В.6. Гипотеза Шуба об энтропии (глава 6)

Пусть f — диффеоморфизм компактного многообразия и f_* — соответствующий линейный оператор на гомологиях (с вещественными коэффициентами). Верно ли, что логарифм спектрального радиуса оператора f_* не больше топологической энтропии преобразования f? По поводу этой хорошо известной гипотезы см., например, Мэннинг [2]. [Для диффеоморфизмов класса C^∞ гипотеза Шуба была доказана Йомдином [1].]

В.7. Условие (SS3) (глава 7)

Если выполняются условия (SS1) и (SS2), то существует ли метрика d, для которой имеет место (SS3) и найдется такая константа L, что

$$d(fx,\, fy) \leqslant Ld(x,\, y), \quad d(f^{-1}x,\, f^{-1}y) \leqslant Ld(x,\, y)$$

(см. (7.12))? [Ответ на этот вопрос — положительный: Фрид [1] показал, что существует метрика d, для которой выполняется условие (SS3), а функции f, f^{-1} удовлетворяют условию Липшица; в частности, функция C из следствия 7.10(с) является гельдеровской. По поводу растягивающих отображений сошлемся на статью Ковена и Редди [1].]

В.8. Гиббсовские состояния на пространствах Смейла (глава 7)

Всегда ли гиббсовское состояние на пространстве Смейла (см. § 7.18) является равновесным? [В работе Найдна [1] получен положительный ответ на этот вопрос.]

В.9. Когомологическая интерпретация (глава 7)

Можно ли дать когомологическую интерпретацию формулы Мэннинга (предложение 7.22) и рациональной дзета-функции $\zeta(z)$? (Об этой проблеме см., в частности, Френкс [1].)

В.10. Потоки Смейла (глава 7 и приложение С)

Существует ли вариант теории пространств Смейла для потоков? (По этому поводу см., например, Боуэн [4].) См. также приложение С.4. [См. Полликотт [1].]

Приложение C
Потоки

Поток на множестве $\boldsymbol{\Omega}$ — это семейство $(\boldsymbol{\tau}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ отображений $\boldsymbol{\tau}^t\colon \boldsymbol{\Omega} \mapsto \boldsymbol{\Omega}$, для которого $\boldsymbol{\tau}^{t+t'} = \boldsymbol{\tau}^t \circ \boldsymbol{\tau}^{t'}$ и $\boldsymbol{\tau}^0$ — тождественное отображение. Существует несколько неэквивалентных способов, позволяющих заменить в термодинамическом формализме $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$. Здесь мы не будем рассматривать обычную статистическую механику непрерывных одномерных систем (см. Рюэль [3]), а опишем формализм, пригодный для изучения потоков на дифференцируемых многообразиях.

C.1. Термодинамический формализм на метризуемом компактном множестве

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ — метризуемый компакт и $(\boldsymbol{\tau}^t)$ — непрерывный поток, т. е. $(x, t) \mapsto \boldsymbol{\tau}^t x$ — непрерывное отображение. Множество $\boldsymbol{I}$, состоящее из $\boldsymbol{\tau}$-инвариантных вероятностных мер на $\boldsymbol{\Omega}$, выпукло и компактно в слабой топологии. Если $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{I}$, то

$$h_{\boldsymbol{\tau}^t}(\boldsymbol{\sigma}) = |t| h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}),$$

где $h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma})$ называется (*средней*) *энтропией* меры $\boldsymbol{\sigma}$ относительно потока $(\boldsymbol{\tau}^t)$ (см. Абрамов [1]).[12]

Пусть d — метрика на $\boldsymbol{\Omega}$, совместимая с заданной топологией. Множество $S \subset \boldsymbol{\Omega}$ называется (T, ε)-*разделенным* (где $T > 0$, $\varepsilon > 0$), если для любой пары не совпадающих $x, y \in S$ найдется такое $t \in [0, T]$, что $d(\boldsymbol{\tau}^t x, \boldsymbol{\tau}^t y) > \varepsilon$. Для $A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$ положим

$$Z_T(A, \varepsilon) = \sup\Big\{\sum_{x\in S} \exp \int\limits_0^T A(\boldsymbol{\tau}^t x)\, dt\colon S \text{ является } (T, \varepsilon)\text{-разделенным}\Big\},$$

$$P(A) = P_{\boldsymbol{\tau}}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log Z_T(A, \varepsilon).$$

[12] Из последнего равенства видно, что $h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}) = h_{\boldsymbol{\tau}^1}(\boldsymbol{\sigma})$ — *Прим. ред.*

Так определенное $P(A)$ не зависит от выбора метрики на $\mathbf{\Omega}$. Если $A^{\mathbf{1}}(x)\int\limits_0^1 A(\boldsymbol{\tau}^t x)\,dt$, то $P(A) = P_{\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{1}}}(A^{\mathbf{1}})$. *Давление* P удовлетворяет *вариационному принципу*

$$P_{\boldsymbol{\tau}}(A) = \max_{\boldsymbol{\sigma}\in \boldsymbol{I}}[h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A)]$$

(см. Боуэн и Рюэль [1]). Мера $\boldsymbol{\sigma}$, максимизирующая $h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}(A)$, называется *равновесным состоянием* для A.

C.2. Специальные потоки

Пусть Ω — компактное метризуемое пространство, $\tau\colon \Omega \mapsto \Omega$ — гомеоморфизм и $\psi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция. Отождествив в множестве

$$U = \{(\xi,\, u) \in \Omega\times\mathbb{R}\colon 0 \leqslant u \leqslant \psi(\xi)\}$$

точки $(\xi,\, \psi(\xi))$ и $(\tau\xi,\, 0)$, мы получим компактное метризуемое пространство $\mathbf{\Omega}$. На $\mathbf{\Omega}$ можно определить непрерывный поток $(\boldsymbol{\tau}^t)$, для которого

$$\boldsymbol{\tau}^t(\xi,\, u) = (\xi,\, u + t),\ \text{если } 0 \leqslant u + t \leqslant \psi(\xi).$$

Пусть σ принадлежит множеству I вероятностных мер на Ω, инвариантных относительно τ. Если m — мера Лебега на $\mathbb{R}$, то равенство $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\times m/(\sigma\times m)(U)$ задает на $\mathbf{\Omega}$ некоторую меру $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{I}$.[13] Отображение $\sigma\mapsto\boldsymbol{\sigma}$ определяет биекцию $I\to\boldsymbol{I}$, и по теореме Абрамова [1]

$$h_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{h_\tau(\sigma)}{\sigma(\psi)}.$$

C.3. Специальный поток над пространством Смейла

Пользуясь введенными выше обозначениями, предположим, что Ω — пространство Смейла, τ — топологическое перемешивание и $\psi\mathscr{C}^\alpha(\Omega)$.

[13] Чтобы определить меру $\boldsymbol{\sigma}$, достаточно при любом $T \geqslant \max\psi$ задать на $\Omega\times[0,\, T]$ прямое произведение $\boldsymbol{\sigma}' = \sigma\times m$ и взять нормированное ограничение меры $\boldsymbol{\sigma}'$ на U. Легко проверить, что результат не будет зависеть от T. — *Прим. ред.*

Пусть, далее, $A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{\Omega})$, $\varphi(\xi) = \int\limits_0^{\psi(\xi)} A(\xi, u)\, du$ и $\varphi \in \mathscr{C}^\alpha(\Omega)$. Тогда *для A существует единственное равновесное состояние $\boldsymbol{\sigma}$ на $\boldsymbol{\Omega}$, причем $\boldsymbol{\sigma}$ соответствует единственному равновесному состоянию $\sigma \in I$ на Ω, отвечающему функции $\varphi - P(A)\cdot\psi$* (Боуэн и Рюэль [1]). Если $(\boldsymbol{\tau}^t)$ — топологическое перемешивание, то $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}^t)$ — поток Бернулли (Бунимович [1], Ратнер [2]).

Положим

$$\zeta_A(s) = \prod_\gamma \Big[1 - \exp \int\limits_0^{\lambda(\gamma)} (A(\boldsymbol{\tau}^t x_\gamma) - s)\, dt\Big]^{-1},$$

где произведение берется по всем периодическим орбитам γ потока $(\boldsymbol{\tau}^t)$, $\lambda(\gamma)$ — примитивный период орбиты γ, а x_γ — произвольная точка этой орбиты. Функцию $\zeta_A(s)$ можно переписать в виде

$$\zeta_A(s) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\xi \in \operatorname{Fix} \tau^m} \exp \sum_{k=0}^{m-1} [\varphi(\tau^k \xi) - s\psi(\tau^k \xi)].$$

Она *аналитична при $\operatorname{Re} s > P(A)$ и имеет простой полюс в точке $P(A)$* (Рюэль [6]).

C.4. Проблемы

Предположим, что $(\boldsymbol{\tau}^t)$ — топологическое перемешивание.

(a) Пусть $B_1, B_2 \in \mathscr{C}^\alpha(U)$ и $\operatorname{supp} B_1, B_2 \subset \{(\xi, u) \colon 0 < u < \psi(\xi)\}$. Верно ли, что разность $\boldsymbol{\sigma}(B_1 \cdot (B_2 \circ \boldsymbol{\tau}^t)) - \boldsymbol{\sigma}(B_1)\boldsymbol{\sigma}(B_2)$ при $|t| \to \infty$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью?

(b) Существует ли такое $r > 0$, что функция ζ_A мероморфна при $\operatorname{Re} s > P(A) - r$ и имеет единственный полюс в точке $P(A)$?

[Ответы на оба эти вопроса — отрицательные (см. Рюэль [10]). В то же время, как показали Пэрри и Полликотт [1], функция ζ_0 голоморфна в некоторой окрестности прямой $\operatorname{Re} s = P(0)$, за исключением точки $P(0)$, где она имеет полюс. Таким образом, у теоремы о простых числах существует аналог, касающийся периодических орбит A-потоков.]

Литература

L. M. Abramov

[1] «On the entropy of a flow», *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **128**, 873–875 (1959). English translation, *Amer. Math Soc. Transl., Ser.* 2, **49**, 167–170 (1966).

R. L. Adier, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew

[1] «Topological entropy», *Trans. Amer. Math. Soc.* **114**, 309–319 (1965).

D. V. Anosov

[1] «Geodesic flows on a compact Riemann manifold of negative curvature», *Trudy Mat. Inst. Steklov* **90** (1967). English translation, *Proc. Steklov Math. Inst.* **90** (1967).

H. Araki

[1] «Gibbs states of a one-dimensional quantum lattice», *Commun. Math. Phys.* **14**, 120–157 (1969).

R. Berger

[1] «The undecidability of the domino problem», *Mem. Amer. Math. Soc.*, №66, 1966.

P. Billingsley

[1] *Ergodic Theory and Information*. John Wiley, New York, 1965.

N. Bourbaki

[1] *Eléments de mathématique. Intégration. Chapitres* 1, 2, 3, *et* 4, 2e éd. Hermann, Paris, 1965.

[2] *Eléments de mathématique. Intégration. Chapitre* 5, 2e éd. Hermann, Paris, 1967.

R. Bowen

[1] «Markov partitions for axiom A diffeomorphisms», *Amer. J. Math.* **92**, 725–747 (1970).

[2] «Markov partitions and minimal sets for axiom A diffeomorphisms», *Amer. J. Math.* **92**, 907–918 (1970).

[3] «Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces», *Trans. Amer. Math. Soc.* **153**, 401–414 (1971).

[4] «Symbolic dynamics for hyperbolic flows», *Amer. J. Math.* **95**, 429–459 (1973).

[5] «Some systems with unique equilibrium states», *Math. Systems Theory* **8**, 193–202 (1974).

[6] *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Math. №470. Springer, Berlin, 1975.

R. Bowen and D. Ruelle
[1] «The ergodic theory of axiom A flows», *Inventiones Math.* **29**, 181–202 (1975).

L. A. Bunimovič
[1] «Imbedding of Bernoulli shifts in certain special flows», *Uspehi Mat. Nauk* **28**, №3, 171–172 (1973).

D. Capocaccia
[1] «A definition of Gibbs state for a compact set with Z^ν action», *Commun. Math. Phys.* **48**, 85–88 (1976).

G. Choquet and P.-A. Meyer
[1] «Existence et unicité des représentations intégrates dans les convexes compacts quelconques», *Ann. Inst. Fourier* **13**, 139–154 (1963).

K. L. Chung
[1] *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 1967.

J. P. Conze
[1] «Entropie d'un groupe abélien de transformations», *Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **25**, 11–30 (1972).

M. Denker
[1] «Remarques sur la pression pour les transformations continues», *C. R. Acad. Sci. Paris* **279**, A967–A970 (1974).

M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund
[1] *Ergodic Theory on Compact Spaces*. Lecture Notes in Mathematics №527. Springer, Berlin, 1976.

E. I. Dinaburg

[1] «The relation between topological entropy and metric entropy», *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **190**, №1, 19–22 (1970). English translation. *Soviet Math. Dok.* **11**, 13–16 (1970).

R. L. Dobrushin

[1] «The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity», *Teorija Verojatn. i Ee Prim.* **13**, 201–229 (1968). English translation. *Theory Prob. Applications* **13**, 197–224 (1968).

[2] «Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions», *Funkts. Analiz i Ego Pril.* **2**, №4, 31–43 (1968). English translation. *Functional Anal. Appl.* **2**, 292–301 (1968).

[3] «The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions», *Funkts. Analiz i Ego Pril.* **2**, №4, 44–57 (1968). English translation, *Functional Anal. Appl.* **2**, 302–312 (1968).

[4] «Analyticity of correlation functions in one-dimensional classical systems with slowly decreasing potentials», *Commun. Math. Phys.* **32**, 269–289 (1973).

F. J. Dyson

[1] «Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet», *Commun. Math. Phys.* **12**, 91–107 (1969).

S. A. Elsanousi

[1] «A variational principle for the pressure of a continuous Z^2-action on a compact metric space», *Amer. J. Math.* **99**, 77–106 (1977).

M. E. Fisher

[1] «The theory of condensation and the critical point», *Physics* **3**, 255–283 (1967).

J. M. Franks

[1] «A reduced zeta function for diffeomorphisms», *Amer. J. Math.* **100**, №2 (1978).

H. Furstenberg and H. Kesten

[1] «Products of random matrices», *Ann. Math. Statist.* **31**, 457–469 (1960).

G. Gallavotti

[1] «Ising model and Bernoulli schemes in one dimension», *Commun. Math. Phys.* **32**, 183–190 (1973).

[2] «Funzioni zeta ed insiemi basilari», *Accad. Lincei. Rend. Sc. fis. mat. e nat.* **61**, 309–317 (1976).

G. Gallavotti and S. Miracle-Sole

[1] «Statistical mechanics of lattice systems», *Commun. Math. Phys.* **5**, 317–323 (1967).

F. R. Gantmaher

[1] *The Theory of Matrices*. Nauka, Moscow, 1967. English translation, Chelsea, New York, 1964.

H.-O. Georgii

[1] *Phasenübergang* 1. *Art bei Gittergasmodellen*. Lecture Notes in Physics №16. Springer, Berlin, 1972.

[2] «Two remarks on extremal equilibrium states», *Commun. Math. Phys.* **32**, 107–118 (1973).

T. N. T. Goodman

[1] «Relating topological entropy and measure entropy», *Bull. London Math. Soc.* **3**, 176–180 (1971).

L. W. Goodwyn

[1] «Topological entropy bounds measure-theoretic entropy», *Proc. Amer. Math. Soc.* **23**, 679–688 (1969).

R. B. Griffiths and D. Ruelle

[1] «Strict convexity («continuity») of the pressure in lattice systems», *Commun. Math. Phys.* **23**, 169–175 (1971).

B. M. Gurevič [1] «Topological entropy of enumerable Markov chains», *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **187**, №4, 754–757 (1969). English translation. *Soviet Math. Dokl.* **10**, 911–915 (1969).

B. M. Gurevič and V. I. Oseledec

[1] «Gibbs distributions and dissipativeness of U-diffeomorphisms», *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **209**, №5, 1021–1023 (1973). English translation. *Soviet Math. Dokl.* **14**, 570–573 (1973).

H. Halmos

[1] *Measure Theory*. D. Van Nostrand, Princeton, 1950.

M. W. Hirsch

[1] «Expanding maps and transformation groups», in *Global Analysis* Proc. Symp. Pure Math. **14**, 1970, pp. 125–131.

R. B. Israel

[1] «Existence of phase transitions for long-range interactions», *Commun. Math. Phys.* **43**, 59–68 (1975).

[2] *Tangents to the Pressure as Invariant Equilibrium States in Statistical Mechanics of Lattice Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

M. Keane

[1] «Sur les mesures invariantes d'un recouvrement regulier», *C. R. Acad. Sci. Paris* **272**, A585–A587 (1971).

G. Köthe

[1] *Topologische lineare Räume* I. Springer, Berlin, 1960.

O. E. Lanford

[1] «Selected topics in functional analysis», in *Mécanique statistique et théorie quantique des champs. Les Houches* 1970. (C. De Witt, and R. Stora, eds.), pp.-09–214. Gordon and Breach, New York, 1971.

[2] «Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics», in *Statistical mechanics and mathematical problems*, Lecture Notes in Physics №20, pp. 1–113. Springer, Berlin, 1973.

O. E. Lanford and D. W. Robinson

[1] «Statistical mechanics of quantum spin systems III», *Commun. Math. Phys.* **9**, 327–338 (1968).

O. E. Lanford and D. Ruelle

[1] «Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics», *Commun. Math. Phys.* **13**, 194–215 (1969).

A. Lasota and J. A. Yorke

[1] «On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations», *Trans. Amer. Math. Soc.* **186**, 481–488 (1973).

F. Ledrappier

[1] «Mesures d'équilibre sur un réseau», *Commun. Math. Phys.* **33**, 119–128 (1973).

[2] «Principe variationnel et systèmes dynamiques symboliques», *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **30**, 185–202 (1974).

F. Ledrappier and P. Walters

[1] «A relativised variational principle for continuous transformations», *J. London Math. Soc.* **16**, 568–576 (1977).

A. N. Livšic

[1] «Homology properties of Y-systems», *Mat. Zametki* **10**, №5, 555–564 (1971). English translation. *Math. Notes* **10**, 758–763 (1971).

[2] «Cohomolgy of dynamical systems», *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **36**, №6, 1296–1320 (1972). English translation. *Math. USSR Izvestija* **6**, 1276–1301 (1972).

A. Manning

[1] «Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions», *Bull. London Math. Soc.* **3**, 215–220 (1971).

[2] «Topological entropy and the first homology group», in *Dynamical Systems. Warwick* 1974, Lecture Notes in Mathematics №468, pp. 185–190. Springer, Berlin, 1975.

S. Mazur [1] «Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen», *Studia Math.* **4**, 70–84 (1933).

M. Misiurewicz

[1] «A short proof of the variational Principle for a Z_+^N action on a compact space», *Astérisque* **40**, 147–157 (1976).

D. S. Ornstein

[1] *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems*. Yale Mathematical Monographs **5**. Yale University Press, New Haven, 1974.

V. I. Oseledec

[1] «A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems», *Trudy Moscov. Mat. Obšč.* **19**, 179–210 (1968). English translation, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197–231 (1968).

W. Parry

[1] «Intrinsic Markov chains», *Trans. Amer. Math. Soc.* **112**, 55–66 (1964).

[2] «Topological Markov chains and suspensions», Warwick preprint, 1974.

R. Phelps

[1] *Lectures on Choquet's Theorem*. Van Nostrand Mathematical Studies №7. D. Van Nostrand, Princeton, 1966.

C. J. Preston

[1] *Gibbs States on Countable Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics №68. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[2] *Random Fields*. Lecture Notes in Mathematics №534. Springer, Berlin, 1976.

M. Ratner

[1] «The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature», *Israel J. Math.* **16**, 181–197 (1973).

[2] «Anosov flows with Gibbs measures are also Bernoullian», *Israel J. Math.* **17**, 380–391 (1974).

R. M. Robinson

[1] «Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane», *Inventiones Math.* **12**, 177–209 (1971).

D. W. Robinson and D. Ruelle

[1] «Mean entropy of states in classical statistical mechanics». *Common. Math. Phys.* **5**, 288–300 (1967).

V. A. Rohlin

[1] «On the fundamental ideas of measure theory», *Mat. Sbornik* (*N. S.*) **25**, 107–150 (1949). English translation, *Amer. Math. Soc. Transl.*, Ser. 1, **10**, 1–54 (1952).

D. Ruelle

[1] «A variational formulation of equilibrium statistical mechanics and the Gibbs phase rule», *Commun. Math. Phys.* **5**, 324–329 (1967).

[2] «Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas», *Commun. Math. Phys.* **9**, 267–278 (1968).

[3] *Statistical Mechanics. Rigorous Results*. Benjamin, New York, 1969.

[4] «Statistical mechanics on a compact set with Z^ν-action satisfying expansiveness and specification», *Bull. Amer. Math. Soc.* **78**, 988–991 (1972); *Trans. Amer. Math. Soc.* **185**, 237–251 (1973).

[5] «A measure associated with axiom A attractors», *Amer. J. Math.* **98**, 619–654 (1976).

[6] «Generalized zeta-functions for axiom A basic sets», *Bull. Amer. Math. Soc.* **82**, 153–156 (1976).

[7] «Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows», *Inventiones Math.* **34**, 231–242 (1976).

[8] «A heuristic theory of phase transitions», *Commun. Math. Phys.*, **53**, 195–208 (1977).

D. Ruelle and D. Sullivan

[1] «Currents, flows and diffeomorphisms», Topology **14**, 319–327 (1975).

P. Shields

[1] *The Theory of Bernoulli Shifts*. University of Chicago Press, Chicago, 1973.

M. Shub

[1] «Endomorphisms of compact differentiable manifolds», *Amer. J. Math.* **91**, 175–199 (1969).

B. Simon

[1] *The* $P(\varphi)_2$ *Euclidean* (*Quantum*) *Field Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1974.

Ia. G. Sinai

[1] «Markov partitions and C-diffeomorphisms», *Funkts. Analiz i Ego Pril.* **2**, №1, 64–89 (1968). English translation. *Functional Anal. Appl.* **2**, 61–82 (1968).

[2] «Construction of Markov partitions», *Funkts. Analiz i Ego Pril.* **2**, №3, 70–80 (1968). English translation, *Functional Anal. Appl.* **2**, 245–253 (1968).

[3] «Mesures invariantes des Y-systemes», in *Actes, Congrés intern. Math., Nice*, 1970, Vol. 2 pp. 929–940. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[4] «Gibbsian measures in ergodic theory», *Uspehi Mat. Nauk* **27**, №4, 21–64 (1972). English translation, *Russian Math. Surveys* **27**, №4, 21–69 (1972).

S. Smale

[1] «Differentiable dynamical systems», *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817 (1967).

M. Smorodinsky

[1] *Ergodic Theory, Entropy*. Lecture Notes in Mathematics №214. Springer, Berlin, 1971.

W. G. Sullivan

[1] «Potentials for almost Markovian random fields», *Commun. Math. Phys.* **33**, 61–74 (1973).

G. Velo and A. S. Wightman (eds.)

[1] *Constructive Quantum Field Theory*. Lecture Notes in Physics №25. Springer, Berlin, 1973.

P. Walters

[1] «A variational principle for the pressure of continuous transformations», *Amer. J. Math.* **97**, 937–971 (1976).

[2] *Ergodic Theory. Introductory Lectures*. Lecture Notes in Mathematics №458. Springer, Berlin, 1975.

[3] «A generalized Ruelle Perron – Frobenius theorem and some applications», *Asterisque* **40**, 183–192 (1976).

[4] «Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances», *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

R. F. Williams

[1] «Classification of subshifts of finite type», *Ann. of Math.* **98**, 120–153 (1973). Errata, *Ann. of Math.* **99**, 380–381 (1974).

Литература к главам 8 и 9

[1] M. Artin and B. Mazur, «On periodic points», *Ann. of Math.* (2) **81** (1965), 82–99.

[2] M. Atiyah and R. Bott, «A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes», *Ann. of Math.* **86** (1967), 374–407; **88** (1968), 451–491.

[3] V. Baladi, «Dynamical zeta functions», *Real and Complex Dynamical Systems* (B. Branner and P. Hjorth, eds.), Kluwer Academic Publishers (to be published).

[4] V. Baladi and G. Keller, «Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations», *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 459–477.

[5] V. Baladi and D. Ruelle, «An extension of the theorem of Milnor and Thurston on zeta functions of interval maps», *Ergodic Theory Dynamical Systems* (to appear).

[6] — , *Some properties of zeta functions associated with maps in one dimension* (in preparation).

[7] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley, New York, 1965.

[8] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[9] R. Bowen and O. E. Lanford, «Zeta functions of restrictions of the shift transformation», *Global Analysis*, Proc. Symp. Pure Math. vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1975), pp. 43–49.

[10] G. Choquet and P.-A. Meyer, «Existence et unicité des représentations intégrates dans les convexes compacts quelconques», *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **13** (1963), 139–154.

[11] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Math. vol. 527, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[12] D. Fried, «The zeta functions of Ruelle and Selberg I», *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **19** (1986), 491–517.

[13] — , «Rationality for isolated expansive sets», *Adv. in Math.* **65** (1987), 35–38.

[14] — , *The flat-trace asymptotics of a uniform system of contractions* (Preprint).

[15] A. Grothendieck, «Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires», *Mem. Amer. Math. Soc.* vol. 16, Providence, R. I., 1955.

[16] — , «La théorie de Fredholm», *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 319–384.

[17] J. Guckenheimer, «Axiom A + no cycles $\Rightarrow \zeta_f(t)$ rational», *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 592–594.

[18] V. Guillemin and Sh. Sternberg, «Geometric asymptotics», *Math. Surveys* vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

[19] N. Haydn, «Meromorphic extension of the zeta function for Axiom A flows», *Ergodic Theory Dynamical Systems* **10** (1990), 347–360.

[20] F. Hofbauer, «Piecewise invertible dynamical systems», *Probab. Theor. Relat. Fields* **72** (1986), 359–386.

[21] F. Hofbauer and G. Keller, «Zeta-functions and transfer-operators for piecewise linear transformations», *J. Reine Angew. Math.* **352** (1984), 100–113.

[22] G. Keller and T. Nowicki, «Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet–Eckmann maps», *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), 31–69.

[23] G. Levin, M. Sodin and P. Yuditskii, «A Ruelle operator for a real Julia set», *Comm. Math. Phys.* **141** (1991), 119–131.

[24] — , «Ruelle operators with rational weights for Julia sets», *J. Analyse Math.* (to appear).

[25] A. Manning, «Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions», *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 215–220.

[26] M. Martens, *Interval dynamics*, Thesis, Delft, 1990.

[27] D. Mayer, «Continued fractions and related transformations», *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces* (T. Bedford, M. Keane, C. Series, eds.) Oxford University Press, Oxford, 1991.

[28] W. de Melo, «Lectures on one-dimensional dynamics», 17*e Coloquio Brasileiro de Matematica*, Rio de Janeiro.

[29] J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics vol. 1342, Springer, Berlin, 1988, pp. 465–563.

[30] Nihon Sugakkai, ed., *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1977.

[31] R. D. Nussbaum, «The radius of the essential spectrum», *Duke Math. J.* **37** (1970), 473–478.

[32] W. Parry and M. Pollicott, «An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows», *Ann. of Math.* (2) **118** (1983), 573–591.

[33] — , «Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics», Societe Mathematique de France (*Asterisque* vol. 187–188), Paris, 1990.

[34] C. J. Preston, *Iterates of maps on an interval*, Lecture Notes in Mathematics vol. 999, Springer, Berlin, 1983.

[35] D. Ruelle, «Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification», Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 988–991; *Trans. AMS* **185** (1973), 237–251.

[36] — , «Zeta functions and statistical mechanics», *Asterisque* **40** (1976), 167–176.

[37] — , «Generalized zeta-functions for axiom A basic sets», *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), 153–156.

[38] — , «Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows», *Invent. Math.* **34** (1976), 231–242.

[39] — , *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading MA, 1978.

[40] — , «The thermodynamic formalism for expanding maps», *Comm. Math. Phys.* **125** (1989), 239–262.

[41] — , «An extension of the theory of Fredholm determinants», *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **72** (1990), 175–193.

[42] — , «Spectral properties of a class of operators associated with maps in one dimension», *Ergodic Theory Dynamical Systems* **11** (1991), 757–767.

[43] — , «Analytic completion for dynamical zeta functions», *Helv. Phys. Acta* **66** (1993), 181–191.

[44] — , *Functional equation for dynamical zeta functions of Milnor–Thurston type* (to appear).

[45] H. H. Rugh, «The correlation spectrum for hyperbolic analytic maps», *Nonlinearity* **5** (1992), 1237–1263.

[46] S. Smale, «Differentiable dynamical systems», *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.

[47] F. Tangerman, «Meromorphic continuation of Ruelle zeta functions», *Boston University thesis*, 1986 (unpublished).

[48] P. Walters, *Ergodic Theory. Introductory Lectures*, Lecture Notes in Math. vol. 458, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[49] — , «A variational principle for the pressure of continuous transformations», *Amer. J. Math.* **97** (1976), 937–971.

Давид Рюэль

Термодинамический формализм

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 15.03.02. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,74. Уч. изд. л. 16,85.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.